О ГЛАДКОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССАХ СОБОЛЕВА

Касимов Ш.Г.[1], **Ханова Н.М.**[2],

[1] Национальный Университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент
[2] Национальный Университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент
[1]shokiraka@mail.ru

Пусть в $n-$ мерной ограниченной области G задано эллиптическое уравнение

$$Lu \equiv -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}) + a(x)u = f(x) \tag{1}$$

коэффициенты которого вещественнозначны и удовлетворяют условиям $a(x) \in C(\overline{G})$, $a(x) \geq 0$, $k(x) \in C^1(\overline{G})$, $k(x) \geq k_0 > 0$ для всех $x \in G$. Функция $u(x)$ и свободный член $f(x)$ уравнения, вообще говоря, могут быть комплекснозначными.

Функция $u(x)$ из $C^2(G) \cap C(\overline{G})$ называется классическим решением первой краевой задачи или задачи Дирихле для уравнения (1), если в G она удовлетворяет уравнению (1), а на границе ∂G условию

$$u|\partial G = \varphi(x) \tag{2}$$

с заданной функцией $\varphi(x)$.

Пусть функция $u(x)$ является классическим решением в области G первой краевой задачи (1), (2). Тогда для произвольную финитную функции $v(x) \in \dot{C}^1(G)$ справедлива следующая равенства

$$\int_G (k\nabla u \nabla \overline{v} + auv)dx = \int_G f\overline{v}dx. \tag{3}$$

Функция $u \in H^1(G)$ называется обобщенным решением задачи (1), (2) при $f \in L_2(G)$, если она удовлетворяет тождеству (3) для всех $v \in \dot{H}^1(G)$ и граничному условию (2). В граничном условии (2) равенство понимается как равенство элементов из $L_2(\partial G)$, $u|_{\partial G}$ - след функции u.

Справедливо следующая.

Теорема. *Пусть $u(x)$ - обобщенное решение первой краевой задачи (1), (2). Если $k(x) \in C^{l+1}(\overline{G}), a(x) \in C^l(\overline{G})$, $\varphi \in H^{l+\frac{3}{2}}(\partial G)$ и $f(x) \in L_2(G) \cap H^l_{loc}(G)$ при некотором $l \geq \frac{1}{2}$, то $u(x) \in H^{l+2}_{loc}(G)$. В частности, любая обобщенная собственная функция первой краевой задачи для оператора L принадлежит $H^{l+2}_{loc}(G)$.*

Совершенно аналогичные результаты имеют место и для обобщенных решений второй и третьей краевых задач для уравнения (1) и соответствующих собственных функций оператора L.

Доказательство теоремы проводится с применением теоремы о мультипликаторах Фурье в классах Соболева.

Литература

1. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. Москва: Наука, 1983 год. 424 стр.

2. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Москва: Мир, 1965 год. 380 стр.

3. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. Москва: Мир, 1985 год. 472 стр.