ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Алоев Р. Д., Худойберганов М. У., Мингбаева А., Бомуродов Ш.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
aloev@mail.ru

Рассматриваются гиперболические системы линейных законов сохранения в римано- вых инвариантах:

$$\mathbf{R}_t + \Lambda \mathbf{R}_x = 0, \qquad t \in [0,+\infty), \quad x \in [0, L], \qquad (1)$$

где $\mathbf{R} : [0,+\infty) \times [0, L] \to \mathbb{R}^n$, Λ - диагональная матрица и определяется следующим образом

$$(2) \qquad \Lambda \overset{\Delta}{=} \begin{pmatrix} \Lambda^+ & 0 \\ 0 & -\Lambda^- \end{pmatrix} \quad \text{с} \quad \begin{cases} \Lambda^+ = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}, \\ \Lambda^- = \mathrm{diag}\{\lambda_{m+1}, \cdots, \lambda_n\}, \end{cases} \qquad \lambda_i > 0 \ \forall i. \quad (2)$$

Введём в рассмотрение следующие обозначения $\mathbf{R}^+ = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix}$ и

$\mathbf{R}^- = \begin{pmatrix} R_{m+1} \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$ такие что $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^+ \\ \mathbf{R}^- \end{pmatrix}$,

Тогда систему (1) можно переписать в виде

$$\partial_e \begin{pmatrix} \mathbf{R}^+ \\ \mathbf{R}^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda^+ & 0 \\ 0 & \Lambda^- \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \mathbf{R}^+ \\ \mathbf{R}^- \end{pmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Наша задача заключается в исследовании устойчивости разностных схем для этой системы с линейными граничными условиями в канонической форме

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}^+(t,0) \\ \mathbf{R}^-(t,L) \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} \mathbf{R}^+(t,L) \\ \mathbf{R}^-(t,0) \end{pmatrix} \quad \text{с} \quad \mathbf{K} \overset{\Delta}{=} \begin{pmatrix} K_{00} & K_{01} \\ K_{10} & K_{11} \end{pmatrix}, \quad t \in [0,+\infty), \qquad (4)$$

и с начальным условием

$$\mathbf{R}(0, x) = \mathbf{R}_0(x), \quad x \in (0, L). \qquad (5)$$

Корректность смешанной задачи (1-5), а также её устойчивости доказаны в работах [1,2|.

В настоящее время все больше применяют методы математического моделирования для описания различных реальных физических явлений.

Будем понимать под математическим моделированием следующую цепочку отображений: физическая модель явления — математическая модель явления — вычислительная модель явления — программа, ЭВМ.

На наш взгляд, правильное применение методов математического моделирования, невозможно без детального анализа соотношения между математической и вычислительной моделями явлений.

Почти все физические задач трехмерные и очень затруднительны в решении из-за их нелинейности. По существу к решению каждой задачи подходят индивидуально, круг ее решений сужают и упрощают или делают более частный подход к решению конкретной) зычачи.

В настоящей работе нами исследуются устойчивость ряда классических и современных разностных схем, которые применяются для численного решения смешанной задачи (1-5).

Следует сказать, что в теории дифференциальных уравнений уже давно существует подход одновременного изучений исходной математической задачи и ее конечно- разностного аналога. Здесь уместно вспомнить основополагающую работу Курант Р.. Фридрихе К., Леви Г. О разностных уравнениях математической физики //Успехи математических наук., а также монографии Годунов С.К. Уравнения математической физики, Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики, Блохин А.М. Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики, в которых это подход находит свое воплощение. В основу конструирования и исследования вычислительных моделей мы положим требование адекватности вычислительной модели исходной дифференциальной задаче. Под адекватностью мы будем понимать следующее: вычислительная модель строится так, чтобы с ее помощью можно было бы доказать теорему существования решения исходной дифференциальной задачи. Последнее обстоятельство представляется чрезвычайно важным фактом, поскольку при численных расчетах мы должны быть уверены в том, что приближенное решение действительно стремится в пределе к решению исходной дифференциальной задачи.

Литература

1. **Bastin G., Coron J-M**. Stability and Boundary Stabilization of 1-D Hyperbolic Systems. Springer International Publishing Switzerland, 2016, 284 pp.
2. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики. М.:Наука, 1971, 416 с.