

Параметрик статистик баҳолашдаги рекуррент усуллар

Тақсимотлар номаълум параметрларини баҳолаш математик статистиканинг асосий масаласидир. Параметрларни баҳолашнинг турли усуллари мавжуд бўлиб, улардан ҳақиқатга ўхшашлик усули кенг қўлланилади, чунки бу усулда топилган баҳолар эффективлик хоссаларига эгадир. Баъзи ҳолларда баҳолар аниқ ҳисобланмайди ва уларни топиш учун стохастик аппроксимация, яъни рекуррент усулларни қўллаш мақсадга мувофиқ бўлади. Рекуррент усулларга асосан, баҳолар кетма-кет яқинлашиши орқали аниқланади: $(n+1)$ - қадамда баҳони ҳисоблаш учун унинг n -қадамдаги қийматига асосланилади.

Фараз қилайлик, Θ параметрик фазода номаълум θ параметрнинг асл қиймати θ_0 етган бўлсин ($\theta_0 \in \Theta$). Агар кузатилаётган ξ тасодикий миқдорнинг умумлашган зичлик функцияси $f(x; \theta)$ номаълум θ параметр аниқлигида берилган бўлса, уни n та боғлиқ бўлмаган тажрибаларда кузатиш натижасида олинган $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ танланма асосида куриладиган рекуррент формуланинг $(n+1)$ - қадамдаги яқинлашиши кетма-кетлиги умумий ҳади

$$\theta_{n+1} = \varphi(n, \theta_n, X_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

кўринишда бўлиб, бу ерда $\theta_0 - Const$, X_{n+1} эса $(n+1)$ -кузатилма ва φ бирор ҳисобланиши қийин бўлмаган функциядир (1) формула рекуррент формуладир. У орқали аниқланадиган $\{\theta_n, n \geq 1\}$ кетма-кетлик рекуррент баҳолар кетма-кетлиги деб аталади. Бундай формулага мисол сифатида куйидаги Фишер формуласини келтирамиз:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{(n+1)I(\theta_n)} \cdot \frac{\partial \log L_n(X^{(n)}; \theta_n)}{\partial \theta}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Бу ерда $L_n(x^{(n)}; \theta) = f(x_1; \theta) \dots f(x_n; \theta)$ хақиқатга ўхшашлик функцияси ва $I(\theta)$ -Фишер информацияси:

$$I(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 f(x; \theta) \mu(dx).$$

Магистрлик диссертациясида (§ 3.2 да) ξ тасодифий миқдор фақат бирор чекли $[a, b]$ ораликда кузатилаётган ҳолда Фишер рекурент формуласини қўлланилиши масаласи кўрилган. Ушбу масала ξ тасодифий миқдор ўрнига қўйидаги $g(x; \theta)$ зичлик функциясига эга бўлган η тасодифий миқдорнинг θ параметрни рекурент баҳолашга эквивалентдир:

$$g(x; \theta) = \begin{cases} F(a; \theta), & x = a, \\ f(x; \theta), & a < x < b, \\ 1 - F(b; \theta), & x = b, \end{cases} \quad F(x; \theta) = P_{\theta}(\xi < x).$$

Бу усулда қурилган $\{\theta_n, n \geq 1\}$ рекурент баҳолар кетма-кетлиги маълум регулярилик шартларида кучли асосли, асимптотик нормал ва асимптотик эффектив баҳо бўлиши исботланган:

$$P_{\theta} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \theta_0 \right) = 1,$$

$$\sqrt{n}(\theta_n - \theta_0) \Rightarrow N(\theta, I^{-1}(\theta_0)).$$