Ministry of higher and secondary special education
of the Republic of Uzbekistan

National University Of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

Institute of Mathematics

ACTUAL PROBLEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS

Scientific Conference
Tashkent, Uzbekistan, December 15–17, 2017

A B S T R A C T S

======== ♢ ========

Министерство высшего и среднего специального
образования Республики Узбекистан

Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека
Институт Математики

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Республиканская научная конференция
с участием зарубежных ученых
Ташкент, Узбекистан, 15–17 декабря, 2017 год

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения:
Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых
(15–17 декабря 2017 года, город Ташкент, Узбекистан)

Материалы республиканской конференции "**Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения**" с участием зарубежных ученых содержат научные доклады по следующим направлениям: Вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа, неклассические задачи теории уравнений в частных производных, обыкновенные дифференциальные уравнения и динамические системы, спектральная теория операторов и родственные проблемы анализа, некорректные и обратные задачи, методы функционального анализа и алгебры в теории дифференциальных уравнений, математические моделирование и численные методы, геометрия и топология.

Данная конференция организована на основании распоряжения №868–Ф Кабинета Министров Республики Узбекистан от 23 декабря 2016 года.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Организационный комитет

Марахимов А.	- председатель, ректор НУУз.,
Аюпов Ш.	- сопредседатель, директор Института математики при НУУз.,
Холмухамедов О.	- сопредседатель, проректор по научной работы НУУз.,
Жабборов Н.	- зам. председателя, декан мех.–мат. факультета НУУз.
Исломов Б.	- зам. председателя, профессор кафедры "ДУ и МФ"НУУз.

Члены оргкомитета

Алимов Шавкат Арифжанович (Ташкент),
Егоров Иван Егорович (г.Якутск,Россия),
Кожанов Александр Иванович (г.Новосибирск, Россия),
Мамадшо Илолов (г. Душанбе, Таджикистан),
Нахушев Адам Меремович (г. Нальчик, Россия),
Псху Арсен Владимирович (г. Нальчик, Россия),
Раджабов Нусрат Раджабович (г. Душанбе, Таджикистан),
Сабитов Камил Босирович (г.Стерлитамак, Россия),
Садуллаев Азимбай Садуллаевич, (г.Ташкент, Узбекистан),
Садыбеков Махмуд Абдысаметович (г.Алмата, Казахстан),
Тахиров Жозил Останович (г.Ташкент, Узбекистан),
Уринов Ахмаджон Кушакович (г. Фергана, Узбекистан),
Федоров Владимир Евгеныевич (г.Челябинск, Россия),
Хасанов Акназар Бекдурдиевич (г.Урганч, Узбекистан),
Шоимкулов Баходир Шаймарданович (г.Карши, Узбекистан).

Программный комитет

Салахитдинов Махмуд Салохитдинович	- председатель,(Узбекистан),
Сабитов Камил Босирович	- сопредседатель,(Россия)
Мирсобуров Мирахмат	- сопредседатель,(Узбекистан)
Зикиров Обиджон Салижанович	- сопредседатель (Узбекистан)

Члены программного комитета

Азамов А.(Узбекистан),	Алоев Р. (Узбекистан),	Арипов М.(Узбекистан),
Ашуров Р. (Узбекистан),	Бердышев А. (Казахстан),	Дурдиев Д. (Узбекистан),
Имомназаров Х.(Россия),	Касимов Ш. (Узбекистан),	Лакаев С. (Узбекистан),
Раджабова Л. (Таджикистан),	Тухтасинов М. (Узбекистан),	Фаязов К. (Узбекистан),
Шодиметов Х. (Узбекистан),	Хасанов А. (Узбекистан),	Жалилов А.(Узбекистан),
Югай Л. (Узбекистан),	Розиков У. (Узбекистан).	

Организаторы конференции:

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,

Институт математики Академии наук Республики Узбекистан.

Конференцию поддержали:

Комитет по координации развития науки и технологий при КМ РУз.,

грант ЕА–4–02

ПРОФЕССОР
ИСЛОМОВ БОЗОР ИСЛОМОВИЧ

17 декабря исполняется 60 лет со дня рождения известного ученого - математика, доктора физико - математических наук, профессора Исломова Бозора Исломовича.

Имя Б.И. Исломова признано среди математиков как автора фундаментальных исследований в области уравнений с частными производными с двумя линиями и плоскостями вырождения, теории нагруженных уравнений второго и третьего порядка, а также теории операторов интегро-дифференцирования дробного порядка, в ядрах которых содержатся функции Гаусса, Бесселя и Мейера.

Исломов родился 17 декабря 1957 года в Акдаринском районе Самаркандской области в селе Киркдархан. Там же с 1965 года по 1972 год учился в средней школе є40. Именно там его заинтересовали такие предметы как математика и физика. По инициативе учителей математики Э.Хакбердиева и Р.Мелиева с 1972 по 1975 годы он учился в физико-математическом интернате (ныне лицей им. С.Х.Сирожиддинова) в Чиланзорском районе г. Ташкента. В 1975 году он поступил на математический факультет Ташкентского государственного университета (ныне Национальный университет Узбекистана) и в 1980 году окончил его по кафедре дифференциальных уравнений.

Начиная со студенческой скамьи, Исломов Бозор Исломович активно ведет научно-исследовательскую работу. Интерес Б. Исломова к дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики появился после прослушиваний специальных курсов академика М.С. Салахиддинова. С 1979 года он начинает научные исследования, связанние с решением краевых задач нового типа, аналогичных задаче Трикоми для уравнений эллиптико- гиперболического типа с сингулярными коэффициентами.

В 1980-1981 годах Б.И. Исломов работал инженером в лаборатории "Логического программирования"в Институте Кибернетики Академии наук Республики Узбекистан.

В 1981 году начинается новый этап научной деятельности Б.И. Исломова в Институте математики Академии наук Республики Узбекистан. Он увлеченно и с огромным энтузиазмом работает в новом к тому времени направлении - исследование краевых задач для уравнений с частными производными смешанного типа с двумя линиями и различными порядками вырождения.

Благотворное влияние на формирование Б.И. Исломова как ученого в те годы оказало его пребывание в Институте математики АН РУз, где он проводил исследовательские работы под руководством академика М.С. Салахитдинова. К тому периоду он исследовал ряд новых локальных и нелокальных краевых задач для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа с одной и двумя линиями вырождения. Результаты этих исследований составили содержание кандидатской диссертации "Краевые задачи для общего линейного уравнения смешанного типа с одной и двумя линиями вырождения которое он успешно защитил в декабре 1986 г.

Стержневым направлением исследований Б.И. Исломова стало выявле-ние новых классов дифференциальных уравнений с частными производными, определение корректно поставленных локальных и нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений второго и высшего порядков, изучение влияния коэффициентов и размерности пространства на корректность краевых задач.

С 1987 года научные интересы Бозора Исломовича направлены на исследования краевых задач с условиями смещения и условиями типа Бицадзе-Самарского для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа с двумя линиями и различными порядками вырождения. В последующем Б.И. Исломовым были развиты трехмерные аналогии задачи Трикоми и Геллерстедта для уравнений смешанного типа с двумя внутренними плоскостями вырождения в бесконечных цилиндрических и призматических областях.

Большой интерес представляют исследования Бозора Исломовича по теории операторов интегро-дифференцирования дробного порядка. Он изучил различные свойства и законы композиций обобщенного интегро-дифференцирования дробного порядка с одинаковыми и различными началами, ядра которых содержат функции Гаусса, Бесселя и Мейера. Эти результаты были применены при изучении краевых задач для уравнений смешанных параболо-гиперболических и эллиптико - гиперболических типов с двумя линиями и различными порядками вырождения.

С 1991-1994 Б.И. Исломов года учился в докторантуре Института Математики им. В. И. Романовского АН РУз. В феврале 2000 года защитил докторскую диссертацию на тему "К теории уравнения смешанного типа с двумя линиями и плоскостями вырождения". В 2006 года утвержден в звании профессора.

В 1994-1997 годах в конечных и бесконечных областях для уравнений смешанного типа первого и второго рода им исследованы задачи типа Трикоми и Геллерстедта. Также он изучил аналоги задачи Трикоми для общего линейного уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с двумя внутренними линиями и кусочно-постоянными порядками вырождения. Бозор Исломович впервые исследовал однозначную разрешимость различных краевых задач для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа с сингулярными коэффициентами, как с непрерывными, так и с разрывными условиями на линии вырожденного типа.

Большой интерес представляют исследования Бозор Исломовича и его учеников в направлении теории уравнений смешанных параболо-гиперболических и эллиптико - гиперболических типов третьего порядка в двусвязных областях. Ими доказаны однозначная разрешимость аналога задачи Бицадзе - Трикоми для уравнений смешанного типа в конечной двусвязной области. Кроме того, установлен аналог принципа экстремума А.В.Бицадзе, из которого следует единственность решения поставленных задач. А также впервые ими изучены аналоги задач Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями и одинаковыми порядками вырождения в пространстве С. Л. Соболева.

В исследованиях Б.И.Исломова изучение таких уравнений как различные корректные краевые задачи для нагруженных уравнений гиперболического, параболо-гиперболического, эллиптико-гиперболического типов третьего порядка занимают особое место. Им изучен широкий класс локальных и нелокальных краевых задач для уравнений третьего порядка с параболо-гипер-болическим оператором, вырождающимся внутри области. Предложен новый метод решения краевых задач для параболо-гиперболического уравнения с вырождением типа и порядка. Еще одним из научных направлений его деятель-ности является доказательство корректности задачи с условием Бицадзе - Самарского на параллельных характеристиках для вырождающихся эллиптико-гиперболических уравнений с двумя линиями вырождения.

В последние годы в своей исследовательской деятельности Б.И.Исломов особое внимание уделяет исследованию краевых задач с условием Франкля для уравнений смешанного типа с двумя внутренними линиями и различными порядками вырождения. Им найдены различные свойства гипергеометрических функций и Мейера которые применены к исследованию краевых задач для вырождающихся уравнений смешанного типа. Многие из сформулированных и рассмотренных им задач редуцированы к функциональным и интегральным уравнениям. Следует отметить, что результаты, полученные Б. И. Исломовым при исследовании интегральных, особо интегральных уравнений со сдвигом, представляют самостоятельный интерес.

Исследования Б.И. Исломова вносят свой вклад в развитии теории дифференциальных уравнений с частными производными и теории интегро-дифференцированных операторов. В 1990 году за цикл исследований в области теории дифференциальных уравнений ему присуждена премия молодых ученных Узбекистана в области "Наука и техника".

Библиография опубликованных работ Б. И. Исломова составляет 170 наименований, среди них, 1 монография, 5 учебно-методических и 4 учебных пособия, 161 научных статей в республиканских и международных изданиях. Он принимал активное участие в работах по разработке и усовершенствованию государственных образовательных стандартов, типовых и учебных планов нового поколения по 3 направлениям бакалавриата и 4 специальностям магистратуры. Им разработано 7 стандартов и более 15 рабочих программ.

Б.И. Исломов оказывает существенное влияние в формирование многих молодых математиков Узбекистана. С ним работают более 20 учеников, из них 5 являются кандидатами физико-математических наук, каторые работают над докторскими и PHD диссертациями. Он организатор международных (2003 г., 2013 г., 2017 г. УзМУ) и республиканских (2005 г., 2006 г., ТГПУ) научных конференций различного уровня с привлечением зарубежных и республиканских ведущих уччных, а также держит научные связи с институтами и университетами Республики Узбекистан и СНГ.

Он внес значительный вклад в развитие средней школы, укрепление ее кадрового потенциала, работая на посту декана физико-математического факультета ТГПУ им. Низами (2005-2008 гг.).

Б.И. Исломов с 1990 года читает лекции в университетах и институтах в нашей республике.

Он был председателем Совета молодых ученых в институте Математики Академии наук Республики Узбекистан в 1988-1991 гг., а в 1994-2004 гг. работал заместителем лаборатории дифференциальных уравнений института Математики им. В. Романовского.

С 1991 по 2004 год был членом научного совета Института Математики Академии наук Республики Узбекистан, а с 2004 по 2008 год - членом научного совета ТГПУ им. Низами.

В 2002-2013 гг. был членом совета по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук в Институте Математики Академии наук Республики Узбекистан по специальности 01.01.02-"Дифференциальные уравнения". С 2005 по 2008 год был членом совета по защите кандидатских диссертации К 0670801 при ТГПУ имени Низами. В 2000 году он организовал рабочий семинар по дифференциальным уравнениям "Уравнения в частных производных и их применения"(ИМ АНРУз.) В нем приняли участия преподаватели из Ташкентских университетов, институтов, академических лицеев и профессиональных колледжей.

Б.И. Исломов был награжден сертификатами о достойном участии в ряде курсов по повышению квалификации (ПК РУз 2010, 2013, 2016). Он также участвовал в международных симпозиумах и республиканских научных конфе-ренциях (Германия, Испания, Болгария, Польша, Корея, Россия, Казахстан, Азербайджан). Также является членом и организатором нескольких конференций и семинаров по дифференциальным уравнениям (1993-2017 гг.).

Он признан победителем Республиканского конкурса "Лучший педагог высшего учебного заведения"2017 года.

Б.И. Исломов встречает свое шестидесятилетие в расцвете творческих сил. Оргкомитет конференции поздравляет юбиляра и желает ему крепкого здоровья, огромных успехов в научной и педагогической деятельности, семейного счастья и еще долгих лет творческой активности.

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ ТРУДЫ Б.И. ИСЛОМОВА

1. Задача Трикоми для общего линейного уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения.// "Доклады АН СССР". 1986. Т. 289. є 3. С. 549-553. (соавтор Салахитдинов М.С.)

2. О трехмерном аналоге задачи Трикоми для уравнения смешанного типа. // "Доклады АН СССР". 1990. Т. 311. є 4. С. 797-801. (соавтор Салахитдинов М.С.)

3. Аналоги задачи Трикоми для уравнения смешанного параболо - гиперболического типа с двумя линиями и различными порядками вырождения.// "Дифференциальные уравнения ". 1991. Т.2. є 6. С. 1007-1014.

4. Краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя внутренними плоскостями вырождения.// "Узбекский математический журнал ". 1991, є 1. С. 50-57. (соавтор Салахитдинов М.С.)

5. Краевая задача для общего линейного уравнения смешанного типа с двумя внутренними линиями вырождения.// "Доклады АН РУз". 1992. є 11. С. 6-9.

6. Boundary value problems for general equation mixed type with to inner lines of degeneracy.// "Conditionally Well -Posed Problems". Sci. Pub. TVP. 1994. Part 6. P. 224-226.

7. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения второго порядка. // "Доклады АН РУз". 1996. є 1-2 С. 3-6. (соавтор Курьязов Д.)

8. К теории уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. // "Узбекский математический журнал". 1997. є 3. С. 26-39.

9. Существование обобщенных решений краевой задачи для одного класса квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. // "Доклады АН РУз". 1997. є 7. С. 5-9. (соавтор Расулов Х.)

10. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа с двумя внутренними линиями вырождения в неограниченной области.// "Узбекский математический журнал". 2000. є 5-6. С.36-44. (соавтор Курбанов О.)

11. Краевые задачи для уравнения смешанного эллиптико- параболического типа с двумя линиями и различными порядками вырождения.// "Узбекский математический журнал". 2001. є 5-6. С.33-41. (соавтор Акбарова С.)

12. Краевая задача типа задачи Бицадзе для уравнения эллиптико- гиперболического типа третьего порядка в двусвязной области.// Доклады Адыгской (Черкеской) Академии Наук .2004. Т. 7. є 1. С. 42-46. (соавтор Абдуллаев О.Х.)

13. О краевой задачи для уравнения парабола гиперболического типа с двумя линиями и различными порядками вырождения.// "Узбекский математический журнал". 2005. є 3. С. 43-51. (соавтор Очилова Н.)

14. Краевая задача для нагруженного уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором.// "Узбекский математический журнал". 2007. є 2. С. 45-55. (соавтор Болтаева У. И.)

15. Краевая задача со смещением для уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором.// "Узбекский математический журнал". 2009. є 4. С. 76-81. (соавтор Мадрахимова З.С.)

16. Uniqueness of solution of the boundary value problem for the hyperbolic- hyperbolic type on the third order in double-conntcted domain.// "Of the third congress of the world mathematical society of Turkic countries". 2009. Vol. 1. P. 316-320. (соавтор O.Abdullayev).

17. Об однозначной разрешимости краевой задачи для уравнения третьего порядка, вырождающегося внутри области.// "ДОКЛАДЫ АН РУз". Математика. 2009. є 5. С.15-18. (соавтор Мадрахимова З.С.)

18. Аналог задачи Дарбу для нагруженного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка.// "ДОКЛАДЫ АН РУз". Математика. 2010. є 5. С.3-5. (соавтор Болтаева У. И.)

19. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с нагруженным параболо - гиперболическим оператором.// "Узбекский математический журнал". 2010. є 3. С.19-31. (соавтор Болтаева У. И.)

20. Нелокальная краевая задача с конормальной производной для уравнения смешанного типа с двумя внутренними линиями и различными порядками вырождения. // "Известия вузов. Математика. "Россия. 2011. є 1. С. 49-58. (соавтор Салахитдинов М.С.)

21. Аналог задачи Трикоми для вырожда-ющегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа.// "Узбекский математический журнал". 2011. є 2. С.75-85. (соавтор Джураев Ф.М.)

22. Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения эллиптико- гиперболического типа в двухмерной и трехмерной области. // "Доклады Адыгской (Черкеской) Международной Академии Наук."Россия.2011. Т. 13. є 1. С. 50-54. (соавтор Аликулов Е.К.)

23. Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов третьего порядка. // "Уфимский математический журнал"Россия. 2011, Том 3, є 3. С.15-25. (соавтор Балтаева У.И.)

24. Краевые задачи для параболо - гиперболического уравнения с вырождением типа и порядка.// "ДОКЛАДЫ АН РУз". Математика. 2011 . є 6. С.3-5.(соавтор Мадрахимова З.С.)

25. Нелокальная краевая задача с условием Франкля для уравнения смешанного типа с двумя линиями и различными порядками вырождения.// Материалы второй международного Российского-Узбекского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики". Нальчик. Россия. 2012. С. 128-131.

26. Краевая задача с условием Франкля для уравнения смешанного типа с двумя внутренними линиями вырождения. // Тезисы докладов международной конференции "Обратные некорректные задачи математической физики посвященной 80-летию со дня рождения академика М.М.Лаврентьева, Новосибирск, Россия, 5-12 августа 2012г. С. 377-378.

27. О трчхмерном аналоге задачи Геллерстедта для нагруженного уравнения эллиптико-гиперболического типа. // "Узбекский математический журнал". 2012. є 1. С. 61-73. (соавтор Аликулов Е.К.)

28. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором.// "Узбекский мат.жур.".2012. є 3. С.70-79. (соавтор Балтаева У.И.)

29. Boundary value problems for the classical and mixed integro-differential equations with Riemann-Liuovil operators. //International Journal of Partial Differential equation, Volume 2013, Article ID 157947. (соавтор Boltayeva U).

30. Об одной нелокальной задаче с условием Франкля для уравнения смешанного типа с двумя внутренними линиями и различными порядками вырождения. // Тезисы докладов "Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения".2013. Ташкент. С. 93-98.(соавтор Салохитдинов М.С.).

31. Исломов Б. Краевая задача с условием Франкля для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения.// "Узбекский математический журнал". 2014. є 2 . С. 78-91 (соавтор Бегимқулов Ф.Х.)

32. Локальная краевая задача с условием типа франкля для уравнения смешанного типа с двумя внутренними линиями и различными порядками вырождения. // Труды. межд. науч. конф. "Дифференц. уравнения и смежные проблемы". 2013. Стерлитабак, Россия.С.162-167.

33. Boundary value problems for the third order loaded parabolic-hyperbolic equation with variable coefficients.
"ABSTRACTS of the International Congress of Mathematicians". 2014. Seoul. Korea. P. 357-358. (соавтор Boltayeva U)

34. Задача АТ для нагруженного параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области.//"Узбекский математический журнал". 2015. є 2. С. 35-51. (соавтор Джураев Ф.)

35. Нелокальная задача для нагруженного уравнения гиперболического типа в двусвязной области. // Материалы третий международного Российско- Казахского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики". Нальчик. Россия . 2014. С. 78-80. (соавтор Юнусов О. М.)

36. Boundary - value problems for a third -order loaded parabolic-hyperbolic equation with variable coefficients. // "Electronic Journal of Differential Equations". 2015. No. 221. pp. 1-10. (соавтор Boltayeva U)

37. Краевой задача для нагруженного уравнения смешанного типа с оператором интегро-дифференцирования дробного порядка. // "Вестник Уз НУ"2015. є 1. (соавтор Холбеков Ж.А.).

38. Исследование краевой задачи для нагруженного параболо- гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа.// "ДОКЛАДЫ АН Руз". Математика. 2015 . є 6. С.11-14. (соавтор Холбеков Ж.А.).

39. Аналог задачи Трикоми для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа-1. // "Узбекский математический журнал". 2015. є 4. С. 47-56. (соавтор Холбеков Ж.А.).

40. Аналог задачи Трикоми для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа-2. // "Узбекский математический журнал". 2016. є 1. С. 47-56. (соавтор Холбеков Ж.А.).

41. О единственности решения задачи Геллерстедта для уравнения с вырождением типа и порядка.// "Узбекский математический журнал". 2016. є 3. С.109-117. (соавтор Мадрахимова З.С.)

42. Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения гиперболического типа в специальной области.// "ДОКЛАДЫ АН Руз". Математика. 2016 . є 4. С.8-12. (соавтор Юнусов О.М.).

43. About a problem for the degenerating mixed type equation fractional derivative.// Вестник КРАУНЦ. физ.-мат. науки. 2017. є 1(17). С. 22-32. ISSN 2079-6641. (соавтор N. Ochilova).

44. On a problem for the loaded degenerating mixed type equation involving integral-differential operators. // Nanosystems fhysics, chemistry, mathematics. 2017.8 (3).DOI: 10. 17586/2220 - 8054-2017-8-3. (соавтор N. Ochilova, O.Abdullayev).

1. ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

DEGENERATING AND MIXED TYPE EQUATIONS

ABOUT ONE PROBLEM WITH A CONORMAL AND INTEGRAL CONDITION FOR THE ELLIPTIC TYPE EQUATION OF THE SECOND KIND.

A.A. Abdullaev

Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers. Tashkent, Uzbekistan.
akmal09.07.85@mail.ru

In this work for the first time we investigate the boundary value problem with a conormal and integral condition for the elliptic type equation of the second kind

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

Let D is one connected domain in the plane (x, y), bounded with a curve σ at $x > 0,\ y > 0$ from the ends in points $A(0,0),\ B(1,0)$ and with segment AB an axis Ox.

We enter designations

$J = \{(x, y):\ \ 0 < x < 1,\ y = 0\},\ \ \partial D = \vec{\sigma} \cup \overline{AB},\ \ \ 2\beta = \frac{m}{m+2}$, such that $-\frac{1}{2} < \beta < 0$.

We investigate the following problem in the domain D for the equation (1).

Problem CK. To find a function $u(x, y)$, the following properties:

1) $u(x, y) \in C\left(\bar{D}\right) \cup C^1\left(D \cup \sigma \cup J\right)$ – and u_x, u_y can tend to infinity an order less than -2β in points $A\,(0,0)$ and $B\,(1,0)$;

2) $u(x, y)-$ twice continuously differentiable solution of the equation (1) in the domain D;

3) $u(x, y)-$ satisfy the following boundary conditions

$$\left\{\delta(s) A_s[u] + \rho(s) u\right\}|_{\sigma} = \phi(s), \quad 0 < s < l, \tag{2}$$

$$a_0(x) u_y(x, 0) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) D_{0x}^{\alpha_j} u(x, 0) + a_{n+1}(x) u(x, 0) = b(x), \quad 0 < x < 1, \tag{3}$$

where $\delta(s)$, $\rho(s)$, $\varphi(s)$, $a_j(x)$, $\ \ b(x)$ given functions, such that $b(0) = 0, \quad a_0(1) \neq 0,$

$$a_0(x) \neq 0, \quad \forall x \in \bar{J}, \tag{5}$$

$$\delta^2(s) + \rho^2(s) \neq 0, \quad \forall s \in [0, l], \tag{6}$$

$$\sum_{j=0}^{n+1} a_j^2\,(x) \neq 0, \quad \forall (x, 0) \in \overline{J}, \tag{7}$$

$$\delta(s), \rho(s), \varphi(s) \in C[0, l], \tag{8}$$

$$a_j(x),\ b(x) \in C\left(\overline{J}\right) \cap C^2\left(J\right),\ \left(j = \overline{0, n+1}\right), \tag{9}$$

and

$$A_s[u] = y^m \frac{dy}{ds}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{dx}{ds}\frac{\partial u}{\partial y},$$

$\frac{dx}{ds} = -\cos(n, y),\quad \frac{dy}{ds} = \cos(n, x)$, n is an external normal to the curve σ, l is length of all curve σ, s is the length of the curve σ, counted from a point $B\,(1,0)$, and $D_{0x}^{\alpha_j}[*]$ is the Riemann - Liouville integral operator of a fractional order α [1]:

$$D_{0x}^{\alpha_j} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha_j)} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha_j+1}}, \qquad -1 < \alpha_j < 0. \tag{10}$$

Let $\alpha = \max_{1 \le j \le n} \{|\alpha_j|\}$, and

$$\alpha \le -2\beta. \tag{11}$$

We will assume that the curve σ satisfies the following conditions:

1) functions $x(s),\ y(s)$, which describe the parametrical equation of a curve σ, have the continuous derivatives $x'(s)$, $y'(s)$, and don't tents to zero at the same time, moreover have the second derivatives meeting Hölder's condition $\kappa\,(0 < \kappa < 1)$ of an order in an interval $0 \le s \le l$;

2) in the vicinity end points of the curve σ satisfies inequalities:

$$\left|\frac{dx}{ds}\right| \le const\, y^{m+1}(s), \tag{12}$$

and $x(l) = y(0) = 0, \quad x(0) = 1, \quad y(l) = 0,$

$$-1 < \alpha_j < 0, \quad \delta(s) \ne 0, \ \ \forall s \in [0, l], \tag{13}$$

Theorem. If the conditions (2), (4)-(9) and (11) - (13) are satisfied, then there exists the unique solution of the problem CK, in the domain D.

REFERENCES

1. *M.M. Smirnov* The mixed type equations. M.: The higher school. 1985y. 304 pages.

One a problem for fractional heat equation involving Caputo operator on a metric graphs.

[1] *O. Kh. Abdullaev*, [2] *Z. A. Sobirov*, [2]*J. R. Khujaqulov*
sobirovzar@gmail.com, jonibek.16@mail.ru
[1] National University of Uzbekistan
[2] Chirchik State Pedagogical Institute

In the present work, we investigate boundary value-problem for the wave equation with fractional derivative of order $1 < \alpha < 2$ on metric graph.

We consider a metric star graph Γ with three limited bounds connected at one point O. The bounds are denoted by B_1, B_2 and B_3 the coordinates x_k on B_k $(k = 1, 2, 3)$ are defined from 0 to L.
On each bound we consider the wave equation

$${}_CD_{0t}^{\alpha} u_k - u_{kxx} = 0 \quad t > 0, \ \ x_k \in B_k \quad (\mathrm{k} = 1, 2, 3) \tag{1}$$

where ${}_CD_{ax}^{\alpha} f$ is a Caputo's fractional derivative [1.p.92]. Below we will use x instead $x_k\,(k = 1, 2, 3)$.
Formulation of the Problem. Find the functions $u_k\,(x,t)$ in $B_k \times [0, T]$ $(k = 1, 2, 3)$ what satisfies Eq(1). and conditions:

$$u_k\,(x,0) = \psi_k\,(x)\,, \ \ x \in B_k \tag{2}$$

$$u_k\,(x,0) = \varphi_k\,(x)\,, x \in B_k \tag{3}$$

$$u_1\,(-0, \mathrm{t}) = u_2\,(0,t) = u_3\,(0,t) \ \ t \in [0, \mathrm{T}] \tag{4}$$

$$u_{1x}\,(-0, \mathrm{t}) + u_{2x}\,(0,t) + u_{3x}\,(0,t) = 0 \ t \in [0, \mathrm{T}] \tag{5}$$

$$u_k\left(L{,}t\right)=0\ t\in\left[0,\mathrm{T}\right] \tag{6}$$

where $\varphi_k\left(x\right)$ and $\psi_k(x)$ are given functions which satisfy the conditions:

$$\varphi_k\left(x\right),\psi_k\left(x\right)\in C^3\left[0,\mathrm{L}\right], \tag{7}$$

$$\varphi_1\left(0\right)=\varphi_2\left(0\right)=\varphi_3\left(0\right),\ \varphi_{1x}\left(0\right)+\varphi_{2x}\left(0\right)+\varphi_{3x}\left(0\right)=0, \tag{8}$$

$$\psi_1\left(0\right)=\psi_2\left(0\right)=\psi_3\left(0\right),\ \psi_{1x}\left(0\right)+\psi_{2x}\left(0\right)+\psi_{3x}\left(0\right)=0 \tag{9}$$

We will solve this problem using by the method of separation of variables. The solution of the Eq.(1) we will represent on the form:

$$u_k\left(x,\mathrm{t}\right)=T\left(t\right)X_k\left(x\right),\ \left(k=1,2,3\right) \tag{10}$$

which, based on Eq. (1) will be separate to two equations:

$$X_k^{''}\left(x\right)+\lambda^2X_k\left(x\right)=0(k=1,2,3) \tag{11}$$

$$_cD_{0t}^{\alpha}T\left(t\right)+\lambda^2T\left(t\right)=0 \tag{12}$$

where $\lambda=const,\ \lambda\in R$.

In further calculations we assume that

$$u(x,t)=\begin{pmatrix} u_1\left(x{,}t\right)\\ u_2\left(x{,}t\right)\\ u_3\left(x{,}t\right)\end{pmatrix}.$$

Obviously, that from (4)-(6) we can obtain

$$X_1\left(0\right)=X_2\left(0\right)=X_3\left(0\right)$$

$$X_1^{'}\left(0\right)+X_2^{'}\left(0\right)+X_3^{'}\left(0\right)=0$$

$$X_k\left(L\right)=0$$

In fact, that a solution of the Eq. (11) is

$$X_k\left(x\right)=a_k\cos\lambda x+b_k\sin\lambda x$$

An eigenvalues of the investigated problem,are $\lambda_{1,2}=\frac{n\pi}{L}\quad\lambda_3=\frac{(2n-1)\pi}{2L}$, $n\in N$.

Considering eigenvalues we can pick up eigenfunctions as

$$X_n^{(1)}\left(x\right)=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{L}}\sin\frac{\pi n}{L}x, \tag{13}$$

$$X_n^{(2)}\left(x\right)=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3L}}\sin\frac{\pi n}{L} \tag{14}$$

$$X_n^{(3)}\left(x\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6L}}\cos\frac{\left(2n-1\right)\pi}{2L} \tag{15}$$

Well known, that a solution of the Eq.(12) will be represented on the form :

$$T_n^{(1)}(t) = C_{0n}^{(1)} E_{\alpha,2}\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t^\alpha\right) + C_{1n}^{(1)} t E_{\alpha,2}\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t^\alpha\right) \tag{16}$$

$$T_n^{(2)}(t) = C_{0n}^{(2)} E_{\alpha,1}\left(-\frac{(n)^2\pi^2}{L^2}t^\alpha\right) + C_{1n}^{(2)} t E_{\alpha,2}\left(-\frac{(n)^2\pi^2}{L^2}t^\alpha\right) \tag{17}$$

$$T_n^{(3)}(t) = C_{0n}^{(3)} E_{\alpha,1}\left(-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{L^2}t^\alpha\right) + C_{1n}^{(3)} t E_{\alpha,2}\left(-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{L^2}t^\alpha\right) \tag{18}$$

where $E_{\alpha,\beta}(z)$ is Mittag-Leffer function [2]:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Hence, taking into (13) - (15) and (16)-(18) account from we will infer that

$$u_n(x, \mathrm{t}) = T_n^{(1)}(t) X_n^{(1)}(x) + T_n^{(2)}(t) X_n^{(2)}(x) + T_n^{(3)}(t) X_n^{(3)}(x)$$

consequently, a solution of Eq.(1) will be represented on the form:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{(1)}(t) C_n^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\frac{\pi n}{L}x + C_n^{(2)} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3L}} \sin\frac{\pi n}{L}x +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{(2)}(t) C_n^{(3)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6L}} \cos\frac{(2n-1)\pi}{2L}x$$

where $C_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$, $C_n^{(3)} = const$, Using by conditions (2)and (3) we will find $C_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$, $C_n^{(3)}$.
Theorem. If satisfies conditions (7)-(9) then the solution of the investigated problem is exist and unique.

REFERENCES

1. A.A Kilbas, H. M Srivstava, J. J Trujillo. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, in: North-Holland Matematics Studies, Vol. 204, Elsevier Science. B.V., Amsterdam. (2006).
2. I.Podlubny. Fractional Differential Equations, Academic Press, New York, (1999).

SELF-SIMILAR SOLUTIONS FOR A QUASILINEAR DEGENERATE PARABOLIC SYSTEM NOT IN DIVERGENCE FORM

Aripov M.M.[1], Matyakubov A.S.[2],

[1,2] National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
[1]mirsaidaripov@mail.ru, [2]almasa@list.ru

In this abstract, we consider the following Cauchy problem to a quasilinear degenerate parabolic system not in divergence form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v^{m_1}\nabla\left(\left|\nabla u^k\right|^{p-2}\nabla u^n\right), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = u^{m_2}\nabla\left(\left|\nabla v^k\right|^{p-2}\nabla v^n\right), \quad t>0,\ x\in R^N, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \geq 0, \quad v|_{t=0} = v_0(x) \geq 0, \ \ x\in R^N \tag{2}$$

where $p,\ m_1,\ m_2,\ k,\ n$ - are positive constants, $N \geq 1$.

This system can be used to describe the development of multiple groups in the dynamics of biological groups, where u, v are the densities of the different groups (see [1]).

In paper [1], Gao et al. considered parabolic systems not in divergence form in the case $n=1$ and $p=2$, with source and null Dirichlet boundary conditions. The local existence and uniqueness of classical solution are proved. Moreover, it is proved that all solutions exist globally with homogeneous Dirichlet boundary condition.

In [2], Lu is deals with positive solutions of some degenerate and quasilinear parabolic systems not in divergence form

$$\begin{cases} u_{it} = f_i(u_{i+1})\left(\Delta u_i + a_i u_i\right), \ i=1,2,...,n-1, \\ u_{nt} = f_n(u_1)\left(\Delta u_n + a_n u_n\right), \ x\in\Omega, \ t>0. \end{cases}$$

In [3-5], the authors studied the Cauchy problem for the system (1) in the case $p=2$ and with source. They studied the properties of self-similar solutions of the system in a two-component medium with variable density and source, in particular, solutions of Zeldovich-Barenblatt type for cross-diffusion systems of a non-divergent type were constructed, and slow and fast diffusion cases were investigated.

In this work, we concern with degenerate and quasilinear parabolic systems not in divergence form with positive initial conditions. An asymptotic behavior of self-similar solutions in the case of slow diffusion is established. In addition, obtained the asymptotic representation of the solution.

We introduce the notations:
$\gamma_i = \frac{(p-1)(k(p-2)+n-1-m_i)}{(k(p-2)+n-1)^2-m_1m_2}$, $c_{i1} = \frac{|\gamma_i|^{2-p}k^{2-p}\gamma^{1-p}}{pn(\gamma_i - m_i\gamma_{3-i})}$, $c_{i2} = \frac{ca^{1-1/p}|\gamma_i|^{2-p}k^{2-p}\gamma^{1-p}}{\mu n(m_i\gamma_{3-i}-\gamma_i)}$, $i=1,2.$

Let have the equality $\alpha_1\left(k\left(p-2\right)+n-1\right)+\alpha_2 m_1 = \alpha_2\left(k\left(p-2\right)+n-1\right)+\alpha_1 m_2$.

Then the following theorems are valid:

Theorem 1. *A weak solution of the problem (1)-(2) has the following asymptotic*

$$u_A(t,x) = A(T+t)^{-\alpha_1}\left(a - \left(|x|\tau^{-1/p}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\gamma_1}\left(1+o\left(1\right)\right),$$
$$v_A(t,x) = B(T+t)^{-\alpha_2}\left(a - \left(|x|\tau^{-1/p}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\gamma_2}\left(1+o\left(1\right)\right).$$

at $|x| \to a^{\frac{p-1}{p}}\tau^{\frac{1}{p}}$, *where constants* $\gamma_1,\ \gamma_2$ *defined above,* $\tau = h_1\alpha_1^{-1}(T+t)^{1-\alpha_1(k(p-2)+n-1)-\alpha_2 m_1}$ *and the coefficients A and B are the solutions of systems of the nonlinear algebraic equations*
$A^{k(p-2)+n-1}B^{m_1} = c_{11}, \quad B^{k(p-2)+n-1}A^{m_2} = c_{21}.$

Theorem 2. *A weak solution of the problem (1)-(2) has the following asymptotic*

$$u_A(t,x) = A(T+t)^{-\alpha_1}\left(a - \left(c\ln(t+T) - \sum_{i=1}^{N}\mu_i x_i\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\gamma_1}(1+o(1)),$$
$$v_A(t,x) = B(T+t)^{-\alpha_2}\left(a - \left(c\ln(t+T) - \sum_{i=1}^{N}\mu_i x_i\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\gamma_2}(1+o(1)),$$

at $\sum_{i=1}^{N}\mu_i x_i \to c\ln(T+t) - a^{\frac{p-1}{p}}$, *where constants* γ_1, γ_2 *defined above, the coefficients* A *and* B *are the solutions of systems of the nonlinear algebraic equations*
$A^{k(p-2)+n-1}B^{m_1} = c_{12}\,, \quad B^{k(p-2)+n-1}A^{m_2} = c_{22}\,.$

References

1. *Y. Gao, Q. Meng, Y. Guo.* Study of properties of solutions for quasilinear parabolic systems, MATEC Web of Conferences, 2016, 61 (1), pp. 1-4.
2. *H. Lu.* Global existence and blow-up analysis for some degenerate and quasilinear parabolic systems, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, Vol. 49, 2009, pp. 1-14.
3. *M. Aripov, A.S. Matyakubov.* To the qualitative properties of solution of system equations not in divergence form, International Journal of Innovative Science, Engineering and Technology, Vol. 3 Issue 8, 2016, pp. 533-537.
4. *M. Aripov, A.S. Matyakubov.* To the properties solutions of a cross-diffusion parabolic system not in divergence form, Universal Journal of Computational Mathematics, 5(1), 2017, pp. 1-7.
5. *M. Aripov, A.S. Matyakubov.* Self-similar solutions of a cross-diffusion parabolic system with variable density: explicit estimates and asymptotic behavior, Nanosystems: physics, chemistry, mathematics, 8 (1), 2017, pp.43-50.

ON A PROBLEM OF THE FRANKL TYPE FOR AN EQUATION OF THE MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE

M. Sadybekov[1],

[1] Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan, Almaty
[1]sadybekov@math.kz

In gas dynamics F.I. Frankl [1], [2] for the first time set a boundary value problem for the Chaplygin equation :

$$k(y)\,u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

where $k(0) = 0$, $k'(y) > 0$. In this problem as a carrier of nonlocal boundary condition ("jump of sealing")

$$u(0,y) - u(0,-y) = f(y)$$

is a part $-a < y < a$ of the boundary $x = 0$ of the domain consisting of parts of the boundary of subdomains of ellipticity and hyperbolicity of the equation. Therefore the nonlocal boundary conditions of such type, that is, binding values of functions on the boundary of domains of equations of various type, are called conditions of the Frankl type.

Numerous works of authors from near and far abroad are devoted to problems of the theory of boundary value problems for equations of the mixed type. Books of A.V. Bitsadze, L. Bers, M.M. Smirnov, M.S. Salakhitdinov, T.D. Dzhuraev contain sufficiently full review of considered results.

Researching equations of a parabolic-hyperbolic type has gained a rapid development quite recently. These problems are of particular interest due to their application to various problems of mechanics and physics.

Essential contribution to the development of the theory of boundary value problems for parabolic-hyperbolic equations was done by M.S. Salakhitdinov, T.D. Dzhuraev, A.M. Nakhushev. They justified the well-posedness of formulated problems by the method of reduction to integral equations. Issues of well-posed solvability of problems were researched on the basis of solution representation in the form of bilinear series in papers of E.I. Moiseev, N.Yu. Kapustin, K.B. Sabitov.

In the report a new non-local boundary value problem for an equation of the parabolic-hyperbolic type is formulated. This equation is of the first kind, that is, the line of type change is not a characteristic of the equation. The suggested new nonlocal condition binds points on boundaries of the parabolic and hyperbolic parts of the domain with each other. Unlike the existing publications of the other authors related to the theme, in the suggested formulation of the problem the hyperbolic part of the domain coincides with a characteristic triangle. Unique solvability of the formulated problem is proved in the sense of classical and strong solutions. The existence of the eigenvalues of the problem is considered.

Let $\Omega \subset R^2$ be a finite domain bounded for $y > 0$ by the segments AA_0, A_0B_0, B_0B, $A = (0,0)$, $A_0 = (0,1)$, $B_0 = (1,1)$, $B = (1,0)$ and for $y < 0$ by the characteristics $AC: \ x + y = 0$ and $BC: \ x - y = 1$ of an equation of the mixed parabolic-hyperbolic type

$$Lu = \left\{ \begin{array}{c} u_x - u_{yy}, \, y > 0 \\ \\ u_{xx} - u_{yy}, \, y < 0 \end{array} \right\} = f(x,y). \tag{1}$$

This is the equation of the mixed type. The equation refers to the first kind because the line of change of type $y = 0$ is not a characteristic of the equation.

Problem F. *Find a solution to Eq.(1) satisfying classical boundary conditions*

$$u|_{AA_0} = 0, \quad u_y|_{A_0B_0} = 0, \tag{2}$$

and a non-local boundary condition

$$\alpha u\left(\theta_0\left(t\right)\right) + \beta u\left(\theta_1\left(t\right)\right) = \gamma u\left(\theta\left(t\right)\right), \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{3}$$

where $\theta\left(t\right) = (t,1)$, $\theta_0\left(t\right) = \left(\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}\right)$, $\theta_1\left(t\right) = \left(\frac{t+1}{2}, \frac{t-1}{2}\right)$; α, β *and* γ *are given numbers.*

It is easy to see that $\theta\left(t\right) \in A_0B_0$, $\theta_0\left(t\right) \in AC$, $\theta_1\left(t\right) \in BC$. Therefore the new non-local boundary condition (3) binds with each other values of the sought-for solution on the parabolic part of the boundary A_0B_0 and on the hyperbolic parts of the boundary of the domain (at the characteristics AC and BC).

Note that for $\gamma = 0$ the boundary conditions in the hyperbolic part of the domain of the form

$$\alpha u\left(\theta_0\left(t\right)\right) + \beta u\left(\theta_1\left(t\right)\right) = 0$$

are well-known and called boundary conditions with displacement. They were first introduced by A.M. Nakhushev for a wave equation (see [3]).

The main result of the report we state as a theorem.

Theorem. *Let* $\alpha + \beta \neq 0$. *Then*

(a) For any function $f \in L_2\left(\Omega\right)$ *there exists a unique strong solution* $u(x,y)$ *to the problem* F. *This solution belongs to the class* $H^1\left(\Omega\right) \cap H^{1,2}_{x,y}\left(\Omega_1\right) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$, *and satisfies the inequality*

$$\|u\|_1 \leq C \, \|f\|_0. \tag{4}$$

(b) For any function $f \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $f(A) = 0$, there exists a unique classical solution $u(x,y)$ to the problem F. This solution is stable in the norm

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C\, \|f\|_{C(\overline{\Omega})}. \tag{5}$$

(c) Let $\beta = 0$ and L be an operator of the problem F. Then the problem F does not have eigenvalues. That is, the inverse operator L^{-1} is a Volterra (compact and quasinilpotent) operator. (d) Let $\beta \neq 0$ and L be an operator of the problem F. Then there exists an eigenvalue of the problem F, that is, there exists $\lambda \in \mathbb{C}$ such that the equation $Lu = \lambda u$ has a nontrivial solution.

The main result of the report was published in [4].

References

1. *Frankl F.I.* To the theory of the Laval nozzle // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1945. V. 9, No. 2. P. 121–143.
2. *Frankl F.I.* Subsonic flow about a profile with a supersonic zone // Prikl. Mat. Mekh. 1956. V. 20, No. 2. P. 196–202.
3. *Nakhushev A.M.* Problems with displacements for partial differential equations. Moscow: Nauka, 2006. (in Russian)
4. *Kal'menov T.Sh., Sadybekov M.A.* On a Frankl-type problem for a mixed parabolic-hyperbolic equation // Siberian Mathematical Journal. 2017. V. 58, No. 2. P. 227–231.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Абулов М.О.

Карши ГУ, Узбекистан, Карши
abulov1959@mail.ru

В области $D = \{\ t > 0,\ 0 < x < 1,\ |y| < \infty\}$ рассмотрим уравнение четвертого порядка

$$Lu \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{tt} - u_{xx} - u_{yy}) = 0 \tag{1}$$

с граничными и начальными условиями:

$$\begin{gathered} u_{tt} + a_1 u_{xx} + b_1 u_{yy}\,|_{x=0} = 0, \\ u_{tt} + a_2 u_{xx} + b_2 u_{yy}\,|_{x=0} = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} u_{tt} + a_3 u_{xx} + b_3 u_{yy}\,|_{x=1} = 0, \\ u_{tt} + a_4 u_{xx} + b_4 u_{yy}\,|_{x=1} = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

$$u\,|_{t=0} = u_0(x,y), \qquad u_t\,|_{t=0} = u_1(x,y) \tag{4}$$

(a_i, b_i - постоянные действительные числа, $a_i \neq 0,\ \ i = 1,2,3,4$).

Для указанное задачи выделены области значений параметров a_i, b_i, для которых такая задача поставлена корректно по Адамару.

Положим

$$\begin{gathered} D_t = \{\ t = 0,\ 0 < x < 1,\ \ |y| < \infty\}, \\ D_0 = \{\ t > 0,\ x = 0,\ \ |y| < \infty\}, \\ D_1 = \{\ t > 0,\ x = 1,\ \ |y| < \infty\}. \end{gathered}$$

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА. Найти решение уравнения (1) в областиD из пространства $W_2^2(D)$, удовлетворяющее начальным данным (4) и граничным условиям (2),(3).

Для решения задачи (1)-(4) рассмотрим ряд взаимосвязанных задач, по решениям которых строим решение задачи (1)-(4).

Рассмотрим в области D_0 задачу Коши

$$\begin{cases} (a_2-a_1)U_{tt}+(a_2b_1-a_1b_2)U_{yy}=0, \\ U\,|_{t=0}=u_0(0,y), \quad U_t\,|_{t=0}=u_1(0,y). \end{cases}$$

Известно [1], что если выполнено условие $(a_2-a_1)(a_2b_1-a_1b_2)\le 0$, тогда эта задача однозначно разрешима в области D_0 и для ее решения верна оценка

$$\|U\|_{4.D_0}\le m_1(\|u_0\|_{6.D_t}+\|u_1\|_{5.D_t}).$$

Отсюда и из (2) находим

$$u_{xx}\Big|_{x=0}=-\frac{1}{a_1}(U_{tt}+b_1U_{yy})\in W_2^2(D_0)\ . \tag{5}$$

Далее в области D_1 рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} (a_4-a_3)V_{tt}+(a_4b_3-a_3b_4)V_{yy}=0, \\ V\,|_{t=0}=u_0(1,y), \quad V_t\,|_{t=0}=u_1(1,y). \end{cases}$$

Известно [1], что если выполнено условие

$$(a_4-a_3)(a_4b_3-a_3b_4)\le 0,$$

тогда эта задача однозначно разрешима в области D_0 и для ее решения верна оценка

$$\|V\|_{4.D_0}\le m_1(\|u_0\|_{6.D_t}+\|u_1\|_{5.D_t}).$$

Отсюда и из (3) находим:

$$u_{xx}\Big|_{x=1}=-\frac{1}{a_3}(V_{tt}+b_3V_{yy})\in W_2^2(D_1)\ . \tag{6}$$

Уравнение (1) запишем в виде

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}=x\varphi(t,y)+\psi(t,y), \tag{7}$$

где $\varphi(t,y),\ \ \psi(t,y)$ –неизвестные функции. Из уравнения (7) и в силу (5) и (6) находим:

$$\psi(t,y)=U_{tt}+\tfrac{1}{a_1}(U_{tt}+b_1U_{yy})-U_{yy},$$
$$\varphi(t,y)=V_{tt}+\tfrac{1}{a_3}(V_{tt}+b_3V_{yy})-V_{yy}-\psi(t,y).$$

Приходим к следующей смешанной задаче. Найти решение уравнения (7), удовлетворяющее следующем начальным и граничным условиям

$$\begin{cases} u\,|_{x=0}=U(t,y), \quad u\,|_{x=1}=V(t,y), \\ u\,|_{t=0}=u_0(x,y), \quad u_t\,|_{t=0}=u_1(x,y). \end{cases} \tag{8}$$

Известно [1], что если выполнены условия согласования

$$\begin{cases} u_{0xx}(0,y)+u_{0yy}(0,y)+\psi(0,y)+a_1u_{0xx}(0,y)+b_1u_{0yy}(0,y)=0, \\ u_{0xx}(0,y)+u_{0yy}(0,y)+\psi(0,y)+a_2u_{0xx}(0,y)+b_2u_{0yy}(0,y)=0, \\ u_{0xx}(1,y)+u_{0yy}(1,y)+\varphi(1,y)+\psi(1,y)+a_3u_{0xx}(1,y)+b_3u_{0yy}(1,y)=0, \\ u_{0xx}(1,y)+u_{0yy}(1,y)+\varphi(1,y)+\psi(1,y)+a_4u_{0xx}(1,y)+b_4u_{0yy}(1,y)=0, \end{cases} \tag{9}$$

то задача (7), (8) однозначно разрешима в пространстве $W_2^2(D)$ и ее решение допускает оценку

$$\|u\|_{2.D} \le m(\|u_0\|_{6.D_t} + \|u_1\|_{5.D_t})$$

Сформулируем доказанное в виде теоремы.

ТЕОРЕМА. Пусть $u_0(x,y) \in W_2^6(D_t)$, $\quad u_1(x,y) \in W_2^5(D_t)$ и выполнены условия

$$a_i \neq 0,\ i=1,2,3,4,\ \ a_1 \neq a_2,\ a_3 \neq a_4,\ (a_2-a_1)(a_2b_1-a_1b_2) \le 0,\ (a_4-a_3)(a_4b_3-a_3b_4) \le 0$$

и условия согласования (9).огда существует и притом единственное решение задачи (1)-(4) в пространстве $W_2^2(D)$ и оно допускает оценку

$$\|u\|_{2.D} \le m(\|u_0\|_{6.D_t} + \|u_1\|_{5.D_t}).$$

Литература

1. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. Москва, Наука, 1973. 408 с.
2. *Абулов М.А.* О смешанных задачах для одного уравнения третьего порядка // Новосибирск, Препринт, ИМ СО АН СССР, 1989, є 22. 32 с.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СМЕШАННОГО ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ВНУТРЕННИМИ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

Акбарова С.Х.[1]

[1] Андижанского государственного университета, г.Андижан.

Данная статья посвящена постановке и исследованию одной нелокальной краевой задачи для эллиптико-параболического уравнения вида

$$0 = \begin{cases} y^{m_1}u_{xx} - |x|^{n_1}u_y,\ x>0, \\ (-y)^{m_2}u_{xx} + |x|^{n_2}u_{yy},\ x<0, \end{cases} \tag{1}$$

где $m_k, n_k = const\,(k=1,2)$, причем $n_1=n_2$, $m_1>0$, $m_2>0$, $m_2>n_2>\max\left(m_1, \frac{n_2+2}{m_2+2}\right)-1$.

Пусть область Ω, ограниченная отрезками A_0A_1, A_1B_1, B_1B_0 прямых $x=h_1$, $y=Y$, $x=-h_1$ соответственно при $y>0$ и гладкими кривыми

$$\sigma_i : \frac{1}{q_2^2}|x|^{2q_2} + \frac{1}{p_2^2}(-y)^{2p_2} = \frac{h_1^{2q_2}}{q_2^2}\ (i=1,2)$$

при $y<0$, $h_1=(2q_1)^{1/q_1}$, $2q_i=n_i+2\,(i=1,2)$, $2p_2=m_2+2$, $Y=const>0$, и при $i=1\,x>0$, при $i=2\,x<0$.

Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического и эллиптико-параболического типов с двумя линиями и различными порядками исследованы в работах М. С. Салахитдинова и его учеников. Отметим работы[1-2].

Обозначим через Ω_1^+ и Ω_2^+ параболические части, Ω_1^- и Ω_2^- эллиптические части смешанной области Ω;

$$I_1^+ = \{(x,y) : 0 < x < h_1,\, y = 0\}\,,\, I_1^- = \{(x,y) : -h_1 < x < 0,\, y = 0\}\,,$$
$$I_2^+ = \{(x,y) : x = 0,\, 0 < y < Y\}\,,\, I_2^- = \{(x,y) : x = 0,\, -h_2 < y < 0\}\,,\, h_2 = \left(\tfrac{p_2}{q_2} h_1^{2q_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}\,,$$
$$2\alpha_2 = n_2/(n_2+2),\, 2\beta_2 = m_2/(m_2+2).$$

Задача TC. Требуется найти функцию $u(x,t)$ удовлетворяющую следуюшими условиями:

1) $u(x,t) \in C^1(\Omega_i^+ \cup \Omega_i^- \cup \sigma_i)$; $u_y(x,-0) \in C(I_1^- \cup I_1^+)$, $u_x \in C(I_1^- \cup I_1^+ \cup I_2^-)$, причем $u_y(x,-0)$ и u_x могут обращаться в бесконечность порядка меньше $(1-2\beta_2)/(1-2\alpha_2)$ и единицы в точках $A_0(h_1,0)$, $B_0(-h,0)$, $O(0,0)$, $C(0,-h_2)$ соответственно;

2) удовлетворяет разрывным условиям склеивания вида

$$u(+0,y) = u(-0,y) + \alpha(y),\, y \in \overline{I_2^+}, \tag{2}$$

$$u_x(+0,y) = \beta(y) u_x(-0,y) + \gamma(y),\, y \in \overline{I_2^+}; \tag{3}$$

3) $u(x,y)$—-является регулярным в области $\Omega \setminus I_2^+$ решением уравнения (1);

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{x=h_1} = \phi_1(y),\, 0 \le y \le Y, \quad u(x,y)|_{x=-h_1} = \phi_2(y),\, 0 \le y \le Y, \tag{4}$$

$$\left(\rho_i(s) A_s^{\pm}[u] + \delta_i(s) u\right)\Big|_{\sigma_i} = \psi_i(s),\, 0 < s < l; \tag{5}$$

5) выполняются условия склеивания

$$\lim_{y\to+0} y^{-m_1} u_y(x,y) = \lim_{y\to-0} u_y(x,y) \quad \text{на}\, I_1^+ \cup I_1^-, \tag{6}$$

$$\lim_{y\to+0} u_x(x,y) = \lim_{y\to-0} u_x(x,y) \quad \text{на}\, I_2^-, \tag{7}$$

где s—-длина дуги кривой σ_i, отсчитываемая от точки $A_i(\pm h_1, 0)$, l—-длина кривой σ_i, а $A_s^{\pm}[\,] = (-y)^{m_2} \frac{dy}{ds}\frac{\partial}{\partial x} - (\pm x)^{n_2}\frac{dx}{ds}\frac{\partial}{\partial y}$ (при $i = 1$ берется верхний знак, а при $i = 2$—-нижний знак), $\alpha(y)$, $\beta(y)$, $\gamma(y)$, $\phi_i(y)$, $\psi_i(s)$, $\rho_i(s)$, $\delta_i(s)\,(i = 1,2)$—- заданные функции, причем

$$\alpha(y) \in C(\overline{I_2^+}) \cap C^1(I_2^+),\, \beta(y), \gamma(y) \in C(\overline{I_2^+}),\, \beta(y) > 0, \tag{4}$$

$$\phi_i(y) \in C[0,Y] \cap C^1(0,Y), \tag{9}$$

$$\rho_i^2(s) + \delta_i^2(s) \ne 0,\, \rho_i(s), \delta_i(s), \psi_i(s) \in C[0,l]. \tag{10}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Если выполняются условия (8), (9), (10) и

$$\rho_i(s) \cdot \delta_i(s) \ge 0,\, 0 \le s \le l\,(i = 1,2), \tag{11}$$

то решение задачи TC существует и единственно.

Единственность решения поставленной задачи доказывается методом интегралов энергии. Существование решения эквивалентном образом сведетсяк системе сингулярных интегральных уравнений нормального типа и его индекс равен нулю в классе функций $h(0)$ [3].

Литература

1. *Салахитдинов М.С., Хасанов А.* //Дифференциальные уравнения. 1983, № 1. С. 110.

2. *Салохитдинов М.С., Исломов Б.И.* Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения.Ташк. гос. Пед. Ун-т.-Т.: MUMTOZ SO"Z,-264 с.

3. *Исломов Б.* // Известия АН УзССР. 1985, № 6, С. 12.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Акбарова М.Х.[1]

[1] Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразми, Узбекистан, Ташкент

В настоящей работе исследуется одна нелокальная краевая задача типа Бицадзе-Самарского для уравнения

$$u_t = xu_{xx} + \alpha(x,t)u_x, \tag{1}$$

где коэффициент

$$\alpha(x,t) = \begin{cases} \alpha_1, \ (x,t) \in \Omega^+ \\ \alpha_2, \ (x,t) \in \Omega^- \end{cases} \quad (0 < \alpha_j = const < 1, \ i = 1,2)$$

является заданной непрерывной функцией в области $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup S$, причем

$$\Omega^+ = \{(x,t) : 0 < x < \infty, \ 0 < t \leq 1\}, \quad \Omega^- = \{(x,t) : -1 < x < 0, \ 0 \leq t < 1\},$$

$S = \{(x,t) : x = 0, \ 0 < t < 1\}$.

Введем обозначения:

$$\Gamma_0 = \{(x,t) : 0 \leq x < \infty, \ t = 0\}, \ \Gamma_1 = \{(x,t) : -1 \leq x \leq 0, \ t = 1\}.$$

Доказана однозначная разрешимость следующей задачи.

Задача. Найти регулярное в области $\Omega \setminus S$ решение $u(x,t) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(x,t)_{\Gamma_0} = \phi_0(x), \quad u(x,t)|_{\Gamma_1} = \phi_1(x);$$

$$u(-1,t) + a_0(t)u(0,t) + \sum_{j=1}^{m} a_j(t)u(\beta_j(t),t) = \mu(t), \ 0 \leq t \leq 1,$$

и условию склеивания

$$\lim_{x \to +0} x^{\alpha_1} u_x = \lim_{x \to -0} (-x)^{\alpha_2} u_x,$$

где $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$, $\mu(t)$, $a_0(t)$, $a_j(t)$, $(j = \overline{1,m})$—- заданные достаточно гладкие функции, причем $\phi_0(x)$—-ограниченна в $[0,\infty)$, $\phi_1(x) \in C[-1,0] \cap C^2(0,1)$, $\mu(t), a_0(t), a_j(t) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$.

Литература

1. *Терсенов С.А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск: 1973. 143 с.

2. *Исамухамедов С.С., Акбарова М.Х.* Нелокальные краевые задачи для вырождающегося параболического уравнения уравнения смешанного типа // Междунар.науч.конф. "Вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа". Ташкент. 23-25 ноября 1993 год. С. 77.

Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта для уравнения третьего порядка с эллиптико - гиперболическим оператором

Аликулов Е.К.[1]

[1] Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразми, Узбекистан, Ташкент

[1]aliqulov.yolqin.1984@mail.ru

Пусть $\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3\cup\left(\overline{\Omega}_0\cap\overline{\Omega}_1\right)\cup\left(\overline{\Omega}_0\cap\overline{\Omega}_2\right)\cup\left(\overline{\Omega}_1\cap\overline{\Omega}_2\right)\cup\left(\overline{\Omega}_2\cap\overline{\Omega}_3\right)$ - область трёхмерного пространства (x,y,z), ограниченная поверхностями:

$$S_0:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4},\quad y\geq 0,\ -\infty<z<+\infty,$$
$$S_1:x+y=0,\quad y\leq 0,\quad 0\leq x\leq\frac{1}{2},\ -\infty<z<+\infty,$$
$$S_2:x-y=x_0,\quad y\leq 0,\quad \frac{x_0}{2}\leq x\leq x_0,\ -\infty<z<+\infty,$$
$$S_3:x+y=x_0,\quad y\leq 0,\quad x_0\leq x\leq\frac{1+x_0}{2},\ -\infty<z<+\infty,$$
$$S_4:x-y=1,\quad y\leq 0,\quad \frac{1+x_0}{2}\leq x\leq 1,\ -\infty<z<+\infty,\ x_0\in[0,1].$$

Для уравнения

$$0=\frac{\partial}{\partial x}\begin{cases} U_{yy}+U_{xx}-U_{zz}, & \text{в}\quad \Omega_0,\\ U_{yy}-U_{xx}-U_{zz}, & \text{в}\quad \Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3\end{cases}\tag{1}$$

в области Ω будем изучать аналог задачи Геллерстедта.

Задача АГ. Определить функцию $U(x,y,z)$ такую, что: 1) $U(x,y,z)\in C^1(\Omega\cup S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4)$, причем $U_y(x,0,z)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы на $\overline{S}_0\cap\overline{S}_1$ ($\overline{S}_2\cap\overline{S}_3$), и ограничена на $\overline{S}_2\cap\overline{S}_3$ ($\overline{S}_0\cap\overline{S}_4$); 2) $U(x,y,z)\in C^{3,2,2}_{x,y,z}(\Omega_j)$, $\quad U_{xyy}(x,y,z)$, $\quad U_{xzz}(x,y,z)\in C(\Omega_j)$, и удовлетворяет уравнение (1) в областях Ω_j $(j=\overline{0,3})$; 3) $U(x,y,z)$ удовлетворяет условиям

$$U|_{S_0}=\Phi(x,z),\ 0\leq x\leq 1,\ \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{S_0}=\Phi_2(x,z),\ 0\leq x\leq\frac{1}{2},\ -\infty<z<+\infty,$$

$$U|_{S_1}=\Psi_1(x,z),\ 0\leq x\leq\frac{x_0}{2},\ \ U|_{S_3}=\Psi_2(x,z),\ x_0\leq x\leq\frac{1+x_0}{2},\ -\infty<z<+\infty,$$
$$\lim_{|z|\to\infty}U=\lim_{|z|\to\infty}U_y=\lim_{|z|\to\infty}U_x=\lim_{|z|\to\infty}U_z=0,$$

где $\Phi_j(x,z),\ \Psi_j(x,z)$ $(j=1,2)$–заданные достаточно гладкие фукции, причем

$$\Psi_1(0,z)=\Phi_1(0,z),\ \lim_{|z|\to\infty}\Phi_j(x,z)=\lim_{|z|\to\infty}\Psi_j(x,z)=0\ (j=1,2).$$

Основным методом исследования задачи АГ является преобразование Фурье[1,2]. На основании преобразование Фурье при определенных ограничениях на заданные функции доказывается однозначная разрешимость задачи АГ.

Литература

1. *Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М.* Краевые задачи для уравнений парабологиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.

2. *Исломов Б.И., Аликулов Е.К.* Трёхмерный аналог задачи Геллерстедта для нагруженного уравнения эллиптико-гиперболического типа. //Материалы рес. конф. "Актуальные проблемы математического анализа 2012, № 1, С.104-107.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Бабаев С.[1]**, Бекмаматов З.М.**[2]**,**

[1] БатГУ, Кыргызстан, Баткен,)
[1]`lboboev@rambler.ru`, [2]`zbekmamatov@mail.ru`

Постановка задачи. Пусть D – прямоугольная область плоскости переменных x и y, ограниченная отрезками прямых $x = 0, x = l, y = h, y = -h_1, (h > 0, h_1 > 0) : D_1 = D \bigcap (y > 0), D_2 = D \bigcap (y < 0)$.

Задача 1. Найти функцию $u(x,y) \in C(\bar{D}) \bigcap C^2(D) \bigcap \left[C^{3,1}_{x,y}(D_1) \bigcup C^{1,3}_{x,y}(D_1) \bigcup C^{3,1}_{x,y}(D_2) \right]$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + C(x,y) \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \tag{1}$$

и краевые условия

$$u(0,y) = \varphi_1(y), u(l,y) = \varphi_2(y),$$
$$u_{xx}(l,y) = \varphi_3(y), u_{yy}(x,h) = f_1(x),$$
$$u(x,h) = f_2(x), 0 \le x \le l, 0 \le y \le h,$$

а также удовлетворяющую в области D_2 уравнению

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + du = 0 \tag{2}$$

и краевые условия

$$u(0,y) = \psi_1(y), \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \psi_2(y), \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \psi_3(y), -h_1 \le y \le 0$$

где $A(x,y), B(x,y), C(x,y), \varphi_i(y), \psi_i(y) (i = \overline{1,3}), f_j(x) (j = 1,2)$ – заданные вещественные функции, удовлетворяющие следующие условия гладкости и условия согласования: $A(x,y), B(x,y) \in C^{1,1}_{x,y}(D_1), C(x,y) \in C(D_1), \varphi_i(y) \in C^3[0,h] (i = 1,2)$,

$$\begin{gathered} f_2(x) \in C^3[0,\ell], \varphi_3(y) \in C^1[0,h], f_1(x) \in C^1[0,l], \psi_1(y) \in C^3[-h_1,0]; \\ \psi_2(y) \in C^2[-h_1,0], \psi_3(y) \in C^1[-h_1,0]; \varphi_1(0) = \psi_1(0), \\ \varphi_1(h) = f_2(0), \varphi_3''(h) = f_1''(l), f_2(l) = \varphi_2(h), f_2''(l) = \varphi_3(h), f_1(l) = \varphi_2''(h), \end{gathered} \tag{3}$$

$\varphi_1''(h) = f_1(0), \psi_2(0) = \varphi_1'(0), \psi_3(0) = \varphi_1''(0); d$ – заданная вещественная постоянная.

Согласно постановке задачи 1, введем следующие обозначения

$$u(x,+0) = u(x,-0) = \tau(x), u_{yy}(x,+0) = \mu(x), 0 \le x \le l,$$

где $\tau(x)$ и $\mu(x)$ – пока неизвестные функции, причем для них должны быть выполнены следующие условия согласования:

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \tau(l) = \varphi_2(0), \tau''(l) = \varphi_3(0), \varphi_1''(0) = \mu(0), \varphi_2''(0) = \mu(l). \tag{4}$$

Исследования краевых задач для гиперболического и смешанно параболо–гиперболического уравнения четвертого порядка рассмотрены в [1], [2]. Представляет интерес исследование краевых задач для уравнения составного и гиперболического типов четвертого порядка. Некоторые классы таких уравнений изучены в [3], [4]. По классификации авторов работы [5] уравнения (1) и (2) являются соответственно уравнениями составного и гиперболического типов.

В работе используя методы теории уравнений смешанного типа [6] задача 1 расщепляется на три самостоятельные задачи, в том числе на нелокальную задачу. Задача 1 эквивалентным образом в области D_2 редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\mu(x) = \int\limits_0^l N(x,\xi)\mu(\xi)d\xi + F(x),$$

где $N(x,\xi)$ и $F(x)$ – вполне определенные функции.

Пусть выполнено условие

$$l \cdot \max_{0\leq x,\xi\leq l} |N(x,\xi)| < 1, \tag{5}$$

Таким образом, имеет место следующая:

Теорема. *Пусть выполнены условия (3),(4) и (5). Тогда решение задачи 1 существует, оно единственно.*

Литература

1. *Сопуев А.* Краевые задачи для уравнения четвертого порядка и уравнения смешанного типа // Дис. докт. физ.-мат. наук, Бишкек, 1996. – 249

2. *Осмоналиев А.Б.* Краевые задачи для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка с линией сопряжения // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, выпуск 32. –Бишкек: Илим, 2003. – С. 228–234.

3. *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. // – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.

4. *Бекмаматов З.М.* О разрешимости задачи сопряжения для одного класса уравнения составного и гиперболического типов четвертого порядка на плоскости. // – Сборник статей по материалам XLII международной научно-практической конференции. – Новосибирск, 2016. – С. 87.

5. *Джураев Т.Д.,Сопуев А. К.* К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. // – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.

6. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. 164 с.

Об одной нелокальной задаче для смешанного дробного параболо - гиперболического уравнения с вырождением по времени

Бердышев А.С.[1], **Кадиркулов Б.Ж.**[2],

[1] Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Казахстан, Алматы
[2] Ташкентский государственный институт востоковедения, Узбекистан, Ташкент
[1]berdyshev@mail.ru, [2]kadirkulovbj@gmail.com

Пусть $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1, \, -p < t < q\}$, $\Omega^+ = \Omega \cap (t > 0)$, $\Omega^- = \Omega \cap (t < 0)$, где $p, q > 0$, $\alpha \in (0,1]$, $\beta \in (1,2]$, $\gamma \in [0,1)$. Рассмотрим уравнение

$$f(x,y) = \begin{cases} {}_C D_{0t}^{\alpha}(t^{\gamma}u) - t^{\gamma}u_{xx}, \; t > 0, \\ -{}_C D_{t0}^{\beta}u - u_{xx}, \; t < 0, \end{cases} \qquad (1),$$

где ${}_C D_{0t}^{\alpha}\varphi(t)$, ${}_C D_{t0}^{\beta}\varphi(t)$ - операторы дробного дифференцирования в смысле Капуто, определяемые соответственно по формулам [1, стр. 92]

$${}_C D_{0t}^{\alpha}\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{\varphi'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau,$$

$${}_C D_{t0}^{\beta}\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int\limits_t^0 \frac{\varphi''(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-1}} d\tau.$$

В области Ω для уравнения (1) рассмотрим следующую нелокальную задачу.

Задача S. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

1) $t^{\gamma}u \in C(\bar{\Omega}^+)$, ${}_C D_{0t}^{\alpha}(t^{\gamma}u) \in C(\Omega^+)$, ${}_C D_{0t}^{\beta}u \in C(\Omega^-)$, $u_{xx} \in C(\Omega^+ \cup \Omega^-)$;

2) удовлетворяет уравнению (1) в области $\Omega^+ \cup \Omega^-$;

3) удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,t) = 0, \, t \in [-p, \, 0) \cup (0, \, q],$$

$$u_x(0,t) = u_x(1,t), \, t \in [-p, \, 0) \cup (0, \, q],$$

$$u(x,-p) = 0, \; 0 \le x \le 1;$$

4) удовлетворяет условиям склеивания

$$\lim_{t \to 0+} (t^{\gamma}u(x,t)) = u(x,-0), \; 0 \le x \le 1,$$

$$\lim_{t \to 0+} ({}_C D_{0t}^{\alpha}(t^{\gamma}u)) = u_t(x,-0), \; 0 < x < 1.$$

Для решения задачи использованы методы спектральной теории линейных операторов, теория интегральных уравнений и рядов. Доказаны теоремы о существовании и единственности решения задачи, а решение получено в виде ряда.

Литература

1. *A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo.* Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B. V., Amsterdam, 2006. xvi+523 pp.

Краевая задача для нагруженного уравнения смешанного типа с нехарактеристической линией изменения типа

Балтаева У.И.
umida_baltayeva@mail.ru

Пусть $\Omega_1 \subset R^2$ область, ограниченная отрезками прямых $A(0,0)$, $A_0(0,1)$, $B_0(1,1)$, и $B(1,0)$, т.е. квадрат , $\Omega_2 \subset R^2$ характеристический треугольник, ограниченный отрезком AA_0 и двумя характеристиками $AC : x+y=0$, $A_0C : x-y=-1$ уравнения колебания струны, пересекающимися в точке $C(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Введем следующие обозначения:

$$\Omega = \Omega_1 \cup AA_0 \cup \Omega_2, \;\; AA_0 = \{(x,y) : x=0, \; 0<y<1\}.$$

Рассмотрим линейное нагруженное интегро-дифференциальное[1] уравнение

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\right) Lu = 0, \tag{1}$$

где

$$Lu \equiv \begin{cases} L_1 u \equiv u_{xx} + a_1(x,y)u_x + b_1(x,y)u_y + c_1(x,y)u - \sum\limits_{i=1}^{n} d_i D_{0y}^{\alpha_i} u\,(0,y)\,, \; x \geqslant 0, \\ L_2 u \equiv u_{xx} - u_{yy} + a_2(x,y)u_x + b_2(x,y)u_y + c_2(x,y)u - \sum\limits_{i=1}^{n} e_i D_{0\xi}^{\beta_i} u\,(0,\xi)\,, \; x \leqslant 0, \end{cases}$$

a, b, и $c-$ заданные постоянные числа, $\xi = x+y$, a_i, b_i, c_i, d_i, e_i заданные функции в $\Omega_i\,(i=1,2)$ причем, $b_1(x,y) < 0, c_1(x,y) \le 0$ в $\bar{\Omega}_1$, кроме того, в Ω_1 функции $a_1, b_1, c_1, d_i, a_{1x}, a_{1y}, b_{1x}, b_{1y}, d_{ix}, d_{iy}$ удовлетворяют условию Гельдера, а в области Ω_2, $a_2, b_2 \in C^2\left(\bar{\Omega}_2\right), c_2 \in C^1\left(\bar{\Omega}_2\right)$, $e_i \in C^1\left(\bar{\Omega}_2\right)$. $D_{0z}^{\alpha_i}-$ интегро-дифференциальный оператор (в смысле Римана-Лиувилля), α_i, $\beta_i < 1$, $i = 1,..,n$.

Рассмотрим следующую задачу для уравнения (1):

Задача AT_1**.** Найти регулярное решение $u(x,y)$, в областях Ω_1 и Ω_2, уравнения (1), которое $u(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \bigcap C^1(\Omega \cup AC \cup A_0C)$, а также обладающее непрерывными производными $u_x(u_y)$ вплоть до BB_0, AB соответственно и удовлетворяющее граничным условиям

1) если $0 < b/a \le 1$, то выполняются условия:

$$u(1,y) = \varphi_1(y), \; 0 \le y \le 1,$$

$$u(x,0) = f_1(x), \; 0 \le x \le 1,$$

$$u_y(x,0) = f_2(x), \; 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$u(x,y)|_{AC} = \psi_1(y), \; 0 \le y \le 1/2 \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_2(y), \;\; 0 \le y \le 1/2, \tag{4}$$

2) если $1 < b/a < +\infty$, то выполняются условия (2)-(6)

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{A_0C} = \psi_3(y), \;\; 0 \le y \le 1/2,$$

и условия склеивания

$$u_x(+0,y) = u_x(-0,y), u_{xx}(+0,y) = u_{xx}(-0,y)$$

где $\varphi_1, f_1, f_2, \psi_1, \psi_2$ и ψ_3 заданные функции, причем $f_1(0) = \psi_1(0)$, $\psi_1'(0) = \sqrt{2}\psi_2(0) - 2f_1'(0)$.

Замечания. В задаче AT_1, если $-1 < b/a \leq 0$ и $-\infty < b/a < -1$, при помощи замены независимой переменной $x = 1 - \xi$ редуцируются к случаям 1) и 2) соответственно. Поэтому достаточно рассмотреть только случаи $0 < b/a \leq 1$ и $1 < b/a < +\infty$.

Заметим что, краевые задачи для уравнении (1) было изучено в [3], в области характеристического линия изменения типа.

Теорема. Пусть $0 < b/a \leq 1$, $b_1(x,y) < 0$, $c_1(x,y) \leq 0$ и $a_i(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in \Omega_i$, и выполнены условия

$$f_1(x), \varphi_1(y) \in C^1[0,1], (i=1,2), \ f_2(x) \in C[0,1] \cap C^1(0,1),$$

$$\psi_1(y) \in C^1[0,1/2] \cap C^3(0,1/2), \psi_2(y) \in C[0,1/2] \cap C^2(0,1/2)$$

то в области Ω существует единственное решение задачи AT_1.

Литература

1. **Нахушев А.М.** *О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка* // Дифф. уравнения. 1976.-No 1.- С. 103-108.
2. **Нахушев А.М.** *Уравнения математической биологии.* М.: Высш.шк., 1995. 301 с.
3. **Islomov, B., Baltaeva, U.I.** *Boundary value problems for a third-order loaded parabolic-hyperbolic equation with variable coefficients* // E. Journal of Differential Equations, Volume 2015. 2015: p.1-10.

Задача Бицадзе-Самарского для уравнения эллиптического типа

Болтаев М.Ш.

Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, Узбекистан, г. Ташкент
E-mail: m-boltayev@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m > 0 \tag{1}$$

в конечной односвязной области Ω плоскости независимых переменных x, y ограниченной при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$ с концами в точках $A(-1,0)$ и $B(1,0)$ и отрезком AB оси $y = 0$.

Задача BS. (Бицадзе-Самарского). Требуется найти в области Ω функцию $u(x,y) \in C(\bar{\Omega})$ удовлетворяющую следующим условиям: 1) $u(x,y) \in C^2(\Omega^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области; 2) $u(x,y)$ удовлетворяет условиям

$$u(x,\sigma_0(x)) = c(x)u(x,0) + \varphi(x), \quad x \in \overline{AB}, \quad \lim_{y\to+0} u_y(x,y) = \nu(x), \ x \in AB, \tag{2}$$

где $\varphi(x)$, $c(x)$, $\nu(x)$ – заданные функции, причем

$$c(x), \ \varphi(x) \in C^{0,\alpha}[-1,1], \quad \nu(x) \in C^2(-1,1), \quad 0 \leqslant c(x) < 1, \tag{3}$$

$$\varphi(x) = (1-x^2)\varphi_0(x), \quad c(x) = (1-x^2)c_0(x), \ \nu(x) = (1-x^2)^{2\beta-1+\varepsilon}\nu_0(x), \quad \varepsilon > 0, \tag{4}$$

$$\varphi_0(x), \quad c_0(x), \quad \nu_0(x) \in C^2[-1,1], \ \beta = m/2(m+2), \quad 0 < \beta < 0,5. \tag{5}$$

Заметим, что условие (2) является условием Бицадзе-Самарского [1] связывающее значения искомой функции на σ_0 и AB.

Доказана следующая теорема.

Теорема. Если выполнены условия (3)-(5), то в области Ω существует единственное регулярное решение задачи BS.

Доказательство теоремы. Используя решение задачи Дирихле для уравнения (1) [2] с учетом (2) задачу BS эквивалентному образом, сведем к сингулярному интегральному уравнению относительно функции $\tau(x) = u(x,0)$.

Полученное сингулярное интегральное уравнение известным методом регуляризации Карлемана - Векуа [3] сведем к эквивалентному уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи BS. Единственность решения задачи BS следует из принципа экстремума для эллиптических уравнений [2].

Литература

1. *Бицадзе А. В., Самарский А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739-740.

2. *Мирсабурова Гулбахор. М.* Задачи Бицадзе-Самарского с недостающим условием смещения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом. // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 4. С. 658-669.

3. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука. 1968. 512 с.

Комбинированная задача с условиями Трикоми и Франкля для уравнения параболо-гиперболического типа

Вафоев С. С.

Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, г.Ташкент, Узбекистан

e-mail: vafoevss@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$0 = Lu \equiv \begin{cases} u_{xx} - u_y, & (x,y) \in D_1, \\ u_{xx} - u_{yy}, & (x,y) \in D_2 \cup D_3, \end{cases} \tag{1}$$

где D_0 − область, ограниченная отрезками AB, BC, CD, DA прямых $y = 0, x = 1,\ y = h,\ x = 0$ соответственно; D_1 − характеристический треугольник, ограниченный отрезком AB оси Ox и двумя характеристиками $AC_1 : x + y = 0,\ BC_2 : x - y = 1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$, пересекающимися в точке $C_1\,(0,5\,;\,-0,5)$; D_2 − характеристический треугольник, ограниченный отрезком AD оси Oy и двумя характеристиками $AC_2 : x + y = 0$, $DC_2 :\ y - x = 1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $D(0,h)$, пересекающимися в точке $C_2\,(-0,5\,;\,0,5)$;

Введем обозначения:

$$J \equiv AB = \{(x,y):\ 0 < x < 1,\ y = 0\},$$

$$I \equiv AD = \{(x,y):\ x = 0,\ 0 < y < h\},\quad D_0 = D \cap \{x > 0, y > 0\},$$

$$D_1 = D \cap \{x > 0, y < 0\},\quad D_2 = D \cap \{x < 0,\ y > 0\},\quad D = D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup J \cup I,$$

$$I_1 = \{(x,y):\ x = 0,\quad 0 < y < k,\},\ I_2 = \{(x,y):\ x = 0,\quad k < y < 1,\},\ k \in I,$$

$$J_1 = \{(x,y):\ 0 < x < c,\quad y = 0\},\ J_2 = \{(x,y):\ c < x < 1,\quad y = 0\}, c \in J.$$

Через $P_1(P_2)$ обозначим, соответственно, точки пересечения характеристик $AC_1(AC_2)$ с характеристиками, исходящими из точки $E_1(c,\,0) \in J(E_2(0,k\,) \in I)$.

Пусть $p(x) \in C^1[0,q]$ - диффеоморфизм из множества точек отрезка $[0,q]$ в множество точек отрезка $[q,1]$, причем $p'(x) < 0$, $p(0) = 1$, $p(q) = q$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $p(x) = 1 - k_0\, x$, $k_0 = (1-q)/q$.

В задаче Трикоми во всех точках характеристики AC_1 и AC_2 задается значение искомой функции. В настоящей работе исследуется корректности задачи, где часть характеристики AC_1 и AC_2 освобождена от краевого условия и это недостающее условие Трикоми эквивалентно заменена нелокальным условием Франкля [1, 2] на разных частях краев разреза вдоль отрезка AB и AD соответственно.

Задача TF. Найти в области D функцию $u(x,y)$, обладающую свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{D})$;

2) $u(x,y) \in C^{2,1}_{x,y}(D_1 \cup AB \cup CD) \cap C^{2,2}_{x,y}(D_j \backslash E_j P_j)$, удовлетворяет уравнению (1) в областях D_1 и $D_j \backslash E_j P_j$, $(j = 1, 2)$;

3) $u_y \in C\,(D_0 \cup J_1 \cup J_2) \cap C\,(D_1 \cup J_1 \cup J_2)$ и на интервалах J_j $(j = 1, 2)$ выпол-няется условие склеивания

$$\lim_{y \to -0} u_y\,(x,y) = \lim_{y \to +0} u_y\,(x,y)\,, (x,0) \in J_1 \cup J_2, \tag{2}$$

4) $u_x \in C\,(D_0 \cup I_1 \cup I_2) \cap C\,(D_2 \cup I_1 \cup I_2)$ и на интервалах I_j $(j = 1, 2)$ выполняется условие склеивания

$$\lim_{x \to -0} u_x\,(x,y) = \lim_{x \to +0} u_x\,(x,y)\,,\ \ (0,y) \in I_1 \cup I_2, \tag{3}$$

5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{x=1} = \varphi_0(y),\ \ 0 \leqslant y \leqslant h, \tag{4}$$

$$u|_{AP_1} = \varphi_1\,(x)\,, \qquad 0 \leqslant x \leqslant c/2,\ \ u|_{AP_2} = \varphi_2(y),\quad 0 \leqslant y \leqslant k/2, \tag{5}$$

$$\mu_1\, u(x,0) - u(p_1(x),0) = \psi_1(x),\ \ (x,0) \in \bar{J}_1, \tag{6}$$

$$\mu_2\, u(0,y) - u(0,p_2(y)) = \psi_2(y),\ \ (0,y) \in \bar{I}_1, \tag{7}$$

где $\varphi_0(y)$, $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$ $(i = 1, 2)$ – заданные функции, причем

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0,\ \ \psi_i(0) = 0,\quad \psi_1(c) = 0,\quad \psi_2(k) = 0, \tag{8}$$

$$\mu_j \in (-\infty;\ +\infty) \backslash \{1\}\,, \tag{9}$$

$$\varphi_0(y) \in C\,[0,h] \cap C^{\,1}\,(0,h)\,,\ \ \varphi_1\,(x) \in C^2(\bar{J}_1),\ \ \varphi_2\,(y) \in C^2(\bar{I}_1), \tag{10}$$

$$\psi_1(x) \in C[0\,,\,c] \cap C^{1,\alpha}(0,c),\ \ \psi_2(y) \in C[0\,,\,k] \cap C^{1,\alpha}(0,k),\quad 0 < \alpha < 1. \tag{11}$$

Условия (6) и (7) является аналогом условия Франкля [3], связывающей значения искомой функций соответственно на верхнем и нижнем краях разрезов вдоль отрезков $[0,q]$ и $[q,1]$.

Доказана следующая теорема.

Теорема. Если выполнены условия (8)–(11), то в области D существует единст-венное регулярное решение задачи TF.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Франкль Ф.И.* Избранные труды по газовой динамике. М., 1973.

2. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука. 1970. -296 с.

3. *Мирсабуров М.* Задача с недостающим условием Трикоми на характеристике и аналогом условия Франкля на отрезке линии вырождения для одного класса уравнений смешанного типа.// Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50.
№ 1, С. 79-87.

Об одной нелокальной краевой задачи для нагруженного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в прямоугольнике.

Джамалов1 С.З.[1].Нишонбоев2 А.С.[2].

[1] Институт математики при АНУз, Узбекистан,г.Ташкент
[2] Ферганский Государственний Университет, Узбекистан,г.Фергана.
[1]e-mail: siroj63@mail.ru,
[2]e-mail: azizbek.nishonboev@mail.ru,

В докладе излагаются некоторые результаты об однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами для нагруженного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка. Нагруженным уравнением принято называть уравнения с частными производными, содержащие в коэффициентах значения тех или иных функционалов от решения уравнения [3,4,5].

В прямоугольнике $Q = (0,1) \times (0,T) = \{ (x,t);\ 0 < x < 1;\ \ 0 < t < T < +\infty \}$ рассмотрим нагруженное дифференциальное уравнение второго порядка

$$Lu = K(x,t)u_{tt} - u_{xx} + \alpha\,(x,t)u_t + c(x,t)u = f(x,t) + Pu(x,0) \tag{1}$$

где,

$$Pu\,(x,0) = b_2(x,t)u_{xx}(x,0) + b_1(x,t)u_x(x,0) + b_0(x,t)u(x,0)$$

Предположим, что $K(x,0) \le 0 \le K\,(x,T)$ и пусть коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции. Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $K(x,t)$ по переменной t внутри области не налагается никаких ограничений [1].

Краевая задача. Найти обобщенное решение уравнения (1) удовлетворяющее краевым условиям.

$$u\,(x,0) = \gamma\, u(x,T) \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \tag{3}$$

где, γ-некоторое постоянное число, отличное от нуля, величина которого будет уточнено.

Отметим, что в работе [2] в случае когда, $Pu(x,0) = 0$ и $K\,(x,0) \le 0 \le K\,(x,T)$ при выполнения некоторых условиях на коэффициенты уравнения и правую часть уравнения (1) была доказана корректность решения задачи (2),(3) из пространства Соболева $W\,{}^l_2(Q)$ при $2 \le l$-целое число.

В данной работе, в случае, когда $Pu(x,0) \neq 0$ и при выполнении некоторых условиях на коэффициенты уравнение (1) доказывается методами "ε-регуляризации,"априорных оценок и продолжением по параметру однозначное разрешимость задачи (1)-(3) из пространства Соболева $W_2^3(Q)$.

Литература

1. *Врагов В.Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики: Новосибирск.НГУ, 1983. -84 с.

2. *Джамалов С.З.* Об одной нелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка: // Уз.МЖ., 2014, No-1.с.5-15.

3. *Дженалиев М.Т.* К теории краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений: Алматы: Институт теоретической и прикладной математики,1995.

4. *Кожанов А.И.* Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче: // Математические заметки. 2004,Т.78.No-6, с.840-853.

5. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения: //Дифференц. уравнения,19:1(1983),86-94.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Зуннунов Р.Т.

Институт механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз, Узбекистан, Ташкент
e-mail: zunnunov@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$sign y|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2|y|^m u = 0, \qquad m > 0 \tag{1}$$

в неограниченной смешанной области $\Omega = \Omega_1 \cup AB \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x,y): \ -\infty < x < +\infty, \ 0 < y < 1\}$, $AB = \{(x,y): \ -1 < x < 1, \ y = 0\}$, а Ω_2 – область ограниченная, при $y < 0$ отрезком $\overline{AB}$ и характеристиками $AC: x - [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2} = -1$ и $BC: x + [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2} = 1$, уравнения (1).

Пусть λ – заданное действительное число, причем $\lambda = \lambda_1$ при $y > 0$ и $\lambda = \lambda_2$ при $y < 0$. Через $\theta_{-1}(x)$ и $\theta_1(x)$ обозначим точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих и точки $(x,0) \in AB$ с характеристиками AC и BC соответственно.

Задача T^∞. Найти функцию $u\ (x,y)$, обладающую следующими свойствами;

1) $u\ (x,y) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1)$, причем $u_y\ (x,0)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше чем $1-2\beta$, при $x \to \pm 1$.

2) $u\ (x,y)$ является регулярным в Ω_1 и обобщенным из класса R_1 [1] в Ω_2 решением уравнения (1).

3) $u\ (x,y)$ удовлетворяет следующим условиям

$$u\ (x,1) = \varphi_1(x), \quad -\infty < x < +\infty; \qquad u\ (x,0) = \varphi_2(x), \quad -\infty < x \le -1;$$

$$u\ (x,0) = \varphi_3(x), \quad 1 \le x < +\infty; \qquad \lim_{x\to\pm\infty} u\,(x,y) = 0, \quad \text{равномерно по} \quad y \in [0,1];$$

$$a(x)\,A^{1,\lambda_2}_{-1x}\left\{D^{1-\beta}_{-1x}u[\theta_{-1}(x)]\right\} + b(x)\,A^{1,\lambda_2}_{1x}\left\{D^{1-\beta}_{1x}u[\theta_1(x)]\right\} +$$
$$+c(x)\,u_y(x,0) = d(x), \qquad (x,0) \in AB$$

где $a(x), b(x), c(x), d(x), \varphi_i(x)\ (i = 1,2,3)$ – заданные функции, причем $a^2(x)+b^2(x) \ne 0, \ \forall x \in [-1,1]$, $a(x),\ b(x),\ c(x),\ d(x) \in C^1[-1,1]$, а $\varphi_i(x)$ при достаточно больших $|x|$ удовлетворяет неравенству $|\varphi_i(x)| \le M|x|^{-1-\sigma}$. Здесь $\beta = m/(2m+4)$, $M = const > 0$, σ – достаточно малое положительное число, $A^{1,\lambda_2}_{kx}[f(x)]$ – оператор, введенный в [1], а $D^{\delta}_{sx}[f(x)]$ – оператор дробного интегро-дифференцирования порядка δ в смысле Римана-Лиувилля.

Методами интегральных уравнений и принципа экстремума доказывается однозначная разрешимость исследуемой задачи.

Литература

1. *Салахитдинов М.С., Уринов А.К.* Краевые задачи для уравнения смешанного типа со спектральным параметром. Т.: ФАН, 1997. 165 с.

Аналог задачи Трикоми для вырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа второго рода

Исломов Б.И., Фармонов Б. Д.

Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, г. Ташкент
e-mail: islomovbozor@yandex.ru

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-x^p u_y-\mu_1 u\left(x,0\right), \quad x>0,\ y>0, \\ u_{xx}-(-y)^m u_{yy}-\mu_2 u\left(x,0\right), \ x>0,\ y<0, \end{cases} \tag{1}$$

где $m,\ \ p,\ \ \mu_1,\ \ \mu_2$ - любые действительные числа, причем

$$0<m<1, \quad p>0, \quad \mu_1>0, \quad \mu_2>0. \tag{2}$$

Пусть Ω_1 - область, ограниченная отрезками AB, BB_0, AA_0, A_0B_0 прямых $y=0$, $x=1$, $x=0$, $y=h$ соответственно, при $x>0,\ y>0$; Ω_2 - характеристический треугольник, ограниченный отрезком $A\left(0,0\right)B\left(1,0\right)$ оси x и двумя характеристиками $AC\ :\ \ x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0$, $BC\ :\ \ x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=1$ уравнения (1), выходящими из точки $A\left(0,0\right)$ и $B\left(1,0\right)$ и пересекающимися в точке $C\left[0,5;\ -((2-m)/4)^{\frac{2}{2-m}}\right]$ при $x>0,\ y<0,\ \Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup J$, $J=\left\{(x,y):\ \ 0<x<1,\ \ y=0\right\}$, $2\beta=\frac{m}{m-2}$, причем

$$-1<2\beta<0. \tag{3}$$

В области Ω для уравнения (1) исследуется аналог задачи Трикоми.

ЗадачаAT. Найти функцию $u\left(x,y\right)$, обладающую следующими свойствами:
1) $u(x,y)\in C(\overline{D})$; 2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области Ω_1;
3) $u(x,y)$ - обобщенным решением уравнения (1) из класса R_2 [1] в области D_2;
4) $u\left(x,y\right)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{AA_0}=\varphi_1(y), \qquad u(x,y)|_{BB_0}=\varphi_2(y),\ \ 0\leqslant y\leqslant h, \tag{4}$$

$$u|_{AC}=\psi(x),\ 0\leqslant x\leqslant 0,5, \tag{5}$$

5) $u_y\in C\left(D_1\cup J\right)\cap C\left(D_2\cup J\right)$ и на линии вырождения J выполняется условия склеивания

$$\lim_{y\to+0}u_y(x,y)=\lim_{y\to-0}u_y(x,y), \tag{6}$$

равномерно при $(x,0)\in J$; где $\varphi_1(y),\ \varphi_2(y),\ \psi(x)-$ заданные функции, причем

$$\varphi_1(0)=\psi(0)=0, \tag{7}$$

$$\varphi_1\left(y\right),\ \ \varphi_2\left(y\right)\in C\left[0,h\right]\cap C^1\left(0,h\right), \tag{8}$$

$$\psi\left(x\right)\in C^1\left[0;0,5\right]\cap C^3\left(0;0,5\right). \tag{9}$$

Теорема. Если выполнены условия (2), (3), (7)-(9), то в области Ω существует единственное решение задачи AT.

Доказательство теоремы. Любое регулярное решение уравнения (1) при $y\neq 0$ может быть представимо в виде [2], [3]:

$$u\left(x,y\right)=\upsilon\left(x,y\right)+\omega\left(x\right), \tag{10}$$

где

$$\upsilon(x,y)=\begin{cases}\upsilon_1(x,y),\ (x,y)\in\ \Omega_1,\\ \upsilon_2(x,y),\ (x,y)\in\Omega_2,\end{cases}\qquad\qquad \omega(x)=\begin{cases}\omega_1(x),\\ \omega_2(x),\end{cases}\tag{11}$$

здесь $\upsilon_1\,(x,y)$ и $\upsilon_2\,(x,y)$ регулярные решения уравнения

$$L\upsilon_1\equiv\upsilon_{1\,xx}-x^p\upsilon_{1y}=0,\ (x,y)\in\ \Omega_1,\tag{12_1}$$

$$L\upsilon_2\equiv\upsilon_{2\,xx}-(-y)^m\upsilon_{2\,yy}=0,\ (x,y)\in\Omega_2,\tag{12_2}$$

а $\omega_j(x)$ произвольные дважды непрерывно дифференцируемые решения уравнения

$$\omega_j''(x)-\mu_j\omega_j(x)=\mu_j\upsilon_j(x,0),\quad (j=1,2),\ \ 0\leqslant x\leqslant 1,\tag{13_j}$$

Учитывая, что функция $ax+b$ является решениям уравнениям (12_1) и (12_2), произвольные функции $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ можно почининить условиям

$$\omega_j(0)=\omega_j'(0)=0,\ \ (j=1,2).\tag{14_j}$$

Решение задачи Коши (13_j) и (14_j) $(j=1,2)$ имеет вид:

$$\omega_j(x)=\sqrt{\mu_j}\int\limits_0^x sh\sqrt{\mu_j}(x-t)\cdot\tau(t)dt,\quad (x,0)\in\bar{J},\tag{15j}$$

где $\tau(x)=\upsilon_1(x,0)=\upsilon_2(x,0),\ (x,0)\in\bar{J}$.

В силу (1), (4), (5), (10), (12) задача AT сведется к задаче AT^* для уравнения

$$0=L\upsilon\equiv\begin{cases}L\,\upsilon_1,\ (x,y)\in\Omega_1,\\ L\,\upsilon_2,\ (x,y)\in\Omega_2\end{cases}$$

с краевыми условиями

$$\upsilon_1(x,y)|_{AA_0}=\varphi_1(y),\ \ \upsilon_1(x,y)|_{BB_0}=\varphi_2(y)-\omega_1(1),\ 0\leqslant y\leqslant h$$

$$\upsilon_2(x,y)|_{AC}=\psi(x)-\omega_2(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 0,5,$$

здесь $\omega_j(x)$ $(j=1,2)$ - определяются из (15_j) .

Существование решения задачи AT^* доказывается методом интегральных уравнений, а единственность - с помощью принципа экстремума для параболических и гиперболических уравнений.

Литература

1. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. Высшая школа. М:. 1985. 301 с.
2. *Салахитдинов М.С.* Уравнения смешанного - составного типа. Ташкент. "Фан"1974. 156 с.
3. *Исломов Б., Курьязов Д.М.* Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения второго порядка. // "Доклады АН РУз". 1996. №1-2. С.3-6.

Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка эллиптико-гиперболического типа с сингулярными коэффициентами

Исломов Б.И.[1], **Очилова Нозима. К.**[1]

[1] *Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, г.Ташкент.*

[1] E-mail: islomovbozor@yandex.ru,

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(sign|y|^m u_{xx}+u_{yy}+\alpha_0(-y)^{m/2-1}u_x+\beta_0 y^{-1}u_y\right)=0, \qquad (1)$$

где $m>0$, $|\alpha_0|\leqslant\frac{m+2}{2}$, $-\frac{m}{2}<\beta_0<1$, в конечной односвязной области D плоскости независимых переменных $(x,\,y)$, ограниченной при $y>0$ нормальной кривой $\sigma_0\ :\quad x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}=1$ с концами в точках $A\,(-1,0)$ и $B\,(1,0)$, а при $y<0$ характеристиками

$$AC:\quad x-\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}=-1,\ \ BC: x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}=1$$

уравнения (1), здесь $C\left(0;\ -((m+2)/2)^{2/(m+2)}\right)$.

Предположим, что каждая прямая $y=c$, $0<y<h$, пересекается с σ_0 в двух точках, а прямая $y=h$ имеет единственную общую точку $N(0,h)$ (точку касания) с кревой σ_0.

Введем следующие обозначения: $J=\{(x,y):-1<x<1,\ y=0\}$,

$$D_1=D\cap\{x>0,y>0\},\ \ D_2=D\cap\{x>0,y<0\},\ \ D=D_1\cup D_2\cup J,$$

$$W=\left\{\ u:\ u\in C(\bar D)\cap C^1(D\cup AC\cup\sigma_0)\cap C^{3,2}_{x,y}(D_1\cup D_2),\quad u_{xyy},\quad u_{xy}\in C(D_1\cup D_2)\right\}.$$

Задача C**.** Найти функцию $u(x,y)\in W$ удовлетворяющую уравнению (1) в области D_j $(j=1,2)$ и краевым условиям

$$u|_{\sigma_0}=\varphi_1(s),\quad 0\leqslant s\leqslant l,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\sigma_1}=\varphi_2(s),\quad 0<s<l,$$

$$u|_{AC}=\psi_1(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_2(x),\quad -1\leqslant x\leqslant 0,$$

где σ_1- часть AN кривой σ_0; $n-$ внутренняя нормаль $\sigma_1\bigcup AC$; заданные функции $\varphi_1(s),\ \psi_2(x)$ дважды, а $\psi_1(x)$ трижды непрерывно дифференцируемы, $\varphi_2(s)$ удовлетворяет условию Гельдера, причем $\varphi_1(l)=\psi_1(-1)$.

Заметим, что задача C для уравнения (1) при $\alpha_0=\beta_0=0$ изучены в работах А.В. Бицадзе и М.С. Салахитдинова[1], М.С. Салахитдинова[2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А.В., Салахитдинов М.С.* К теории уравнений смешанно-составного типа. // "Сибирский математический журнал". Новосибирск. 1961. Т.II. №1. С. 7-19.

2. *Салахитдинов М.С.* Уравнение смешанно-составного типа. Т.: "Фан". 1974. 156 с.

Об одной краевой задаче для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода с сингулярным коэффициентом

Исломов Б.И.[1], **Джуманиязова Х.А.**[2]

[1] *Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, г.Ташкент.*
[2] *Ташкентский финансовый институт, г.Ташкент.*
[1] E-mail: islomovbozor@yandex.ru,
[2] E-mail: Kuchkarova-91.@mail.ru.

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + signy|y|^m u_{yy} + \alpha_0|y|^{(m-2)/2}u_x + \beta_0|y|^{m-1}u_y = 0 \quad , \tag{1}$$

где

$$0 < m < 1, \quad -1 \leqslant \beta_0 < -\frac{m}{2}, \quad |\alpha_0| < \frac{2-m}{2}. \tag{2}$$

Пусть $D -$ конечная односвязная область, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой σ_0 : $x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$ с концами в точках $A(-1,0)$ и $B(1,0)$ и характеристиками

$$AC: \quad x - \frac{2}{2-m}(-y)^{(2-m)/2} = -1\ , \quad BC: \quad x + \frac{2}{2-m}(-y)^{(2-m)/2} = 1$$

уравнения (1) при $y < 0$, $C\left(0;\ -((2-m)/2)^{2/(2-m)}\right)$.

Обозначим через D_1 и D_2 части области D, лежащие, соответственно, в полу-плоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1, соответственно, точки пересечения характеристик AC и BC с характеристикой исходящей из точки $E(c,0)$, где $c \in J = \{(x,y):\ -1 < x < 1,\ y = 0\}$.

Введем следующие обозначения:

$$J_1 = \{(x,y) : -1 < x < c,\ y = 0\}, \quad J_2 = \{(x,y) : c < x < 1,\ y = 0\},$$

$$\Theta(x) = \left(\frac{x-1}{2}; -\left[\frac{2-m}{4}(x+1)\right]^{\frac{2}{2-m}}\right), \quad \Theta^*(x) = \left(\frac{x+c}{2}\,; -\left[\frac{2-m}{4}(x-c)\right]^{\frac{2}{2-m}}\right), \tag{3}$$

$\Theta(x)$ $[\Theta^*(x)]$ - точки пересечения характеристики AC $[EC_1]$ с характеристикой выходящей из точки $M(x,0)$, $(x,0) \in J_2$.

Через D_{21}, D_{22} и D_{23} соответственно обозначим характеристические треугольники EC_0A, BC_1E и четырехугольник EC_1CC_0.

З а д а ч а T_μ. Найти в области D функцию $u(x,y)$, обладающую свойствами: 1) $u(x,y) \in C(\bar{D})$; 2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области D_1; 3) $u(x,y)$ - обобщенным решением уравнения (1) из класса R_2 [1] в области $D_2 \backslash (EC_0 \cup EC_1)$; 4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x,y)|_{\sigma_0} = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \bar{\sigma}_0, \tag{4}$$

$$u(x,y)|_{\ AC_0} = \psi(x), \qquad -1 \leqslant x \leqslant \frac{c-1}{2}\ , \tag{5}$$

$$u\left[\Theta(x)\right] = \mu\, u\left[\Theta^*(x)\right] + \rho(x),\ (x,0) \in \overline{J}_2, \tag{6}$$

5) $u_y \in C\left(D_1 \cup J_1 \cup J_2\right) \cap C\left(D_2 \cup J_1 \cup J_2\right)$ и на интервалах J_j $(j = 1,2)$ выполняется условие склеивания

$$\lim_{y\to -0}\frac{\partial u\,(x,y)}{\partial y} = p(x)\lim_{y\to +0}\frac{\partial u\,(x,y)}{\partial y} + q(x), \quad (x,0) \in J_1 \cup J_2, \tag{7}$$

где $\varphi(x,y)$, $\psi(x)$, $\rho(x)$, $p(x)$, $q(x)$ - заданные функции, причем

$$\varphi(-1,0)=\psi(0)=0, \tag{8}$$

$$\mu = const < 0, \quad p(x) < 0, \quad \forall\, x \in [0,1]\,, \tag{9}$$

$$\varphi(x,y) = y^{\varepsilon+1}\varphi_1(x,y), \quad \varphi_1(x,y) \in C(\bar{\sigma}_0), \quad \varepsilon > 0, \tag{10}$$

$$\rho(x) \in C^1\,[c;1] \cap C^2\,[c;1)\,, \;\; \psi(x) \in C^1\,[-1;(c-1)/2] \cap C^2\,[-1;(c-1)/2)\,, \tag{11}$$

причем $\rho''(x)$ и $\psi''\left(\frac{x-1}{2}\right)$ соответственно может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы при $x \to 1$ и $x \to c$.

Заметим, что задача T_μ для уравнения эллиптико-гиперболического типа первого рода были изучена в работе[2].

Доказана следующая теорема.

Теорема. Если выполнены условия (2), (8)-(11), то в области D существует единственное регулярное решение задачи T_μ.

Существование решения задачи T_μ доказывается методом интегральных урав-нений, а единственность - с помощью принципа экстремума для эллиптических и гиперболических уравнений.

Литература

1. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. Высшая школа, М., 1985. 301с.
2. *Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.* Нелокальные задачи для уравнений сме-шанного типа с сингулярными коэффициентами. 2005. Ташкент: "Universitet "Yangiyo'l poligraf servis". - 224 с.

Краевая задача для нагруженного уравнения эллиптико-гиперболического типа в параллелепипеде

Исломов Б.И.[1], Маматкулова М.М. [2]

[1] *Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, г.Ташкент.*
[2] *Ташкентский государственный педагогический университет им Низами, г. Ташкент.*

[1] E-mail: islomovbozor@yandex.ru.
[2] E-mail: maqsuda.mamatqulova@mail.ru.

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} + u_{yy} + signz\; u_{zz} - \mu^2 u(x,0,0) = 0 \tag{1}$$

в параллелепипеде

$$D = \{(x,y,z), \;\; 0 < x < p, \;\; 0 < y < q, \;\; -\alpha < z < \beta\}\,,$$

где μ, $p > 0$, $q > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0-$ заданные действительные числа.

Задача. Найти в области D функцию $u(x,y,z)$, удовлетворяющие условиям

$$u(x,y,z) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D_1 \cup D_2), \quad u_z(x,y,z) \in C(D), \tag{2}$$

$$Lu = 0, \quad (x,y,z) \in D_1 \cup D_2, \tag{3}$$

$$u(0,y,z) = 0, \quad u(p,y,z) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant q, \quad -\alpha \leqslant z \leqslant \beta, \tag{4}$$

$$u(x,0,z) = 0, \quad u(x,q,z) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant p, \quad -\alpha \leqslant z \leqslant \beta, \tag{5}$$

$$u(x,y,-\alpha) = \varphi(x,y), \quad u(x,y,\beta) = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \bar{M}, \tag{6}$$

где $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)-$ заданные достаточно гладкие функции,

$$\varphi(0,0) = \varphi(p,q) = 0, \qquad \psi(0,0) = \psi(p,q) = 0,$$

$$D_1 = D \cap \{z > 0\}, \quad D_2 = D \cap \{z < 0\}, \quad M = \{(x,y): \ 0 < x < p, \ 0 < y < q\}.$$

Заметим, что краевые задачи для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области были изучены в работах [1-2].

В данной работе установлен критерий единственности и существование решения задачи (2)-(6) методом спектрального анализа[3].

Литература

1. *Сабитов К.Б., Мелишева Е.П.* Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области. // "Известия вузов. Математика." 2013. №7. С. 62-76.

2. *Рамазанов М.И.* О нелокальной задаче для нагруженного гиперболо-эллипти-ческого типа в прямоугольной области. // "Математический журнал." 2002. Т.2. №4. С. 75-81.

3. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле уравнения смешанного типа в прямоугольной области. // "Докл. РАН." 2007. Т. 413. №1. С. 23-26.

Краевая задача для одного класса уравнения смешанного типа третьего порядка с оператором Лаврентьева-Бицадзе

[1] Исломов Б. И., [2] Усмонов Б. З.

[1] Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, Узбекистан, г. Ташкент
[2] Чирчикский педагогический институт, Узбекистан, г. Чирчик
[1] E-mail: islomovbozor@yandex.ru,

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx} + u_{yy}\right), & y > 0, \\ \left(a\dfrac{\partial}{\partial x} + c\right)\left(u_{xx} + u_{yy}\right), & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где a и $c-$заданные действительные числа, причем $a^2 + c^2 \neq 0$.

Пусть D_1 - конечная однозначная область в плоскости (x,y), ограниченная кривой σ при $y > 0$ с концами в точках $A(-1,0)$, $B(1,0)$ и отрезком AB оси x. Предположим, что кривая униформа относительно оси y, точка $N(0,h)$ этой кривой является единственной максимально удаленной от оси x точкой, части AN и BN дуги σ униформы отрезка ON оси y, здесь $O-$ начало координат. Через D_2 обозначим область, ограниченную отрезком AB и двумя характеристиками

$AC: \quad x+y=-1, \quad BC: \quad x-y=1$ уравнения (1) выходящими из точки $C(0,-1)$, $\quad D = D_1 \cup D_2 \cup AB$.

В области D исследуем аналог задачи Трикоми для уравнения (1).

Задача T_{ac}. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$;

2) $u(x,y) \in C^{3,2}_{x,y}(D_2 \cup D_1)$, $\quad u_{xyy} \in C(D_2 \cup D_1)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях D_1 и D_2 ;

3) на отрезке AB выполняются условия склеивания

$$\tau(x) \equiv \lim_{y \to -0} u(x,y) = \lim_{y \to +0} u(x,y), \quad x \in \overline{AB}\ , \tag{2}$$

$$\nu(x) \equiv \lim_{y \to -0} u_y(x,y) = \lim_{y \to +0} u_y(x,y), \quad x \in AB\ ; \tag{3}$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{\sigma} = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \bar{\sigma}, \tag{4}$$

$$u(x,y)|_{ON} = g_1(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h, \tag{5}$$

$$u(x,y)|_{AC} = \psi(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \tag{6}$$

$$u(x,y)|_{OC} = g_2(y), \quad -1 \leqslant y \leqslant 0, \tag{7}$$

где $\varphi(x,y)$, $\psi(x)$, $g_j(y)$ $(j=1,2)$ – заданные функции, причем

$$\psi(-1) = \varphi(-1,0), \quad \varphi(0,h) = g_1(h), \quad \psi(0) = g_2(-1), \quad g_1(0) = g_2(0)\ , \tag{8}$$

$$\varphi(x,y) \in C(\bar{\sigma}), \tag{9}$$

$$\psi(x) \in C^2\left[-1,0\right], \quad g_1(y) \in C^2\left[0,h\right], \quad g_2(y) \in C^2\left[-1,0\right]. \tag{10}$$

Заметим, что краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором изучена в работе [1], [2].

Метод исследования. Положим

$$u(x,y) = \begin{cases} u_1(x,y), & (x,y) \in D_1, \\ u_2(x,y), & (x,y) \in D_2. \end{cases} \tag{11}$$

Тогда уравнение (1) можно переписать в виде двух систем

$$\begin{cases} u_1(x,y) = \upsilon_1(x,y) + \omega_1(y), \\ \upsilon_{1xx} + \upsilon_{1yy} = 0, \quad (x,y) \in D_1, \end{cases} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} u_{2xx} - u_{2yy} = \upsilon_2(x,y) \\ a\,\upsilon_{2x} + c\,\upsilon_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (x,y) \in D_2, \tag{13}$$

где $\upsilon_2(x,y)$ – произвольная достаточно гладкая функция, а $\omega_1(y)$ – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем

$$\omega'_1(0) = \omega_1(h) = 0. \tag{14}$$

Нетрудно заметить, что общее решение уравнения

$$a\,\upsilon_{2x} + c\,\upsilon_2 = 0,$$

имеет вид

$$\upsilon_2(x,y) = \omega_2(y)\exp\left(-\frac{c}{a}x\right), \qquad (15)$$

$\omega_2(y)$ – произвольная непрерывная функция.

Доказана следующая теорема.

Теорема. Если выполнены условия (8)-(10), то в области D существует единственное регулярное решение задачи T_{ac}.

При доказательстве теоремы используя формулы (12), (13) и (15) в областях D_1 и D_2 соответственно с учетом условия (4)-(7) решается аналоги задачи N и Коши-Гурса, а затем, удовлетворяя условия склеивания (2), (3) находим неизвестные функции $\omega_j(y)$, $\tau(x)$, $\nu(x)$.

Таким образом, решение задачи T_{ac} можно восстановить в области D_1 как решение задачи N для уравнения (1), а в области D_2 как решение задачи Коши для уравнения (1).

Следовательно, задача T_{ac} однозначно разрешима.

Литература

1. *Салахитдинов М.С.* Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент. "Фан". 1974. 156 с.
2. *Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА.

Исломов. Х

Термезский государственный университет, Узбекистан.
e-mail xislomov@inbox.ru

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + c(x,y)u = 0, \qquad (1)$$

Пусть D конечная односвязная область ограниченная при $x > 0$, $y > 0$ с точками $A(l,0)$ и $B(0,h)$ соответственно оси OX и OY.

$$D = \{(x,y) : 0 < x < l,\ 0 < y < h\}$$

В области D для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача1. Найти функцию $u(x,y)$ обладающую следующими свойствами

1) $u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^3(D)$;

2) функция $u(x,y)$ регулярными решениями уравнение (1);

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(0,y) = \varphi_1(y),\ u(l,y) = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h, \qquad (2)$$

$$u(x,0) = \psi_1(x),\ u(x,h) = \psi_2(x),\ 0 \le x \le l, \qquad (3)$$

$$u_x(0,y) = \lambda u_2(l,y), \qquad (4)$$

где $\varphi_1(y),\ \varphi_2(y),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x)$ - заданные непрерывные функции, причем

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0),\ \varphi_1(h) = \psi_2(0),\ \varphi_2(h) = \psi_2(l),\ \psi_1(0) = \lambda\psi_1(l),\ \psi_2(0) = \lambda\psi_2(l)$$

Теорема1: Если выполнены условия $c(x,y) \le 0$, $\lambda < 1$, тогда в области D существует единственное решение задача (1)-(4) [1].

Доказательство: Пусть задача (1)-(4) имеет два решения $u_1(x,y)$ ва $u_2(x,y)$. Тогда $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$. $f(x,y) \equiv 0,\ \varphi_i(y) = \psi_i(x) = 0,\ (i = 1,2)$. Тогда уравнения (1) удовлетворяет тривиальние граничные условия

$$u(0,y) = 0,\ u(l,y) = 0, \tag{5}$$

$$u(x,0) = 0,\ u(x,h) = 0,\ u_x(0,y) = \lambda u_x(l,y), \tag{6}$$

Задача (1)-(6) имеет $u \equiv 0$ тривиальные решения. Умножим уравнения (1) на $u(x,y)$ интегрируя в области D получим [2].

$$\int\int_D u\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx} + u_{yy}\right)dxdy + \int\int_D c(x,y)u^2 dxdy = 0, \tag{7}$$

Преобразуем первый интеграл в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx} + u_{yy}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(yu_{xx} + xu_{yy}\right) - yu_{xx} - xu_{yy} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(yu_{xx} + xu_{yy}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(u_x\right)^2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(u_x u_y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(u_y\right)^2\right)$$

Из этого можно равенство (7) записать в виде

$$\int\int_D \frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx} + u_{yy}\right)dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\int_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(u_x\right)^2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(u_x u_y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(u_y\right)^2\right)dxdy + \int\int_D c(x,y)u^2 dxdy, \tag{8}$$

Интегрируя интеграл (8) в области D получим

$$-\frac{1}{2}\int_0^h [(u_x(l,y))^2 - (u_x(0,y))^2]dy + \int\int_D c(x,y)u^2 dxdy \tag{9}$$

Используем из условия (4)

$$u_x^2(l,y) - u_x^2(0,y) = u_x^2(l,y)(1 - \lambda^2) \tag{10}$$

Тогда (9) из равенство (10) имеет вид

$$\frac{1}{2}\int_0^h (1 - \lambda^2)u_x^2(l,y) - u_x^2(l,y) = 0 \tag{11}$$

Из равенство (11) и условия теорема 1 вытекает $u(x,y) \equiv 0$ так как $u_1(x,y) = u_2(x,y)$, $\forall (x,y) \in D$ теорема доказано.

Литература

1. *Бицадзе А. В. Краевые задачи для уравнения эллиптического типа второго порядка. Москва. Наука 1966,204с.*
2. *Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. Москва. Высшая школа. 1985.*

Нелокальная краевая задача в прямоугольной области

Х. Исломов. Термезский государственный университет, г.Термез
Х. Саидов. Бухарский инженерно-технологический институт, г.Бухара
e-mail xislomov@inbox.ru

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+c\left(x,\ y\right)u=0. \tag{1}$$

Пусть D конечная односвязная область ограниченная при $x>0,\ y>0$ с точками $A(l,0)$ и $B(0,h)$ соответственно оси OX и OY.

$$D=\left\{(x,\ y):0<x<l,\ 0<y<h\right\}.$$

В области D для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача. Найти функцию $u(x,\ y)$ обладающую следующими свойствами:

$$1)u\left(x,\ y\right)\in C^{1}\left(\overline{D}\right)\cap C^{3}\left(D\right);$$

2) Функция $u(x,\ y)$ является регулярным решением уравнения (1);
3) $u\left(x,\ y\right)$ удовлеворяет краевым условиям:

$$u\left(0,\ y\right)=\varphi_{1}\left(y\right),\ u\left(l,\ y\right)=\varphi_{2}\left(y\right),\ 0\leq y\leq h \tag{2}$$

$$u\left(x,\ 0\right)=\psi_{1}\left(x\right),\ u\left(x,\ l\right)=\psi_{2}\left(x\right),\ 0\leq x\leq l \tag{3}$$

$$u_{x}\left(0,\ y\right)=\lambda u_{2}\left(l,y\right), \tag{4}$$

где $\varphi_{1}\left(y\right),\ \varphi_{2}\left(y\right),\ \psi_{1}\left(x\right),\psi_{2}\left(x\right)$ - заданные непрерывные функции, причем,

$$\varphi_{1}\left(0\right)=\psi_{1}\left(0\right),\ \varphi_{1}\left(h\right)=\psi_{2}\left(0\right),\ \varphi_{2}\left(h\right)=\psi_{2}\left(l\right),$$

$$\psi_{1}\left(0\right)=\lambda\psi_{1}\left(l\right),\ \psi_{2}\left(0\right)=\lambda\psi_{2}\left(l\right).$$

Существование решения задачи.

Теорема. Если $u\left(x,\ y\right)=0,\quad\lambda<1$ и следующие условия: $\psi_{1}\left(x\right),\ \psi_{2}\left(x\right)\in C^{1}[0,l]$ и $\varphi_{1}\left(y\right),\ \varphi_{2}\left(y\right)\in C^{1}[0,h]$ выполняются, то существует регулярное решение задачи (1) – (4).

Докажем существование решения нелокальной задачи (1) – (4).

Обозначим производную по x $u_{x}(x,\ y)$ неизвестной функции $u(x,\ y)$ при $x=l$ через $\varphi\left(y\right)$.

Тогда в уравнении (1), обозначим $u_{x}=\vartheta(x,\ y)$, и берем для уравнения Лапласа следующую задачу:

$$\Delta u=-c\left(x,y\right)u, \tag{5}$$

$$\vartheta\left(x,y\right)=-\lambda\varphi\left(y\right)\bullet\vartheta\left(l,y\right)=\varphi\left(y\right),\qquad 0\leq y\leq h \tag{6}$$

$$\vartheta\left(x,0\right)=\psi_{1}\left(x\right),\ \vartheta\left(x,h\right)=\psi_{2}\left(x\right),\qquad 0\leq x\leq l. \tag{7}$$

Для решения задачи (5) – (7) требуем, что, функция $\varphi\left(y\right)$ удовлетворяла следующие равенства:

$$-\lambda\varphi\left(0\right)=\psi_{1}\left(0\right),\quad\varphi\left(h\right)=\psi_{2}\left(l\right)$$

$$-\lambda\varphi\left(h\right)=\psi_{2}\left(0\right),\qquad\varphi\left(0\right)=\psi_{1}\left(l\right).$$

Таким образом задача (1) – (4) с помощью преобразования $u_{x}=\vartheta\left(x,y\right)$ приведена к задаче (5)–(7).

Регулярное решение задачи (5)–(7) в прямоугольной области D с помощью функции Грина выражается следующим образом:

$$\vartheta\left(x,y\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{h}\left[\frac{\partial G(x,y;l,\eta)}{\partial\xi}-\lambda\frac{\partial D(x,y;0,\eta)}{\partial\xi}\right]\varphi\left(\eta\right)d\eta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\iint_{D}G(x,y;\xi,\eta)\ \mathrm{c}(\xi,\eta)u\left(\xi,\eta\right)d\xi d\eta+f(x,y) \tag{8}$$

Здесь $G(x,y;\xi,\eta)$ функция Грина для уравнения Лапласа в задаче Дирихле в прямоугольной области D.

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}ln\frac{1}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}+g(x,y;\xi,\eta),$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^l\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial\eta}\psi_1(\xi)d\xi-\frac{1}{2\pi}\int_0^l\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial\eta}\psi_2(\xi)d\xi.$$

Теперь в области D решаем следующую задачу:

$$u_x=\vartheta(x,y),\qquad \forall(x,y)\in D \tag{9}$$

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\qquad 0\le y\le h. \tag{10}$$

Решение уравнения (9) удовлетворяющий условию (10) имеет следующий вид:

$$u(x,y)=\int_0^x\vartheta(t,y)\,dt+\varphi_1(y). \tag{11}$$

Вставляя выражение (8) в (11) получим [1]:

$$\vartheta(x,y)=\int_0^x\left(\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^h\left[\frac{\partial G(x,y;l,\eta)}{\partial\xi}-\lambda\frac{\partial D(x,y;0,\eta)}{\partial\xi}\right]\right)\varphi(\eta)\,d\eta\right)dt-$$

$$-\int_0^x\left(\frac{1}{2\pi}\iint_D G(t,y;\xi,\eta)c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)dt+\int_0^x f(t,y)\,dt+\varphi_1(y). \tag{12}$$

Изменяя порядок интегрирования в правой части в последней формуле для $u(x,y)$ получим следующее интегральное уравнение:

$$u(x,y)+\iint_D\left(\frac{1}{2\pi}K(x,y;\xi,\eta)\right)u(\xi,\eta)\,d\xi d\eta=f_1(x,y). \tag{13}$$

Здесь $K(x,y;\xi,\eta)=\int_0^x G(t,y;\xi,\eta)c(\xi,\eta)dt$,

$$f_1(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^h k(x,y;\eta)\,\varphi\mathrm{up}(\eta)d\eta)+\int_0^x f(t,y)\,dt+\vartheta(x,0)+\varphi_1(y), \tag{14}$$

$$k(x,y;\eta)=\int_0^x\left[\frac{\partial G(t,y;l,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial G(x,y;0,\eta)}{\partial\xi}\right]dt.$$

Интегральное уравнение (13) является уравнением Фредгольма второго порядка [2].

Его ядро $K(x,y;\xi,\eta)$ и правая часть $f_1(x,y)$ по свойством функции Грина и заданных функций непрерывна и принадлежит классу $C^1(\overline{D})$ т.е.

$$|K(x,y;\xi,\eta)|\le\int_0^x|G(t,y;\xi,\eta)\,c(\xi,\eta)|dt\le c\int_0^x\left|ln\frac{1}{(t-\xi)}^2+(y-\eta)^2\right|dt\le$$

$$\le c_1(y-\eta)^2ln\left|(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right|+c_2\,|k(x,y;\eta)|\le\int_0^x\left|\frac{\partial G(t,y;l,\eta)}{\partial\xi}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial G(x,y;0,\eta)}{\partial\xi}dt\le ln\left|(x-l)^2+(y-\eta)^2\right|+\lambda ln\left|(x)^2+(y-\eta)^2\right|++k_0(x,y;\eta).\right.$$

Функция $k_0(x,y;\eta)$ при $x=0,\ x=l$ и $y=\eta$ непрерывна и ограничена. Производные $\frac{\partial k_0(x,y;\eta)}{\partial x}$, $\frac{\partial k_0(x,y;\eta)}{\partial y}$ непрерывны при $x\neq0,\quad x\neq l$ и $y\neq\eta$, а также $\left|\frac{\partial k_0(x,y;\eta)}{\partial x}\right|\le\frac{c_3}{r}$ при $x\to0,\ x\to l,\ y\to\eta\left|\frac{\partial k_0(x,y;\eta)}{\partial y}\right|\ \le\ \frac{c_4}{r}$, здесь $r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$; $c_i=const>0,\ i=\overline{1,\ 4}.$

Решение интегрального уравнения Фредгольма второго порядка (13) имеет вид:

$$u\left(x,y\right)=f_1\left(x,y\right)+\frac{1}{2\pi}\iint_D R(x,y;\xi,\eta)f_1(\xi,\eta)d\xi d\eta. \tag{15}$$

После некоторых преобразований имеем:

$$u\left(x,y\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^h\left[k\left(x,y;\eta_1\right)+\frac{1}{2\pi}\iint_D R\left(x,y;\xi,\eta\right)k\left(\xi,\eta;\eta_1\right)d\xi d\eta\right]\varphi\left(\eta\right)d\eta_1+f_2\left(x,y\right). \tag{16}$$

Здесь $f_2\left(x,y\right)=\int_0^x f\left(t,y\right)dt+\varphi_1\left(y\right)+\frac{1}{2\pi}\iint_D R\left(x,y;\xi,\eta\right)\left[\int_0^\xi f\left(x,y\right)dt+\varphi_1(y)\right]d\xi d\eta.$

Теперь из формулы (16) определим функцию $\varphi(y)$. Для этого берем производную из (16) по x и при $x=l$ приравниваем функцию $\varphi(y)$.

$$\varphi\left(y\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^h k_1\left(y,\eta\right)\varphi\left(\eta\right)d\eta+f_3\left(y\right),\quad 0\le y\le h. \tag{17}$$

Здесь $f_3\left(y\right)=\frac{\partial}{\partial x}f_2\left(x,y\right)|_{x=l}$,
$k_1\left(y,\eta\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[k\left(x,y,\eta\right)+\frac{1}{2\pi}\iint_D R\left(x,y;\xi_1,\eta_1\right)\ k\left(\xi_1,\eta_1;\eta\right)d\xi_1 d\eta_1\right]|_{x=l}$.

По теории интегральных уравнений Фредгольма решение $\varphi(y)$ уравнения (15) существует в области $C[0,h]$ и резольвента ядра $k_1\left(y,\eta\right)$ выражается следующим образом [3]:

$$\varphi\left(y\right)=f_3\left(y\right)+\frac{1}{2\pi}\int_0^h R_1\left(y,\eta\right)f_3\left(\eta\right)d\eta.$$

Таким образом, решение задачи (1) – (4) выражается формулой (16), а функция $\varphi(y)$ является решением интегрального уравнения (17).

Литература

1. Бицадзе А.В. Краевые задачи для уравнения эллиптического типа второго порядка. Москва. Наука 1966, 204 с.
2. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. Москва. Высшая школа. 1985.
3. Салохиддинов М. Интеграл тенгламалар. Тошкент. 2007, 180 с.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ИТЕРИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

КАРИМОВ Ш.Т.[1]

[1] Ферганский государственный университет, Узбекистан, Фергана
[1]shaxkarimov@gmail.com

Рассмотрим задачу Коши нахождения решения $u(x,t)\in C^{2m-1}(\bar{\Omega})\cap C^{2m}(\Omega)$ неоднородного уравнения высокого порядка вида

$$G_\beta^m(u)\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{2\beta}{t}\frac{\partial}{\partial t}-L\right)^m u(x,t)=f(x,t),\quad (x,t)\in\Omega, \tag{1}$$

удовлетворяющее однородным начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0}=0,\quad k=\overline{0,2m-1}, \tag{2}$$

где $m\in N$, $\beta\in R$, $\beta\geqslant 0$, $G_\beta^m=G_\beta^1(G_\beta^{m-1})$, $f(x,t)$ - заданная гладкая функция, L - не зависящая от t, линейный дифференциальный оператор конечного порядка, действующий по переменной $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, а Ω - область определения решения задачи $\{(1),(2)\}$, зависящая от вида оператора L.

Сначала рассмотрим случай $\beta=0$. В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция $U(x,t,\tau)$, зависящая от параметра τ, является решением задачи*

$$G_0^m(U)=0,\ \left.\frac{\partial^k U}{\partial t^k}\right|_{t=\tau}=0,\ \ k=\overline{0,2m-2},\ \left.\frac{\partial^{2m-1}U}{\partial t^{2m-1}}\right|_{t=\tau}=f(x,\tau),\ \ t>\tau.$$

Тогда функция

$$u(x,t)=\int\limits_0^t U(x,t,\tau)d\tau,$$

будет решением задачи $\{(1),\ (2)\}$.

Рассмотрим применение теоремы 1 при конкретных значениях оператора L.

1) Пусть $n=1,\ L\equiv\partial^2/\partial x^2$. В этом случае область определения решения будет $\Omega=\{(x,t):\ x\in R,\ t>0\}$. Применяя теорему 1 находим решение задачи $\{(1),\ (2)\}$ при $\beta=0$, в виде:

$$u(x,t)=\frac{2^{-2m+1}}{[(m-1)!]^2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}[(t-\tau)^2-(s-x)^2]^{m-1}f(s,\tau)ds. \tag{3}$$

2) Пусть $n=1$, $L\equiv\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{2\alpha}{x}\dfrac{\partial}{\partial x},\ \ \alpha\in R,\ \alpha>0$. В этом случае область определения решения будет $\Omega=\{(x,t):\ 0<\ t<x<\infty\}$. Применяя теорему 1 находим решение задачи $\{(1),\ (2)\}$ при $\beta=0$, в виде:

$$u(x,t)=\frac{x^{-\alpha}2^{-2m+1}}{[(m-1)!]^2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}f(s,\tau)s^{\alpha}[(t-\tau)^2-(s-x)^2]^{m-1}F(\alpha,1-\alpha;m;\ \sigma)ds,$$

где $F(\alpha,1-\alpha;m;\ \sigma)$ - гипергеометрическая функция Гаусса, $\sigma=[(t-\tau)^2-(s-x)^2]/(4xs)$.

Теперь исследуем задачу при $\beta\neq0$. В этом случае невозможно применить теорему 1. Для решения задачи $\{(1),\ (2)\}$ применим оператор Эрдейи-Кобера дробного порядка [1]:

$$I_{\eta,\beta}f(x)=\frac{2x^{-2(\eta+\beta)}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^x(x^2-t^2)^{\beta-1}t^{2\eta+1}f(t)dt, \tag{4}$$

где $\eta,\ \beta\in R$, причем $\eta\geq-1/2,\ \beta>0$, $\Gamma(\beta)$ - гамма - функция Эйлера.

Для оператора (4) справедлива следующая теорема [2]:

Теорема 2. *Пусть $\beta>0$, $\eta\geqslant-1/2$, функции $t^{2\eta+1}[B_\eta^t]^k u(x,t)$ интегрируемы при $t\to0$ и* $\lim\limits_{t\to0}t^{2\eta+1}\dfrac{\partial}{\partial t}[B_\eta^t]^k u(x,t)=0,\ \ k=\overline{0,m-1}$. *Тогда имеет место равенство*

$$(B_{\eta+\beta}^t-L)^m I_{\eta,\beta}^{(t)}u(x,t)=I_{\eta,\beta}^{(t)}(B_\eta^t-L)^m u(x,t),$$

где $B_\eta^t\equiv\partial^2/\partial t^2+[(2\eta+1)/t](\partial/\partial t)$ -оператор Бесселя, верхний индекс t в операторах означает переменную по которой действуют эти операторы.

В частности, когда $\eta=-1/2$ и при выполнении остальных условий теоремы 2, имеем

$$G_\beta^m I_{-1/2,\beta}^{(t)}u(x,t)=I_{-1/2,\beta}^{(t)}G_0^m u(x,t). \tag{5}$$

При $n=1,\ \ L\equiv\partial^2/\partial x^2$, $0<\beta<1/2$, применяя теорему 2 и равенства (3), (5) получим решение задачи $\{(1),\ (2)\}$ в виде:

$$u(x,t)=\frac{2^{-m-\beta-1}}{[(m-1)!]^2}t^{1-2\beta}\left\{\int\limits_0^t s^\beta ds\int\limits_{x-t+s}^{x}f(\xi,s)G(x,t;\xi,s)d\xi+\right.$$

$$+\int\limits_0^t s^\beta ds \int\limits_x^{x+t-s} f(\xi,s)G(-x,t;-\xi,s)d\xi \Bigg\},$$

где

$$G(x,t;\xi,s)=(x-\xi)^{m-1}(t-s-x+\xi)^{m-1}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(1-m)_k}{k!}\sigma_3^k F_3(1-\beta,\beta,\beta,1-\beta;m+k;\sigma_1,\sigma_2),$$

$\sigma_1=(t-s-x+\xi)/2(x-\xi)$, $\sigma_2=(t-s-x+\xi)/2s$, $\sigma_3=(t-s-x+\xi)/2t$, $F_3(a_1,a_2,b_1,b_2,c;\sigma_1,\sigma_2)$ - гипергеометрическая функция Аппеля двух переменных [3].

Аналогично можно исследовать задачу $\{(1),(2)\}$ и при других значениях параметра n и оператора L.

Литература

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 702 с.
2. *Каримов Ш. Т.* О некоторых обобщениях свойств оператора Эрдейи-Кобера и их приложения. // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 18, No 2. С. 20–40.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. т.1. -М.: Наука, 1973. - 296 с.

ЗАДАЧА ТРИКОМИ С ОБЩИМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Комилова Н.Дж. Ферганский филиал Ташкентского университета информационных технологий им. Мухаммада Ал-Хорезмий, Фергана, Узбекистан.
nigora.Komilova@bk.ru

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_y+\mu_0 u,\ (x,y)\in D_0,\\ u_{xx}-(-y)^m u_{yy}+\mu_1 u,\ (x,y)\in D_1,\end{cases} \tag{1}$$

где $m,\ \mu_0,\ \mu_1$ - действительные постоянные, причем $0<m<1$; D_0 - прямоугольник, ограниченный отрезками $AB,\ BB_1,\ B_1A_1,\ A_1A$ прямых $y=0,\ x=1,\ y=1,\ x=0$ соответственно; D_1 - область, ограниченная характеристиками AC_1 и BC_1, выходящими из точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$ и характеристикой $y=0$ уравнения (1) при $y\le 0$.

Введем обозначения:

$$I_1=\{(x,y):0<x<1,y=0\}, D=D_0UI_1UD_1,\ \ \beta=-m/(2(2-m)),-1<2\beta<0,$$
$$4\lambda_1^2=-\mu_1,\ \lim_{y\to\pm0}u(x,y)=\tau^{\pm}(x),\ \lim_{y\to\pm0}u_y(x,y)=\nu^{\pm}(x).$$

Задача T_1. Требуется определить функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:
1. $u(x,y)\in C\left(D\right)$;
2. $u(x,y)$ - регулярное решение уравнения (1) в области D_0;
3. $u(x,y)$ - обобщенное решение уравнения (1) из класса R_2^λ в области D_1;
4. $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u\left|_{AA_1}=\varphi_0(y), u\right|_{BB_1}=\varphi_1(y), 0\le y\le 1;\ u\left|_{AC_1}=\psi_1(x), 0\le x\le 1/2;\right.$$

5. на отрезке I_1 выполняются разрывные условия склеивания

$$\nu^+(x)=\alpha_1(x)\nu^-(x)+\beta_1(x),\ x\in I_1;\tau^+(x)=\alpha_2(x)\tau^-(x)+\beta_2(x),\ x\in\overline{I}_1,$$

где $\varphi_0(y),\varphi_1(y),\psi_1(x),\alpha_1(x),\beta_1(x),\alpha_2(x),\beta_2(x)-$ заданные функции, причем $\varphi_0(y),\varphi_1(y)\in C[0,1],\psi_1(x)\in C[0,1/2]\cap C^2(0,1/2)$. $\alpha_i(x),\beta_i(x)\in C(\overline{I}_1),\alpha_i(x)\neq 0, i=1,2;\forall x\in\overline{I}_1$. Кроме того, при $x\to 0$ функции $\psi_1''(x)$

и $\nu^-(x)$могут обращаться в бесконечность порядка не выше $1+\beta$ и -2β, соответственно. Без ограничения общности будем считать, что $\psi_1(0)=0$.

Задача T_1 при $\alpha_2(x)=1$ и $\beta_2(x)=0$ изучена в [1].

При исследовании задачи T_1 важную роль играют функциональные соотношения между $\tau^\pm(x)$ и $\nu^\pm(x)$, принесенные на отрезок AB из параболической и гиперболической частей смешанной области D.

Непосредственно из уравнения $u_{xx}-u_y+\mu_0 u=0$, устремляя $y\to+0$, нетрудно найти соотношение между $\tau^+(x)$ и $\nu^+(x)$, принесенное из параболической части смешанной области D в виде

$$\tau^+(x)=\int\limits_0^x G(x,x,s;\mu_0)\nu^+(s)ds-\int\limits_0^1 G(1,x,s;\mu_0)\nu^+(s)ds+\Phi_0(x,\mu_0)\varphi_1(0), \tag{2}$$

где $G(x,t;s;\mu_0)$ и $\Phi_0(x;\mu_0)-$ известные функции.

В работе [2] было использовано соотношение между $\tau^-(x)$ и $\nu^-(x)$, принесенное из гиперболической части смешанной области D в виде

$$\tau^-(x)=\Gamma(1-2\beta)x^{1-\beta}A_{0x}^{1,\lambda_1}\left\{x^{\beta-1}D_{ox}^{2\beta-1}x^\beta B_{0x}^{1,\lambda_1}\left[x^{-\beta}\nu(x)\right]\right\}+\Phi(x), \tag{3}$$

и при определенных ограничениях на данные доказано существование единственного решения поставленной задачи, где $A_{0x}^{1,\lambda_1}, B_{0x}^{1,\lambda_1}$ и $D_{0x}^{\gamma}-$ известные операторы, а $\Phi(x)-$ заданная функция. Дальнейшее изучение свойств обобщенных решений класса R_2^λ показало, что вид громоздкого соотношения (3) можно упростить к виду [3]

$$\tau^-(x)=\kappa_3\int\limits_0^x(x-t)^{-2\beta}\,\overline{J}_{-\beta}\left(2\lambda_1(x-t)\right)\nu^-(t)dt+\Phi_1(x), \tag{4}$$

где $\overline{J}_{-\beta}(x)-$ известная функция Бесселя-Клиффорда, $\Phi_1(x)-$ функция, выражаемая через функцию $\psi_1(x)$, а κ_3- известная постоянная.

В настоящем сообщении при исследовании поставленной задачи используется соотношение между $\tau^-(x)$ и $\nu^-(x)$ в виде (4) вместо соотношения вида (3).

Обратив уравнение (4) как интегральное уравнение Вольтерра относительно $\nu^-(x)$ находим

$$\nu^-(x)=\frac{sin2\beta\pi}{2\kappa_3\beta\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x(x-t)^{2\beta}{}_1F_2\left(\beta-\frac{1}{2};1+\beta,\beta+\frac{1}{2};-\lambda^2(x-t)^2\right)\tau^{-\prime}(t)dt+\Phi_2(x), \tag{5}$$

где $\Phi_2(x)-$ известная функция, ${}_1F_2(z)-$ гипергеометрическая функция Гаусса.

Далее, подставив соотношения (2) и (5) в разрывные условия склеивания задачи, для определения $\nu^-(x)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода с вырожденным ядром. При определенных ограничениях на данные задачи решение этого интегрального уравнения, т.е. функция $\nu^-(x)$, находится в явном виде.

В заключении отметим, что именно благодаря упрощенному виду (4) удалось улучшить результаты работы [2].

Литература

1. **Камилова Н.Дж., Эргашев Т.Г.** *Задача Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа второго рода с характеристической линией изменения типа* // Труды Международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий - Аль-Хорезми 2016."9-10 ноября 2016 г. Том 2. С.373-375.

2. **Салахитдинов М.С., Эргашев Т.Г.** *Задача Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа второго рода с характеристической линией изменения типа* // Узбекский математический журнал, 1991, No 1. С.60-67.

3. **Эргашев Т.Г.** *Задача Коши-Гурса для уравнения типа Эйлера-Пуассона-Дарбу* // Докл.АН Республики Узбекистан, 1995, No 11-12. С.11-13.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Косимов Х.Н.[1], Нишонбоев А.С.[2],

[1] ФерГУ, Узбекистан, Фергана
[2] ФерГУ, Узбекистан, Фергана
[2]azizbek.nishonboyev@mail.uz

Рассмотрим уравнение

$$y^2u_{xx}-u_{yy}+au_x=0,\qquad |a|<1 \tag{1}$$

которое принято называть уравнением Бицадзе-Лыкова или уравнением влагопереноса [1], в области D, ограниченной характеристиками

$$AC:\ x^2-\frac{y^2}{2}=0,\qquad y\leqslant 0;\qquad BC:\ x^2-\frac{y^2}{2}=1,\qquad y\leqslant 0$$

и отрезком $AB=I=\{(x,y):0<x<1, y=0\}$ прямой $y=0$. Пусть $\theta(x)$ точка пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0)\in I$ с характеристиками AC.

Задача. *Найти решение $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D)$ уравнения (1) удовлетворяющая условиям*

$$u(x,0)=\tau(x),\qquad x\in\overline{I}, \tag{2}$$

$$D^{\alpha}_{0,x;x^2}u[\theta(x)]=a(x)u_y(x,0)+b(x),\qquad x\in I, \tag{3}$$

где $D^{\alpha}_{0,x;x^2}$- операторы дробного интегродифференцирования от функции по другой функция [2]; $a(x)$ и $b(x)$ - заданные непрерывные функции.

Имеет место следующая.

Теорема. *Пусть $\alpha>\frac{2a-1}{8}$, $a(x)\neq 0$. Тогда решение задачи существует и единственно.*

Доказательство. Известно [1], что решение задачи Коши с данными

$$u(x,-0)=\tau(x),\qquad x\in\overline{I},\qquad u_y(x,-0)=\nu(x),\qquad x\in I$$

для уравнения (1) имеет вид

$$u(x,y)=c_1\int_0^1\tau[x+\frac{y^2}{2}(1-2t)](1-t)^{\frac{a+3}{4}}t^{\frac{a+3}{4}}dt-$$

$$-c_2y\int_0^1\nu[x+\frac{y^2}{2}(1-2t)](1-t)^{\frac{a+1}{4}}t^{\frac{a+1}{4}}dt, \tag{4}$$

где $c_1=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1-a}{4})\Gamma(\frac{1+a}{4})}$, $c_2=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{2-a}{4})\Gamma(\frac{2+a}{4})}$.

Используя (4), находим

$$u\left(\theta(x)\right)=k_1x^{\frac{a-1}{2}}F_{0x}\begin{bmatrix}\dfrac{-a+1}{4},\dfrac{3-a}{4}\\ \dfrac{-a+1}{2};\ x\end{bmatrix}\tau(x)+k_2x^{\frac{a-1}{2}}F_{0x}\begin{bmatrix}\dfrac{1-a}{4},\dfrac{3-a}{2}\\ \dfrac{3-a}{4};\ x\end{bmatrix}\nu(x), \tag{5}$$

где $k_1=c_1\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)$, $k_2=-c_2\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)$, $F_{0x}[...]$- обобщений оператор [3]. Подставляя (5) в краевое условие (3) имеем

$$k_1I_1(x)+k_2I_2(x)=I_1(x)\nu(x)+I_2(x), \tag{6}$$

здесь

$$I_1(x)=D^{\alpha}_{0,x;x^2}x^{\frac{a-1}{4}}F_{0x}\begin{bmatrix}\dfrac{1-a}{4},\dfrac{3-a}{4}\\ \dfrac{1-a}{4};\ x\end{bmatrix}\tau(x),\qquad I_2(x)=D^{\alpha}_{0,x;x^2}x^{\frac{a-1}{4}}F_{0x}\begin{bmatrix}\dfrac{1-a}{4},\dfrac{3-a}{4}\\ \dfrac{3-a}{4};\ x\end{bmatrix}\nu(x).$$

Доказательство теорему в силу (6) сводится к вопросу разрешимости интегрального уравнения Вольтера второго рода.

$$\nu(x)-\int_0^x K(x,y)\nu(y)dy=F(x),\ x\in I,$$

где

$$K(x,y)=k_2 y^{\frac{a}{8}+\frac{\alpha}{2}-1}G_{22}^{20}\left(\frac{x}{y}\left|\begin{matrix}1, & \frac{1}{2}-\alpha\\ \frac{1+a}{8}-\alpha, & \frac{5+a}{8}-\alpha\end{matrix}\right.\right).$$

$F(x)$- заданная функция. Таким образом, при выполнение условий теореме решение задачи существует и единственно.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Уравнения математический биология. М.:Виш.школа., 1995 г.
2. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 702 с.
3. *3. Уринов А.К.*Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. Тошкент: Мумтоз суз, 2014. 164 б.

ПОСТАНОВКА И ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ПЯТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ.

Мамажонов М.[1], Мамажонов С.М.[2],

[1,2] КГПИ, Узбекистан, Коканд
[1,2]bek84-08@mail.ru

В настоящем сообщении ставится ряд краевых задач для уравнения четвертого порядка параболо-гиперболического типа вида

$$\left(a_1\frac{\partial}{\partial x}+b_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a_2\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0 \tag{1}$$

в пятиугольной области плоскости, где

$$Lu=\begin{cases}u_{1xx}-u_{1y},\ (x,\,y)\in D_1,\\ u_{ixx}-u_{iyy},\ (x,\,y)\in D_i\,(i=2,3,4),\end{cases}$$

$u\,(x,\,y)=u_i\,(x,\,y)\,,\ (x,\,y)\in D_i\ \ (i=1,\,2,\,3,\,4), D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4\cup J_1\cup J_2\cup J_3\cup J_4$ а a_1,b_1,a_2,b_2-заданные постоянные, причем $a_i^2+b_i^2\neq 0,\ (i=1,2)$. Здесь D_1 - прямоугольник с вершинами в точках $A\,(0;\,0)$, $B\,(1;\,0)$, $B_0\,(1,\,1)$, $A_0\,(0,\,1)$, D_2 - треугольник с вершинами в точках A, B, $C\,(0,-1)$, D_3 - треугольник с вершинами в точках A, $D\,(-1,0)$, C, D_4 - прямоугольник с вершинами в точках A, D, $D_0\,(-1,1)$, A_0, J_1 - открытый отрезок с вершинами в точках A, B, J_2 - открытый отрезок с вершинами в точках A, D, J_3 - открытый отрезок с вершинами в точках A, C, J_4 - открытый отрезок с вершинами в точках A, A_0.

Перед тем, как приступить к постановке краевых задач, запишем все краевые условия и условия склеивания на линиях изменения типа, из которых будем пользоваться при постановке краевых задач:

Краевые условия:

$$u_1\,(1,y)=\varphi_1\,(y)\,,0\le y\le 1, \tag{2}$$

$$u_4\,(-1,\,y)=\varphi_2\,(y)\,,\quad 0\le y\le 1, \tag{3}$$

$$u_{1x}\,(1,\,y)=\varphi_3\,(y)\,,\quad 0\le y\le 1, \tag{4}$$

$$u_{4x}\,(-1,\,y)=\varphi_4\,(y)\,,\ \ 0\le y\le 1, \tag{5}$$

$$u_{1xx}\left(1,\, y\right) = \varphi_5\left(y\right), \quad 0 \le y \le 1, \tag{6}$$

$$u_{4xx}\left(-1,\, y\right) = \varphi_6\left(y\right), \;\; 0 \le y \le 1, \tag{7}$$

$$u_2|_{BC} = \psi_1\left(x\right), \;\; 0 \le x \le 1, \tag{8}$$

$$u_3|_{DE_2} = \psi_2\left(x\right), \;\; -1 \le x \le -\frac{1}{2}, \tag{9}$$

$$u_2|_{BE_1} = \psi_1\left(x\right), \;\; \frac{1}{2} \le x \le 1, \tag{10}$$

$$u_3|_{DC} = \psi_2\left(x\right), \;\; -1 \le x \le 0, \tag{11}$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_3\left(x\right), \;\; 0 \le x \le 1, \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_2}{\partial n^2}\right|_{BC} = \psi_5\left(x\right), \;\; 0 \le x \le 1, \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial u_3}{\partial n}\right|_{DC} = \psi_4\left(x\right), \;\; -1 \le x \le 0, \tag{14}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_3}{\partial n^2}\right|_{DC} = \psi_6\left(x\right), \;\; -1 \le x \le 0. \tag{15}$$

условия склеивания на линиях изменения типа:

$$u_1\left(x,\, 0\right) = u_2\left(x,\, 0\right) = \tau_1\left(x\right), \;\; 0 \le x \le 1, \tag{16}$$

$$u_{1y}\left(x,\, 0\right) = u_{2y}\left(x,\, 0\right) = \nu_1\left(x\right), \;\; 0 \le x \le 1, \tag{17}$$

$$u_{1yy}\left(x,\, 0\right) = u_{2yy}\left(x,\, 0\right) = \mu_1\left(x\right), \;\; 0 \le x \le 1, \tag{18}$$

$$u_{1yyy}\left(x,\, 0\right) = u_{2yyy}\left(x,\, 0\right) = \theta_1\left(x\right), \;\; 0 \le x \le 1, \tag{19}$$

$$u_3\left(x,\, 0\right) = u_4\left(x,\, 0\right) = \tau_2\left(x\right), \;\; -1 \le x \le 0, \tag{20}$$

$$u_{3y}\left(x,\, 0\right) = u_{4y}\left(x,\, 0\right) = \nu_2\left(x\right), \;\; -1 \le x \le 0, \tag{21}$$

$$u_{3yy}\left(x,\, 0\right) = u_{4yy}\left(x,\, 0\right) = \mu_2\left(x\right), \;\; -1 \le x \le 0, \tag{22}$$

$$u_{3yyy}\left(x,\, 0\right) = u_{4yyy}\left(x,\, 0\right) = \theta_2\left(x\right), \;\; -1 \le x \le 0, \tag{23}$$

$$u_2\left(0,\, y\right) = u_3\left(0,\, y\right) = \tau_3\left(y\right), \;\; -1 \le y \le 0, \tag{24}$$

$$u_{2x}\left(0,\, y\right) = u_{3x}\left(0,\, y\right) = \nu_3\left(y\right), \;\; -1 \le y \le 0, \tag{25}$$

$$u_{2xx}\left(0,\, y\right) = u_{3xx}\left(0,\, y\right) = \mu_3\left(y\right), 0 \le y \le 1, \tag{26}$$

$$u_{2xxx}\left(0,\, y\right) = u_{3xxx}\left(0,\, y\right) = \theta_3\left(y\right), -1 \le y \le 0, \tag{27}$$

$$u_1\left(0,\, y\right) = u_4\left(0,\, y\right) = \tau_4\left(y\right), \;\; 0 \le y \le 1, \tag{28}$$

$$u_{1x}\left(0,\, y\right) = u_{4x}\left(0,\, y\right) = \nu_4\left(y\right), \;\; 0 \le y \le 1, \tag{29}$$

$$u_{1xx}\left(0,\, y\right) = u_{4xx}\left(0,\, y\right) = \mu_4\left(y\right), \;\; 0 \le y \le 1, \tag{30}$$

$$u_{1xxx}\left(0,\, y\right) = u_{4xxx}\left(0,\, y\right) = \theta_4\left(y\right), \;\; 0 \le y \le 1. \tag{31}$$

Здесь $\varphi_i, \psi_i\left(i = \overline{1,6}\right)$ заданные достаточно гладкие функции, а $\tau_i,\, \nu_i,\, \mu_i,\, \theta_i\left(i = \overline{1,4}\right)$ неизвестные пока достаточно гладкие функции, причем выполняются условия согласования $\tau_1\left(1\right) = \varphi_1\left(0\right) = \psi_1\left(1\right)$, $\tau_2\left(-1\right) = \varphi_2\left(0\right) = \psi_2\left(-1\right)$, $n-$внутренняя нормаль к прямой $x + y = -1$ или $x - y = 1$, а $E_1\left(\frac{1}{2},\, -\frac{1}{2}\right)$, $E_2\left(-\frac{1}{2},\, -\frac{1}{2}\right)$. В зависимости от значений коэффициентов $a_1,\, b_1,\, a_2$ и b_2, то есть от значений угловых коэффициентов $\gamma_1 = \dfrac{b_1}{a_1}$ и $\gamma_2 = \dfrac{b_2}{2}$ характеристик операторов первого порядка уравнения (1), получаются различные случаи, основными являются 21 из них. Учитывая это для уравнения (1) ставится следующая

Задача-1. Найти функцию $u\,(x,\,y)$, которая 1) непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$; 2) удовлетворяет уравнению (1) в открытой области D при $x \neq 0,\ y \neq 0$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям и условиям склеивания на линиях изменения типа, которые указаны ниже:

1. Для значений $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$ - группы краевых условий (2), (3), (5), (7), (8), (9), (12), (13); Всего 72 таких групп краевых условий, а также - группу условий склеивания (16), (17), (20), (21), (24)-(31);

2. Для значений $\gamma_1 = \infty$, $\gamma_2 = \infty$ - группы краевых условий (2), (3), (5), (7), (8), (9), (12), (13) и (2), (3), (10), (11), (12), (13), (14), (15), а также - группу условий склеивания (16)-(25), (28), (29);

3. Для значений $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \infty$ - группы краевых условий (2), (3), (5), (8), (9), (12), (13), (14); Всего 32 таких групп краевых условий, а также - группу условий склеивания (16)-(18), (20)-(22), (24)-(26), (28)-(30);

4. Для значений $\gamma_1 = 0$, $0 < \gamma_2 \leq 1$ - группы краевых условий (2), (3), (5), (7), (8), (9), (14), (15); Всего 50 таких групп краевых условий, а также - группу условий склеивания (16)-(18), (20)-(22), (24)-(31);

5. Для значений $\gamma_1 = 0{,}1 < \gamma_2 < \infty$ - группы краевых условий (2), (3), (5), (7), (8), (9), (12), (14), (15); Всего 32 таких групп краевых условий, а также - группу условий склеивания (16)-(18), (20)-(22), (24)-(31);

6. Для значений $\gamma_1 = 0{,}-1 \leq \gamma_2 < 0$ - группы краевых условий (2), (3), (4), (6), (8), (9), (12), (13); Всего 32 таких групп краевых условий, а также - группу условий склеивания (16)-(18), (20)-(22), (24)-(31);

7. Для значений $\gamma_1 = 0$, $-\infty \leq \gamma_2 < -1$ - группы краевых условий (2), (3), (4), (6), (8), (9), (12), (13), (14); Всего 32 таких групп краевых условий, а также - группу условий склеивания (16)-(18),(20)-(22), (24)-(31);

8. Для значений $\gamma_1 = \infty$, $0 < \gamma_2 \leq 1$ - группы краевых условий (2), (3), (5), (8), (9), (12), (14), (15); Всего 8 таких групп краевых условий, а также - группу условий склеивания (16)-(26), (28)-(30).

9. Для значений $\gamma_1 = \infty{,}1 < \gamma_2 < \infty$ - группы краевых условий (2), (3), (5), (8), (9), (12), (13), (14), (15); Всего 4 таких групп краевых условий, а также - группу условий склеивания (16)-(26), (28)-(30).

10. Для значений $\gamma_1 = \infty$, $-1 \leq \gamma_2 < 0$ - группы краевых условий (2), (3), (4), (8), (9), (12), (13), (14); Всего 8 таких групп краевых условий, а также - группу условий склеивания (16)-(26), (28)-(30);

11. Для значений $\gamma_1 = \infty$, $-\infty \leq \gamma_2 < -1$ - группы краевых условий (2), (3), (4), (8), (9), (12), (13), (14), (15); Всего 4 таких групп краевых условий, а также - группу условий склеивания (16)-(26), (28)-(30).

12. Для значений $0 < \gamma_1 \leq 1$, $0 < \gamma_2 \leq 1$ - группы краевых условий (2), (3), (5), (7), (8), (9), (14), (15) и (2), (3), (5), (7), (10), (11), (14), (15), а также - группу условий склеивания (16)-(31);

13. Для значений $0 < \gamma_1 \leq 1$, $1 < \gamma_2 < +\infty$ - группы краевых условий (2), (3), (5), (7), (8), (9), (12), (14), (15) или (2), (3), (5), (7), (8), (9), (13), (14), (15) или (2), (3), (5), (7), (10), (11), (12), (14), (15) или (2), (3), (5), (7), (10), (11), (13), (14), (15), а также - группу условий склеивания (16)-(31);

14. Для значений $0 < \gamma_1 \leq 1$, $-1 \leq \gamma_2 < 0$ - группы краевых условий (2), (3), (4), (5), (8), (9), (12), (14); Всего 32 таких групп краевых условий, а также - группу условий склеивания (16)-(31).

15. Для значений $0 < \gamma_1 \leq 1$, $-\infty < \gamma_2 < -1$ - группы краевых условий (2), (3), (4), (6), (8), (9), (12), (13), (14); Всего 32 таких групп краевых условий, а также - группу условий склеивания (16)-(31);

16. Для значений $1 < \gamma_1 < +\infty$, $1 < \gamma_2 < +\infty$ - группы краевых условий (2), (3), (5), (7)-(9), (12)-(15) или (2), (3), (5), (7), (10)-(15), а также - группу условий склеивания (16)-(31);

17. Для значений $1 < \gamma_1 < +\infty$, $-1 \leq \gamma_2 < 0$ - группы краевых условий (2), (3), (4), (5), (8), (9), (12), (13), (14); Всего 32 таких групп краевых условий, а также - группу условий склеивания (16)-(31);

18. Для значений $1 < \gamma_1 < +\infty$, $-\infty < \gamma_2 < -1$ - группы краевых условий (2), (3), (4), (5), (8), (9), (12)-(15); Всего 8 таких групп краевых условий, а также - группу условий склеивания (16)-(31);

19. Для значений $-1 \leq \gamma_1 < 0$, $-1 \leq \gamma_2 < 0$ - группы краевых условий (2), (3), (4), (5), (8), (9), (12), (13), (14); Всего 32 таких групп краевых условий, а также - группу условий склеивания (16)-(31).

20. Для значений $-1 \leq \gamma_1 < 0$, $-\infty < \gamma_2 < -1$ - группы краевых условий (2), (3), (5), (6), (8), (9), (12), (13), (14); Всего 4 таких групп краевых условий, а также - группу условий склеивания (16)-(31).

21. Для значений $-\infty < \gamma_1 < -1$, $-\infty < \gamma_2 < -1$ - группы краевых условий (2), (3), (5), (6), (8), (9), (12)-(15) или (2), (3), (5), (6), (10)-(15); а также - группу условий склеивания (16)-(31).

Здесь в настоящем сообщении мы будем сформулировать теорему существования и единственности решения поставленной задачи лишь в 1-случае с группой условий (2), (3), (5), (6), (8), (9), (12), (14).

Теорема. *Если* $\varphi_1,\ \varphi_2\ \in C^4\,[0,\,1]$, $\varphi_4\ \in C^3\,[0,\,1]$, $\varphi_5\ \in C^2\,[0,\,1]$, $\psi_1 \in C^4\,[0,\,1]$, $\psi_2 \in C^4\left[-1,\,-\frac{1}{2}\right]$, $\psi_3 \in C^3\,[0,\,1]$, $\psi_4 \in C^3\,[-1,\,0]$, *причем выполняется условие согласования* $\tau_1\,(1) = \varphi_1\,(0) = \psi_1\,(1)$, $\tau_2\,(-1) =$

$\varphi_2(0) = \psi_2(-1)$, $\psi'_4(0) = -\psi'_3(0)$, *то задача*-1 *допускает единственное решение в случае* 1 *с группой условий* $(2), (3), (5), (6), (8), (9), (12), (14)$.

Теорема доказывается методом построения решения, а также методами интегральных и дифференциальных уравнений.

О ПОСТАНОВКЕ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ С ТРЕМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Мамажонов М.[1]**, Шерматова Х.М.**[2]**,**

[1] КГПИ, Узбекистан, Коканд
[2] ФерГУ, Узбекистан, Фергана
[1]bek84-08@mail.ru, [2]hilola-1978@mail.ru

В этой работе ставится один класс краевых задач для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu) = 0 \tag{1}$$

в треугольной области D плоскости xOy , где

$$Lu = \begin{cases} u_{1xx} - u_{1y}, & (x,\, y) \in D_1, \\ u_{ixx} - u_{iyy}, & (x,\, y) \in D_i \ \ (i = 2,\, 3, 4), \end{cases}$$

$$a, b, c \in R, a^2 + b^2 \neq 0, u\,(x,\, y) = u_i\,(x,\, y)\,,\ (x,\, y) \in D_i\ \ (i = 1,\, 2,\, 3, 4),$$

а $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup J_1 \cup J_2 \cup J_3$, D_1- прямоугольник с вершинами в точках $A\,(0;\,0)$, $B\,(1;\,0)$, $B_0\,(1,\,1)$, $A_0\,(0,\,1)$, D_2- треугольник с вершинами в точках A, B, $C\left(\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right)$, D_3- треугольник с вершинами в точках A, $D\,(-1,\,1)$, A_0, D_4- треугольник с вершинами в точках B, $E\,(2,\,1)$, B_0, J_1- открытый отрезок с вершинами в точках A, B, J_2- открытый отрезок с вершинами в точках A, A_0, J_3- открытый отрезок с вершинами в точках B, B_0.

Нам следует записать области $D_i\ \ (i = 3, 4)$ в следующем виде: $D_3 = D_{31} \cup D_{32} \cup A_0F_1$, $D_4 = D_{41} \cup D_{42} \cup B_0F_2$, где D_{31} - треугольник с вершинами в точках A, A_0, $F_1\left(-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)$, D_{32} - треугольник с вершинами в точках A_0, D, F_1, D_{41} - треугольник с вершинами в точках B, B_0, $F_2\left(\frac{3}{2},\,\frac{1}{2}\right)$, D_{42} - треугольник с вершинами в точках B_0, E, F_2, A_0F_1- открытый отрезок с вершинами в точках A_0, F_1, B_0F_2- открытый отрезок с вершинами в точках B_0, F_2.

Перед тем, как приступить к постановке краевых задач, запишем все краевые условия и условия склеивания на линиях изменения типа, из которых будем пользоваться при постановке краевых задач:

Краевые условия:

$$u_2|_{AC} = \psi_1\,(x)\,,\quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \tag{2}$$

$$u_2|_{BC} = \psi_1\,(x)\,,\quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_2\,(x)\,,\ \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_3\,(x)\,,\ \ \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \tag{5}$$

$$u_3|_{DF_1} = \psi_4\,(x)\,,\ -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \tag{6}$$

$$u_3|_{AF_1} = \psi_4\,(x)\,,\ -\frac{1}{2} \leq x \leq 0, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u_3}{\partial n}\right|_{AD} = \psi_5(x), \ \ -1 \le x \le 0, \tag{8}$$

$$u_4|_{BF_2} = \psi_6(x), \ \ 1 \le x \le \frac{3}{2}, \tag{9}$$

$$u_4|_{EF_2} = \psi_6(x), \ \ \frac{3}{2} \le x \le 2, \tag{10}$$

$$u_3|_{y=1} = f_1(x), \ \ -1 \le x \le 0, \tag{11}$$

$$u_4|_{y=1} = f_2(x), \ \ 1 \le x \le 2, \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial u_4}{\partial n}\right|_{BE} = \psi_7(x), \ \ 1 \le x \le 2, \tag{13}$$

$$u_{3y}|_{A_0D} = f_3(x), \ \ -1 \le x \le 0, \tag{14}$$

$$u_{4y}|_{B_0E} = f_4(x), \ \ 1 \le x \le 2. \tag{15}$$

условия склеивания на линиях изменения типа:

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = \tau_1(x), \ \ 0 \le x \le 1, \tag{16}$$

$$u_{1y}(x,0) = u_{2y}(x,0) = \nu_1(x), \ \ 0 \le x \le 1, \tag{17}$$

$$u_{1yy}(x,0) = u_{2yy}(x,0) = \mu_1(x), \ \ 0 \le x \le 1, \tag{18}$$

$$u_1(0,y) = u_3(0,y) = \tau_2(y), \ \ 0 \le y \le 1, \tag{19}$$

$$u_{1x}(0,y) = u_{3x}(0,y) = \nu_2(y), \ \ 0 \le y \le 1, \tag{20}$$

$$u_{1xx}(0,y) = u_{3xx}(0,y) = \mu_2(y), \ \ 0 \le y \le 1, \tag{21}$$

$$u_1(1,y) = u_4(1,y) = \tau_3(y), \ \ 0 \le y \le 1, \tag{22}$$

$$u_{1x}(1,y) = u_{4x}(1,y) = \nu_3(y), \ \ 0 \le y \le 1, \tag{23}$$

$$u_{1xx}(1,y) = u_{4xx}(1,y) = \mu_3(y), \ \ 0 \le y \le 1. \tag{24}$$

Здесь $\psi_i (i = \overline{1,7}), f_j (j = \overline{1,4})$ заданные достаточно гладкие функции, а $\tau_i, \nu_i, \mu_i, (i = 1,2,3)$ неизвестные пока достаточно гладкие функции, $n-$ внутренняя нормаль к прямой $x+y=0$ или $x-y=1$.

В зависимости от значений коэффициентов a и b, то есть от значений углового коэффициента $\gamma = \dfrac{b}{a}$ оператора первого порядка уравнения (1), получаются различные случаи. Учитывая это для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача-1. Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$; 2) удовлетворяет уравнению (1) в открытой области D при $x \neq 0, y \neq 0, x \neq 1$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям и условиям склеивания на линиях изменения типа, которые указаны ниже:

1. Для значения $\gamma = 0$ ($a \neq 0$, $b = 0$) - группы краевых условий (2), (4), (6), (8), (11), (12), (15); Всего 24 таких групп краевых условий, а также - группу условий склеивания (16), (17), (19)-(24);

2. Для значения $\gamma = \infty$ ($a = 0$, $b \neq 0$) - группы краевых условий (2), (4), (5), (6), (8), (10), (11), (12), (13); Всего 18 таких групп краевых условий, а также - группу условий склеивания (16)-(20), (22), (23);

3. Для значений $0 < \gamma < 1$ - группы краевых условий (2), (4), (6), (8), (11), (12), (15); Всего 6 таких групп краевых условий, а также - группу условий склеивания (16)-(24);

4. Для значения $\gamma = 1$ ($a = b$) - группы краевых условий (2), (4), (6), (8), (11), (12), (15) или (2), (4), (7), (8), (11), (12), (15) или (2), (4), (8), (11), (12), (14), (15), а также - группу условий склеивания (16)-(24);

5. Для значений $-1 < \gamma < 0$ - группы краевых условий (2), (5), (10), (11), (12), (13), (14); Всего 6 таких групп краевых условий, а также - группу условий склеивания (16)-(24);

6. Для значения $\gamma = -1$ ($a = -b$) - группы краевых условий (3), (5), (10), (11), (12), (13), (14) или (3), (5), (9), (11), (12), (13), (14) или (3), (5), (11), (12), (13), (14), (15), а также - группу условий склеивания (16)-(24);

7. Для значений $1 < \gamma < +\infty$ и $-\infty < \gamma < -1$ - группы краевых условий (2), (4), (5), (6), (8), (10), (11), (12), (13); Всего 18 таких групп краевых условий, а также - группу условий склеивания (16)-(24).

Здесь мы сформулируем теорему существования и единственности решения поставленной задачи лишь в случае 1 с группой условий (2), (4), (6), (8), (11), (12), (15).

Теорема. *Если* $\psi_1 \in C^3\left[0,\, \frac{1}{2}\right]$, $\psi_2 \in C^2\left[0,\, \frac{1}{2}\right]$, $\psi_4 \in C^3\left[-1,\, -\frac{1}{2}\right]$, $f_1 \in C^3\,[-1,\, 0]$, $\psi_5 \in C^2\,[-1,\, 0]$, $f_3 \in C^3\,[1,\, 2]$, $f_4 \in C^2\,[1,\, 2]$, *причем выполняются условия согласования* $\tau_1\,(0) = \psi_1\,(0)$, $f_1\,(-1) = \psi_4\,(-1)$, $\tau'{}_1\,(0) = \frac{1}{2}\psi_1'(0) + \frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2(0)$, $\psi_5\,(0) = \psi_2\,(0)$, *то задача*-1 *допускает единственное решение в случае* 1 *с группой условий* (2), (4), (6), (8), (11), (12), (15).

Эта теорема доказывается методом построения решения, а также методами интегральных и дифференциальных уравнений.

ЗАДАЧА ЖЕВРЕ ДЛЯ ОДНОГО СМЕШАННО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Маманазаров А.О. Ферганский государственный университет,

mega.mamanazarov@mail.ru,

Первыми работами об смешанно-параболических уравнениях были статьи французского математика Марио Жевре [1], [2], опубликованные в 1913-1914 гг. В них содержатся первые фундаментальные исследования по линейным уравнениям с частными производными второго порядка смешанно-параболического типа. Дальнейшее развития эта теория получила в работах А.М. Нахушева, С.А. Терсенова, Т.Д. Джураева, C.D. Pagani, G.C. Talenti, И.Е. Егорова, С.В. Попова и их учеников. В настоящее время имеется целый ряд работ, где наряду с основными граничными задачами предложены и изучены новые постановки краевых задач для смешанно-параболических уравнений в ограниченных областях. В настоящей работе для одного смешанно-параболического уравнения с сингулярным коэффициентом поставлен и изучен аналог задачи Жевре в полосе.

Пусть D – область плоскости переменных x и t, ограниченная прямыми $t = 0$ и $t = T$, где $T = const > 0$. В области D рассмотрим уравнение $L^{(k)}u = 0$, где

$$L^{(k)}u \equiv \begin{cases} L_1^{(k)}u \equiv u_{xx} + \dfrac{k_1}{x}u_x - u_t, & (x,t) \in D_1 = D \cap (x > 0), \\ L_2^{(k)}u \equiv u_{xx} + \dfrac{k_2}{x}u_x + u_t, & (x,t) \in D_2 = D \cap (x < 0), \end{cases}$$

k_1 и k_2 – заданные действительные числа из $[0, 1)$.

Очевидно, что $L_1^{(k)}u = 0$ и $L_2^{(k)}u = 0$ являются параболическими уравнениями, причем направления времени этих уравнений параллельны оси ординат и противоположны. Поэтому $L^{(k)}u = 0$ в области D является смешанно-параболическим уравнением.

Задача G. Найти непрерывную в замыкании области D функцию $u(x, t)$, являющуюся регулярным в областях D_1 и D_2 решением уравнения $L_1^{(k)}u = 0$ и $L_2^{(k)}u = 0$ соответственно и удовлетворяющую условиям склеивания

$$\lim_{x\to -0} u(x,t) = \lim_{x\to +0} u(x,t), \qquad \lim_{x\to -0} (-x)^{k_2} u_x(x,t) = \lim_{x\to +0} x^{k_1} u_x(x,t), \qquad 0 < t < T,$$

а также граничным условиям

$$u(x,0) = \varphi_1(x),\ 0 \le x < +\infty; \quad u(x,T) = \varphi_2(x),\ -\infty < x \le 0; \quad \lim_{|x|\to +\infty} u\,(x,t) = 0,\ t \in [0,T]\,,$$

где $\varphi_1\,(x)$ и $\varphi_2\,(-x)$ – заданные непрерывные функции на $[0, +\infty)$, причем $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \varphi_1\,(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to -\infty} \varphi_2\,(x) = 0$.

При исследовании задачи G случаи $k_1 = k_2 = 0$ и $k_1 \ne 0, k_2 \ne 0$ рассмотрены отдельно. В этих случаях доказано существование и единственность решения поставленной задачи. Единственность решения доказана методом интегралов энергии, а существование-использованием теории инегральных уравнений Вольерра и Фредгольма, а также сингулярных интегралных уравнений.

Литература

1. **Gevrey M.** Sur les equations aux derivees partielles du type parabolique //J.Math.Appl. 1913. T.9, Sec.6. p.305-475.

2. **Gevrey M.** Sur les equations aux derivees partielles du type parabolique //J.Math.Appl. 1914. Sec.4. p.105-137.

ТЕОРЕМА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПОСТАВЛЕННОЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА.

Ш.Б. Меражова, Н.Х. Маматова, Ш. Шамсиева

Бухарский государственный университет, Узбекистан, Бухара
e-mail: shsharipova@mail.ru

В сегодняшнем дне потребность исследование разностных моделей краевых задач для уравнения смешанного типа считается актуальным.

В данной работе дается теорема об устойчивости разностной схемы для уравнения смешанного типа на плоскости.

Задача исследования разностной модели краевых задач для уравнения смешанного типа сильно осложняется рядом обстоятельств, в частности, при изменения типов в рассматриваемой области. Эти трудности еще более возрастает с повышением размерности уравнения и области задания и является весьма значительными даже в условиях применения электронных вычислительных машин.

В области $D = \{(x,t) : 0 < x < l, \ -T < t < T\}$ рассмотрим следующее уравнение:

$$Lu \equiv K(t) \cdot u_{tt} - h(x) \cdot u_{xx} + a(x,t) \cdot u_t + b(x,t) \cdot u_x + c(x,t) \cdot u = f(x,t). \tag{1}$$

Через L обозначим линейный, дифференциальный оператор с частными производными второго порядка:

$$L \equiv K(t) \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} - h(x) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a(x,t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} + b(x,t) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + c(x,t).$$

Здесь $K(t)$, $h(x)$, $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$ - заданные функции, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $K(t) \in C^2([-T,T])$, $\quad t \cdot K(t) > 0$ при $t \neq 0$ и $K(0) = 0$.

2) $h(x) \in C^2([0,l])$, если $x \in (0,l)$, то $h(x) > 0$ и $h(0) = h(l) = 0$.

3) $a(x,t), b(x,t) \in C^1(\overline{D}), c(x,t) \in C(\overline{D})$.

4) $\beta(x) = a(x,0) - K_t(0) > 0$, $x \in [0,1]$.

C - пространство непрерывных функций, $\overline{D}$ - замыкание области D. Область D разделим на три части:
$D = D^+ \cup D^- \cup \{t = 0\}$.
$D^+ = D \cap \{t > 0\} = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$,
$D^- = D \cap \{t < 0\} = \{(x,t) : 0 < x < l, -T < t < 0\}$,
$\Gamma = \partial D$ - граница области D. $\overrightarrow{n} = (n_x, n_t)$ - внутренняя нормаль к границе Γ.

Так как

$$\Delta = b^2 - a \cdot c; \ \text{ здесь } \ a = K(t), \ \ b = 0, \ \ c = -h(x),$$

следовательно $\Delta = K(t) \cdot h(x)$.

Уравнения (1) принадлежит к уравнениям смешанного типа в области D.

Для уравнения (1) рассмотрим следующую краевую задачу:

Краевая задача: Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую в области D уравнения (1), а при $t = -T$ граничное условие:

$$u(x, -T) = 0, \quad x \in [0,l] \tag{2}$$

Корректность поставленной первой краевой задачи для уравнения смешанного типа рассматривались в работах В.Н.Врагова [1], и в работах Х.О.Рахмонова [2]

Один из основных результатов настоящей работы является следующая теорема:

Теорема. Если для коэффициентов уравнения (1) выполняются следующие разностные условия:

$$K^{-m+1} < 0, \quad K^{-m} < 0, \ \ a^1 - \overline{\tau} K^1 > 0,$$

то построенная для краевой задачи (1)-(2) следующая разностная схема:

$$L^{-}u \equiv \left[K^k \frac{\tau\overline{\tau}}{\Delta^2} - h_i \frac{\xi\overline{\xi}}{\Delta_x^2} + a_i^k \frac{\overline{\tau}}{\Delta} + b_i^k \frac{\overline{\xi}}{\Delta_x} + c_i^k\right] u = f_i^k, \quad k = \overline{-m+1,0}; \quad i = \overline{0,n}$$

$$L^{+}u \equiv \left[K^k \frac{\overline{\tau\tau}}{\Delta^2} - h_i \frac{\xi\overline{\xi}}{\Delta_x^2} + a_i^k \frac{\overline{\tau}}{\Delta} + b_i^k \frac{\overline{\xi}}{\Delta_x} + c_i^k\right] u = f_i^k, \quad k = \overline{1,m}; \quad i = \overline{0,n}$$

$$u_i^{-m} = 0, \quad i = \overline{0,n}$$

устойчива, аппроксимирует задачу первым порядком и сходится.

Литература

1. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. - Новосибирск: НГУ, 1983.-84с.

2. Рахмонов Х.О. О первой краевой задаче для одного уравнения смешанного типа в пространстве. - Новосибирск, 1985.-22с. - (препринт. АН СССР. Сиб. Отд-ние. Ин-т математики; є12

ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ СМЕЩЕНИЯ НА КУСКАХ ГРАНИЧНЫХ И ВНУТРЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕЩАННОГО ТИПА

Мирсабуров М., Эрдонов Б., Курбонназаров А.

Термезский государственный университет, Узбекистан.
e-mail mirsaburov@mail.ru

Пусть $\Omega-$ конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$, с концами в точках $A(-1,0)$, $B(1,0)$, а при $y < 0$ характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0, \tag{1}$$

где постоянные $m > 0,\ \beta_0 \in (-m/2, 1)$.

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1 (D_0 и D_1) соответственно точки пересечения характеристик AC и BC с характеристикой исходящей из точки $E(c,0), (E_1(c_1,0))$ где $c < c_1,\ c, c_1 \in I = (-1,1)-$ интервал оси $y = 0$.

Пусть $q(x) = \rho - kx$, где $\rho = c_1(1-c)/(1-c_1),\ k = (c_1 -)/(1-c_1)-$ линейный диффеоморфизм из множества точек отрезка $[c_1, 1]$ во множество точек отрезка $[c, c_1]$, причем $q(c_1) = c_1, q(1) = c$.

Настоящая работа посвящена комбинированной задачи с условиями смещения на кусках граничных и внутренных характеристик $C_1C \subset BC,\ AC_0 \subset AC$ и на внутренных характеристиках $E_1D_0^* \subset E_1D_0$ и E_1D_1, где D_0^* точка пересечения характеристик EC_1 и E_1D_0.

Задача ГВХ(Задача с условиями смещения на граничных и внутренних характеристиках). Требуется найти в области Ω функцию $u(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, удовлетворяющую условиям:

1) функция $u(x,y) \in C^2(\Omega^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области Ω^+;

2) функция $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 в области Ω^-;

3) на интервале вырождения выполняется условие сопряжения

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to +0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in I \setminus \{c, c_1\}, \tag{2}$$

причем эти пределы при $x = \pm 1,\ x = c$, могут иметь особенности порядка ныже $1 - 2\beta$, где $\beta = (m + 2\beta_0)/2(m+2) \in (0, 1/2)$;

4) выполнены условия

$$u(x,y)|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad -1 \le x \le 1, \tag{3}$$

$$a_0(x)(1+x)^{\beta} D_{-1,x}^{1-\beta} u[\theta_0(x)] + b_0(x)(c-x)^{\beta} D_{x,c}^{1-\beta} u[\theta_1(x)] = \psi_0(x), \quad -1 < x < c, \tag{4}$$

$$\mu_0 u[\theta_0^*(x)] + \chi_0 u[\theta_1^*(q(x))] = \psi_0^*(x), \quad c_1 \le x \le 1, \tag{5}$$

$$u(q(x),0)-u(x,0)=f(x),\quad c\le x\le 1, \tag{6}$$

где μ_0 и χ_0- некоторые постоянные, причем $\mu_0^2+\chi_0^2\neq 0$, $D^{1-\beta}_{-1,x}$, $D^{1-\beta}_{x,c}$- операторы дробного дифференцирования порядок $1-\beta$; $\theta_0(x)$ и $\theta_1(x)$ соответственно аффиксы точек пересечения характеристик AC и BC с характеристикой, исходящей из точки $M(x_0,0), x_0\in[-1,c]$:

$$\theta_0(x_0))=\frac{x_0-1}{2}-i\left(\frac{(m+2)(1+x_0)}{4}\right)^{2/(m+2)},$$

$$\theta_1(x_0)=\frac{x_0+1}{2}-i\left(\frac{(m+2)(1-x_0)}{4}\right)^{2/(m+2)},$$

а $\theta_0^*(x_0)$ и $\theta_1^*(q(x_0))$ аффиксы точек пересечения характеристик E_1D_1 и E_1D_0 с характеристиками, исходящих из точек $M(x_0,0)$ и $M(q(x_0),0)$ соответственно, где $x_0\in[c_1,1],\ q(x_0)\in[c,c_1]$:

$$\theta_0^*(x_0)=\frac{x_0+c_1}{2}-i\left(\frac{(m+2)(x_0-c_1)}{4}\right)^{2/(m+2)},$$

$$\theta_1^*(q(x_0))=\frac{q(x_0)+c_1}{2}-i\left(\frac{(m+2)(c_1-q(x_0))}{4}\right)^{2/(m+2)}.$$

Заданные функции $\varphi(x), a_0(x), b_0(x), \psi_0(x), \psi_0^*(x), f(x)$ непрерывно дифференцируемы в замыкании множества их определения, причем $a_0^2(x)+b_0^2(x)\neq 0,\ a_0(-1)\neq 0,\ b_0(c)\neq 0,\ d(x)=(1-x)^\beta a_0(x)+(c-x)^\beta b_0(x)\neq 0,\ x\in[-1,c],\ f(c_1)=0$, а функция $\varphi(x)$ представима в виде $\varphi(x)=(1-x^2)\widetilde{\varphi}(x)$, где $\widetilde{\varphi}(x)\in C^1(\overline{I})$.

Заметим, что условие (4) является условием смещения на кусках граничных характеристик $AC_0\subset AC$ и $C_1C\subset BC$, а условие (5) является условием смещения на внутренних характеристиках $E_1D_0^*\subset E_1D_0$ и E_1D_1.

Теорема. Задача ГВХ при $\mu_0>0,\ \chi_0>0$ однозначно разрешима.

Доказательство теоремы приводиться методом работы [1].

Теорема. Задача ГВХ при выполнении условий $\mu_0\ge 0,\ \chi_0\ge 0,\ \mu_0^2+\chi_0^2\neq 0$,

$$\mid \mu k^{-(3\alpha-1)}-\chi k^{3\alpha-1}\mid<1,\ \beta_0>(1-m)/3$$

где $\mu=\mu_0/(\mu_0+\chi_0),\ \chi=\chi_0/(\mu_0+\chi_0),\ \alpha=(1-2\beta)/4$, однозначно разрешима.

Литература

1. *Мирсабурова Гулбахор М.* Комбинированная задача с условием Трикоми и условием смещения на внутренних характеристиках для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом. // Дифференц.уравнения 2015 т.51.є5.с.621-634.

Задача со свободной границей для систем параболических уравнений типа реакция диффузия

Расулов М.С.
Институт математики АН РУз, Узбекистан, Ташкент
rasulovms@bk.ru

В работе рассматривается задача со свободной границей для системы параболических уравнений реакции-диффузии.

Постановка задачи. Требуется найти функций $u\,(t,x)\,,\upsilon\,(t,x)\,,s\,(t)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} u_t-d_1u_{xx}-m_1u_x=u(a_1-b_1u-c_1\upsilon), & t>0,\ 0<x<s(t),\\ \upsilon_t-d_2\upsilon_{xx}-m_2\upsilon_x=\upsilon(a_2-b_2u-c_2\upsilon), & t>0,\ 0<x<s(t),\\ u(0,x)=u_0(x),\upsilon(0,x)=\upsilon_0(x), & 0\le x\le s_0, s_0=s(0),\\ u(t,0)=\upsilon(t,0)=0, & t>0,\\ u(t,s(t))=\upsilon(t,s(t))=0, & t>0,\\ \dot{s}\,(t)=-\mu\left[u_x\,(t,s\,(t))+\rho\upsilon_x\,(t,s\,(t))\right], & t>0, \end{cases} \tag{1}$$

где $x = s(t)-$свободная (неизвестная) граница определяется вместе с $u\,(t, x)$, $\upsilon\,(t, x)$; a_i, b_i, c_i, m_i, $\mu-$ положительные постоянные, $i = 1, 2$. Функции $u_0(x)$, $\upsilon_0(x)$ удовлетворяют условиям:

$$u_0(x), \upsilon_0(x) \in C^{1+\alpha}[0, s_0],\ u_0(x) > 0 \text{ в } [0, s_0],\ \upsilon_0(x) > 0 \text{ в } [0, s_0],$$
$$u_0(s_0) = \upsilon_0(0) = u_0(0) = \upsilon_0(0) = 0, u_0(s_0) = \upsilon_0(s_0) = 0,\ u_0'(s_0) < 0,\ \upsilon_0'(s_0) < 0.$$

В работы рассматривается случай:

$$0 < \frac{a_2c_1}{a_1c_2}, \frac{a_1b_2}{a_2b_1} < 1.$$

Задача (1) исследована в работах [1] при $m_i \equiv 0$, $i = 1, 2$.

Исследования проводятся по следующей схеме. Сначала устанавливаются двусторонние оценки для $u\,(t, x)$, $\upsilon(t, x)$ и $\dot{s}(t)$, а затем оценки для $|u|_{1+\alpha}$, $|\upsilon|_{1+\alpha}$, $|u|_{2+\alpha}$, $|\upsilon|_{2+\alpha}$. При этом воспользуемся результатами работы [1, 2, 3].

Далее, доказаны теоремы существование и единственности, а также исследованы некоторые качественные свойства решении.

Теорема. *Если* $0 < \frac{a_2c_1}{a_1c_2}, \frac{a_1b_2}{a_2b_1} < 1$, *то справедливы оценки*

$$0 < u(t, x) \le M_1, \qquad t \ge 0,\ 0 \le x \le s(t),$$

$$0 < \upsilon(t, x) \le M_2, \qquad t \ge 0,\ 0 \le x \le s(t),$$

$$0 < \dot{s}(t) \le \mu(N_1 + \rho N_2), \qquad t \ge 0,$$

где $M_1 = \max\{\frac{a_1}{b_1}, \|u_0\|\}$, $M_2 = \max\{\frac{a_2}{c_2}, \|\upsilon_0\|\}$, $N_1 \ge \max\limits_x\{\frac{a_1^2}{m_1b_1}, \frac{\|u_0\|}{s_0-x}\}$, $N_2 \ge \max\limits_x\{\frac{a_2^2}{m_2c_2}, \frac{\|\upsilon_0\|}{s_0-x}\}$,

Литература

1. *M.Wang, J. Zhao. Free Boundary Problems for a Lotka-Volterra Competition System. Jour. Dyn.Differ. Equ 26 (2014) 1-21.*

2. *C.V.Pao. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations, Plenum Press, New York, 1992.*

3. *С.Н.Кружков. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными. Тр.ММО., Т.16. 1967. с. 329-346.*

Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа

Х. Р. Расулов

Бухарский государсвенный университет, Узбекистан, Бухара
xrasulov71@mail.ru

Теория вырождающихся уравнений эллиптических и смешанных типов является одним из важнейших разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Основы теории краевых задач для уравнений эллиптического и смешанного типов были заложены в фундаментальных работах Ф.Трикоми [1], А.В.Бицадзе [2]. В дальнейшем теория краевых задач для уравнений смешанного типа развивалась в работах Т.Д.Джураева [3], М.С.Салахитдинова [4] и их учеников. В последние годы одним из интенсивно развивающихся направлений в теории дифференциальных уравнений с частными производными являются уравнений эллиптического и смешанного типов с двумя линиями вырождения Б.Исломова [5]. Исследований таких уравнений важны тем, что они интересны как в теоретическом, так и практическом плане. Так, рассмотрим уравнение:

$$y^m U_{xx} + X^m U_{yy} + C(xy)U = f(x, y), m = const > 0,$$

где $c(x, y)$ и $f(x, y)$ заданные функции в конечной односвязной области Ω плоскости независимых переменных (x, y), ограниченной кривой σ при $x > 0, y > 0$ с концами в точках $A(1, 0), B(0, 1)$ и отрезками OA оси Ox и OB оси Oy.

Введем обозначения $I_1 = \{(x,y) : 0 < x < 1, y = 0\}, I_2 = \{(x,y) : 0 < y < 1, x = 0\}, \partial\Omega = \sigma \cup OA \cup OB, 2\beta = \frac{m}{m+z}$

Задача. Требуется найти функцию $U(x,y)$ обладающую следующими свойствами:

1) $U(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cup C^1(D \cup \sigma \cup I_1 \cup I_2)$, причем U_x и U_y могут обращатся безконечность порядка меньше чем 2β в точках $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$;

2) $U(x,y)$ - дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1) в области Ω;

3) $U(x,y)$ - удовлетворяет краевым условиям $\{\sigma(s)A_s[u] + \rho(s)\}|_\sigma = \varphi(s), 0 < s < l$
$U\mid_{OB}= \psi(y), 0 < y < l$, $a(x)U_y(x,0)+b(x)U_y(x,0) = d(x), 0 < x < l$, где $\sigma(s), \rho(s), a(x), b(x), d(x)$ - заданные функции, $A_s[U] = y^m \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial s} - x^m \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial x}{\partial s} = -cos(n,y)$, $\frac{\partial y}{\partial s} = -cos(n,x)$, n - внешняя нормаль к кривой σ, l - длина всей кривой σ, s - длина дуги кривой σ.

В данном сообщение при определеных ограничениях на заданные функции доказана однозначная разрешимость задачи.

Литература

1. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. -М.-Л.: Гостехиздат, 1947 г., 192 с.
2. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. -М.: Изд. АН СССР, 1959 г., 169 с.
3. Джураева Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. -Т.: Фан, 1979. - 204 с.
4. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. -Т.: Фан, 1974 г., 156 с.
5. Исломов Б. Нелокальная задача с условиями Франкля для вырождающегося уравнения эллептивно - гиперболического типа со спектраьнам параметрам. Математик физика ва замонавий анализнинг турдош масалалари руспублика илмий - амалий анжумани материаллари. 2015 йил, Бухоро.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

Рафиков А.Н., ФерГУ, Узбекистан,

rafiqov72@mail.ru,

Пусть Ω конечная односвязная область плоскости xOy, ограниченная линией $\bar{\sigma}_0 = \{(x,y) : (x^{2q}/q^2) + (y^{2p}/p^2) = 1,\, x \geqslant 0,\, y \geqslant 0\}$ с концами в точках $A\,(h_1,\,0)\,,\;\; B\,(0,\;h_2)$, отрезком $\overline{OB} = \{(x,y) : \, x = 0,\, 0 \leqslant y \leqslant h_2\}$ и при $y < 0$ характеристиками $OC\,:\,\xi \equiv \frac{1}{q}\,x^q - \frac{1}{p}\,(-y)^p = 0$, $AC\,:\,\eta \equiv \frac{1}{q}x^q + \frac{1}{p}\,(-y)^p = 1$ уравнения

$$sign\, y\,|y|^m\, u_{xx} + x^n\, u_{yy} = 0,, \quad m,\, n = const > 0, \tag{1}$$

где $2q = n+2, \;\; 2p = m+2, \; h_1 = q^{1/q}\,, \; h_2 = p^{1/p}$, причем $m > n$.

Введем обозначения: $2\alpha = n/(n+2)$, $2\beta = m/(m+2)$; $\Omega^+ = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega^- = \Omega \cap (y < 0)$, $OA = \Omega \cap (y = 0)$.

В данной работе для уравнения (1) сформулирована и исследована задача с условием типа Бицадзе-Самарского в эллиптической части области Ω.

Задача БС. Найти в области Ω функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,\,y) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1\left(\Omega\right) \cap C^2\left(\Omega^+ \cup \Omega^-\right)$ и $u_y(x,0)$ на концах отрезка OA может обращаться в бесконечность порядка ниже $(1-2\beta)\;/\;(1-2\alpha)$;

2) удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω^- и Ω^+;

3) удовлетворяет краевым условиям

$$u\,(x,\,y) - a\,(x,\,y)\,u\left({r_0}^{1/q}x,\,{r_0}^{1/p}y\right) = g\,(x,\,y)\,, \qquad (x,\,y) \in \bar{\sigma}_0;$$

$$u(0,\, y) = \tau_2(y)\,, \qquad 0 \leqslant y \leqslant h_2;$$

$$u|_{\overline{AC}} = \varphi(x), \qquad (q/2)^{1/q} \leqslant x \leqslant h_1,$$

где r_0-заданное число, а $a(x,\, y)\,,\, g(x,\, y)\,,\, \tau_2(y)\,,\, \varphi(x)$ - заданные функции, причем $0 < r_0 < 1$; $a(x,y),\ g(x,y) \in C(\bar{\sigma}_0);\ \tau_2(y) \in C[0,\, h_2];\, \varphi(x) \in C\left[(q/2)^{1/q},\, h_1\right]$.

Из задачи БС, в частном случае, при $a(x,\ y) \equiv 0$ следует задача, рассмотренная в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уринов А.К. Рафиков А.Н.* Об одном аналоге задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами // Узбекский математический журнал. 2015. 2. - С. 110-120.

ДЕЛЬТА-ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ДАРБУ

Родионова И. Н., Долгополов В. М., Долгополов М. В. [1]

[1] *Лаборатория математической физики, Самарский университет, Самара, Россия,*
mikhaildolgopolov68@gmail.com

Вырождающиеся гиперболические уравнения встречаются при решении многих важных задач динамических систем и вопросов прикладного характера: теории бесконечно малых изгибаний поверхностей вращения, безмоментной теории оболочек, в магнитной гидродинамике, в газовой динамике. При всем разнообразии вырождающихся уравнений и краевых условий, удачно подобранных к заданному дифференциальному уравнению, последнее в характеристических координатах редуцируется к уравнению Эйлера–Дарбу.

Некоторые краевые задачи (в частности, задача Коши) для указанного уравнения потребовали введения специальных классов, в которых формула решения приобретает более простой вид и может быть использована для решения новых задач, в том числе, дельта(Δ)-задач в квадратах, содержащих линию сингулярности коэффициентов уравнения с данными на смежных или параллельных сторонах квадрата (постановка А.М. Нахушева).

Первыми работами по Δ-задачам на множествах, представляющих объединение двух характеристических треугольников, для гиперболических уравнений были работы Т.Ш. Кальменова [1], В.Ф. Волкодавова и А.А. Андреева [2], А.М. Нахушева [3].

В настоящей работе сформулированы задачи Δ_2 на множестве, включающем четыре характеристических треугольника, и рассмотрено обобщенное уравнение Эйлера–Дарбу с отрицательными параметрами

$$U_{\xi\eta} - \frac{p}{\eta - \mathrm{sgn}\eta \cdot \xi} U_\xi + \frac{p}{\mathrm{sgn}\eta \cdot \eta - \xi} U_\eta - (\mathrm{sgn}\eta)\lambda \mathrm{U} = 0, \tag{1}$$

$0 < p < \frac{1}{2}$, $|\lambda| < \infty$ в прямоугольной области D, ограниченной характеристиками уравнения (1) $\xi = 0$, $\xi = h$, $\eta = h$, $\eta = -h$ $(h > 0)$, содержащей внутри себя две линии сингулярности коэффициентов уравнения $\eta = \xi$ и $\eta = -\xi$. Для уравнения (1) в области D исследована постановка краевых задач Δ_2 с заданными значениями искомого решения на параллельных сторонах прямоугольника, с условиями сопряжения относительно решения и его нормальных производных как на линиях сингулярности коэффициентов, так и на внутренней характеристической линии [4]. Методом интегральных уравнений доказана однозначная разрешимость поставленных задач. Задачи решаются в специальном классе функций, введенном авторами [5].

Рассмотренные граничные условия для уравнения (1) в прямоугольной области D на параллельных сторонах прямоугольника имеют вид (Рис. 1):

$$U(\xi, h) = \varphi_1(\xi), \quad U(\xi, -h) = \varphi_2(\xi), \qquad 0 \le \xi \le h.$$

На линиях сингулярности $\eta = \xi$, $\eta = -\xi$ и на характеристике $\eta = 0$ осуществляется склейка по непрерывности искомого решения.

Относительно нормальных производных рассматриваются два случая сопряжения на линиях $\xi = \pm\eta$. В первом случае введено условие разрывности Франкля (задача Δ_2^*):

$$\nu_1(\xi) = \lim_{\eta \to \xi + 0} (\eta - \xi)^{-2p} (U_\xi - U_\eta) = -\lim_{\eta \to \xi - 0} (\xi - \eta)^{-2p} (U_\xi - U_\eta) = -\nu_2(\xi),$$

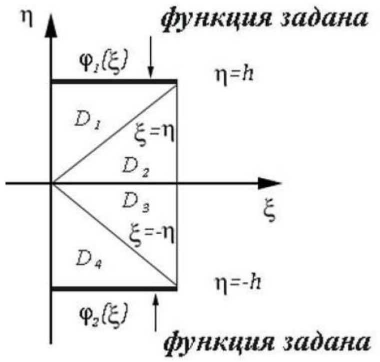


Рис. 1: Область D.

$$\nu_3(\xi) = \lim_{-\eta\to\xi-0}(\eta+\xi)^{-2p}(U_\xi+U_\eta) = -\lim_{-\eta\to\xi+0}(-\xi-\eta)^{-2p}(U_\xi+U_\eta) = -\nu_4(\xi), \quad 0<\xi<h.$$

Во втором случае склейка осуществляется по непрерывности нормальных производных $\nu_1=\nu_2$; $\nu_3=\nu_4$ (задача Δ_2). В обеих задачах Δ_2 и Δ_2^* на характеристике $\eta=0$ задается сопряжение:

$$\lim_{\eta\to 0+0}\left(\frac{\partial U}{\partial\eta}-\frac{\partial U}{\partial\xi}\right) = \lim_{\eta\to 0-0}\left(\frac{\partial U}{\partial\eta}+\frac{\partial U}{\partial\xi}\right).$$

За основу решения поставленных задач взято, полученное авторами [5–7], решение задачи Коши специального класса R_h. При выполнении определенных условий единственное решение задачи Δ_2^* получено в явном виде. Полное исследование задачи Δ_2 удалось получить только при $\lambda=0$.

Следуя теории сингулярных интегральных уравнений [8], сформулированы условия, налагаемые на заданные функции φ, при которых существует единственное решение уравнений, а также условия однозначной разрешимости задачи Δ_2.

Литература

1. **Кальменов Т.Ш.** *О характеристической задаче Коши для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений* // Дифференц. уравнения. - 1973. Т. 9. - № 1. - С. 84-96.

2. **Волкодавов В.Ф., Андреев А.А.** *О двух краевых задачах для одного гиперболического уравнения* // Волж. мат. сб. Куйбышев. - 1973. Вып. 23. - С. 102-112.

3. **Нахушев А.М.** *К теории краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений* // Сообщения АН ГССР. - 1977. Вып. 77. - № 3. - С. 545-548.

4. **Долгополов В.М., Долгополов М.В., Родионова И.Н.** *О дельта-задачах для обобщенного уравнения Эйлера–Дарбу* // Contemporary Problems in Mathematics and Physics: Abstracts of the Uzbek-Israel International Conference, Tashkent: National University of Uzbekistan, 2017. - PP. 203-204.

5. **Долгополов В.М., Долгополов М.В., Родионова И.Н.** *Построение специальных классов решений некоторых дифференциальных уравнений гиперболического типа* // Доклады Академии Наук. - 2009. Т. 429. - № 5. - С. 583-589.

6. **Долгополов М.В., Родионова И.Н.** *Задачи для уравнений гиперболического типа на плоскости и в трехмерном пространстве с условиями сопряжения на характеристике* // Изв. РАН. Сер. матем. - 2011. Т. 75. - № 4. - С. 21-28.

7. **Долгополов М. В., Родионова И. Н., Долгополов В. М.** *Об одной нелокальной задаче для уравнения Эйлера–Дарбу* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. - 2016. Т. 20. - № 2. - С. 259-275.

8. **Гахов Ф.Д.** *Краевые задачи.* - М. : Наука, 3-е издание, 1977. - 640 с.

Ташкентский финансовый институт, Узбекистан,
nargiz.ochilova@gmail.com **Краевая задача с условием Франкля для уравнения смешанного типа с оператором Капуто**

Н.К. Очилова
Ташкентский финансовый институт, Узбекистан,
nargiz.ochilova@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} -_C D_{oy}^{\alpha} u, & x > 0, \ y > 0 \\ (-y)^m u_{xx} - x^m u_{yy}, & x > 0, \ y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

где

$$_C D_{oy}^{\alpha} u = \frac{1}{(1-\alpha)} \int\limits_0^y (y-t)^{-\alpha} u_t(x,t) dt,$$

$m > 0, \quad m = const, \ 0 < \alpha < 1$, [1].

Пусть D - область, ограниченная при $y > 0$, отрезками AB, BB_0, B_0A_0, A_0A прямых $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $x = 0$ а при $y < 0$, ограниченной прямой $x = 0$, $(-1 \leqslant y \leqslant 0)$ и характеристикой $BC: \ x^q + (-y)^q = 1$ уравнения (1), где $2q = m + 2$.

Введем обозначения:

$$D_1 = D \cap \{x > 0, \, y > 0\}, \quad D_2 = D \cap \{x > 0, \, y < 0\},$$

$$D_{21} = D_2 \cap \{x + y > 0\}, \quad D_{22} = D_2 \cap \{x + y < 0\},$$

$I = \{(x,y) : \ 0 < x < 1, \ \ y = 0\}$, $2\beta = m/(m+2)$, причем $0 < \beta < \frac{1}{2}$.

Задача I. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:
1) $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D_1) \cap C^2(D_{21} \cup D_{22})$; $_C D_{oy}^{\alpha} u \in C\,(D_1)$;
2) $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) в области $D_1 \cup D_{21} \cup D_{22}$;
3) $u_x(x,y) \cup C(D_1 \cup AA_0) \cap C(D_{22} \cup AC)$ и $u_y \in C(D_2 \cup I)$ кроме того, на AB выполняется условие склеивания:

$$\lim_{y \to +0} y^{1-\alpha} u_y(x, +0) = u_y(x, -0), \quad (x, 0) \in AB;$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x,y)|_{AC} = \varphi_1(x), \ \ -1 \leqslant y \leqslant 0.$$

$$u(x,y)\left|_{AA_0}\right. = \tau_0(y),$$

$$u(x,y)\left|_{BB_0}\right. = \varphi_0(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

$u_x(0, +y) = u_x(0, -y)$, $0 < y < 1$, здесь $\tau_0(y)$, $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(x)$ - заданные функции. При определенных условиях на заданных функции доказывается однозначная разрешимость.

Литература

1. **A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo.** *Theory and Applications of Fractional Differential Equations,* // North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam. (2006).

О нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в области, эллиптическая часть которой полуполоса

Рузиев М.Х.

Институт Математики имени В.И.Романовского АНРУз., Узбекистан,Ташкент
mruziev@mail.ru

Пусть область D является суммой областей $D^+ \cup D^-$, первая из которых представляет собой эллиптическую полуполосу $0 \le x \le 1, y \ge 0$, а вторая- характеристический треугольник OBC, где OC и BC - две пересекающиеся в точке $C(\frac{1}{2}, -(\frac{m+2}{2})^{\frac{2}{m+2}})$ характеристики уравнения

$$signy\,|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \qquad (1)$$

исходящие из точек $O(0,0)$ и $B(1,0)$, а OB отрезок прямой $y=0$. В (1) $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$.

Задача. Требуется найти в области D функцию $u(x,y)$, которая:
1) $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$ и удовлетворяет уравнению (1) в $D^+ \cup D^-$;
2) $\lim\limits_{y \to +\infty} u(x,y) = 0$, равномерно по $x \in [0,1]$;
3) удовлетворяет краевым условиям
$u(0,y) = \varphi_1(y)$, $u(1,y) = \varphi_2(y)$, $y \ge 0$,

$$x^\beta D_{0,x}^{1-\beta} u[\theta_0(x)] + \mu(x)(1-x)^\beta D_{x,1}^{1-\beta} u[\theta_k(x)] = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)} (D_{0,x}^{1-2\beta} u(x,0) - D_{x,1}^{1-2\beta} u(x,0)) + \delta(x),$$

и условию сопряжения $\lim\limits_{y \to +0} y^{\beta_0} u_y = \lim\limits_{y \to -0} (-y)^{\beta_0} u_y, \;\; x \in (0,1)$.

Пределы при $x=0$, $x=1$ могут иметь особенности порядка ниже $1-2\beta$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$,$\delta(x)$, $\mu(x)$ - заданные функции,

$\theta_0(x) = \frac{x_0}{2} - i(\frac{m+2}{4} x_0)^{\frac{2}{m+2}}$ - аффикс точки пересечения характеристики OC с характеристикой , исходящей из точки $(x_0, 0)$, $x_0 \in (0,1)$, а $\theta_k(x) = \frac{x_0+k}{1+k} - i(\frac{(m+2)(1-x_0)}{2(1+k)})^{\frac{2}{m+2}}$ - аффикс точки пересечения характеристики BC с кривой $x - \frac{2k}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = x_0$, $k = const > 1$, где $\beta = \frac{m+2\beta_0}{2(m+2)}$.

С помощью принципа экстремума и методом интегральных уравнений доказаны единственность и существование решения исследуемой задачи. Отметим, что краевая задача для уравнения (1) при $\beta_0 = 0$ в области D изучена в работе[1].

Литература

1. *Репин О.А.* Задача Трикоми для уравнения смешанного типа в области,эллиптическая часть которого- полуполоса. // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, No4. С. 565-567.

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМ ЧЛЕНОМ

Салахитдинов М.С.[1], Каримов Э.Т.[2],

[1] Институт математики имени В.И.Романовского, АН РУз, Узбекистан, Ташкент
[2] Институт математики имени В.И.Романовского, АН РУз, Узбекистан, Ташкент
[1]salakhitdinovms@yahoo.com, [2]erkinjon@gmail.com

В этом докладе рассмотрим однозначную разрешимость одной краевой задачи для диффузионного уравнения дробного порядка с двумя операторами дробного дифференцирования в смысле Хилфера. Используя спектральное разложение по пространственной переменной, решение задачи выпишем через бесконечный ряд. Налагая определенные условия на заданные функции, докажем сходимость этих рядов.

Дифференциальный оператор Хилфера порядка α и типа β определен как

$$D_{0t}^{\alpha,\beta} f(t) = \left(I_{0t}^{\beta(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left(I_{0t}^{(1-\beta)(n-\alpha)} f \right) \right)(t), \;\; t > 0, \qquad (1)$$

где $n-1<\alpha\le n\in\mathbb{N}$ и $0\le\beta\le 1$,

$$I_{0t}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t(t-z)^{\alpha-1}f(z)dz,\ t>0$$

является дробным интегралом Римана-Лиувилля порядка α, причем $I_{0t}^{0}f(t)=f(t)$.

Заметим, что в случае когда $\beta=0$ оператор (1) совпадает с дифференциальным оператором в смысле Римана-Лиувилля дробного порядка α, которая определена как

$${}_{RL}D_{0t}^{\alpha}f(t)=\frac{d^n}{dt^n}I_{0t}^{n-\alpha}f(t),\ t>0.$$

А в случае, когда $\beta=1$, оператор (1) совпадает с дробным дифференциальным оператором в смысле Капуто порядка α:

$${}_{C}D_{0t}^{\alpha}f(t)=I_{0t}^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}f(t),\ t>0.$$

Задача. Найти регулярное решение $u(t,x)$ уравнения

$$D_{0t}^{\alpha_1,\beta_1}u(t,x)+\mu D_{0t}^{\alpha_2,\beta_2}u(t,x)-u_{xx}(t,x)=f(t,x),$$

в области $\Omega=\{(t,x):\ 0<t<T,\ 0<x<1\}$, удовлетворяющее начальным

$$\lim_{t\to+0}I_{0t}^{(1-\beta_i)(1-\alpha_i)}u(t,x)=0,\ 0\le x\le 1,\ i=1,2$$

и краевым условиям

$$u(t,0)=u(t,1)=0,\ \ 0\le t\le T.$$

Здесь α_i, β_i $(i=1,2)$ - действительные числа, такие что $0<\alpha_2<\alpha_1<1,\ 0\le\beta_i\le 1\,(i=1,2),\ f(t,x)$ - заданная функция.

Обобщенная производная дробного порядка Хилфера имеет практическую важность в исследованиях материалов формирующие зеркало [1]. В работе [2] операторным методом решено дифференциальное уравнение дробного порядка с обобщенной производной Хилфера. Далее, в работах [3-5] изучены прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных с дробной производной Хилфера. В работе [6] найден решение модифицированной задачи Коши для многочленного дифференциального уравнения с несколькими дробными производными Хилфера. Мы будем пользоваться этим результатом для представления решения исследуемой задачи.

Используя новую оценку для функции Миттаг-Леффлера от двух переменных, которая доказана в работе [7], докажем однозначную разрешимость поставленной задачи.

Литература

1. *Hilfer R.*Experimental evidence for fractional time evolution in glass forming materials // Chem. Phys. 2002. Vol. 284, pp.399-408.

2. *Hilfer R., Luchko Y., Tomovski Ž.* Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann-Liouville fractional derivatives // Fract. Calc. Appl. Anal. 2009. Vol. 12, No 3, pp.299- 318; at http://www.math.bas.bg/fcaa.

3. *Furati K.M., Kassim M.D., Tatar N-e.* Existence and uniqueness for a problem involving Hilfer fractional derivative // Comp. Math. Appl. 2012. Vol.64, No 6, pp.1616-1626.

4. *Furati K.M., Iyiola O.S., Kirane M.* An inverse problem for a generalised fractional diffusion // Appl. Math. Comput. 2014. Vol.249, pp.24-31.

5. *Malik S.A., Aziz S.* An inverse source problem for a two parameter anomalous diffusion equation with nonlocal boundary conditions // Computer and Mathematics with Applications. 2017, http://dx/doi.org/10.1016/j.camwa.2017.03.019

6. *Kim M.-Ha., Chol-Ri G.,O H.-Chol.* Operational method for solving multi-term fractional differential equations with the generalized fractional derivatives // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2014. vol.17. No 1,pp.79-95.

7. *Karimov E.T., Kerbal S., Al-Salti N.* Inverse source problem for multi-term fractional mixed type equation // M.Ruzhansky et al. (eds.), Advances in Real and Complex Analysis with Applications, Trends in Mathematics. 2017, pp. 289-301

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Сопуев А.[1], **Жээнбаев Н.А.**[2],

[1] Ошский государственный университет, Кыргызстан, Ош)
[2] Ошский государственный университет, Кыргызстан, Ош
[1]sopuev@mail.ru, [2]njeenbaev@rambler.ru

В области $D = \{(x, y) : -l_2 < x < l_1, 0 < y < h\}$ для уравнений

$$u_{xxxx} + a_1(x, y)u_{xx} + b_1(x, y)u_x + c_1(x, y)u + u_y = 0, \quad (x, y) \in D_1, \tag{1}$$

$$u_{xxxy} + a_2(x, y)u_{xx} + b_2(x, y)u_x + c_2(x, y)u + d(x, y)u_y = 0, \quad (x, y) < D_2, \tag{2}$$

где $a_i, b_i, c_i (i = 1, 2), d$ - заданные функции, а $D_1 = D \cap (x > 0), D_2 = D \cap (x > 0)$, методами функции Римана, Грина и интегральных уравнений доказана существование и единственность решения задачи 1. Пусть C^{n+m}означает класс функций, имеющих непрерывные производные $\partial^{r+s}/\partial x^r \partial y^s (r = 0, 1, ..., n, s = 0, 1, ..., m)$.

Задача 1. Найти функцию $u \in C(\overline{D}) \cap [C^1(D_1) \cup C^1(D_2)] \cap [C^{4+0}(D_1) \cup C^{3+1}(D_2)]$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению (1) и краевым условиям

$$u(\ell_1, y) = \varphi_1(y), u_x(\ell_1, y) = \varphi_1(y), 0 \le y \le h, u(x, 0) = \psi_1(x), 0 \le x \le \ell_1,$$

удовлетворяющую в области D_2 уравнению (2) и краевым условиям

$$u(-\ell_2, y) = \varphi_3(y), u_x(-\ell_2, y) = \varphi_4(y), u(x, 0) = \psi_2(x), -\ell_2 \le x \le 0,$$

а также, удовлетворяющую условиям склеивания

$$u(-0, y) = u(+0, y), u_x(-0, y) = u_x(+0, y), u_{xx}(-0, y) = u_{xx}(+0, y), 0 \le y \le h,$$

условиям гладкости $\varphi_i(y) \in C^1[0, h] (i = \overline{1, 4}), \psi_1(x) \in C^4[0, \ell_1], \psi_2(x) \in C^3[-\ell_2, 0]$
и условиям согласования

$$\varphi_1(0) = \psi_1(\ell_1), \varphi_2(0) = \psi_1'(\ell_1), \varphi_3(0) = \psi_2(-\ell_2),$$

$$\varphi_4(0) = \psi_2'(-\ell_2), \varphi_1(0) = \psi_2(0), \varphi_1'(0) = \psi_2(0).$$

Коэффициенты уравнения (1) и (2) удовлетворяют следующим условиям:

$$a_1(x, y) \in C(\overline{D_1}) \cap C^{2+0}(D_1), b_1(x, y) \in C(\overline{D_1}) \cap C^{1+0}(D_1), c_1(x, y) \in C(\overline{D_1}),$$

$$a_2(x, y) \in C(\overline{D_2}) \cap C^{2+0}(D_2), b_2(x, y) \in C(\overline{D_2}) \cap C^{1+0}(D_2), c_2(x, y) \in C(\overline{D_2}), d(x, y) \in C(\overline{D_2}).$$

Краевые задачи для уравнений (1) и (2) изучены в работах [1-2].

Литература

1. *Джураев Т.Д., Сопуев А.* К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка.- Ташкент: Фан, 2000. - 144 с.

2. *Cattabriga L.* Una generalizzazione del problema fondamentale di valori al contorno per equazioni paraboli che lineari // Annali di Matematica pure ed applicata. - 1958. T. 46. - P. 215-247.

Краевая задача для уравнения параболо - гиперболического типа со спектральным параметром в прямоугольной области

Убайдуллаев У. Ш.

Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, г. Ташкент
e-mail: ulugbekuz88@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-{}_cD_{0y}^{\alpha}u, & y\geqslant 0,\\ u_{xx}-u_{yy}-\lambda^2 u, & y<0\end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области D , где $D=\{(x,y):\ 0<x<1,\ \ -p<y<q\,\}$, λ, $p>0$, $q>0$ – заданные действительные числа, а ${}_cD_{0y}^{\alpha}$– оператор дробного порядка в смысле Капуто[1]:

$${}_cD_{0y}^{\alpha}f(y)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y(y-t)^{-\alpha}f'(t)dt,\quad 0<\alpha<1. \tag{2}$$

Введем обозначения: $J=\{(x,y):\ 0<x<1,\ y=0\}$,

$$D_1=D\,\cap\,\{(x,y):\ x>0,\,y>0\}\,,\ D_2=D\,\cap\,\{(x,y):\,x>0,\,y<0\}\,,\,D=D_1\cup D_2\cup J.$$

В области D исследуем следующую задачу.

Задача TK_λ. Требуется найти функции $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\bar D)\cap C^1(D)$;

2) $u_{yy}\in C(D_2)$, $u_{xx}\in C(D_1\cup D_2)$, ${}_cD_{0y}^{\alpha}u\in C(D_1\cup J)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях $D_j(j=1,2)$;

3) на линии J выполняются условия склеивания

$$u(x,+0)=u(x,-0),\quad (x,0)\in\bar J,\ \lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}u_y(x,y)=\lim_{y\to-0}u_y(x,y),\quad (x,0)\in J; \tag{3}$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$u(0,y)=0,\qquad u(1,y)=0,\qquad -p\leqslant y\leqslant q\,, \tag{4}$$

$$u(x,-p)=\psi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1\,, \tag{5}$$

где $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\psi(0)=\psi(1)=0$.

Теорема единственности. Если существует решение $u(x,y)$ задачи TK_λ, то оно единственно только тогда, когда выполнено условие

$$\Delta_k(p)\equiv\Gamma(\alpha)cos\ p\sqrt{\lambda^2+k^2\pi^2}+\pi k\,psin\ \sqrt{\lambda^2+k^2\pi^2}\neq 0,\quad k\in N. \tag{6}$$

Доказательство теоремы. Пусть существует два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ задачи TK_λ. Тогда их разность $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) и однородным условиям:

$$u(x,-0)=\,u(x,+0),\ (x,0)\in\bar J,\ \lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}u_y(x,y)=\lim_{y\to-0}u_y(x,y),\ (x,0)\in J; \tag{7}$$

$$u(0,y)=0,\qquad u(1,y)=0,\qquad -p\leqslant y\leqslant q\,, \tag{8}$$

$$u(x,-p)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1\,. \tag{9}$$

Рассмотрим функции

$$u_k(y)=2\int\limits_0^1 u(x,y)\sin\pi kxdx,\quad k\in N. \tag{10}$$

В силу (7), (8), (9) из (1) имеем

$${}_cD_{0y}^{\alpha}u_k(y)+\pi^2k^2u_k(y)=0,\quad 0<y<q, \tag{11}$$

$$u_k''(y)+(\lambda^2+k^2\pi^2)u_k(y)=0,\quad -p<y<0, \tag{12}$$

$$u_k(0,-0)=u_k(0,+0),\ \lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}u_k'(y)=\lim_{y\to-0}u_y'(y), \tag{13}$$

$$u_k(-p)=0. \tag{14}$$

Дифференциальные уравнения (11) и (12) имеет общие решения

$$u_k(y)=\begin{cases} C_1E_{1/\alpha}(-\pi^2k^2y^\alpha,1)\,, & 0<y<q,\\ C_2\cos\sqrt{\lambda^2+k^2\pi^2}\,y+C_3\sin\sqrt{\lambda^2+k^2\pi^2}\,y, & -p<y<0,\end{cases} \tag{15}$$

где $C_1,\ C_2,\ C_3$ – произвольные постоянные, $E_{1/\alpha}(z,\mu)$ – известная функция Миттаг-Леффлера [1], [2].

Подставляя (15) в (13) имеем

$$C_2=C_1\qquad C_3=-\pi kC_1/\Gamma(\alpha). \tag{16}$$

В силу (14), (16) из второй равенство (15) получим

$$C_1\left[\cos p\sqrt{\lambda^2+k^2\pi^2}+\frac{\pi k}{\Gamma(\alpha)}\sin p\sqrt{\lambda^2+k^2\pi^2}\right]=0.$$

Отсюда учитывая (6), находим $C_1=0$. Следовательно из (15) с учетом (16) получаем $u_k(y)=0,\quad 0<y<q,\quad u_k(y)=0,\quad -p<y<0.$

Тогда из равенств (10) следует, что $2\int\limits_0^1 u(x,y)\sin\pi kxdx=0$. Отсюда в силу полноты системы $\{\sin\pi kx\}$ в пространстве $L_2\,[0,1]$ [3] следует, что $u(x,y)=0$ почти всюду на $[0,1]$ при любом $y\in[-p,0]$ и $y\in[0,q]$.

Теорема единственности доказана.

Теорема существования доказывается методом спектрального анализа [3] при определенных ограничениях параметров и заданные функции.

Литература

1. *Псху А. В.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. Нальчик. 2005. 200 с.
2. *Джэарбашян М.М.* Интегральные преобразования и преставления функций в комплексной области. - М.: 1966. 672 с.
3. *Сабитов К.Б.* Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо - гиперболического типа в прямоугольной области.// "Мат. заметки" 2009. Т. 86. Вып. 2. С.273-279.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Уринов А.К.[1], Каримов К.Т.[2]

[1] Ферганский государственный университет, Узбекистан, г.Фергана
[2] Ферганский государственный университет, Узбекистан, г.Фергана
[1]urinovak@mail.ru, [2]karimovk80@mail.ru

Интерес к задаче Дирихле для уравнения смешанного типа возник после работы Ф.И.Франкля [1], в которой впервые обращено внимание на то, что задачи трансзвуковой газовой динамики сводятся к этой задаче. А.В.Бицадзе [2] доказал, что задача Дирихле для уравнения $u_{xx}+(\mathrm{sgn}y)\,u_{yy}=0$ поставлено некорректно. После этой работы возникла проблема поиска смешанных областей, для которых задача Дирихле является корректно поставленной.

В данной работе методом спектрального анализа доказана единственность и существование решения задачи Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в параллелепипеде.

Пусть $\Omega=\{(x,y,z):0<x<1,\,-a<y<b,\,0<z<1\}$, где $a,b\in R$, причем $a>0,b>0$.

В области Ω рассмотрим уравнение

$$u_{xx}+(\mathrm{sgn}y)\,u_{yy}+u_{zz}+\frac{2\alpha}{x}u_x+\frac{2\beta}{|y|}u_y+\frac{2\gamma}{z}u_z=0, \tag{1}$$

где $u=u\,(x,y,z)-$ неизвестная функция, $-\infty<\alpha,\gamma<(1/2)\,,\ -(1/2)<\beta<(1/2)\,.$

Задача D. Найти функцию $u\,(x,y,z)\in C\left(\bar{\Omega}\right)\cap C^2\left(\Omega^+\cup\Omega^-\right)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области $\Omega^+\cup\Omega^-$ и краевым условиям

$$u\,(0,y,z)=u\,(1,y,z)=0,\quad -a\le y\le b,\ \ 0\le z\le 1;$$

$$u\,(x,y,0)=u\,(x,y,1)=0,\ -a\le y\le b,\ \ 0\le x\le 1;$$

$$u\,(x,b,z)=f_1\,(x,z)\,,\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le z\le 1;$$

$$u\,(x,-a,z)=f_2\,(x,z)\,,\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le z\le 1,$$

а также условию склеивания вида

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{2\beta}u_y\,(x,y,z)=\lim_{y\to+0}y^{2\beta}u_y\,(x,y,z)\,,\ \ 0<x<1,0<z<1,$$

где $f_j\,(x,z)\,,\ j=\overline{1,2}-$ заданные непрерывные функции, $\Omega^+=\Omega\cap\{y>0\}\,,\ \Omega^-=\Omega\cap\{y<0\}\,.$

Доказана следующая теорема

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия*

$$f_j\,(1,z)=f_j\,(x,1)=0,\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left[x^{2\alpha-1}z^{2\gamma-1}f_j\,(x,z)\right]\in C\left([0,1]\times[0,1]\right),$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left[x^{2\alpha-1}z^{2\gamma-1}f_j\,(x,z)\right]=\lim_{z\to1}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left[x^{2\alpha-1}z^{2\gamma-1}f_j\,(x,z)\right]=0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left\{x^{-1}z^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left[x^{2\alpha-1}z^{2\gamma-1}f_j\,(x,z)\right]\right\}\in C\left([0,1]\times[0,1]\right),$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left\{x^{-1}z^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left[x^{2\alpha-1}z^{2\gamma-1}f_j\,(x,z)\right]\right\}=$$

$$=\lim_{z\to1}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left\{x^{-1}z^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left[x^{2\alpha-1}z^{2\gamma-1}f_j\,(x,z)\right]\right\}=0,\ \ j=\overline{1,2}.$$

$$\Delta_{nm}\,(a,b)=I_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b\right)\bar{Y}_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}a\right)+$$

$$+K_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b\right)J_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}a\right)\ne0,\ \forall n,m\in N,$$

где

$$\bar{Y}_{(1/2)-\beta}\left[\sqrt{\lambda_{nm}}\,(-y)\right]=\frac{\pi}{2\cos\left(\beta\pi\right)}\left\{J_{(1/2)-\beta}\left[\sqrt{\lambda_{nm}}\,(-y)\right]+J_{\beta-(1/2)}\left[\sqrt{\lambda_{nm}}\,(-y)\right]\right\},$$

$J_l\,(x)-$ функция Бесселя порядка l первого рода [3, с.51], а $I_l\,(x)$ и $K_l\,(x)-$ модифицированные функции Бесселя порядка l первого и третьего рода [3, с.91-92] соответственно. $\lambda_{nm}=\sigma_n^2+\delta_m^2$, а σ_n и δ_m положительные корни уравнений $J_{(1/2)-\alpha}\,(x)=0$ и $J_{(1/2)-\gamma}\,(x)=0$ соответственно.

Тогда решение задачи Дирихле существует, единственно и определяется формулой

$$u\,(x,y,z)=\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}x^{(1/2)-\alpha}y^{(1/2)-\beta}z^{(1/2)-\gamma}J_{(1/2)-\alpha}\,(\sigma_nx)\,J_{(1/2)-\gamma}\,(\delta_mz)\times\\ \times\left[a_{nm}I_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)+b_{nm}K_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)\right],\ \ y>0;\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}x^{(1/2)-\alpha}\,(-y)^{(1/2)-\beta}\,z^{(1/2)-\gamma}J_{(1/2)-\alpha}\,(\sigma_nx)\,J_{(1/2)-\gamma}\,(\delta_mz)\times\\ \times\left[-a_{nm}J_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\,(-y)\right)+b_{nm}\bar{Y}_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\,(-y)\right)\right],\ y<0,\end{cases}$$

где

$$a_{nm} = \frac{F_{1nm} b^{\beta-(1/2)} \bar{Y}_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} a\right) - F_{2nm} a^{\beta-(1/2)} K_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} b\right)}{\Delta_{nm}(a,b)},$$

$$b_{nm} = \frac{F_{1nm} b^{\beta-(1/2)} J_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} a\right) + F_{2nm} a^{\beta-(1/2)} I_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} b\right)}{\Delta_{nm}(a,b)},$$

$$F_{jnm} = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f_j(x,y)\, x^{(1/2)+\alpha} J_{(1/2)-\alpha}(\sigma_n x)\, z^{(1/2)+\gamma} J_{(1/2)-\gamma}(\delta_m z)\, dxdz,\ j=\overline{1,2}.$$

Литература

1. *Франкль Ф.И.* Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 711 с.
2. *Бицадзе А.В.* Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа // ДАН СССР. 1953. Т. 122. № 2. С. 167-170.
3. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. М.: Т.1.Изд. ИЛ., 1949. 798 с.

Краевая задача для нагруженного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка с тремя линиями изменения типа

Холбеков Ж.А.

Ташкентский государсвенный технический университет им. И.Каримова

e-mail: xolbekovja@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y}(Lu) = 0 \tag{1}$$

где

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & (x,y) \in \Omega_0, \\ u_{xx} - u_{yy}, & (x,y) \in \Omega_1, \\ u_{xx} - u_{yy} - \mu_1 u(0,y), & (x,y) \in \Omega_2, \\ u_{xx} - u_{yy} - \mu_2 u(1,y), & (x,y) \in \Omega_3 \end{cases}$$

в области $\Omega = \sum\limits_{j=0}^{3} \Omega_j \cup AB \cup BC \cup DA$, где Ω_0 – область, ограниченная отрезками AB, BC, CD, DA прямых $y=0$, $x=1$, $y=1$, $x=0$ соответственно; Ω_1 – область, ограниченная отрезком AB прямой $y=0$ и двумя характеристиками AN и BN уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$, пересекающимися в точке $N(0,5;\ -0,5)$; Ω_2 – область, ограниченная отрезком AD прямой $x=0$ и двумя характеристиками AK и DK уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $D(0,1)$, пересекающимися в точке $K(-0,5;\ 0,5)$; Ω_3 – область, ограниченная отрезком BC прямой $x=1$ и двумя характеристиками CM и BM уравнения (1), выходящими из точек $B(1,0)$ и $C(1,1)$, пересекающимися в точке $M(1,5;\ 0,5)$. В уравнении (1) μ_j $(j=1,2)$ – заданные действительные числа, причем

$$\mu_j \geqslant 0,\ \ (j=1,2). \tag{2}$$

Определение. Если функция $u_{yy} \in C(\Omega_0)$, $u_{yyy} \in C(\Omega_j)$, $u_{xxy} \in C(\Omega_0 \cap \Omega_j)$, $u \in C^2(\Omega_2 \cup \Omega_3)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_0 и $\Omega_j (j=\overline{1,3})$, то функция $u(x,y)$ называется регулярным решением уравнения (1).

Задача B_2. Найти регулярное в областях Ω_0 и $\Omega_j\,(j=\overline{1,3})$ решение $u(x,y)$ уравнения (1), непрерывное в замкнутой области $\bar{\Omega}$, удовлетворяющее условиям склеивания на линиях изменения типа

$$u_y(x,+0) = u_y(x,-0),\, u_{yy}(x,+0) = u_{yy}(x,-0),\, 0<x<1,$$

$$u_x(+0,y) = u_x(-0,y),\, u_x(1+0,y) = u_x(1-0,y),\, 0<y<1$$

и граничным условиям

$$u(x,y)|_{NB} = \varphi_1(x),\ ,\ \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{NB} = \varphi_2(x),\ x \in \left[\frac{1}{2};1\right],\ \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{AN} = \varphi_3(x),\ x \in \left[0,\frac{1}{2}\right],$$

$$u(x,y)|_{AK} = \varphi_4(y),\quad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{AK} = \varphi_5(y),\quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2},$$

$$u(x,y)|_{CM} = \varphi_6(y),\qquad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{CM} = \varphi_7(y),\quad \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1,$$

где $n-$ внутренняя нормаль, а $\varphi_j(x)$ $(j=\overline{1,7}\,)$ $-$ заданные функции, причем

$$\varphi_2'\left(\frac{1}{2}\right) = -\varphi_3'\left(\frac{1}{2}\right),\ \varphi_5(0) = \varphi_7(0),\ \varphi_1(x) \in C^1\left[\frac{1}{2},0\right] \cap C^3\left(\frac{1}{2},\ 0\right), \tag{3}$$

$$\varphi_i\,(t) \in C^1\left[\frac{1}{2};1\right] \cap C^2\left(\frac{1}{2};1\right),\ \varphi_i\,(t) \in C^1\left[0;\frac{1}{2}\right] \cap C^2\left(0;\frac{1}{2}\right), \tag{4}$$

$$\varphi_4(y) \in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0,\frac{1}{2}\right),\quad \varphi_6(y) \in C^1\left[\frac{1}{2},1\right] \cap C^3\left(\frac{1}{2},1\right) \tag{5}$$

здесь $t = x$ при $i = 2,\ 3,\ t = y$ при $i = 5,\ 7$

Заметим, что задача B_2 для уравнения (1) в области $\Omega^* = \Omega_0 \cup \Omega_1$ изучены в работах [1]- [2].

Доказана следующая теорема.

Теорема. Если выполнены условия (2) - (5), то в области Ω существует единственное регулярное решение задачи B_2

Литература

1. *Елеев В.А.* О некоторых краевых задачах для смешанных нагруженных урав-нений второго и третьего порядка. // Дифференциальные уравнения. 1994. -Т. 30.- №2. -С. 230-237.

2. *Исломов Б., Курьязов Д.М.* Краевые задачи для смешанного нагруженного уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа. // Узбекский математический журнал. 2000. - №2. -С. 29-35.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

Хайруллин Р.С.

Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Россия, Казань)

xravil@kgasu.ru

Уравнение

$$u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y = 0 \tag{1}$$

при различных значениях параметра был объектом исследования многих математиков. Особенностью этого уравнения является его сильное вырождение при $\alpha < 0$. Наличие сильного вырождения накладывает на постановки задач и методы их решения некоторые особенности по сравнению с задачами для уравнений со слабым вырождением.

Для уравнения (1) в первую очередь начали рассматривать задачи, в которых на особой линии задается только условие непрерывности искомой функции, и это, как правило, позволяло в отличие от задачи Трикоми последовательно строить искомую функцию сначала в одной из подобластей, а затем в другой.

К этой серии можно отнести работу И.Л.Кароля [1], который предложил при $\alpha < 0$, задавать значения искомого решения на всей границе области, а именно, на эллиптической дуге и на обеих характеристиках.

Задачу Трикоми для уравнения (1) при $\alpha = -n + \alpha_0$, $\alpha_0 \in (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$, впервые рассмотрел С.С.Исамухамедов [2]. Эллиптический контур предполагался нормальным. На линии вырождения, кроме условия непрерывности решения, задавалось также условие склеивания

$$\nu_1(x) = (-1)^n \nu_2(x),$$

где

$$\nu_1(x) = \lim_{y\to 0+} y^\alpha \big[u_y + B^+_\alpha(u)\big], \quad \nu_2(x) = \lim_{y\to 0-} (-y)^\alpha [u - B^-_\alpha(x, y, \tau)]_y,$$

Задача исследовалась методом интегральных уравнений, и решение искалось в некотором обобщенном классе, в котором предполагалось, что функция $\tau(x) = u(x, 0)$ имеет представление

$$\tau(x) = \int_0^x T(\sigma)(x-\sigma)^{1-2\alpha} d\sigma,$$

а функции $\nu_i(x)$, $T(x)$ – непрерывны и интегрируемы.

В работе [3] С.С.Исамухамедов рассмотрел задачу Геллерстедта для уравнения (1) при $\alpha_0 \in (1/2, 1)$.

Задача Геллерстедта для уравнения (1) при $\alpha_0 \in (0, 1)$ также исследована и Хе Кан Чером [4], В отличие от предыдущего автора он задавал краевые условия на "наружных" характеристиках, а эллиптическую дугу считал произвольной гладкой кривой, удовлетворяющим некоторым условиям, и на ней задавал производную определенного порядка от искомой функции. Задача решалась методом "спуска" к малому параметру.

Уравнению (1) при $\alpha = -n + 1/2$ посвящена работа Ю.М.Крикунова [5]. Им было обнаружено, что задача Трикоми с заданием на эллиптической дуге Γ значений самого искомого решения для уравнения (1), вообще говоря, некорректна, так как для существования ее решения приходится накладывать $2n$ условий интегрального характера на заданные функции. Поэтому было предложено для получения корректных задач на Γ задавать значения не самого решения, а его производной $\sqrt{y}\partial^{n+1}u/\partial y^{n+1}$ или $\partial^n u/\partial y^n$.

В работе Н.М.Салтыковой и М.М.Смирнова [6] для уравнения (1) при $\alpha = -n + 1/2$ исследована задача с условиями типа условия Бицадзе-Самарского. При этом, как и у Ю.М.Крикунова, получено $2n$ условий разрешимости.

Анализируя факт некорректности задач с классическими краевыми условиями, можно предположить, что такой результат явился следствием попыток авторов при исследовании задач для уравнения с сильным вырождением использовать некоторые методы и приемы, разработанные для уравнений со слабым вырождением. Это побуждало авторов накладывать ограничения нехарактерные для уравнений с сильным вырождением, например, интегрируемость вспомогательных функций, что и приводило к условиям разрешимости.

Отличительной особенностью наших работ [7-14] является доказательство безусловной разрешимости задач с классическими краевыми условиями. Это достигается за счет расширения класса искомых функций, а именно за счет ослабления условий на вспомогательные функции $\tau(x)$ и $\nu_i(x)$. Это позволяет снять условия разрешимости, но делает в основном невозможным использование методов предыдущих авторов. Возникает необходимость разработки новых методов вывода основных соотношений, интегральных уравнений и их исследования.

Литература

1. Кароль И. Л. К теории уравнений смешанного типа // ДАН СССР. 1953. Т. 88, є 3. С. 397-400.
2. Исамухамедов С. С. Краевая задача Трикоми для уравнения LT смешанного типа второго рода // Известия АН УзССР. Сер. физ.- мат.наук. 1970. є 4. С. 9-12.
3. Исамухамедов С. С. Краевые задачи Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа второго рода // Дифференциальные уравнения с частными производными и их приложения. Ташкент, 1977. С. 33-40.
4. Хе Кан Чер. О задаче Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1976. Вып. 26. С. 134-141.

5. Крикунов Ю. М. Краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа. Казань: изд-во Казан. гос. ун-та, 1986. 150 с.

6. Салтыкова Н.М., Смирнов М.М. Об одной краевой задаче типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа второго рода в неограниченной области // Вестник ЛГУ. 1985. є 1. С. 43-49.

7. Хайруллин Р.С. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода в случае нормальной области // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, є 8. С. 1396-1407.

8. Хайруллин Р.С. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода в случае неограниченной области // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, є 11. С. 2010-2017.

9. Хайруллин Р.С. К задаче Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода // Сибирский математический журнал. 1994. Т. 35, є 4. С. 927-936.

10. Хайруллин Р.С. Аналог задачи Франкля для уравнения второго рода // Известия вузов. Математика. 2002. є 4. С. 59-63.

11. Хайруллин Р.С. Об одной задаче для уравнения смешанного типа второго рода // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, є 10. С. 1405-1411.

12. Хайруллин Р.С. О задаче типа Геллерстедта для уравнения второго рода // Известия вузов. Математика. 2005. є 10. С. 72-77.

13. Хайруллин Р.С. К задаче Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода с сильным вырождением // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, є 4. С. 528-534.

14. Хайруллин Р.С. О существовании решения задаче Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода// Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, є 5. С. 684-692.

Об одной краевой задаче для параболо-гиперболического уравнения третьего порядка с параболическим вырождением

Хасанов Ф. Х.

Ташкентский Университет Информационный технологии, г.Ташкент, Узбекистан

e-mail: femhad@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(Lu\right)=0, \tag{1}$$

где

$$L\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1-signx}{2}\left|x\right|^n\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{1+signx}{2}\left|x\right|^n\frac{\partial}{\partial y},\quad n>0. \tag{2}$$

Пусть D - область, ограниченная при $x>0$ отрезками AB, BB_0, B_0A_0 прямых $y=0$, $x=h_1$, $y=1$ соответственно, а при $x<0$ двумя характеристиками

$$AC:\quad y\;-\;\frac{1}{q}(-x)^q=0,\quad A_0C:\quad y+\frac{1}{q}(-x)^q=1$$

уравнения $Lu=0$, выходящими из точек $A\,(0\,;0)$ и $A_0\,(0\,;1)$, пересекающимися в точке $C\left(-\left(\frac{q}{2}\right)^{1/q};\;\frac{1}{2}\right)$, здесь $2q=n+2$.

Из произвольной точки $E(0,y_0)$ $(0<y_0<1)$ проведем характеристики

$$EC_1:\quad y\;+\;\frac{1}{q}(-x)^q=y_0,\quad EC_2:\quad y-\frac{1}{q}(-x)^q=y_0$$

уравнения $Lu=0$.

Введем обозначения $D_0 = D \cap \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$, D_1 $(D_2)-$ криволинейный треугольник $AEC_1\,(A_0EC_2)$, D_3- четырехугольник EC_1CC_2,

$$I_1 = \{(x,y): \ x = 0, \ 0 < y < y_0\}, \ I_2 = \{(x,y): \ x = 0, \ y_0 < y < 1\}.$$

Определение. Решение уравнения (1) при $x \neq 0$ будем называть регулярным, если функция $u(x,y)$ обладает непрерывными производными, входящими в уравнение (1).

В области D для уравнения (1) исследуется следующая задача.

Задача $A\Gamma_2$. Требуется найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{D})$;

2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в областях D_j $(j = \overline{0,3})$;

3) u_x (u_y) - непрерывны вплоть до $\overline{A_1} \cup \overline{EC_2} \cup I_1 \cup I_2$ $\left(\overline{A_1} \cup \overline{EC_2} \cup AB\right)$, причем $u_x\,(0,y)$ может обращаться бесконечность порядка меньше $\frac{1}{n+2}$ на концах интервала I_j $(j = 1,2)$;

4) на интервале $I_1 \cup I_2$ выполняется условия склеивания

$$\lim_{x \to -0} u_x(x,y) = \lim_{x \to +0} u_x(x,y), \quad (0,y) \in I_1 \cup I_2;$$

5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{AB} = \varphi_1(x), \quad u|_{A_0B_0} = \varphi_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant h_1,$$

$$u|_{BB_0} = \varphi_3(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

$$u|_{AC_1} = \psi_1(y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC_1} = \psi_2(y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant \frac{y_0}{2},$$

$$u|_{EC_2} = g_1(y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{EC_2} = g_2(y), \qquad y_0 \leqslant y \leqslant \frac{y_0+1}{2},$$

где n - внутренняя нормаль, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(y)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ – заданные функции, причем $\varphi_1\,(h_1) = \varphi_3\,(0)$, $\varphi_1\,(0) = \psi_1\,(0)$,

$$\varphi_j(x) \in C^1[0,h_1] \cap C^3\,(0,h_1), \ (j = 1,2), \tag{3}$$

$$\varphi_3(y) \in C\,[0,1] \cap C^1(0,1), \quad \psi_1(y) \in C^3\left[0, \frac{y_0}{2}\right], \quad \psi_2(y) \in C^2\left[0, \frac{y_0}{2}\right], \tag{4}$$

$$g_1(y) \in C^3\left[y_0, \ \frac{y_0+1}{2}\right], \quad g_2(y) \in C^2\left[y_0, \ \frac{y_0+1}{2}\right]. \tag{5}$$

Заметим, что краевые задачи для уравнения (1) при $n = 0$ изучены в работах [1], [2].

Доказана следующая теорема.

Теорема. Если выполнены условия (3), (4), (5), то задача $A\Gamma_2$ в области D однозначно разрешима.

Литература

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно - составного типа. Ташкент.: ФАН. 1979. 240 с.

2. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо - гиперболического типа. Ташкент.: ФАН. 1986. 220с.

ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ СМЕЩЕНИЯ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА.

Чориева С.Т., Саломов Г. Мирсабурова У.

Термезский государственный университет, Узбекистан.
e-mail: mirsaburov@mail.ru

Пусть $\Omega-$ конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m + 2)^{-2}y^{m+2} = 1$, с концами в точках $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, а при $y < 0$ - характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

где $m = const > 0$. Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1, точки пересечения характеристик AC и BC с характеристиками выходящих из точки $E(c, 0)$, где $c \in I = (-1, 1)-$ интервал оси $y = 0$.

Пусть $p(x) = \delta - kx-$ линейный диффеоморфизм из множества точек отрезка $[-1, c]$ во множество точек отрезка $[c, 1]$ со свойствами $p(-1) = 1, p(c) = c$, где $\delta = 2c/(1 + c), k = (1 - c)/(1 + c)$.

В работе В.И.Жегалова [1] и А.М.Нахушева [2] условие смещения задавалась на граничных характеристиках AC и BC.

Настоящая работа посвящена исследованию корректности задачи с условием смещения на параллельных характеристиках AC_0 и EC_1, аналогом условия Франкля [3] на отрезке AB линии вырождения $y = 0$.

Задача A. Требуется найти в области Ω функцию $u(x, y) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) функция $u(x, y)$ принадлежит $C^2(\Omega^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области Ω^+;

2) функция $u(x, y)$ является обобщенным решением класса $R_1[7, c.35]$ уравнения (1) в области $\Omega^- \setminus (EC_0 \cup EC_1)$;

3) на интервале вырождения AB имеет место следующее условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to+0} y\frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in I \tag{2}$$

эти пределы при $x = \pm1$, могут иметь особенности порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\beta = m/(2(m + 2))$;

4) выполнены условия

$$u(x, y)|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad -1 \le x \le 1. \tag{3}$$

$$a(1 + x)^\beta D^{1-\beta}_{-1,x} u[\theta_0(x)] + b(c - x)^\beta D^{1-\beta}_{x,c} u[\theta^*(p(x))] = \psi(x), \quad x \in (-1, c], \tag{4}$$

$$u(p(x), 0) - u(x, 0) = f(x), \quad x \in [-1, c], \tag{5}$$

где $D^{1-\beta}_{-1,x}-$ оператор дробного дифференцирования [2], $\theta_0(x_0)$ и $(\theta^*(p(x_0)))-$ аффикс точки пересечения характеристики $AC_0(EC_1)$ с характеристикой, исходящей из точки $(x_0, 0), x_0 \in [-1, c], ((p(x_0), 0), p(x_0) \in [c, 1])$

$$\theta_0(x_0) = \frac{x_0 - 1}{2} - i\left[\frac{(m + 2)(1 + x_0)}{4}\right]^{2/(m+2)}$$

$$\theta^*(p(x_0)) = \frac{c + p(x_0)}{2} - i\left[\frac{(m + 2)(p(x_0) - c)}{4}\right]^{2/(m+2)}$$

Заданные функции: $\varphi(x), \psi(x), f(x)$ достаточно гладкие функции, причем $f(-1) = f(c) = 0$.

Заметим, что:

-Условие (4) является условием смещения [1,2] заданное на параллельных характеристиках AC_0 и EC_1;

-Условие (5) является аналогом условия Франкля [3] на отрезке вырождения AB, которое заменяет недостающее граничное условие на характеристике C_0C.

Литература

1. *Жегалов В.И.* Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии. //Учен. зап. Казанского университета 122(3).1962, т.122(3),с.3-14.

2. *Нахушев А.М.* О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. Дифференц.уравнение. 1969.Т.5,є1,с.44-59.

3. *Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.* Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент "Universitet "Yangiyo'l poligraf servis"2005.

2. НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

NON-CLASSICAL PROBLEMS OF THE THEORY PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

EXACT SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE NONLINEAR KDV EQUATION ON METRIC STAR GRAPHS

M.I.Akhmedov, Z.A.Sobirov
Tashkent financial Institute
e-mail: maqsad.ahmedov@mail.ru, sobirovzar@gmail.com

The equation has attracted attention of both pysical scientists and mathematicians, since it was found to admit soliton solutions and be able to model the propagation of solitary wave on the water surface, a phenomena first discovered by Scott Russell in 1834. The equation is also used, e.g.,to model the unidirectional propagation of small amplitude long waves in nonlinear dispersive systems such as the ion-acoustic waves in a collisionless plasma, and the magnetosonic waves in a magnetized plasma etc [11].

Hare we investigate the nonlinearized equation on star graphs Γ with three semi-infinite bonds connected in one point, called vertex. The bonds are denoted by B_j, $j = 1, 2, 3$, the coordinate x_1 on B_1 is defined from $-\infty$ to 0, and coordinates x_2 and x_3 on the bonds B_2 and B_3 are defined from 0 to $+\infty$. On each bond we consider the linear equation:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^3}{\partial_j^3}\right) u_j(x_j, t) - 6uu_x = 0, \quad t > 0, x_j \in B_j, j = 1, 2, 3. \tag{1}$$

1. Formulation of the problems For the above star graph, we need to impose 5 BCs at the vertex point, which should also connection between the bonds and 2 BCs at the right side of B_2 and B_3. In detail, we require:

$$u_1(0,t) = u_2(0,t) = u_3(0,t), \quad u_{1x}(0,t) = b_2 u_{2x}(0,t) = b_3 u_{3x}(0,t), \tag{2}$$

$$u_{1xx}(0,t) = a_2^{-1} u_{2xx}(0,t) + a_3^{-1} u_{3xx}(0,t) \tag{3}$$

for $t > 0$, where $a_k, b_k, k = 2, 3$, are nonzero constants. Moreover, we assume that the $f_k(x,t)$ and the initial conditions

$$u_j(x, 0) = 0, x \in \overline{B_j}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{4}$$

are sufficiently smooth enough and bounded, and that $u_{0,k}$ satisfies the vertex conditions $(2) - (3)$. It should be noted that the above vertex conditions are not the only possible ones. The main motivation for our choice is caused by the fact that they guarantee uniqueness of the solution and, if the solutions decay (to zero) at infinity, the norm (energy) conservation.

Consider triples $v = (v_1(x_1), v_2(x_2), v_3(x_3))$ defined on the graph. We suppose that $v_k \in S(B_k)$ and the functions $v_k^{(p)} \equiv \frac{\partial^{3p}}{\partial x^{3p}} v_k(x)$ satisfy vertex conditions $(2) - (3)$. We denote the set of all such triples by $S^-(\Gamma)(S^+(\Gamma))$, and define $W^-(\Gamma)$ (or $W^+(\Gamma)$) as the closure of the set $S^-(\Gamma)(orS^+(\Gamma))$ with respect to the norm $||v||_{3,\Gamma} = \sum_{k=1}^3 ||v_k||_{H^3(B_k)}$

2. Existence and uniqueness of solutions

Lemma 1. Let $\frac{1}{b_2^2} + \frac{1}{b_3^2} \leq 1$. Then the problem (1)-(4) has at most one solution.

Theorem 1. Assume that $\frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + \frac{1}{a_2 b_2} + \frac{1}{a_3 b_3} \neq -1$, $u_{0k}(x) \in S(B_k), f_k(x,t) \in C^1([0,T]; S(B_k))$ for some $T > 0$ and that $u_{0k}^{(p)} \equiv \frac{\partial^{3p}}{\partial x^{3p}} u_{0k}(x)$ and $f_k^{(p)} = \frac{\partial^{3p}}{\partial x^{3p}} f_k(x,t)$ satisfy $(1) - (4)$ for any non negative integer p. Then $(1) - (4)$ has a solution in $C^1([0,T]; S(B_k))$.

Theorem 2. Let $\sigma = \pm 1$ $u \equiv (u_{01}(x_1), u_{02}(x_2), u_{03}(x_3)) \in W^{\pm(\Gamma)}, f \equiv (f_1(x_1,t), f_2(x_2,t), f_3(x_3,t)) \in L_{\infty(0,T,W^{\pm}(\Gamma))}$, and assume that the conditions of the uniqueness Lemmas are fulfilled. Then $(1) - (4)$.

References

1. *A.V.Faminskii, N.A.Larkin* Initial-boundary value problems for quasi linear dispersive equations posed on a bounded interval. Electron. J. Differ. Equ., 2010. 2010(20).

2. *Z.A.Sobirov, H.Uecker, M.Akhmedov* Exact solutions of the Cauchy problem for the linearized KdV equation on metric star graphs. Uz. Math. J. 2015. 3.

3. *Z.A.Sobirov, M.I.Akhmedov, H.Uecker* Cauchy problem for the linearized KdV equation on general metric star graphs. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 2015, 6(1). Pp. 198-204.

4. *Z.A.Sobirov, M.I.Akhmedov, O.V.Karpova, B.Jabbarova* Linearized KdV equation on a metric graph. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 2015, 6(6). Pp. 757-761.

Maximum principle for the sub-diffusion equation with the Caputo-Fabrizio derivative

Borikhanov M.B.[1], Torebek B.T.[2]

[1]Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan, Almaty
[1]meeir0808@gmail.com
[2]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan, Almaty
[2]torebek@math.kz

In this report we study a initial-boundary problem for the sub-diffusion

$$ {}^{CF}D_{0,t}^{\alpha}u = \Delta_x u + F(x,t),\ (x,t) \in \Omega \times (0,T) \tag{1} $$

equation with the ${}^{CF}D_{0,t}^{\alpha}$ Caputo-Fabrizio type derivative of order $0 < \alpha < 1$. Here $\Omega \in \mathbb{R}^n$ be an open bounded domain.

We estimate the fractional derivative of a function at its extreme points. These results are analogous to the ones obtained in [1] for the Caputo fractional derivative. Then we use these results to establish new maximum principles for linear fractional equations with Caputo-Fabrizio fractional derivative of non-singular kernel.

The main result of our report is

Theorem 1. Let a function $f \in H^1(0,T)$ attain its maximum at a point $t_0 \in [0,T]$. Then the Caputo-Fabrizio type fractional derivative of the function f is non-negative at the point t_0 for any $\alpha, 0 < \alpha < 1$:

$$ \left({}^{CF}D_0^{\alpha}f\right)(t_0) \geq \frac{1}{1-\alpha}E_\alpha\left(-\alpha\frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha}\right)(f(t_0) - f(0)) \geq 0, $$

where $E_\alpha(z)$ is a Mittag-Leffler function [2].

The maximum principle in Theorem 1 is then applied to show that the initial-boundary-value problem for the sub-diffusion equation possesses (1) at most one classical solution and this solution continuously depends on the initial and boundary conditions.

References

1. *Luchko Y.* Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation //Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2009. V. 351. P. 218-223.
2. *Kilbas A.A, Srivastava H.M, Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, North-Holland, Mathematics studies. 2006.

THE CONFLUENT HYPERGEOMETRIC FUNCTION OF THREE VARIABLES AND ITS APPLICATIONS IN BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Ergashev T.G. Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers. Tashkent, Uzbekistan.
ertuhtasin@mail.ru

In investigation of boundary-value problems for certain partial differential equations arising in applied mathematics, we often need to study the solution of system of partial differential equations satisfied by hypergeometric functions and find explicit linearly independent solutions for the system. In this present investigation, we give the solutions of system of partial differential equations for Kampe de Feriet type function of three variables.

A great interest in the theory of hypergeometric functions (that is, hypergeometric functions of one, two and several variables) is motivated essentially by the fact that solutions of many applied problems involving thermal conductivity and dynamics, electromagnetic oscillation and aerodynamics, and quantum mechanics and potential theory are obtainable with the help of hypergeometric (higher and special or transcendent) functions. Such kinds of functions are often referred to as special functions of mathematical physics. For the purpose of the present work, we recall the following definition of the most general hypergeometric function of three variables that is the Kampe de Feriet hypergeometric series of three variables (see [1]):

$$ F^{(3)}[x,y,z] \equiv F^{(3)}\left[\begin{matrix} (a) :: & (b); & (b'); & (b''): & (c); & (c'); & (c''); \\ (e) :: & (g); & (g'); & (g''): & (h); & (h'); & (h''); \end{matrix}\ x,y,z\right] = $$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{j=1}^{A}(a_j)_{m+n+p}\prod\limits_{j=1}^{B}(b_j)_{m+n}\prod\limits_{j=1}^{B'}(b'_j)_{n+p}\prod\limits_{j=1}^{B''}(b''_j)_{p+m}\prod\limits_{j=1}^{C}(c_j)_m\prod\limits_{j=1}^{C'}(c'_j)_n\prod\limits_{j=1}^{C''}(c''_j)_p}{\prod\limits_{j=1}^{E}(e_j)_{m+n+p}\prod\limits_{j=1}^{G}(g_j)_{m+n}\prod\limits_{j=1}^{G'}(g'_j)_{n+p}\prod\limits_{j=1}^{G''}(g''_j)_{p+m}\prod\limits_{j=1}^{H}(h_j)_m\prod\limits_{j=1}^{H'}(h'_j)_n\prod\limits_{j=1}^{H''}(h''_j)_p} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!},$$

where $\prod\limits_{j=1}^{p}(a_j)_{r+s} = (a_1)_{r+s}\cdot(a_2)_{r+s}\cdot\ldots\cdot(a_p)_{r+s}$, with similar interpretations for $\prod\limits_{j=1}^{l}(a_j)_{r+s}$, et cetera. These hypergeometric functions appear in the solution of the partial differential equations which are dealt with harmonic analysis method. It is noted that Riemann functions and the fundamental solutions of the degenerate second-order partial differential equations are expressible by means of hypergeometric functions of several variables. Therefore, in investigation of boundary-value problems for these partial differential equations, we need to study the solution of the system of hypergeometric functions and find explicit linearly independent solutions. The function $F^{(3)}[x,y,z]$ contains a large number of Kampé de Fériet type functions.

Here, we choose the function defined by the following triple series:

$$F^{(3)}\left[\begin{matrix} - :: & -; & -; & b'': & c_1,c_2; & c'_1,c'_2; & c''; \\ e :: & -; & -; & g'': & - \;; & - \;; & h''; \end{matrix}\; x,y,z\right] =$$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(b'')_{p+m}(c_1)_m(c_2)_m(c'_1)_n(c'_2)_n(c'')_p}{(e)_{m+n+p}(g'')_{p+m}(h'')_p}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}, \tag{1}$$

where $(a)_n$ denotes the well known Pochhammer symbol, to find the linearly independent solutions of partial differential equations satisfied by these functions. It is easy to verify that the function (1) is function of the fourth order. It is not difficult to see that the function (1) is natural generalization of the well-known confluent hypergeometric function [2]

$${}_3\Phi_B^{(5)}[c_1,c_2,c'_1,c'_2,e;x,y,z] = \sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(c_1)_m(c_2)_m(c'_1)_n(c'_2)_n}{(e)_{m+n+p}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}.$$

Interest in the function (1) arose also because, for example, when deriving an explicit form of the solution of the Cauchy problem for equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)\frac{\partial u}{\partial\xi} + \left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)\frac{\partial u}{\partial\eta} + \lambda u = 0$$

this function was used [3], where α,β and λ are constants and $-1<2\alpha\le 2\beta\le 0$.

According to the theory of multiple hypergeometric functions, by making use of some elementary calculations, we define the system of second, third and fourth orders partial differential equations:

$$xu_{xy} + y(1-y)u_{yy} + zu_{yz} + \left[e-(c'_1+c'_2+1)y\right]u_y - c'_1c'_2u = 0, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &x^2(1-x)u_{xxx} + xyu_{xxy} + xz(2-x)u_{xxz} + yzu_{xyz} + z^2u_{xzz} \\ &+\left[e+g''+1-(b''+c_1+c_2+3)x\right]xu_{xx} + g''yu_{xy} + \left[e+g''+1-(c_1+c_2+1)x\right]zu_{xz} \\ &+\left\{eg''-\left[b''(c_1+c_2+1)+(c_1+1)(c_2+1)\right]x\right\}u_x - c_1c_2zu_z - b''c_1c_2u = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &x^2zu_{xxzz} + xyzu_{xyzz} + 2xz^2u_{xzzz} + yz^2u_{yzzz} + z^3u_{zzzz} + h''x^2u_{xxz} + h''xyu_{xyz} \\ &+(g''+h''+1)yzu_{yzz} + (e+g''+2h''+3)xzu_{xzz} + (e+g''+h''+3)z^2u_{zzz} \\ &+\left[h''(e+g''+1)-z\right]xu_{xz} + g''h''yu_{yz} + \left[(e+1)(g''+1)+h''(e+g''+1)-z\right]zu_{zz} \\ &+\left[eg''h''-(b''+c''+1)z\right]u_z - c''xu_x - b''c''u = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Now, in order to find the linearly independent solutions of system (2)-(4), we will search the solutions in the form

$$u = x^\tau y^\nu z^\mu\omega, \tag{5}$$

where ω is an unknown function, and τ, ν and μ are constants, which are to be determined. Next, substituting function (5) into system (2)-(4), by making use of some elementary calculations, we find two linearly independent solutions of system (2)-(4):

$$u_1 = F^{(3)} \begin{bmatrix} - :: & -; & -; & b'' : & c_1, c_2; & c_1', c_2'; & c''; & \\ e :: & -; & -; & g'' : & - ; & - ; & h''; & x, y, z \end{bmatrix},$$

$$u_2 = z^{1-h''} F^{(3)} \begin{bmatrix} - & :: & -; & -; & b'' - h'' + 1 : & c_1, c_2; & c_1', c_2'; & c'' - h'' + 1; & \\ e - h'' + 1 & :: & -; & -; & g'' - h'' + 1 : & - ; & - ; & 2 - h'' ; & x, y, z \end{bmatrix}.$$

References

1. *Srivastava H.M., Karlsson P.W.* Gaussian Hypergeometric Series, Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chicherster), John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane and Toronto, 1985.

2. *Jain R.N.* The confluent hypergeometric functions of three variables // Proc.Nat.Acad.Sci., India. 1966. Vol.36, No 2. P.395-408.

3. *Ergashev T.G.* The solution of the Cauchy problem for the degenerating hyperbolic equation of second kind (in Russian) // Uzbek Mathematical Journal. 2009. No 4. P.180-190

THE CAUCHY PROBLEM FOR MATRIX FACTORIZATIONS OF THE HELMHOLTZ EQUATION IN A BOUNDED DOMAIN

Juraev D.A.

Karshi state university, Uzbekistan, Karshi
juraev_davron@list.ru

In the paper it is considered the regularization of the Cauchy problem for systems of elliptic type equations of the first order with constant coefficients factorisable Helmholtz operator in three-dimensional bounded domain. Using the results of [2-5], is constructed explicitly Carleman matrix and, based on the regularized solution of the Cauchy problem.

It is known that the Cauchy problem for elliptic equations is incorrect: the solution of the problem is unique, but unstable.

In this paper we construct a family of vector-functions $U_{\sigma\delta}(x) = U(x, f_\delta)$ depending on a parameter σ and it is proved that, under certain conditions and a special choice of the parameter $\sigma = \sigma(\delta)$; as $\delta \to 0$, the family $U_{\sigma\delta}(x)$ converges in the usual sense to a solution $U(x)$ at the point $x \in G$.

Following A.N. Tikhonov [4], a family of vector-functions $U_{\sigma\delta}(x)$ is called a regularized solution of the problem. A regularized solution determines a stable method of approximate solution of the problem. The use of the classical Green's formula for constructing a regularized solution of the Cauchy problem for the Laplace equation was proposed by Academician M.M. Lavrent'ev [3], in his famous monograph. Extending Lavrent'ev idea, Yarmukhamedov constructed the Carleman function for the Cauchy problem for the Laplace equation. [5].

The system considered in this paper was introduced by N.N. Tarkhanov ([1]-[2]). For this system, he studied correct boundary value problems and found an analogue of the Cauchy integral formula in a bounded domain. In many well-posed problems for a system of equations of elliptic type of the first order with constant coefficients, the factorizing operator of Helmholtz, the calculation of the value of the vector function on the whole boundary is inaccessible. Therefore, the problem of reconstructing, solving a system of equations of elliptic type of the first order with constant coefficients, the factorizing operator of Helmholtz, is one of the topical problems in the theory of differential equations [6].

Let $\mathbb{R}^3$ be the three-dimensional real Euclidean space,

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3,\ x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, y' = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

$G \subset \mathbb{R}^3$ be a bounded simply-connected domain with piecewise smooth boundary consisting of the plane T: $y_3 = 0$ and of a smooth surface S lying in the half-space $y_3 > 0$, that i.e., $\partial G = S \bigcup T$.

We introduce the following notation:

$$x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ transposed vector } x,\ r = |y-x|\,,\ \alpha = |y'-x'|,$$

$$U(x) = (U_1(x), ..., U_n(x))^T,\ u^0 = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n,\ n = 2^m,\ m = 3,$$

$$E(z) = \begin{Vmatrix} z_1 \dots 0 \\ \dots\dots \\ 0 \dots z_n \end{Vmatrix} \text{ diagonal matrix, } z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Let $D(x^T)$ the $(n \times n)-$the matrix with elements consisting of a set of linear functions with constant coefficients of the complex plane for which the following condition is satisfied:

$$D^*(x^T)D(x^T) = E((|x|^2 + \lambda^2)u^0),$$

where $D^*(x^T)$ is the Hermitian conjugate matrix $D(x^T)$, $\lambda-$real number.

We consider in the domain G a system of differential equations

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x) = 0, \tag{1}$$

where $D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ is the matrix of differential operators is of the first order.

We denote by $H(G)$ the class of vector-functions in a domain G of continuous on $\overline{G} = G \bigcup \partial G$ and satisfying the system (1).

Statement of the problem. Suppose $U(y) \in H(G)$ and

$$U(y)|_S = f(y),\ y \in S.$$

If $U(y) \in H(G)$, then the following integral formula of Cauchy type is valid

$$U(x) = \int\limits_{\partial G} N_\sigma(y,x)U(y)ds_y, \quad x \in G,$$

where

$$N_\sigma(y,x) = \left(E\left(\Phi_\sigma(y,x)u^0\right)D^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)D(t^T).$$

Theorem. *Let $U(y) \in H(G)$ it satisfy the inequality*

$$|U(y)| \le 1,\ y \in T.$$

If

$$U_\sigma(x) = \int\limits_S N_\sigma(y,x)U(y)ds_y,\ x \in G,$$

Then we have the estimate

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \le C(x)\sigma e^{-\sigma x_3^2},\ \sigma > 1,\ x \in G.$$

Here and below, the functions depending on x are denoted by $C(x)$. And in different inequalities they are different.

Литература

1. *Tarkhanov N.N.* On the integral representation of solutions of systems of first-order linear differential equations in partial derivatives and some of its applications // Some questions of multidimensional complex analysis. Krasnoyarsk: Institute of Physics, USSR Academy of Sciences, 1980. C. 147-160.
2. *Tarkhanov N.N.* The Cauchy problem for solutions of elliptic equations. Berlin: Akad. Verl., 1995. V. 7.
3. *Lavrent'ev M.M.* On some ill-posed problems of mathematical physics. Novosibirsk: Ed. SB AS USSR, 1962. 92 p.

4. *Tikhonov A.N.* On the solution of ill-posed problems and the regularization method // Dokl. Academy of Sciences of the USSR. 1963. T. 151, № 3. C. 501-504.

5. *Yarmukhamedov Ya.* The Carleman function and the Cauchy problem for the Laplace equation // Sibirsk. Mat. Zhurnal. 2004. T. 45, № 3. C. 701-719.

6. *Juraev D.A.* Regularization of the Cauchy problem for systems of elliptic type equations of first order // Uzbek Mathematical Journal. 2016. № 2. C. 61-71.

ТЎРТИНЧИ ТАРТИБЛИ ТЕНГЛАМА УЧУН ТЎҒРИ ТЎРТБУРЧАКДА ҚЎЙИЛГАН БИР АРАЛАШ МАСАЛА ЕЧИМИНИНГ ЯГОНАЛИГИ ҲАҚИДА

Азизов М.С., ФарДУ, Ўзбекистон, Фарғона

muzaffar.azizov.1988@mail.ru

$\Omega=\{(x,t):0<x<p,0<t<T\}$ соҳада ушбу

$$Lu=u_{xxxx}+u_{tt}+\mu^4u=f\left(x,t\right) \tag{1}$$

тенглама учун қуйидаги масалани қарайлик:

A **масала.** Ω соҳа чегарасида

$$u\left(x,0\right)=\varphi_1\left(x\right),\qquad 0\leqslant x\leqslant p, \tag{2}$$

$$u_t\left(x,0\right)=\varphi_2\left(x\right),\qquad 0<x<p \tag{3}$$

бошланғич ва

$$u_x\left(0,t\right)=\psi_1\left(t\right),\qquad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{4}$$

$$u_x\left(p,t\right)=\psi_2\left(t\right),\qquad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{5}$$

$$u_{xxx}\left(0,t\right)=\psi_3\left(t\right),\qquad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{6}$$

$$u_{xxx}\left(p,t\right)=\psi_4\left(t\right),\qquad 0\leqslant t\leqslant T \tag{7}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u\left(x,t\right)\in C_{x,t}^{2,1}\left(\bar{\Omega}\right)\cap C_{x,t}^{4,2}\left(\Omega\right)$ функция топилсин. Бу масала $\mu=0$ бўлган ҳолда [1] да ўрганилган.

A масала ечимининг ягоналигини исботлаймиз.

Теорема. *Агар A масаланинг ечими мавжуд бўлса, у ягонадир.*

Исбот. Фараз қиламиз, A-масаланинг иккита $u_1\left(x,y\right)$ ва $u_2\left(x,y\right)$ ечимлари мавжуд бўлсин. Уларнинг айирмаси бўлган ушбу

$$u\left(x,t\right)=u_1\left(x,t\right)-u_2\left(x,t\right) \tag{8}$$

функция A-масалага мос бир жинсли масаланинг ечими бўлади.

Қуйидаги функцияни қараймиз:

$$d_n\left(t\right)=\int\limits_0^p u\left(x,t\right)X_n\left(x\right)dx,\qquad n=0,1,2,... \tag{9}$$

бу ерда, $X_n\left(x\right)$ функция $L_2\left(0,p\right)$ фазода ортонормал ва тўла система ҳосил қилувчи қуйидаги функциялардан иборат:

$$X_0\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{p}},\qquad X_n\left(x\right)=\sqrt{\frac{2}{p}}\cos\lambda_nx,\qquad \lambda_n=\frac{n\pi}{p},\qquad n=0,1,2,... \tag{10}$$

(10) функцияни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$d_{n,\varepsilon}\left(t\right)=\int\limits_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u\left(x,t\right)X_n\left(x\right)dx,\qquad 0<\varepsilon<p,\qquad (\varepsilon,p-\varepsilon)\neq\emptyset. \tag{11}$$

Аниқки, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} d_{n,\varepsilon}(t) = d_n(t)$. (11) тенгликни t бўйича икки марта дифференциаллаб, сўнгра (1) тенгламага мос

$$u_{xxxx} + u_{tt} + \mu^4 u = 0$$

бир жинсли тенгламага қўйиб, ушбу тенгликга эга бўламиз:

$$d''_{n,\varepsilon}(t) = -\int\limits_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u_{xxxx}(x,t)\, X_n(x)\, dx - \mu^4 \int\limits_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u(x,t)\, X_n(x)\, dx. \tag{12}$$

Бу тенгликнинг ўнг тарафидаги биринчи интегрални тўрт марта бўлаклаб интеграллаб, $\varepsilon \to 0$ да лимитга ўтамиз:

$$\begin{gathered}\lim_{\varepsilon\to 0} d''_{n,\varepsilon}(t) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[X_n(p-\varepsilon)\, u_{xxx}(p-\varepsilon,t) - X_n(\varepsilon)\, u_{xxx}(\varepsilon,t)\right] + \\ + \lim_{\varepsilon\to 0}\left[X'_n(p-\varepsilon)\, u_{xx}(p-\varepsilon,t) - X'_n(\varepsilon)\, u_{xx}(\varepsilon,t)\right] - \\ - \lim_{\varepsilon\to 0}\left[X''_n(p-\varepsilon)\, u_{x}(p-\varepsilon,t) - X''_n(\varepsilon)\, u_{x}(\varepsilon,t)\right] - \\ - \lim_{\varepsilon\to 0}\left[X'''_n(p-\varepsilon)\, u(p-\varepsilon,t) - X'''_n(\varepsilon)\, u(\varepsilon,t)\right] - \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\lambda_n^4 + \mu^4\right) \int\limits_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u(x,t)\, X_n(x)\, dx.\end{gathered}$$

Бу ерда (4)-(7) шартларга мос бир жинсли шартларни ва (10) ни эътиборга олсак,

$$d''_{n,\varepsilon}(t) = -\left(\lambda_n^4 + \mu^4\right) \int\limits_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u(x,t)\, X_n(x)\, dx, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

тенглик ҳосил бўлади. Бундан эса, (11) тенгликка асосан

$$d''_n(t) + \left(\lambda_n^4 + \mu^4\right) d_n(t) = 0 \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{13}$$

иккинчи тартибли ўзгармас коэффитциентли бир жинсли оддий дифференциал тенглама келиб чиқади. Бу тенгламанинг умумий ечими

$$d_n(t) = C_{1n} \cos\left(\lambda_n^4 + \mu^4\right) t + C_{2n} \sin\left(\lambda_n^4 + \mu^4\right) t \tag{14}$$

кўринишга эга. (2) ва (3) шартларга мос бир жинсли шартлардан ва (9) тенгликдан келиб чиқадики,

$$d_n(0) = 0, \qquad d'_n(0) = 0. \tag{15}$$

(14) ни (15) шартларга бўйсиндирсак, $C_{1n} = 0$ ва $C_{2n} = 0$ эканлигини топамиз. Буни эътиборга олсак, (14) дан $d_n(t) \equiv 0$ бўлиши келиб чиқади.

Демак,

$$\int\limits_0^p u(x,t)\, X_n(x)\, dx = 0, \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{16}$$

(10) тўла система бўлганлиги учун, (16) тенгликдан $u(x,t) \equiv 0$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ яъни A-масаланинг ечими ягона экан. Теорема исбот бўлди.

Фойдаланилган адабиётлар

1. *Отарова Ж.А.* Разрешимость и спектральные свойства краевых задач для уравнений смешанного типа четвертого порядка. Ташкент: Диссертация, 2008. 30 с.
2. *Азларов Т., Мансуров Ҳ.* Математик анализ. Тошкент: Ўзбекистон, 1995. 428 б.
3. *Салоҳиддинов М.С., Насритдинов Ғ.Н.* Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент: Ўқитувчи, 1982. 151 б.

Краевая задача для k-параболического уравнения с дробной производной по t при $0<\alpha<1$.

Аманов Д.[1]**,Имамова Ш.**[2]**,** [1] Институт математики,Узбекистан,Ташкент)

[2] Институт математики, Узбекистан,Ташкент
[1]damanov@yandex.ru, [2]milky way.85@mail.ru

Текст доклада В области $\Omega=\{(x,y,t): 0<x<p, 0<y<q, 0<t<T\}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}+\frac{\partial^{2k}u}{\partial y^{2k}}+(-1)^k_c D^{\alpha}_{0t}u=f(x,y,t) \tag{1}$$

где $k\in N, 0<\alpha<1,_c D^{\alpha}_{0t}$-оператор дробного дифференцирования поt в смысле Капуто. Он определяется через интеграл Римана -Лиувилля дробного порядка следующим образом

$${}_cD^{\alpha}_{0t}u(x,y,t)=I^{1-\alpha}_{0t}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{2}$$

где

$$I^{\alpha}_{at}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau. \tag{3}$$

Задача 1.Найти в области Ω решение $u(x,y,t)$ уравнения (1) удовлетворяющее условиям

$$u(x,y,0)=0, 0\le x\le p, 0\le y\le q, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^{2m}u(0,y,t)}{\partial x^{2m}}=\frac{\partial^{2m}u(p,y,t)}{\partial x^{2m}}=0, m=0,\overline{1,k-1}, 0\le y\le q, 0\le t\le T, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^{2m}u(x,0,t)}{\partial y^{2m}}=\frac{\partial^{2m}u(x,q,t)}{\partial y^{2m}}=0, m=0,\overline{1,k-1}, 0\le x\le p, 0\le t\le T. \tag{6}$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $f(x,y,t)\in C^{2,2,0}_{x,y,t}\overline{(\Omega)}, f_{x,x,y}, f_{x,y,y}\in C\overline{(\Omega)}, f_{x,x,y,y}$ *кусочно-непрерывна и ограничена,* $f(0,y,t)=f(p,y,t)=0, f(x,0,t)=f(x,q,t)=0$. *Тогда регулярное решение задачи 1 существует.*

Теорема 2. *Решение задачи 1 единственно.*

О РАЗРЕШИМОСТИ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЯЗКОГО ТРАНСЗВУКОВОГО УРАВНЕНИЯ

Апаков Ю.П.
Наманганский инженерно-строительный институт, Узбекистан, Наманган
yusupjonapakov@gmail.com

В области $D=\{(x,y): \ 0<x<p, \ 0<y<q\}$, рассматривается уравнение

$$Lu+\mu\,u\equiv\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\mu\,u=0, \tag{1}$$

где $p,q=const>0$ и $\mu=const$.

Задача A. Найти решение уравнения (1) в области D из класса $C^{2,1}_{x,y}\left(\overline{D}\right)\cap C^{3,2}_{x,y}\left(D\right)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\alpha\,u\,(x,0)+\beta\,u_y\,(x,0)=0, \gamma\,u\,(x,l)+\delta\,u_y\,(x,l)=0, \ 0\le x\le p, \tag{2}$$

$$u_{xx}\,(0,y)-a\,(y)\,u\,(0,y)=\psi_1\,(y)\,, \quad 0\le y\le q, \tag{3}$$

$$u_x\,(0,y)=\psi_2\,(y)\,, \quad 0\le y\le q, \tag{4}$$

$$u_{xx}\,(p,y)-b\,(y)\,u\,(p,y)=\psi_1\,(y)\,, \quad 0\le y\le q, \tag{5}$$

где $\psi_i\,(y)\,, \quad i=1,2,3,$ известные достаточно гладкие функции.

Теорема единственности. *Если* $\mu < 0$, $a(y) > 0$, $b(y) < 0$, $\alpha\beta \le 0$, $\gamma\delta \ge 0$, *то задача A не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$, тогда $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) и однородным краевым условиям. Рассмотрим тождество

$$uLu + \mu u^2 \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(u\, u_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}(u\, u_y) - u_y^2 + \mu\, u^2 = 0. \tag{6}$$

Интегрируя равенства (6) по области D , получим

$$\int\limits_0^q \left[u(p,y)\, u_{xx}(p,y) - u(0,y)\, u_{xx}(0,y) - \frac{1}{2}u_x^2(p,y) + \frac{1}{2}u_x^2(0,y)\right] dy +$$

$$+ \int\limits_0^p \left[u(x,q)\, u_y(x,q) - u(x,0)\, u_y(x,0)\right] dx + \int\limits_0^p \int\limits_0^q \left[\mu\, u^2(x,y) - u_y^2(x,y)\right] dxdy = 0$$

Из последнего равенства, учитывая однородные краевые условии (2)-(5), имеем

$$\begin{gathered}\int\limits_0^q \left[\alpha(y)\, u^2(0,y) - b(y)\, u^2(p,y) + \tfrac{1}{2}u_x^2(p,y)\right] dy + \tfrac{\delta}{\gamma}\int\limits_0^p u_y^2(x,q)\, dx - \\ -\tfrac{\beta}{\alpha}\int\limits_0^p u_y^2(x,0)\, dx + \int\limits_0^p\int\limits_0^q \left[u_y^2(x,y) - \mu\; u^2(x,y)\right] dxdy = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Из равенство (7), учитывая условия теоремы-1 заключаем, что $u(x,y) \equiv 0$ в области $\overline{D}$. Существование решения задачи A доказана методом Фурье. Решение задачи A имеет вид

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{1n}e^{k_n x} + e^{-\frac{1}{2}k_n x}\left(C_{2n}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}k_n x + C_{3n}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_n x\right)\right] Y_n(y). \tag{8}$$

Здесь $Y_n(y) = \alpha\, \sin\sqrt{\lambda_n}y - \beta\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}y$,решение задачи типа Штурма-Лиувилля $Y''(y) + \lambda Y(y) = 0$, $\alpha Y(0) + \beta Y'(0) = 0$, $\gamma Y(q) + \delta Y'(q) = 0$, и $k_n = \sqrt[3]{\lambda_n - \mu}$, $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{q}\right)^2$, $n = 1, 2, ...$

Показана равномерная сходимость полученного ряда (8) и его производных до третьего порядка по x и второго порядка по y. Доказана следующая теорема.

Теорема существования.*Если* $\psi_i(y) \in C^3[0,q]$, $i = 1, 2$, $\psi_3(y) \in C^2[0,q]$, *причем выполняются условия согласования* $\psi_i(0) = \psi_i(q) = \psi_i''(0) = \psi_i''(q) = 0$, $i = 1, 2, 3$, *то решение задачи существует в виде ряда (8) .*

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

Аттаев А.Х.

Институт прикладной математики и автоматизации, Россия, Нальчик
attaev.anatoly@yandex.ru

Доклад посвящен исследованию задачи управления колебаниями одномерной упругой струны длины l в течение времени T, описываемые уравнением

$$u_{xx} - u_{tt} = \lambda u(x_0, t)$$

в прямоугольнике $\Omega_T = [0 < x < l] \times [0 < t < T]$.

На левом и правом конце струны задаются нелокальные условия с локальным смещением

$$u(0,t) = \mu(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$u(l,t)=\nu(t), \qquad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Задача состоит в нахождении таких управлений $\mu(t)$ и $\nu(t)$, которые за минимальный промежуток времени T переводят струну из произвольного начального состояния

$$u(x,0)=\varphi_0(x), \qquad u_t(x,0)=\psi_0(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant l$$

в произвольное финальное состояние

$$u(x,T)=\varphi_1(x), \qquad u_t(x,T)=\psi_1(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant l.$$

Установлены необходимые и достаточные условия на функции $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$, обеспечивающие существование искомых граничных управлений $\mu(t)$ и $\nu(t)$. Найден их явный аналитический вид. Установлено значение минимального времени, в течение которого это управление осуществимо.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Егоров И.Е.[1], Черосова С.М.[2]

[1] НИИ математики Северо-Восточного федерального
университета им. М.К. Аммосова, Россия, Якутск)
[2] Институт математики и информатики, Северо-Восточный
федеральный университет им. М.К. Аммосова, Россия, Якутск
[1]IvanEgorov51@mail.ru

На полуоси $t>0$ рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор с дробными производными и постоянными коэффициентами

$$L(\partial_t^\alpha)=\partial_t^{m\alpha}+a_1\partial_t^{(m-1)\alpha}+...+a_m,$$

где ∂_t^α - оператор дробного дифференцирования порядка $\alpha(0<\alpha\leq 1)$ в смысле Капуто [1-5]:

$$\partial_t^\alpha u(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t(t-\tau)^{-\alpha}u'(\tau)d\tau, \;\; \partial_t^{m\alpha}=\underbrace{\partial_t^\alpha...\partial_t^\alpha}_{m}.$$

Задача Коши. Требуется найти решение $u(t)$ уравнения

$$L(\partial_t^\alpha)u=f(t), \;\; t>0, \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\partial_t^{k\alpha}u|_{t=0}=\varphi_k, \;\; k=\overline{0,m-1}. \tag{2}$$

Нетрудно показать, что функция

$$Z_\alpha(\lambda,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}$$

является решением следующей задачи Коши [2,3]:

$$\partial_t^\alpha u=\lambda u, \;\; t>0, \;\; u|_{t=0}=1.$$

Рассмотрим функцию

$$Z(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma\frac{Z_\alpha(i\lambda,t)d\lambda}{L_m(i\lambda)},$$

где Γ - контур в комплексной плоскости, охватывающий все корни уравнения

$$L_m(i\lambda)\equiv(i\lambda)^m+a_1(i\lambda)^{m-1}+...+a_m=0.$$

Используя свойства функций $Z_\alpha(\lambda,t)$, $Z(t)$ доказывается, что задача Коши (1), (2) имеет единственное решение.

Литература

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

2. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применения. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

3. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

4. *Kilbas A.A. and Marzan S.* Cauchy Problem for Differential Equation with Caputo Derivative // Fract. Calc. Appl. Anal. 2004. є 3. pp. 297-321.

5. *Cascaval R.C., Eckstein E.S., Frota C.L., Goldstein J.A.* Fractional telegraph equations // J. Math. Anal. Appl. 2002. Vol. 275. pp. 145-159.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Газизов Р.К.[1], Касаткин А.А.[2], Лукащук С.Ю.[3]

Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия, Уфа
[1]gazizovrk@gmail.com, [2]alexei_kasatkin@mail.ru, [2]lsu@ugatu.su

В докладе обсуждаются вопросы построения нелокальных преобразований и нелокальных симметрий для различных уравнений математической физики, содержащих производные как целого, так и дробного порядков различных типов.

В частности, рассматривается цепочка трех нелинейных уравнений аномальной диффузии

$$
{}_0D_t^\alpha u = H(u_{xx}),
$$
$$
{}_0D_t^\alpha v = h(v_x)v_{xx},
$$
$$
{}_0D_t^\alpha w = (h(w)w_x)_x
$$

с дробной производной Римана–Лиувилля порядка $\alpha \in (0,2)$ по времени [1]

$$
{}_0D_t^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\int_0^t \frac{u(\tau,x)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau, \quad n = [\alpha]+1.
$$

Уравнения цепочки связаны между собой нелокальными заменами переменных (преобразованиями Бэклунда), позволяющими, в ряде случаев, находить новые нелокальные симметрии этих уравнений. Полученные результаты обобщают известные [2] для уравнений параболического типа (случай $\alpha = 1$).

Также обсуждается возможность построения квазилокальных (потенциальных) симметрий для дробно-дифференциального уравнения аномальной диффузии

$$
{}_0D_t^\alpha u = (k(u)D_x^\beta u)_x, \quad \alpha,\, \beta \in (0,1),
$$

соответствующего закону сохранения $D_t(C^t) + D_x(C^x) = 0$ с $C^t = {}_0I_t^{1-\alpha}u$, $C^x = k(u)D_x^\beta u$ (здесь ${}_0I_t^{1-\alpha}u$ — интеграл дробного порядка $1-\alpha$ [1]).

Работа выполнена в рамках Государственного задания Минобрнауки РФ (проект № 1.3103.2017/4.6).

Литература

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

2. *Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х.* Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. 1989. Т.34, С. 3-83.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Жураев Б.Б.[1], Юлдашева Н.[2]

[1] Технического университета Термезского филиала , Узбекистан,Ташкент.
[2] Технического университета Термезского филиала , Узбекистан,Ташкент.
[1]bakhodir.zhuraev.52@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum_{i=0}^{2} a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = F(x,y), \tag{1}$$

не ограничивая общности в месте уравнение (1) можно взять уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum_{i=0}^{2} a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} = F(x,y), \tag{2}$$

так как если в уравнение (1), $b(x,y) \in C^{3,1}(\overline{D})$, то преобразование

$$u(x,y) = v(x,y)exp(\frac{1}{2}\int\limits_0^y b(x,t)dt)$$

приводит к уравнению (2), где $D = \{(x,y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$.

Для уравнения (1) в области D рассмотрим следующая краевая задача.

Постановка задачи. Найти в области D решение уравнения (2)$u(x,y) \in C^{2,1}(\bar{D}) \cap C^{3,2}(D)$ удовлетворяющее краевым условиям:

$$\alpha_0(x)u(x,0) + \alpha_1(x)u_y(x,0) = h_0(x), 0 \le x \le 1, \tag{3}$$

$$\beta_0(x)u(x,1) + \beta_1(x)u_y(x,1) = h_1(x), 0 \le x \le 1, \tag{4}$$

$$\gamma_0(x)u(0,y) + \gamma_1(y)u_x(0,y) = p_0(y), 0 \le y \le 1, \tag{5}$$

$$\delta_0(y)u_x(1,y) + \delta_1(y)u_{xx}(1,y) = p_1(y), 0 \le y \le 1, \tag{6}$$

$$\rho_0(y)u_{xx}(0,y) + \rho_1(y)u_{xx}(1,y) = p_2(y), 0 \le y \le 1. \tag{7}$$

Здесь $\alpha_i(x), \beta_i(x), h_i(x), \gamma_i(y), \delta_i(y), , P_j(y), (i = 0,1, j = 0,1,2)$ заданные непрерывные функции, причем $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \ne 0, \beta_0^2 + \beta_1^2 \ne 0, \gamma_0^2 + \gamma_1^2 \ne 0, \delta_0^2 + \delta_1^2 \ne 0, \rho_0^2 + \rho_1^2 \ne 0.$

Доказано теорема единственности и существования решения задач (3)-(7)[1,2,3].

Литература

1. *С. Абдиназаров.* Об одной краевой задаче для одного неклассического уравнения // УзМЖ.,1991, No4, с.3-13.
2. *Т.Д.Джураев.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент,Фан,1979,240 с.
3. *Б.Б.Жураев.* Об одной нелокальной задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Мат.Меж.Кон.Посвященной А.В.Бицадзе. Москва. 16-18.06.2016 г.с.59.

О НЕЛОКАЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ НЕКЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Жураев Б.Б.[1], Хайруллаев И.С.[2]

[1] Технического университета Термезского филиала , Узбекистан,Ташкент.
[2] Технического университета Термезского филиала , Узбекистан,Ташкент.
[1]bakhodir.zhuraev.52@mail.ru

Рассмотрим в области $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y \leq 1\}$ уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum_{i=0}^{2} a_i(x, y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = F(x, y) \tag{1}$$

не ограничивая общности в месте уравнение (1) можно взять уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum_{i=0}^{2} a_i(x, y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} = F(x, y) \tag{2}$$

так как, если уравнении (1) $b(x, y) \in C^{3,1}(D)$ то преобразование

$$u(x, y) = v(x, y)exp(\frac{1}{2}\int\limits_0^y b(x, t)dt)$$

приводит к уравнению (2)

Постановка задачи. Найти в области D решение $u(x, y) \in C^{2,1}(\bar{D}) \cap C^{3,2}(D)$ уравнения (2) удовлетворяющее краевым условиям:

$$\alpha_0(x)u(x, 0) + \alpha_1(x)u(x, y_0) = h_0(x), y_0 = const, \tag{3}$$

$$\beta_0(x)u(x, 1) + \beta_1(x)u_y(x, 1) = h_1(x), 0 \leq x \leq 1, \tag{4}$$

$$\gamma_0(x)u(0, y) + \gamma_1(y)u_x(0, y) = P_0(y), \tag{5}$$

$$u_x(1, y) = P_1(y), \tag{6}$$

$$u(1, y) = P_2(y), 0 \leq y \leq 1. \tag{7}$$

Здесь $\alpha_i(x), \beta_i(x), \gamma_i(y), P_j(y), h_i(x) (i = 0, 1, j = 0, 1, 2)$. Заданные непрерывные функции, причем $\alpha_0^2+\alpha_1^2 \neq 0, \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0, \gamma_0^2 + \gamma_1^2 \neq 0$.

В данной работе методом интегралов энергии и потенциалов доказаны теоремы существования и единственности регулярной решения задач (3)-(7)[1,2,3].

Литература

1. *С. Абдиназаров.* Об одной краевой задаче для одного неклассического уравнения // УзМЖ.,1991, No4, с.3-13.
2. *Т.Д.Джураев.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент,Фан,1979,240 с.
3. *Б.Б.Жураев.* Об одной нелокальной задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Мат.Меж.Кон.Посвященной А.В.Бицадзе. Москва. 16-18.06.2016 г.с.59.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Зикиров О.С.[1], Сагдуллаева М.М.[2]

[1] Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека;
[2] Ташкентский университет информационных технологий им. Аль–Хорезми.
[1]zikirov@yandex.ru, [2]sagdullayevam@mail.ru

В области $D = \{(x, t) :\ 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим псевдогиперболическое уравнение третьего порядка вида

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + c(x, t)u = f(x, t), \tag{1}$$

где $c(x, t)$, $f(x, t)$ — заданные функции в области D.

Заметим, что уравнение (1) по классификации работы [1] соответствует второму каноническому виду относительно старших производных.

В работе для уравнения (1) изучается следующая нелокальная задача: *найти в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным*

$$u(x,0)=\psi_1(x), \quad u_t(x,0)=\psi_2(x), \quad 0\le x\le l, \tag{2}$$

и граничным

$$u(0,t)=\varphi_1(t), \qquad 0\le t\le T, \tag{3}$$

интегральным условиям

$$\int\limits_0^l u(x,t)dx=\int\limits_0^t \rho(t,\tau)u(l,\tau)d\tau+\varphi_2(t), \qquad 0\le t\le T, \tag{4}$$

где $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и $\rho(t,\tau)$ — заданные, непрерывные на $[0,l]$ и $[0,T],\ 0\le\tau\le t$, соответственно функции и удовлетворяют условиям согласования:

$$\psi_1(0)=\varphi_1(0), \quad \psi_2(0)=\varphi_1'(0), \quad \int\limits_0^l \psi_1(x)dx=\varphi_2(0).$$

Смешанные задачи с интегральными условиями для линейных гиперболических уравнений были исследованы многими авторами (см. например [2]).

Имеет место следующая теорема о разрешимости задачи (1)–(4).

Теорема. *Пусть выполнены условия*

$$c(x,t),\ f(x,t),\ \rho(t,\tau)\in C(\overline{D}); \quad \psi_i(x)\in C^{3-i}[0,l], \quad \psi_i(t)\in C^1[0,T], \quad (i=1,2).$$

Тогда нелокальная задача (1)–(4) разрешима и притом единственным образом.

Литература

1. Джураев Т.Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка.//*Дифференц. уравнения.* 1991. том 27, №10. – С. 1734–1745.

2. Пулькина Л.С. *Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений.* – Самара. Самарский университет. 2012. – 194 с.

ОБ УСЛОВИЯХ ЕДИНСТВЕННОСТИ И СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Иргашев Б.Ю.

Наманганский инженерно-строительный институт, Узбекистан, Наманган
bahromirgasev@gmail.com

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$Lu=D_t^{2n}u\left(x,t\right)-D_x^{2n}u\left(x,t\right)=0, \tag{1}$$

в прямоугольной области $\Omega=\{(x,t):0<x<l,0<t<T\}$, где l,T - заданные положительные числа,$n\in N$,поставим следующую задачу.

Задача А. Найти в области Ω функцию удовлетворяющую условиям

$$u\in C^{2n-1}\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^{2n}\left(\Omega\right),$$

$$Lu\left(x,t\right)\equiv 0,\ \ (x,t)\in\Omega,$$

$$D_x^k u(0,t) = D_x^k u(l,t) = 0, \ \ 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$D_t^k u(x,0) = \varphi_k(x), \ \ 0 \le x \le l, \tag{3}$$

$$D_t^k u(x,T) = \psi_k(x), \ \ 0 \le x \le l, \tag{4}$$

где $k = 0, ..., n-1$, $\varphi_k(x), \psi_k(x)$-заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям (2) в точках $x = 0, x = l$.

Уравнение (1), где краевые условия задаются для производных четных порядков (задача Дирихле) исследовалось в работе [1], где показано, что иррациональность отношения T/l является необходимым и достаточным условием единственности решения задачи Дирихле для уравнения (1) при любом $n \in N$. Найдены оценки, позволяющие обосновать существование решения задачи Дирихле. Особенность задачи Дирихле состоит в том, что при решении задачи методом Фурье, собственные функции состоят из синусов, а собственные значения явно вычисляются. Относительно задачи A , этого уже сказать нельзя. Сделав некоторые преобразование, в дальнейшем будем исследовать уравнение вида

$$Lu = a^{2n} D_t^{2n} u(x,t) - D_x^{2n} u(x,t) = 0, \tag{5}$$

где $a = T/l$, в квадрате $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < 1\}$, с граничными условиями (2)-(4) при $T = l = 1$. Справедлива следующая теорема.

Теорема единственности. *Если существует решение задачи A (для уравнения (5), при $T = l = 1$), то оно единственно только тогда, когда выполняется условие*

$$a \neq \frac{\lambda_m}{\lambda_k},$$

где λ_i, $i = 1, 2, 3, ...$ находятся из задачи

$$\begin{cases} X^{(2n)}(x) = (-1)^n \lambda^{2n} X(x), \lambda > 0, \\ X^{(k)}(0) = X^{(k)}(1) = 0, \ k = \overline{0, n-1}. \end{cases}$$

Заметим, что выше указанные рассуждения справедливы и для более общих краевых условий (лишь бы краевые условия были идентичны относительно переменных x и t).К примеру, для задачи Дирихле, рассмотренном в работе [1], имеем

$$a = \frac{\lambda_m}{\lambda_k} = \frac{\pi m}{\pi k} = \frac{m}{k},$$

т.е. для единственности решения задачи Дирихле необходимо и достаточно, чтобы число a (отношение длин сторон прямоугольника) не было рациональным, что и было показано в вышеупомянутой работе.

Теорема существования. *Если $\frac{1}{a}$ алгебраическое число степени $q \ge 2$ и кроме того $\varphi_i(x), \psi_i(x) \in C^{4n-1}[0;1]$; $\varphi_i^{(4n)}(x), \psi_i^{(4n)} \in L_2(0,1)$; $\varphi_i^{(s)}(0) = \varphi_i^{(s)}(1) = \psi_i^{(s)}(0) = \psi_i^{(s)}(1) = 0$, для $i = \overline{0, n-1}$; $s = \overline{0, n-1}$; $s = \overline{2n, 3n-1}$, то существует классическое решение задачи A.*

Литература

1. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков // Математические заметки. 2015. Т. 97, є 2. С. 262-276.

СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ КОШИ - РИМАНА

Маликов З., Сирожиддинова Г.

Самаркандский государственной университет, Узбекистан, Самарканд
e-mail:farhod.tursunov.76@mail.ru

Пусть, G область, граница которая состоит из части гиперплоскости $y_m = 0$ и некоторой поверхности S лежащей в полупространстве $y_m > 0$. В области G рассмотрим систем Коши Ц Римана [1].

$$A(D_1, D_2, \dots, D_m)u(x) = 0, \quad , x \in G \tag{1}$$

где $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Если $u(x) \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$ и является решением системы (1), тогда верна следующая интегральная формула:

$$u(x) = \int_{\partial G} A(D_1, D_2, \ldots, D_m) \frac{1}{r^{m-2}} A * (t_1, t_2, \ldots, t_m) u(y) dS_y$$

где $x, y \in R^m$, $r = |y-x|$, $t_1, t_2, \ldots, t_m$ единичная внешняя нормаль, проведенная в точке y на поверхности ∂G,$A*$ сопряженная матрица к A.

Постановка задача: Пусть $u(x) \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$, является решением системы (1)и $u(x)|_S = f(x)$. По значением функции $f(x)$ восстановлении функции $u(x)$ является задачи Коши для системы Коши-Римана.

Существование решение задачи Коши играет важную роль. В работе доказывается существование решение этой задачи, а также строится регуляризованное решение данной задачи.

Литература

1. *А.А. Дезин.* Труды математического института им. В.А. Стеклова. // Т.68, изв.АН СССР, М.1962, ст.10-54.

2. *М.М. Лаврентьев.* О некоторых некорректных задачах математического физики // Изд. СО АН СССР Новосибирск, 1962 г.

КАРРАЛИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛИ ТЎРТИНЧИ ТАРТИБЛИ ПАРАБОЛИК ТЕНГЛАМА УЧУН БИР ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА ҲАҚИДА

Орипов Ш.А., ФарДУ, Ўзбекистон, Фарғона

shoripov91@mail.ru

Масаланинг қўйилиши. D орқали $y = 0$ ва $y = h$ тўғри чизиқлар орасидаги полосани белгилайлик, бу ерда $h = const > 0$. Бу соҳада тўртинчи тартибли каррали характеристикали аралаш параболик типга тегишли бўлган қуйидаги операторни қарайлик:

$$L^2(u) = \begin{cases} L_1^2(u) \equiv \left(\dfrac{\partial}{\partial y} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u, & (x, y) \in D_1 = D \cap (x > 0) \\ L_2^2(u) \equiv \left(\dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u, & (x, y) \in D_2 = D \cap (x < 0). \end{cases} \tag{1}$$

$L^2(u) = 0$ тенглама учун D соҳада қуйидаги масалани ўрганамиз.

1-масала. *D соҳанинг ёпигида аниқланган, узлуксиз ва чегараланган шундай $u(x, y)$ функция топилсинки, у D_1 ва D_2 соҳаларда мос равишда $L_1^2(u) = 0$ ва $L_2^2(u) = 0$ тенгламаларни ҳамда*

$$u(+0, y) = u(-0, y), \qquad u_x(+0, y) = u_x(-0, y), \qquad 0 < y < h$$

$$u_{xx}(+0, y) = u_{xx}(-0, y), \qquad u_{xxx}(+0, y) = u_{xxx}(-0, y), \qquad 0 < y < h$$

улаш шартларини ва қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирсин:

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \qquad u_y(x, 0) = \varphi_2(x), \qquad 0 \leqslant x < +\infty;$$

$$u(x, h) = \psi_1(x), \qquad u_y(x, h) = \psi_2(x), \qquad -\infty < x \leqslant 0;$$

бу ерда $\varphi_k(x)$ ва $\psi_k(-x)$ $(k = 1, 2)$ $[0, +\infty)$ оралиқда берилган узлуксиз ва чегараланган функциялар.

Масала шартларига асосланиб, қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$u(+0, y) = u(-0, y) = \tau(y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant h,$$

$$u_x(+0, y) = u_x(-0, y) = \nu(y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant h,$$

$$u_{xx}(+0,y) = u_{xx}(-0,y) = \mu(y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant h,$$
$$u_{xxx}(+0,y) = u_{xxx}(-0,y) = \theta(y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant h,$$

бунда $\tau(y)$, $\nu(y)$, $\mu(y)$, $\theta(y)$- ҳозирча номаълум функциялар.

Қўйилган 1-масалани мос ҳолда D_1 соҳада

$$\begin{cases} u_y - u_{xx} = \upsilon(x,y) \\ \upsilon_y - \upsilon_{xx} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

тенгламалар системасининг

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \qquad 0 \leqslant x < +\infty$$
$$u(0,y) = \tau(y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant h$$
$$\upsilon(x,0) = \varphi_2(x) - \varphi_1''(x) = f(x), \qquad 0 \leqslant x < +\infty$$
$$\upsilon_x(0,y) = \nu'(y) - \theta(y) = g(y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant h$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ва D_2 соҳада

$$\begin{cases} u_y + u_{xx} = \upsilon(x,y) \\ \upsilon_y + \upsilon_{xx} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

тенгламалар системасининг

$$u(x,h) = \psi_1(x), \qquad -\infty < x \leqslant 0$$
$$u(0,y) = \tau(y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant h$$
$$\upsilon(x,h) = \psi_2(x) + \psi_1''(x) = f_1(x), \qquad -\infty < x \leqslant 0$$
$$\upsilon_x(0,y) = \nu'(y) + \theta(y) = g_1(y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant h$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласига келтирамиз.

Ушбу ишда тўртинчи тартибли аралаш параболик тенглама учун полосада иккинчи чегаравий масала ўрганилган. Аралаш параболик тенгламанинг тўғри параболик бўлган соҳадаги ечим кўринишидан фойдаланиб [1,2], баъзи алмаштиришлар ёрдамида тенгламанинг тескари параболик бўлган соҳадаги ечими кўриниши ҳам топилади. Ечим формуласидаги номаълум функцияларни топиш учун қўйилган масала унга тенг кучли бўлган сингуляр интеграл тенгламага келтирилади. Сингуляр интеграл тенглама ечимининг ягоналигидан номаълум функциялар бир қийматли топилади.

Фойдаланилган адабиётлар

1. *Ўринов А.Қ.* Параболик типдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. Тошкент: Mumtoz so'z, 2015.

2. *Терсенов С.А.* Параболические уравнение с меняющимся направлением времени. Новосибирск, 1985. 104 с.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНЫХ ПОРЯДКОВ

Паровик Р.И.[1,2]

[1] Институт космофизических исследований и распространения радиоволи ДВО РАН, Россия, с.Паратунка,
[2] Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, Россия, Петропавловск-Камчатский
e-mail: romanparovik@gmail.com

Введем некоторые определения, которые будем использовать в статье по аналогии с работой [1].

Определение 1. Функция действительного переменного $f(t)$, $t>0$ принадлежит пространству C_μ , если существует такое $p>\mu$, что $f(t)=t^p f_1(t)$, где $f_1(t)\in([0,\infty])$.

Определение 2. Функция действительного переменного $f(t)$, $t>0$ Рпринадлежит пространству C_μ^n, $n\in N$, если $f^{(n)}\in C_\mu$.

Определение 3. Интегралом Риманна-Лиувилля порядка $\beta\geq 0$ для функции $f\in C_\mu, \mu\geq -1$ называется интеграл:

$$I_{0t}^{\beta}f(\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^t(t-\xi)^{\beta-1}f(\xi)\,d\xi,\beta>0,t>0,\\ f(t),\beta=0\end{cases}\tag{1}$$

Определение 4. Дробной производной Герасимова-Капуто для функции $f\in C_{-1}^n$ назовем следующее соотношение [2,3]:

$$\partial_{0t}^{\beta}f(\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(n-\beta)}\int\limits_0^t(t-\xi)^{\beta-1}f^{(n)}(\xi)\,d\xi,n-1<\beta<n,n\in N,\\ \dfrac{d^nf(t)}{dt^n},\beta=n\end{cases}\tag{2}$$

Отметим, следующее свойство операторов (1) и (2):

$$\partial_{0t}^{\beta}x(\xi)=I_{0t}^{n-\beta}x^{(n)}(\xi)\,,\tag{3}$$

Более детально об операторах (1) и (2) можно узнать в работах [4]-[6].

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\partial_{0t}^{\beta}x(\xi)+\lambda\partial_{0t}^{\gamma}x(\xi)=f(x(t),t)\,,0\leq t\leq T,1<\beta\leq 2,0<\gamma\leq 1,\tag{4}$$

$$x(0)=\alpha_1,\dot{x}(0)=\alpha_2,\tag{5}$$

где $x(t)\in C_\mu^2([0,T])$, $T>0,\lambda>0,\alpha_1,\alpha_2$ - заданные константы, функция $f(x(t),t)$ непрерывная функция, такая что $f:[0,T]\times E\to E$ где $(E,\|.\|)$ - банахово пространство. E - нормированное векторное пространство.

Задача Коши (4), (5) описывает широкий класс фрактальных осциллляторов тип которых определяется функцией $f(x(t),t)$. Если эта функция линейна, то мы получаем класс линейных фрактальных осциллляторов [7], если не линейна, то приходим к классу нелинейных фрактальных осциллляторов [8]-[10]. Постоянная λ имеет смысл коэффициента трения.

Обозначим $([0,T],E)$ пространство всех непрерывных функций, определенных на $[0,T]\to E$ порожденное нормой $\|.\|$. Справедлива следующая лемма.

Лемма *Общее решение задачи Коши (4), (5) имеет вид:*

$$x(t)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^t(t-\xi)^{\beta-1}f(x(\xi),\xi)d\xi-\frac{\lambda}{\Gamma(\beta-\gamma)}\int\limits_0^t(t-\xi)^{\beta-\gamma-1}x(\xi)d\xi-\alpha_1-\alpha_2t.\tag{6}$$

В работе с учетом свойства (3) приводится доказательство леммы (6) , котороя является вспомогательной для доказательства теоремы о существования и единственности задачи Коши (4) и (5). Введем следующие условия:

1. Функция $f\left(x\left(t\right),t\right)$ удовлетворяет условию $x\left(t\right)$:

$$\left\| f\left(x,t\right) - f\left(y,t\right)\right\| \leq L\left\| x-y\right\|, L>0, x,y\in E, t\in\left[0,T\right]. \tag{7}$$

2. Пусть d и r два положительных действительных числа таких, что $0<d<1$ и

$$\frac{\lambda T^{\beta-\gamma}}{\Gamma\left(\beta-\gamma+1\right)}+\frac{LT^{\beta}}{\Gamma\left(\beta+1\right)}\leq d, \frac{NT^{\beta}}{\Gamma\left(\beta+1\right)}+\alpha_1+\alpha_2 T\leq\left(1-d\right)r, \tag{8}$$

где $N=\left\| f\left(0,t\right)\right\| = \sup\limits_{t\in[0,T]}\left| f\left(0,t\right)\right|$.

Основной результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *Если выполнены условия (7) и (8), тогда задача Коши (4), (5) имеет единственное решение в пространстве* $C\left(\left[0,T\right],E\right)$.

Далее с помощью теоремы о неподвижной точке и условий (7) и (8) доказывается эта теорема.

Работа выполнена по госзаданию для КамГУ им. Витуса Беринга, тема НИР "Применение дробного исчисления в теории колебательных процессов номер рег. АААА-А17-117031050058-9".

Литература

1. *Anber A., Belarbi S., Dahmani Z.*New existence and uniqueness results for fractional differential equations // Analele Universitatii "Ovidius"Constanta - Seria Matematica. 2013. vol. 21(3). pp. 33-41.
2. *Gerasimov A.N.* Generalization of linear deformation laws and their application to internal friction problems // Applied mathematics and mechanics. RAS USS. 1948. vol. 12. pp. 529-539.
3. *Caputo M.* Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II // Geophysical Journal International. 1967. vol. 13, no. 5. pp. 529-539.
4. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
5. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland. Amsterdam. Elsevier. 2006. 541 p.
6. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
7. *Паровик Р.И.* Дробное исчисление в теории колебательных систем // Современные наукоемкие технологии.2017.є 1. С.66-68.
8. *Parovik R.I.*Mathematical modeling of nonlocal oscillatory Duffing system with fractal friction // Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2015. vol. 10, no 1. pp. 16-21.
9. *Novikova E.R.* Van der Pol-Duffing oscillator with the effect of hereditary c Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2017. vol. 17, no 2. pp. 65-75.
10. *Lipko O.D.* Mathematical model of propagation of nerve impulses with regard hereditarity // Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2017. vol. 17, no 1. pp. 33-43.

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Псху А.В.

Институт прикладной математики и автоматизации, Россия, Нальчик
pskhu@list.ru

Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma}-\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)u(x,y)=f(x,y), \tag{1}$$

где $\sigma\in(0,1)$, а через $\partial^\sigma/\partial y^\sigma$ обозначен оператор дробного дифференцирования Джрбашяна-Нерсесяна [1] порядка σ по переменной y с началом в точке $y=0$, ассоциированный с упорядоченной парой $\{\alpha,\beta\}$, α, $\beta\in(0,1]$, $\sigma=\alpha+\beta-1$.

В работе для уравнения (1) в терминах функции Райта [2] построено фундаментальное решение и в полосе $\mathbb{R} \times (0, T)$ решена задача Коши

$$\lim_{y \to 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = \tau(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Здесь $D_{0y}^{\alpha-1}$ — дробный интеграл Римана-Лиувилля [3] порядка $1 - \alpha$.

Литература

1. *Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б.* Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Матем. 1968. Т. 3, № 1. С. 3-28.
2. *Wright E.M.* The generalized Bessel function of order greater than one // Quart. J. Math., Oxford Ser. 1940. Vol. 11. P. 36-48.
3. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. Москва: Физматлит, 2003. 272 с.

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ БИР СИНФИ УЧУН ИККИ НУҚТАЛИ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА

Рахимова М.М., ФарДУ, Ўзбекистон, Фарғона

maftuna.raximova.1996@mail.ru

Ушбу интегро-дифференциал тенгламани қарайлик:

$$y''(x) + \alpha(x) y'(x) + \beta(x) y(x) + \gamma(x) \int_0^x (x-t)^{-a} ch\left[\lambda_1 (x-t)\right] y(t) dt +$$

$$+\delta(x) \int_x^1 (t-x)^{-b} ch\left[\lambda_2 (x-t)\right] y(t)\, dt = f(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{1}$$

бу ерда $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \delta(x)$ ва $f(x)$ - $[0,1]$ сегментда берилган узлуксиз функциялар, a, b, λ_1 ва λ_2 - берилган ҳақиқий сонлар бўлиб, $a, b \in (0,1)$.

Мақолада (1) тенглама учун қуйидаги масаланинг бир қийматли ечилиши текширилган:

Масала. *(1) тенгламанинг* $[0,1]$ *оралиқда аниқланган, узлуксиз ва*

$$y(0) = k_1, \quad y(1) = k_2 \tag{2}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда k_1, k_2*- берилган ҳақиқий сонлар.*

Теорема. *Агар* $\alpha(x), \gamma(x), \delta(x) \in C^1[0,1]$; $(1/2)\alpha'(x) - \beta(x) \geqslant 0$, $-e^{-2|\lambda_1|x} \leqslant \gamma(x) \leqslant 0$, $-\infty < \delta(x) \leqslant -e^{2|\lambda_2|x}$, $x \in [0,1]$ *шартлар бажарилса, қўйилган масаланинг ечими мавжуд ва ягона бўлади.*

Исбот. 1). Масала ечимининг ягоналиги энергия интеграллари усули билан исботланади. Бунда

$$(x-t)^{-\varepsilon} = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)\cos(\varepsilon\pi/2)} \int_0^{+\infty} \eta^{\varepsilon-1} \cos\left[(x-t)\eta\right] d\eta, \qquad \varepsilon \in (0,1),$$

$$ch\left[\lambda(x-t)\right] = \left[e^{\lambda(x-t)} + e^{\lambda(t-x)}\right] \Big/ 2,$$

$$f(x) \int_m^x f(t)\, dt = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\int_m^x f(t)\, dt \right)^2$$

формулалардан фойдаланилади, бу ерда $\Gamma(z)$-Эйлернинг гамма функцияси.

2). Масала ечимининг мавжудлигини исботлаш мақсадида (1) тенгламани

$$y''(x) = h(x), \qquad 0 < x < 1 \tag{3}$$

кўринишида ёзиб олайлик, бу ерда

$$h(x)=f(x)-\alpha(x)y'(x)-\delta(x)\int\limits_x^1 (t-x)^{-b}ch\left[\lambda_2(x-t)\right]y(t)\,dt-$$
$$-\gamma(x)\int\limits_0^x (x-t)^{-a}ch\left[\lambda_1(x-t)\right]y(t)\,dt-\beta(x)\,y(x)\,. \tag{4}$$

Агар $h(x)$ функцияни вақтинча маълум деб ҳисобласак, у ҳолда (3) тенгламанинг (2) шартларни қаноатлантирувчи ечими учун

$$y(x)=k_1(1-x)+k_2x+\int\limits_0^1 G(x,t)\,h(t)\,dt,\ \ x\in[0,1] \tag{5}$$

тенглик ўринли бўлади [1,2], бу ерда

$$G(x,t)=\begin{cases} x(t-1), & x\leqslant t;\\ (x-1)\,t, & x\geqslant t,\end{cases}$$

(5) тенгликда $h(x)$ функция ўрнига унинг (4) ифодасини қўямиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликда $y'(t)$ иштирок этган интегрални бўлаклаймиз ва $\gamma(t)$ ҳамда $\delta(t)$ функциялар иштирок этган ҳадларда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз. Натижада

$$y(x)-\int\limits_0^1 K(x,t)\,y(t)\,dt=q(x)\,,\quad x\in[0,1] \tag{6}$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$q(x)=k_1(1-x)+k_2x+\int\limits_0^1 G(x,t)\,f(t)\,dt,$$

$$K(x,t)=\left[G(x,t)\,\alpha(t)\right]'_t-\beta(t)\,G(x,t)-$$
$$-\int\limits_t^1 G(x,z)\,\gamma(z)\,(z-t)^{-a}ch\left[\lambda_1(z-t)\right]dz-\int\limits_0^t G(x,z)\,\delta(z)(t-z)^{-b}ch\left[\lambda_2(z-t)\right]dz.$$

(6) - $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб [1], қўйилган масалага эквивалентдир. Шунинг учун бу интеграл тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги қўйилган масала ечимининг ягоналигидан келиб чиқади.

(6) интеграл тенгламанинг ечими $K(x,t)$ ядро резольвентаси $R(x,t)$ ёрдамида

$$y(x)=q(x)+\int\limits_0^1 R(x,t)q(t)\,dt,\qquad x\in[0,1]$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгликдан фойдаланиб осонгина кўрсатиш мумкинки, $y(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$. Теорема тўла исбот бўлди.

Фойдаланилган адабиётлар

1. *Salohiddinov M.S.* Integral tenglamalar. Toshkent: Yangiyul polygraph service, 2007. 256 bet.
2. *Уринов А.К.* Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. Тошкент: МУМТОЗ СЎЗ, 2014. 164 бет.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРВОДНОСТИ С ДВУМЯ НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМ

Рахманов Ф.Д.

Национальный Университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент
farxod_frd@bk.ru

В настоящей работе исследуется задачи теории теплопроводности с двумя нелокальными краевыми условиями вида.

$$u(0,t)-u(1,t)=\tau(t),\ \ 0\leqslant t\leqslant T$$

$$\int\limits_{\alpha}^{1} u(x,t)dx=\mu\left(t\right)$$

где $0<\alpha<1, \alpha\notin Q$, $u(x,t)$ - искомая, а $\tau(t)$, $\mu\left(t\right)$ - заданная непрерывная функции. Задачи подобного вида исследовались в работах [1], [3] , [4].

Такого рода условия встречаются, например, при решении задач, описывающих процесс диффузии частиц в турбулентной плазме, а также в процессах распространения тепла в тонком нагретом стержне, если задан закон $(\mu\left(t\right))$ изменения общего количества тепла стержня.

Рассмотрим в области $D_T=\{(x,t):\ \ 0<x<1,\ \ 0<t<T\}$ уравнение

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}+F(x,t) \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$v(0,t)-v(1,t)=\tau(t),\ \ 0\leq t\leq T \tag{2}$$

$$\int_{\alpha}^{1} v(x,t)dx=\mu\left(t\right),\ \ 0\leq t\leq T\,. \tag{3}$$

Будем искать непрерывное в $\overline{D}_T=\{(x,t):\ \ 0\leq x\leq 1,\ \ 0\leq t\leq T\}$ решение уравнения (1) с условиями (2), (3), удовлетворяющее начальному условию

$$v(x,0)=v_0(x),\quad 0\leq x\leq 1. \tag{4}$$

Очевидно, что необходимым условием существования непрерывного в $\overline{D_T}$ решения является выполнение условий согласования

$$\int_{\alpha}^{1} v_0(x)dx=\mu(0),\ \ v_0(0)-v_0(1)=\tau(0). \tag{5}$$

Пусть $F(x,t)$, $\tau(t)$, $\mu(t)$, $v_0(x)$- непрерывно дифференцируемые функции. Следуя В.А. Ильина [2], классическим решением задачи (1)-(5) назовем такую функцию $v(x,t)$, которая: 1) непрерывна в $\overline{D_T}$; 2) обладает в области D_T непрерывными производными первого порядка по t и непрерывными производными второго порядка по x; 3) удовлетворяет уравнению (1) с условиями (2)-(5) в обычном классическом смысле.

Задача (1)-(5) сводится к задаче с однородными граничными условиями (2),(3). В самом деле, учитывая, что $\mu(t)$ и $\tau(t)$ дифференцируемы, и полагая $v(x,t)=u(x,t)+V(x,t)$, где $V(x,t)=-\tau(t)x+\frac{1}{1-\alpha}\mu(t)+\frac{1}{2}\tau(t)(1+\alpha)$, получим для непрерывной в $\overline{D_T}$ функции $u(x,t)$ краевую задачу

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial u}{\partial t}=\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\ \ u(0,t)-u(1,t)=0,\\ &\int\limits_{\alpha}^{1} u(x,t)dx=0,\ \ u(x,0)=\varphi(x). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь

$$f(x,t)=F(x,t)+\frac{1}{2}\left(2x-1-\alpha\right)\frac{d\tau}{dt}-\frac{1}{1-\alpha}\frac{d\mu}{dt}\,,$$

$$\varphi(x) = v_0(x) + \tau(0)x - \frac{1}{1-\alpha}\mu(0) - \frac{1}{2}(1+\alpha)\tau(0),$$

причем

$$\varphi(0) - \varphi(1) = 0, \qquad \int_\alpha^1 \varphi(x)dx = 0.$$

Решение задачи (6), очевидно, есть сумма решений краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7}$$

в D_T

$$u(0,t) - u(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T \tag{8}$$

$$\int_\alpha^1 u(x,t)dx = 0, \quad 0 \le t \le T \tag{9}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1 \tag{10}$$

и задачи

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial u}{\partial t} = \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \;\; u(0,t) - u(1,t) = 0, \\ &\int\limits_\alpha^1 u(x,t)dx = 0, \;\; u(x,0) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Справедлива следующая

Теорема Пусть $0 < \alpha < 1, \alpha \notin Q$, $\varphi(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция и представима на отрезке $[0;\ 1]$ в виде регулярно сходящемся рядом

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[A_n \sin n\pi(2x-\alpha) + B_n \cos \tfrac{n\pi}{1-\alpha}(2x-1) +$$

$$+ C_n \cos \tfrac{(2n+1)\pi}{2\alpha}(2x-1)\Big]$$

где $\varphi(x) = v_0(x) + \tau(0)x - \frac{1}{1-\alpha}\mu(0) - \frac{1}{2}(1+\alpha)\tau(0)$. При каждом $0 \le \tau \le T$ функция $f(x,\tau)$ – непрерывно дифференцируемая и представима на отрезке $[0;\ 1]$ в виде регулярно сходящемся рядом

$$f(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[D_n(\tau) \sin n\pi(2x-\alpha) + E_n(\tau) \cos \tfrac{n\pi}{1-\alpha}(2x-1) +$$

$$+ F_n(\tau) \cos \tfrac{(2n+1)\pi}{2\alpha}(2x-1)\Big],$$

где $f(x,t) = F(x,t) + \frac{1}{2}(2x-1-\alpha)\frac{d\tau}{dt} - \frac{1}{1-\alpha}\frac{d\mu}{dt}$, причем $\int_\alpha^1 v_0(x)dx = \mu(0),\ \ v_0(0) - v_0(1) = \tau(0)$. Тогда решение задачи (1)–(4) представляется регулярно сходящимся в области $D_T = \{(x,t) :\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ рядом

$$v(x,\ t) = -\tau(t)x + \tfrac{1}{1-\alpha}\mu(t) + \tfrac{1}{2}\tau(t)(1+\alpha) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \Big[A_n e^{-4\pi^2 n^2 t} \sin n\pi(2x-\alpha) + B_n e^{-\left(\frac{2\pi n}{1-\alpha}\right)^2 t} \cos \tfrac{n\pi}{1-\alpha}(2x-1) +$$

$$+ C_n e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{\alpha^2}t} \cos \tfrac{(2n+1)\pi}{2\alpha}(2x-1)]\Big] + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\int\limits_0^t D_n(\tau) e^{-4\pi^2 n^2 t} d\tau \sin n\pi(2x-\alpha) +$$

$$+ \int\limits_0^t E_n(\tau) e^{-\left(\frac{2\pi n}{1-\alpha}\right)^2 t} d\tau \cos \tfrac{n\pi}{1-\alpha}(2x-1) + \int\limits_0^t F_n(\tau) e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{\alpha^2}t} d\tau \cos \tfrac{(2n+1)\pi}{2\alpha}(2x-1).\Big]$$

Литература

1. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием.// Дифференциальные уравнения. 1977. Т.13. №2. С. 294-304.
2. *Ильин В.А.Успехи математических наук. 1960. Т.15. вып. 2(92).*
3. *Касимов Ш.Г., Рахманов Ф.Д. Об одной задачи теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями типа Самарского-Ионкина. Ташкент, Вестник НУУз, 2014 г, №2-1. С. 9-14.*
4. *Рахманов Ф.Д. Задача на собственные значения с двумя нелокальными краевыми условиями. Ташкент, Вестник НУУз, 2014 г, №2-1. С. 78-82.*

К ТЕОРИИ СИММЕТРИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ОСОБЕННОСТЬЮ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Л.Н.РАДЖАБОВА, Г.Н.ШУКУРОВА

Таджикский национальный университет

Через $L = \{x : -a < x < a\}$ обозначим множество точек на вещественной оси. На L рассмотрим интегральное уравнение

$$u(x) = \int_{-x}^{x} \left[p + \ln\left|\frac{x}{t}\right|\right] \frac{u(t)}{|t|} dt = f(x), \tag{1}$$

где p, q – постоянные числа, $f(x)$ – заданная функция на L, $u(x)$ – искомая функция.

Интегральное уравнение (1) на множестве точек $\Gamma = \{x : 0 < x < a\}$ при $q = 0$ является модельным интегральным уравнением типа Вольтерра второго рода с фиксированной левой граничной точкой, теория которой построена в [1]. Исследованию двумерных интегральных уравнений в данном направлении посвящена работа [4] .

Решение интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций $u(x) \in C(\overline{L})$, обращающихся в нуль в начале координат с асимптотическим поведением

$$u(x) = o(|x|^{\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad x \to 0$$

Доказано, в зависимости от знаков параметров интегрального уравнения и корней характеристического уравнения, решение неоднородного интегрального уравнения (1) может содержать произвольные постоянные и выделяются случаи, когда решение единственно . Полученные представления многообразия решений через произвольные постоянные дают возможность для интегрального уравнения (1) ставить и исследовать краевые задачи, когда условия заданы на особой точке .

Задача N_1.Требуется найти решение интегрального уравнения (1) из класса $C(L)$, обращающихся в нуль в точке $x = 0$ при выполнении условий $p < 0$, $p^2 = 2q$ по граничным условиям:

$$\Big[|x|^{-|p|}[(1 + \ln|x|)u(x) - \ln|x| D_x(u(x))]\Big]_{x=0} = A_1,$$

$$\Big[|x|^{-|p|}[D_x(u(x)) - u(x)]\Big]_{x=0} = B_1,$$

где A_1 и B_1 заданные числа.

Литература

1. Раджабов Н. Интегральные уравнения типа Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения. - Душанбе: Деваштич, 2007, 222 с.

2.Раджабова Л.Н., Шукурова Г.Н. К теории одного класса симметричного интегрального уравнения Вольтерра с внутренней сингулярной и логарифмической особенностью.- Вестник Таджикского технического университета. Научно-теоретический журнал, 2015г.№3 (31), стр.10-13.

3.Раджабова Л.Н., Шукурова Г.Н. К теории двумерных уравнений типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью в ядре.- Мат-лы междунар. науч. конф. посвящ. 75 – летию доктора физ.– мат. наук, проф. Сабирова Т.С. – Душанбе, 2015 г., с.143-144.

4.Раджабова Л.Н., Раджабов Н. К теории одного класса двумерного слабо - сингулярного интегрального уравнения типа Вольтерра на первом квадранте. ДАН РТ, 2014 г., том 57, №6, с. 443 - 451.

К ТЕОРИИ ОДНОГО КЛАССА ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ДВУМЯ ОСОБЕННЫМИ ЛИНИЯМИ

РАДЖАБОВА Л.Н.
Таджикский национальный университет

Через Dобозначим прямоугольник $D = \{a < x < a_1,\ b < y < b_1\}$,соответственно обозначим$\Gamma_1 = \{a < x < b_1,\ y = b\}$, $\Gamma_2 = \{x = a,\ b < y < b_1\}$.

В области D рассмотрим интегральное уравнение:

$$\begin{gathered} u(x,y) + A_1\int\limits_a^x \frac{u(t,y)}{t-a}dt + A_2\int\limits_a^x \ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\frac{u(t,y)}{t-a}dt + B_1\int\limits_b^y \frac{u(x,s)}{s-b}ds + B_2\int\limits_b^y \ln\left(\frac{y-b}{s-b}\right)\frac{u(x,s)}{s-b}ds + \\ +C_1\int\limits_a^x \frac{dt}{t-a}\int\limits_b^y \frac{u(t,s)}{s-b}ds + C_2\int\limits_a^x \frac{dt}{t-a}\int\limits_b^y \ln\left(\frac{y-b}{s-b}\right)\frac{u(t,s)}{s-b}ds + C_3\int\limits_a^x \ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\frac{dt}{t-a}\int\limits_b^y \frac{u(t,s)}{s-b}ds + \\ +C_4\int\limits_a^x \ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\frac{dt}{t-a}\int\limits_b^y \ln\left(\frac{y-b}{s-b}\right)\frac{u(t,s)}{s-b}ds = f(x,y) \end{gathered} \tag{1}$$

где $A_i,\ B_i,\ C_j,\ \ i = 1,\ 2,\ j = \overline{1,\ 4}$- заданные числа, $f(x,y) \in C\left(\overline{D}\right)$- заданная функция.

Решение уравнения (1) будем искать в классе функций $u(x,y) \in C\left(\overline{D}\right)$, обращающихся в нуль на линиях Γ_1 и Γ_2.

Интегральное уравнение (1) в области $D = \{a < x < a_0,\ b_0 < y < b\}$ при $A_2 = B_2 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ является модельным двумерным интегральным уравнением типа Вольтерра с фиксированными граничными особенными линиями, теория которого изучена в [3,4].

В работе представлено исследование и решение задачи типа Коши для уравнения (1) в случае, когда коэффициенты A_1, A_2 и B_1, B_2 имеют различные знаки и выполнено условие

$$C_2 = A_1B_1, \quad C_2 = A_1B_2, \quad C_3 = A_2B_1, \quad C_4 = A_2B_2, \tag{2}$$

Доказано, что когда параметры интегрального уравнение (1) связаны между собой определенным образом, в зависимости от знаков данных параметров и корней характеристического уравнений, решение неоднородного уравнения может содержать несколько произвольных функций, зависящих от одной переменной. Полученные представления многообразия решений через произвольные функции дают возможность для интегрального уравнения (1) ставить и исследовать краевые задачи, когда условия заданы на особых многообразиях.

Задача K_2. Требуется найти решение интегрального уравнения (1) из класса $C(\overline{D})$ при выполнении условий (2), также $A_1 < 0$, $A_2 > 0$, $B_1 > 0$, $A_1^2 - 4A_2 > 0$, $B_1^2 = 4B_2$, по граничным условиям:

$$\left[(x-a)^{-\lambda_1}(\lambda_2\psi(x,y) - D_x^a(\psi(x,y)))\right]_{x=a} = \mu_1 y,$$

$$\left[(x-a)^{-\lambda_2}(-\lambda_1\psi(x,y) + D_x^a(\psi(x,y)))\right]_{x=a} = \mu_2 y,$$

где $\mu_j(y)$, $j = 1, 2$ – заданные функции точек Γ_2.

Литература

1.Раджабова Л.Н. К теории двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью в ядре//Вестник Таджикского технического университета,Душанбе, 2014, №3, (27), стр. 6 -10

2.LutfiyaRajabova. About a class of two Dimensional Volterra type Integral Equations with Singular Boundary lines//Current Trends in Analysis and its Applications. Proceedings of the 9-th ISAAC Congress Krakow, 2013.2015, XVI , 892p. Aproductof Birkhauser Basec, p.123 - 133

3. Rajabova L., Ronto M., Rajabov N. On some two dimensional Volterra type linear integral equation with super – singularity //Mathematical Notes. Miscolc, 2003, v4, №1, p. 65-76.

4. Раджабов Н.Раджабова Л. Н. Исследование одного класса двумерного интегрального уравнения с фиксированными сингулярными ядрами, связанное с гиперболическими уравнениями//ДАН России, 2003, т.391, №1. с.20 – 22.

О ЛОКАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ТИПА ФЛОРИНА

Тахиров А.Ж.[1]

[1] Институт Математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан
[1]inter_uz@yahoo.com

Рассматривается задача процесса распространения тепла в средах со степенной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры [1]. При этом температура $u(t,x)$ и закон движения фронта температурной волны $x = s(t)$ являются решением задачи с неизвестной границей

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x, \quad 0 < t < T_0, \quad 0 < x < s(t),$$
$$u(t, s(t)) = 0, \quad u^\sigma u_x(t, s(t)) = 0, \quad 0 < t < T_0,$$
$$u(t, 0) = (T_0 - t)^{-\frac{1}{\sigma}}, \quad 0 < t < T_0,$$

где $\sigma > 0, s(0) = 0$.

Чтобы построить приближенное автомодельное решение задачи применим метод теплового баланса [2] и ищем решение в виде

$$u(t,x) = (T_0 - t)^{-\frac{1}{\sigma}} \left(1 - \frac{x}{s(t)}\right)^{\frac{2}{\sigma}}.$$

Так как $s(0) > 0$ при $t \to 0$, то (4) удовлетворяет условиям (2), (3).

Интегрируя (1) по x в пределах от 0 до $s(t)$, находим

$$\int\limits_0^{s(t)} v_t(t,x)dx = -v^\sigma(t,0)v_x(t,0).$$

Выполняя условие интегрального теплового баланса (5) для функции $u(t,x)$, определенный в виде (4), после некоторых преобразований получим уравнение относительно $s(t)$

$$\dot{s}(t)s(t) + \frac{(T_0 - t)^{-1}}{\sigma} s^2(t) = \frac{2 + \sigma}{(T_0 - t)\sigma}.$$

Граничная функция (3) возрастает до бесконечности при $t \to T_0^-$. Тепловые возмущения из области локализации $0 < x < s(t)$ не распространяются в окружающее холодное пространство. Автомодельное решение (6) асимптотически устойчиво.

Литература

1. *Самарский А.А. и др.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
2. *Лыков А.В.* Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности // Изв.АН СССР. Энергетика и транспорт. 1970. є 5. С. 109-150.

О КРОСС-ДИФФУЗИОННЫХ МОДЕЛЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ БИОЛОГИИ

Тахиров Ж.О.[1]

[1] Институт Математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан
[1]prof.takhirov@yahoo.com

Математические модели активных сред[1,2], представляющие собой двух или трех компонентную систему параболических уравнений типа реакция-диффузия были предложены и исследованы с точки зрения волновых режимов.

В настоящей работе мы попробуем усовершенствовать математическую модель, построенную в работах [1,2] и предлагаем новый модель в виде задачи со свободной границей.

Найти функции $(s(t), u(t,x), v(t,x), w(t,x))$, удовлетворяющие условиям

$$u_t = d_1 u_{xx} + b_1 u_x + f_1(t,x,u,v), \text{ в } D = \{(t,x) : 0 < t, 0 < x < s(t)\}$$
$$v_t = d_2 v_{xx} + b_2 (wv)_x + f_2(t,x,u,v), \text{ в } D = \{(t,x) : 0 < t, 0 < x < s(t)\}$$
$$w_t = d_3 w_{xx} + b_3 w_x + f_3(t,x,u,w), \text{ в } Q = \{(t,x) : 0 < t, 0 < x < l\}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad v(0,x) = v_0(x), \quad 0 \le x \le s_0 = s(0),$$

$$w(0,x) = 0, \quad 0 \le x \le s_0, w(0,x) = w_0(x), \quad s_0 \le x \le l,$$

$$u_x(t,0) = 0, \quad u(t,s(t)) = 0, \quad u(t,x) \equiv 0, \quad s(t) < x < l, \quad t \ge 0,$$

$$v_x(t,0) = 0, \quad v(t,s(t)) = 0, \quad v(t,x) \equiv 0, \quad s(t) < x, \quad t \ge 0,$$

$$w(t,0) = 0, \quad w(t,l) = m, \quad t \ge 0,$$

$$\dot{s}(t) = -\mu[d_1 u_x(t,s(t)) + d_2 v_x(t,s(t))], \quad t > 0.$$

Здесь

$$f_1(t,x,u,v) = a_1(1 - u - k_1 v)u - c_1 \frac{uv}{1+ku},$$
$$f_2(t,x,u,v) = a_2(1 - v - k_2 u)v + c_2 \frac{uv}{1+ku},$$
$$f_3(t,x,u,v) = a_3 w + f_0(u),$$

$$u_0(s_0) = 0, v_0(s_0) = 0, w_0(s_0) = 0, w_0(l) = m, w_0'(x) \ge 0, u_0'(0) = 0, v_0'(0) = 0, w_0(0) = 0,$$

$x = s(t)$ - свободная граница, которая представляет фронт распространения популяций и определяется вместе с функциями (u,v,w), $u(t,x)$ - плотность жертв, $v(t,x)$ - плотность хищников, $w(t,x)$ - концентрация аттрактанта, $d_i (i = 1,2,3)$ - коэффициенты диффузии, b_i - коэффициенты переноса, a_i - коэффициенты реакции, $f_i = c_j \frac{uv}{1+ku}, j = 1,2$ - функции интенсивности (отклика), f_3 - локальная кинетика аттрактанта.

В работах [1,2] для (1) в прямоугольной области рассмотрена задача типа Неймана, изучены волновые автомодельные решения и фазовые кривые, проведены некоторые численные эксперименты.

Нами исследована проблема однозначной глобальной разрешимости задачи со свободной границей (1)-(8). Исследована поведение (в т.ч. асимптотика в бесконечности) свободной границы, установлены априорные оценки норм Гельдера, доказаны теоремы единственности и существования.

Литература

1. *Chakraboty A. et al.* Predator-prey model with prey-taxis and diffusion // Math. and comp.model. 2007. T.46. C. 482-498.

2. *Sapoukhina N. et al.* The Role of Prey Taxis in Biological Control: A Spatial Theoretical Model // The American Naturalist. 2003. T. 162, є 1. C. 61-76.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ФЛОРИНА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Тураев Р.Н.[1], Тураев К.Н.[2]

[1] Институт Математики АНРУз, Узбекистан,Ташкент.
[2] Ташкентского Государственного Технического университета Термезского филиала , Узбекистан,Ташкент.
[1]rasul.turaev@mail.ru,[2]k_turaev@mail.ru

В современной науке наблюдается повышенный интерес задачи для нагруженных параболических уравнений [1]. Задачи со свободной границей для нагруженного параболического уравнения с классическими граничными условиями рассмотрена в работах[2,3].

Требования современной науки и техники приводят к необходимости рассматривать нелокальные задачи [1-4].

А задачи со свободной границей для нагруженного параболического уравнения с нелокальными граничными условиями относятся к категории малоизученных и имеют конкретные приложения [4].

В настоящей работе рассматривается нелокальная задача со свободной границей для нагруженного параболического уравнения.

Требуется найти пару функций $(s(t), u(t,x))$, такую что непрерывно дифференцируемая функция $s(t)$ определена на отрезке $0 < t \le T, s(0) = s_0 > 0, 0 < \dot{s}(t) \le N$, а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \le T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнение

$$a(t,x)u_{xx}(t,x) - u_t(t,x) = F(u(t,0)), \quad (t,x) \in D \tag{1}$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le s_0, \tag{2}$$

$$u_x(t,0) = \psi_1(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$\alpha u(t,0) = u(t,s(t)), \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$u_x(t,s(t)) = \psi_2(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала задача (1)-(5) сводится типа задача Стефана и доказывается их эквивалентность. Далее, устанавливается априорные оценки свободной границей и решений и их производных в норм Гельдера. На основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказывается единственности решения первоначальной задачи. И в итоге доказывается существование решения полученный и первоначальной задачи при помощи методом неподвижной точки Шаудера[4].

Литература

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. Москва: Наука, 2012. 232 с.
2. *Adrina C.Briozzo., Domingo A.Tarzia.* A one-phase Stefan problem for a non-classical heat equation with a heat flux condition on the fixed face // App.Math.and Com. 2016. No.182, v 5. P. 809-818.
3. *Adrina C.Briozzo., Domingo A.Tarzia.* Existence and uniqueness for one-phase Stefan problems of non-classical heat equations with temperature boundary condition at a fixed face // El.Jour.Differ.Eq. 2016. No.206, v 21. P. 1-16.
4. *Тахиров Ж.О.* Неклассические нелинейные задачи со свободной границей. -Ташкент: 2014, – 240 с.

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ФЛОРИНА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Тураев Р.Н.

Институт Математики АНРУз, Узбекистан,Ташкент
rasul.turaev@mail.ru

Теория классической разрешимости задачи Стефана и других задач со свободными границами для параболических уравнений построена в работах Л.Рубинштейна [1], А.Мейерманова [2], А.Фридмана [3], и др.

Особенность данной задачи состоит в переменных размерах области, в которой иссле-дуется температурное поле, за счет наличия подвижной границы раздела фаз, изучение поведения которой с течением времени и составляет основную цель решения. Физические свойства среды, находящейся в разных фазах будут различными. Поэтому задача Флорина характеризуется существенной геометрической и физической нелинейностью, что крайне затрудняет ее решение.

Отличительной особенностью однофазных задач является монотонность свободной границы и, как следствие этого, ограниченность первой производной решения по пространственной переменной на свободной границе.

В настоящей работе изучается задача со свободной границей типа Флорина для квазилинейного параболического уравнения.

Постановка задачи. Требуется найти на некотором отрезке $0 < t \leq T$ непрерывно дифференцируемую функцию $s(t)$, такую, что $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \leq N$, $s(t)-$удовлетворяет условию Гельдера, а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \leq T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t(t,x) = a(u)u_{xx}(t,x), \quad (t,x) \in D \tag{1}$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \tag{2}$$

$$u_x(t,0) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

$$u(t,s(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

$$u_x(t,s(t)) = p, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{5}$$

Всюду в работе предполагаем, что для заданных функций выполнены следующие основные условия:

1. Функции $a(u)$ и $a'(u)$ определены для любого значения аргумента и ограничены на любом замкнутом множестве аргумента, причем $a(u) \geq a_0 > 0, a'(u) > 0$.

2. Постоянные s_0, p удовлетворяют неравенствам

$$s_0 > 0, p > 0.$$

3. $0 \leq \varphi(x) \leq N(s_0 - x), N = \max\limits_{0 \leq x \leq s_0} |\varphi(x)(s_0 - x)^{-1}|$.

4.Выполнены условия согласования в угловых точках (в т.ч. рассматриваемых вспомогательных задачах). В частности

$$\varphi'(0) = \psi(0), \varphi(s_0) = 0, \varphi'(s_0) = p.$$

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала устанавливаются некоторые априорные оценки. Чтобы оценить $u_x(t,x)$, а также исследовать характер и гладкость свободной границы $s(t)$, мы перейдем к задаче типа Стефана. Для этого нужно будет дифференцировать уравнение (1) по x в области D.

Продифференцировав уравнение (1) в D по x, для $u_x(t,x) = v(t,x)$ получим следующую задачу

$$v_t(t,x) = a(u)v_{xx}(t,x) + a'_u(u)v(t,x) \cdot v_x(t,x), \quad (t,x) \in D \tag{6}$$

$$v(0,x) = \varphi'(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \tag{7}$$

$$v(t,0) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{8}$$

$$v(t,s(t)) = p, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{9}$$

$$p \cdot \dot{s}(t) = -a(0)v_x(t,s(t)), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{10}$$

При исследовании задачи используем идеи и результаты работы [4,5]. Сначала доказывается эквивалентность задач (6)-(10) и (1)-(5), а затем устанавливаются некоторые априорные оценки норм Гельдера для решения задачи (6)-(10) . Для решения задачи типа Стефана устанавливаются априорные оценки старших производных. На основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказывается единственность решения первоначальной задачи.

И в итоге доказывается существование решения полученной и первоначальной задачи методом неподвижной точки Шаудера [4,5].

Литература

1. *Рубинштейн Л.И.* Проблема Стефана. Рига: Звайгзне, 1967.–468 с.

2. *Мейрманов А.М.* Задача Стефана: Наука, 1968. 428 с.

3. *А.Фридман.* Уравнения с частными производными параболического типа. Новосибирск: Наука, 1986. 239 с.

4. *Кружков С.Н.* Нелинейные параболические уравнения с двумя независимымс переменными // Труды Моск.Матем.Общ-ва. 1967. Т. 16, No 3. С. 329-346.

5. *Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н.* Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения // Вест.Сам.гос.тех.ун-та.Сер.Физ.-мат.науки. 2012. Т. 28, No 3. С. 8-16.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ БИСИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ КРУГА

Турсунов Д.А.[1], Орозов М.О.[2],

Ошский государственный университет, Кыргызстан, Ош
[1]tdaosh@gmail.com, [2]gnezdo1983@mail.ru

Работа посвящена построению полного асимптотического разложения решения бисингулярной задачи Неймана для линейного неоднородного эллиптического уравнения второго порядка в круге. Асимптотическое разложение решения бисингулярной задачи строится обобщенным методом пограничных функций. Полученное решение является асимптотическим в смысле Эрдей. А также асимптотический ряд представляет собой ряд Пюизе. Причем главный член асимптотического разложения решения имеет отрицательную дробную степень по малому параметру. Полученное асимптотическое разложение решения краевой задачи Неймана обосновано принципом максимума.

Как нам известно, краевые задачи для эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных занимает особое место в математике. К ней непосредственно сводятся многие задачи естествознания. Различные задачи для эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных исследовались многими авторами, и библиография по этому вопросу обширна и достаточно известна. Однако последнее время стали привлекать к себе так называемые бисингулярные задачи, в которых одна особенность связана с сингулярной зависимостью решения от малого параметра, а другая - соответствующее невозмущенное уравнение имеет не гладкое решение [1,2,3].

В работе [1] и в цитируемых в этих работах методом согласования исследованы асимптотические поведения решений различных классов бисингулярных задач. Целью исследования является развитие асимптотического метода пограничных функций. А в работе [4] с помощью обобщенного метода пограничных функций была исследована бисингулярная задача Дирихле. Мы продолжаем исследование бисингулярных задач с помощью обобщенного метода пограничных функций. В данной работе доказывается применимость данного метода к задаче Неймана.

Исследуем задачу Неймана для круга

$$\varepsilon\Delta u_\varepsilon(\rho,\varphi)-(1-\rho)^n(\rho-\alpha)^{2m}p(\rho,\varphi)u_\varepsilon(\rho,\varphi)=f_\varepsilon(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in D, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon(1,\varphi)}{\partial\rho}=\psi_\varepsilon(\varphi), \tag{2}$$

где $0<\varepsilon$ — малый параметр, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\dfrac{\partial}{\rho\partial\rho}+\dfrac{\partial^2}{\rho^2\partial\varphi^2}$ — оператор Лапласа в полярной системе координат, $0<\alpha<1$, $D=\{(\rho,\varphi)\,|\,0<\rho<1,\,0\leqslant\varphi<2\pi\}$, $p(\rho,\varphi)>0$ $(\rho,\varphi)\in\overline{D}$, $p\in C^\infty(\overline{D})$, $n,\ m\in N$, $\psi_\varepsilon(\varphi)=\sum_{k\geq0}\varepsilon^k\psi_k(\varphi)$, $\psi_k\in C^\infty[0,2\pi]$, $f_\varepsilon(\rho,\varphi)=\sum_{k\geq0}\varepsilon^k f_k(\rho,\varphi)$, $f_k\in C^\infty(\overline{D})$, $f_0(1,\varphi)\neq0$, $f_0(\alpha,\varphi)\neq0$. $\psi_\varepsilon(\varphi)$, $f_\varepsilon(\rho,\varphi)$, $p(\rho,\varphi)$ — заданные функции, $u(\rho,\varphi,\varepsilon)$ — искомая функция.

Особенности задач. Первая сингулярность — решение предельного уравнения $(\varepsilon=0)$:

$$u(\rho,\varphi,0)=-\frac{f_0(\rho,\varphi)}{(1-\rho)^n(\rho-\alpha)^{2m}p(\rho,\varphi)},$$

не удовлетворяет краевому условию.

Вторая сингулярность — решение предельного уравнения не является гладкой функцией, внешнее разложение решения задач в виде степенных по ε рядов имеют особенности вида:

$$U_\varepsilon(\rho,\varphi)=\frac{1}{(1-\rho)^n(\rho-\alpha)^{2m}}\sum_{k\geq0}\frac{\varepsilon^kF_k(\rho,\varphi)}{(1-\rho)^{(n+2)k}(\rho-\alpha)^{(2m+2)k}},\quad \varepsilon\to0,$$

где $F_k\in C^\infty(\overline{D})$.

Следовательно, исследуемая задача Неймана является бисингулярным, по терминологии А.М. Ильина [1,2].

Требуется построить полное асимптотическое разложение решения задачи Неймана (1), (2). Нами доказана

Теорема. *Для решения бисингулярной задачи Неймана (1), (2) при $\varepsilon \to 0$ справедливо асимптотическое разложение*

$$u_\varepsilon(\rho,\varphi)=\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\chi_1(\rho)\sum_{k\geq -n}\mu^k w_k(\tau,\varphi)+\chi_2(\rho)\sum_{k\geq -2m}\lambda^k q_k(\eta,\varphi), \quad \varepsilon\to 0,$$

где $v_k\in C^\infty(\overline{D})$, $\lim\limits_{\tau\to+\infty} w_k(\tau,\varphi)=0$, $\lim\limits_{\eta\to\pm\infty} q_k(\eta,\varphi)=0$,
$1-\rho=\mu\tau$, $\rho-\alpha=\lambda\eta$, $\mu=\sqrt[n+2]{\varepsilon}$, $\lambda=\sqrt[2m+2]{\varepsilon}$, $\chi_{1,2}(\rho)$ *— функции срезки,*
$\chi_{1,2}(\rho)\in[0,1]$, $\chi_{1,2}\in C^\infty[0,1]$,

$$\chi_1(\rho)=1 \quad \text{при } 0\leq 1-\rho\leq\delta/3, \quad \text{и} \quad \chi_1(\rho)=0 \text{ при } 2\delta/3\leq 1-\rho,$$

$$\chi_2(\rho)=1 \quad \text{при } |\rho-\alpha|\leq\delta/3, \quad \text{и} \quad \chi_2(\rho)=0 \text{ при } 2\delta/3\leq|\rho-\alpha|,$$

$(0,\min\{\alpha/2,(1-\alpha)/2\})\ni\delta$ *— достаточно малое число, независящее от* ε.

Литература

1. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 336 с.
2. *Ильин А.М., Данилин А.Р.* Асимптотические методы в анализе. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 248 с.
3. *Розов Н.Х.* Некоторые замечания о бисингулярных краевых задачах // Современная математика и ее приложения. 2005. Т. 35. Часть 2. С. 44–47.
4. *Турсунов Д.А., Эркебаев У.З.* Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения с особенностями // Уфимский математический журнал. 2016. Т. 8, No. 1. С. 102–112.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Б.Э. ЭШМАТОВ, Н.ЖУРАЕВ.
Каршинский инженерно-экономический институт.Узбекистан г.Карши
E-mail: eshmatovbahodir @mail.ru

В данной работе рассматривается нестационарное уравнение четвертого порядка в прямоугольной области.

В области $\Omega=\{(x,t):0<x<p,\ \ 0<t<T\}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f\left(x,t\right). \tag{1}$$

где $f\left(x,t\right)$ - заданная функция

<u>Задача</u>. Найти в области Ω решение $u\left(x,t\right)\in C^{2,3}_{x,t}\left(\bar{\Omega}\right)$, $u_{xxxx}\in C\left(\Omega\right)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u\left(0,t\right)=0,\ \ u\left(p,t\right)=0,\ \ 0\leq t\leq T, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(0,t\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(p,t\right)=0,\ \ 0\leq t\leq T, \tag{3}$$

и начальным условиям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right),\ \ 0\leq x\leq p, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\left(x,0\right)=\psi\left(x\right),\ \ 0\leq x\leq p \tag{5}$$

В работе [3] для уравнения (1) изучена краевая задача с однородными граничными условиями и с начальными условиями содержащие производные по t первого и второго порядков от искомой функции.

Доказывается следующие теоремы.
Теорема-1. Решение задачи (1) - (5) единственно, если оно существует.
Теорема-2. Если: 1) $f(x,t) \in C^1\left(\bar{\Omega}\right)$, $f(0,t) = f(p,t) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} \in Lip_\alpha[0,p]$ равномерно по t $0 < \alpha < 1$;
2) $\frac{\partial f}{\partial x} \in L_2(\Omega)$, 3) $\varphi(x) \in W_2^3(0,p)$, $\varphi(0) = \varphi(p) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(p) = 0$
4) $\psi(x) \in W_2^1(0,p)$, $\psi(0) = \psi(p) = 0$, то решение (1)–(5) существует.

Литература

1. Бекиев А.Б. Краевая задача для уравнения четвертого порядка.||Тез. Докл. Международ. Конф., посвященной памяти акад. А.А.Самарского к 90-летию со дня рождения. Москва , 2009, с.140-141.
2. Отарова Ж.А. Разрешимость и спектральные свойство краевых задач для уравнения смешанного типа четвертого порядка. Автореф. дисс.., канд. Физ-мат наук, Тошкент. 2009.16с.
3. Аманов Д., Жураев Н., Эшматов Б.Э. Краевая задача для уравнения колебания балки // Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых. Ташкент 23-25 октября metricconverterProductID2014 г2014 г. с .39.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Фаязова З.К.

Ташкентский государственный технический университет, Узбекистан, Ташкент
z.fayazova@yahoo.com

Данная работа посвящена исследованию задачи Дирихле для системы нелинейных уравнений в ограниченной области. Рассматривается следующая система нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(v^{m_1-1}\left|\frac{du}{dx}\right|^{P-2}\frac{du}{dx}\right) - u^{P_1} = 0, \\ \frac{d}{dx}\left(u^{m_2-1}\left|\frac{dv}{dx}\right|^{P-2}\frac{dv}{dx}\right) - v^{P_2} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

в отрезке $(0,a)$, $a < \infty$. Предполагается, что решение данной системы уравнений $u(x)$, $v(x)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{array}{ll} u(0) = C_1\,, & v(0) = C_2, \\ u(a) = 0\,, & v(a) = 0, \end{array} \tag{2}$$

где C_1, C_2 положительные константы.

Исследованию нелинейных уравнений и систем уравнений различных типов (обыкновенные дифференциальное уравнения, уравнения в частных производных) посвящена работы многих авторов. См., например работы М.Арипов [1] и Jian Wang [2] и цитированную там литературу.

Нами для задачи (1), (2) получена вид решения, еҷ существования, теоремы сравнения и оценка асимптотического типа.

Литература

1. Арипов М.М. Методы эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач. - Ташкент, Фан, 1988, 137 с.
2. Jian Wang. Global existence and blow-up solutions for doubly degenerate parabolic system with nonlocal source // Journal of Math. Analysis and Applications. 374 (2011) 290-310.

Вторая краевая задача для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа

Хашимов Абдукомил Рисбекович
Ташкентский финансовый институт
E-mail: abdukomil@yandex.ru

Целью данной работы является исследование уравнения

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}-\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{1}$$

в области $\Omega=\{(x,y,z):0<x<1,\ 0<y<1,\ 0<t\leq T\}$, с краевыми условиями

$$u(x,y,0)=0,$$

$$u_x(0,y,t)=\varphi_1(y,t),\ u_{xx}(0,y,t)=\varphi_2(y,t),\ u_{xx}(1,y,t)=\varphi_3(y,t),$$
$$u_y(x,0,t)=\psi_1(x,t),\ u_{yy}(x,0,t)=\psi_2(x,t),\ u_{yy}(x,1,t)=\psi_3(x,t),$$

где

$$\varphi_1(y,t)\epsilon C^{0,2}_{y,t}(\overline{\Omega_1}),\ \psi_1(x,t)\epsilon C^{0,2}_{x,t}(\overline{\Omega_3}),\varphi_2(y,t)\epsilon C(\overline{\Omega_1}),$$
$$\varphi_3(y,t)\epsilon C^{0,1}_{y,t}(\overline{\Omega_2}),\ \psi_2(x,t)\epsilon C(\overline{\Omega_3}),\psi_3(x,t)\epsilon C^{0,1}_{x,t}(\overline{\Omega_4}).$$

Здесь

$$\Omega_0=\{(x,y,t):0<x<1,0<y<1,t=0\},$$
$$\Omega_1=\{(x,y,t):x=0,0<y<1,0<t\leq T\},$$
$$\Omega_2=\{(x,y,t):x=1,0<y<1,0<t\leq T\},$$
$$\Omega_3=\{(x,y,t):0<x<1,y=0,0<t\leq T\},$$
$$\Omega_4=\{(x,y,t):0<x<1,y=1,0<t\leq T\}.$$

Уравнения (1) является обобщениям уравнение

$$u_{xxx}-u_t=0 \tag{2}$$

в многомерном пространстве. Уравнения (2) была исследована в работе L.Cattabriga (см.[1]). В своей работе он построил фундаментальные решения уравнения (2), кроме того разработал теория потенциалов и методы построение регулярных решений краевых задач и задачи Коши.

Отметим, что решения уравнения (1) и линейного уравнения Захарова-Кузнецова

$$u_t+u_{xxx}+u_{xyy}=0. \tag{3}$$

имеют аналогичные асимптотические свойства на бесконечности (см.[2]). Уравнения Захарова-Кузнецова (3) является одним из вариантов обобщения уравнение Кортевеге-де-Фриза в многомерном пространстве и описывает ионно-акустические волновые процессы в плазме [3].

В работе доказано однозначное разрешимость задачи методом интегралов энергии и методом потенциала.

Литература

1. L.Cattabriga. Potenzialli di linia e di domino per egutions nom parabolicheo in due variabilli a caracteristiche multiple. Rendi del Scm. Mat. Della univ. di Padova. 1961. Vol.3, p.1-45.

2. С.Абдиназаров, З.А.Собиров. О фундаментальных решениях уравнения с кратными характеристиками третьего порядка в многомерном пространстве. Труды межд. науч. Конференции "Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики". Ташкент 2004, 12-13 с.

3. С. П. Попов, "Особенности численного моделирования двухсолитонных решений уравнения Захарова-Кузнецова". Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 39:10 (1999), 1749-1757 с.

О ЗАДАЧЕ ТИПА ДИРИХЛЕ С ВНУТРЕННИМ УСЛОВИЕМ

Ходжаниязов А.Г.[1], Урозматов Ш.Т.[2],

[1] Нукусский государственный педагогический институт, Узбекистан, Нукус
[2] Нукусский государственный педагогический институт, Узбекистан, Нукус
[1]akhodja@umail.uz, [2]ushoxrux@umail.uz

Задача. В области найти собственные значения и собственные функции уравнения

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+a\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\lambda u=0, \tag{1}$$

удовлетворяющие условиям

$$u\left|_{\partial\Omega}\right.=0, \quad u\left(0,y\right)=0, \tag{2}$$

где $a \in R$ а λ-вещественный спектральный параметр.

Нетривиальные решения задачи (1),(2) будем искать методом разделения переменных в виде $u\left(x,y\right) = X\left(x\right)Y\left(y\right)$. Тогда исходная задача приводится к следующим задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$X''' - \mu X' + \lambda X = 0, \quad X\left(\pm 1\right)=0, \quad X\left(0\right)=0. \tag{3}$$

$$Y'' + aY' + \mu Y = 0, \quad Y\left(-1\right)=0, \quad Y\left(1\right)=0, \tag{4}$$

где постоянная μ будет определена позднее.

Учитывая различное расположение корней характеристического уравнения, находим, что $\mu_l = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{2}\right)^2, l = 1,2,...$ Собственными функциями задачи (4) будут

$$Y_l\left(y\right)=\exp\left(-\frac{a}{2}\right)y\sin\frac{l\pi}{2}\left(y-1\right), l=1,2,...$$

Собственными функциями задачи (3) будут

$$X_k\left(x\right)=e^{p_{kl}x}\sin k\pi x, \quad , p_{kl}=\frac{\pm\sqrt{a^2+3\mu_l^2+3(k\pi)^2}}{3}, \quad k,l=1,2, ...$$

Для поставленной задачи (1) и (2) собственные функции имеют вид

$$u_{kl}\left(x,y\right)=e^{p_{kl}x-\frac{a}{2}y}\sin k\pi x\sin\frac{l\pi}{2}\left(y-1\right), \quad k,l=1,2,....$$

Теорема 1.
Система функций

$$Y_l\left(y\right)=\exp\left(-\frac{a}{2}y\right)\sin\frac{l\pi}{2}\left(y-1\right), \; l=1,2,...,$$

полна в $L_2\left(-1,1\right)$.

Литература

1. *Джураев Т.Д.* О спектральных задачах для уравнений третьего порядка составного типа // ДАН РУз. 2006. є 2. С. 5-8.
2. *Ходжаниязов А.Г.* О базисности системы функций одной спектральной задачи. "Современные проблемы математики, механики и их приложений". Тезисы докладов международной конференции, г. Москва, -2009. С. 227-228.

3. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND DYNAMICAL SYSTEMS

Self-adjoint fourth order differential operators with eigenvalue parameter dependent and periodic boundary conditions

B.Moletsane [1], B.Zinsou [2],

[1] University of the Witwatersrand, Johannesburg, Republic of South Africa)
[2] University of the Witwatersrand, Johannesburg, Republic of South Africa
[1]boitumelo.moletsane@outlook.com, [2]bertin.zinsou@wits.ac.za

We considered the boundary value problem with a fourth order differential equation

$$y^{(4)}(\lambda,x)-(gy')'(\lambda,x)=\lambda^2 y(\lambda,x), \tag{1}$$

together with the following boundary conditions

$$y^{[\beta_1]}(\lambda,0)-\epsilon_1 y^{[\beta_1]}(\lambda,a)=0, \tag{2}$$

$$y^{[\beta_2]}(\lambda,0)-\epsilon_2 y^{[\beta_2]}(\lambda,a)=0, \tag{3}$$

$$\delta y^{[\beta_3]}(\lambda,0)+(1-\delta)y^{[\beta_3]}(\lambda,a)=0, \tag{4}$$

$$(1-\delta)(y^{[\beta_4]}(\lambda,0)+\epsilon_3 i\alpha\lambda y^{[\beta_5]}(\lambda,0))=\delta(y^{[\beta_4]}(\lambda,a)+\epsilon_3 i\alpha\lambda y^{[\beta_5]}(\lambda,a)) \tag{5}$$

defined on the interval $[0,a]$, where $a>0$, $\alpha>0$ and $g\in C^1[0,a]$ with $\beta_1=0$, $\beta_2=3$, $\beta_3=1$, $\beta_4=2$, $\beta_5=1$ and $\delta=1$.

We associate to the problem (1) – (5) a quadratic operator polynomial of the form

$$L(\lambda)=\lambda^2 M-i\alpha\lambda K-A, \tag{6}$$

where $\alpha>0$, while M and K are self-adjoint operators. We sought to find self-adjoint A for which at least one of the boundary conditions of the boundary value problem depends on the eigenvalue parameter and at least one is periodic. The operator A considered in (6) is in $L_2(0,a)\oplus\mathbb{C}$ with

$$D(A)=\left\{Y\in W_2^4(0,a)\oplus\mathbb{C},\quad U_1\hat{Y}=0,\quad c=U_2\hat{Y}\right\},$$
$$AY=\begin{pmatrix}\ell y\\ V\hat{Y}\end{pmatrix},$$

where $Y=\begin{pmatrix}y\\c\end{pmatrix}\in L_2(0,a)\oplus\mathbb{C}$, $\hat{Y}=(y(0),\dots,y^{[3]}(0),y(a),\dots,y^{[3]}(a))^{\mathsf{T}}$,

$$K=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix}I&0\\0&0\end{pmatrix}$$

and

$$\ell y=\sum_{m=0}^{2}(g_m y^{(m)})^{(m)}. \tag{7}$$

The boundary conditions (2) - (5) can be written as

$U_1\hat{Y}=0$,
$(V+i\alpha U_2)\hat{Y}=0$,
where

$$U_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$U_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

For $m = 2$

$$\begin{cases} J_{m,0} = \left((-1)^{s-1}\delta_{s,m+1-t}\right)_{s,t=1}^{m}, \; J_{m,1} = \begin{pmatrix} 0 & J_{m,0} \\ -J_{m,0}^{*} & 0 \end{pmatrix}, \\ J_m = \begin{pmatrix} -J_{m,1} & 0 \\ 0 & J_{m,1} \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{1}$$

Finally define

$$U_3 = \begin{pmatrix} J_2 \\ V \\ -U_2 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & 0 & 0 \\ U_2 & -I & 0 \\ V_0 - I & & \end{pmatrix}.$$

For the differential expression (7) and the following boundary conditions where $\beta_m \in \{0, 1, 2, 3\}$, $m = 1, 2, \dots, 5$, β_m's are distinct for $m = 1, 2, 3$ i.e $\beta_s \neq \beta_m$ for $s \neq m$ with $s, m = 1, 2, 3$. $\beta_1, \beta_2, \beta_4, \beta_5$ are different from each other and $\beta_5 = \beta_4 - 1$, $\epsilon_j = \pm 1$ for $j = 1, 2, 3$ and $\delta \in \{0, 1\}$ we have proved the result below.

Theorem

The quadratic operator polynomial representing the fourth order differential equation (1) with the boundary conditions (2)–(5) is self-adjoint if and only if these boundary conditions have the following structure:

$\epsilon_1\epsilon_2 = 1,$
$\epsilon_3 = -1$ for $\delta = 0,$
$\epsilon_3 = 1$ for $\delta = 1,$
$\beta_1 = 0,$
$\beta_2 = 3,$
$\beta_3 = 1, 2.$

References

1. *M. Möller, V. Pivovarchik.* Spectral theory of operator pencils, Hermite-Biehler functions, and their Applications. Switzerland: Birkhäuser, 2015.

2. *M. Möller, B. Zinsou.* Self-adjoint fourth order differential operators with eigenvalue parameter dependent boundary conditions// Quaest. Math, 2011. Vol. 34., P. 393-406.

3. *B. Moletsane, B. Zinsou.* Self-adjoint fourth order differential operators with eigenvalue parameter dependent and periodic boundary conditions// Boundary Value Problems, 2017. Vol. 2017:33.

ON SOME PROBLEMS OF INVARIANCE WITH IMPULSE CONTROL

Mustapokulov Kh.Ya.

Tashkent state Technical University named after I.Karimov, Uzbekistan, Tashkent
m_hamdam@mail.ru

In this paper we consider the strong and weak invariance of a constant multivalued mapping with respect to a system with distributed parameters, in which the control action has an impulsive character, which is expressed by the Dirac delta function [1].

We denote by A the following differential operator

$$A\varphi = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\Big),\ x \in \Omega, \tag{1}$$

where the functions $a_{ij}(x) \in L^p(\Omega)$, $p \geq 1$ satisfy the conditions

1) $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $i, j = 1, ..., n$, $x \in \overline{\Omega}$;

2) exist a positive constant γ such that

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \gamma \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \tag{2}$$

for any $x \in \overline{\Omega}$ and real numbers $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 \neq 0$. Inequality (2) is called condition for the uniform ellipticity of the operator A. As the domain of the operator A, we take the space $C^2(\bar{\Omega})$ twice continuously differentiable in Ω and continuous functions in $\overline{\Omega}$.

Consider the following heat management problem [2-3]

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Au(x,t) = F(x,t,\mu),\ 0 < t \leq T,\ x \in \Omega \tag{3}$$

with boundary and initial conditions

$$u(x,t) = 0,\ \ 0 \leq t \leq T,\ x \in \partial\Omega, \tag{4}$$

$$u(x,0) = u^0(x),\ x \in \Omega. \tag{5}$$

Here $u = u(t,x)-$ is an unknown function, T is an arbitrary positive number, $F(x,t,\mu)$ and $u^0(\cdot)-$ are the given functions of their arguments, and $\mu-$ control parameter, where the function F is formulated the general formulation of the problem of control with momentum.

Let $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$, $t_0 > 0-$ be the sequence of moments of time, numbered in ascending order, without finite condensation points.

Suppose that the pursuer can act on the system (3) only at the moments $\{t_i\}$ and its influence at these moments has an impulse character, which is expressed by the Dirac delta function [1-2]:

$$F(x,t,\mu(\cdot)) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(x)\delta(t-t_i),\ x \in \Omega, t \geq 0.$$

Suppose also that the control $\mu(\cdot)$ is a measurable function.

Definition 1. *The function $\mu(\cdot)$, satisfying the condition*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\int\limits_{\Omega} \mu(\xi)\varphi_k(\xi)ds\Bigg)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 \leq \rho^2,$$

where $\rho-$ is some positive constant, μ_k- the Fourier coefficients of the function $\mu(\cdot)$ with respect to the system $\{\varphi_k\}$, is called admissible control.

Definition 2. *Multivalued mapping* $W : [0,T] \to 2^R$, *where* $R = (-\infty, \infty)$, *is called strongly invariant on the interval [0,T] with respect to problem (3)-(5), if for any* $\langle u^0(\cdot)\rangle \in W(0)$ *and admissible* $\mu(\cdot)$ *the inclusion of* $\langle u(\cdot,t)\rangle \in W(t)$ *for all* $0 < t \le T$, *where* $\langle\,\rangle-$ *the corresponding norm,* $u(x,t)-$ *the corresponding the solution of problem (3)-(5)* [1,3].

Definition 3. *Multivalued mapping* $W : [0,T] \to 2^R$, *where* $R = (-\infty, \infty)$, *is called weakly invariant on the interval [0,T] with respect to problem (3)-(5), if for any* $\langle u^0(\cdot)\rangle \in W(0)$ *There exists an admissible control* $\mu(\cdot)$ *such that* $\langle u(\cdot,t)\rangle \in W(t)$ *for all* $0 < t \le T$.

In this subsection we study the strong and weak invariance display of the form

$$W(t) = [0,b],\ 0 \le t \le T,$$

where $b-$ is a positive constant.

Our further aim is to find such a relationship between the parameters T, b, ρ and λ_i so as to ensure a strong or weak invariance of the map $W(t)$ on the interval $[0,T]$ with respect to problem (3)-(5).

We denote by

$$N(t) = \max\{i \in N \cup \{0\} : t_i \le t \le T\}.$$

Let $\langle u(\cdot,t)\rangle = \|u(\cdot,t)\| = \|u(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega)},\ 0 \le t \le T$.

Here $\|u(\cdot,t)\|^2 = \int\limits_\Omega |u(\xi,t)|^2\, d\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^2(t), 0 \le t \le T$, $u_k(\cdot)-$ the Fourier coefficients of the function $u(\cdot,\cdot)$ in the system $\{\varphi_k(\cdot)\}$.

Theorem. 1°. *Assume that* $t_0 > T$, *then for any* $\rho \ge 0$ *the multivalued mapping* $W(t)$ *is strongly invariant on the interval* $[0,T]$ *with respect to problem (3)-(5);*

2°. *Let's say* $t_0 \le T$. *If* $\rho \le b \cdot \left(e^{\lambda_1 t_0} - 1\right) \Big/ \left(\sum\limits_{i=0}^{N(T)} e^{\lambda_1 t_i}\right)$, *then a multivalued mapping* $W(t)$ *is strongly invariant on the interval* $[0,T]$ *with respect to problem (3)-(5).*

Note. *It can be shown that a multivalued mapping* $W(t)$ *is always weakly invariant on the interval [0,T] with respect to problem (3)-(5).*

References

1. *Mustapokulov Kh.Ya.* On the Invariance of a Constant Multivalued Mapping in the Heat Conduction Problem with Pulse Control // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2017.(To print)

2. *Egorov A.I.* Optimum control of thermal and diffusion processes. M .: Science. 1978. 464 p.

3. *Tukhtasinov M., Mustapokulov Kh.Ya.* On invariant sets under geometric and integral constraints // UzMJ. Tashkent, 2011, N3, P.161-168.

THE DYNAMICAL SYSTEM GENERATED BY THE BOUNDED FLOOR FUNCTION $\lfloor f(x) \rfloor$

J.B.Usmonov

Namangan State University,Namangan,Uzbekistan
javohir0107@mail.ru

In this paper we will state some results concerning discrete dynamical systems defined over the real numbers field R. Here we will generalize the floor function $\lfloor \lambda x \rfloor$(see e.g. 3.). The point of view of dynamical systems is to study iterations of f : if f^n denotes the n-fold composition (iteration) of f with itself , then for a given point x one investigates the sequence $x, f(x), f^2(x), f^3(x)$, and so on. This sequence is called one-dimensional discrete time dynamical system or the forward orbit of x, or just the orbit of x for short(2.). For convenience of the reader we will give a definition of the floor function. The floor function of $x \in R$ is defined by

$$\lfloor x \rfloor = \max m \in Z : m \le x.$$

The bounded floor function is defined by

$$y = \lfloor f(x) \rfloor, \quad \lfloor m \rfloor \leq \lfloor f(x) \rfloor \leq \lfloor M \rfloor.$$

Above $f(x)$ is a bounded function where $m \leq f(x) \leq M$.

The dynamics of the bounded floor function is consisted of sequences

$$a_0, a_1, a_2, a_3, ...$$

with integer numbers $a_i, i \in N$ from $[\lfloor m \rfloor, \lfloor M \rfloor]$.

Our main problems are to identify how to make sequences to be convergent and periodic sequences. Here we will try for finding out answers of those questions.

Lemma1. *Let $f(x) \in C[a,b]$. If $f(x) \neq x$ for all x in domain of f, then $f(x) - x > 0$ or $f(x) - x < 0$ for all x.*

Lemma1 above is known subject of mathematical analysis and we will know about fixed points of $\lfloor f \rfloor$ by help of it(see [1]).

Lemma2. *Let $y = \lfloor f(x) \rfloor$ function.The following hold:*

If $Fix(f) \subset Z$ then $Fix(f) \subset Fix(\lfloor f \rfloor)$;

If $Fix(f) = \emptyset$ and $f(x) - x < 0$ then $Fix(\lfloor f \rfloor) = \emptyset$;

If $p \in Per_n(\lfloor f \rfloor)$ then $f(p), f^2(p), ..., f^{n-1}(p) \in Per_n(\lfloor f \rfloor)$;

If $Fix(\lfloor f \rfloor) = \emptyset$ then it does not have any convergent sequences on dynamics of $\lfloor f \rfloor$.

Next Theorem is shown when the periodic sequences make.

Theorem. *The periodic sequence as the form*

$$\{a_0, a_1, ...a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_{k+n-1}, a_k, ...\}$$

is made if and only if $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_{k+n-1} \in Per_n(\lfloor f \rfloor)$ and

$$\lfloor f(a_k) \rfloor = a_{k+1}$$

$$\lfloor f(a_{k+1}) \rfloor = a_{k+2}$$

$$... \quad ... \quad ...$$

$$\lfloor f(a_{k+n-1}) \rfloor = a_k.$$

Example. a) Let $f(x) = \sin x$. $Fix(\lfloor f \rfloor) = \{0, -1\}$. For all initial value of x the sequence of dynamics converges to 0 or -1.

b) Let $f(x) = \cos x$. $Fix(\lfloor f \rfloor) = \emptyset$ but $Per_2(\lfloor f \rfloor) = \{0, 1\}$. By Theorem for all initial value of x after several steps periodic sequence as the form $\{0, 1, 0, 1, ...\}$ makes.

References

1. *V.A.Zorich.*Mathematical Analysis I. New York: Springer, 2000.
2. *R.L. Devaney*An introduction to chaotic dynamical system.USA: Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
3. *U. A. Rozikov, I. A. Sattarov, J. B. Usmonov*The dynamical system generated by the floor function $\lfloor \lambda x \rfloor$. Journal of Applied Nonlinear Dynamics,2016.Volume 5,є 2.P.185–191.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ С ТОЧКОЙ ПОВОРОТА

Алымкулов К.[1], Турсунов Д.А.[2], Кожобеков К.Г.[3],

Ошский государственный университет, Кыргызстан, Ош
[1]keldibay@mail.ru, [2]tdaosh@gmail.com, [3]kudayberdi.kozhobekov@mail.ru

В работе модифицированным методом пограничных функций построено полное равномерное асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с кратной точкой поворота в действительной оси.

Дифференциальные уравнения с точками поворота возникают в теории упругости, оптике, гидродинамике, геофизике и других областях естествознания. Кроме того, широкий класс дифференциальных уравнений с неинтегрируемыми особенностями типа Бесселя и их возмущений может быть сведен к дифференциальным уравнениям с точками поворота. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с точками поворота, исследованы в работах В.Вазова (W.Wasow) [1,2], Олвера (F.W.J.Olver) [3,4,5], Ватса (A.M. Watts) [6] и др. На практике обычно для построения асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных задач с точками поворота исследователи применяют метод сращивания (метод согласования), или метод регуляризации С.А. Ломова, или другие методы, но кроме метода пограничных функций. Нами предлагается модификация метода пограничных функций, благодаря которой удается построить полные, равномерные асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач с точками поворота. В работах [7]-[9] исследованы краевые задачи с точками поворота, здесь развиваем предлагаемый нами метод.

Рассмотрим задачу Коши

$$\varepsilon y_\varepsilon''(x) + x^n y_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x), \quad 0 < x \le T, \tag{1}$$

$$y_\varepsilon(0) = a, \quad y_\varepsilon'(0) = b, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ — малый параметр, n — фиксированное натуральное число, T, a, b – $const$, $f_\varepsilon(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(x)$, $f_k \in C^\infty[0,T]$, $f_0(0) \neq 0$.

Решение задачи (1), (2) существует и единственно, требуется построить асимптотическое разложение решения этой задачи при $\varepsilon \to 0$.

Особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что малый параметр ε присутствует при старшей производной и точка $x = 0$ является n кратной точкой поворота для уравнения (1). Подобные задачи по терминологии А.М. Ильина называют бисингулярной.

Если асимптотическое решение задачи (1)-(2) искать в виде

$$y_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(x), \tag{3}$$

то получим

$$y_k(x) = O\big(x^{-n-(n+2)k}\big), \ x \to 0, \ k = 0, 1, \dots$$

Заметим, что асимптотическое решение (3) не удовлетворяет начальным условиям (2), кроме этого ряд (3) является асимптотическим только при $\sqrt[n+2]{\varepsilon} < x \le T$.

Полное равномерное асимптотическое решение задачи (1)-(2) строим обобщенным методом пограничных функций [7]-[9].

Нами доказана

Теорема. *Для решения задачи Коши (1)-(2) при* $\varepsilon \to 0$ *справедливо асимптотическое разложение*

$$y_\varepsilon(x) = \sum_{k=-n}^{-1} \mu^k \pi_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (v_k(x) + \pi_k(t)),$$

где $\mu = \sqrt[n+2]{\varepsilon}$, $x = \mu t$, $\pi_k(t)$ — пограничные функций зависящие от μ, $\pi_k \in C^\infty[0, T/\mu]$, $v_k(x) \in C^\infty[0,T]$.

Заключение. Обобщенным методом пограничных функций построено равномерное асимптотическое разложение решения задачи Коши для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с кратной точкой поворота в действительной оси. Построенный асимптотический ряд представляет собой ряд Пюйзц (V.A.Puiseux). Получена оценка для остаточного члена асимптотического разложения решения задачи Коши. Построенное разложение является асимптотическим в смысле Эрдей.

Литература

1. *Wasow W.* Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations. Dover publications, INC, Mineola, New York, 1965.
2. *Wasow W.* Linear turning point theory. Springer-Verlag, New York, 1985.
3. *Olver F.M.* Connection formulas for second-order differential equations with multiple turning points. SIAM. J. Math. Anal., 1(8) (1977), 127-154.
4. *Olver F.M.* Connection formulas for second-order differential equations having an arbitrary number of turning points of arbitrary multiplicities. SIAM. J. Math. Anal., 4(8) (1977), 673-700.
5. *Wong R.* Selected papers of F.W.J. Olver. Part 1,2:World Scientific, (2000)
6. *Watts A.M.* A singular perturbation problem with a turning point. Bull. Australian Math. Soc. 5 (1971), 61-73.
7. *Alymkulov K., Tursunov D.A.* On a method of construction of asymptotic decompositions of bisingular perturbed problems, Russian Mathematics, **12(60)**(2016), 1-8.
8. *Tursunov D.A.* Asymptotic expansion for a solution of an ordinary second-order differential equation with three turning points, Tr IMM UrO RAN, **1(22)**(2016), 271-281.
9. *Tursunov D.A.* The asymptotic solution of the bisingular Robin problem, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14**(2017), 10-21.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОПЕРАТОРА ИНВАРИАНТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМ ОДУ, ДОПУСКАЮЩИХ АЛГЕБРЫ ЛИ

Гайнетдинова А.А.[1], Газизов Р.К.[1],

[1] Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия, Уфа

[1]gammett@ugatu.su

Рассмотрим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$\begin{cases} x'' = f(t,x,y,x,'y'), \\ y'' = g(t,x,y,x',y'), \end{cases} \tag{1}$$

допускающую четырехмерную алгебру Ли операторов

$$X_i = \xi_i(t,x,y)\frac{\partial}{\partial t} + \eta_i(t,x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \zeta_i(t,x,y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad i = 1,2,3,4. \tag{2}$$

Для предлагаемого метода интегрирования систем ОДУ будем использовать инвариантное представление системы (1).

Пусть система (1) имеет инвариантное представление вида

$$I_2^{(1)} = F(I), \;\; I_2^{(2)} = G(I). \tag{3}$$

Здесь I — инвариант первого или нулевого (алгебраический) порядка, $I_2^{(i)}, i = 1,2$ — дифференциальные инварианты второго порядка, F и G — некоторые функции.

Можно показать, что системы, не представимые в виде (3), сводятся к виду

$$x'' = 0, \;\; y'' = 0.$$

Введем в рассмотрение оператор инвариантного дифференцирования $\lambda(t,x,y,x',y',x'',y'')D_t$, где D_t — оператор полной производной. Действуя этим оператором на инвариант алгебры, можно получить инвариант той же алгебры более высокого порядка (см., например, [1]).

В [1] показано, что оператор инвариантного дифференцирования λD_t можно находить из уравнения

$$\left[\lambda D_t, X_{i\infty}\right] = 0,\ i = 1,\ldots,r,$$

которое можно переписать в виде

$$X_{ik}(\lambda) = \lambda D_t(\xi_i),\ i = 1,..,r, \tag{4}$$

где r — размерность допускаемой алгебры, X_{ik} — продолженный на k-ые производные оператор X_i.

Тогда применяя оператор инвариантного дифференцирования к инварианту I допускаемой группы, получим выражение $\lambda D_t(I) = \Theta(I, I_2^{(1)}, I_2^{(2)})$ с некоторой функцией Θ. На решениях рассматриваемой системы оно будет иметь вид

$$\lambda D_t(I)|_{(3)} = \Phi(I), \tag{5}$$

где $\Phi(I) = \Theta\left(I, F(I), G(I)\right).$

Уравнение (5) может быть переписано следующим образом:

$$\frac{dI}{\Phi(I)} = \frac{\mathrm{d}t}{\lambda(t,x,y,x',y',\ldots)}. \tag{5$'$}$$

Легко видеть, что левая часть уравнения (5$'$) интегрируется в квадратурах. Правая часть уравнения интегрируется, если функция λ оператора инвариантного дифференцирования представима в виде

$$\lambda = \left(D_t\left(\Psi\right)\right)^{-1}, \tag{6}$$

где $\Psi = \Psi(t,x,y,x',y')$ — некоторая дифференцируемая функция.

Если функция λ имеет вид (6), то из уравнения (5) мы получим условие на функцию Ψ :

$$X_{ik}\left(\Psi\right) = C_i,\ \ C_i = const. \tag{7}$$

Полнота этой системы проверяется системой линейных уравнений на константы C_i

$$c_{ij}^k C_k = 0,$$

где c_{ij}^k — структурные константы допускаемой алгебры. Можно показать, что в случае неразрешимой алгебры все константы C_i в уравнении (7) равны нулю, т.е. функция Ψ — инвариант алгебры. В этом случае уравнение (5$'$) превращается в тождество и получить первый интеграл системы не представляется возможным. В случае разрешимой алгебры получаем интегрируемое в квадратурах уравнение (5$'$). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема.

Пусть система (1) *допускает четырехмерную алгебру Ли операторов* (2). *Если система представима через инварианты допускаемой алгебры, то ее первый интеграл находится по формуле* (5$'$). *Более того, если допускаемая алгебра Ли разрешима, то система* (1) *интегрируема в квадратурах.*

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации *(Государственное задание No. 1.3103.2017/4.6).*

Литература

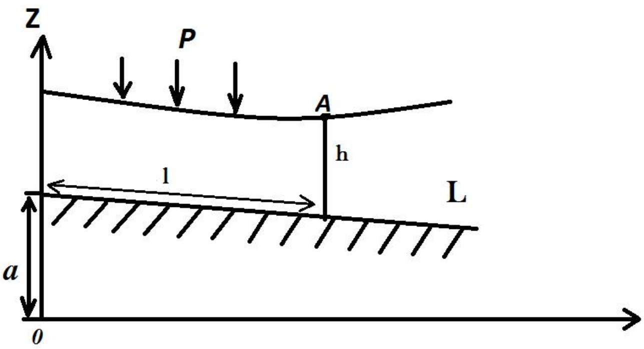
1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1978. 398 с.

ДИФФЕРИНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЕ НЕРАВНОМЕРНОГО БЕЗНАПОРНОГО УСТАНОВИВШЕЙСЯ ДВИЖЕНИЕ ВОДЫ

Ишанходжаев А.М.[1], Абдукадирова M.N.[2],

ТИИИМСХ, Узбекистан, Ташкент
maloxat.abduqodirova@mail.ru

К выводу основного дифференциального уравнения неравномерного безнапорного установившегося движения воды. Рассмотрим расчетную схему:



Из уравнения Бернулли известно, что для всех сечений

$$\mathrm{Z} + \frac{\rho}{j} + \frac{\alpha V^2}{2g} + h_f = const$$

Это значит, что форма русла по оси потока должна соответствовать плавно изменяющемуся движению.

Z- координата свободные поверх

P-давления в реке свободные поверх

V-средние скорость

$\mathrm{h_t}$-потери напора

Из схемы (1) видно, что для произвольной точки (A) свободной поверхности координата по оси (z) z=a-il+h

Продифференцируем уравнение (1) по длине

$$\frac{d}{dl}\left(z + \frac{\rho}{j} + \frac{\alpha V^2}{2g} + h_f\right) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{dz}{dl} = -i + \frac{dh}{dl}, \quad \frac{d}{dl}\left(\frac{P}{j}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dl}(\frac{\alpha V^2}{2g}) = \frac{\alpha d}{dl}\left(\frac{Q^2}{\omega^2 2g}\right) = \frac{\alpha Q^2}{2g}\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{\alpha Q^2}{g}\cdot\frac{1}{\omega^3}\frac{d\omega}{dl} \quad \omega = F(h, B);$$

$$\frac{d\omega}{dl} = \frac{d\omega}{dh}\cdot\frac{dh}{de} + \frac{d\omega}{db}\cdot\frac{db}{dl}$$

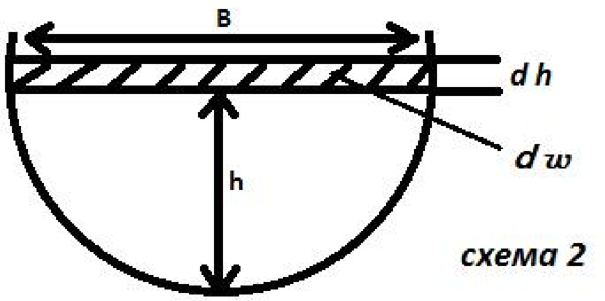
Из схемы (2)

$$\frac{d\omega}{dh} = B;$$

$$\frac{d\omega}{de} = B\frac{dh}{dl} + \frac{d\omega}{db}\frac{db}{dl};$$

Известно, что $\frac{dh_f}{dl}$ движение равномерные на основание $V = c\sqrt{RJe}$

$Je = \frac{V^2}{c^2 R} = \frac{Q^2}{\omega^2 c^2 R}$ итак из уровнение (2) следует



$$-i+\frac{dh}{dl}+\frac{2Q^2}{g}\cdot\frac{1}{\omega^3}\left(B\frac{dh}{dl}+\frac{d\omega}{db}\frac{db}{dl}\right)+\frac{Q^2}{\omega^2c^2R}=0 \tag{3}$$

$$\Rightarrow\frac{dh}{dl}-\frac{\alpha Q^2}{g}\cdot\frac{1}{\omega^3}\cdot B\frac{dh}{dl}=i-\frac{Q^2}{\omega^2c^2R}+\frac{\alpha Q^2}{g}\cdot\frac{1}{\omega^3}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial b}\frac{db}{dl}\Rightarrow$$

$$\frac{dh}{de}=\frac{i-\frac{Q^2}{\omega^2c^2R}+\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial b}\cdot\frac{db}{dl}}{1-\frac{\alpha Q^2B}{g\omega^3}} \tag{4}$$

Так как в цилиндрическом русле $\frac{db}{dl}=0$ уравнение (4) принимает вид:

$$\frac{dh}{dl}=\frac{i-\frac{Q^2}{\omega^2c^2R}}{1-\frac{\alpha Q^2B}{g\cdot\omega^3}},\quad \text{при}\,(i>0)$$

$$\frac{dh}{dl}=-\frac{-\frac{Q^2}{\omega^2c^2R}}{i-\frac{\alpha Q^2}{g}\frac{B}{\omega^3}},\quad \text{при}\,(i=0)$$

$$\frac{dh}{dl}=\frac{i+\frac{Q^2}{\omega^2c^2R}}{i-\frac{\alpha Q^2}{g}\cdot\frac{B}{\omega^3}},\quad \text{при}\,(i\neq 0)$$

Решение выше изложенным методом позволяет избежать недоразумения при решение дифференциальных уравнений. Например, Д.В.Штеренлихт излагает данный вопрос, в котором при решении возникает противоречие с уравнением неразрывности потока. И у других авторов схожие проблемы. Вывод: данное решение позволяет точно решить поставленные задачи.

Литература

1. *Киселова П.Г.* Справочник по гидравлическим расчетам. Энергия, 1974.
2. *Калицун В.И.* Основы гидравлики. Стройиздат, 1972.
3. *Штренлихт Д.В.* Гидравлика Книга-2. Энергоатомиздат, 1991.
4. *Чугаев Р.Р.* Гидравлика. Энергоиздат, 1982.

Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями управления игроков

Мамадалиев Н.А.

Национальный университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент
M_numana59@mail.ru

Приведены достаточные условия разрешимости задачи преследования, в которых информация об управление убегающего поступает преследователю с запаздыванием, характеризующимся некоторой функцией $I(t)$, $t\geq 0$. С помощью метода преследования по направлению получены достаточные условия для возможности завершения преследования в играх с интегральными ограничениями на управляющие параметры. Разработан аналог третьего метода преследования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями.

В n — мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается линейная дифференциальная игра, описываемая системой уравнений с запаздывающим аргументом

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) - Cu(t) + Dv(t), \tag{1}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n, n \geq 1, u(t) \in \mathbb{R}^p,\ v(t) \in \mathbb{R}^q, t \geq 0; h$ — фиксированное положительное действительное число; $A,\ B$ — постоянные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$, $(n \times n)$, $C,\ D$ — постоянные матрицы порядка $(n \times p)$, $(n \times q)$; $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$ —n, p, q — мерные векторные евклидовы пространства, соответственно. Функции $u(t)$, $v(t)$ — называются *управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно.Они выбираются как суммируемые с квадратом функции $u(t)$, $v(t)$, удовлетворяющие неравенствам

$$\|u(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \leq \rho,\ \|v(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \leq \sigma, \tag{2}$$

где ρ и σ — неотрицательные константы, a — некоторая точка $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\tau-$ положительное число и $t \in [0,\tau]$. — измеримые функции $u = u(t)$, $v = v(t)$, $0 \leq t < \infty$, удовлетворяющие геометрическим ограничениям, назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно. Всюду в дальнейшем предполагаются: Терминальное множество M имеет вид $M = M_0 + M_1$, где M_0- линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, M_1- выпуклое компактное подмножество подпространства L, $L-$ ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$. через $\pi-$ обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на $L:\ \pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow L$; под операцией $\underline{*}$ понимается операции геометрической разности [2];

через $K(t), -\infty < t \leq \tau$, обозначим матричную функцию, обладающую следующими свойствами[1]: а) $K(t) = \tilde{0},\ t < 0,\ \tilde{0}-$ нулевая матрица порядка n; б) $K(0) = E,\ E-$ единичная матрица порядка n; в) элементы матрицы $K(t), 0 \leq t \leq \tau$, принадлежат классу $C^1[0,\tau]$; г) $K(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t-h),\ 0 < t < h. \tag{3}$$

Существование и единственность матричной функции $K(t), -\infty < t \leq \tau$, удовлетворяющей условиям а) —г) могут быть доказаны обычном методом последовательного интегрирования уравнения (3).

Определение.Будем говорить, что в игре (1),(2) из начального положения $z_0(\cdot) \in X$, возможно завершение преследования за время $t_1(z_0(\cdot))$, если в этот момент времени впервые выполнено включение $z(t_1(z_0(\cdot))) \in M$. Предполагается, что преследователю и угагающему известны уравнения (1), множество M, начальное положение $z_0(\cdot) \in X$ и в каждый момент времени $t \in [\nu, T]$ преследователю известна функция $v(r)$ при $r \in [I(\nu), I(t)]$. Здесь $\nu \in [0,T]$ заданный момент времени, а $I(t)$ при $t \geq 0$ — заданная неотрицательная, непрерывно дифференцируемая, монотонная (строго возрастающая) функция, причем $I(t) \geq 0$, и $I(t) \leq t$, при всех $t \geq \nu$. Кроме того, момент времени ν и функция $I(t)$ известны преследователю. Таким образом, до момента ν он ничего не знает об управление убегающего игрока, а начиная с момента времени ν преследователь знает управление убегающего игрока с запаздыванием $t - I(t)$.

Пусть $u = u^*(t),\ 0 \leq t \leq \nu$ — произвольное, фиксироованное допустимое управление преследователя, с условием $\int\limits_0^\nu \|u^*(t)\|^2 dt \leq \rho^2$. Величину

$$\tilde{\rho}^2 = \rho^2 - \int\limits_0^\nu \|u^*(t)\|^2 dt$$

назовем ресурсом преследователя.

Предположение 1. *Пусть существует момент времени $\tau_1 \in [\nu, \tau]$ такое, что имеет место включение $\pi K(\tau_1 - I(t))D\mathbb{R}^q \subset \pi K(\tau_1 - t)C\mathbb{R}^p,\ \nu \leq t \leq \tau_1$.*

В силу предположения 1 существует матрица $F(s) : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$, $\nu \leq t \leq \tau_1$ такая, что имеет место равенство

$$\pi K(\tau_1 - I(t))D = \pi K(\tau_1 - t)CF(\tau_1 - t),\ \nu \leq t \leq \tau_1.$$

Предположение 2. *Существует матричная функция $F(t)$, $\nu \leq t \leq \tau_1$, элементы которой являются суммируемыми функциями, такая, что имеет место условие $0 \leq \chi(t) \leq \widetilde{\rho}$, при всех $\nu \leq t \leq \tau_1$, где*

$$\chi^2(t) = \sup_{\|v(\cdot)\|_{L_2} \leq \sigma} \int_{\nu}^{t} \|F(r)v(I(r))\dot{I}(r)\|dr.$$

Далее, введем в рассмотрение следующие множества

$$W(t) = \Big\{ \int_{\nu}^{t} \pi K(t-r)C\omega(r)dr : \int_{\nu}^{t} \|\omega(r)\|^2 dr \leq (\widetilde{\rho} - \chi(t))^2 \Big\},$$

$$H(t) = \Big\{ \int_{0}^{I(\nu)} \pi K(t-r)Dv(r)dr + \int_{I(t)}^{t} \pi K(t-r)Dv(r)dr :$$

$$\int_{0}^{I(\nu)} \|v(r)\|^2 dr + \int_{I(t)}^{t} \|v(r)\|^2 dr \leq \sigma^2 \Big\}.$$

Предположение 3. *a) Множество непустьо $M_1 \underline{*} H(t) \neq \oslash$ для всех $\nu \leq t \leq \tau$; b) имеет место включение*

$$\Omega(\tau_1)z_0(\cdot) - \int_{0}^{\nu} \pi K(\tau_1 - t)Cu^*(t)dt \in W(\tau_1) + \Big[M_1 \underline{*} H(\tau_1)\Big],$$

где

$$\Omega(\tau_1)z_0(\cdot) = \pi K(\tau_1)z_0(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau_1 - t - h)Bz_0(t)dt.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия предположений 1-3. Тогда в игре (1),(2) из начального положения $z_0(\cdot) \in X$ возможно завершение преследования за время τ_1.*

Литература

1. *Беллман Р.,Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Наука, 1977. 624 с.
2. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами.М.: Изд-во Московского унта, 1990. 197 с.
3. Зонневенд Д. Об одном типе превосходства игрока//ДАН. - 1973. - Т.208. - є3. - С. 520-523.

Управление пучками траекторий в квазилинейных дифференциальных играх преследования

Мамадалиев Н.А.

Национальный университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент
M_numana59@mail.ru

В данной работе рассматривается квазилинейная дифференциальная игра преследования. Изучена задача о переводе пучка траекторий из начального множества $N(R(\cdot))$ на терминальное множество M при геометрических ограничениях на управляющие параметры. Применяются модификации второго и третьего методов решения дифференциальных игр преследования.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается квазилинейная дифференциальная игра преследования, описываемая уравнением [1]

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) - f(u,v), \ \ t \geq 0, \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{R}^n, n \geq 1$; $A, B-$ постоянные квадратные матрицы, размерности которых $(n \times n), (n \times n)$; $h > 0-$ фиксированное действительное число- величина запаздывания; вектора u, $v-$ называются управляющими параметрами преследующего и убегающего игроков, соответственно, они выбираются в виде измеримых векторных функций $u = u(\cdot)$, $v = v(\cdot)$, определенных на отрезке $[0, \infty)$. Кроме того, они удовлетворяют ограничениям вида

$$u(t) \in P, \ v(t) \in Q, \ 0 \leq t \leq \infty, \tag{2}$$

где P и $Q-$ непустые компактные подмножества пространств $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$; $f : P \times Q \to \mathbb{R}^n-$ непрерывная функция. Пусть $\tau-$ положительное число и $t \in [0, \tau]$. — измеримые функции $u = u\,(t)\,, v = v\,(t)\,, 0 \leq t < \infty$, удовлетворяющие геометрическим ограничениям, назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно. Всюду в дальнейшем предполагаются:

Терминальное множество M имеет вид $M = M_0 + M_1$, где M_0- линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, M_1- выпуклое компактное подмножество подпространства $L, L-$ ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$ (т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$); через $\pi-$ обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на L : $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow L$; под интегралом однозначной или многозначной функции (многозначного отображения) понимается интеграл Лебега [2]; под операцией $\underline{*}$ понимается операции геометрической разности [2]; Кроме того, задано начальное множества $N(R(\cdot))$. В качестве начального множества $N(R(\cdot))$ берется множество измеримых однозначных ветвей многозначного отображения $R(s)$, $-h \leq s \leq 0 :$ $N(R(\cdot)) = \{z_0(s) : z_0(s) \in R(s), \ s \in [-h, 0]\}$.

через $K\,(t)\,, -\infty \ < t \leq \tau$, обозначим матричную функцию, обладающую следующими свойствами[1]: а) $K\,(t) = \tilde{0}, \ t < 0, \ \tilde{0}-$ нулевая матрица порядка n; б) $K\,(0) = E$, $E-$ единичная матрица порядка n; в) элементы матрицы $K\,(t)\,, 0 \leq t \leq \tau$, принадлежат классу $C^1\,[0, \tau]\,;$ г) $K\,(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{K}\,(t) = AK\,(t) + BK\,(t - h)\,, \ 0 < t < h. \tag{3}$$

Существование и единственность матричной функции $K\,(t)\,, -\infty \ < t \leq \tau$, удовлетворяющей условиям а) —г) могут быть доказаны обычном методом последовательного интегрирования уравнения (3).

Через $Z(u(\cdot), v(\cdot), N(R(\cdot)))$, обозначим множество (пучок) всех траекторий уравнения (1), исходящих в момент $t = 0$ из точек начального множества $N(R(\cdot))$ при допустимых управлениях $u(\cdot), v(\cdot)$ преследующего и убегающего игроков соответственно.

При изучении игры (1) мы отождествляем себя с преследователем. В этом случае наша цель заключается в приведении пучка траекторий $Z(u(\cdot), v(\cdot), N(R(\cdot)))$ на терминальное множество M.

Задача управления пучками траекторий состоит в нахождении числа $T \geq 0$ и конструировании при каждом $t \in [0, \infty)$ значения $u[t]$ параметра u так, чтобы каждая траектория $z(t)$, $0 \leq t < \infty$, пучка $Z(u[\cdot], v(\cdot), N(R(\cdot)))$ попала на терминальное множество M за время, не превосходящее T, т.е. для каждой траектории $z(t), t \in [0, \infty)$, пучка $Z(u[\cdot], v(\cdot), N(R(\cdot)))$ при некотором $t = t^* \in [0, T]$ должно иметь место включение $z(t^*) \in M$. Число T называется *временем перевода.*

В случае, когда задача управления пучками траекторий разрешима, то говорят, что в игре (1) пучок траекторий из начального множества $N(R(\cdot))$ можно перевести на терминальное множество M за время T.

Пусть $\tau \geq 0$, $t \in [0, \tau]$. Рассмотрим следующие множества

$$\hat{w}(t) = \bigcap_{v \in Q} F(t, v), \ W(\tau) = \int\limits_0^\tau \hat{w}(t) dt,$$

где $F(t, v) = \pi K(t) f(P, v)$ и $\pi K(t) f(P, v) = \Big\{\pi K(t) f(u, v) : u \in P\Big\}$.

Пусть $\omega-$ произвольное разбиение отрезка $[0, \tau]$: $\omega = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = \tau\}$, $v_i(t)$, $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, $i = 1, 2, ..., k-$ произвольная измеримая функция со значениями из множества Q. $\bar{M}-$ произвольное замкнутое подмножество множества $M_1 \underline{*} H[\tau, N(X(\cdot))]$.

Положим $A_0 = \bar{M}$ [3], и

$$A_i = \bigcap_{v_i(\cdot)} \Big[A_{i-1} + \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \pi K(t) f(P, v_i(t)) dt\Big], i = 1, 2, ..., k,$$

$$A_k(\bar{M},\omega) = A_k, \;\; W(\bar{M},\tau) = \bigcap_{\omega} A_k(\bar{M},\omega),$$

где пересечение берется по всевожможным разбиениям ω отрезка $[0,\,\tau]$. По определению положим $W(\bar{M},\,0) = \bar{M}$, и рассмотрим множество

$$W_2\Big[M_1 \underline{*}\, H[\tau, N(X(\cdot))],\,\tau\Big] = \bigcup_{\bar{M}} W(\bar{M},\,\tau), \quad \tau > 0.$$

Теорема 1. *Предположим, что при некотором $\tau = \tau_1$ имеет место включение*

$$0 \in W_2\Big[M_1 \underline{*}\, H[\tau, N(X(\cdot))], \tau\Big].$$

Тогда в игре (1) при ограничениях (2) пучок траекторий можно перевести из множества $N(X(\cdot))$ на множество M за время τ_1. При этом для конструирования $u[t]$ используются значения $u(r), 0 \le r \le t$, и $v(r), 0 \le r \le t+\varepsilon$, где $\varepsilon-$ произвольное фиксированное положительное число.

Пусть по-прежнему $i = 1, 2, ..., k$, а [3]

$$M^{(i)} = \bigcup_{M_{i-1}(\cdot)} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \bigcap_{v \in Q} \Big[M_{i-1}(t) + \pi K(t) f(P,v)\Big] dt,$$

где $M_0(t),\; t_0 \;\; \le \;\; t \;\; \le \;\; t_1,-$ произвольная измеримая замкнутозначная многозначная функция, удовлетворяющая условию $\int\limits_{t_0}^{t_1} M_0(t)dt \subset M^{(0)}, \;\; M^{(0)} = M_1 \underline{*}\, H[\tau, N(X(\cdot))]; \;\; M_{i-1}(t), \; t_{i-1} \le t \le t_i, \; i > 1,-$ произвольная измеримая замкнутозначная многозначная функция, для которой $\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} M_{i-1}(t)dt \subset M^{(i-1)}$.

Положим

$$M^{(k)}(\omega) = M^{(k)}, \quad W_3\Big[M_1 \underline{*}\, H[\tau, N(X(\cdot))],\,\tau\Big] = \bigcup_{\omega} M^{(k)}(\omega), \;\; \tau > 0.$$

Теорема 2 *Предположим, что при некотором $\tau = \tau_2$ имеет место включение*

$$0 \in W_3\Big[M_1 \underline{*}\, H[\tau, N(X(\cdot))], \tau\Big].$$

Тогда в игре (1) при ограничениях (2) пучок траекторий можно перевести из множества $N(R(\cdot))$ на множество M за время τ_2. При этом для конструирования $u[t]$ используются t, значения $u(r),\; 0 \le r < t,\;$ и $v(r),\, 0 \le r \le t$.

Литература

1. *Беллман Р.,Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Наука, 1977. 624 с.
2. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами.М.: Изд-во Московского унта, 1990. 197 с.
3. *Сатимов Н.Ю.* Об игровых задачах управления пучками траекторий // Дифференц. уравнения.1991. Т.27. є 2. С. 219- 228.

О КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НЕСКОЛЬКИМИ ОБЪЕКТАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Маматов М.Ш., Эсонов Э.Э.
Национальный университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент
E-mail: mamatovmsh@mail.ru
Ташкентский Государственный технический университет, Узбекистан, Ташкент
E-mail: egamberdi-esonov@mail.ru

Пусть движение объекта в конечномерном евклидовом пространстве R^n описывается дифференциальным уравнением дробного порядка вида

$$D_i^\alpha z_i = A_i z_i + f_i(u_i, \upsilon) + g_i(t), \quad 1 \le i \le m, \tag{1}$$

где $z_i \in R^n$, $n \ge 1$; $D_i^\alpha-$оператор дробного дифференцирования, $\alpha \in (0,1]$, $t \in [0,T]$, $A_i - n \times n-$постоянная матрица, $u_i, \upsilon-$управляющие параметры u_i-управляющий параметр $i-$ го преследователя или игрока, $u_i \in P_i \subset R^{p_i}$, $\upsilon-$ управляющий параметр убегающего игрока, $\upsilon \in Q \subset R^q$, P_i и Q-компакты, f_i- непрерывные отображения множества $P_i \times Q$ в R^n, $g_i(t)-$известные измеримые вектор-функции. Дробную производную будем понимать как левостороннюю дробную производную Капуто. Напомним, что дробная производная Капуто произвольного нецелевого порядка $\alpha > 0$ от функции $z(t) \in \mathrm{A}C^{[\alpha]+1}(a,b)$, $a, b \in R^1$, определяется выражением

$\mathrm{D}^\alpha z(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\int_a^t \frac{d^{[\alpha]+1}z(\xi)}{d\xi^{[\alpha]+1}}\frac{d\xi}{(t-\xi)^{\{\alpha\}}}$ (2), , R^n заданы множества $M_1, M_2, ..., M_m$, где $M_i = M_i^1 + M_i^2$, M_i^1-линейное подпространство пространства R^n, M_i^2-подмножество L_i^1, L_i^1-ортогональное дополнение к подпространству M_i^1 в R^n. Перечисленными выше данными описана дифференциальная игра нескольких лиц (1), в которой принимает участие группа преследователей, в распоряжении которой вектор управления $u = (u_1, u_2, ..., u_m)$ и преследуемый игрок, в распоряжении которой вектор υ. Рассмотрим для дифференциальной игры (1) задачу преследования.

Будем называть стратегией $i-$го преследователя $u_i(t) = U_t^i(z_i^0, \upsilon(t))-$ отображение, определенное на множестве произвольных измеримых управлений $\upsilon(t) \in Q$ и множестве произвольных векторов $z_i^0 \in R^n$, обладающее следующим свойством: для любого измеримого $\upsilon(t) \in Q$,$z_i^0 \in R^n$,$u_i(t) = U_t^i(z_i^0, \upsilon(t))$,как функция t,измерима и $u_i(t) \in P_i$. Стратегией преследования назовем вектор $u(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t))$, где $u_1(t)$-стратегия $i-$го преследования.

Рассматривается задача преследования о сближении траектории конфликтно-управляемой системы (1). Будем говорить, что дифференциальная игра (1) может быть закончена из начального положения z_i^0, $i = 1, 2, ..., m$, за время $T = T(z_0)$, если существует такая стратегия преследования $u(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t))$, что по крайней мере один вектор$z_i(t)$, $i = 1, 2, ..., m$, являющийся решением уравнения

$$D_i^\alpha z_i = A_i z_i + f_i(u_i(t), \upsilon(t)) + g_i(t), \quad z_i(0) = z_i^0$$

приходит на соответствующее терминальное множество M_i в момент $t = T$ при любых измеримых функциях $\upsilon(t)$, $\upsilon(t) \in Q$, $0 \le t \le T$.

В настоящее время, под влиянием бурного научно-технического и технологического прогресса дробное исчисление превратилось в мощное научное направление, включающее как фундаментальные, так и прикладные исследования. Настоящая заметка, посвящена получению достаточных условий завершения преследования несколькими управляемыми объектами одного убегающего, для систем дробного порядка и примыкает к исследованием [1-7].

Перейдем к изучению задачи преследования. Пусть π_i-оператор ортогонального проектирования из R^n на L_i^1, $e_\alpha^{At} = t^{\alpha-1}\sum_{k=0}^\infty A^k \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma((k+1)\alpha)}$.

Предположение 1. Существует положительная константа θ такая, что для всех $\tau \in [0, \theta]$, $i = 1, 2, ..., m$ не пусты множества

$$G_i(\tau) = \bigcap_{\upsilon \in Q} \pi_i e_\alpha^{A_i \tau} f_i(P_i, \upsilon)$$

Предположение 2. Для позиции $z_i^0,\ i=1,2,...,m$, существуют векторы $m_i^0\in M_i^2$, измеримые функции $\alpha_i(\tau)\in G_i(\tau)$ и положительная константа $T\le\theta$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{m}\|\xi_i(T)\|+\int_0^T\sup_{\upsilon\in Q}\sum_{i=1}^{m}\lambda_1(i,\tau,T,\upsilon)d\tau\le 0$$

где

$$\xi_i(T)=\pi_i z_i^0-\int_0^T\pi e_\alpha^{A(T-s)}[Az_i^0+g_i(s)]ds-m_i^0+\int_0^T\alpha_i(T-s)ds$$

$\lambda_1(i,\tau,T,\upsilon)-$скалярная функция, определяемая соотношением

$$\left\{\pi_i e_\alpha^{A_i\tau}f_i(P_i,\upsilon)-\alpha_i(\tau)\right\}\bigcap\{\lambda\eta_i(T),\,\lambda\le 0\}=\{\lambda\eta_i(T),\,\lambda_1(i,\tau,T,\upsilon)\le\lambda\le 0\}$$

$$\eta_i(T)=\begin{cases}\xi_i(T)/\|\xi_i(T)\|, & \xi_i(T)\ne 0,\\ 0, \quad \xi_i(T)=0.\end{cases}$$

Теорема. Пусть для игры (1) в позиции z_i^0, $i=1,2,...,m$, выполнены предположения 1 и 2 и T^*-минимальное значение $T\le\theta$, для которого предположения 1 и 2 выполнены. Тогда для позиции z_i^0, $i=1,2,...,m$, разрешима задача преследования, причем T^*-гарантированное время поимки.

Литература

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.-500.
2. Agrawal O.P. A Formulation and Numerical Scheme for Fractional Optimal Control Problems// J.Vibr. Control. 2008. V.14.No. 9-10. P. 1291-1299.
3. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования// Мат. Сборник, 1980, Т. 112, є 3, с. 307-330.
4. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. Учеб. пособ. – М.: МГУ, 1990. – 197 с.
5. Mamatov M.SH., Alimov H.N. The pursuit problem described by differential equations of fractional order. European Applied Sciences: challenges and solutions, proceedings of the 6^{th} International scientific conference. ORT Publishing. Stuttgart. 2016. P.14-18.
6. Mamatov M.SH., Alimov H.N. By solving the problem of harassment described by differential equations of fractional order// Theoretical and Applied Sciences in the USA, proceedings of the 7^{th} International scientific conference. CIBUNET Publishing. New York, USA. 2016. P. 6-10.
7. Mamatov M.SH., Durdiev D.K., Alimov H.N. On the Theory of Fractional Order Differential Games of Pursuit// Journal of Applied Mathematics and Physics, 2016, 4, pp.1355-1362.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Маматов М.Ш., Алимов Х.Н.

[1]Национальный университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент

[2]Самаркандский государственный университет, Узбекистан, Самарканд

E-mail: [1]mamatovmsh@mail.ru, [2]xakim-alimov@mail.ru

Рассмотрим движение объекта, эволюция которого в конечномерном евклидовом пространстве R^m описывается дифференциальным уравнением дробного порядка вида

$$D^\alpha z=Az+f(u,\upsilon),\ n-1<\alpha<n, \tag{1}$$

где $z\in R^m$, $m\ge 1$; $D^\alpha-$оператор дробного дифференцирования порядка α , $n-1<\alpha<n$, $\alpha\in\mathbb{N}$, $t\in[0,T]$, $\quad A-m\times m-$постоянная матрица, $u,\upsilon-$управляющие параметры $u-$управляющий параметр преследующего игрока, $u\in P\subset R^p$, $\upsilon-$ управляющий параметр убегающего игрока, $\upsilon\in Q\subset R^q$, P и Q-

компакты, $f-$ непрерывное отображение множества $P\times Q$ в R^m. Дробную производную будем понимать в смысле Римана-Лиувиля, Капуто или Миллера – Росса.

Напомним, что если дробная производная в смысле Римана –Лиувиля порядка α от $z(t)$, $z:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^m$,- некоторой n раз непрерывно дифференцируемой функции, определяется выражением

$$D^\alpha z(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\int_0^t\frac{z(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau,$$

где $\Gamma(\bullet)-$ гамма-функция. Если дробная производная в смысле Капуто то оно определяется выражением

$$D^\alpha z(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t\frac{z^n(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau.$$

Справедливо следующая формула

$$D^\alpha z(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}z^{(k)}(0)+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t\frac{z^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau.$$

Оператор дробного дифференцирования в смысле Миллера – Росса определяется выражением

$$D^\alpha z(t)=D^{\alpha_1}D^{\alpha_2}...D^{\alpha_m}z(t),$$

где $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)-$ мультииндекс, а $z(t)$ предпологается достаточное число раз непрерывно дифференцируемой функцией.

Кроме того в пространстве R^m выделено терминальное множество M. Цель преследующего игрока вывести z на множество M, убегающий игрок стремится этому помешать.

Рассматривается задача преследования о сближении траектории конфликтно-управляемой системы (1) с терминальным множеством M за конечное время из заданных начальных положений z_0. Будем говорить, что дифференциальная игра (1) может быть закончена из начального положения z_0 за время $T=T(z_0)$, если существует такая измеримая функция $u(t)=u(z_0,\upsilon(t))\in P,\ t\in[0,T]$, что решение уравнения

$$D^\alpha z=Az+f(u(t),\upsilon(t)),\quad z(0)=z_0$$

принадлежит множеству M в момент $t=T$ при любых измеримых функциях $\upsilon(t)$, $\upsilon(t)\in Q$, $0\le t\le T$.

В настоящее время, под влиянием бурного научно-технического и технологического прогресса дробное исчисление превратилось в мощное научное направление, включающее как фундаментальные, так и прикладные исследования. Настоящая заметка, посвящена получению достаточных условий завершения преследования для управляемых систем дробного порядка и примыкает к исследованиям[1-6].

Перейдем к формулировке основных результатов. Всюду в дальнейшем: а) терминальное множество M имеет вид $M=M_0+M_1$, где M_0-линейное подпространство R^m, M_1-подмножество подпространства $L-$ортогонального дополнения M_0; б) $\pi-$оператор ортогонального проектирования из R^m на L; в) под операцией $\overset{*}{-}$ понимается операция геометрического вычитания.

Пусть $E_\eta(A;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\Gamma(k\eta^{-1}+\mu)}-$ обобщенная матричная функция Миттаг-Лефлера, $h(t,z^0)$ - решение однородной системы (1) и $\tau-$ произвольное неотрицательное число, $0\le\tau_0\le\tau_1\le...\le\tau_k=\tau-$ произвольное разбиение отрезка $[0,\tau]$, $\upsilon(\tau)$, $\tau_i\le\tau\le\tau_{i+1}-$произвольная измеримая функция со значениями из Q: $\upsilon(r)\in Q$ почти для всех $[\tau_i,\tau_{i+1}]$, $i=0,1,...,k-1$. Определим индуктивно множества

$$A_{i+1}=\bigcap_{\upsilon(r)}\left[A_i+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(t-r)^{\alpha-1}\pi\mathrm{E}_{\frac{1}{\alpha}}(A(t-r)^\alpha;\alpha)f(P,\upsilon(r)dr\right],\quad A_0=-M.$$

Множество A_kназывается альтернированной суммой с начальным значением $A_0=-M$. Предел альтернированных сумм при безграничном измельчении разбиений отрезка $[0,\tau]$ называется альтернированным интегралом для игры (1) и обозначается

$$A(\tau)=\int_{-M,0}^{\tau}(t-r)^{\alpha-1}\pi\mathrm{E}_{\frac{1}{\alpha}}(A(t-r)^\alpha;\alpha)f(P,Q)dr.$$

Теорема. Пусть $\tau = \tau_1$- наименьшее из тех τ, выполняется включение

$$-\pi h(\tau, z^0) \in A(\tau)$$

тогда из начального положения z_0 можно завершит преследование за время, не превосходящее числа $T(z_0) = \tau_1$.

Литература

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.-500.
2. Agrawal O.P. A Formulation and Numerical Scheme for Fractional Optimal Control Problems// J.Vibr. Control. 2008. V.14.No. 9-10. P. 1291-1299.
3. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования// Мат. Сборник, 1980, Т. 112, є 3, с. 307-330.
4. Mamatov M.SH., Alimov H.N. The pursuit problem described by differential equations of fractional order. European Applied Sciences: challenges and solutions, proceedings of the 6^{th} International scientific conference. ORT Publishing. Stuttgart. 2016. P.14-18.
5. Mamatov M.SH., Alimov H.N. By solving the problem of harassment described by differential equations of fractional order// Theoretical and Applied Sciences in the USA, proceedings of the 7^{th} International scientific conference. CIBUNET Publishing. New York, USA. 2016. P. 6-10.
6. Mamatov M.SH., Durdiev D.K., Alimov H.N. On the Theory of Fractional Order Differential Games of Pursuit// Journal of Applied Mathematics and Physics, 2016, 4, pp.1355-1362.

ДВОЙСТВЕННЫЙ АЛГОРИТМ В ЛИНЕЙНОЙ МАКСИМИННОЙ ЗАДАЧЕ СО СВЯЗАННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Маматов А.Р.

(Самаркандское высшее военное автомобильное командно-инженерное училище, Узбекистан, Самарканд)

e-mail:akmm1964@rambler.ru

Наиболее трудным при разработки алгоритмов решения многоэкстремальных задач является составление блока алгоритма, осуществляющей переход с одного локального оптимального плана на другой план, при котором значение целевой функции задачи улучшается.

Наряду с прямыми методами исследования экстремальных задач, важную роль играют двойственные методы [1,2], которые позволяют перехода к лучшему плану в смысле оптимизации целевой функции. Зачастую такое улучшение крайне сложно при использовании прямых методов.

В данной работе для линейной максиминной задачи со связанными переменными [2-7]

$$\varphi(x) = \min_{y \in Y(x)} (c'x + d'y) \to \max_{x \in X},$$

здесь $X = \{x \mid f_* \le x \le f^*\}, Y(x) = \{y \mid g_* \le y \le g^*, Ax + By = b\}, c = c(J)$, $x = x(J), f_* = f_*(J), f^* = f^*(J) - n$ - векторы ,$d = d(K), y = y(K), g_* = g_*(K), g^* = g^*(K) - l -$ векторы, $b = b(I) - m$ - векторы, $A = A(I, J), B = B(I, K)$ соответственно $m \times n$ и $m \times l$ матрицы;$rankB = m < l, I = \{1, 2, ..., m\}, J = \{1, 2, ..., n\}, K = \{1, 2, ..., l\}, \forall x \in X, Y(x) \ne \emptyset$ (вектор $x \in X$ называется стратегией (планом) первого игрока, вектор $y \in Y(x)$-стратегией второго игрока) на основе [4-7] предложен алгоритм, осуществляющий переход с одного локально-оптимального плана на другой план, при котором значение целевой функции задачи улучшается.

Литература

1. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А. И.* Конструктивные методы оптимизации. Ч.1. Линейные задачи.-Минск:Университетское.1984. 214 с.

2. *Иванилов Ю.П.* Двойственные полуигры// Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1972. N 4.c.3-9.

3. *Falk J.E.* Linear max-min problem// Math. prog. 1973, vol 5, N2.P.169 - 188.

4. *Маматов А.Р.* Двойственный алгоритм вычисления локального оптимума одной максиминной задачи со связанными переменными// Узбекский журнал Проблемы информатики и энергетики. 2000, N 1. с.7-12.

5. *Маматов А.Р.* Необходимые условия оптимальности "высокого порядка"в линейной максиминной задаче со связанными переменными// ЖВМиМФ,2010,Т.50,N6,стр.1017-1022.

6. *Маматов А.Р.* Двойственный алгоритм вычисления локального оптимума максиминной задачи со связанными // Тезисы Международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий - Аль-Хоразми 2016". Ташкент: НУУз, 2016 год. С.18-19.

7. *Маматов А.Р.* Поиск оптимальных стратегий в линейной максиминной задаче со связанными переменными// Тезисы докладов научного семинара "Кубатурные формулы и их приложения". Ташкент: НУУз, 2017 год. С.44.

Общие решения одного дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией

Муминов Ш.М., Мамадалиев Н.А.

Андижанский педагогический колледж, Национальный университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент
mgulomjon @bk.ru, M_numana59@mail.ru

В работах [1,2] рассматривались вопросы базисности и составления функции Грина а также спектральных задач с инволюцией типа Дирихле

$$-u^{''}(-x) - \lambda u(x) = f(x),\ u(-1) = u(1) = 0,$$

и типа Неймана

$$-u^{''}(-x) - \lambda u(x) = f(x),\ u^{'}(-1) = u^{'}(1) = 0,$$

где λ постоянное число, $f(x)$ непрерывная функция. Отметим, что в этих работах не указаны в явном виде общее решение уравнения

$$-u^{''}(-x) - \lambda u(x) = f(x),$$

что затрудняет рассмотреть другие краевые задачи.

В данной работе найдем общее решение уравнения (3) в явном виде и решение краевых задач (1) и (2).

Данная работа состоит из трчх этапов: 1) нахождение общего решения уравнения (1), 2) обоснование найденного общего решения уравнения (1), 3) краевые задачи уравнения(3), т.е.согласно общий вид решения уравнения (1) можно рассматреть краевые задачи типа Дирихле, Неймана и других.

Литература

1. *Abdizhahan M.Sarsenbi.* The theorem on the basis property of eigenfunctions of second order differential operators with involition, AIP,1759, 020030(2016);(DOI:10.1063/1.4959644)

2. *Allaberen Ashuraliev and Abdizhahan M.Sarsenbi.* Green's function of the second order differential operators with involition,AIP Conference Proceedings, 1759,020002(2016); Doi: 0.1063/1.4959616

Об одном дифференциальном уравнении с инволюцией

Муминов Ш.М.

Андижанский педагогический колледж,Андижан
mgulomjon @bk.ru

В статье [1] рассматривается для оператора с инволюцией

$$Lu \equiv \alpha u^{''}(x) - u^{''}(-x) - \lambda u(x),$$

краевая задача с граничным условием типа Неймана

$$\alpha u^{''}(x) - u^{''}(-x) - \lambda u(x) = f(x) \tag{1}$$

$$u^{'}(-1) = 0, \;\; u^{'}(1) = 0,$$

где $\lambda-$ постоянное число, $f(t)-$ непрерывная функция.

В работе [2] краевой задачи рассматривалось для уравнения (1) при $\alpha = 0$, но в обеих статьях общее решение уравнения не приведено. В данной работе приводим общее решение этого уравнения.

Литература

1. *Abdizhahan M.Sarsenbi.* The theorem on the basis property of eigenfunctions of second order differential operators with involition, AIP,1759, 020030(2016);(DOI:10.1063/1.4959644)

2. *Allaberen Ashuraliev and Abdizhahan M.Sarsenbi.* Green's function of the second order differential operators with involition,AIP Conference Proceedings, 1759,020002(2016); Doi: 0.1063/1.4959616

КОЭФФИЦИЕНТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Мирзаев А.Н.[1]

[1] Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразми, Узбекистан, Ташкент

Как известно, уравнений математической физики описывают природные или технические процессы, происходящие в реальных объектах. Коэффициенты этих уравнений являются некоторыми физическими параметрами этих объектов. Значения этих параметров определяются на основе измерений или экспериментов. Таким образом, эти значения могут содержать погрешности, связанные с трудностью измерений или экспериментов. Эти погрешности (приводят) могут создавать погрешности в значениях решений задач. Оценка величины погрешностей результатов является как бы отдельной задачей, которую необходимо решать параллельно с основной задачей, что-бы иметь представление о достоверности полученных результатов.

Для пояснения вышеизложенных соображений рассмотрим дифференциальные уравнения в частных производных параболического типа в каноническом виде [1]

$$c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x}\left(k_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + f(x,t). \tag{1}$$

Уравнение (1) можно рассматривать как уравнение теплопроводности. В этом случае $c(x,t)$ - коэффициент теплоемкости, $k_i(x,t)$ - коэффициент теплопроводности в направлении оси OX_i - если среда анизотропная. В случае изотропной среды в каждой точке $x(x_1,x_2,x_3)$ будет один коэффициент $k(x,t)$ по всем направлениям. $f(x,t)$ - плотность тепловых источников. В большинстве случаев, эти коэффициенты полагают постоянными, считая среду однородной и изотропной. Эти, упрощающие задачу предположения, могут быть не всегда уместными, и они создают определенные погрешности в решении задачи. Устойчивость решений дифференциальных уравнений относительно возмущений коэффициентов называется коэффициентной устойчивостью или сокращенно ко устойчивостью [2].

Уравнение (1) можно рассматривать как уравнение диффузии или уравнение переноса. Если уравнение (1) рассматривать как уравнение фильтрации, описывающее движении подземных вод, нефти или газа в пористых средах, то коэффициенты $c(x,t)$, $k_i(x,t)$ представляют собой соответственно коэффициенты упругоемкости и фильтрации. Эти коэффициенты определяются на основе экспериментов, проводимых на разведывательных или эксплуатационных скважинах. На основе этих данных определяются коэффициенты по всей исследуемой территории. Точность этих коэффициентов зависит от точности экспериментов, числа и густоты этих наблюдательных скважин. На основа этих данных строится математическая модель и решаются производственные задачи, связанные с эксплуатацией подземных вод, нефти и газа, а также задачи связанные с прогнозными вопросами. Оценка точности этих прогнозов является одной из практически актуальных задач. В этом направлении проведены ряд работ [3], [4], [5], в которых наблюдаются различные подходы решения задачи.

В данной работе рассмотрены методы оценки погрешностей возникающих из-за погрешностей в значениях коэффициента, тепловых источников $f(x,t)$, и краевых условий. Для исследования качественной и количественной картины процесса рассмотрен одномерный стационарный случай

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x) = 0, \\ u(a) = A, \\ u(b) = B. \end{cases} \tag{2}$$

Решение задачи (2) имеет вид

$$u(x) = A - \frac{1}{k}\int\limits_a^x dx\int\limits_a^x f(x)dx + \frac{(B-A)(x-a)}{b-a} + \frac{x-a}{K(b-a)}\int\limits_a^b dx\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{3}$$

Если погрешности определения значений K, A, f обозначим через δ_K, δ_A, δ_f, то для оценки общей погрешности возникающей из-за этих погрешностей используя формулу (3) можно получить неравенство

$$||\tilde{u} - u|| \leq \frac{(b-a)^2 \cdot \delta_k}{K(K+\delta)}\,||f||_c + 2\delta_A + \frac{(b-a)^2}{K}\delta_f. \tag{4}$$

Неравенство (4) дает определенное представление о величине погрешности, а также о вкладе каждой отдельно взятой погрешности параметров. Тем самым мы можем сформировать рекомендации по точности определения этих параметров.

При решении прикладных задач, обычно, уравнение (1) и задача (2) приводятся к безразмерной форме. Поэтому неравенсту (4) тоже приводят к безразмерной форме и получается оценка для относительной погрешности. Оценку (4) можно рекомендовать и для нестационарного случая. Как известно, для краевых задач со стационарными краевыми условиями процесс со временем стабилизируется, то есть, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\partial u}{\partial t}$ и получаем стационарную задачу (2). Естественно полагать, что оценка (3) дает оценку для максимально возможной погрешности. Следовательно, она дает оценку для верхней грани погрешности.

Литература

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. "Наука М., 1977.

2. *Самарский А.А.* Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами // ДАНСССР. 1958 год. Т. 121, № 2. С. 225-228.

3. *Камынин Л.И.* О существовании решения краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами // Изв.АНСССР (сер.матем). 1964 год. Т. 28, № 4. С. 721-744.

4. *Аргенбаева Р.У.* О граничных задачах для одного параболического уравнения с разрывными коэффициентами, когда линия разрыва выходит на границу. // Автореф. дисс. к.ф.-м.н. Алма-ата. 1977 год.

5. *Камынин Л.И., Масленникова В.Н.* О принципе максимума для параболического уравнения с разрывными коэффициентами // Сибирский матем. Журнал. 1961 год. Т. 2, № 3. С. 384-399.

ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Кодирова Ш.

[1] Национальный университет Узбекистана им.М.Улугбека, Узбекистан, Ташкент
Shohida.93@mail.ru

Пусть имеется некоторая динамическая система, состояние которой в каждый момент времени t описывается вектор-функцией $x(t) \in R^n$. На состояние системы можно воздействовать, изменяя управляемые параметры $u(t) \in U_t \subseteq R^r$. Будем рассматривать класс кусочно-непрерывных управлений $u(t)$.

При заданном управлении $u(t)$ состояние системы изменяется во времени согласно закону:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)). \tag{1}$$

Рассмотрим задачу оптимального управления данной системой: определить управление $u^*(t)$, доставляющее экстремум критерию качества вида:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t))dt + \psi_0(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) \to max. \tag{2}$$

При этом первое слагаемое (интегральная часть критерия) характеризует качество функционирования системы на всем промежутке управления $[t_0, t_1]$, тогда как второе слагаемое (терминальный член) - только конечный результат воздействия управления, определяемый начальным $x(t_0)$ и конечным $x(t_1)$ состояниями и, возможно, моментами начала и окончания управления t_0 и t_1. В зависимости от физического смысла задачи интегральная или терминальная часть критерия может быть равна нулю.

На процесс функционирования системы могут накладываться дополнительные ограничения в форме краевых условий:

$$\psi_i(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) = 0, \; i = 1, ..., m. \tag{3}$$

задающие множества допустимых начальных и конечных состояний системы и моментов начала и окончания управления.

Важным частным случаем (3) являются условия вида: $x(t_0) - x_0 = 0$; $\quad x(t_1) - x_1 = 0$, соответствующие закрепленному левому или правому концу фазовой траектории.

Моменты времени начала и окончания управления, t_0 и t_1, могут полагаться как известными, тогда говорят о задаче с фиксированным временем управления, или неизвестными (задача с нефиксированным моментом начала или окончания управления).

Необходимые условия оптимальности в данной задаче, точнее, необходимые условия сильного локального максимума даются принципом максимума Понтрягина.

Задача Лагранжа. Пусть $n-$ фиксированное натуральное число, $k, m \geqslant 0-$ целое, причем $k \leqslant n$, $\quad f_i,\, i = \overline{0, m}, \quad \psi_i,\, i = \overline{0, m}, \quad \varphi_i,\, i = \overline{0, k}-$ известные функции своих аргументов, $\triangle$ $-$ заданный отрезок числовой прямой, $t_0, t_1 \in \triangle$, $\quad t_0 < t_1$, $\quad x(\cdot) \equiv (x_1(\cdot), ..., x_n(\cdot)) \in C_n^1(\triangle)$. Вектор функции $x(\cdot)$ называется фазовой переменной, $\dot{x}(\cdot)-$ управлением, $\xi = (x(\cdot), \dot{x}(\cdot), t_0, t_1)-$ управляемым процессом.

Зададим функционалы

$$\mathfrak{B}_i(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)), \quad i = \overline{0, m}.$$

Постановка задачи. Задачей Лагранжа в Понтрягинской форме называется следующая экстремальная задача:

$$\mathfrak{B}_0(\xi) \to inf \tag{4}$$

$$\mathfrak{B}_i(\xi) \leqslant 0 \quad i = \overline{1, m'}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{B}_i(\xi) = 0 \quad i = \overline{m' + 1, m}, \tag{6}$$

$$\dot{x}_j(t) = \varphi_j(t, x(t), \dot{x}(t)), \quad j = \overline{1, k}, \tag{7}$$

(7) -называется дифференциальной связью.

Определение. Будем говорить, что точка $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{\dot{x}}, \hat{t}_0, \hat{t}_1)$- в задаче (4) - (7) доставляет слабый локальный минимум (максимум), если существует $\delta > 0$, что для любой допустимой функции $\xi = (x(\cdot), \dot{x}, t_0, t_1)$ для которой $\|\xi - \hat{\xi}\| < \delta$ выполняется

$$\mathfrak{B}_0(\xi) \geqslant \mathfrak{B}_0(\hat{\xi}) \quad \Big(\mathfrak{B}_0(\xi) \leqslant \mathfrak{B}_0(\hat{\xi})\Big).$$

Теорема (принцип максимума Понтрягина). Если $\hat{\xi}$ есть оптимальный процесс для задачи (4) - (7) и $\psi_j(x(t_0), x(t_1)) = 0, \quad j = \overline{1,s}, \quad \dot{x} \in U$ ($U-$ произвольное множество из R^r), то найдутся множители Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m), \quad p(\cdot) \in KC^1([t_0,t_1], R^n), \quad l = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$ не равные нулю одновременно и такие, что для функции Лагранжа

$$\mathfrak{L} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t,x,\dot{x}) + p(t)(\dot{x} - \varphi(t,x,\dot{x})) \right) dt + l,$$

выполнены условия:

а) стационарности по $x-$ уравнение Эйлера:

$$p(t) + p(t)\hat{\varphi}_x(t) = \hat{f}_x(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

$$f(t,x,\dot{x}) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t,x,\dot{x});$$

б) трансверсальности по $x: p(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x_0}, \quad p(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x_1};$

в) оптимальности по $\dot{x}: f(t,\hat{x}(t),\dot{x}) - p(t)\varphi(t,\hat{x}(t),\dot{x}) \geqslant \hat{f}(t) - p(t)\hat{\varphi}(t) \quad \forall t \in [t_0,t_1], \forall \dot{x} \in U;$

г) стационарности по $t_k, k = 0,1: -\hat{f}(\hat{t_0}) + \hat{l_{t_0}} + \hat{l_{x_0}}\hat{\varphi}(t_0) = 0, \quad \hat{f}(\hat{t_1}) + \hat{l_{t_1}} + \hat{l_{x_1}}\hat{\varphi}(t_1) = 0;$

д) дополняющей нежесткости: $\lambda_i \mathfrak{B}_i(\hat{\xi}) = 0, \quad i = \overline{1,m'};$

е) неотрицательности: $\lambda_i \geqslant 0, \quad i = \overline{0,m'}.$

Литература

1. *В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров.* Сборник задач по оптимизации. Москва, 1984
2. *А.В. Ожегова, Р.Г. Наибуллин.* Вариационное исчисление: задачи, алгоритмы, примеры. Казань, 2013

INTEGRAL CHEGARALI DIFFERENSIAL O‘YINDA YETARLI SHARTLAR

Quchqarova S.A[1], To‘xtasinov M [2]

[1,2] Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy Universiteti, O‘zbekiston, Toshkent
kuchkarov1@yandex.ru, mumin51@mail.ru

Biz quyidagi differensial tenglama orqali ifodalanuvchi bir nechta quvuvchi va bitta qochuvchiga ega bo‘lgan differensial o‘yinni o‘rganamiz [1]:

$$P_i : \dot{x}_i = u_i, \quad x_i(0) = x_{i0}, \tag{1}$$

$$E : \dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \tag{2}$$

bu yerda $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^n$, $x_{i0} \neq y_0$, P_i, $i = 1,\ 2,\ \dots,\ m$, quvuvchilarning boshqaruv parametri $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{in})$ va E qochuvchiniki $v = (v_1, \dots, v_n)$.

Boshqaruv $v_1(t), \dots, v_n(t), u_{i1}(t), \dots, u_{in}(t)$ lar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$\|v_K(\cdot)\|^2 = \int_0^\infty \sum_{j \in K} |\ v_j(t)\ |^2\, dt \leq \sigma_K^2, \quad K \subset \{1, \dots, n\} = N$$

$$\|v_j(\cdot)\|^2=\int_0^\infty \mid v_j(t)\mid^2 dt\le \sigma_j^2,\quad j\in N\backslash K$$

$$\|u_{iK}(\cdot)\|^2=\int_0^\infty\sum_{j\in K}\mid u_{ij}(t)\mid^2 dt\le \rho_{iK}^2,\quad i=1,\dots,m,\ K\subset\{1,\dots,n\}=N$$

$$\|u_{ij}(\cdot)\|^2=\int_0^\infty \mid u_{ij}(t)\mid^2 dt\le \rho_{ij}^2,\quad i=1,\dots,m,\ j\in N\backslash K.$$

Ta'rif. Berilgan (1), (2) o'yinda d ($d\le m$) karrali tutush ro'y beradi deymiz, agar shunday τ vaqt momenti mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $v(t),\ t\ge 0$ qochuvchining joiz boshqaruvi uchun shunday joiz $u_i(t)=u_i(t,x_i^0,y^0,v(t))$, $t\ge 0, i=1,\dots,n$ boshqaruv maxjud bo'lsaki uning uchun $x_i(t)=y(t)$ tenglik d ta i lar uchun τ momentdan boshlab o'rinli bo'lsa.

Teorema 1. Agar

$$\sigma_K<\rho_{iK},\quad i=1,\dots,d,\ \sigma_j<\rho_{ij},\quad i=1,\dots,d,\quad j\in N\backslash K,$$

o'rinli bo'lsa, d karrali tutish ro'y beradi.

Isbot. Quyidagicha belgilash kiritamiz

$$\theta_i=\frac{(y_K^0-x_{iK}^0)^2}{(\rho_{iK}-\sigma_K)^2}, i=1,\ 2,...,\ d.$$

Quvuvchilarning strategiyalarining K koordinatalarini quyidagicha aniqlaymiz:

$$u_{iK}(t)=\begin{cases}\frac{1}{\theta_i}(y_K^0-x_{iK}^0)+v_K(t), & 0\le t\le\theta_i,\\ v_K(t), & t\ge\theta_i,\end{cases}\quad i=1,\ 2,...,\ d. \tag{3}$$

$u_{iK}(t)$ ning joizligini tekshiramiz, ya'ni qyidagi tengsizlikni tekshiramiz

$$\int_0^\infty u_{iK}^2(t)dt\le\rho_{iK}^2$$

Haqiqatdan ham, $\int_0^\infty v_K^2(t)dt\le\sigma_K^2$ tengsizlik va θ_i ta'rifdan foydalangan holda

$$\int_0^\infty u_{iK}^2(t)dt=\int_0^{\theta_i}u_{iK}^2(t)dt+\int_{\theta_i}^\infty u_{iK}^2(t)dt=\int_0^{\theta_i}\left|\frac{1}{\theta_i}(y_K^0-x_{iK}^0)+v_K(t)\right|^2dt+$$

$$+\int_{\theta_i}^\infty v_K^2(t)dt=\frac{1}{\theta_i}\left|y_K^0-x_{iK}^0\right|^2+\frac{2}{\theta_i}\int_0^{\theta_i}\left(y_K^0-x_{iK}^0\right)v_K(t)+\int_0^\infty v_K^2(t)dt\le$$

$$\le(\rho_{i1}-\sigma_K)^2+\frac{2}{\theta_i}\left|y_K^0-x_{i1}^0\right|\cdot\int_0^{\theta_i}|v_K(t)|\,dt+\sigma_K^2 \tag{4}$$

tengsizlikni kelib chiqadi. Quyidagi tengsizlik o'rinli

$$\int_0^{\theta_i}|v_K(t)|\,dt\le\sqrt{\int_0^{\theta_i}1^2dt}\cdot\sqrt{\int_0^{\theta_i}v_K^2(t)dt}\le\sqrt{\theta_i}\sigma_K.$$

U holda (4) dan hamda θ_i ta'rifidan

$$\int_0^\infty u_{iK}^2(t)dt\le(\rho_{iK}-\sigma_K)^2+\frac{2}{\theta_i}\left|y_K^0-x_{iK}^0\right|\cdot\sqrt{\theta_i}\sigma_K+\sigma_K^2=$$

$$=(\rho_{iK}-\sigma_K)^2+2(\rho_{iK}-\sigma_K)\sigma_K+\sigma_K^2=\rho_{iK}^2.$$

Agar P_i quvuvchi (3)ni qo'llasa, barcha $t\ge\theta_i$ va $i=1,\ 2,\ ...,\ d$ lar uchun $x_{iK}(t)=y_K(t)$ tenglik o'rinli. Quyidagi $\tau_0=\max\limits_{i\in\{1,\,2,\,...,d\}}\theta_i$ belgilash kiritamiz. Unda $x_{iK}(t)=y_K(t)$, $t\ge\tau_0$ bo'ladi.

$\theta_{ij} = \left(y_j(\tau_0) - x_{1j}^0\right)^2 / (\rho_{ij} - \sigma_{j1})^2$ bo‘lsin. P_i quvuvchining strategiyasini quyidagicha

$$u_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_{ij}}\left(y_j(\tau_0) - x_{ij}^0\right) + v_j(t), & 0 \le t \le \theta_{ij}, \\ v_j(t), & t > \theta_{ij}. \end{cases}$$

Agar

$$\int_0^{\theta_{ij}} v_j^2(t)dt \le \sigma_j^2 \tag{5}$$

bo‘lsa, u holda

$$\int_0^{\theta_{ij}} u_{ij}^2(t)dt \le \rho_{ij}^2$$

va $x_{ij}(\theta_{ij}) = y_j(\theta_{ij})$ larni ko‘rsatish qiyin emas, bundan esa $x_i(t) = y(t)$ tenglik barcha $t \ge T = \max(\tau_0, \theta_{ij})$ lar uchun o‘rinli bo‘ladi.

(5) P_i quvuvchining strategiyasi τ vaqt momentida quvish yakunlanishini kafolataydi.

Teorema 2. Agar

$$\sigma_K < \rho_{iK}, \quad i = 1, \ldots, d, j \in K, \sigma_j < \rho_{ij}, \quad i = 1, \ldots, d, \quad j \in N \backslash K \backslash \{s\},$$

$$\sigma_s^2 < \rho_{1s}^2 + \rho_{2s}^2 + \cdots + \rho_{ds}^2$$

o‘rinli bo‘lsa, 1 karrali tutish ro‘y beradi.

Adabiyot

1. *A.SH.Kuchkarov, G.I.Ibragimov and M.Khakestari.* On a linear differential game of optimal approach of many pursuers with one evader // Journal of Dynamical and Control Systems. 2013, 19(1). pp.1-15.

ТЕОРЕМЕ О ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ ЗАДАЧАМИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ, УПРАВЛЯЕМОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Сотволдиев А.И.

Ташкентский финансовый институт, Узбекистан, Ташкент
akmal.sotvoldiyev@mail.ru

В работе [1] приведены две теоремы о взаимосвязи между разрешимостью задачи преследования, управляемостью и устойчивостью линейных систем автономной

$$\dot{z} = Az, \tag{1}$$

управляемой

$$\dot{z} = Az + Bu, \tag{2}$$

и дифференциально-игровой

$$\dot{z} = Az + Bu + Cv. \tag{3}$$

Здесь $z \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^k$, $v \in Q \subset \mathbb{R}^q$, A, B, C – постоянные матрицы соответствующих размерностей.

В данной работе получен новый результат в виде теоремы для установления взаимосвязи между разрешимостью задач (1)-(3). Пусть в процессе движения функция управления убегающего $v(\cdot)$ удовлетворяет геометрическому ограничению $v(t) \in Q$ почти всюду, где Q – ограниченное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^q$, а функция управления преследователя $u(\cdot)$ – интегральному ограничению

$$\int_0^\infty |u(t)|^p dt \le \rho^p, \quad \rho > 0, \quad p > 1. \tag{4}$$

Цель преследователя, а при отсутствии убегающего цель управления состоит в осуществлении равенство $z(t) = 0$ при некотором t ($t > 0$). Здесь $z(t)$ – решение уравнения (3) с начальным условием

$z(0) = z_0$, когда игроками выбраны конкретные способы управления векторами u и v. Цель убегающего – противоположная.

Обозначим через U совокупность всех измеримых функций $u(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^k$, удовлетворяющих ограничению (4).

Предположим, что все жордановы клетки матрицы A, соответствующие тем собственным числам λ, для которых $\operatorname{Re}\lambda = 0$, являются простыми, $B\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$ и $S \subset CQ$, где $S = \{|x| \le 2\delta \mid x \in \mathbb{R}^n, \delta > 0\}$.

Тогда справедлива следующая

Теорема. *Следующие утверждения равносильны:*

а) система (1) сильно неустойчива по Ляпунову;

б) множество 0-управляемости системы (2) ограничено;

в) существует положительное число $\rho_0 = \rho_0(A, B, C, Q)$ такое, что при $\rho \le \rho_0$, множество начальных точек z_0 ($z_0 \ne 0$), из которых можно завершить преследования в игре (3), пусто.

Литература

1. *Кучкаров А.Ш., Сотволдиев А.И.* Связь между задачами преследования, управляемости и устойчивости в линейных системах // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых "Операторные алгебры и смежные проблемы". Ташкент, 12-14 сентября, 2012 г. С. 169-170.

2. *Азамов А.А., Кучкаров А.Ш., Саматов Б.Т.* О связи между задачами преследования, управляемости и устойчивости в целом в линейных системах с разнотипными ограничениями // ПММ. 2007. Том 71, вып. 2, С. 259-263.

3. *Кучкаров А.Ш., Фазылова Г.А.* Взаимосвязь между задачами преследования, управляемости и устойчивости в линейных системах с разнотипными ограничениями // ПММ. 2012. Том 76, вып. 2, С. 247-255.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ЎЙИННИНГ ҚУВЛАШ МАСАЛАСИНИ ВОЛЬТЕРРА ОПЕРАТОРИ ЁРДАМИДА ЕЧИШ

Тўхтасинов М.[1], Турсунов Б.[2]

1 М.Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети, Ўзбекистон, Тошкент,
mumin51@mail.ru

2 З.М.Бобур номидаги Андижон Давлат университети, Ўзбекистон, Андижон
bekzodbek19934646@mail.ru

Вольтерра оператори тушунчаси дифференциал, интеграл, интегродифференциал тенгламаларга тегишли ва бошқа кўп тадқиқотларда муҳим ҳисобланади. Унинг кўриниши қуйидагича бўлиб

$$(Fv)(t) = \int_0^t K(t,s)v(s)\,ds, \tag{1}$$

келиб чиқиш тарихи итальян олими В.Волтерранинг ишларига бориб тақалади. Бизнинг ушбу ишимизда дифференциал ўйинларнинг қувлаш масаласида стратегиялар синфини ташкил этувчи квазистратегияни қуришимизда Вольтерра оператори бошланғич тушунча ҳисобланади. Бунда шуни таъкидлаш лозимки, квазистратегияни қуришда, Вольтерра операторига қараганда умумийроқ бўлган таърифдан фойдаланамиз.

Ҳар бир $\gamma \in [0, 1]$ га B тўпламда $v(\gamma)$ эквивалентлик муносабати мос қўйилган. Яъни, B дан олинган x, y элементлар бу бинар муносабатни қаноатлантиришса, улар $v(\gamma)-$ эквивалент деб атаймиз. Бунда фараз этиладики, қурилаётган муносабатнинг $\Re = \{v(\gamma)|\gamma \in [0, 1]\}$ бирлашмаси қуйидаги учта шартни қаноатлантиради:

V_0) $\gamma = 0$ $v(0) = B^2$ муносабатга мос келади (яъни, ихтиёрий икки элемент $v(0)-$ эквивалент);

V_1) $\gamma = 1$ тенглик муносабатига мос келади (яъни, иккита турли элементлар $v(1)-$ эквивалент бўла олмайди);

V_2) Агар $\gamma > \eta$ бўлса $v(\gamma) \subset v(\eta)$ бўлади (яъни, $\gamma > \eta$ бўлганда ихтиёрий икки элемент $x, y \in B$ $v(\gamma)-$ эквивалент бўлишса, улар $v(\eta)-$ эквивалент ҳам бўлишади).

1-таъриф. Агар ҳар бир $\gamma \in (0,1)$ ва $(x,y) \in v(\gamma)$ шартни қаноатлантирувчи барча $x, y \in B$ лар учун $(Fx, Fy) \in v(\gamma)$ муносабат бажарилса $F : B \to B$ операторини $\Re$ бирлашмадаги Вольтерра оператори деб атаймиз.

Энди А.Н.Тихонов маъносидаги Вольтерра операторининг таърифини келтирамиз

2-таъриф. $[a,b]$ оралиқда аниқланган ихтиёрий иккита $v_1(s)$, $v_2(s)$ функцияларда $v_1(s) = v_2(s)$, $0 \leq s \leq t$ тенгликдан уларнинг образлари бўлган $u_1(s) = (Fv_1)(s)$, $u_2(s) = (Fv_2)(s)$ функциялар учун $u_1(s) = u_2(s)$, $0 \leq s \leq t$ тенглик ихтиёрий $a < t \leq b$ учун ўринли бўлса, бундай F оператор Вольтерра оператори деб аталади [1].

Бундан келиб чиқадики, Вольтерра оператори(Тихонов маъносида) $\Re = \{v(\gamma)|\gamma \in [0,1]\}$ бирлашманинг қуйидаги

$$(x,y) \in v(\gamma) \Leftrightarrow x(t) = y(t)\ \forall t \in [a, a+\gamma(b-a)]$$

муносабати орқали аниқланади.

Энди Вольтерра операторининг конкретлаштирилган таърифини берамиз

3-таъриф. Фараз этайлик ҳар бир $\xi \in [0, b-a]$ учун $\mu(e_\xi) = \xi$ бўлган $e_\xi \subset [a,b]$ ўлчовли тўплам мос қўйилган бўлсин. Бунда ихтиёрий $\xi, \eta \in [0,1]$, $\xi < \eta$ учун $e_\xi \subset e_\eta$ муносабат ўринли. Агар $F : B \to B$ оператор учун ҳар бир $\xi \in (0, b-a)$ ва ихтиёрий $x, y \in B$ да $x(s) = y(s)$, $s \in e_\xi$ эканлигидан $(Fx)(s) = (Fy)(s)$, $s \in e_\xi$ ўринли бўлса $v = \{e_\xi\}$ ўлчовли тўпламлар системасида F Вольтерра оператори берилган дейилади.

Вольтерра оператори дифференциал ўйинлар назариясининг қувлаш масаласида ўйинчиларнинг квазистратегияларини қуришда муҳим эканлигини кўриб чиқамиз. Қуйидаги чизиқли дифференциал ўйин масаласи берилган бўлсин

$$\dot{z} = Cz - u + v,\ z(0) = z_0,\ u(t) \in P(t),\ v(t) \in Q(t), \tag{1}$$

бу ерда $z \in R^n-$ фазовий вектор; $u(t)$, $v(t)-$ ўлчовли функциялар бўлиб, қувловчи ва қочувчининг бошқарувлари деб аталади. $P(t)$, $Q(t)$ −[0,T] да аниқланган кўп қийматли функциалар. Терминал тўплам қуйидаги кўринишга эга: $M = M^0 + M^1$, бунда M^0- R^n нинг фазоостиси, M^1- M^0 нинг R^n гача ортогонал тўлдирувчиси бўлган $L(M^0 \bigoplus L = R^n)$ фазоостининг қавариқ компакт тўплами. $\pi : R^n \to L$ ортогонал акслантиришни билдиради, $z(t, u(\cdot), v(\cdot))$ орқали эса $u = u(t) \in P(t)$, $v = v(t) \in Q(t)$ ларга мос келувчи (1) системанинг $z(0) = z_0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи $[0,T]$ оралиқдаги ечимини белгилаймиз.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз: $\widetilde{P} = \{u(\cdot) : u(t) \in P(t)\,\text{деярли барча t да},\ u(\cdot) \in L_{1,[0,T]}\}$, $\widetilde{Q} = \{v(\cdot) : v(t) \in Q(t)\,\text{деярли барча t да}, u(\cdot) \in L_{1,[0,T]}\}$,

4-таъриф. Агар шундай $F : \widetilde{Q} \to \widetilde{P}$ Вольтерра оператори мавжуд бўлсаки, ихтиёрий $v(\cdot) \in \widetilde{Q}$ учун $\pi z(T, Fv, v) \in M^1$ шарт бажарилса, (1) - ўйинда қувлаш масаласи T вақтда Вольтерра оператори ёрдамида тугади дейилади.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз: $\omega = \{\tau_0,\, \tau_1, ..., \tau_m\}$, бу ерда $0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_m = T$, $\omega -$ $[0,T]$ оралиқни бўлиш деб аталади.

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^{m} \Bigg(\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \Big(M(s) + \pi e^{(T-s)C} P(s) \Big) ds \overset{*}{-} \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{(T-s)C} Q(s) ds \Bigg),$$

бу ерда $M(\cdot)-$ кўп қийматли ўлчовли функция $\int\limits_0^T M(s)\,ds \subset M$ шартни қаноатлантиради [2].

Яна қуйидаги белгилашни киритамиз

$$\prod = \bigcap_{\omega} S(\omega),$$

бу ерда $S(\omega)$ тўпламларнинг кесишмаси барча $[0,T]$ оралиқни $\omega = \{\tau_0,\, \tau_1, ..., \tau_m = T\}$ бўлишлар орқали олиб борилади.

Теорема. *Бирор T вақт моментида*

$$\pi e^{\tau C} z_0 \in \prod$$

муносабат ўринли бўлсин. У ҳолда қувловчининг шундай F Вольтерра оператори мавжудки, унинг ёрдамида қувловчи T вақтда ўйинни тугатади.

Литература

1. *Лицына Е.* Линейные операторы Вольтерра в некоторых метрических пространствах // Труды семинара им. И.Г.Петровского. 2007. Вып. 26, С. 223-240.
2. *Азамов А., Саматов Б.Т.* О модифицированном третьем методе в задаче преследования // Неклассические задачи математической физики. Ташкент: ФАН, 1985. С. 174-184.

В ТРЕТЬЕМ МЕТОДЕ $\varepsilon-$ ПОЗИЦИОННЫЕ СТРАТЕГИИ

Тухтасинов М.Т.[1]

[1] Национальный университет Узбекистана им.М.Улугбека, Узбекистан, Ташкент
mumin51@mail.ru

В работе [1] приведены достаточные условия для завершения преследования в линейных дифференциальных игр, при различных модификациях методов теории дифференциальных игр. Важным результатом этой работы является то, что обобщение первого метода Понтрягина привело к созданию третьего метода. В свою очередь третий метод Н.Ю. Сатимова был обобщен А.Азамовым и Б.Т.Саматовым [2].

В настоящей работе показано, что при выполнении предположений работы [2] и еще одного дополнительного условия на параметры игры, преследование может быть завершено на любой окрестности терминального множества M. При этом для завершения игры строиться $\varepsilon-$ позиционная стратегия преследователя.

Рассматривается линейная дифференциальная игра преследования, описываемая уравнением

$$\dot{z} = Cz - u + v, \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{R}^n-$ фазовый вектор; $C-$ постоянная квадратная матрица порядка $n \times n$; $u \in P$, $v \in Q-$ управляющие параметры, причем $P, Q-$ непустые компактные подмножества пространства $\mathbb{R}^n$; терминальным множеством, на котором игра заканчивается, является непустое выпуклое замкнутое подмножество M пространства $\mathbb{R}^n$.

Уравнение (1), множества P, Q, M описывают дифференциальную игру двух игроков: преследующего, который распоряжается вектором u, и убегающего, который распоряжается вектором v.

Через $\Omega(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство, состоящее из всех непустых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. Через $\Gamma(M)$ обозначим всю совокупность суммируемых многозначных отображений $M(\cdot) : [0, \tau] \to \Omega(\mathbb{R}^n)$, для которых имеет место включение $\int\limits_0^\tau M(s)\, ds \subset M$ [2].

Известно, что если для данной начальной точки $z^0 \notin M$ при некотором моменте времени τ выполнено следующее включение

$$e^{\tau C} z^0 \in \bigcup_{M(\cdot)\in\Gamma(M)} \int\limits_0^\tau \left(\left(M(s) + e^{(\tau-s)C} P \right) \overset{*}{-} e^{(\tau-s)C} Q \right) ds, \tag{2}$$

то из точки z^0 возможно завершение преследования за времени τ [2]. При этом для завершения игры преследователь использует стробоскопическую стратегию.

Лемма. Пусть $\{\tau_i\}_{i=0}^k-$ последовательность моментов времени, занумерованных в порядке возрастания, таких, что $\tau_0 = 0$, $\tau_k = \tau$. Тогда для данного многозначного отображения $M(\cdot) \in \Gamma(M)$ верно следующее включение

$$\int\limits_0^\tau \left(\left(e^{-\tau C} M(s) + e^{-sC} P \right) \overset{*}{-} e^{-sC} Q \right) ds \subset \sum_{i=1}^k \left(\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left(e^{-\tau C} M(s) + e^{-sC} P \right) ds \overset{*}{-} \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} e^{-sC} Q ds \right).$$

Доказательство этой леммы следует из аддитивности интеграла и следующего включения

$$\int\limits_a^b \Big(F(s) \overset{*}{-} G(s) \Big)\, ds \subset \int\limits_a^b F(s)\, ds \overset{*}{-} \int\limits_a^b G(s)\, ds,$$

здесь $0 \le a < b$ и $F(\cdot)$, $G(\cdot) : [a, b] \to \Omega(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $\varepsilon > 0$, $W \subset \mathbb{R}^n$. Через $L(\varepsilon, W)$ обозначим совокупность всех измеримых функций $\omega(\cdot) : [0, \varepsilon] \to W$ [3].

Условие. Для произвольного $t \ge 0$ имеет место включение

$$\int\limits_a^b e^{-sC} P\, ds \subset \int\limits_a^b e^{-(t+s)C} P\, ds.$$

Определение 2. $\varepsilon-$ позиционной стратегией преследователя назовем отображение

$$P_\varepsilon : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to L(\varepsilon, P).$$

Определение 3. $\varepsilon-$ позиционной стратегией убегающего назовем отображение

$$Q_\varepsilon : \mathbb{R}^d \to L(\varepsilon, Q).$$

Определение 4. Будем говорить, что из начальной точки z^0 можно завершить игру преследования к моменту времени τ, если для любого положительного числа α существуют число $\varepsilon = \tau/k$, $k \in N$ и $\varepsilon-$ позиционная стратегия преследователя $P_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ так, что при любой $\varepsilon-$ позиционной стратегии $Q_\varepsilon(\cdot)$ убегающего, для соответствующего решения $z(t)$, $0 \le t \le \tau$ системы (1) имеет место включение $z(\tau) \in M_\alpha$, где $M_\alpha - \alpha$ окрестность множества M.

Теорема. *Пусть для данного начального положения $z^0 \notin M$ и некоторого момента времени τ выполнены включение (2) и условие. Тогда из начальной точки z^0 можно завершить игру преследования к моменту времени τ.*

Примеры.1. Пусть $C = \lambda E$, $\lambda \le 0$, $P = \rho K$, $Q = \sigma K$, $M = K$, $\rho > \sigma$, где K является единичным кубом с центром в нуле пространства $\mathbb{R}^n$; $E-$ единичная матрица порядка $n \times n$. Тогда выполнены все условия теоремы, так что из любого начального положения $z^0 \in \mathbb{R}^n$ можно закончить преследование.

2. Контрольный пример Понтрягина. Если в игре (1)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

где α, $\beta-$ положительные числа. Здесь $z = (z_1, z_2, z_3)$, $u = (0, \bar{u}, 0)$, $v = (0, 0, \bar{v}) \in \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu$, $||\bar{u}|| \le \rho$, $||\bar{v}|| \le \sigma$. Терминальным множеством является выпуклый замкнутый цилиндр в пространстве $\mathbb{R}^{3\nu}$. Тогда легко показать, что при выполнении неравенства $\rho > \sigma$, $\rho/\alpha > \sigma/\beta$ все условия теоремы выполнены, значит из всех начальных положений $z^0 \in \mathbb{R}^{3\nu}$ можно закончить преследование.

Литература

1. *Сатимов Н.* К задаче преследования в линейных дифференциальных играх // Дифф.уравнения. 1973. Т. 9, є 11. С. 2000-2009.

2. *Азамов А., Саматов Б.Т.* О модифицированном третьем методе в задаче преследования // Неклассические задачи математической физики. Ташкент: ФАН, 1985. С. 174-184.

3. *Azamov A.* On Pontryagin's second method in linear differential games of pursuit // Math. USSR-Sb., 1983. T. 46, є 3. P. 429-437.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ТЕПЛООБМЕНА В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Файзиев Ю.Э. Носирова Д.Е. Бутаева З.З.

Национальный университет Узбекистана им.М.Улугбека, Узбекистан, Ташкент
fayziev.yusuf@mail.ru

Этот тезис посвящен изучению управления процессом теплообмена. Задачи состоят в управлении процессом распространения тепла в прямоугольнике, одна из сторон которого поддерживается при заданных температурах, а остальные при нулевой температуре. Методы решения уравнений теплообмены с граничными и начальными условиями можно найти в книге [1].

Впервые подробное изложение вопросов управления системами с распределенными параметрами, описываемыми уравнениями с частными производными, было дано в книге [2]. Из результатов, относящихся к проблеме управления процессами, описываемыми уравнениями параболического типа, и частности процессом теплообмена, можно отметить работы [3] - [4]. Отметим, что с результатами в случае управления процессом теплообмена вы можете познакомиться в работах академика Ш.О. Алимова (см. [5] - [9]) и в работах [10] - [12].

Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t),\ 0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2, \quad t > 0, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u(0, y, t) = 0,\ \frac{\partial}{\partial n} u(l_1, y, t) = \mu(t),\ u(x, 0, t) = 0,\ u(x, l_2, t) = 0,\ \mu(0) = 0,\ t \geq 0 \tag{2}$$

и начальным условием

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad 0 \leq x \leq l_1 \quad 0 \leq y \leq l_2 \tag{3}$$

где $\varphi(x, y)$ - заданная функция, M- положительное число.

Известно, что условия (2) означают, что тепло в стороне $y = 0$ поддерживается при заданных $\mu(t)$ переменных температурах, а в остальных сторонах при нулевой температуре.

Рассмотрим следующие задачи.

Задача. Пусть задана постоянная $B > 0$. Найти величину $\mu(t)$ температуры такую, что во внутренней точке $A(x_o, y_o)$ при $t \geq T$, решение задачи (1) - (3) удовлетворяет равенству

$$u(x_o, y_o, t) = B, \tag{4}$$

где T - некоторое положительное число.

Теорема. Пусть задана постоянная $B > 0$. Чтобы в произвольном времени $t \geq T$ во внутренней точке $A(x_o, y_o)$ решение задачи (1) - (3) удовлетворяло условию (4), достаточно, что функция $\mu(t)$ удовлетворяла следующему уравнению

$$\int\limits_0^t K(x_o, y_o, t, \tau)\mu(\tau)d\tau = g(x_o, y_o, t), \tag{5}$$

где

$$K(x_o, y_o, t, \tau) = \frac{16 l_1}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left[1 - (-1)^m\right]}{(2n+1)^2 m} \left[(\lambda_{nm} a)^2\right] e^{-(\lambda_{nm} a)^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi(2n+1)x_o}{2l_1} \cdot \sin \frac{\pi m y_o}{l_2},$$

$$g(x_o, y_o, t) = B - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\hat{f}_{nm}(t) + c_{nm}\right] e^{-(\lambda_{nm} a)^2 t} \sin \frac{\pi(2n+1)x_o}{2l_1} \cdot \sin \frac{\pi m y_o}{l_2},$$

$$\hat{f}_{nm}(t) = \frac{4}{l_1 l_2} \int\limits_0^t \int\limits_0^{l_1} \int\limits_0^{l_2} f(\xi, \eta, \tau) \sin \frac{\pi(2n+1)\xi}{2l_1} \sin \frac{\pi m \eta}{l_2} e^{(\lambda_{nm} a)^2 \tau} d\eta\, d\xi\, d\tau,$$

$$c_{nm} = \frac{4}{l_1 l_2} \int\limits_0^{l_1} \int\limits_0^{l_2} \varphi(\xi, \eta) \sin \frac{\pi(2n+1)\xi}{2l_1} \sin \frac{\pi m \eta}{l_2} d\eta \, d\xi \,,$$

$$\lambda_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2}.$$

Литература

1. *Tikhonov A. N., Samarsky A. A.* Equations of Mathematical Physics. Nauka, Moscow (1966) (in Russian)
2. *Lions J. L.* Controle Optimal de Systemes Gouvernes par des equations aux Derivees Partielles. Dunod Gauthier-Villars, Paris (1968)
3. *Fattorini, H.O.* Time and norm optimal control for linear parabolic equations: necessary and sufficient conditions. In: Control and Estimation of Distributed Parameter Systems. International Series of Numerical Mathematics, vol. 143, pp. 151-168. Birkh?user, Basel (2002)
4. *Barbu, V., Rascanu, A., Tessitore, G.* Carleman estimates and controllability of linear stochastic heat equations. Appl. Math. Optim. 47(2), 97-120 (2003)
5. *Alimov Sh. O.* On a control problem associated with the Heat Exchange Process., Uz. Math. Jur. 2005, N 4, c. 13-21, (in Russian).
6. *Alimov Sh. O.* On a control problem associated with the Heat Exchange Process. Doc. Acad. Scien. Russian, 2008. V. 421, Number 5, pp. 583-585, (in Russian).
7. *Alimov Sh.O., Albeverio S.* On a Time-Optimal Control Problem Associated with the Heat Exchange Process, Appl. Math. Optim. 2008, 57: 58-68.
8. *Alimov Sh.O.* On a control problem associated with the heat transfer process, Eurasian mathematical journal, Volume 1, Number 2 (2010), 17 - 30.
9. *Alimov Sh.O.* On the null-controllability of the heat exchange process, Eurasian mathematical journal, Volume 2, Number 3 (2011), 5 - 19.
10. *Fayziev Yu. E. Xalilova N.* On a control problem associated with the heat transfer process, Acta NUUz, 2016, Number 2/1, 49-54, (in Russian).
11. *Fayziev Yu. E. Kuchqarov A.F. Nosirova D. E.* Of the international scientific conference "Modern problems of applied mathematics and information technologies - Al-Khorezmiy"2016, 9-10 november, 2016
12. *Fayziev Yu. E. Nosirova D. E.* On the control of the heat exchange process. Modern problems of dynamical systems and applications, 1-3 мау 2017, pp. 97-99.

4. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ И РОДСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ АНАЛИЗА

SPECTRAL THEORY OPERATORS AND RELATED PROBLEMS OF ANALYSIS

ON AN EXTENSION OF THE THEOREM OF V.A. AMBARZUMYAN

Babajanov B.A.[1], **Atajanova R.B.**[2], **Xasanov B.M.**[3]
Department of Physics and Mathematics, Urgench State University, Urgench, Uzbekistan;[1,2,3]
a.murod@mail.ru

Sturm–Liouville spectral problems with potentials depending on the spectral parameter arise in various models of quantum and classical mechanics. For instance, to this form can be reduced the corresponding evolution equations (such as the Klein–Gordon equation [1, 2]) that are used to model interactions between colliding relativistic spinless particles. Another typical example is related to vibrations of mechanical systems in viscous media, see [3]. M. Jaulent and C. Jean in [4] studied the inverse scattering problems for energy-dependent Schrodinger operators on the line.

In 1929, Ambarzumyan investigated the Schrodinger operator with Neumann boundary conditions, and proved that if its spectrum consists of zero and infinitely many other square integers, then the potential is zero. From a historical viewpoint, the work of Ambarzumyan [5] in 1929 was thought of as the first paper in the theory of inverse spectral problems associated with Sturm-Liouville operators. Ambarzumyan's theorem was generalized in many directions [6- 10].

This paper presents an analog of Ambarzumyan's theorem for the quadratic pencil of Shturm-Liouville operators.

We consider the boundary-value problem generated by the differential equation

$$-y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y = \lambda^2 y\,, \qquad 0 \le x \le \pi$$

and two boundary conditions

$$y'(0) = 0, \quad y'(\pi) + H(\lambda)y(\pi) = 0, \tag{1}$$

where λ is a spectral parameter,

$$H(\lambda) = a_1\sqrt{\lambda} + a_2(\sqrt{\lambda})^2 + ... + a_m(\sqrt{\lambda})^m, \; a_k \in R, \; k = \overline{1,m}, \; a_m \neq 0.$$

and the real functions $q(x), \; p(x) \in C^1[0,\pi]$.

Let $\{\lambda_n : \; n = 0, \pm1, \pm2, ...\}$ and $\{\widetilde{\lambda}_n : \; n = 0, \pm1, \pm2, ...\}$ be spectrums of the boundary problems (1)-(2) and

$$-y'' = \lambda^2 y\,, \qquad 0 \le x \le \pi$$

$$y'(0) = 0, \quad y'(\pi) + H(\lambda)y(\pi) = 0,$$

respectively.

Theorem. If $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n, \; n \in Z$ then, $q(x) = p(x) = 0, \; \forall x \in [0,\pi]$.

REFERENCES

1. P. Jonas. On the spectral theory of operators associated with perturbed Klein–Gordon and wave type equations. J. Oper. Theory, 29(2):207–224, 1993.

2. B. Najman. Eigenvalues of the Klein–Gordon equation. Proc. Edinb. Math. Soc.(2), 26:181–190, 1983.

metricconverterProductID4. M3. M. Yamamoto. Inverse eigenvalue problem for a vibration of a string with viscous drag. J. Math. Anal. Appl., 152:20–34, 1990.

metricconverterProductID4. M4. M. Jaulent and C. Jean. The inverse problem for the one-dimensional Schrodinger equation with an energy-dependent potential. II. Ann. Inst. H. Poincarүe Sect. A (N.S.), 25(2):119–137, 1976.

5. Ambarzumyan, V. A., (1929) Ьber eine frage der eigenwerttheorie, Zeitschrift fьr Physik, 53, 690- 695.

6. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe, Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte. Acta Math, 1946, 78: 1–96.

7. Carlson R. and Pivorachik V. N., (2007) Ambarzumian's theorem for trees, Electronic Journal of Differential Equations, 142, 1–9 .

8. Chern H. H., Law C. K. and Wang H. J., (2001) Extension of Ambarzumyans theorem to general boundary conditions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 263, 333-342.

9. Yang C.F. and Yang X.P., (2009) Some Ambarzumyan type theorems for Dirac operators, Inverse Problems, 25(9).

10. Yang C.F. and Yang X.P., (2011), Ambarzumyan's theorem for with eigenparameter in the boundary conditions, Acta Mathematica Scientia, 31(4), 1561-1568.

11. Gasymov M. G. and Guseinov G. Sh., (1981) Determination of a diffusion operator from the spectral data, Doklady Akademic Nauk Azerbaijan SSR, 37(2), 19-23.

THE BERNOULLI EQUATION FOR AN INCOMPRESSIBLE TWO-FLUID MEDIUM WITH ONE PRESSURE

Bunyod Imomnazarov[1], Sherzad Imomnazarov[2]

[1] NSU, Novosibirsk, Russia
[2] ICMMG SB RAS, Novosibirsk, Russia
[1]e-mail:shirz999@mail.ru, [2]e-mail:mih.imom@omzg.sscc.ru

The development of the advanced computational modelling for compressible multi-phase flows is of interest in a number of scientific and engineering disciplines and in many industrial applications. Although in recent years the intensive efforts in the multiphase flow modelling have been made still many basic physical, mathematical, and computational issues are largely unresolved. The classical approach to the development of multiphase models is based on the assumption that a multiphase flow can be considered as a set of interacting continua and described as an averaged continuous medium in which the behaviour of each phase is governed by the conservation laws of mass, momentum and energy, while the interfacial interaction is taken into account through differential and algebraic source terms in the phase conservation laws [1, 2].

In the case of homogeneous incompressible media, that is, under the conditions $\rho^f = const$ and $\tilde{\rho}^f = const$, where ρ^f, $\tilde{\rho}^f$ are the physical densities of the phases and constant bulk saturation of the substances composing the two-phase continuum $\Rightarrow \rho = const, \qquad \tilde{\rho} = const \Rightarrow$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \qquad \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = 0. \tag{1}$$

In other words, the vectors $\mathbf{v}$ and $\tilde{\mathbf{v}}$ are solenoidal [3].

In the stationary case, the system of equations of the two-velocity two-fluid hydrodynamic theory with the pressure equilibrium condition in the subsystems takes the form [4–7]

$$\mathbf{v} \times \mathrm{rot}\mathbf{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{\bar{\rho}} p - \frac{\tilde{\rho}}{2\,\bar{\rho}} (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2 \right) - \mathbf{f}, \tag{2}$$

$$\tilde{\mathbf{v}} \times \mathrm{rot}\tilde{\mathbf{v}} = \nabla \left(\frac{1}{2} \tilde{v}^2 + \frac{1}{\bar{\rho}} p + \frac{\rho}{2\,\bar{\rho}} (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2 \right) - \mathbf{f}, \tag{3}$$

where $\tilde{\mathbf{v}}$ and $\mathbf{v}$ are the velocity vectors of the subsystems of the two-velocity continuum with the corresponding partial densities $\tilde{\rho}$ and ρ, $\bar{\rho} = \tilde{\rho} + \rho$ is the total density of the two-velocity continuum, p is the pressure, and $\mathbf{f}$ is the mass force vector per unit mass.

In the absence of the mass forces $\mathbf{f} = 0$, the system of equations (1)–(3) has the solution $\mathbf{v} = 0$, $\tilde{\mathbf{v}} = 0$, $\rho = \rho^0$, $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}^0$, $p = p^0$ for a mixture of fluids at rest with the uniform pressure $p = p^0$, the partial densities ρ^0, $\tilde{\rho}^0$, and the temperature T.

From these relations for the potential mass force with the potential F, multiplying, respectively, (2) by $\mathbf{v}$ and (3) by $\tilde{\mathbf{v}}$, we obtain

$$\left(\mathbf{v}, \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{\bar{\rho}} p - \frac{\tilde{\rho}}{2\,\bar{\rho}} (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2 + F \right) \right) = 0,$$

$$\left(\tilde{\mathbf{v}}, \nabla \left(\frac{1}{2} \tilde{v}^2 + \frac{1}{\bar{\rho}} p + \frac{\rho}{2\,\bar{\rho}} (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2 + F \right) \right) = 0.$$

Hence, we obtain the Bernoulli equations

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\bar{\rho}} - \frac{\tilde{\rho}}{2\,\bar{\rho}} (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2 + F = C, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}\,\tilde{v}^2+\frac{p}{\bar{\rho}}+\frac{\rho}{2\,\bar{\rho}}\,(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v})^2+F=\tilde{C}, \tag{5}$$

where C, $\tilde{C}$ are arbitrary constants.

Equations (4) and (5) admit a passage to the limit to the Bernoulli equation in the single-velocity hydrodynamics of incompressible media when the velocity of the fluid and the physical densities coincide.

Reference

1. *Ishii M.*Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow // NASA STI/Recon Technical Report A. 1975, v. 75, p. 29657.

2. *Romensky E., Belozerov A., Peshkov I.*Thermodynamically compatible hyperbolic conservative model of compressible multiphase flow: Application to four phase flow // AIP Conference Proceedings, 2013. v. 1558, pp 120-123.

3. *Imomnazarov Kh.Kh., Imomnazarov Sh.Kh., Mamatkulov M.M., Chernykh, E. G.*Fundamental solution for a stationary equation of two-velocity hydrodynamics with one pressure // Sib. Zh. Ind. Mat. 2014, v.17, pp. 60-66 (in Russian).

4. *Dorovsky V.N., Perepechko Yu.V.*Theory of Partial Melting // Geologiya i geofisika. 1989. No.9. pp.56-64.

5. *Baishemirov Zh, Jian-Gang Tang, Imomnazarov Kh, Mamatqulov M.*Solving the problem of two viscous incompressible fluid media in the case of constant phase saturations // Open Eng. 2016, v. 6, pp. 742-745.

6. *Perepechko Yu., Sorokin K., Imomnazarov Kh.*Numerical simulation of the free convection in a viscous compressible fluid // Open Eng. 2016, v. 6, pp. 590-594.

7. *Imomnazarov Kh.Kh., Imomnazarov Sh.Kh., Mamatqulov M.M.*Non-existence of the global solution of initial boundary value problem for the incompressible two-velocity medium equation // Bull. Nov. Comp. Center, series: Num. Model. in Atmosph. etc., Novosibirsk, 2017, No. 16, pp.17-25.

A BOUNDARY CONDITION OF THE VOLUME POTENTIAL FOR STRONGLY ELLIPTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Tynysbek Sh. Kal'menov[1] and Bolys Sabitbek[2],

[1,2] Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan, Almaty
[1]kalmenov@math.kz, [2]b.sabitbek@math.kz

Let $\Omega \subset R^d$ be an open bounded domain with a sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$. We consider the second order uniformly strongly elliptic equation

$$D(u)=-\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j})+\sum_{i=1}^{d}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f(x),\ x\in\Omega. \tag{1}$$

The functions a_{ij}, b_j and c are real-valued functions which, for convenience, are supposed to be C^∞-functions.

Definition 1 The second order real-valued scalar linear differential operator D is called strongly elliptic in Ω if there exists a smooth function $\gamma(x)>0$ such that

$$\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}\xi_i\xi_j\geq\gamma(x)|\xi|^2 \tag{2}$$

for all $\xi\in R^d$. If, in addition, $\gamma>0$ is a constant independent of x and (2) holds for all $x\in\Omega$, then D is called uniformly strongly elliptic.

Note that strongly elliptic real differential operators are of even order and are properly elliptic.

Definition 2 Let $x\in R^d$ be any chosen point. Then the distribution $E(x,y)$ is called a fundamental solution of the differential operator D (in R^d) if it satisfies the equation

$$D_y(E(x,y))=\delta(x-y) \tag{3}$$

in the distributional sense where δ is the Dirac distribution.

As usual, in (3) the notation D_y stands for differentiation with respect to y. For strongly elliptic operators it can be shown with the Green formula that (3) implies

$$D_x(E(x,y)) = \delta(x-y) \tag{4}$$

for any fixed $y \in R^d$.

For a general differential operator, the existence of a fundamental solution is by no means trivial. However, we have

Lemma(Hörmander [1]) *Let D be a uniformly strongly elliptic differential operator of even order with real leading coefficients $a_{ij} \in C^\infty$. Then for every compact domain $\overline{\Omega} \subset R^d$ with $\partial\Omega \in C^\infty$ there exists a local fundamental solution $E(x,y)$ which is a C^∞ function of all variables for $x \neq y$ and $x, y \in \overline{\Omega}$.*

In this report by using properties of fundamental solutions we construct a correct boundary value problem for the differential equation (1). We construct a nonlocal integral boundary condition of the volume potential for second order strongly elliptic differential equations, which generalizes previous known results. We review similar results for polyharmonic equations, which hints how to extend results to higher order cases. Throughout this paper we use notations from [2] and [3].

Let $\Omega_1 \subset ... \subset \Omega_n \subset R^d$ be open bounded domains with boundaries $\partial\Omega_i \in C^\infty, i = 1, ..., n$, respectively. By Hörmander's Lemma there exists a local fundamental solution $E_i(x,y)$ of D for each Ω_i. Consider the following function

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)dy \tag{5}$$

in $\Omega \subset \Omega_1,\ \partial\Omega \in C^\infty$, where

$$G(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i(x,y), \quad x, y \in \Omega, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Here $\alpha_i, i = 1, ..., n$ are numbers. A trivial observation shows that $u(x)$ is a solution of (1) in Ω. The aim of this section is to find a boundary condition such that with this boundary condition the equation (1) has a unique solution in $H^2(\Omega)$, which is $u(x)$.

Theorem *For any $f \in L_2(\Omega)$, (5) is a unique solution of the equation (1) (in $H^2(\Omega)$) with the boundary condition*

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu y} G(x,y)u(y)dS_y - \tag{6}$$

$$\int_{\partial\Omega} G(x,y)\{\partial_{\nu y}u(y) - \sum_{j=1}^{d} n_j b_j u(y)\}dS_y = 0,\ x \in \partial\Omega,$$

where the conormal derivative is $\partial_{\nu y} = \sum_{k,j=1}^{d} n_j a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}$ and $n_1, n_2, ..., n_d$ are components of the normal vector on the boundary.

Close results were published in our works [4], [5] and [6].

References

1. *Hörmander L.* The Analysis of Linear Partial Differential Operators. IЦIV. Berlin: Springer, 1985.
2. *Hsiao G.C., Wendland W.L.* Boundary Integral Equations. Berlin: Springer, 2008.
3. *McLean W.* Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000
4. *Kal'menov T.Sh., Suragan D.* To spectral problems for the volume potential // Dokl. Math. 2009. V. 80. P. 646–649.
5. *Kal'menov T.Sh., Suragan D.* Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation // Differ. Equ. 2012. V. 48. P. 604–608.
6. *Kal'menov T.Sh., Suragan D., Sabitbek B.* On eigenvalue inequalities of the Newton potential // AIP Conference Proceedings. 2015. V. 1676. Art.no. 020052

The existence of bound states in a system of two fermions in an optical lattice

Lakaev N. Saidakhmat [1], Axmadova Muxayyo [2],

[1]Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan
[2]Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan
[1]slakaev@mail.ru, [2] muxayyo@mail.ru

In physics, stable composite objects are usually formed by way of attractive forces, which allow the constituents to lower their energy by binding together. Repulsive forces separate particles in free space. However, in structured environment such as a periodic potential and in the absence of dissipation, stable composite objects can exist even for repulsive interactions that arise from the lattice band structure [1].

The Bose-Hubbard model which is used to describe the repulsive pairs is the theoretical basis for applications. The work [1] exemplifies the important correspondence between the Bose-Hubbard model [2] and atoms in optical lattices, and helps pave the way for many more interesting developments and applications [3]. Stable repulsively bound objects should be viewed as a general phenomenon and their existence will be ubiquitous in cold atoms lattice physics. They give rise also to new potential composites with fermions[4].

In the continuous case due to rotational invariance the hamiltonian separates in a free hamiltonian for the center of mass H_{free} and in the hamiltonian H_{rel} for the relative motion. Bound states are eigenstates of H_{rel} and the existence of bound states below the essential spectrum of the two-particle Schrödinger operators depend only on the interaction (perturbation) μV.

The fundamental difference between the discrete and continuous multiparticle Schrödinger operators is that in the discrete case the kinetic energy operator is not rotationally invariant and hence the lattice two-particle Schrödinger operator depends not only on interaction μV of the particles, but also on the total quasi-momentum $k \in \mathbb{T}^d$ of two particles.

The spectral properties for the two-particle lattice hamiltonians on the d-dimensional lattice $\mathbb{Z}^d, d \geq 1$ have been studied intensively in [4-8].

In the present report we study the Schrödinger operators $H_\mu(K), K \in \mathbb{T}^d$ associated to a systems of two identical fermions on d-dimensional hypercubic lattice $\mathbb{Z}^d$ interacting via short-range pair potentials:

$$H_\mu(k) = H_0(k) + \mu V,\ \mu \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{T}^d.$$

The non-perturbed operator $H_0(k)$ is a convolution type operator:

$$(H_0(k)f)(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} E_k(x-y)f(y),\ \ f \in \ell^2(\mathbb{Z}^d),$$

where $E_k(s) = \varepsilon(s)[1 + e^{-i(k,s)}]$, $s = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{Z}^d$, $p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{T}^d$, $(p,s) := \sum_{n=1}^{d} p_n s_n$, and $\varepsilon(s)$ is Fourier transformation of the function $\hat{\varepsilon}(p)$ defined on the torus $\mathbb{T}^d$:

$$\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{T}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p,x)}\, \hat{\varepsilon}(p)\eta(\mathrm{d}p).$$

For a given bounded non-negative even function(*potential*) $v \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^+)$, we define the operator V as a multiplication operator by the function $v(x)$:

$$(V\varphi)(x) = v(x)f(x),\ f \in \ell^2(\mathbb{Z}^d).$$

We require that v decays at infinity:

$$v \ \in\ \ell_0^\infty(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^+) := \left\{ v : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}_0^+ \ :\ \lim_{x\to\infty} v(x) = 0 \right\}.$$

In this case, V is a compact operator.

The essential spectrum $\sigma_{ess}(H(k))$ of the operator $H_\mu(k)$ coincides with the spectrum of non-perturbed operator $H_0(k)$, i.e.,

$$\sigma_{ess}(H_\mu(k)) = \sigma(H_0(k)) = [E_{\min}(k), E_{\max}(k)]$$

where

$$E_{\min}(k) := \min_{q\in\mathbb{T}^d} E_k(q), \quad E_{\max}(k) := \max_{q\in\mathbb{T}^d} E_k(q).$$

Hypothesis 1(i) *The dispersion relation $\hat{\varepsilon}(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ is a real–valued even function.*
(ii) *The non-zero interaction v is absolutely summable, i.e., $v \in \ell^1(\mathbb{Z}^d) \cap \ell^\infty(\mathbb{Z}^d;\mathbb{R}_0^+)$.*

Theorem. *Let $d \geq 1$* and Hypothesis 1 is fulfilled. Assume that for some $s \in \mathbb{Z}^d$ and $k \in \mathbb{T}^d$ the inequality

$$v(s)\int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{\sin^2(p,s)\eta(dp)}{E_{\min}(k)-E_k(p)} > 1.$$

holds.Then the operator $H_1(k)$ has an eigenvalue below the threshold $E_{\min}(k)$.

Corollary. *For any $v \neq 0$ and $k \in \mathbb{T}^d$ there exists $\mu_0 < 0$ resp. $\mu_0 > 0$ such that for any $\mu < \mu_0$ resp. $\mu > \mu_0$ the operator $H_\mu(k) = H_0(k)+\mu V, k \in \mathbb{T}^d$ has an eigenvalue $E_\mu(k) < E_{\min}(k)$ resp. $E_\mu(k) > E_{\max}(k)$.*

REFERENCES

1. *Winkler K. et al.* Repulsively bound atom pairs in an optical lattice. Nature **441**(2006) 853–56.
2. *Bloch I.* Ultracold quantum gases in optical lattices, // Nat. Phys. **1**(2005), 23-30.
3. *Hofstetter W. et al.* High-temperature superfluidity of fermionic atoms in optical lattices, // Phys. Rev. Lett. 89, 220407 (2002).
4. *Faria da Veiga P. A., Ioriatti L., and O'Carroll M.* Energy-momentum spectrum of some two-particle Hamiltonians, // Phys. Rev. E (3) **66**, 016130, 9 pp. (2002).
5. *Albeverio S., Lakaev S. N., Muminov Z. I.* Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics, // Ann. Henri Poincaré. **5** (2004) 1-30.
6. *Albeverio S., Lakaev S. N., Makarov K.A., Muminov Z. I.* The Threshold Effects for the Two-particle Hamiltonians on Lattices, // Comm.Math.Phys. **262**(2006), 91–115
7. *V. Bach, W. de Siqueira Pedra, S. Lakaev* Bounds on the Discrete Spectrum of Lattice Schrödinger Operators , // Preprint mp-arc 10-143.
8. *V. Bach, W. de Siqueira Pedra, S. Lakaev* Bounds on the Pure Point Spectrum of Lattice Schrödinger Operators, // Preprint mp-arc/c/11/11-161.

Three-electron systems in the impurity Hubbard model

S. M. Tashpulatov

Institute of Nuclear Physics of Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan,
e-mail: toshpul@mail.ru,sadullatashpulatov@yandex.ru, toshpul@inp.uz

We consider the energy operator of three-electron systems in the Impurity Hubbard model and describe the structure of the essential and discrete spectra of the system for first doublet state. The Hamiltonian of the chosen model has the form

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_m a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow} + (A_0-A)\sum_\gamma a^+_{0,\gamma}a_{0,\gamma}+$$

$$+(B_0-B)\sum_{\tau,\gamma}(a^+_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a^+_{\tau,\gamma}a_{0,\gamma}) + (U_0-U)a^+_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^+_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow}. \tag{1}$$

Here, A (A_0) is the electron energy at a regular (impurity) lattice site, B (B_0) is the transfer integral between electrons (between electron and impurities) neighboring sites (we assume that $B > 0$ $(B_0 > 0)$ for convenience), and the summation over τ ranges the nearest neighbors, U (U_0) is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons in the regular (impurity) sites, γ is the spin index,$\gamma =\uparrow$ or $\gamma =\downarrow$, and $a^+_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^\nu$. We let $\varepsilon_1 = A_0 - A$, $\varepsilon_2 = B_0 - B$, and $\varepsilon_3 = U_0 - U$.

The energy of the system depends on its total spin S. In the three electron systems has a quartet state, and two doublet state [1]. Hamiltonian (1) commutes with all components of the total spin operator $S = (S^+, S^-, S^z)$, and the structure of eigenfunctions and eigenvalues of the system therefore depend on S.

The Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fock space $\mathcal{H}_{as}$. Let φ_0 be the vacuum vector in the space $\mathcal{H}_{as}$. The first doublet state corresponds the basis functions ${}^1d^{1/2}_{m,n,p} = a^+_{m\uparrow}a^+_{n\downarrow}a^+_{p\uparrow}\varphi_0$. The subspace $\widetilde{\mathcal{H}}^d_1$, corresponding to the first doublet state is the set of all vectors of the form $\psi = \sum_{m,n,p\in Z^\nu} \widetilde{f}(m,n,p){}^1d^{1/2}_{m,n,p}$, $\widetilde{f} \in l^{as}_2$, where l^{as}_2 is the subspace of antisymmetric functions in the space $l_2((Z^\nu)^3)$. Let H^d_1 be the restriction of operator H to the space $\widetilde{\mathcal{H}}^d_1$.

In the quasimomentum representation, the operator H^d_1 acts in the Hilbert space $L^{as}_2((T^\nu)^3)$ as

$$(\widetilde{H}^d_1\widetilde{f})(x,y,z) = 3A\widetilde{f}(x,y,z) + 2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos x_i + \cos y_i + \cos z_i]\widetilde{f}(x,y,z) + U\int_{T^\nu}\widetilde{f}(s,x+y-s,z)ds+$$

$$+U\int_{T^\nu}\widetilde{f}(x,t,y+z-t)dt + \varepsilon_1\int_{T^\nu}\widetilde{f}(s,y,z)ds + \varepsilon_1\int_{T^\nu}\widetilde{f}(x,t,z)dt + \varepsilon_1\int_{T^\nu}\widetilde{f}(x,y,l)dl + 2\varepsilon_2\times$$

$$\times\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos s_i + \cos x_i]\widetilde{f}(s,y,z)ds + 2\varepsilon_2\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos t_i + \cos y_i]\widetilde{f}(x,t,z)dt + 2\varepsilon_2\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos l_i +$$

$$+\cos z_i]\widetilde{f}(x,y,l)dl + \varepsilon_3[\int_{T^\nu}\int_{T^\nu}\widetilde{f}(s,t,z)dsdt + \int_{T^\nu}\int_{T^\nu}\widetilde{f}(x,t,\xi)dtd\xi], \quad (3)$$

where L^{as}_2 is the subspace of antisymmetric functions in $L_2((T^\nu)^3)$.

We verify that the operator $\widetilde{H}^d_1$ can be represented in the form $\widetilde{H}^d_1 = \widetilde{H}^s_2 \bigotimes I_1 + I_2 \bigotimes \widetilde{H}_1$, where $(\widetilde{H}_1 f)(x) = \{A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}\cos x_i\}\widetilde{f}(x) + \varepsilon_1\int_{T^\nu}\widetilde{f}(s)ds + 2\varepsilon_2\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos s_i + \cos x_i]\widetilde{f}(s)ds$,

$$(\widetilde{H}^s_2 f)(x,y) = \{2A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos x_i + \cos y_i]\}f(x,y) + U\int_{T^\nu}f(s,x+y-s)ds + \varepsilon_1\int_{T^\nu}\widetilde{f}(x,t)dt+$$

$$+U\int_{T^\nu}f(s,y+z-s)ds + \varepsilon_1\int_{T^\nu}\widetilde{f}(s,y)ds + 2\varepsilon_2\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos x_i + \cos s_i]\widetilde{f}(s,y)ds+$$

$$+\varepsilon_3\int_{T^\nu}\int_{T^\nu}\widetilde{f}(s,t)dsdt + 2\varepsilon_2\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos y_i + \cos t_i]\widetilde{f}(x,t)dt + \varepsilon_3\int_{T^\nu}\int_{T^\nu}\widetilde{f}(t,\xi)dtd\xi.$$

We must therefore investigate the spectrum of the operators $\widetilde{H}_1$, and $\widetilde{H}^s_2$.

It is clear that the continuous spectrum of operator $\widetilde{H}_1$ coincides with the segment $\sigma_{cont}(\widetilde{H}_1) = [A-2B\nu, A+2B\nu]$, where ν is lattice dimensionality. The operator $\widetilde{H}_1$ has no more two eigenvalues, this eigenvalues satisfy the conditions $z_1 < A - 2B$, and $z_2 > A + 2B$.

The operator $\widetilde{H}^s_2$ has the following representation: $\widetilde{H}^s_2 = \widetilde{H}_1 \bigotimes I + I \bigotimes \widetilde{H}_1 + K$, where $(Kf)(x,y) = 2U\int_{T^\nu}f(s,x+y-s)ds + 2\varepsilon_3\int_{T^\nu}\int_{T^\nu}f(s,t)dsdt$ is two-rank operator. Therefore, the essential spectra of the operator $\widetilde{H}^s_2$ consists of the union of three segment, and the operator $\widetilde{H}^s_2$ has no more than five eigenvalues. The following theorems describe the structure of essential spectrum and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}^d_1$.

Theorem 1. *If $\nu = 1$, $0 < \varepsilon_1 \leq 2B$, and $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, then the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}^d_1$ consists of the union of not smaller than six and no more than eight segments $\sigma_{ess}(\widetilde{H}^q) = [2z_1 + A - 2B, 2z_1 + A + 2B] \cup \cup [z_1 + 2A - 4B, z_1 + 2A + 4B] \cup [z_1 + z_2 + A - 2B, z_1 + z_2 + A + 2B] \cup [2z_2 + A - 2B, 2z_2 + A + 2B] \cup \cup [3A - 6B, 3A + 6B] \cup [z_2 + 2A - 4B, z_2 + A + 4B] \cup [z_3 + A - 2B, z_3 + A + 2B] \cup [z_4 + A - 2B, z_4 + A + 2B]$, and the relation $4 \leq N \leq 8$ holds for the number of three-electron impurity* *states N. Here and hereafter, $z_1 < A - 2B$, and $z_2 > A + 2B$ is an eigenvalue of the operator $\widetilde{H}_1$, and z_3 and z_4 is an eigenvalue of the operator $\widetilde{H}_2^s$.*

2. *If $\nu = 1$, $0 < \varepsilon_1 \leq 2B$, and $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, then the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}_1^d$ consists of the union of not smaller than three and no more than five segments* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}^q) = [2z_1 + A - 2B, 2z_1 + A + 2B] \cup [z_1 + 2A - 4B, z_1 + 2A + 4B] \cup [3A - 6B, 3A + 6B] \cup [z_3 + 2A - 4B, z_3 + 2A + 4B] \cup [z_4 + 2A - 4B, z_4 + 2A + 4B]$, *and the relation $1 \leq N \leq 3$ holds for the number of three-electron impurity states N.*

3. *If $\nu = 1$, $0 < \varepsilon_1 \leq 2B$, and $-B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, then the essential spectrum oof the operator $\widetilde{H}_1^d$ consists of the union of not smaller than three and no more than five segments* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}^q) = [2z_2 + A - 2B, 2z_2 + A + 2B] \cup [z_2 + 2A - 4B, z_2 + 2A + 4B] \cup [3A - 6B, 3A + 6B] \cup [z_3 + 2A - 4B, z_3 + 2A + 4B] \cup [z_4 + 2A - 4B, z_4 + 2A + 4B]$, *and the relation $1 \leq N \leq 3$ holds for the number of three-electron impurity states N.*

4. *If $\nu = 1$, $0 < \varepsilon_1 \leq 2B$, and $\varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$ or $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, then the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}_1^d$ consists of the union of not smaller than one and no more than three segments* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}^q) = [3A - 6B, 3A + 6B] \cup [z_3 + 2A - 4B, z_3 + 2A + 4B] \cup [z_4 + 2A - 4B, z_4 + 2A + 4B]$, *and the relation $0 \leq N \leq 2$ holds for the number of three-electron impurity states N.*

References

1. *Tashpulatov S. M.* Three -electron systems in the Hubbard model // Theoretical and Mathematical Physics. 2014. Vol. 179, No 3, PP. 712-728.

On a singular solutions of the Korteweg-de Vries type equations

Torebek B.T.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan, Almaty
torebek@math.kz

This paper is devoted to the problems of blow-up of global solutions of the nonlinear initial-boundary problems for the Korteweg-de Vries type equations. For certain initial-boundary problems for the Korteweg-de Vries equation, we obtain necessary conditions of existence (in other words, sufficient conditions of nonexistence) of global solutions.

We note that the blow-up of solution of the Korteweg-de Vries equation with some linear initial-boundary conditions was investigated by Pohozhaev in [1-2].

This paper is devoted to singular solutions of some problems for the Korteweg-de Vries type equations, more precisely, to solutions that blow up in a finite time. The approach to the problem is based on the method of nonlinear capacity [3], more precisely, on the choice of optimal test functions corresponding to initial and boundary conditions under consideration.

Finding of the corresponding optimal test function leads us to a variational problem. The extreme value of the corresponding functional generates a nonlinear capacity of the problem under consideration, which is actually an optimal a priori estimate of this problem.

The behavior of this capacity (depending on the data of the problem) determines the conditions of absence of a solution to the problem under consideration.

Here, we give a simplest case of the analysis of a "rough"blow-up, i.e., the case where the solution u tends to infinity as $t > T$ on $[0, L]$ of values x, more exactly, when the corresponding integral of the form

$$\int_0^L u(t,x)\varphi(t,x)dx$$

tends to infinity as $t > T$ for the given test function φ.

References

1. *Pohozhaev S.I.* On the nonexistence of global solutions of some initial-boundary value problems for the Korteweg-de Vries equation //Differential Equations. 2011. V. 47. No. 4. P. 488-493.

2. *Pohozaev S.I.*Blow-up of smooth solutions of the KortewegЏde Vries equation //Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. No. 12. P. 4688-4698.

3. *Mitidieri E., Pohozhaev S.I.* A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities //Trudy Matematicheskogo Instituta Imeni VA Steklova. 2001. V. 234. P. 3-383.

NEW SINGULAR SETS IN $\mathbb{R}^n$

Shopulatov Sh.Sh.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,
shomurod_shopulatov@mail.ru

Well-known Blaschke-Privalov theorem asserts that if a function $u(x)$, $u(x) \not\equiv -\infty$, is upper semi-continuous in the domain $D \in \mathbb{R}^n$ holds following inequality

$$\overline{\triangle} u(x) \geq 0 \quad \forall x^0 \in D \setminus u^{-1}(-\infty) \tag{1}$$

then $u(x)$ will be subharmonic in D.

Here, $u^{-1}(-\infty) := \{x \in D : u(x) = -\infty\}$, $\overline{\triangle} u(x)-$ *generalised Laplace operator* of a function u at the point x. For more information about it see [1-4].

I.I.Privalov got more deeper result:

Theorem (Privalov[2]).

If the function $u(x)$, $u(x) \not\equiv -\infty$, is upper semi-continuous in the domain $D \in \mathbb{R}^n$ and holds the following conditions

$$\overline{\triangle} u(x) \geq 0 \quad \forall x^0 \in D \setminus \{E \cup u^{-1}(-\infty)\},\ mes(E) = 0 \tag{2}$$

$$\overline{\triangle} u(x) > -\infty \quad \forall x^0 \in D \setminus u^{-1}(-\infty) \tag{3}$$

then the function will be subharmonic in D.

In order to develop Privalov's theorem we introduce the following kind of sets.

Definition. *E set is called $\underline{S}$ (singular) - set, if there exists $\nu(x) \in sh(\mathbb{R}^n) : \underline{\triangle} \nu(x)|_E = +\infty$. E set is called $\overline{S}$ (singular) - set, if there exists $\nu(x) \in sh(\mathbb{R}^n) : \overline{\triangle} \nu(x)|_E = +\infty$.*

Some properties of *singular* sets:

1. $\underline{S}-$ set is a $\overline{S}-$ set, i.e. the class of $\underline{S}-$ sets $\subset$ the class of $\overline{S}-$ sets.
2. Countable union of singular ($\underline{S}$ or $\overline{S}$) sets is singular ($\underline{S}$ or $\overline{S}$) set.

Theorem (Brudno[2]).

If $mesE = 0$, then $E \in \underline{S}$.

Theorem.

Let a function $u(x)$, $u(x) \not\equiv -\infty$, is upper semi-continuous in the domain $D \in \mathbb{R}^n$ and $\overline{\triangle} u(x) \geq 0 \quad \forall x^0 \in D \setminus \{E \cup u^{-1}(-\infty)\}$. Then

$$if\ \ E\ is\ \underline{S} -\ \ set,\ \underline{\triangle} u(x) > -\infty \quad \forall x^0 \in D \setminus u^{-1}(-\infty)\ \Rightarrow\ u(x) \in sh(D);$$

$$if\ \ E\ is\ \overline{S} -\ \ set,\ \overline{\triangle} u(x) > -\infty \quad \forall x^0 \in D \setminus u^{-1}(-\infty)\ \Rightarrow\ u(x) \in sh(D).$$

References

1. *Brelo M.* Foundations of classical potential theory. M: "Mir", 1964. 217 p (in Russian).

2. *Privalov I.I.* To the definition of a subharmonic function // News of the USSR Academy of Sciences. 1941. V. 5. 281-284 pp (in Russian).

3. *Sadullaev A.S.* Pluripotential theory and its applications. Germany: Palmarium academic publishing, 2012. 307 p (in Russian).

4. *Shopulatov Sh.Sh.* On a generalised Laplace operator // Abstracts of the Uzbek-Israel International Scientific Conference. Tashkent, Oct.6-10, 2017. 113-115 pp.

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ТЕРЯЮЩИМИ ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПРИ ВЫРОЖДЕНИИ

Алыбаев К.С., Мурзабаева А.Б.

Жалалабадский государственный университет, Кыргызская Республика, город Жалал- Абад
Ошский технологический университет, Кыргызская Республика, город Ош
alybaevkurmanbek@rambler.ru, aytbu.murzabaeva@mail.ru

В теории сингулярно возмущенных уравнений центральной проблемой является выявление множеств, к которым притягиваются решения заданных сингулярно возмущенных уравнений.

В первую очередь такими множествами могут быть решения вырожденных уравнений. Вырожденные уравнения, для уравнений или систем уравнений первого порядка, являются алгебраическими и имеют несколько решений, за исключением линейных случаев.

В наиболее общем виде данная проблема решена в работе [1], когда вырожденное уравнение имеет одно изолированное решение. Случаи когда вырожденное уравнение имеет несколько решений исследованы крайне редко, к таким работам можно отнести [2-3]. Во всех случаях использована условие устойчивости точки покоя [1].

В данном сообщении рассматривается сингулярно возмущенные уравнения с аналитическими функциями теряющие единственность при вырождении. Доказано существование областей притяжения для решений вырожденного уравнения без привлечения условия устойчивости.

Пусть рассматривается уравнение

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = a(t)z(t,\varepsilon) + b(t)z^2(t,\varepsilon) + c(t), \tag{1}$$

где $\varepsilon(0 \leq \varepsilon << 1)$- малый параметр; $t \in \Omega \subset C$ - множество комплексных чисел и Ω - односвязная область; $z(t,\varepsilon)$- неизвестная функция, и выполняются условия:

U1.$\forall t \in \Omega(a(t), b(t), c(t) \in Q(\Omega)$-пространство аналитических функций в Ω).

U2. $\forall t \in \Omega(\sqrt{a^2(t) - 4b(t)c(t)} \neq 0, b(t) \neq 0)$.

Вырожденное уравнение (при $\varepsilon = 0$) имеет решения

$\xi_j(t) = (-a(t) \pm \sqrt{a^2(t) - 4b(t)c(t)})/2b(t).(j = 1, 2)$

Пусть $t_0 \in \Omega$ и ее внутренняя точка.

Определение. Если: **1.**$z_j(t,\varepsilon)$ решение уравнения (1), удовлетворяющие условию $z_j(t_0,\varepsilon) = z_j^o$. **2.** Существует область $\Omega_j \subset \Omega$. **3.**$\forall t \in \Omega_j(z_j(t,\varepsilon) \to \xi_j(t)$ при $\varepsilon \to 0)$.

При выполнении этих условий Ω_j назовем областью притяжения решения (корня)$\xi_j(t)$.

Задача. Существуют ли области притяжения Ω_j ?

Данная задача решается следующей теоремой.

Теорема: *Пусть выполняются условия U1-U2. Тогда: 1.Существуют решения $z_j(t,\varepsilon)$ уравнения (1) удовлетворяющие условию $z_j(t_0,\varepsilon) = z_j^o$. 2. Существуют области $\Omega_j \subset \Omega$. 3. $\forall t \in \Omega_j$ $(\lim_{\varepsilon\to 0} z_j(t,\varepsilon) = \xi_j(t))$ $(j = 1, 2)$.*

Литература

1. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений содержащих малые параметры при производных [Текст]/А.Н. Тихонов//мат.сб.1952.-т.31(73),є3.-575-586.

2. Понтрягин Л.С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных [Текст]/ Л.С. Понтрягин//Изв. АН ССР.1957.-т.21,є5.-с.605-626.

3. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания [Текст]/ 3. Е.Ф Мищенко, Н.Х. Розов.-М.: Наука, 1975.-248с.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОПЕРАТОРАМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аликулов Т.Н.[1]

[1] Национальный Университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент
[1]tolibaka@mail.ru

Аннотация. В данной работе изучено применение мнимых степеней дифференциального оператора второго порядка с сингулярными коэффициентами к изучению дифференциальное уравнение в банаховом пространстве.

Пусть G-конечная область $n-$мерного евклидова пространства с дважды непрерывно дифференцируемой границей S. В области G рассмотрим уравнение

$$\lambda u - Lu = f(x) \tag{1}$$

с граничным условием

$$u|_S = 0. \tag{2}$$

Здесь

$$L(x,D)u = -\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\partial_j\partial_k u(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\partial_j u(x) + c(x)u(x) \tag{3}$$

с областью определения $W_p^2(G)$, $1 < p < \frac{n}{1+\tau}, 0 \le \tau < 1$, где коэффициенты оператора $L(x,D)$ удовлетворяют условиях:

i) $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$-действительнозначная симметрическая матрица для всех $x \in \overline{G}$ и имеет константу $a_0 = const > 0$ такая, что $a_0 \le a(x)\xi\xi \le a_0^{-1}$ для $x \in \overline{G}, \xi \in R^n, |\xi| = 1$;

ii) Коэффициенты $b_i \epsilon L_{r_k}(R^n)$, $i = \overline{1,n}$ для некоторого r_k, где $1 \le r_k < n$;

iii) $c(x)-$ как комплекснозначная функция действительных переменных, допускающая особенность вида

$$|D^\alpha(x)| \le \frac{const}{|x|^{1+\tau+|\alpha|}}, \quad x \in R^n. \tag{4}$$

Здесь α - мультииндекс, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $0 < |\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \le n$, $0 \le \tau < 1$.

Далее, пусть X - комплексное банахово пространство и $L(x,D)$ - замкнутый линейный оператора в пространстве X. Обозначим через $D(L), R(L), N(L), \rho(L), \sigma(L)$ соотвественно область определения, область значения, ядро, множество регулярных точек и спектр оператора $L(x,D)$.

Определение 1. *Будем говорить, что $L(x,D)$ - секториальный оператор, если $D(L)$ и $R(L)$ плотный в пространстве X, $N(L) = 0$, $(-\infty, 0) \subset \rho(L)$ и существует такая константа M, что для любого $t > 0$ выполняется неравенство $\|t(t+L)^{-1}\|_p \le M$.*

Пусть оператор $L(x,D)$ секториальный. Тогда мнимая степень этого оператора определяется по формуле (см. [1]).

$$L^z f = \frac{\sin \pi z}{\pi}\Big\{\frac{f}{z} - \frac{L^{-1}f}{1+z} + \int\limits_0^1 t^{z+1}(t+L)^{-1}L^{-1}f dt + \int\limits_1^{+\infty} t^{z-1}(t+L)^{-1}Lf dt\Big\}, \tag{5}$$

для любой функции $f \in D(L) \cap R(L)$, $|Rez| < 1$.

Пусть $\sum_\theta = \{\lambda \in C\backslash\{0\} : |arg\lambda| < \theta\}$, где $\theta \in (0,\pi)$.

Отметим, что среди функций, удовлетворяющий условию (5), найдутся такие, которые отличаются от поставленного условия на функции $c(x)$ в работе [1-2]. Отметим, так же с помощью свойство мнимых степеней дифференциального оператора вытекает следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполняются условия i), ii), iii) и* $1 < p < \frac{n}{1+\tau}$, $0 < \theta < \pi$, $N(L) = 0$ $\sigma(L) \subset \Sigma_\theta$. *Тогда для всех* $\lambda \in C\backslash\sigma(L)$ *задача (1)-(2) при любом* $f(x) \in L_p(R^n)$ *имеет обобщенное решение* $u(x) \in W_p^2(G)$ *и для него выполняется оценка*

$$\|u\|_{L_p(G)} \leq \frac{const}{|\lambda|}\|f\|_{L_p(G)}. \tag{6}$$

Литература

1. *Pruss J., Sohr H.* Imaginary powers of elliptic second order differential operators in L_p - spaces // J. Math, Sec. Japan. 23. P. 61 - 192.

2. *Соломяк М.З.* Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах Банаха. // ДАН. Москва. Т. 122, -№ 9(8). С. 1609-1626.

АНАЛОГ ЛЕММЫ ЖОРДАНА ДЛЯ A-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Амиров З.А.

Национальный университет Узбекистана
ziyodullaamirov1991@mail.ru

Пусть A-антианалитическая, т.е $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$ в выпуклой в области $D \subset \mathbb{C}$ и такая, что $|A(z)| \leq C < 1$, $\forall z \in D$.

Определение 1. Пусть $f \in C^1(D)$ -дифференцируемая функция. Если для любой $z \in D$ она удовлетворяет уравнению.

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} - A\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

то $f(z)$ называется A-аналитической функцией в области D.

Множество

$$\{z \in D : |\psi(z,\xi)| = \left| z - \xi + \overline{\int_{\gamma(\xi,z)} \overline{A}(\tau)d\tau} \right| < r, r > 0\},$$

представляет собой открытое множество в D. Для достаточно маленьких r оно компактно принадлежит D и содержит точку ξ. Такое множество называется A-лемнискатой, с центром в точке ξ и обозначается как $L(\xi, r)$.

Определение 2. Вычетом A-аналитической функций $f(z)$ в точке $a \in D$ называется значение интеграла от функции $f(z)$ по достаточно малой A-лемнискате $L(a,r) \subset\subset D$, деленной на $2\pi i$:

$$\underset{z=a}{res} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial L(a,r)} f(z)(dz + A(z)d\overline{z}).$$

Теорема. *Пусть* $f -$ *A-аналитическая функция в области* D *и в окрестности точка* a

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

где h *и* $g -$ *A-аналитические функции в области* D*, причем* $g(a) \neq 0, h(a) = 0$ *и* $\frac{\partial h}{\partial z}|_{z=a} \neq 0$*, тогда*

$$\underset{z=a}{res} f(z) = \frac{g(a)}{\frac{\partial h}{\partial z}|_{z=a}}.$$

Если $A = const$ *и* $|A| < 1$ *тогда верна следующая лемма.*

Лемма (аналог леммы Жордана). *Пусть* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *A-аналитическая функция в области* $D = \{z \in D : Im(z + A\overline{z}) \geq 0\}$ *всюду, за исключением изолированного множество особых точек, и*

$$M(t) = \sup_{|z+A\overline{z}|=t, Im(z+A\overline{z})\geq 0} |f(z)| \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

стремится к нулю при $t \to \infty$. *Тогда для любого* $\lambda > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \oint\limits_{\substack{|z+A\overline{z}|=t \\ Im(z+A\overline{z})\geq 0}} f(z)e^{i\lambda(z+A\overline{z})}(dz + Ad\overline{z}) = 0.$$

Литература

1. *Sadullaev A., Jabborov N.M.* On a class of A-analitic functions. Siberian Federal University: Maths and Physics, 2016 9(3). 374-383 P.
2. *Жабборов Н.М., Отабоев Т.У.* Аналог интегральной формулы Коши для A-аналитических функций, Узбекский математический журнал, 2016, №4, с. 50-59.
3. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ, М. Наука, 1976г.
4. *Хурсанов Ш.Я.* Вычет для A-аналитических функций. Modern problems of dynamical systems and their applications. Turin polytechnic university in Tashkent. 2017. с. 51-52.

О СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА ЛИУВИЛЛЯ

Акмалова А. Н.[1], Буваев К. Т.[2]

[1] Национальный университет Узбекистана им.М.Улугбека, Узбекистан, Ташкент
[2] Национальный университет Узбекистана им.М.Улугбека, Узбекистан, Ташкент
buvayev@mail.ru

Рассмотрим N-мерное евклидово пространство R^N, элементы которого обозначим через $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$ и положим $(x,y) = x_1y_1 + \cdots + x_Ny_N$, $|x| = \sqrt{(x,x)}$.

Пусть $A(D)$ неоднородный эллиптический дифференциальный оператор с вещественными коэффициентами и областью определения $C_0^\infty(R^N)$, т.е.

$$A(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha, \quad D^\alpha = \frac{(-i\partial)^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}}. \tag{1}$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$-мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$.

Замыкание эллиптического оператора (1) с постоянными вещественными коэффициентами будет самосопряженным и полуограниченным в $L_2(R^N)$. По известной теореме К.О. Фридрихса, каждый самосопряженный полуограниченный оператор имеет по крайней мере одно самосопряженное расширение. Используя преобразование Фурье, можно показать, что существует единственное самосопряженное расширение оператора A, причем спектральная функция этого оператора равна

$$\Theta(x,y,\lambda) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{A(\xi)<\lambda} e^{i(x-y,\xi)}d\xi, \tag{2}$$

где $A(\xi) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \xi^\alpha$- полный символ оператора $A(D)$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_N^{\alpha_N}$.

Обозначим через $E_\lambda f(x)$ спектральные разложения финитных функций f из $L_p(R^N)$, $\quad p \geq 1$, т.е.

$$E_\lambda f(x) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{A(\xi)<\lambda} \hat{f}(\xi)e^{i(x,\xi)}d\xi, \tag{3}$$

где $\hat{f}$-преобразование Фуре функции f.

Главный символ оператора A обозначим через $a(\xi)$, т.е. $a(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$. Предположим, что множество $\{\xi \in R^N : \; a(\xi) < 1\}$ является выпуклым.

Отметим, что если $A(D) = -\Delta$, т.е. оператор Лапласа, то разложение (3) совпадает с обычными шаровыми частичными интегралами Фурье. В этом случае $A(\xi) = |\xi|^2$ и, естественно $\{\xi \in R^N : |\xi|^2 < 1\}$ шар является строго выпуклым множеством.

В данной работе изучается вопрос о сходимости почти всюду (п.в.) в R^N спектральных разложений $E_\lambda f$ в случае, когда разлагаемая функция принадлежит классу Лиувилля $L_p^a(R^N)$. Следует отметить, что ранее сходимость почти всюду средних Рисса $E_\lambda^s f$, связанные с произвольными эллиптическими дифференциальными операторами (в частности, и средние Рисса кратных рядов и интегралов Фурье) изучались только для функций из классов L_p (см. обзорные работы [1], [2]).

Определение 1. *Будем говорить, что оператор $A(D)$ принадлежит классу $A(r)(r = 0, 1, \dots, N-1)$, если в каждой точке соответствующей поверхности $\{\xi : A(\xi) = 1\}$ по крайней мере r из $N-1$ главных кривизн отличны от нуля.*

Определение 2. *Будем говорить, что функция $f(x)$, определенная во всем пространстве R^N, принадлежит при $a > 0$, $p \geq 1$ классу Лиувилля $L_p^a(R^N)$, если конечна норма $\|f\|_{L_p^a(R^N)} = \|F^{-1}(1 + |\xi|^2)^{\frac{a}{2}} Ff\|_{L_p(R^N)}$, где Fg и $F^{-1}g$ прямое и обратные преобразования Фурье функции $g \in L_p(R^N)$.*

Основной результат данной работы состоит в следующем.

Теорема. *Пусть $A(D) \in A_r$ и финитная функция f принадлежит классу $L_p^a(R^N)$ при $1 \leq p \leq 2$. Тогда для любого $a > 2(N - 1 - \frac{r}{2})(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$ почти всюду в R^N имеет место равенство*

$$\lim_{\lambda \to \infty} E_\lambda f(x) = f(x).$$

Данная теорема при $a > N(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$ для произвольных эллиптических дифференциальных операторов в области доказана в работе [3], а для псевдодифференциального оператора в работе [4].

Литература

1. *Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М.* Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений// УМН, 1976, т.31, № 6, с.29-83; 1977, т.32, № 1, с.107-130.

2. *Алимов Ш. А., Ашуров Р. Р., Пулатов А. К.* Кратные ряды и интегралы Фурье// Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. ВИНИТИ. 1989, Т.42, с.5-105.

3. *Бастис А. Й.* Некоторые вопросы суммируемости спектральных разложений, отвечающих эллиптическим операторам. кандидатская диссертация, Москва, 1983, 83 с.

4. *Ашуров Р. Р.* О суммируемости почти всюду рядов Фурье из L_p по собственным функциям// Мат. заметки, т.34, №6, 1983, с. 837-843.

УЗИЛИШГА ЭГА БЎЛГАН КОЭФФИЦИЕНТЛИ ЧИЗИҚЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН СПЕКТРАЛ МАСАЛАЛАР

Фозилова Ф.Ф., ФарДУ, Ўзбекистон,

fozilovaferuza@mail.ru,

Ушбу мақолада узилишга эга бўлган коэффициентли чизиқли оддий дифференциал тенглама учун оддий ва умумлашган спектрал масала ўрганилган. Масалаларнинг хос сонлари ва хос функциялари топилган.

1-масала. *λ параметрнинг шундай қийматлари топилсинки,*

$$sign\left(x - \frac{\pi}{2}\right) y''(x) = \lambda y(x), \qquad x \in (0, \pi) \tag{1}$$

тенгламанинг $C[0,\pi] \cap C^1(0,\pi)$ синфга тегишли ва қуйидаги

$$y(0) = 0, \qquad y(\pi) = 0 \tag{2}$$

шартларни қаноатлантирувчи тривиалмас ечими мавжуд бўлсин.

Бу масала узилишга эга бўлган коэффициентли чизиқли оддий дифференциал тенглама учун оддий спектрал масалага мисол бўлади. (1) тенглама $(0,\pi)$ оралиқда иккита оддий дифференциал тенгламаларга ажрайди. Уларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} -y''(x) = \lambda y(x) & 0 < x < (\pi/2), \qquad (3) \\ y''(x) = \lambda y(x) & (\pi/2) < x < \pi. \qquad (4) \end{cases}$$

(3) ва (4) тенгламаларнинг умумий ечимлари, (2) чегаравий шартлар ва масала шартидан келиб чиқувчи $y\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = y\left(\frac{\pi}{2}+0\right)$, $y'\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}+0\right)$ "улаш шартлари"дан фойдаланиб, қуйидаги теоремани тўғри эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин:

1-теорема. *1-масала саноқли сондаги хос сонларга ва хос функцияларга эга бўлиб, хос сонлар* $\lambda_n{}^{(1)} = (2\mu_n/\pi)^2$, $\lambda_n{}^{(2)} = -(2\mu_n/\pi)^2$ $n \in \mathrm{N}$ *кўринишга,* $\lambda_n{}^{(1)}$ *хос сонларга мос хос функциялар*

$$y_n{}^{(1)}(x) = \begin{cases} a_n \cos\left(\sqrt{-\lambda_n{}^{(1)}}\frac{\pi}{2}\right) sh\left(\sqrt{-\lambda_n{}^{(1)}}x\right), & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ -a_n ch\left(\sqrt{-\lambda_n{}^{(1)}}\frac{\pi}{2}\right)\sin\left[\sqrt{-\lambda_n{}^{(1)}}(x-\pi)\right], & \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

кўринишга, $\lambda_n{}^{(2)}$ *хос сонларга мос хос функциялар эса*

$$y_n{}^{(2)}(x) = \begin{cases} a_n ch\left(\sqrt{\lambda_n{}^{(2)}}\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_n{}^{(2)}}x\right), & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ a_n \cos\left(\sqrt{\lambda_n{}^{(2)}}\frac{\pi}{2}\right) sh\left[\sqrt{\lambda_n{}^{(2)}}(x-\pi)\right], & \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

кўринишга эга, бу ерда μ_n *ҳақиқий сон -* $tgz = -thz$ *тенгламанинг* n*- мусбат илдизи,* $a_n \neq 0$, $n \in N$ *- ихтиёрий ҳақиқий сонлар.*

2-масала. λ *параметрнинг шундай қийматлари топилсинки, (1) тенгламанинг* $C[0,\pi] \cap C^1(0,\pi)$ *синфга тегишли ва қуйидаги*

$$\sqrt{|\lambda|}y(0) - y'(0) = 0, \qquad \sqrt{|\lambda|}y(\pi) - y'(\pi) = 0 \qquad (5)$$

шартларни қаноатлантирувчи тривиалмас ечими мавжуд бўлсин.

Ушбу масала узилишга эга бўлган коэффициентли чизиқли оддий дифференциал тенглама учун умумлашган спектрал масалага мисол бўлади.

1-масалада эслатиб ўтилган усул билан қуйидаги теореманинг хулосаси тўғри эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин:

2-теорема. *2-масала саноқли сондаги хос сонларга ва хос функцияларга эга бўлиб, хос сонлар* $\lambda_n{}^{(1)} = -(2n)^2$, $\lambda_0 = 0$ *ва* $\lambda_n{}^{(2)} = (2n)^2$, $n \in \mathrm{N}$ *кўринишга, уларга мос хос функциялар эса мос равишда*

$$y_n{}^{(1)}(x) = \begin{cases} c_n e^{2nx}, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \sqrt{2}c_n e^{n\pi}\sin\left[\frac{\pi}{4}+2nx\right], & \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases}$$

$$y_0(x) = c_0, \qquad x \in [0,\pi],$$

$$y_n{}^{(2)}(x) = \begin{cases} c_n \sin\left[\frac{\pi}{4}+2nx\right], & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ (-1)^n c_n \frac{e^{2nx-n\pi}}{\sqrt{2}}, & \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

кўринишга эга, бу ерда $c_n \neq 0$, $n \in N$*- ихтиёрий ҳақиқий сонлар.*

Фойдаланилган адабиётлар

1. *Салоҳитдинов М.С. Насритдинов Ғ.Н.* Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент: Ўқитувчи, 1982. 448 бет.

2. *Уринов А.К.* Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. Тошкент: МУМТОЗ СЎЗ, 2014. 164 бет.

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НЕСЖИМАЕМЫХ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД С ОДНИМ ДАВЛЕНИЕМ

Имомназаров Ш.Х.[1], Имомназаров Х.Х.[1], Маматкулов М.М.[2]

[1] Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Россия

[2] НУУз имени Мирзо Улугбека, механико-математический факультет, Ташкент, Узбекистан

[1]e-mail:shirz999@mail.ru, [1]e-mail:mih.imom@omzg.sscc.ru

Распространение нелинейных волн в вязкой двухжидкостной среде с равновесием фаз по давлению описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}=-\frac{\nabla p}{\bar\rho}+\nu\,\Delta\mathbf{v}+\frac{\tilde\rho}{2\,\bar\rho}\nabla(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v})^2,\qquad \operatorname{div}\mathbf{v}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t}+(\tilde{\mathbf{v}},\nabla)\tilde{\mathbf{v}}=-\frac{\nabla p}{\bar\rho}+\tilde\nu\,\Delta\tilde{\mathbf{v}}-\frac{\rho}{2\,\bar\rho}\nabla(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v})^2,\qquad \operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}}=0, \tag{2}$$

где $\tilde{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{v}$ — вектора скоростей подсистем, составляющих двухскоростной континуум с соответствующими парциальными плотностями $\tilde\rho$ и ρ, ν и $\tilde\nu$ — соответствующие кинематические вязкости, $\bar\rho=\tilde\rho+\rho$ — общая плотность двухскоростного континуума; $p=p(\bar\rho,(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v})^2)$ — уравнение состояния двухскоростного континуума.

Исследуем для этой системы уравнений в цилиндрической области $\Omega=[0,\,R]\times[0,\,2\,\pi]\times[0,\,L]$ следующую начально-краевую задачу со следующими начальными

$$\tilde{\mathbf{v}}|_{t=0}=\tilde{\mathbf{v}}_0(\mathbf{x}),\quad \mathbf{v}|_{\mathbf{t=0}}=\mathbf{v_0}(\mathbf{x}), \tag{3}$$

граничными условиями

$$\tilde v_z(r,\varphi,0)=0,\quad \tilde v_r(R,\varphi,z)=\tilde v_r(0,\varphi,z)=0,\quad \int_0^{2\,\pi}\int_0^L R\,(L-z)\,\frac{\partial\tilde v_z}{\partial r}(R,\varphi,z)d\varphi dz+$$
$$+\int_0^{2\,\pi}\int_0^R\left(\tilde v_z(r,\varphi,L)-L\,\frac{\partial\tilde v_z}{\partial z}(r,\varphi,0)\right)d\varphi dr=\tilde h(t), \tag{4}$$

$$v_z(r,\varphi,0)=0,\quad v_r(R,\varphi,z)=v_r(0,\varphi,z)=0,\quad \int_0^{2\,\pi}\int_0^L R\,(L-z)\,\frac{\partial v_z}{\partial r}(R,\varphi,z)d\varphi dz+$$
$$+\int_0^{2\,\pi}\int_0^R\left(v_z(r,\varphi,L)-L\,\frac{\partial v_z}{\partial z}(r,\varphi,0)\right)d\varphi dr=h(t), \tag{5}$$

где $h(t)$, $\tilde h(t)$ — заданные непрерывные функции на $[0,\infty)$.

Введем функции

$$J=\int_\Omega(\mathbf{v}\,\mathbf{u})\,d\mathbf{x},\quad \tilde J=\int_\Omega(\tilde{\mathbf{v}}\,\mathbf{u})\,d\mathbf{x},\quad \mathbf{u}=(0,\,0,\,L-z),\quad z\in[0,\,L],$$

$$f_1(t)=g(t)+\rho\,\nu\,h(t)+\tilde\rho\,\tilde\nu\,\tilde h(t),\quad f_2(t)=G(t)+\tilde\nu\,\tilde h(t),\quad G(t)=-\frac{1}{\bar\rho}\int_0^R\int_0^{2\,\pi} r\,L\,P(r,\varphi,0)\,drd\varphi.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Классическое решение задачи (1)–(5) не существует глобально при выполнении следующих условий:

1) пусть $f(t),\ f_2(t) \geq 0$, тогда при условиях $J(0),\ \tilde{J}(0) > 0$ справедливы оценки снизу

$$J(t) \geq \frac{J(0)}{1 - J(0)\, k^2\, t}, \quad J(0) = \int_\Omega \mathbf{v}_0(\mathbf{x})\, \mathbf{u}\, d\mathbf{x},$$

$$\tilde{J}(t) \geq \frac{\tilde{J}(0)}{1 - \tilde{J}(0)\, k^2\, t}, \quad \tilde{J}(0) = \int_\Omega \tilde{\mathbf{v}}_0(\mathbf{x})\, \mathbf{u}\, d\mathbf{x},$$

при этом имеет место оценка на время разрушения

$$T_\infty \leq \frac{1}{k^2} \min\left(\frac{1}{\tilde{J}(0)},\ \frac{1}{\tilde{J}(0)}\right);$$

2) пусть $f(t) \geq a^2 > 0,\ f_2(t) \geq \tilde{a}^2 > 0$, тогда

$$J(t) \geq \frac{a}{k} \tan(a\, k\, t + c_0), \quad c_0 = \arctan\left(\frac{k\, J(0)}{a}\right),$$

$$\tilde{J}(t) \geq \frac{\tilde{a}}{k} \tan(\tilde{a}\, k\, t + \tilde{c}_0), \quad \tilde{c}_0 = \arctan\left(\frac{k\, \tilde{J}(0)}{\tilde{a}}\right),$$

оценка на время разрушения $T_\infty \leq \frac{1}{k} \min\left((\pi/2 - c_0)/a,\ (\pi/2 - \tilde{c}_0)/\tilde{a}\right)$;

3) пусть $f(t) \geq -a^2,\ f_2(t) \geq -\tilde{a}^2$, тогда при условиях $k\, J(0) > |a|,\ k\, \tilde{J}(0) > |\tilde{a}|$ справедливы оценки снизу

$$J(t) \geq \frac{a}{k} \frac{\mathrm{e}^{-2\, a\, k\, t} + c_0}{\mathrm{e}^{-2\, a\, k\, t} - c_0}, \quad c_0 = \frac{k\, J(0) - a}{k\, J(0) + a},$$

$$\tilde{J}(t) \geq \frac{\tilde{a}}{k} \frac{\mathrm{e}^{-2\, \tilde{a}\, k\, t} + \tilde{c}_0}{\mathrm{e}^{-2\, \tilde{a}\, k\, t} - \tilde{c}_0}, \quad \tilde{c}_0 = \frac{k\, \tilde{J}(0) - \tilde{a}}{k\, \tilde{J}(0) + \tilde{a}},$$

и оценка на время разрушения

$$T_\infty \leq \frac{1}{2\, k} \min\left(\frac{1}{a} \ln\left(\frac{k\, J(0) + a}{k\, J(0) - a}\right),\ \frac{1}{\tilde{a}} \ln\left(\frac{k\, \tilde{J}(0) + \tilde{a}}{k\, \tilde{J}(0) - \tilde{a}}\right)\right).$$

Литература

1. *Imomnazarov Kh.Kh., Imomnazarov Sh.Kh., Mamatqulov M.M.*Non-existence of the global solution of initial boundary value problem for the incompressible two-velocity medium equation // Bull. Nov. Comp. Center, series: Num. Model. in Atmosph. etc., Novosibirsk, 2017, No. 16, pp.17-25.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МАГНИТОПОРИСТОСТИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ СКВАЖИННЫХ ДАННЫХ

Имомназаров Ш.Х.[1], Урев М.В.[2],

[1] Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Россия

[2] Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Россия

[1]`e-mail:shirz999@mail.ru`, [2]`e-mail:mih.urev2010@yandex.ru`

Электродинамические индукционные приборы, измеряющие электропроводность формации в скважинных условиях, представляют незначительную часть свойств насыщенной горной породы. Акустические методы, например, в скважинных схемах с использованием волн Стоунли позволяют измерять проницаемость формации. Поскольку проницаемость пористой формации в значительной степени зависит от способа ее измерения, возникает желание для однозначной интерпретации скважинных данных произвести упомянутые измерения в рамках единой технологической схемы. Такую возможность открывают электроакустические методы, позволяющие проводить, например, одновременно измерение проницаемости и электропроводности, а также электроакустической постоянной [1]. Принципиальная возможность таких измерений была показана в работе [1], при использовании электроакустического эффекта в магнитоакустике пористых насыщенных сред. В присутствии постоянного магнитного поля в пористой насыщенной электропроводящей среде электромагнитное индукционное зондирование квазистационарным электромагнитным полем порождает акустический отклик, позволяющий при измерении амплитуды этого отклика произвести одновременное измерение электропроводности и проницаемости исследуемой формации при известном значении электроакустического параметра. Эффект акустического отклика исследовался на примере плоской границы раздела сред. Реальные полевые условия подразумевают наличие цилиндрической геометрии скважины с конечным радиусом, что вносит поправки в характерные частоты и в технологическую измерительную конструкцию. В [2] показана возможность практической реализации идей работы [1] для применения к скважинным условиям. А именно, показано, что принципиальная схема измерения электропроводности и проницаемости работы [1] сохраняется, но характерная частота акустического отклика сдвигается в низкочастотную область со всеми вытекающими для практических измерений последствиями.

В данной работе рассматривается система уравнений магнитопористости в диссипативном приближении в полупространстве $r > 1$ в цилиндрической системе координат, моделирующая распространение магнитоупругих волн в пористой среде, насыщенной жидкостью. Диссипация происходит за счет вхождения в систему уравнений коэффициента Дарси (аналога межфазного трения χ^{∂}), электропроводности σ и электроакустического параметра α. Предположим, что внешнее магнитное поле $\mathbf{b}_0 = (b_0/r, 0, 0)$ параллельно к оси Or распространения волны. В области $\Omega = (1, R)$ в частотном (ω) представлении вектор скорости $\mathbf{u} = (0, u_\varphi, u_z)$ и вектор магнитного поля $\mathbf{b} = (0, b_\varphi, b_z)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}Lu_\varphi + k_u^2(\omega)\, u_\varphi + \xi(\omega)\left(\frac{1}{r}\, Lb_\varphi - i\,\frac{\omega}{\omega_*}\,\frac{db_z}{dr}\right) = 0, \\ L\frac{du_z}{dr} + k_u^2(\omega)\, u_z + \xi(\omega)\left(\frac{1}{r}\,\frac{db_z}{dr} + i\,\frac{\omega}{\omega_*}\, Lb_\varphi\right) = 0, \\ \frac{d}{dr}\, Lb_\varphi + k_b^2(r,\omega)\, b_\varphi - \frac{\tilde{\nu}(r,\omega)}{r^3}\, Lb_\varphi + \eta(r,\omega)\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}u_\varphi + i\frac{\omega}{\omega_*}\, u_z\right) = 0, \\ L\,\frac{db_z}{dr} + k_b^2(r,\omega)\, b_z - \frac{\tilde{\nu}(r,\omega)}{r^3}\,\frac{db_z}{dr} + \eta(r,\omega)L\,\left(\frac{1}{r}u_z - i\frac{\omega}{\omega_*}\, u_\varphi\right) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

с граничными условиями при $r = 1$

$$\frac{d\,u_\varphi}{dr} - \frac{u_\varphi}{r} = 0, \quad \frac{d\,u_z}{dr} = 0, \quad b_\varphi = 0, \quad b_z = b_{z0}(\omega), \tag{2}$$

и однородными нулевыми условиями для всех компонент при $r = R \gg 1$.

В системе (1) использованы следующие обозначения:

$$Lu = \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = \frac{1}{r}\frac{d(ru)}{dr},$$

$$k_u^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c_t^2}\left(1 + \frac{i\bar{\omega}}{\omega + i\bar{\omega}}\varepsilon\right), \quad k_b^2(r,\omega) = \frac{i\omega}{D(r,\omega)}, \quad \omega_* = \frac{b_0\,\bar{\omega}\sigma}{\alpha\, c_e\rho_l}, \quad \bar{\omega} = \rho_l\,\chi^{\partial},$$

$$\tilde{\nu}(r,\omega) = \frac{2\,i\,c_A^2}{D(r,\omega)\,(\omega + i\bar{\omega})}, \quad D(r,\omega) = \frac{c_e^2}{4\pi\sigma} + i\frac{c_A^2}{\omega + i\bar{\omega}}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\bar{\omega}^2}{\omega_*^2}\right),$$

$$\xi(\omega) = \frac{\varepsilon\,\omega}{\sqrt{4\pi\rho_l}\, c_t\,(\omega/\bar{\omega} + i)}\frac{c_A}{c_t}, \quad \eta(r,\omega) = \frac{i\sqrt{4\pi\rho_l}\, c_A}{D(r,\omega)\,(\omega/\bar{\omega} + i)}, \quad c_A^2 = \frac{b_0^2}{4\pi\rho_l},$$

c_e и c_t – скорости света и поперечной волны, соответственно, ρ_l – парциальная плотность проводящей жидкости.

В докладе доказано существование обобщенного решения задачи (1), (2) в комплексном весовом гильбертовом функциональном пространстве Соболева $\mathcal{H} = (H_r^1(\Omega))^4$. Для этого показано, что отвечающая задаче (1), (2) полуторалинейная форма $b(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ является $(\mathcal{H}, \mathcal{L})-$ коэрцитивной [3, 4], где $\mathcal{L} = (L_r^2(\Omega))^4$. Также обсуждается применение метода конечных элементов для численного решения задачи (1), (2).

Литература

1. *Доровский В.Н., Доровский С.В.*Электромагнитоакустический метод измерения электропроводности и дзета-потенциала // Геология и геофизика. 2009. Т. 50 (6), С. 735-744.

2. *Имомназаров Ш.Х., Доровский В.Н.*Магнитозвуковые колебания в скважинных условиях, определяющие электрокинетические параметры пористой насыщенной среды // Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2017. XI Междунар. науч. конгр., Новосибирск : Междунар. науч. конф. "Дистанционные методы зондирования Земли и фотограмметрия, мониторинг окружающей среды, геоэкология" 2017. Т.1, С. 186-190.

3. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. – М.: Мир, 1977. – 383 с.

4. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.

Продолжение решений линейных эллиптических систем первого порядка на плоскости

Т. Ишанкулов

Самаркандский государственный университет, г. Самарканд, Узбекистан

e-mail: tolibi@mail.ru

Как известно [1], линейная эллиптическая система первого порядка на плоскости заменой пременных и неизвестных функций сводится к обобщенному уравнению Коши - Римана

$$\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} + A(z)W + B(z)\overline{W} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}), \quad z = x + iy. \tag{1}$$

Решение уравнение (1) называется обобщенной аналитической функцией. В данной работе рассматривается задача продолжения обобщенной аналитической функции в круге по ее значениям на части граничной окружности. Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ - единичный круг и $t' = e^{i\theta'}, t'' = e^{i\theta''}$ точки на единичной окружности $\partial D, 0 < \theta' < \theta'' < 2\pi$. Дугу (t', t'') окружности ∂D обозначим через S;$C_\alpha(E)$ - множество функций комплексного переменного z, удовлетворяющих условию Гчлдера на комплексной плоскости E;$L_{p,2}(E)$ - множество функций f удовлетворяющих условиям

$$f(z) \in L_p(\overline{D}), |z|^{-2} f(\frac{1}{z}) \in L_p(\overline{D}).$$

Через $U_{p,2}(A, B, D)$ обозначим множество решений в области D уравнения (1), где

$$A, B \in L_{p,2}(E) \cap C_\alpha(E), p > 2.$$

Формула аналитического продолжения функции комплексного переменного по ее значениям на части границы области регулярности впервые была получена Карлеманом [2]. Используя формулу Карлемана, В.А. Фок и Ф.М. Куни [3] решили задачу описания функций заданных на части границы области, которые являются следом аналитических в этой области функций. Теорема Фока-Куни имела продолжение в многочисленных публикациях[4]. В данной работе рассматривается задача описания функций $\varphi \in C(S)$, которые являются следом функции $w \in U_{p,2}(A, B, D)$. Рассмотрим гармоническую меру ω дуги S относительно круга D:

$$\omega(z, \theta', \theta'') = \frac{1}{\pi} arg(\frac{z - e^{i\theta''}}{z - e^{i\theta'}} e^{\frac{\theta' - \theta''}{z} i}).$$

Обозначим через $X_j^\sigma(z, \zeta)$ $(j = 1, 2)$ решения уравнения (1) по переменной z из класса $U_{p,2}(A, B, D)$, соответствующие по теореме взаимности [1] аналитическим функциям

$$\frac{1}{2}\Phi_\sigma(z, \zeta), \frac{1}{2i}\Phi_\sigma(z, \zeta),$$

где Φ_σ - функция Карлемана дуги S относительно круга D:

$$\Phi_\sigma(z, \zeta) = \frac{1}{\zeta - z} exp\{\sigma[\lambda(\zeta)]\},$$

$\lambda(z)$-аналитическая функция в области D, такое что $Re\lambda = w$, σ - положительный числовой параметр.

Теорема 1. Пусть $w \in U_{p,2}(A,B,D) \bigcap C(\overline{D}), w|_s = \varphi$. Тогда справедливы следующие эквивалентные формулы продолжения:

$$W(z) = \lim_{\sigma\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_S \Omega_1^\sigma(z,\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta - \Omega_2^\sigma(z,\zeta)\overline{\varphi}(\zeta)d\overline{\zeta}, z \in D, \tag{2}$$

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_S \Omega_1^\sigma(z,\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta - \Omega_2^\sigma(z,\zeta)\overline{\varphi}(\zeta)d\overline{\zeta} + \int\limits_0^\infty J(z,\sigma)d\sigma, \tag{2a}$$

где Ω_j - основные ядра Коши уравнения (1)

$$J(z,\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_S \gamma_1^\sigma(z,\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta - \gamma_2^\sigma(z,\zeta)\overline{\varphi}(\zeta)d\overline{\zeta},$$

$$\gamma_j^\sigma = \frac{\partial}{\partial\sigma}\Omega_j^\sigma, \quad \Omega_1^\sigma = X_1^\sigma + iX_2^\sigma, \quad \Omega_2^\sigma = X_1^\sigma - iX_2^\sigma.$$

Используя формулы (2) и (2a) можно получить критерий разрешимости упомянутой выше задачи продолжения. С этой целью рассмотрим область $D' = D \cup \{z : \theta' < argz < \theta''\}$. Имеет место следующая теорема о разрешимости задачи продолжения:

Теорема 2. Пусть $\varphi \in L(S) \bigcap C(S^\circ)S^\circ = IntS)$. Для того чтобы существовала функция $W \in U_{p,2}(A,B,D) \bigcap C(D \bigcup S)$ такая что ее сужение на S° совпадает с φ, необходимо и достаточно чтобы интеграл

$$|\int\limits_0^\infty J(z,\sigma)d\sigma| < \infty \tag{3}$$

сходился равномерно на каждом компакте $K \in D'$. Если выполнено условие (3), то продолжение осуществляется эквивалентными формулами (2) и (2a)

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Н. Векуа Обобщенная аналитическая функция М. 1959, 628 стр.
2. Carleman T. Les functions quasi analitiques. Paris-Gauthier-Villars. 1926.
3.Фок В.А., Куни Ф.М. О введении "гасящей"функции в дисперсионные соотношения // Докл. АНСССР, 1959. Т.127, є6. с. 1195-1198.
4. Айзенберг Л.А., Кытманов А.М. О возможности голоморфного продолжения в область функций, заданных на связном куске ее границы Мат.сб.1991,т.182, є 4, с 490-507.

НЕКОТОРЫЕ ТОЖДЕСТВА НА СФЕРЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Карачик В. В.[1]

[1] Южно-Уральский государственный университет, Россия, Челябинск
[1]karachik@susu.ru

Хорошо известно, что для гармонической в единичном шаре $S \subset \mathbb{R}^n$ функции $u \in C^m(\bar{S})$ верно равенство

$$\int_{\partial S} \frac{\partial^m u}{\partial\nu^m}\, ds_x = 0,$$

где $m \in \mathbb{N}$ (см., например, [1]). В настоящей работе выясняется какие еще равенства такого вида могут иметь место для нормальных производных от k-гармонических в S функций $u(x)$, т.е. таких функций, что $\Delta^k u = 0$ в S. В работе [2] исследовано свойство среднего для полигармонических функций и получены некоторые результаты, на основании которых выполнено настоящее исследование.

Пусть полиномы $P_n(t)$ находятся из рекуррентного равенства

$$P_n(t)+(2n-3)P_{n-1}(t)=t^2P_{n-2}(t),\quad n\geq 2,$$

где следует считать, что $P_0(t)=1$, $P_1(t)=1$.

Теорема. *Для всякой m-гармонической в S функции $u\in C^k(\bar S)$ при $k\geq m$ верны равенства*

$$\int_{\partial S}P_{m-i}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\frac{\partial^{2i}u}{\partial\nu^{2i}}\,ds_x=0,\quad \int_{\partial S}\frac{\partial^j u}{\partial\nu^j}\,ds_x=0,$$

где $0\leq i\leq m-1$ и $2m\leq j\leq k$ при $2m\leq k$.

В работе [3] при исследовании арифметического треугольника, возникающего из условий разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения был получен арифметический треугольник, похожий на арифметический треугольник, который составляют коэффициенты полиномов $P_n(t)$.

Пример. Если k-гармоническая в S функция $u\in C^k(\bar S)$ удовлетворяет на ∂S равенствам

$$\frac{\partial^j u}{\partial\nu^j}|_{\partial S}=\varphi_j(x),\quad j=1,\ldots,k,$$

т.е. $u(x)$ – решение однородной задачи Неймана для полигармонического уравнения в S, то для функций $\varphi_j(x)$, $j=1,\ldots,k$ необходимо выполнение условия (также было найдено в [4])

$$\int_{\partial S}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+k}\binom{2k-j-1}{j-1}(2k-2j-1)!!\,\varphi_j(x)\,ds_x=0.$$

Литература

1. *Карачик В. В.* О свойстве среднего для полигармонических функций в шаре // Математические труды. 2013. Т. Т., № 2. С. 69–88.
2. *Karachik V. V.* On the mean-value property for polyharmonic functions // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2013. Т. 6., № 3. С. 59–66.
3. *Карачик В. В.* Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана // Математические заметки. 2014. Т. 96., № 2. С. 228–238.
4. *Бондаренко Б. А, Карачик В. В.* Ромбоидальные числа и арифметические ромбы // Вопросы вычислительной и прикладной математики. 1998. Вып. 104, С. 45–68.
5. *Карачик В. В.* Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре // Сибирский журнал индустриальной математики. 2013. Т. XVI, № 4(56). С. 61–74.

О ГЛАДКОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССАХ СОБОЛЕВА

Касимов Ш.Г.[1], Ханова Н.М.[2],

[1,2] Национальный Университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент
[1]shokiraka@mail.ru

Данная работа посвящена изучении гладкости обобщенных решений краевых задач для более общих эллиптических уравнений второго порядка. В частном случае, для оператора Лапласа гладкости обобщенных решений краевых задач были изучены (см., в [1] или [2]).

Пусть в $n-$ мерной ограниченной области G задано эллиптические уравнение

$$Lu\equiv-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_i})+a(x)u=f(x)\tag{1}$$

коэффициенты которого вещественнозначны и удовлетворяют условиям $a(x) \in C(\overline{G})$, $a(x) \geq 0$, $k(x) \in C^1(\overline{G})$, $k(x) \geq k_0 > 0$ для всех $x \in G$. Функция $u(x)$ и свободный член $f(x)$ уравнения, вообще говоря, могут быть комплекснозначными.

Функция $u(x)$ из $C^2(G) \cap C(\overline{G})$ называется классическим решением первой краевой задачи или задачи Дирихле для уравнения (1), если в G она удовлетворяет уравнению (1), а на границе ∂G условию

$$u|\partial G = \varphi(x) \tag{2}$$

с заданной функцией $\varphi(x)$.

Пусть функция $u(x)$ является классическим решением в области G первой краевой задачи (1), (2). Тогда для произвольную финитную функции $v(x) \in \dot{C}^1(G)$ справедлива следующая равенства

$$\int\limits_G (k\nabla u \nabla \overline{v} + auv)dx = \int\limits_G f\overline{v}dx. \tag{3}$$

Функция $u \in H^1(G)$ называется обобщенным решением задачи (1), (2) при $f \in L_2(G)$, если она удовлетворяет тождеству (3) для всех $v \in \dot{H}^1(G)$ и граничному условию (2). В граничном условии (2) равенство понимается как равенство элементов из $L_2(\partial G)$, $u|_{\partial G}$ - след функции u.

Справедливо следующая.

Теорема. *Пусть $u(x)$ - обобщенное решение первой краевой задачи (1), (2). Если $k(x) \in C^{l+1}(\overline{G}), a(x) \in C^l(\overline{G})$, $\varphi \in H^{l+\frac{3}{2}}(\partial G)$ и $f(x) \in L_2(G) \cap H^l_{loc}(G)$ при некотором $l \geq \frac{1}{2}$, то $u(x) \in H^{l+2}_{loc}(G)$. В частности, любая обобщенная собственная функция первой краевой задачи для оператора L принадлежит $H^{l+2}_{loc}(G)$.*

Совершенно аналогичные результаты имеют место и для обобщенных решений второй и третьей краевых задач для уравнения (1) и соответствующих собственных функций оператора L. Доказательство теоремы проводится с применением теоремы о мультипликаторах Фурье (см., например в работе [3]) в классах Соболева.

Литература

1. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. Москва: Наука, 1983 год. 424 стр.

2. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Москва: Мир, 1965 год. 380 стр.

3. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. Москва: Мир, 1985 год. 472 стр.

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРАМИ ЛАПЛАСА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ В КЛАССАХ СОБОЛЕВА

Касимов Ш.Г.[1], Атаев Ш. К.[2],

[1,2] Национальный Университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент
[1]shokiraka@mail.ru

Как известно, что в физике твердого тела изучаются так называемые фрактальные среды, в частности, явления диффузии в них. В одной из моделей, диффузия в сильно пористой среде описывается уравнением типа уравнения теплопроводности, но с дробной производной по временной координате. В данной работе рассматривается уравнения вида

$$D^{\alpha}_{0t}u(x,t) = \Delta u(x,t) + f(x,t), (x,t) \in \Pi \times (0,\infty), \quad l-1 < \alpha \leq l, \quad l \in N \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\lim_{t \to 0} D^{\alpha-j}_{0t}u(x,t) = \varphi_j(x), \quad j = 1,2,...,l \tag{2}$$

и краевыми условиями

$$\begin{cases} \alpha_j \cdot u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)\mid_{x_j=0} +\beta_j \cdot u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)\mid_{x_j=\pi}=0, \quad 1\le j\le p, \\ \beta_j \cdot \frac{\partial u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)}{\partial x_j}\mid_{x_j=0} +\alpha_j \cdot \frac{\partial u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)}{\partial x_j}\mid_{x_j=\pi}=0, \quad 1\le j\le p, \\ u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)\mid_{x_j=0}= u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)\mid_{x_j=\pi}, \quad p+1\le j\le q, \\ \frac{\partial u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)}{\partial x_j}\mid_{x_j=0}= \frac{\partial u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)}{\partial x_j}\mid_{x_j=\pi}, \quad p+1\le j\le q, \\ u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)\mid_{x_j=0}=0, \quad q+1\le j\le N, \\ u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)\mid_{x_j=\pi}=0, \quad q+1\le j\le N, \\ 1\le p\le q\le N, \end{cases} \tag{3}$$

где $(x,t)=(x_1,...,x_j,...,x_N,t)\in\Pi\times(0,\infty)$, $\Pi=(0,\pi)\times...\times(0,\pi)$, $\alpha_j=const$, $\beta_j=const$ и функции $f(x,t)$, $\varphi_k(x)$, $k=1,2,...,l.$, разлагаемые функции по собственным функциям $\{v_n(x), n\in Z^N\}$ систему собственных функций спектральной задачи:

$$\Delta v(x)+\mu v(x)=0, \tag{4}$$

$$\begin{cases} \alpha_j \cdot v(x_1,...,x_j,...,x_N)\mid_{x_j=0} +\beta_j \cdot v(x_1,...,x_j,...,x_N)\mid_{x_j=\pi}=0, \quad 1\le j\le p, \\ \beta_j \cdot \frac{\partial v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j}\mid_{x_j=0} +\alpha_j \cdot \frac{\partial v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j}\mid_{x_j=\pi}=0, \quad 1\le j\le p, \\ v(x_1,...,x_j,...,x_N)\mid_{x_j=0}= v(x_1,...,x_j,...,x_N)\mid_{x_j=\pi}, \quad p+1\le j\le q, \\ \frac{\partial v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j}\mid_{x_j=0}= \frac{\partial v(x_1,...,x_j,...,x_N)}{\partial x_j}\mid_{x_j=\pi}, \quad p+1\le j\le q, \\ v(x_1,...,x_j,...,x_N)\mid_{x_j=0}=0, \quad q+1\le j\le N, \\ v(x_1,...,x_j,...,x_N)\mid_{x_j=\pi}=0, \quad q+1\le j\le N, \\ 1\le p\le q\le N. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь при $\alpha<0$ дробная интеграл D^α имеет вид

$$D^\alpha_{at}u(x,t)=\frac{sign(t-a)}{\Gamma(-\alpha)}\int_a^t \frac{u(x,\tau)\cdot d\tau}{|t-\tau|^{\alpha+1}},$$

при $\alpha=0$, то $D^\alpha_{at}u(x,t)=u(x,t)$, а при $l-1<\alpha\le l, l\in N$, дробная производная имеет вид

$$D^\alpha_{at}u(x,t)=sign^l(t-a)\frac{d^l}{dt^l}D^{\alpha-l}_{at}u(x,t)=$$

$$=\frac{sign^{l+1}(t-a)}{\Gamma(l-\alpha)}\frac{d^l}{dt^l}\int_a^t \frac{u(x,\tau)\cdot d\tau}{|t-\tau|^{\alpha-l+1}}.$$

При $N=1$ см.,в работу [1].

Норма в пространстве $W_2^{s_1,s_2,...,s_N}(\Pi)$, вводится так:

$$\left\|f(x)\right\|^2_{W_2^{s_1,s_2,...,s_N}(\Pi)}=\left\|f(x)\right\|^2_{L_2(\Pi)}+\sum_{j_1=1}^N\left\|D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}}f(x)\right\|^2_{L_2(\Pi)}+$$

$$+\sum_{1\le j_1<j_2\le N}\left\|D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}}D^{s_{j_2}}_{x_{j_2}}f(x)\right\|^2_{L_2(\Pi)}+...+\sum_{1\le j_1<j_2<...<j_N\le N}\left\|D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}}D^{s_{j_2}}_{x_{j_2}}...D^{s_{j_N}}_{x_{j_N}}f(x)\right\|^2_{L_2(\Pi)}.$$

Справедливо следующая

Теорема 1. *Пусть* $\alpha_j\ne0$, $\beta_j\ne0$, $|\alpha_j|\ne|\beta_j|$ *действительные числа при каждом* $1\le j\le p$ *и*

$$\rho=\max_{1\le j\le p}\sqrt{\theta_j^2+2\big(\frac{\theta_j}{\sqrt2}+(\varphi_j+1)^{s_j}-1\big)^2}\cdot\sigma(s_j)<1,$$

где $\sigma(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma(s_j)=1$, *при* $s_j>0$, $\theta_j=\sqrt{2}\cdot\max\limits_{x\in[0,\pi]}\left|e^{i\varphi_j x}-1\right|$,
$\lambda_{m_j}=2m_j+\varepsilon_{m_j}\cdot\varphi_j$, $\varphi_j=\frac{1}{\pi}\arccos\frac{-2\alpha_j\beta_j}{\alpha_j^2+\beta_j^2}$, $\varepsilon_{m_j}=\varepsilon_{-m_j}=\pm1$ *при* $m_j\in Z$.
Тогда система собственных функций

$$\{v_{m_1...m_N}(x_1,...,x_N)\}_{(m_1,...,m_p)\in Z^p\times(m_{p+1},...,m_q)\in Z^{q-p}\times(m_{q+1},...,m_N)\in N^{N-q}}=$$
$$=\{\prod_{j=1}^{p}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\beta_j\cos\lambda_{m_j}x_j+\varepsilon_{m_j}\cdot sign(\beta_j^2-\alpha_j^2)\cdot\alpha_j\sin\lambda_{m_j}x_j}{\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}\cdot\sqrt{1+|\lambda_{m_j}|^{2s_j}}}\}_{(m_1,...,m_p)\in Z^p}\times$$
$$\times\{\prod_{j=p+1}^{q}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1+|2m_j|^{2s_j}}}exp(i2m_jx_j)\}_{(m_{p+1},...,m_q)\in Z^{q-p}}\times$$
$$\times\{\prod_{j=q+1}^{N}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1+|m_j|^{2s_j}}}sin(m_jx_j)\}_{(m_{q+1},...,m_N)\in N^{N-q}},$$

спектральной задачи (4)-(5) образует полной ортонормированный системой в классах Соболева $W_2^{s_1,s_2,...,s_N}(\Pi)$.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha_j\neq0$, $\beta_j\neq0$, $|\alpha_j|\neq|\beta_j|$ *действительные числа при каждом* $1\le j\le p$ *и*

$$\rho=\max_{1\le j\le p}\sqrt{\theta_j^2+2\Big(\frac{\theta_j}{\sqrt{2}}+(\varphi_j+1)^{s_j}-1\Big)^2}\cdot\sigma(s_j)<1,$$

где $\sigma(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma(s_j)=1$, *при* $s_j>0$, $\theta_j=\sqrt{2}\cdot\max\limits_{x\in[0,\pi]}\left|e^{i\varphi_j x}-1\right|$,
$\lambda_{m_j}=2m_j+\varepsilon_{m_j}\cdot\varphi_j$, $\varphi_j=\frac{1}{\pi}\arccos\frac{-2\alpha_j\beta_j}{\alpha_j^2+\beta_j^2}$, $\varepsilon_{m_j}=\varepsilon_{-m_j}=\pm1$ *при* $m_j\in Z$, $s_j>k+\frac{N}{2}$, $k\ge0$, $k\in Z$. *Тогда ряд Фурье функции* $f(x)\in W_2^{s_1,s_2,...,s_N}(\Pi)\cap C^k(\Pi)$ *по ортонормированных собственных функций*

$$\{v_{m_1...m_N}(x_1,...,x_N)\}_{(m_1,...,m_p)\in Z^p\times(m_{p+1},...,m_q)\in Z^{q-p}\times(m_{q+1},...,m_N)\in N^{N-q}}=$$
$$=\{\prod_{j=1}^{p}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\beta_j\cos\lambda_{m_j}x_j+\varepsilon_{m_j}\cdot sign(\beta_j^2-\alpha_j^2)\cdot\alpha_j\sin\lambda_{m_j}x_j}{\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}\cdot\sqrt{1+|\lambda_{m_j}|^{2s_j}}}\}_{(m_1,...,m_p)\in Z^p}\times$$
$$\times\{\prod_{j=p+1}^{q}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1+|2m_j|^{2s_j}}}exp(i2m_jx_j)\}_{(m_{p+1},...,m_q)\in Z^{q-p}}\times$$
$$\times\{\prod_{j=q+1}^{N}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1+|m_j|^{2s_j}}}sin(m_jx_j)\}_{(m_{q+1},...,m_N)\in N^{N-q}},$$

спектральной задачи (4)-(5) сходится по норме пространства $C^k(\Pi)$ *к функции f(x).*

Теорема 3. *Пусть* $\varphi_j(x)\in W_2^{s_1+j-\frac{1}{2},s_2+j-\frac{1}{2},...,s_N+j-\frac{1}{2}}(\Pi)$ *и* $f(x,t)\in W_2^{s_1,s_2,...,s_N,s_{N+1}}(\Pi\times(0,+\infty))$ *при некотором* $s_1>\frac{1}{2},s_2>\frac{1}{2},...,s_N>\frac{1}{2}$. *Тогда решение задачи (1)-(2)-(3)* $u(x,t)\in W_2^{s_1+2,s_2+2,...,s_N+2,s_{N+1}+\alpha}(\Pi\times(0,+\infty))$ *представляется в виде ряда*

$$u(x,t)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}...\sum_{m_N=-\infty}^{\infty}\Big[\sum_{j=1}^{n}\varphi_{j(m_1...m_N)}t^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}(-\mu_{m_1...m_N}\cdot t^\alpha)+$$
$$+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\cdot E_{\alpha,\alpha}[-\mu_{m_1...m_N}(t-\tau)^\alpha]f_{m_1...m_N}(\tau)d\tau\Big]\cdot v_{m_1...m_N}(x_1,...,x_N),$$

где коэффициенты определяется следующим образом:

$$E_{\alpha,\alpha-j+1}(-\mu_{m_1...m_N}\cdot t^\alpha)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-\mu_{m_1...m_N}\cdot t^\alpha)^i}{\Gamma(\alpha i+\alpha-j+1)},$$

$$E_{\alpha,\alpha}\Big(-\mu_{m_1...m_N}\cdot(t-\tau)^{\alpha}\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-\mu_{m_1...m_N})^{i-1}\cdot(t-\tau)^{\alpha(i-1)}}{\Gamma(\alpha\cdot i)},$$

$$f(x,t)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}...\sum_{m_N=-\infty}^{\infty}f_{m_1...m_N}(t)\cdot v_{m_1...m_N}(x_1,...,x_N),$$

$$\varphi_j(x)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}...\sum_{m_N=-\infty}^{\infty}\varphi_{j(m_1...m_N)}\cdot v_{m_1...m_N}(x_1,...,x_N),j=1,2,...,n.$$

Литература

1. *Касимов Ш.Г., Атаев Ш.К., Мадрахимов У.С.* О разрешимости смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с операторами Штурма-Лиувилля с нелокальными краевыми условиями.// Узб.мат.журнал. 2016, N2,С.158-169.

РАЗЛОЖЕНИЙ ФУНКЦИИ В РЯД ФУРЬЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Кучкоров Э.И.
Национальный университет Узбекистана им.М.Улугбека, Узбекистан, Ташкент,
e-mail: e_kuchkorov@mail.ru

Рассмотрим в пространстве $L_2(\Omega)$ оператор Шредингера

$$L(x,D)=-\Delta+q(x) \tag{1}$$

с областью определения $D(L)=C_0^{\infty}(\Omega)$, где $\Omega,\ \Omega\subset R^2$- произвольная область с спрямляемой границей $\Gamma=\partial\Omega$, потенциалом $q(x)\geq 0$ и $q(x)\in L_2(\Omega)$.

Обозначим через A- произвольное самосопряженное расширение оператора L с дискретным спектром, а через $\{u_n(x)\}$- собственные функции, и через $\{\lambda_n\}$ - соответствующие собственные числа.

Известно, что семейство собственных функций $\{u_n(x)\}$, образует ортонормированные системы в пространстве $L_2(\Omega)$. Для каждой функции $f(x)\in L_2(\Omega)$ обозначим через $\sigma_\lambda(x,f)$ частичные суммы ряда Фурье т.е

$$\sigma_\lambda(x,f)=\sum_{\lambda_n<\lambda}f_nu_n(x),$$

где $f_n=(f,u_n)$ коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Настоящая работа посвящена изучению вопроса о равномерной сходимости разложения произвольной ограниченной функции $f(x)$, принадлежащей классу Никольского H_p^{α} и не удовлетворяющей, вообще говоря, никаким граничным условиям. Напомним [1], что $f(x)$ принадлежит классу $H_p^{\alpha}(G)$ при $p\geq 1$и $0<\alpha<1$, если конечна норма

$$||f||_{H_p^{\alpha}(\Omega)}=||f||_{L_p(\Omega)}+\sup_u|u|^{-\alpha}\left(\int_{\Omega_{|u|}}|f(x+u)-f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

где для любого $h>0$ через Ω_h обозначено множество точек $x\in\Omega$, отстоящих от границы Γ дальше чем на h.

ТЕОРЕМА. *Пусть Ω- произвольная двумерная область, ограниченная спрямляемой кривой Γ, и пусть D-произвольная подобласть области Ω.*

Предположим, что $f(x)$- произвольная ограниченная функция из класса $H_2^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, при некотором $p>4$ принадлежащая классу $H_p^{\frac{1}{2}}(D)$.

Тогда ряд $f(x)$ по системе $\{u_n(x)\}$ сходится к равномерно в произвольной внутренней под области D' области D.

Доказательства теоремы проводится методом разработанным Ильином В.А и Алимовым Ш.А (см [2,3,4]) на основе формулы среднего значения для собственных функций. Отметим, что результаты теоремы и другие результаты были получены в случае оператора Лапласа в работе Алимова Ш.А [2], в случае, когда оператор является произвольным эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка с гладкими коэффициентами в работе [3,4]. В работе [5] получены результаты равномерной сходимости спектральных разложений и суммируемости средних Рисса, произвольной функции из класса Никольского в случае, когда оператор является произвольным эллиптическим оператором с гладкими коэффициентами.

Литература

1. Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М.,1969.
2. Алимов Ш. А., О разложимости по собственным функциям оператора Лапласа в двумерной области , Математические заметки , Т.9, №6 (1971), С. 609 - 616.
3. Ильин В.А., Алимов Ш.А.,Условия равномерной риссовской суммируемости рядов Фурье по произвольной ФСФ оператора Лапласа, окончательные в классах Соболева, Никольского, Бесова, Лииувилля и Зигмунда-Гельдера, Докл. АН СССР, 193, №2 (1970), 267-269.
4. Ильин В.А. Спектральная теория дифференциальных операторов. Самосопряженные дифференциальные операторы. - М.: Наука, 1991.-368 С.
5. Алимов Ш.А., О спектральных разложениях функций из класса H_p^α, Математический сборник, Т.101 (143), №1 (1976), С.3-20.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Махмудов О.И.[1], **Тогаев И.**[2],

[1,2] СамДУ, Узбекистан,Самарканд

[1]makhmudovo@rambler.ru

Рассматривается задача аналитического продолжения решения системы уравнений моментной теории упругости в пространственной неограниченной области по ее значениям и значениям ее напряжений на части границы этой области, т.е. задача Коши.

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ точки трехмерного вещественного евклидово пространство E^3, $D-$ неограниченная односвязная область в E^3, с кусочно-гладкой границей ∂D, состоящей из гладкой поверхности S, лежащей в полупространстве $y_3 > 0$ и плоскости $\partial D \backslash S: \ y_3 = 0$.

Пусть шести компонентный вектор-функция

$$U(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), w_1(x), w_2(x), w_3(x)) = (u(x), w(x))$$

удовлетворяет в области D системы уравнений моментной теории упругости [1]:

$$\begin{cases} (\mu+\alpha)\Delta u + (\lambda+\mu-\alpha) graddivu + 2\alpha rotw + \rho\theta^2 u = 0, \\ (\nu+\beta)\Delta w + (\varepsilon+\nu-\beta) graddivw + 2\alpha rotu - 4\alpha w + j\theta^2 w = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где коэффициенты λ, μ, ν, β, ε, α характеризующие среды, удовлетворяют условиям $\mu > 0$, $3\lambda + 2\mu > 0$, $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, $3\varepsilon + 2\nu > 0$, $\beta > 0$, $j > 0$, $\rho > 0$, $\theta \in R^1$.

Для краткости изложения в дальнейшем систему (1) удобно записать в матричной форме

$$M(\partial_x)U(x) = 0 \tag{2}$$

Решение U системы(1) в области D назовем регулярным если $U \in C^1(\overline{D}) \bigcap C^2(D)$.

Постановка задачи. Требуется определить регулярное решение U системы (1) в области D исходя из ее данных Коши, заданных на поверхности S:

$$U(y) = f(y), \qquad T(\partial_y, n(y))U(y) = g(y), \quad y \in S, \tag{3}$$

где $T(\partial_y, n(y))$ оператор напряжения, $n(y) = (n_1(y), n_2(y), n_3(y))-$ внешный единичный вектор нормали к поверхности ∂D в точке y, $f = (f_1, \dots, f_6)$, $g = (g_1, \dots, g_6)$ заданные непрерывные вектор функции на S.

Из определение матрицы Карлемана [2] вытекет, что всякое регулярное решение $U(x)$ системы (1) в ограниченной области D определяется формулой

$$U(x) = \int\limits_{\partial D} (\Pi(y, x, \sigma)\{T(\partial_y, n)U(y)\} - \{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \sigma)\}^* U(y)) ds_y, \;\; x \in D, \tag{4}$$

где $\Pi(y, x, \sigma)-$ матрица Карлемана.

В данной работе для неограниченных областях специального вида строится матрица Карлемана и на ее основе доказывается справедливость формулы (4) для данной неограниченной области и строится регуляризованное решение задачи (1), (3).

Пусть область $D \in R^3$ лежит внутри полосы $0 < y_3 < h, \;\; h = \frac{\pi}{\rho}, \;\; \rho > 0$, граница которой состоит из гиперплоскости $y_3 = 0$ и некоторой гладкой поверхности S, заданной уравнением $y_3 = f(y'), \;\; y' \in R^2$, причем $0 < f(y') \le h$ и $|grad \;\; f(y')| \le c < \infty$.

Введем обозначение

$$U_\sigma(x) = \int\limits_S [\Pi(y, x, \sigma)\{T(\partial_y, n)U(y)\} - U(y)\{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \sigma)\}^*] ds_y, \;\; x \in D.$$

Теорема. *Пусть $U(x)$ регулярное решение (1) и удовлетворяет граничному условию*

$$|U(y)| + |T(\partial y, n)U(y)| \le M, \;\; y \in \partial D.$$

Тогда

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \le MC(\rho, x)\sigma^2 \exp(-\sigma x_3), x \in D,$$

где

$$C(\rho, x) = C(\rho) \int\limits_{y_3=0} \frac{ds_y}{r^4}.$$

Литература

1. *Купрадзе В.Д., Бурчуладзе Т.В. и др.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Классическая и микрополярная теория. Статика, гармонические колебания, динамика. Основы и методы решения// М.: Наука, 1976.С. 678.

2. *Ишанкулов Т.И., Махмудов О.И.* Задача Коши для системы уравнений моментной теории упругости в пространстве // Узбекский матем.журнал. 1996. №1. С. 22-29.

3. *Махмудов О.И., Ниёзов И.Э.* Об одной задаче Коши для системы уравнений теории упругости // Дифференц. уравнения .2000. Т. 36. N5. С. 674-678.

4. *Махмудов О.И., Ниёзов И.Э.*Регуляризация решения задачи Коши для системы теории упругости // Матем. заметки. 2000. Т. 68. N4. С. 548-553.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛАМЕ

Ниёзов И.Э.[1], Каршибоев О.Ш.[2],

[1,2] СамДУ, Узбекистан,Самарканд

[1] `iqboln@mail.ru`

В работе рассматривается задача продолжения решения системы Ламе в ограниченной области по её значениям и значениям её напряжений на части границы, т.е. задача Коши для системы Ламе.

Пусть R^2, $2-$ мерное вещественное евклидово пространство, D- область в R^2 с кусочно-гладкой границей ∂D и S -гладкий часть ∂D лежащий в $y_2 > 0$, а $\partial D \backslash S : y_2 = 0$.

Пусть $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ -точки из R^2 и $U(x)$ удовлетворяет в области D однородной системе уравнений Ламе :

$$LU(x) = 0, \tag{1}$$

где $L = \mu\Delta + (\lambda + \mu)\ grad\ div$, $\Delta-$ оператор Лапласа, $\lambda, \mu-$ постоянные Ламе, такие что, $\mu \neq 0$, $\lambda \neq -2\mu$. Положим

$$\begin{cases} U(y) = f(y), \\ T(\partial_y, n)U(y) = g(y), \ \ y \in S \end{cases} \tag{2}$$

где $f(y) = (f_1(y), f_2(y))$ и $g(y) = (g_1(y), g_2(y))-$ заданные непрерывные вектор-функции на S, $T(\partial_y, n)-$ дифференциальный оператор, с компонентами

$$T(\partial_y, n) = \mu\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial n} + \lambda n_j(y)\frac{\partial}{\partial y_j} + \mu n_j(y)\frac{\partial}{\partial y_i}, \ \ i, j = 1, 2,$$

где $\delta_{ij}-$ символ Кронекера.

Требуется продолжить $U(y)$ в D , исходя из заданных f и g.

В настоящей работе приводится метод решения, основанный на функцию Карлемана [1]. Исходя из функции Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа, построена матрица Карлемана задачи Коши (1),(2)для систем уравнений теории упругости в работах [2-4].

Функцию $U(x)$ называем регулярным в D, если $U \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$.

Верна теорема

Теорема 1. *Всякое регулярное решение $U(x)$ уравнения (1) в области D определяется формулой*

$$U(x) = \int\limits_{\partial D} (\Pi(y, x, \sigma)\{T(\partial_y, n)U(y)\} - U(y)\{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \sigma)\})ds_y, \ \ x \in D,$$

где $\Pi(y, x, \sigma)$ - матрица Карлемана.

Введем обозначение

$$U_\sigma(x) = \int\limits_S [\Pi(y, x, \sigma)\{T(\partial_y, n)U(y)\} - U(y)\{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \sigma)\}]ds_y, \ \ x \in D.$$

Теорема 2. *Пусть $U(x)$ регулярное решение уравнения (1) удовлетворяющее граничному условию*

$$|U(y)| + |T(\partial y, n)U(y)| \leq M, \ \ y \in \partial D \setminus S.$$

Тогда

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq MC(x)\sigma \exp(-\sigma x_2), x \in D,$$

где $C(x) = C\int\limits_a^b \frac{ds_y}{r}, r = |x - y|$.

Предположим, что вместо $U(y)$ и $T(\partial_y, n)U(y)$ на S заданы их непрерывные приближения $f_\sigma(y)$ и $g_\sigma(y)$ соответственно,

$$\max_S |U(y) - f_\delta(y)| + \max_S |T(\partial_y, n)U(y) - g_\delta(y)| < \delta, \ \ 0 < \delta < 1.$$

Положим

$$U_{\sigma\delta}(x) = \int\limits_S [\Pi(y, x, \sigma)g_\delta(y) - f_\delta(y)\{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \sigma)\}]\, ds_y, \ \ x \in D.$$

Теорема 3. *Пусть $U(x)$ удовлетворяет условии теоремы 2. Тогда*

$$|U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| \leq M^{1-\frac{x_2}{h}}C(x)\delta^{\frac{x_2}{h}}\, ln\left(\frac{M}{\delta}\right), \ \ x \in D,$$

где $\sigma = h^{-1}ln\frac{M}{\delta}$, $C(x) = \int\limits_{\partial D}\frac{ds_y}{r}, h = max\{x_2 : x \in D\}$.

Литература

1. *Ярмухамедов Ш.Я.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // ДАН СССР, 1977, т. 235, N2, С. 281-283.

2. *Махмудов О.И., Ниёзов И.Э.* Регуляризация решения задачи Коши для системы уравнений теории упругости в перемещениях // // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39. N2. С. 369-376.

3. *Махмудов О.И., Ниёзов И.Э.* Об одной задаче Коши для системы уравнений теории упругости // Дифференц. уравнения .2000. Т. 36. N5. С. 674-678.

4. *Махмудов О.И., Ниёзов И.Э.*Регуляризация решения задачи Коши для системы теории упругости // Матем. заметки. 2000. Т. 68. N4. С. 548-553.

Условия разложимости спектральных разложений распределений по собственным функциям полигармонического оператора

Ш.Т. Пирматов
Ташентский государственный технический университет имени Ислама Каримова
shamsh0d@rambler.ru

Пусть Ω произвольная ограниченная область в R^N с гладкой границей. Рассмотрим произвольное неотрицательное самосопряженные расширение A полигармонического оператора $(-\Delta)^m$ с областью определения $C_0^\infty(\Omega)$. Соответствующее оператору A разложений единицы E_λ, согласно теореме Л. Гординга [1], представимо в виде интегрального оператора

$$E_\lambda f(x) = \int_\Omega \theta(x, y, \lambda) f(y) dy \tag{1}$$

с ядром $\theta(x, y, \lambda)$, называемым спектральной функцией оператора A.

Пусть $u_k(x)$-полная ортонормированная система собственных функций полигармонического оператора, отвечающих собственным значениям λ_k:

$$(-\Delta)^m u_k(x) = \lambda_k u_k(x).$$

Каждая собственная функция принадлежит $C^\infty(\Omega)$, и поэтому для любого распределения $f \in E^{'}(\Omega)$ можно определить коэффициенты Фурье

$$f_k =< f, u_k > .$$

В области Ω разложим распределений $f \in E^{'}(\Omega)$ по системе собственных функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty f_k u_k(x).$$

Справедливо следующее обобщенное равенство Парсеваля.

Предложение 1. Для любого распределения $f \in E^{'}(\Omega)$ и любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется равенство

$$(f, \overline{\varphi}) = \sum_{k=1}^\infty f_k \varphi_k.$$

Из эллиптичности полигармонического оператора следуеть, что $E_\lambda \varphi \in C^\infty(\Omega)$ для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, что позволяет ввести следующим образом спектральное разложение произвольного распределения $f \in E^{'}(\Omega)$.

Определение. Спектральным разложением распределения $f \in E^{'}(\Omega)$ назовем распределение $E_\lambda f \in D^{'}(\Omega)$, действующее по правилу

$$< E_\lambda f, \varphi >=< f, E_\lambda \varphi > \tag{2}$$

для любой функции $\varphi \in D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$.

Коррекность данного определения следует из того, что для любого $\lambda > 0$ оператор E_λ непрерывен из $D(\Omega)$ в $E(\Omega)$. Более того, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2(см. [3]). Для любой функции $\varphi \in D(\Omega)$ в топологии $E(\Omega)$ выполняется равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty} E_\lambda \varphi = \varphi.$$

Отсюда следует, что для любого распределения $f \in E^{'}(\Omega)$ и любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty} < E_\lambda f, \varphi > = < f, \varphi > .$$

Иначе говоря, справедливо следующее утверждение.

Предложение 3 (см. [3]). Для каждого распределения $f \in E^{'}(\Omega)$ в топологии $D^{'}(\Omega)$ имеет место соотношение

$$E_\lambda f \to f.$$

Введем следующую функцию

$$g(x) = \begin{cases} (1 - \frac{|x-x_0|^2}{R^2})^{\alpha-1}, & \text{если } |x - x_0| \le R, \\ 0, & \text{если } |x - x_0| > R. \end{cases}$$

Определение. Среднем значением порядка α распределения $f \in E^{'}(\Omega)$ назовем распределение $S_R^\alpha f \in D^{'}(\Omega)$, действующее по правилу

$$< S_R^\alpha f, \varphi > = < f, S_R^\alpha \varphi > \tag{3}$$

для любой функции $\varphi \in D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$, где

$$S_R^\alpha \varphi = \frac{\Gamma(\alpha + N/2)}{\pi^{N/2}\Gamma(\alpha)R^N} \int\limits_{R^3} \varphi(x+y)g(y)dy.$$

Справедливо следующая.

Теорема 1. Предположим, что при некотором целом $s > (N-3)/2$ и в точке $x_0 \in \Omega$ спектральное разложение функции $f \in L_2(\Omega)$ сходится к S. Тогда для любого $\alpha > s-(N-3)/2$ справедливо следующее равенство

$$\lim_{R\to+0} S_R^\alpha f(x) = f(x).$$

Теорема 1 доказано в работе [4].

Теорема 2. Пусть $f \in E^{'}(\Omega)$. Предположим,что при некотором целом $s > \frac{N-3}{2}$ в топологии $D^{'}(\Omega)$ выполняется равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty} E_\lambda^s f = f.$$

Тогда, для любого $\alpha > s - \frac{N-3}{2}$ в топологии $D^{'}(\Omega)$ справедливо следующее утверждения

$$\lim_{R\to+0} S_R^\alpha f(x) = f(x).$$

Литература

1. Гординг Л. XII Congr.Math. Scand. Lund, 1953. P. 44-55. (Сб. пер. "Математика". 1957. Т. 1. No 3.С. 107-116).

2. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы.Ч.2. Спектральная теория. Москва.: Мир,1966г.

3. Алимов Ш.А.О спектральных разложениях распределений // Доклады Академии Наук. 1993г. Т.331, No 6. С. 661-662.

4. Пирматов Ш.Т. Об необходимых условиях разложимости по собственным функциям полигармонического оператора. // Вестник НУУз. 2009г. No 1. С. 60-63.

Задача на собственные значения оператора Лапласа для эллипсоидальной области

Рахимов Д. Г

"Ташкентский Университет информационных технологий им. Аль-Хоразми,

e-mail: davranaka@yandex.com.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases}\Delta u+\lambda u=0,\ u\in\Omega_\varepsilon\\ u=0,\ u\in\partial\Omega_\varepsilon\end{cases}, \tag{1}$$

где

$$\Omega_\varepsilon=\left\{(x,y)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$$

Линейное преобразование $\xi=\frac{b}{a}x,\eta=y,\chi=\frac{b}{c}z$ отображает область Ω_ε в шар $D=\left\{(\xi,\eta)|\frac{\xi^2}{b^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\chi^2}{b^2}\le 1\right\}$. Тогда уравнение (1) примет следующий вид

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}+\frac{b^2}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial\chi^2}+\lambda v=0,\ v|_{\partial D}=0. \tag{2}$$

Так как у эллипсоида два эксцентриситета $\varepsilon_1=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}},\varepsilon_2=\sqrt{1-\frac{b^2}{c^2}}$ рассмотрим частный случай когда $a=c\ne b$. Тогда $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$. Отсюда имеем $\frac{b^2}{a^2}=1-\varepsilon^2$. Подставляя ее в (2) получим задачу на возмущение собственного значения:

$$(A_0-\varepsilon^2B+\lambda)v\equiv\Delta v-\varepsilon^2(\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial\chi^2})+\lambda v=0,\ v|_{\partial D}=0. \tag{3}$$

Переходим в уравнении (3) к сферическим координатам $\xi=\rho cos\theta\cdot sin\varphi,\eta=\rho sin\theta\cdot sin\varphi,\chi=\rho cos\theta$. Тогда задача (3) приобретает вид:

$$A(\rho,\theta,\varphi)w+\lambda v=\varepsilon^2B(\rho,\theta,\varphi)w,\ w(b,\theta,\varphi)=0, \tag{4}$$

где $B(\rho,\theta)w=(1-sin^2\varphi\cdot sin^2\theta)\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}+\frac{sin^2\varphi}{\rho^2 sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{(1-sin^2\varphi\cdot cos^2\theta)}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-\frac{sin2\varphi}{\rho}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\rho\partial\varphi}-\frac{sin2\theta sin^2\varphi}{\rho}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\rho\partial\theta}-ctg\theta\cdot\frac{sin2\varphi}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi\partial\theta}+\frac{(1+sin^2\varphi\cdot sin^2\theta)}{\rho}\cdot\frac{\partial w}{\partial\rho}+\frac{sin2\varphi}{\rho^2 sin^2\theta}\cdot\frac{\partial w}{\partial\varphi}+\frac{cos\theta sin^2\varphi(1-2sin^2\theta)}{\rho^2 sin\theta}\cdot\frac{\partial w}{\partial\theta}$,

$A(\rho,\theta,\varphi)w=\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2 sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot sin\theta\cdot\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{1}{\rho^2 sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}$.

Известно, что собственными значениями оператора $A(\rho,\theta,\varphi)$ для шара являются числа $\lambda_{nm}=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{b}\right)^2$ с соответствующими собственными функциями

$$v_{mnj}(\rho,\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{\pi b}{2\mu_m^{(n)}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{b}\rho\right)Y_n^{(j)}(\theta,\varphi),j=\overline{-n,n}$$

где $\mu_m^{(n)}$ - корни уравнения $J_{n+1/2}(\mu)=0,Y_n^{(0)}(\theta,\varphi)=P_n^{(0)}(cos\theta),\ Y_n^{(-j)}(\theta,\varphi)=P_n^{(j)}(cos\theta)cosj\varphi$, $Y_n^{(j)}(\theta,\varphi)=P_n^{(j)}(cos\theta)sinj\varphi,j=\overline{1,n}.P_n^{(j)}(cos\theta)-$ присоединенные функции Лагранжа: $P_n^{(m)}(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{\partial^m P_n}{\partial x^m}$.

Задача (1) является самосопряженной, поэтому

$$v_{jmn}(\rho,\theta,\varphi)=\psi_{jmn}(\rho,\theta,\varphi)$$

$$z_{jmn}=\gamma_{jmn}=\sqrt{\frac{\pi b}{2\mu_m^{(n)}}}\cdot\frac{2n+1}{2\pi\varepsilon_j}\cdot\frac{(n-j)!}{(n+j)!}\cdot\frac{v_{jmn}(\rho,\theta,\varphi)}{||\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot J_{n+1/2}(\frac{\mu_m^{(n)}}{b}\rho)||^2},$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2,\ j = 0, \\ 1,\ j > 0. \end{cases}$$

Пусть $\lambda_{m_0 n_0} = \left(\frac{\mu_{m_0}^{(n_0)}}{b} \right)^2$ некоторое фиксированное собственное значение задачи (4). Производим регуляризацию:

$$\overline{A}_i(\rho,\theta,\varphi) = A(\rho,\theta,\varphi) + \sum_{s \neq i} \langle \cdot, \gamma_{sm_0n_0} \rangle z_{sm_0n_0},$$

тогда $\overline{A}_i(\rho,\theta,\varphi) v_{m_0n_0i} + \lambda_{m_0n_0i} v_{m_0n_0i} = 0,\ i = \overline{1, 2n_0+1}$.

Применяя далее метод Ляпунова-Шмидта строим уравнение разветвления для собственного значения, из которого находим что:

$$\mu_i(\varepsilon) = L_{i02}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), i = \overline{1, 2n_0+1},$$

т.е. собственные значения задачи (4) имеют вид $\lambda_{mni} = \lambda_{m_0n_0} + L_{i02}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), i = \overline{1, 2n_0+1}$.

ПРОДОЛЖЕНИИ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА

Сатторов Э.Н.[1], Эрмаматова Ф.Э.[2],

[1] Самаркандский государственный университет, Узбекистан, Самарканд)
[2] Самаркандский государственный университет, Узбекистан, Самарканд
[1]Sattorov-e@rambler.ru, [2]Ermamatova@mail.ru

Пусть R^3- вещественное трехмерное евклидово пространство, Ω_i односвязная область в R^3, ограниченная с кусочно-гладкой замкнутой поверхностью S, а Ω_e- внешняя неограниченная область, т.е. $\Omega_e = R^3 \setminus \Omega_i$.

Рассмотрим систему

$$divF + (H \cdot F) = 0,\ \ rotF + [F \times H] = 0, \tag{1}$$

где $H = (a, b, c)-$ заданный постоянный вектор.

Трехкомпонентный вектор $F = (F_1, F_2, F_3)$ называется обобщенным потенциальным вектором в Ω, если он является решением эллиптической системы (1).

Постановка задачи. Известны данные Коши решения системы (1) на поверхности S:

$$F(y)|_S = f(y),\ \ y \in S \tag{2}$$

$f = (f_1, f_2, f_3)-$ заданная непрерывная вектор-функция.

Эта задача является некорректной. Она разрешима не для любых граничных данных. Нас интересует условия разрешимости задачи (1),(2). Вопрос существования решения задачи Дирихле тесно связан с условием обращения интеграла типа Коши в интеграл Коши.

Рассмотрим матрицу

$$M_0(r; H) = \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 & -\alpha u_2 + \beta u_1 & \alpha u_3 + \gamma u_1 \\ \alpha v_1 + \beta v_2 & -\alpha v_2 + \beta v_1 + \gamma v_4 & -\beta v_4 + \gamma v_1 \\ \alpha w_1 + \gamma w_3 & \beta w_1 + \gamma w_4 & -\alpha w_3 - \beta w_4 + \gamma w_1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где

$$u_1 = \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + a \right) \Phi_0, \quad v_1 = \left(\frac{\partial}{\partial y_2} + b \right) \Phi_0, \quad w_1 = \left(\frac{\partial}{\partial y_3} + c \right) \Phi_0,$$

$$u_2 = \left(\frac{\partial}{\partial y_2} - b \right) \Phi_0, \quad v_2 = \left(-\frac{\partial}{\partial y_1} + a \right) \Phi_0, \quad w_2 = 0,$$

$$u_3 = \left(\frac{\partial}{\partial y_3} - c \right) \Phi_0, \quad v_3 = 0, \quad w_3 = \left(-\frac{\partial}{\partial y_1} + a \right) \Phi_0,$$

$$u_4 = 0, \quad v_4 = \left(\frac{\partial}{\partial y_3} - c \right) \Phi_0, \quad w_4 = \left(-\frac{\partial}{\partial y_2} + b \right) \Phi_0,$$

причем $\Phi_0(r;k) = \frac{1}{4\pi r}e^{-kr}$, $k^2 = |H|^2$, $n(\alpha,\beta,\gamma)-$ внешняя нормаль поверхности $\partial\Omega$ в точке y, $r = |y-x|$.

Когда $f(y) = (f_1(y), f_2(y), f_3(y))-$ заданная на S непрерывная вектор-функция, выражение

$$F(x) = \int\limits_{\partial D} M_0(r;H)f(y)dS_y \tag{4}$$

называется интегралом типа Коши для системы (1).

Теорема. *Пусть $S-$ гомеоморфная сфере замкнутая поверхность Ляпунова, разделящая R^3 на две области Ω_i и Ω_e; $f(y)-$ заданная на S вектор-функция удовлетворяющая условию Гельдера. Для того, чтобы интеграла типа Коши (4) обращался в интеграл Коши, необходимо и достаточно чтобы $F^i(x) \equiv 0$ в области Ω_e.*

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Турсунов Ф.Р.

Самаркандский государственной университет, Узбекистан, Самарканд
e-mail:farhod.tursunov.76@mail.ru

В работе предлагается задача Коши для некоторых систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в ограниченной области. Строится матрица Карлемана на основе которых строится регуляризованное решение данной задачи, а также доказывается существование решения задачи Коши.

Пусть, $x = (x_1, x_2, \dots x_m)$ и $y = (y_1, y_2, \dots y_m)$ точки m мерной Евклидового пространства R^m, $m \geq 3$ и $x^T = (x_1, x_2, \dots x_m)^T$ транспонированный вектор x.

Введем следующее обозначения:

$$y' = (y_1, y_2, \dots, y_{m-1}),\ x' = (x_1, x_2, \dots x_{m-1}), \quad r = |y-x|, \alpha = |y'-x'|, \alpha^2 = s,$$

$$w = i\sqrt{u^2+\alpha^2} + y_m, u \geq 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T$$

$$u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots u_n(x))^T,\ u^0 = (1, 1, \dots, 1) \in R^n$$

$E(x)$ - диагональная матрица, ω_m площадь поверхности единичной сферы R^m.

Через $A_{l\times n}(x)$ обозначим класс матриц $D(x^T)$, элементами состоящими из линейный формы с постоянными коэффициентами из C который удовлетворяет условию:

$$D^*(x^T)D(x^T) = E(|x|^2 u^0)$$

где $D^*(x^T)$- сопряженная эрмитова матрица $D(x^T)$.

Пусть, G ограниченная область в R^m граница которой, состоит из части плоскости $y_m = 0$ и некоторой гладкой поверхности S, лежащей в полупространстве $y_m > 0$.

В области G рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида:

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0, \tag{1}$$

где $D(x^T) \in A_{l\times n}(x)$.

Если $u(x) \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$ и является решением системы (1), тогда верно следующие интегральное представление:

$$u(x) = \int\limits_{\partial G} M(y,x)u(y)dS_y,$$

где

$$M(y,x) = \left(E\left(\frac{\bar{C_m}}{r^{m-2}}u^0\right)D^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)D(t)^T,\ \ \bar{C_m} = \frac{1}{(m-2)\omega_m};$$

$t = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$ - единичная внешняя нормаль, проведенная в точке y на поверхности ∂G.

Постановка задача: Пусть $u(x) \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$ удовлетворяет системе (1) в G и

$$u|_S = f(x).$$

Требуется восстановить вектор функцию в области G, используя данные Коши.

Теорема 1. *Пусть вектор-функция $u(x) \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$ является решением системы (1) и удовлетворяет условию $|u(y)| \leq 1$, на $y \in T = \partial G/S$, если*

$$u_\sigma(x) = \int\limits_S N_\sigma(y,x)u(y)dS_y,\ x \in G,$$

то верна следующая оценка:

$$|u(x) - u_\sigma(x)| \leq C(x)\bar{C}(\sigma)exp(-\sigma x_m),$$

где $C(x)$- некоторая функция от x,

$$C(x) = C_\rho \int\limits_{y_m=0} \frac{ds}{r^{m-1}};$$

$$C(\sigma) = \begin{cases} \sigma^m,\ m = 2k-1,\ k \geq 1, \\ \sigma^{m-1},\ m = 2k, k \geq 2. \end{cases}$$

Литература

1. *Н.Н. Тарханов.* Об интегральном представленном решений систем линейных дифференциальной уравнений первого порядка в частных производных и некоторые приложениях // Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. Красноярск -1980, стр. 147- 160.

2. *М.М. Лаврентьев.* О некоторых некорректных задачах математического физики // Изд. СО АН СССР Новосибирск, 1962 г.

3. *Ш.Ярмухамедов.* Интегральных представления гармонических функций многих переменных // ДАН СССР, Т.204, є 4, 1972, 799-802 стр.

4. *Ш.Ярмухамедов, А. Абдукаримов, З. Маликов.* О задачи Коши для системы эллиптического типа первого порядка // Докл. Росс. Акад. Наук. Том 323 (1992) є1.

Интегрирование нагруженного уравнения КдФ с самосогласованным источником простого типа.

Уразбоев Г.У., Балтаева И.И., Ваисова Н.З.

e-mail: gayrat71@mail.ru, iroda-b@mail.ru, nafosat_vaisova@mail.ru

В последнее время в связи с различными физическими приложениями, большой интерес вызывают нелинейные эволюционные уравнения с самосогласованными источниками.

В данной работе рассматривается нагруженное уравнение КдФ с самосогласованным источником простого типа

$$\begin{cases} u_t - 6uu_x + u_{xxx} = -\gamma(t)u(0,t)u_x + 4\sum\limits_{m=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x}|\varphi_m|^2, \\ (1) - \varphi_m'' + u\varphi_m = \lambda_m\varphi_m, \quad m = 1, 2, ..., N. \end{cases}$$

где $\gamma(t$-произвольная, непрерывная функция.

В рассматриваемой задаче $\varphi_m(x,t)$-собственная функция оператора $L(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t)$, соответствующая собственному значению $\lambda_m(t) = -\chi_m^2(t)$ и нормированная условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_m(x,t)|^2 dx = A_m(t), \quad m = 1, 2, ..., N, \quad (2)$$

где $A_m(t)$-заданные, положительные, непрерывные функции. Задача (1)-(2) рассматривается при начальном условии

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad (3)$$

где начальная функция $u_0(x)$ обладает следующими свойствами:

1. $\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)|u_0(x)|dx < \infty$,

2. Уравнение $-y'' + u_0(x)y = \lambda y, \quad x \in R^1$ имеет ровно N отрицательных собственных значений $\lambda_1(0), \lambda_2(0), ..., \lambda_N(0)$.

Задача (1)-(3) рассматривается относительно неизвестных функций $u(x,t), \varphi_m(x,t), \lambda_m(t), m = 1, 2, ..., N$. Предполагается, что функция $u(x,t)$ обладает требуемой гладкостью, достаточно быстро стремится к нулю при $x \to \pm\infty$ и удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}[(1+|x|)|u(x,t)| + \sum_{j=1}^{3}|\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j}|]dx < \infty, \qquad (4)$$

при $t \geq 0$.

Данной работе указывается путь построения решения $u(x,t)$ нагруженного уравнения КдФ с самосогласованным источником (1) - (2) в классе функций (4) с начальным условием (3) с помощью методом обратной задачи рассеяния.

Литература

[1] C.S.Gardner, I.M. Green, M.D. Kruskal Method for solving the Korteweg-de Vries equations.J.Phys.Rev.Lett.-USA,1967.-V.19.P.p.1095-1097.

[2] Melnikov V.K. Integration of the Korteweg-de Vries equation with source// Inverse problems.-UK, 1990.-Vol.6 - pp.233-246.

[3] A.B. Yakhshimuratov, M.M. Matyokubov Integration of loaded Korteweg-de Vries equation in a class of periodic functions Proceedings of Higher Education, Mathematics. - Russia -2016, V.2,pp.8792.

Об интегрировании одного уравнения типа синус-Гордон в классе периодических функций

Хасанов М.М.

Ургенчский государственный университет, hmuzaffar@mail.ru

В этой работе изучается следующее уравнение

$$q_t = ch\left\{2\int_0^x q(s,t)ds\right\}, t > 0\ ,\ \ x \in R. \qquad (1)$$

Требуется найти решение $q(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), q(x+\pi,t) = q(x,t) \in C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0), \qquad (2)$$

$$\int_0^{\pi} q(x,t)dx = 0, \qquad (3)$$

где $q_0(x) \in C(R)$ заданная действительная функция. Наиболее полное описание решений уравнения синус-Гордон дано в работах [1], [2].

При изучении задачи (1)-(3) используется следующий оператор Дирака

$$L(t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x,t)y = \lambda y, x \in R, \qquad (4)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \ \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x,t) \\ q(x,t) & 0 \end{pmatrix},\ \ y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Через $s(x,\lambda,t) = (s_1(x,\lambda,t),\ \ s_2(x,\lambda,t))^T$ обозначено решение уравнения (4), удовлетворяющая начальным условиям $s(0,\lambda,t) = (0,\ 1)^T$.

Спектр оператора (4) состоит из следующего множества $E = \bigcup\limits_{n\in Z}[\lambda_{2n}, \lambda_{2n+1}]$. Собственные значения $\xi_n(t),\ n \in Z$ задачи Дирихле $y_1(0) = 0,\ y_1(\pi) = 0$ для системы (4) вместе со знаками $\sigma_n(t) = sign\{s_2(\pi, \xi_n(t), t) - 1/s_2(\pi, \xi_n(t), t)\}$, $n \in Z$ называются спектральными параметрами задачи (4).

Теорема. Пусть $q(x,t)$ является решением задачи (1)-(3). Тогда спектр оператора Дирака с коэффициентом $q(x+\tau, t)$ не зависит от τ и t, а спектральные параметры $\xi_n = \xi_n(\tau, t)$,$n \in Z$ удовлетворяют системе Дубровина

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = \frac{1}{\xi_n}(-1)^n \sigma_n(\tau, t)\sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)}\times$$

$$\times\sqrt{\prod_{k\neq n}(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)(\xi_k - \xi_n)^{-2}}, n \in Z. \tag{5}$$

Знак $\sigma_n(\tau, t) \equiv \pm 1$ меняется при каждом столкновении $\xi_n(\tau, t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), n \in Z, \tag{6}$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$ $n \in Z$ - спектральные параметры оператора Дирака соответствующие коэффициенту $q_0(x+\tau)$.

Следствие 1. Эта теорема вместе с формулами следов дает метод решения задачи (1)-(3).

Следствие 2. Из результатов работы [3] следует, что если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической функцией, то и решение $q(x,t)$ является действительной аналитической функцией по x.

Следствие 3. Используя результаты работы [4], выводим, что если $\pi/2$ является периодом начальной функции $q_0(x)$, то и решение $q(x,t)$ является $\pi/2$-периодическим по x.

Литература

[1]. Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H. Method for solving the sin-Gordon equation //Phys. Rev. Lett., 1973. v.30. pp. 1262-1264.

[2]. Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Полное описание решений sin-Gordon уравнения //ДАН СССР, 1974. Т . 219. N6. С. 1334-1337.

[3]. Хасанов А.Б., Ибрагимов А.М. Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом // УзМЖ. 2001. N 3-4. С. 48-55.

[4]. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Аналог обратной теоремы Г.Борга для оператора Дирака // УзМЖ. 2000. N 3. С. 40-46.

О ПРИЛОЖЕНИЯХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА

Юлдашев Т.К.

Сибирский государственный университет науки и технологий, Россия, Красноярск

tursun.k.yuldashev@gmail.com

Интегро-дифференциальные уравнения являются математическими моделями протекания многих физических процессов и работы технических систем (см., напр. [1, 2]). Изучение спектральных свойств и построение решений для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений со спектральными параметрами представляют большой теоретический и практический интерес (см. $[3-5]$). В данном докладе рассказывается о некоторых приложениях обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма в теории автоматического регулирования. Здесь следует отметить, что интегро-дифференциальные уравнения с вырожденным ядром при разных постановках задач рассматривались в работах $[6-11]$.

Пример 1. В качестве первого примера рассмотрим систему регулирования, где динамика объекта описывается дифференциальным уравнением первого порядка [12]. Регулируемым объектом является генератор постоянного тока. Регулируемая величина - напряжение на клеммах генератора, от которых питается сеть с различными нагрузками. Автоматический регулятор должен поддерживать постоянное напряжение при различных нагрузках и скоростях привода. Уравнение динамики генератора как объекта регулирования описывается уравнением

$$T_0\, u'(t) + u(t) + k_0\, \vartheta(t) = 0, \tag{1}$$

где T_0 – постоянная времени, k_0 – коэффициент усиления объекта, $u(t)$ – регулируемое напряжение, $\vartheta(t)$ – регулирующее воздействие, Уравнение усиленного регулятора с коррекцией на отрезке $[0;T]$ представляется в интегральной форме

$$\vartheta(t) = k_1 \int\limits_0^T K(s)\, u(s)\, ds, \tag{2}$$

где k_1 – коэффициент усиления генератора, $K(s)$ выражает разницу между двух величин, одна из которых вызывает отклонение напряжения, а другая ликвидирует это отклонение и восстанавливает требуемое значение напряжения. Ядро интеграла в (2) удобно записать в виде $K(s) = b_1(s){+}b_2(s)$. Тогда, подставляя (2) в уравнение (1), получим интегро-дифференциальное уравнение первого порядка

$$u'(t) + \nu\, u(t) + \mu \int\limits_0^T \Big(b_1(s) + b_2(s)\Big)\, u(s)\, ds = 0,$$

где $\nu = \frac{1}{T_0}$, $\mu = \frac{k_0\, k_1}{T_0}$. Здесь предполагается, что $b_i(t) \in C[0;T]$, $i = 1, 2$, $T > \frac{1}{\nu} = T_0$.

Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим систему регулирования второго порядка [12]. Динамика движения крена ракеты описывается уравнением

$$T_0\, x''(t) + x'(t) + k_0\, y(t) = 0,$$

где $x(t)$ – угол крена, $y(t)$ – стабилирующее воздействие, T_0 – постоянная времени объекта, равная моменту инерции ракеты, деленному на коэффициенты сопротивления воздуха вращению ракеты, k_0 – коэффициент усиления объекта, характеризующий эффективность рулей. Уравнение усиленного стабилизатора крена ракеты, как и в случае первого примера, на отрезке $[0;T]$ представимо в интегральной форме

$$y(t) = k_1 \int\limits_0^T \Big(b_1(s) + b_2(s)\Big)\, x(s)\, ds,$$

где k_1 – коэффициент усиления движения ракеты.

Тогда приходим к интегро-дифференциальному уравнению второго порядка

$$x''(t) + \nu\, x'(t) + \mu \int\limits_0^T \Big(b_1(s) + b_2(s)\Big)\, x(s)\, ds = 0,$$

где $\nu = \frac{1}{T_0}$, $\mu = \frac{k_0\, k_1}{T_0}$. Здесь предполагается, что $b_i(t) \in C[0;T]$, $i = 1, 2$.

Литература

1. *Ушаков Е.И.* Статическая устойчивость электрических цепей. Новосибирск: Наука, 1988. 273 с.
2. *Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Ferreira J.* Existence and uniform decay for a nonlinear viscoelastic equation with strong damping // Math. Methods in the Appl. Sciences. 2001. Vol. 24. P. 1043–1053.
3. *Власов В.В., Перез Ортиз Р.* Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости и теплофизике // Матем. заметки. 2015. Т. 98. №4. С. 630–634.
4. *Бойчук А.А., Бондар (Головацкая) И.А.* Краевые задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений // Нелинейные колебания. 2013. Т. 16. №4. С. 460–474.

5. *Смирнов Ю.Г.* Об эквивалентности электромагнитной задачи дифракции на неоднородном ограниченном диэлектрическом теле объемному сингулярному интегродифференциальному уравнению // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2016. Т. 56. №9. С. 1657–1666.

6. *Бойчук А.А., Страх А.П.* Нетеровы краевые задачи для систем линейных интегро-динамических уравнений с вырожденным ядром на временной шкале // Нелинейные колебания. 2014. Т. 17. №1. С. 32–38.

7. *Джумабаев Д. С., Бакирова Э.А.* Об однозначной разрешимости краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром // Нелинейные колебания. 2015. Т. 18. №4. С. 489–506.

8. *Юлдашев Т.К.* Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка // Изв. вузов. Математика. 2015. №9. С. 74–79.

9. *Юлдашев Т.К.* Нелокальная смешанная задача для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром // Укр. мат. журн. 2016. Т. 68. №8. С. 1115–1131.

10. *Юлдашев Т.К.* Смешанная задача для псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. №1. С. 101–110.

11. *Samoilenko A.M., Boichuk A.A., Krivosheya S.A.* Boundary-Value problems for systems of integro-differential equations with Degenerate Kernel // Ukr. Math. Journal. 1996. Vol. 48. №11. P. 1785–1789.

12. *Попов Е.П.* Автоматическое регулирование и управление. М. Наука, 1966. 388 с.

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ОДНОГО НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Яхшимуратов А.Б.[1], Матякубов М.М.[2], Хасанов Т.Г.[3],

Ургенчский государственный университет, Узбекистан, г.Ургенч
[1]albaron@mail.ru, [2]mmm2210410@mail.ru

В работе [1] исследовано уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ) с нагруженным членом в классе периодических функций.

В данной работе изучается следующее нагруженное уравнение

$$q_t = q|_{x=0} \cdot (q_{xxx} - 6qq_x), \quad x \in R, \quad t > 0 \tag{1}$$

с начальным условием

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \tag{2}$$

где $q_0(x) \in C^3(R)$ заданная действительная π-периодическая функция. Требуется найти действительную функцию $q(x,t)$, которая π-периодическая по переменной x:

$$q(x+\pi,t) \equiv q(x,t), \quad x \in R, \quad t > 0 \tag{3}$$

и удовлетворяет условиям гладкости:

$$q(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geqslant 0). \tag{4}$$

Теорема. *Пусть $q(x,t)$ решение задачи (1)-(4). Тогда границы спектра λ_n, $n \geqslant 0$, следующего оператора*

$$L(\tau,t)y \equiv -y'' + q(x+\tau,t)y = \lambda y, \quad x \in R$$

не зависят от параметров τ и t, а спектральные параметры $\xi_n(\tau,t)$, $n \geqslant 1$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) q(0,t)[2q(\tau,t) + 4\xi_n] h_n(\xi), \quad n \geqslant 1,$$

где знак $\sigma_n(\tau,t) \equiv \pm 1$ *меняется на противоположный при каждом столкновении точки* $\xi_n(\tau,t)$ *с границами своей лакуны* $[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$. *Кроме того, выполняются следующие начальные условия:*

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau,t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \geqslant 1,$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$ $n \geqslant 1$ - *спектральные параметры оператора Штурма-Лиувилля с коэффициентом* $q_0(x+\tau)$.

Следствие 1. Эта теорема вместе с формулой первого следа

$$q(\tau,t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau,t))$$

дает метод решения задачи (1)-(4).

Следствие 2. *Используя результаты работы [2] выводим, что если начальная функция* $q_0(x)$ *является действительной аналитической функцией, то решение* $q(x,t)$ *также является действительной аналитической функцией по* x.

Следствие 3. *В силу теоремы работы [3], если число* π/n *является периодом начальной функции* $q_0(x)$, *то это число* π/n *является периодом и для решения* $q(x,t)$ *по переменной* x. *Здесь* $n \geqslant 2$ *натуральное число.*

Литература

1. *Яхшимуратов А.Б., Матякубов М.М.* Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом в классе периодических функций// Известия вузов. Математика. 2016 г., N 2, с. 87-92.

2. *Trubowitz E.* The inverse problem for periodic potentials.// Comm. Pure. Appl. Math., 1977, v. 30, p. 321-337.

3. *Hochstadt H.* A Generalization of Borg's Inverse Theorem for Hill's Equations. // Journal of math. analysis and applications, 1984, 102, p. 599-605.

5. НЕКОРРЕКТНЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

NON-CORRECT AND INVERSE PROBLEMS

The intergial problem of geometry for family of parabolas on the plane

Begmatov A.H., Ismoilov A.S.
Samarkand State University

The integral geometry problems are an intensively developing direction of modern mathematics, which is one of the largest directions in the theory of ill-posed problems of mathematical physics and analysis. Its tasks are closely related to numerous applications - the tasks of interpreting data from geophysical studies, electrical reconnaissance, acoustics and computed tomography.

One of the central problems of integral geometry is the restore of a function if its integrals over given manifolds are known.

We give the definition of the problem of integral geometry [1]. Let $u(x)$ – be a sufficiently smooth function defined in n – dimensional space, $x = (x_1, ..., x_n)$ and $\{M(\xi)\}$ –let be a family of smooth manifolds in this space that depend on the parameter $\xi = (\xi_1, ..., \xi_k)$. Suppose, further, that the integrals of $u(x)$

$$\int_{M(\xi)} u(x)d\sigma = v(\xi), \tag{1}$$

where $d\sigma$ determines the element of the measure with respect to $M(\xi)$. It is required by function $v(\xi)$ to find a function $u(x)$.

The uniqueness of a wide class of problems of integral geometry in the strip was established by VG. Romanov [2]. Problems of a non-Volterra type were studied in the works of M. M. Lavrent'ev and A.L. Buchheim [3,4], RG Mukhometov [5].

Weakly ill-posed problems of integral geometry of Volterra type with weight functions having a singularity were investigated in [6, 7].

The uniqueness of theorems, stability estimates, and inversion formulas for weakly ill-posed problems of integral geometry with respect to special curves and surfaces with singularities are obtained in [8-10].

Problems of integral geometry on paraboloids with perturbations in a three-dimensional layer are considered in [11].

In this work we consider the problem of reconstructing a function from a family of parabolas in the upper half-plane with a weight function having a singularity.

Let a family of curves that smoothly fill $R_+^2 = \left\{(x_1, x_2) : x_1 \in R^1, x_2 \geq 0 \right\}$ and uniquely parameterize with the help of the coordinates of its vertices (x_1, x_2), $\Upsilon(x_1, x_2)$ an arbitrary curve of the family is defined by the relations:

$$\Upsilon(x_1,\ x_2) = \{(\xi_1, \xi_2) : \quad (x_2 - \xi_2) = (x_1 - \xi_1)^2,\ 0 \leq \xi_2 \leq x_2\}.$$

Formulation of the problem:

Determine the function $u(x_1, x_2)$, if for all $(x_1, x_2) \in R_+^2$ of the $\Omega = \left\{(x_1, x_2), x_1 \in R^1, x_2 \in (0, l), l < \infty \right\}$ band the integrals of the function $u(\cdot)$ by the curves $\Upsilon(x_1, x_2)$ are known

$$\int_{x_1-\sqrt{x_2}}^{x_1+\sqrt{x_2}} g(x_1, \xi_1)u(\xi_1, x_2 - (x_1 - \xi_1)^2)d\xi_1 = f(x_1, x_2), \tag{2}$$

where $g(\cdot) = |x_1 - \xi_1|$

The uniqueness of theorem for the solution of equation (2) is proved and the inversion formula is derived.

It is shown that the solution of the problem posed is weakly ill-posed, that is, stability estimates are obtained in spaces of finite smoothness.

References

1. V.G. Romanov. Some inverse problems for equations of hyperbolic type. Novosibirsk. Science. 1974.

2. M.M. Lavrentiev. Integral geometry and inverse problems// ill-posed problems of mathematical physics and analysis. Novosibirsk.: Science,1984, pp81-86.

3. M.M. Lavrentiev, A.L. Buxgeym. About a class of Integral geometry's problem// Rep. SASSSR. 1973. T.311, No 1.P.38-39.

4. M.M. Lavrentiev, A.L. Buxgeym. About a class of operator equations of the first order // Funktional Analiysis and its Applications. 1973. T.7.Vol.4.p.44-53.

5. P.G. Mukhometov. About problem of Integral geometry // Matematical problems of geophysics. Vol 6.2. Novosibirsk, 1975. P. 212-242.

6. Akram H. Begmatov. Two classes weakly ill-posed problems of integral geometry on a plane.// Sib.mat.journal.1995.T.36. .2.p.243-247.

7. Begmatov Akram H. On a class of weakly ill-posed Volterra-type of integral geometry in the three-dimensional space // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 1995. Vol. 3 . No 3. P. 231-235.

8. Akram H. Begmatov. Volter's problem of integral geometry in the plane for curves with singularities // Sib. mat. journal 1997.T.38. vol. 38. No. 4. P. 723-737.

9. Begmatov Akram H. The problems of integral geometry on special curves and surfaces with singularities at tha vertices // Rep. SASSSR. 1998. Vol. 358. No 2. P. 151-153.

10. Begmatov Akbar H. and Begmatov Akram H. Problems of integral geometry on curves and surfaces in Euclidean space // Ill-Pozed and Non-Classical Problems of Mathematical Physics and Analysis, M.M. Lavrent'ev et al., Eds., Proceedings of International Converence, VSP, Utrecht-Boston, 2003, 1-18.

11. Akbar H. Begmatov. The problems of integral geometry with indignation in three dimensional space//Sib.mat.journal 2000.T.41. Vol.1. P. 3-14.

INVERSE PROBLEMS FOR A CLASS OF FRACTIONAL ORDER DEGENERATE EVOLUTION EQUATIONS

Fedorov V.E.[1], Ivanova N.D.[2],

[1] Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)
[2] South Ural State University, Chelyabinsk, Russia
[1]kar@csu.ru, [2]natalia.d.ivanova@gmail.com

Let $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{U}$ are Banach spaces, $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$ (linear and continuous from $\mathfrak{X}$ into $\mathfrak{Y}$), $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$ (linear, closed and densely defined in $\mathfrak{X}$ with image in $\mathfrak{Y}$), D_M be a domain of the operator M, endowed by the graph norm $\|\cdot\|_{D_M} = \|\cdot\|_{\mathfrak{X}} + \|M\cdot\|_{\mathfrak{Y}}$. Define L-resolvent set $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})\}$ of an operator M, and introduce the denotations $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu = L(\mu L - M)^{-1}$.

The operator M is called (L,σ)-*bounded*, if $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ is a bounded set in $\mathbb{C}$. Let it belong to a disk $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq a\}$. Denote by γ the contour $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. It is known [1] that the operators $P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^L_\mu(M)\,d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L^L_\mu(M)\,d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y})$ are projections. Put $\mathfrak{X}^0 = \ker P$, $\mathfrak{X}^1 = \mathrm{im}P$, $\mathfrak{Y}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{Y}^1 = \mathrm{im}Q$, $P_0 = I - P$, $Q_0 = I - Q$. Denote by L_k (M_k) the restriction of the operator L (M) on $\mathfrak{X}^k$ $(D_{M_k} = D_M \cap \mathfrak{X}^k)$, $k = 0,1$. Then for (L,σ)-bounded operator M we have $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^1;\mathfrak{Y}^1)$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}^0;\mathfrak{Y}^0)$, $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^k;\mathfrak{Y}^k)$, $k = 0,1$, there exist operators $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^0;\mathfrak{X}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1;\mathfrak{X}^1)$ [1].

Denote $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $H = M_0^{-1}L_0$. For $p \in \mathbb{N}_0$ an operator M is called (L,p)-bounded, if it is (L,σ)-bounded, $H^p \neq 0$, $H^{p+1} = 0$.

Let $\Phi \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{U})$, mappings $B : [0,T] \to \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$, $y : [0,T] \to \mathfrak{Y}$, $\Psi : [0,T] \to \mathfrak{U}$ and $x_k \in \mathfrak{X}^1$, $k = 0,1,\dots,m-1$, are given, $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, D^α_t is the Caputo derivative of the order α. Consider the identification problem

$$D^\alpha_t Lx(t) = Mx(t) + B(t)u(t) + y(t), \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

$$(Px)^{(k)}(0) = x_k, \quad k = 0,1,\dots,m-1, \tag{2}$$

$\Phi x(t) = \Psi(t), \quad t \in [0,T].(3) Apairoffunctions$u$\in C([0,T];\mathfrak{U})$ and $x \in C([0,T];D_M)$ such that $Lx \in C^{m-1}([0,T];\mathfrak{X})$, $g_{m-\alpha} * Lx \in C^m([0,T];\mathfrak{X})$, is a solution of this problem if all equalities (1)–(3) hold.

We need to link the action of the operator Φ with the subspaces $\mathfrak{X}^k$, $k = 0,1$. Let at first $\mathfrak{X}^0 \subset \ker\Phi$.

Теорема. *Let* $\alpha \geq 1$, *M be an $(L,0)$-bounded operator,* $B \in C([0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y}))$, $y \in C([0,T];\mathfrak{Y})$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{X})$, $\mathfrak{X}^0 \subset \ker\Phi$, *for every* $t \in [0,T]$ $(\Phi L_1^{-1}QB(t))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, *and* $(\Phi L_1^{-1}QB(t))^{-1} \in C([0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $\Psi \in C^{m-1}([0,T];\mathfrak{U})$, $g_{m-\alpha} * \Psi \in C^m([0,T];\mathfrak{Z})$, $x_k \in \mathfrak{X}^1$, *and* $\Psi^{(k)}(0) = \Phi x_k$, $k = 0,1,\dots,m-1$. *Then there exists a unique solution x, u of problem (1)–(3), and*

$$\|x\|_{C([0,T];\mathfrak{X})} \leq c\left(\sum_{k=0}^{m-1}\|x_k\|_{\mathfrak{X}} + \|y\|_{C([0,T];\mathfrak{Y})} + \|D^\alpha_t\Psi\|_{C([0,T];\mathfrak{U})}\right),$$

$$\|u\|_{C([0,T];\mathfrak{U})} \leq c\left(\sum_{k=0}^{m-1}\|x_k\|_{\mathfrak{X}} + \|Qy\|_{C([0,T];\mathfrak{Y})} + \|D_t^\alpha \Psi\|_{C([0,T];\mathfrak{U})}\right),$$

where $c>0$ is independent of x_k, $k=0,1,\ldots,m-1$, y, Ψ.

Now consider the case of $\mathcal{X}^1 \subset \ker\Phi$.

Теорема. *Let M be an (L,p)-bounded operator, $x_k \in \mathfrak{X}$, $k=0,1,\ldots,m-1$, $QB \in C([0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y}))$, $Q_0B \in C^{mp}([0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y}))$, $Qy \in C([0,T];\mathfrak{Y})$, $Q_0y \in C^{2mp}([0,T];\mathfrak{Y})$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{U})$, $\mathfrak{X}^1 \subset \ker\Phi$, there exist inverse operators $(\Phi M_0^{-1}Q_0B(t))^{-1} \equiv \Lambda(t)$ for every $t\in[0,T]$, $\Lambda \in C^{mp}([0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $\Phi H^k M_0^{-1}Q_0B(t)=0$ for all $t\in[0,T]$, $k=1,2,\ldots,p$, $\Psi \in C^{mp}([0,T];\mathfrak{U})$. Then there exists a unique solution x, u of problem (1)–(3), besides,*

$$u(t) = -\Lambda(t)\Psi(t) - \Lambda(t)\Phi\sum_{k=0}^{p}(D_t^\alpha H)^k M_0^{-1}Q_0y(t),$$

$$\|u\|_{C([0,T];\mathfrak{U})} \leq c\left(\sum_{k=0}^{p}\|(D_t^\alpha H)^k M_0^{-1}Q_0y\|_{C([0,T];\mathcal{X})} + \|\Psi\|_{C([0,T];\mathfrak{U})}\right),$$

$$\|x\|_{C([0,T];\mathfrak{X})} \leq c\left(\sum_{n=0}^{m-1}\|x_n\|_{\mathcal{X}} + \|y\|_{C([0,T];\mathcal{Y})} + \|\Psi\|_{C([0,T];\mathfrak{U})} + \right.$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\|(D_t^\alpha H)^k M_0^{-1}Q_0B\Lambda\Psi\|_{C([0,T];\mathfrak{X})} + \sum_{k=1}^{p}\|(D_t^\alpha H)^k M_0^{-1}Q_0y\|_{C([0,T];\mathfrak{X})} +$$

$$\left. +\sum_{l=0}^{p}\sum_{k=0}^{p}\|(D_t^\alpha H)^l M_0^{-1}Q_0B\Lambda\Phi(D_t^\alpha H)^k M_0^{-1}Q_0y\|_{C([0,T];\mathfrak{X})}\right),$$

where $c>0$ is independent of x_k, $k=0,1,\ldots,m-1$, y, Ψ.

Литература

1. *Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.
2. *Fedorov V.E., Ivanova N.D.* Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2017. Vol. 20, no. 3. P. 706-721.

Об одной обратной задаче для уравнения смешанного типа дробного порядка

Абдуллаев О.Х.[1], Фохирова Т.[2]

[1,2]*Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека.*
[1]obidjon.mth@gmail.com., [2]foxirovatursunoy14@gmail.com

Постановка задачи.

Пусть $\Omega_k = \left\{(x,t);\ -1<(-1)^k x<0,\ \ 0<t<1\right\}$, $I=\{(x,t);\ x=0,\ \ 0<t<1\}$ тогда через Ω обозначим совокупность областей Ω_1, Ω_2 и интервал I, т.е. $\Omega = \Omega_1 \cap I \cap \Omega_2$.

В области Ω рассмотрим уравнение теплопроводности дробного порядка

$$ {}_C D_{0t}^{\alpha_k} u_k - u_{kxx} = f_k(x), \quad (x,t)\in\Omega_k, \quad (k=1,2) \tag{1}$$

где $0<\alpha_1<1$, $1<\alpha_2<2$, ${}_C D_{ax}^{\alpha}$-дифференциальный оператор дробного порядка в смысле Капуто [1]:

$$D_{ax}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{-\alpha+n-1} f^{(n)}(t)dt, \quad n=[\alpha]+1, \ \ x>a \tag{2}$$

Для уравнения (1) в области Ω исследуется следуюшая обратная

Задача. Требуется найти пару функций $(u_k(x,t), f_k(x))$ $(k=1,2)$, в области Ω для уравнения (1), если для функций $u_k(x,t)$ заданы слудующие условия:

$$u_1(0,t)=0, \quad u_2(-1,t)=0, \quad t\in[0,1] \tag{3}$$

$$u_1(0,t)=u_2(-0,t), \quad u_{1x}(0,t)+u_{2x}(-0,t)=0, \ \ t\in[0,1] \tag{4}$$

$$u_1(x,0)=\varphi_1(x), \quad u_1(x,1)=\psi_1(x), \ \ x\in[0,1] \tag{5}$$

$$u_2(x,0)=\varphi_2(x), \quad u_{2t}(x,0)=\varphi_3(x) \ \ u_2(x,1)=\psi_2(x), \quad x\in[-1,0] \tag{6}$$

где $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$- заданные функции, причем .

$$\varphi_1(0)=\varphi_2(0), \ \ \psi_1(0)=\psi_2(0), \ \ \varphi_{1x}(0)+\varphi_{2x}(0)=0, \ \ \psi_{1x}(0)+\psi_{2x}(0)=0 \tag{7}$$

$$\varphi_1(x),\psi_1(x)\in C^2[0,1], \ \ \varphi_2(x),\psi_2(x)\in C^2[-1,0], \ \ \varphi_3(x)\in C^2[-1,0] \ . \tag{8}$$

Следуеть отметит, что в данной постановке $f_k(x)$-неизвестная правая часть уравнения (1) а условия (4) является условием склеивания.

Метод исследования.

При исследования задачи, с целью получения однородного уравнения воспользуемся заменой

$$v_k(x,t)={}_C D_{0t}^{\alpha_k} u_k(x,t)\,. \tag{9}$$

Из уравнения (1) и в силу (3)-(6) относительно $v_k(x,t)$ получим следующую задачу (10)-(13):

$${}_C D_{0t}^{\alpha_k} v_k(x,t)-v_{kxx}(x,t)=0, \tag{10}$$

$$v_1(0,t)=0, \quad v_2(-1,t)=0, \tag{11}$$

$$v_1(0,t)=v_2(-0,t), \quad v_{1x}(0,t)+v_{2x}(-0,t)=0, \tag{12}$$

$$v_k(x,0)={\varphi_k}''(x)+f_k(x), \quad v_k(x,1)={\psi_k}''(x)+f_k(x), \quad v_{2t}(x,0)={\psi_3}''(x)\,. \tag{13}$$

Полученная задача решается методом Фурье, т.е. решение уравнения (10) ищем в виде

$$v_k(x,t)=T_k(t)\,X_k(x) \tag{14}$$

и относительно $X_k(x)$ и $T_k(t)$ получим

$${X_k}''(x)+\lambda_k^2 X_k(x)=0, \tag{15}$$

$${}_C D_{0t}^{\alpha_k} T_k(t)+\lambda_k^2 T_k(t)=0 \tag{16}$$

где $(\lambda_k=const\,, \qquad \lambda_k\in R)\,.$

Очевидно, что из условий (3) и (4) следует

$$X_1(1)=0, \quad X_2(-1)=0, \tag{17}$$

$$X_1(0)=X_2(0), \quad {X_1}'(0)+{X_2}'(0)=0. \tag{18}$$

Заметим, что решение уравнения (15) имеет вид:

$$X_1(x)=C_1^1\cos\lambda_1 x+C_1^2\sin\lambda_1 x \tag{19_1}$$

$$X_2(x)=C_2^1\cos\lambda_2 x+C_2^2\sin\lambda_2 x \tag{19_2}$$

Воспользуюсь условий (17), (18), из решений (19_1) и (19_2) относительно C_1^1, C_1^2, C_2^1, C_2^2 получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1^1\cos\lambda_1+C_1^2\sin\lambda_1=0\\ C_2^1\cos\lambda_2-C_2^2\sin\lambda_2=0\\ C_1^1=C_2^1\\ \lambda_1 C_1^2=\lambda_2 C_2^2 \end{cases}$$

Чтобы получить нетривиальное решение полученной системы, в силу теорему Крамера, относительно λ_k получим следующее уравнение:

$$\lambda_1 \sin \lambda_2 \cos \lambda_1 - \lambda_2 \sin \lambda_1 \cos \lambda_2 = 0. \qquad (20)$$

Можно проверить, что уравнение (20) имеет бесконечно много решений относительно λ_k, $(k = 1, 2)$ в том числе и $\lambda_k = 0$. Имеет место следующая

Теорема Если выполняются условия (7) и (8) то исследуемая задача однозначно разрешимо.

О корректности некоторых обратных задач для уравнения смешанного типа второго порядка.

Джамалов С.З.

Институт математики Академии наук Узбекистана
e-mail siroj63@mail.ru.,

В процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными условиями и обратными задачами. Обратными задачами в теории уравнений с частными производными принято называть такие задачи, в которых вместе с решением дифференциального уравнения требуется определить также тот или иной коэффициент(ы) самого уравнения, либо правую часть (внешнее воздействие), либо и коэффициент(ы), и правую часть. Отметим, что интерес к исследованию обратных задач для уравнения математической физики обусловлен важностью их приложений в различных разделах механики, сейсмологии, медицинской томографии и геофизики [1,3,4]. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для уравнений параболического, эллиптического и гиперболического типов. [1-4]. Значительно менее изученными являются обратные задачи для неклассических уравнений математической физики, в частности для уравнений смешанного типа как первого, так и второго рода. [5,6,7]. Частично восполнить последний пробел мы и попытаемся в рамках этой работы.

В данной работе при определенних условиях на коэффициенты и правую часть уравнения смешанного типа как первого и так второго рода второго порядка доказывается корректность решения некоторых обратных задач с нелокальными условиями в определенных пространствах.

Литература

1. *Аниканов Ю.Е.* Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений: Новосибирск. Наука, 1978. -120 с.
2. *Бубнов Б.А.* К вопросу о разрешимости многомерных обратных задач для параболических и гиперболических уравнений: Новосибирск. Препринты No- 713,714. ВЦ.СО АН СССР.-41с,-44с.
3. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи: Новосибирск. Наука, Сибирское научное издательство, 2009.-458с.
4. *Лаврентьев М.М, Романов В.Г, Васильев В.Г.* Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений: Новосибирск. Наука, 1969.-67с.
5. *Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В.* Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа: // Изв. вузов. Математик. 2011. No-2. С. 71-85.
6. *Джамалов С.З.* Об одной линейной обратной задаче для уравнения Трикоми в трехмерном пространстве: // Вестник КРАУНЦ. 2016.Т-13. No-2. С. 12-17.
7. *Джамалов С.З.* Линейная обратная задача для уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка с нелокальными граничными условиями в трехмерном пространстве: // Вестник КРАУНЦ. 2017.Т-13. No-1. С. 7-13.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ 3D ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ИНТЕГРО - ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Дурдиев Д.К.
Бухарский государственный университет, Узбекистан, Бухара
durdiev65@mail.ru

В обратных задачах имеются теоремы существования для достаточно малых областей определения неизвестных коэффициентов, т.е. для таких задач разрешимость носит локальный характер. Даже при гладких данных решение обратной задачи может не существовать на любом наперед заданном интервале. Связано это явление с нелинейностью задачи. Однако, в задачах определения ядра интегрального члена в гиперболических уравнениях второго порядка, где нелинейность носит сверточный характер, удается получить глобальные теоремы существования в пространстве функций конечной гладкостью с экспоненциальным весом. В данной работе получен один из таких результатов. Обобщая результаты статьи [1], здесь изучается обратная задача определения ядра, когда оно входит в интеграл типа свертки с решением прямой задачи в волновом уравнении с переменным коэффициентом.

Рассматривается гиперболическое интегро - дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{1}{a(x_3)}u_{tt} - \triangle u = \int_0^t k(\tau)u(x,t-\tau)\,d\tau + \delta(x,t) \tag{1}$$

при условии

$$u|_{t<0} = 0. \tag{2}$$

Здесь $t \in R^1$, $x \in R^3$, $\delta(x,t)$ - дельта функция Дирака, сосредоточенная в $x = 0$, $t = 0$, $\triangle$ - дифференциальный оператор Лапласа:

$$\triangle := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right); \tag{3}$$

$a(x_3)$ - заданная гладкая функция. Обратная задача заключается в следующем: определить функцию $k(t),\ t > 0$ по известному в точке $x = 0$ обобщенному решению задачи Коши (1), (2)

$$u(0,t) = f(t),\ t > 0. \tag{4}$$

В работе найдены те условия на заданные функции, при выполнении которых решение обратной задачи (1) - (4) существует для любого отрезка его задания.

Теорема. *Пусть T - произвольное фиксированное положительное число и*

$$a(x_3) \in C^2(0,T),\ f(t) \in C^1(0,T).$$

Тогда обратная задача (1) - (4) в классе функций $k(t) \in C(0,T)$ однозначно разрешима.

Литература

1. *Дурдиев Д. К.*К вопросу о корректности одной обратной задачи для гиперболического интегродифференциального уравнения // Сиб. матем. журн.—1992.—Т 33 (3)—С. 69–77.

УСЛОВНАЯ КОРРЕКТНОСТЬ ВНУТРЕННЕЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

Фаязов К.С.[1], Абдуллаева З.Ш.[2],

[1] Туринский политехнический университет в г. Ташкенте, Узбекистан
[2] Ташкентский университет информационных технологии, Узбекистан, Ташкент
[1]kudratillo52@mail.ru, [2]zamira_85.05@mail.ru

Пусть $u(x,t)$ определена в полу полосе $D = \{-\pi \leqslant x \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant t < \infty\}$ и является решением уравнения

$$sgnxu_t(x,t) = u_{xxt}(x,t) + u_{xx}(x,t), \tag{1}$$

в $D_1 = \{-\pi < x < \pi, \ x \neq 0, \quad 0 < t < \infty\}$ а также удовлетворяет следующим условиям

$$u(-\pi,t) = u(\pi,t) = 0, \ u(-0,t) = u(0,t), \ u_x(-0,t) = u_x(0,t), \tag{2}$$

$$u(x^*,t) = \varphi(t), \tag{3}$$

где x^*-заданное число промежутка $[-\pi,\pi]$; приччм $x^* \neq 0, \quad \varphi(t)$- заданная функция.

Задача заключается в восстановлении функции $u(x,t)$ на всей полу полосе D по данным (2),(3). Ряд теорем единственности и устойчивости для решения внутренних задач уравнений эллиптического типа получены в работах М.А. Лаврентьева и М.М.Лаврентьева [1], С.П. Шишатского [2,3], А.Абдукаримова [4]. Внутренние задачи для параболических уравнений рассмотрены в работах М.М.Лаврентьева, Б.К.Амонова [5,6], С.П. Шишатского и др. Задачи продолжения решения гиперболических уравнений исследованы в работе Б.И.Пташника [7], внутреннее задачи для псевдо-параболического уравнения рассматривались в работе [8].

Вопрос о единственности решение задачи (1)-(3) зависить от свойства числа x^*. В работе доказано при каких условиях на число x^* решение задачи единственно. Заметим, что решение данной задачи не является устойчивым относительно данных. Нами доказана условная устойчивость данной задачи на множестве корректности.

Определение 1. *Под решением задачи понимаем функцию имеющую непрерывные производные участвующие в уравнении (1) и удовлетворяющие в области D_1 уравнению и условиям (2)-(3).*

Определение 2. *Будем говорить, что функция $u(x,t)$ принадлежит классу $U(M)$, если u, u_γ непрерывны и в D_1 $|u|, \ |u_\gamma| \leqslant M$, где $\gamma = x, t, \ xx, \ xt, \ xxt, \ xxx$.*

Теорема 1. *Пусть $\mu_k(\pi - x^*)/\pi$ иррациональное для $\forall k$. Тогда решение задачи (1)-(3) единственно в классе $U(M)$.*

Теорема 2. *Пусть $u(x,t) \in U(M)$ и является решением задачи (1)-(3). Тогда если*

$$|\varphi(t)| \leqslant \varepsilon,$$

и x^*/π такое, что $\left|\frac{x^*}{\pi} - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{\lambda(x^*/\pi)}{q^m}$, где p, q- целые рациональные числа, m- натуральное число, то

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{N^m \varepsilon(1 + \pi e^{\mu_N x^*} C_2)}{2\pi\,\lambda(x^*/\pi)} + 4MN^{-2}.$$

где N- натуральное число, μ_N-собственные значения соответствующей спектральной задачи.

Литература

1. Lavrentiev M.A., Lavrentiev M.M. On some inequalitiens for spase harmonic functions. //Amer, Acad, Soient. Fenneix., ser. AI. Math., 1976, N2, P. 303-306.

2. Шишатский С.П. Об определении функции, гармонической в плоскости по ее значениям на трех параллельных отрезках //Вопросы корректности задач математической физики.-Новосибирск, 1977.-С.143-149.

3. Шишатский С.П. О нулях периодических гармонических функций// Условно-корректные математические задачи и проблемы геофизики.-Новосибирск, 1979.-С. 126-133.

4. Абдукаримов А. Единственность и устойчиаость задач о продолжении решений эллиптических и параболических уравнений с дискретных множеств: Дис.канд.физ.-мат.наук:01.01.02.-Новосибирск, 1983-93 с.

5. Лаврентьев М.М., Амонов Б.К. Определение решения уравнения диффузии по его значениям на дискретных множеств //ДАН СССР.-1976.-Т.226, №6. -С. 1284-1285.

6. Лаврентьев М.М., Амонов Б.К. Единственность и устойчивость одной внутренней задачи для уравнения теплопроводности // ДАН СССР.-1982.-Т.262.№3.-С.528-530.

7. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.-Киев:Наукова думка,1984.-264с.

8. Атаманов Э.Р., Мамаюсупов М.Ш. Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений. Издательство "Илим"1990.-100с.

НЕКОРРЕКТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

Фаязов К.С.[1], Хажиев И.О.[2],

[1] Туринский политехнический университет в г. Ташкенте, Узбекистан
[2] Национальный университет Узбекистана, Ташкент
[1]kudratillo52@mail.ru, [2]h.ikrom@mail.ru

Краевые задачи для неклассических уравнений в частных производных, коэффициенты которых в главной части меняют знак, возникают во многих прикладных задачах, в частности, в физике, при описании процессов рассеивания и переноса, в геометрии и популяционной генетике, гидродинамике, а также многих других областях. В настоящей работе рассматриваются краевая задача для неклассические уравнения третьего порядка с меняющимися направлениями времени.

Рассмотрим уравнение
$$\operatorname{sgn} x\, u_{ttt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \tag{1}$$
в области $\Omega = \{-1 < x < 1,\ x \neq 0,\ 0 < t < T\}$.

Задача. Требуется найти функцию $u(x,t)$ удовлетворяющую уравнение (1) и следующим условиям:

$$u(x,0) = \varphi_1(x),\ u_t(x,0) = \varphi_2(x),\ u_{tt}(x,0) = \varphi_3(x), \tag{2}$$

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0, \tag{3}$$

$$u(-0,t) = u(+0,t),\ u_x(-0,t) = u_x(+0,t). \tag{4}$$

Одним из первых работ, посвященных параболическим уравнениям с меняющимся направлением времени, были работы М. Жевре. Теория разрешимости краевых задач для подобных уравнений была рассмотрены в работах С.А.Терсенова, А.М.Нахушева, И.Е.Егорова, Н.В.Кислова, С.Г.Пяткова, С.В.Попова, В.И.Антипин [1] и многих других авторов.

Рассматриваемая задача (1)-(4) относиться к классу некорректно поставленных задач математической физики, а именно в данной задаче отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных. Некорректная задача для подобных уравнений были рассмотрены в работах [3], [4].

В данной работе используя метод спектральной разложений и логарифмической выпуклости исследуется условная корректность, доказываются теоремы об условной устойчивости и единственности решения задачи (1)-(4), а также строиться приближенное решение.

Литература

1. Антипин В.И., Попов С.В. Разрешимость краевой задачи для уравнения третьего порядка с меняющимся направлением времени. // Математические заметки СВФУ, 2011, Том 18, №1, С. 8-15.

2. Пятков С.Г. Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики: сб. науч. тр. АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. - Новосибирск, 1986. - С. 65-84.

3. Фаязов К.С. Некорректная краевая задача для одного уравнения смешанного типа второго порядка. Узбекский математический журнал, 1995г., №2.

4. Фаязов К.С., Хажиев И.О. Оценка условной устойчивости и приближенное решение краевой задачи для уравнения в частных производных четвертого порядка. // Математические заметки СВФУ, 2015, Том 22, №1 (85), С. 78-88.

НЕКОРРЕКТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ПСЕВДО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Фаязов К.С.

Туринский политехнический университет в г. Ташкенте, Узбекистан
kudratillo52@mail.ru

В работе исследуются некорректные в смысле Ж.Адамара задачи для псевдо-дифференциального-операторного уравнения с самосопряженными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. А именно рассматривается дифференциально-операторное уравнение следующего вида

$$Au_t(t) = Bu_t(t) + Bu(t), \tag{1}$$

где $u(t)$ функция скалярного аргумента t, $0 \leqslant t \leqslant T$, со значениями в гильбертовом пространстве H. A и B линейные, вообще говоря, неограниченные операторы с общей плотной в H областью определения D.

Исследованию обратных и некорректных задач для абстрактных дифференциальных уравнений посвящены работы S.Agmon, S.Agmon и L.Nirenberg, B.D.Coleman, R.J.Duffin и V.J.Mizel, F.John, L.E. Payne, H.A. Levine, С. Г. Крейн, А.А.Бухгейм, К.С.Фаязова и др. Нами при различных ограничениях на операторы A и B для уравнения (1) рассмотрены некорректные задачи и доказаны условная корректность этих задач. В качестве примера рассмотрены некорректные задачи для следующего уравнения

$$\operatorname{sgn} x u_t(t,x) = u_{txx}(t,x) + u_{xx}(t,x)$$

в области $\Omega = \{(t,x): \ -1 < x < 1, \ x \neq 0, \ 0 < t < T\}$.

Литература

1. Agmon S.. Unicite et convexite dans les problemes differentiels, Sem. Math. Sup. (1965), Univ. of Montreal Press, 1966.

2. Agmon S. and Nirenberg L. Lower bounds and uniqueness theorems for solutions of differential equations in a Hilbert space, Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967), 207-229. MR 34 #4665.

3. Coleman B.D., Duffin R.J. and Mizel V.J. Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xxt}$ on a strip, Arch. Rational Mech. Anal. 19 (1965), 100-116. MR 31 #1479.

4. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.

НЕКОТОРЫЕ ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПОРОУПРУГОСТИ

Имомназаров Б.Х.[1], Имомназаров Х.Х.[2], Искандаров И.К.[3]

[1] Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
[2] ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск, Россия
[3] Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Россия
[1]e-mail:shirz999@mail.ru, [2]e-mail:mih.imom@omzg.sscc.ru

Исследования процессов конвективного тепло- и массапереноса в насыщенных жидкостью пористых средах традиционно занимают одно из центральных мест среди современных проблем теоретической теплофизики и фильтрации. Это обусловлено прежде всего актуальностью изучения внутренних механизмов переноса массы и энергии в пористой среде, а также их диссипацию, включая прогнозы и оценку эффективности применения пористых материалов в различных областях науки и технологии, в том числе в разведочной геофизике, в сейсморазведке, моделировании нефтяных резервуаров и прогнозе землетрясений.

Первой публикацией, сформулировавшей проблему изучения особенностей макорскопического переноса массы в насыщенной жидкостью пористой среде, были экспериментальные исследования французского инженера Г. Дарси [1]. Годом позже Дарси опубликовал теоретическую работу с анализом экспериментальных данных и выводом известного соотношения между скоростью течения и градиентом давления (или напора) в проницаемой среде, названного впоследствии его именем [2]. Фундаментальность подхода и подробный анализ поставленных вопросов в этих работах создали прочный базис для нового раздела гидродинамики – теории фильтрации жидкостей и газов в капилярно-пористой среде [3].

Становление нового направления на рубеже XIX-XX веков тесно связано с трудами Ж. Дюпюи, Ф.Г. Кинга, С.С. Слитера, П. Форхгеймера, Н.Н. Павловского, Дж. Козени, Г.Г. Фэнчера и Дж.А. Льюиса, Н.Е. Жуковского, П.С. Кармана, М. Маскета, С.А. Христановича и Л.С. Лейбензона.

В прикладных задачах для моделирования распространения сейсмических волн в насыщенных жидкостью пористых средах используются модели типа Френкеля-Био [4, 5]. Принятые в этих динамических моделях гетерофазных сред, допущения принимаются в качестве основных (например, выполнение закона Дарси). Модели этого класса позволяют описывать только линейные явления в насыщенных жидкостью пористых средах. Необходимость учета нелинейных эффектов в реальных геологических средах связана с существованием (реализацией) больших градиентов деформаций и напряжений, высоких скоростей фильтрации насыщающей жидкой компоненты, определяющих движения жидкости в таких средах.

В настоящее время разработаны и продолжают совершенствоваться различные теоретические подходы в исследовании нелинейных явлений. Феноменологический подход, обеспечивающий корректность и термодинамическую согласованность модели, развит в работах [6-8], где построена нелинейная математическая модель движения насыщенной жидкости через пористую среду основанная на методе законов сохранения. При этом заранее не предпологается выполнения закона Дарси, а закон Дарси получается как в одном предельном случае [6].

Модель предсказывает существование четырех типов звуковых колебаний (двух поперечных (в изотропной среде их свойства совпадают) и двух продольных) и хорошо согласуется с экспериментальными данными [9].

В данном докладе рассматривается прямые и обратные динамические задачи для сдвиговых волн в насыщенной жидкостью пористой среде в диссипативном приближении. Обсуждаются вопросы единственности и оценка устойчивости соответстующих обратных динамических задач. Предполагается, что механические свойства являются переменной, диссипации энергии происходит только за счет приницаемости и среда считается слабо приницаемой и с малой пористостью. В этих условиях скорости смещений пористого тела u точек среды зависит только от времени t, пространственной переменной x и удовлетворяет интегродифференциальному уравнению

$$\rho_s(x)\,u_{tt}-(\mu(x)\,u_x)_x-b(x)\rho_l(x)\,u_t+b^2(x)\,\rho_l(x)\,u--b^3(x)\,\rho_l(x)\int_0^t \mathrm{e}^{-b(x)\,(t-s)}\,u(x,s)ds=0.$$

Здесь u искомая компонента вектора скорости смещений частиц упругого пористого тела с парциальной плотностью $\rho_s(x)$, $\mu(x)$ – модуль сдвига, $b(x)$ – положительная функция связана с проницаемостью пористой среды и отвечает за диссипацию энергии.

Компонента насыщающей скорости жидкости v с парциальной плотностью $\rho_l(x)$ связана с функцией u соотношением $v(x,t) = b(x)\int_0^t \mathrm{e}^{-b(x)\,(t-s)}\,u(x,s)ds$.

Литература

1. *Darcy H.*Les fontaines publiques de la ville de Dijon. – Paris: V. Dalmont ed., 1856, 647 p.
2. *Darcy H.*Recherches experimentales relatives au mouvement de L'eau dans les tuyaux. – Paris: Mallet-Bachelier, 1857, 268 p.
3. *Москалев П.В., Шитов В.В.*Математическое моделирование пористых структур. М.: Физматлит, 2007, 120с.
4. *Френкель Я.И.*К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1944. т.8, No 4. С.133-150.
5. *Biot M.A.*Theory of propagation of elastic waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range // J. Acoust. Soc. Am. 1956, v. 28, No. 2 p.168-178.
6. *Доровский В.Н.*Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика 1989, No. 7. С. 39-45.
7. *Dorovsky V.N., Imomnazarov Kh.Kh., Romensky E.I.*A hydrodynamic nonlinear model of bubble liquid (Part II) // Computers Math. Applic. 1997, v.33, No 6. p.13-15.
8. *Dorovsky V.N.*Mathematical Models of Two-Velocity Media // Mathl. Comput. Modelling 1995, v.21, No.7 pp.17-28.
9. *Plona T.J.*Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies // Appl. Phys. Let., 1980, V. 36, No. 4, pp.259-261.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Сафаров Ж.Ш.

Институт Математики АН РУз, Узбекистан, Ташкент
j.safarov65@mail.ru

В обратных задачах математической физики имеются теоремы существования для достаточно малых областей определения неизвестных коэффициентов, т.е. для таких задач разрешимость носит локальный характер. Но даже при гладких данных решение обратной задачи может не существовать на любом наперед заданном интервале. Связано это явление с нелинейностью задачи. Однако в задачах определения ядра интегрального члена в гиперболических уравнениях второго порядка, где нелинейность носит сверточный характер, удается получить глобальные теоремы существования в пространстве непрерывных функций [1].

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = \int\limits_0^t K(t-\alpha)u(x,\alpha)\,d\alpha, \qquad x \in (0,l), t > 0 \tag{1}$$

с начальными

$$u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u_x|_{x=0} = \delta(t), \qquad u_x|_{u=l} = 0, \qquad t > 0 \tag{3}$$

Здесь $\delta(x)$– дельта функция Дирака. В предположении $K(t) \in C(0,\infty)$, изучается задача об определении функции $K(t)$ из условия

$$u(0,t) = f(t), \qquad t \geq 0 \tag{4}$$

Под решением задачи $(1)-(3)$ понимается предел (в смысле обобщенных функций) решения задачи $(1)-(3)$, соответствующая $u_x|_{x=0}=\delta(t-t_0)$ при $t_0\to 0$.

Для случая одномерного телеграфного уравнения подобная задача подробно рассмотрена в [1]. В той работе найдены необходимые и достаточные условия на функцию $f(t)$ при которых неизвестный коэффициент $q(x)\in C(0,l)$ определяется однозначно.

В данной работе исследуется задача определения подынтегральной функции, из уравнения (1), в ограниченной по x области $D=\{(x,t):0<x<l,t>0\}$. В работах (2), (3)доказанны теоремы локальной разрешимости анологичных задач. Основным результатом данной работы является следующая теорема глобальной разрешимости поставленной задачи.

Теорема.

Пусть выполнены условия $f(t)\in C^3(0,l)$, $f(+0)=-1$, $f'(+0)=f''(+0)=0$, *тогда существует единственное решение обратной задачи, для любого фиксированного* $l>0$, $K(t)\in C(0,l)$.

Теорема доказывается следующим образом: обратная задача заменяется эквивалентной системой интегральных уравнений для неизвестных функций. К последней в пространстве непрерывных функций с весовыми нормами применяется принцип сжатых отображений.

Литература

1. *Дурдиев. Д.К.* Задача восстановление памяти в уравнении колебания струны // Математическая физика и ее приложения. Тезисы докладов международной конференции.Самара, 2008, С. 70-71.
2. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики, М: Наука,1984.
3. *Сафаров Ж.Ш.* Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа в ограниченной области // Узб.мат. журнал. 2012. , є 2. С. 117-124.
4. *Сафаров Ж.Ш.* Одна обратная задача об определении ядро интегро-дифференциального уравнения в ограниченной области // Modern problems of dynamical systems and their applications, . Tashkent: May 1-3,2017. С. 154-155.

6. МЕТОДЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА И АЛГЕБРЫ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

METHODS OF FUNCTIONAL ANALYSIS AND ALGEBRA ON THE THEORY DIFFERENTIAL EQUATIONS

AN INFINITE SYSTEM OF FUNCTIONAL EQUATION AND ITS EXPONENTIAL SOLUTION FOR THE POTTS MODEL ON A CAYLEY TREE

Botirov G.I.[1], **Abrayev B.O‘.**[2],

[1] Institute of Mathematics
[2] Chirchik State Pedagogical University
[1]botirovg@yandex.ru, [2]abrayev89@mail.ru

In [1] the Potts model with a countable set Φ of spin values on Z^d was studied. It was proved that with respect to Poisson distribution on Φ the set of limiting Gibbs measures is not empty. In [2-3] were shown that the set of translation-invariant splitting Gibbs measures contains at most one point, independently on parameters of the Potts model with countable set of spin values on Cayley tree.

The Cayley tree (Bethe lattice) Γ^k of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., a graph without cycles, such that exactly $k+1$ edges originate from each vertex. Let $\Gamma^k = (V, L)$ where V is the set of vertices and L the set of edges. Two vertices x and y are called *nearest neighbors* if there exists an edge $l \in L$ connecting them and we denote $l =< x, y >$. A collection of nearest neighbor pairs $< x, x_1 >, < x_1, x_2 >, \dots, < x_{d-1}, y >$ is called a *path* from x to y. The distance $d(x, y)$ on the Cayley tree is the number of edges of the shortest path from x and y.

We consider Potts model where the spin takes values in the set of all non-negative integer numbers $\Phi := \{0, 1, \dots\}$, and is assigned to the vertices of the tree. A configuration σ on V is then defined as a function $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; the set of all configurations is Φ^V.

The Hamiltonian for the Potts model with competing interactions has the form:

$$H(\sigma) = -J \sum_{<x,y> \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - J_1 \sum_{\substack{d(x,y)=2 \\ x,y \in V}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} \tag{1}$$

where $J, J_1 \in R$ are coupling constants and δ is the Kroneker's symbol.

For $A \subset V$ denote by Φ^A the configuration space on A. Let $h : x \mapsto h_x = (h_{0,x}, h_{1,x}, \dots) \in R^\infty$ be a real sequence-valued function of $x \in V \setminus \{x^0\}$.

Fix a probability measure $\nu = \{\nu(i) > 0,\ i \in \Phi\}$.

Given $n = 1, 2, \dots$, consider the probability distribution μ_n on Φ^{V_n} defined by

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\left(-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}\right) \prod_{x \in V_n} \nu(\sigma(x)). \tag{2}$$

Here, $\sigma_n : x \in V_n \mapsto \sigma(x)$ and Z_n is the corresponding partition function:

$$Z_n = \sum_{\widetilde{\sigma}(x) \in \Phi^{V_n}} \exp\left(-\beta H(\widetilde{\sigma}_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\widetilde{\sigma}(x),x}\right) \prod_{x \in V_n} \nu(\widetilde{\sigma}(x)).$$

Remark. Note that Z_n is finite, since ν is a probability measure and $\exp\left(-\beta H(\widetilde{\sigma}_n) + \sum\limits_{x \in W_n} h_{\widetilde{\sigma}(x),x}\right)$ is bounded on Φ^{V_n}.

The probability distributions $\mu^{(n)}$ are compatible if for any $n \geq 1$ and $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$:

$$\sum_{\omega_n \in \Phi^{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \tag{3}$$

The measure defined by (2) and (3) is called a *splitting Gibbs measure* corresponding to Hamiltonian (2) and function $x \mapsto h_x, x \neq x^0$.

Theorem 1. *Probability distributions $\mu^{(n)}(\sigma_n), n = 1, 2,$ in (2) are compatible if for any $x \in V \setminus \{x^0\}$ the following equation holds:*

$$h^*_{i,x} = F_i(h^*_y, h^*_z, \beta, J), \quad i = 1, 2, \dots, \tag{4}$$

where $S(x) = y, z, h^*_x = (h_{1,x} - h_{0,x} + \ln\frac{\nu(1)}{\nu(0)}, h_{2,x} - h_{0,x} + \ln\frac{\nu(2)}{\nu(0)}, \dots)$ *and*

$$F_i(h^*_y, h^*_z, \beta, J) = \ln\frac{1 + \sum\limits_{\substack{p,q=0\\p+q\neq 0}}^{\infty} \exp\{\beta J(\delta_{ip} + \delta_{iq}) + J_1\beta\delta_{pq} + h^*_{p,y} + h^*_{q,z}\}}{1 + \sum\limits_{\substack{p,q=0\\p+q\neq 0}}^{\infty} \exp\{\beta J(\delta_{0p} + \delta_{0q}) + J_1\beta\delta_{pq} + h^*_{p,y} + h^*_{q,z}\}}.$$

Exponential solutions of functional equation (4)

Let, $h_x = h = (h_1, h_2, ...)$ for any $x \in V$. Now, we will rewrite (4) in the following form:

$$h_i = \ln\frac{\nu(i)}{\nu(0)} + \ln\frac{1 + \sum\limits_{\substack{p,q=0\\p+q\neq 0}}^{\infty} \exp\{\beta J(\delta_{ip} + \delta_{iq}) + J_1\beta\delta_{pq} + h^*_p + h^*_q\}}{1 + \sum\limits_{\substack{p,q=0\\p+q\neq 0}}^{\infty} \exp\{\beta J(\delta_{0p} + \delta_{0q}) + J_1\beta\delta_{pq} + h^*_p + h^*_q\}} \tag{5}$$

Denoting $u_i = \exp(h_i), i = 1, 2, ...$ we have

$$u_i = \frac{\nu(i)}{\nu(0)} \cdot \frac{1 + \sum\limits_{\substack{p,q=0\\p+q\neq 0}}^{\infty} \exp\{\beta J(\delta_{ip} + \delta_{iq}) + J_1\beta\delta_{pq}\}u_p u_q}{1 + \sum\limits_{\substack{p,q=0\\p+q\neq 0}}^{\infty} \exp\{\beta J(\delta_{0p} + \delta_{0q}) + J_1\beta\delta_{pq}\}u_p u_q}, \ i \in N. \tag{6}$$

We have described Gibbs measures of the model (1) which correspond to solutions of (6) such that $u_i = a^i$ for some $a \in (0, 1)$ and for some probability measure

References

1. *Ganikhodjaev N.N.* The Potts model Z^d with countable set of spin values // J.Math.Phys., 2004, 45 (3), pp.1121-1127.
2. *Ganikhodjaev N.N., Rozikov U.A.* The Potts model with countable set of spin values // Lett.Math.Phys. 2007, 75(2), pp.99-109.
3. *Rozikov U.A.* Gibbs measures on Cayley tree // World Scientific, 2013, p.385.

SPECTRUM OF CYCLICALLY COMPACT OPERATORS IN BANACH MODULES

Chilin V. I.[1], Karimov J. A.[2]

[1] National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
[2] Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
[1]vladimirchil@gmail.com, [2]karimovja@mail.ru

One of the most important results in the theory of infinitely dimension complex Banach spaces $(X, \|\cdot\|_X)$ is the theorem on non emptiness spectrum $\sigma(T)$ of bounded linear operator T, acting in $(X, \|\cdot\|_X)$. Wherein, it is known, that if operator T is compact, than any nonzero point in spectrum $\sigma(T)$ is necessarily eigenvalue of the operator T.

It is naturally to expect that analogous results will remain for bounded endomorphisms of Banach modules. In the present note we give positive solution of this problem.

Let $\mathcal{B}$ be a complete Boolean algebra, let Q be a Stone compact corresponding to $\mathcal{B}$ and let $C_\infty(Q, \mathbb{R})$ be an algebra of all continuous functions $f : Q \to [-\infty, +\infty]$, taking the values $\pm\infty$ only on nowhere dense sets in Q. Denote by $C_\infty(Q) := C_\infty(Q, \mathbb{C})$ the $*$-algebra over field of complex numbers $\mathbb{C}$ such that is the complexification of the algebra $C_\infty(Q, \mathbb{R})$.

Let X be an $C_\infty(Q)$-module with algebraic operations $x + y$ and αx, $x, y \in X$, $\alpha \in C_\infty(Q)$. A map $\|\cdot\| : X \to C_\infty(Q)$ is called a $C_\infty(Q)$-norm if the following properties hold

1. $\|x\| \geq 0$ for any $x \in X$ and $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ for all $x \in X$, $\lambda \in C_\infty(Q)$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ for any $x, y \in X$.

Pair $(X, \|\cdot\|)$ is called normed $C_\infty(Q)$-module.

We say that a net $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ from normed $C_\infty(Q)$-module (bo)-converges to element $x \in X$ if $\|x_\alpha - x\| \xrightarrow{(o)} 0$. The net $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ is called (bo)-Cauchy net if $\left(\sup\limits_{\alpha,\beta \geq \gamma} \|x_\alpha - x_\beta\|\right) \downarrow 0$. A normed $C_\infty(Q)$-module is called a Banach $C_\infty(Q)$-module if any (bo)-Cauchy net (bo)-converges to some element of this module.

If $(X, \|\cdot\|)$ is a Banach $C_\infty(Q)$-module then for any set $\{x_i\}_{i \in I} \subset X$ and any partition $\{e_i\}_{i \in I}$ of the unity $\mathbf{1}$ of Boolean algebra $\mathcal{B}$ there exists $x \in X$, что $e_i x = e_i x_i$ for all $i \in I$. In this case an element x is called mixing of the set $\{x_i\}_{i \in I}$ with respect to $\{e_i\}_{i \in I}$ and denoted by $\operatorname{mix}\limits_{i \in I}(e_i x_i)$. The set of all mixings $\operatorname{mix}\limits_{i \in I}(e_i x_i)$, where $\{x_i\}_{i \in I} \subset E \subset X$, and $\{e_i\}_{i \in I}$ is partition of the unity in $\mathcal{B}$ is called cyclic hull of subset E in X and denoted by $\operatorname{mix}(E)$. If $E = \operatorname{mix}(E)$, the E is called a cyclic set in X. Clearly, that always holds $E \subset \operatorname{mix}(E)$.

Let $\mathcal{B}$ be a Boolean algebra of the countable type and $P(\mathbb{N})$ be a set of all countable partitions in $\mathcal{B}$, which is numerated by positive integers $n \in \mathbb{N}$, i.e.

$$P(\mathbb{N}) = \{a : \mathbb{N} \to \mathcal{B} \ | \, a(n) \wedge a(m) = 0, \ n \neq m, \ \sup_{n \in \mathbb{N}} a(n) = \mathbf{1}\}.$$

We introduce in $P(\mathbb{N})$ a partial order by putting

$$a \leq b \ \Leftrightarrow \ \forall \, n, m \in \mathbb{N} \ \text{ condition } \ a(n) \wedge b(m) \neq 0 \ \text{ implies } \ n \leq m, \ \text{where } \ a, b \in P(\mathbb{N}).$$

In [3, 1.3.1] it is shown that introduced relation $a \leq b$ is relation of partial order on $P(\mathbb{N})$ and partially ordered set $(P(\mathbb{N}), \leq)$ is direction.

Let $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence in X. For every $a \in P(\mathbb{N})$ we put $x_a = \operatorname{mix}\limits_{n \in \mathbb{N}}(a(n) x_n)$. Any subnet of net $\{x_a\}_{a \in P(\mathbb{N})}$ is called cyclic subnet of an initial sequence $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

A subset $K \subset X$ is called cyclic compact (relatively cyclic compact) if $K = \operatorname{mix}(K)$ and any sequence in K has cyclic subnet that (o)-converges to some element x in K (respectively, x in X).

A set $E \subset X$ is called $C_\infty(Q)$-bounded if $\|x\|_X \leq f$ for any $x \in E$ and for some $0 \leq f \in C_\infty(Q)$. It is known that relatively cyclic compact set K is always $C_\infty(Q)$-bounded.

Let X be Banach $C_\infty(Q)$-module. A linear operator $T : X \to X$ is called $C_\infty(Q)$-bounded if there exists $0 \leq f \in C_\infty(Q)$, such that $\|Tx\|_Y \leq f\|x\|_X$ for all $x \in X$. Every $C_\infty(Q)$-bounded operator $T : X \to X$ has a property of $C_\infty(Q)$-linearity [3, 5.1.9], that is

$$T(fx + gy) = fT(x) + gT(y) \ \text{ for all } \ \ x, y \in X, \ f, g \in C_\infty(Q).$$

Let $B(X)$ be a $C_\infty(Q)$-module of all $C_\infty(Q)$-bounded linear maps from X to Y. With respect to the norm $\|T\|_{B(X)} = \sup\limits_{\|x\|_X \leq \mathbf{1}} \|Tx\|_X$ the module $B(X)$ becomes Banach $C_\infty(Q)$-module.

A $C_\infty(Q)$-linear operator $T : X \to X$ is called cyclically compact if for any $C_\infty(Q)$-bounded set $E \subset X$ its image $T(E)$ is a relatively cyclic compact. Let $K(X)$ be a set of all linear cyclic compact operators in X. In [2, Theorem 8] it is proved that $K(X)$ is a (bo)-closed $C_\infty(Q)$-submodule in $B(X)$.

Acording to the [1], for any $C_\infty(Q)$-linear bijection $T \in B(X)$ there exists an inverse operator $T^{-1} \in B(X)$. An element $f \in C_\infty(Q)$ is called regular for $T \in B(X)$, if there exists an inverse operator $(T - fI)^{-1}$, where $I(x) = x$, $x \in X$. The set of all regular elements for T we denote by $\rho(T, C_\infty(Q))$.

Let $T \in B(X)$, $0 \neq e \in \mathcal{B}$. We say T is e-invertible if there exists $S \in B(X)$, such that $(TS)(ex) = (ST)(ex) = ex$ for all $x \in X$, i.e. an operator $T_e(y) := eT(y)$, defined on eX is bijection. We call an element $f \in C_\infty(Q)$ a spectral element for T, if $(T - fI)$ is not e-invertible for any non zero $e \in \mathcal{B}$. The set of all spectral elements for T we call an $C_\infty(Q)$-spectrum for $T \in B(X)$. Note that $\sigma(T, C_\infty(Q)) \subset C_\infty(Q) \setminus \rho(T, C_\infty(Q))$, however, generally $\sigma(T, C_\infty(Q)) \neq C_\infty(Q) \setminus \rho(T, C_\infty(Q))$. More precisely for any $T \in B(X)$, $f \in C_\infty(Q)$ there exists unique $e \in \mathcal{B}$, such that $ef \in \rho(T_e, eC_\infty(Q))$ and $(\mathbf{1} - e)f \in \sigma\big(T_{(\mathbf{1}-e)}, (\mathbf{1} - e)C_\infty(Q)\big)$.

An element $f \in C_\infty(Q)$ is called eigenelement for $T \in B(X)$, if there exists non zero $x \in X$, such that $Tx = fx$ and $s(x) = \mathbf{1}$, where $s(x) = \mathbf{1} - \sup\{e \in \mathcal{B} : ex = 0\}$ is a support for x. It is clear that eigenelement always belongs to $C_\infty(Q)$-spectrum $\sigma(T, C_\infty(Q))$.

Let $s(f) = \mathbf{1} - \sup\{e \in \mathcal{B} : ef = 0\}$ be a support for $f \in C_\infty(Q)$. The following theorem describes a spectrum of cyclically compact operator $T \in B(X)$.

Theorem 1. *Let X be a Banach $C_\infty(Q)$-module and let $T \in K(X)$. Then $\sigma(T, C_\infty(Q)) \neq \emptyset$ and every $f \in \sigma(T, C_\infty(Q)),\ s(f) = \mathbf{1}$ is eigenelement for T.*

Note that if $f \in \sigma(T, C_\infty(Q)),\ s(f) \neq \mathbf{1}$ then the element $f \in C_\infty(Q)$, generally, is not eigenelement for T.

References

1. *Ganiev I. G., Kudaybergenov K. K.* Banach theorem on inverse operator in Banach-Kantorovich spaces. Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal. 2004, V.6. No.3. 21-25 (in Russian).

2. *Karimov J. A.* Cyclic compact operators in Banach modules over extended Kantorovich-Pinsker space. Acta NUUz. 2013. No.2. 78-83 (in Russian).

3. *Kusraev A. G.* Dominated operators. Netherlands, Springer. 2000.

Convergent sequences in Cesàro mean

G'anixodjayev Rasul Nabiyevich , Ahmedova Dilafruz Davrbek qizi

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
dilafruz.ahmedova0695@gmail.com

In mathematics, the Cesàro means of a sequence $\{x_n\}$ are the terms of the sequence $\{y_n\}$, where $y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ is the arithmetic mean of the first n elements of $\{x_n\}$. This concept is named after Ernesto Cesàro (1859-1905).

A basic result states that the limit of a convergent sequence equals the limit of its Cesàro mean. That is, the operation of talking Cesàro means preserves the convergence and the limit of a sequence. This is the basis for using Cesàro means in summability method in the theory of divirgent series.

Let m space of really limited sequences with norm

$$||x|| = \sup |x_i|,$$

where $x = (x_1, x_2, x_3 \ldots) \in m$. It is known that, m is a complete bordered space. We denote by m_0 the space of convergent sequence. It is obvious that, m_0 is a closed sub-space in m. Next, we denote by m_1 the subset of m consisting of sequence of convergent in Cesàro mean , i.e.,

$x = (x_1, x_2, x_3 \ldots) \in m_1$ if exist limit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, where $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. Let ch be an operator associated with the $x \in m$ sequence $(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}; \frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \ldots)$. We denote by m_k set of sequence of m, for which $ch^k \in m_0$ it is easy to notice that,

$$m_0 \subset m_1 \subset m_2 \subset \ldots$$

Let $m_\infty = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} m_k \subset m$.

Statement 1 All m_k are a linear subspace of m.

Task 1. Whether m_k closed subspace when $k \geq 1$? We consider sequences of m, such that $x_k = 0$ or 1.

Task 2. Does m_∞ conformity m?

Definition 1. *Let us given the sequence $\{x_n\}$. If the sequence $y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, which consist of elements of the sequence $\{x_n\}$ converges to x^*, then the sequence $\{x_n\}$ converges to x^* in Cesàro mean.*

Example. Let us consider the following sequence

$$x_n = \begin{cases} 1 \ \ if \ \ n = 2k-1 \\ 0 \ \ if \ \ n = 2k \end{cases}$$

We have an oscillating sequence, but in the Cesàro means it has limit $\frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{2}.$$

So, the sequence $\{x_n\}$ converges to x^* in Cesàro mean.
Suppose given the sequence $\{x_n\}$, such that

$$x_n:\ \underbrace{11\dots1}_{a_1},\underbrace{0\dots0}_{a_2},\underbrace{1\dots1}_{a_3}\dots \tag{1}$$

Where $\{a_n\}$ are terms of arithmetic progression.

Theorem 1. *If $\{a_n\}$ are the terms of arithmetic progression, where $n\in N$ and $a_1,d\in N$, then sequence (1) is convergent in Cesàro mean.*

Theorem 2. *If $\{b_n\}$ are terms of geometric progression, where $n\in N$ and $b_1,q\in N$, when*

$$x_n:\ \underbrace{11\dots1}_{b_1},\underbrace{0\dots0}_{b_2},\underbrace{1\dots1}_{b_3}\dots \tag{2}$$

then sequence $\{x_n\}$ is not convergent in Cesàro mean.

Definition 2. *Let us given the sequence $\{x_n\}$. The sequences $y_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$, and $z_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$, whose consist of elements of the sequences $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$, accordingly. If the second sequence $\{z_n\}$ converges to x^{**}, then the sequence $\{x_n\}$ has the second convergence to x^{**} in Cesàro mean.*

Theorem 3. *If $\{b_n\}$ are the terms of geometric progression, where $n\in N$ and $b_1,q\in N$. Then the sequence (2) has the second convergence in Cesàro mean.*

References

1. *Hardy, G.H.(1992). Divergent Series. Providence: American Mathematical Society. ISBN 978-0-8218-2649-2*
2. *Katznelson, Yitzhak (1976). An Introduction to Harmonic Analysis. New York : Dover publications. ISBN 978-0-486-63331-2*

Fixed points of Lyapunov's operator with degenerate kernel

Haydarov F. H.[1], Kucharov R.R.[2]

[1] National University of Uzbekistan, Uzbekistan, Tashkent
[2] National University of Uzbekistan, Uzbekistan, Tashkent
[1] haydarov_imc@mail.ru,[2] ramz3364647@yahoo.com

It's reduced the problem of describing the "splitting Gibbs measures"of the model to the analysis of solutions to some nonlinear integral equation [3]. One of the nonlinear integral operators is Lyapunov's operator [2]. Now we characterize fixed points of Lyapunov's operator with a given degenerate kernel.

Let $C_0^+[0,1]=C^+[0,1]\setminus\{\theta\equiv 0\}$ where $C^+[0,1]=\{f\in C[0,1]:f(x)\geq 0\}$. We define the Lyapunov integral operator $\mathcal{L}$ on $C_0^+[0,1]$ by the equality (see [1])

$$\mathcal{L}f(t)=\int_0^1 K(t,s,u)f(s)f(u)dsdu.$$

We consider fixed points of the operator $\mathcal{L}$ with positive degenerate kernel, namely

$$\int_0^1\int_0^1 K(t,u,v)f(u)f(v)dudv=f(t), \tag{1}$$

where $K(t,u,v) = \psi_1(t)\varphi_1(u) + \psi_2(t)\varphi_2(v)$, $\psi_i(t) > 0, \varphi_i(t) > 0, i \in \{1,2\}$.

Denote

$$\alpha_{11} = \int_0^1\int_0^1 \psi_1(u)\psi_1(v)\varphi_2(v)dudv, \quad \alpha_{12} = \int_0^1\int_0^1 (\psi_1(v)\psi_2(u) + \psi_1(u)\psi_2(v))\varphi_2(v)dudv$$

$$\alpha_{22} = \int_0^1\int_0^1 \psi_2(u)\psi_2(v)\varphi_2(v)dudv, \quad \beta_{11} = \int_0^1\int_0^1 \psi_1(u)\psi_1(v)\varphi_1(u)dudv,$$

$$\beta_{12} = \int_0^1\int_0^1 (\psi_1(u)\psi_2(v) + \psi_1(v)\psi_2(u))\varphi_1(u)dudv, \quad \beta_{22} = \int_0^1\int_0^1 \psi_2(u)\psi_2(v)\varphi_1(u)dudv.$$

Theorem. i) Lyapunov's operator has at least one fixed point and at most three fixed point;

ii) If $\alpha_{12} > \beta_{11}$, $\alpha_{22} > \beta_{12}$ then equation (1) has the unique positive fixed point;

iii) If $\alpha_{12} < \beta_{11}$, $\alpha_{22} > \beta_{12}$ then equation (1) has exactly two positive fixed points;

iv) If $\alpha_{12} < \beta_{11}$, $\alpha_{22} < \beta_{12}$ then equation (1) has exactly three positive fixed points;

REFERENCES

1. *L. Nirenberg,* Topics in nonlinear functional analysis (AMS, Courant Lec. Notes in Math, 6, N.Y. 2001).
2. *U.A. Rozikov, F.H. Haydarov.* Four competing interactions for models with an uncountable set of spin values on a Cayley tree. // Theor. Math. Phys.191(2) (2017), 748-761.
3. *U.A. Rozikov.* Gibbs measures on a Cayley trees, World Sci. Pub, Singapore (2013).

LYAPUNOV FUNCTIONS FOR A VOLTERRA CUBIC STOCHASTIC OPERATOR

Jamilov U.U.[1], Mukhitdinov R.T.[2],

[1] Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan
[2] Bukhara Technical and Engineering Institute of High Technologies, Bukhara, Uzbekistan
[1]jamilovu@yandex.ru, [2]ramazon-mukhitdinov@rambler.ru

A *cubic stochastic operator* (CSO) is defined by the mapping $V: \mathbf{x} \in S^{m-1} \to \mathbf{x}' \in S^{m-1}$:

$$V: x'_l = \sum_{i,j,k=1}^{m} p_{ijk,l}x_ix_jx_k, \qquad l = 1,\dots,m, \tag{1}$$

where

$$S^{m-1} = \{\mathbf{x} = (x_1,x_2,\dots,x_m) \in \mathbb{R}^m: \ x_i \geq 0, \text{ for any } i \text{ and } \sum_{i=1}^m x_i = 1\} \tag{2}$$

is $(m-1)$-dimensional simplex and $p_{ijk,l}$ are the coefficients of heredity such that

$$p_{ijk,l} \geq 0, \qquad \sum_{l=1}^m p_{ijk,l} = 1, \qquad i,j,k,l = 1,\dots,m, \tag{3}$$

and the coefficients $p_{ijk,l}$ do not change for any permutation of i,j and k.

For a given $\mathbf{x}^{(0)} \in S^{m-1}$ the *trajectory* $\mathbf{x}^{(n)}, n = 0,1,2,\dots,$ of an initial point $\mathbf{x}^{(0)}$ under the action of the CSO (1) is defined by $\mathbf{x}^{(n+1)} = V(\mathbf{x}^{(n)})$, where $n = 0,1,2,\dots$ Let $E = \{1,2,\dots,m\}$. Denote by $\mathrm{int}S^{m-1} = \{\mathbf{x} \in S^{m-1}: x_1x_2\cdots x_m > 0\}$ the interior of S^{m-1};

Consider a family of the following CSOs

$$V_\theta: x'_l = x_l\left(x_l^2 + 3\theta x_l\sum_{i\in E\setminus\{l\}} x_i + 3(1-\theta)\sum_{i\in E\setminus\{l\}} x_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j\in E\setminus\{l\}\\ i<j}} x_ix_j\right), \quad l \in E. \tag{4}$$

Note that in [1] we considered the case $\theta = 1$. Besides, if $\theta = \frac{2}{3}$, then it is the identity operator in the CSO (4). We consider the case $\theta \in [0,1)$, $\theta \neq \frac{2}{3}$.

Using Lyapunov functions, one can get a handle on the set of limit points.

Definition 1. *A continuous function φ: $intS^{m-1} \to R$ is called a Lyapunov function for a CSO V if $\varphi(V(\mathbf{x})) \geq \varphi(\mathbf{x})$ for all $\mathbf{x}$ (or $\varphi(V(\mathbf{x})) \leq \varphi(\mathbf{x})$ for all $\mathbf{x}$).*

A Lyapunov function is very helpful to describe an upper estimate of $\omega(\mathbf{x}^0)$.

Theorem 2.

i) Let $\theta \geq \frac{2}{3}$. Then the function $\varphi(\mathbf{x}) = x_1 x_2 \cdots x_m$ is a Lyapunov function for the Volterra CSO (4);

ii) The functions $\mu(\mathbf{x}) = \max\limits_{i \in E} x_i$ and $\nu(\mathbf{x}) = \min\limits_{i \in E} x_i$ are the Lyapunov functions for the Volterra CSO (4).

Definition 3. *A CSO V is called* regular *if the limit $\lim\limits_{n\to\infty} V^n(\mathbf{x})$ exists for any $\mathbf{x} \in S^{m-1}$.*

Theorem 4. *For any parameter θ the operator V_θ defined in (4) is a regular operator.*

References

1. *Rozikov U. A., Khamraev A. Yu.* On cubic operators defined on finite-dimensional simplices // Ukrainian Math. J. 2004. V. 56, № 10. P. 1699–1711.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В F-НОРМИРУЕМЫХ ИДЕАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Алимов А. А.

Ташкентский Исламский Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
alimovakrom63@yandex.com

Пусть $\mathbb{K}$ поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, либо действительных чисел $\mathbb{R}$. Для измеримого пространства $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ с полной σ-конечной мерой через $L^0_{\mathbb{K}} = L^0_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ обозначим $*$-алгебру всех классов эквивалентности равных почти всюду комплексных (действительных) функций, определенных на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Пусть $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ классические функциональные банаховы L_p-пространства, снабженные нормой $\|\cdot\|_p,\ 1 \leq p \leq \infty$.

Линейный оператор $D : L^\infty \to L^0_{\mathbb{K}}$ называется *дифференцированием*, если $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ при всех $x, y \in L^\infty$. Хорошо известно, что любое дифференцирование $D : L^\infty \to L^\infty$ тождественно равно нулю [5]. В то же время, известен следующий критерий тривиальности дифференцирования на алгебре $L^0_{\mathbb{K}}$ [3] :

Теорема 1. *Дифференцирование $D : L^0_{\mathbb{K}} \to L^0_{\mathbb{K}}$ является нулевым, тогда и только тогда, когда μ — атомическая мера.*

Таким образом, в случае неатомичной меры μ существуют ненулевые дифференцирования на алгебре $L^0_{\mathbb{K}}$, при этом, как показано в работе [1], множество таких попарно различных дифференцирований имеет мощность не менее континуума.

Следующим шагом в изучении свойств дифференцирований $D : L^\infty \to L^0_{\mathbb{K}}$ стало исследование класса дифференцирований, принимающих значения в нормируемых идеальных подпространствах (НИП) $X \subset L^0_{\mathbb{K}}$. В [2] доказано, что любое дифференцирование из L^∞ со значениями в НИП $X \subset L^0_{\mathbb{K}}$ обязательно является нулевым.

Каждое нормируемое пространство является локально выпуклым пространством. В то же время, имеются многочисленные примеры метризуемых не локально выпуклых идеальных подпространств в $X \subset L^0_{\mathbb{K}}$ (см., например, [4]). Таковыми, в частности, являются F-нормируемые идеальные подпространств в $L^0_{\mathbb{K}}$, т.е.идеальные пространств, снабженные F-нормой. Вопрос о существовании ненулевых дифференцирований $D : L^\infty \to X$ со значениями в F-нормируемом идеальном пространстве X до сих пор оставался открытым. В настоящей заметке устанавливается, что каждое дифференцирование из L^∞ со значениями в F-нормируемом идеальном пространстве $X \subset L^0_{\mathbb{K}}$ тождественно равно нулю.

Нам понадобятся некоторые понятия, связанные с теорией F-нормированных идеальных пространств.

Обозначим через ∇_μ полную булеву алгебру всех классов эквивалентности равных почти множеств из $\mathcal{A}$. Ясно, что булеву алгебру ∇_μ можно отождествить с булевой алгеброй всех идемпотентов из $L^0_{\mathbb{K}}$. В дальнейшем алгебра $L^0_{\mathbb{K}}$ обозначается через $L^0_{\mathbb{K}}(\nabla_\mu)$.

Для любого элемента $x \in L^0_{\mathbb{K}}(\nabla_\mu)$ определим его носитель с помощью равенства $s(x) = \mathbf{1} - \sup\{e \in \nabla_\mu : ex = 0\}$, где $\mathbf{1}$ — единица алгебры $L^0_{\mathbb{K}}(\nabla_\mu)$. Ясно, что $s(x) \in \nabla_\mu$ и из соотношений $e \in \nabla_\mu, ex = x$, следует, что $s(x) \leq e$.

Заметим, что для любого дифференцирования $D : L^\infty \to L^0_{\mathbb{K}}$ и любых $e \in \nabla_\mu$, $x \in L^\infty$, верны равенства $D(e) = 0$ и $D(e \cdot x) = e \cdot D(x)$.

Говорят, что дифференцирование $D : L^\infty \to L^0_{\mathbb{K}}$ является *нерасширяющим*, если $s(D(x)) \leqslant s(x)$ для всех $x \in L^\infty$. Поскольку $D(e \cdot x) = e \cdot D(x)$, то $D(x) = D(s(x)x) = s(x)D(x)$, т.е. $s(D(x)) \leqslant s(x)$ для всех $x \in L^\infty$. Следовательно, любое дифференцирование $D : L^\infty \to L^0_{\mathbb{K}}$ является нерасширяющим. Последнее свойство дифференцирований $D : L^\infty \to L^0_{\mathbb{K}}$ позволяет установить возможность следующего продолжения дифференцирования $D : L^\infty \to L^0(\nabla_\mu)$ до дифференцирования $\hat{D}\colon L^0(\nabla_\mu) \to L^0(\nabla_\mu)$ (см., например, [2]).

Теорема 2. *Для каждого дифференцирования* $D : L^\infty \to L^0(\nabla_\mu)$ *существует единственное дифференцирование* $\hat{D}\colon L^0(\nabla_\mu) \to L^0(\nabla_\mu)$ *такое, что* $\hat{D}(x) = D(x)$ *для всех* $x \in L^\infty$.

Ненулевое линейное подпространство X в $L^0_{\mathbb{K}}(\nabla_\mu)$ называется идеальным пространством, если из $x \in X, y \in L^0_{\mathbb{K}}(\nabla_\mu)$ и неравенства $|y| \leqslant |x|$ следует, что $y \in X$. Нетрудно видеть, что линейное подпространство X в $L^0_{\mathbb{K}}(\nabla_\mu))$ является идеальным пространством в том и только в том случае, когда $L^\infty \cdot X = X$.

Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Функция $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ называется F-нормой, если верны следующие свойства:

1) $\|x\| > 0$ для всех $x \neq 0$;
2) $\|\alpha x\| \leq \|x\|$ для всех x и всех скаляров α с $|\alpha| \leq 1$;
3) $\|x + y\| \leqslant (\|x\| + \|y\|)$.

Если $\|\cdot\|$ есть F-норма на X, то функция $d(x, y) = \|x - y\|$ определяет трансляционно инвариантную метрику на линейном пространстве X, порождающую метрическую топологию на X, относительно которой X есть топологическое линейное пространство. Если $(X, \|\cdot\|)$ является полным метрическим пространством, то пара $(X, \|\cdot\|)$ называется F-пространством.

Говорят, что F-норма $\|\cdot\|$ на идеальном пространстве X монотонна, если из соотношений $x, y \in X, |y| \leqslant |x|$ следует, что $\|y\| \leqslant \|x\|$. F-нормированным идеальным пространством в $L^0(\nabla_\mu)$ (сокращенно, F-НИП) называется идеальное пространство в $L^0(\nabla_\mu)$, снабженное монотонной F-нормой.

Используя порядковые свойства F-нормированных идеальных пространств с помощью теоремы 2 устанавливается следующий вариант теоремы 5.2 из [2].

Теорема 3. *Пусть* $(X, \|\cdot\|)$ *—* F*-НИП в* $L^0(\nabla_\mu)$ *и* $D : L^\infty \to X$ *— дифференцирование из* L^∞ *со значениями в* X*. Тогда* D *тождественно равно нулю.*

Литература

1. **Бер А. Ф.** , *О дифференцированиях в коммутативных регулярных алгебрах*, Математические Труды, 2010. Т. 13, № 1. С. 3–14.

2. **Левитина Г. Б., Чилин В. И.**, *Дифференцирования на идеалах в коммутативных AW*-алгебрах*, Математические Труды. 2013. Т. 16, № 1. С. 63–88.

3. **Ber A. F., Chilin V. I., Sukochev F. A.**, *Non-trivial derivations on commutative regular algebras*, Extracta Math. 2006. V. 21, № 2. P. 107–147.

4. **N. J. Kalton, N. T. Peck, Roberts James W.**, *An F-space sampler*, London Mathematical Society Lecture Note Series. V 89. Cambridge University Press, Cambridge. 1984.

5. **Sakai S.**, *C*-Algebras and W*-Algebras*, New York: Springer-Verlag. 1971.

ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Азизов А.Н.[1], Чилин В.И.[2]

[1] Национальный университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент
[2] Национальный университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент
[1]azizov.07@mail.ru, [2]vladimirchil@gmail.com

Пусть $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ измеримое пространство с полной σ-конечной мерой. Через $\mathcal{L}^0=\mathcal{L}^0(\Omega)$ обозначим алгебру всех классов равных почти всюду конечных действительных измеримых функций на $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, а через $\mathcal{L}^0(\mu)$ подалгебру в $\mathcal{L}^0$ всех таких $f\in\mathcal{L}^0$, для которых верно неравенство $\mu(\{|f|>\lambda\})<\infty$ при некотором $\lambda>0$. Через $\mathcal{L}^p\subset\mathcal{L}^0(\mu)$, $1\le p\le\infty$, обозначается классическое банахово функциональное L^p-пространство, снабженное стандартной нормой $\|\cdot\|_p$.

Если $f\in\mathcal{L}^0(\mu)$, то *невозрастающая перестановка* функции f определяется равенством $\mu_t(f)=\inf\{\lambda>0:\ \ \mu\{|f|>\lambda\}\le t\},\ \ \ t\ge 0$. Ненулевое линейное подпространство E из $\mathcal{L}^0(\mu)$ с банаховой нормой $\|\cdot\|_E$ называется *симметричным*, если из условий $f\in E,\ g\in\mathcal{L}^0(\mu),\ \mu_t(g)\le\mu_t(f)\ \ \forall\ t>0$, следует, что $g\in E$ и $\|g\|_E\le\|f\|_E$.

Симметричными пространствами являются пространство $\mathcal{L}^1\cap\mathcal{L}^\infty$ с нормой $\|f\|_{\mathcal{L}^1\cap\mathcal{L}^\infty}=\max\{\|f\|_1,\|f\|_\infty\}$ и пространство $\mathcal{L}^1+\mathcal{L}^\infty$ с нормой $\|f\|_{\mathcal{L}^1+\mathcal{L}^\infty}=\inf\left\{\|g\|_1+\|h\|_\infty:\ f=g+h,\ g\in\mathcal{L}^1,\ h\in\mathcal{L}^\infty\right\}$ (см. [1, Chapter II, §4]).

Пусть $\mathcal{A}_\nu$ есть σ-алгебра всех измеримых по Лебегу множеств из $(0,\infty)$ и ν мера Лебега на $\mathcal{A}_\nu$. Для любого симметричного пространства $E=E((0,\infty),\mathcal{A}_\nu,\nu)$ положим $E(\Omega,\mathcal{A},\mu)=\{f\in\mathcal{L}^0(\mu):\mu_t(f)\in E\}$ и $\|f\|_{E(\Omega)}=\|\mu_t(f)\|_E$. Известно, что $(E(\Omega),\|\cdot\|_{E(\Omega)})$ есть симметричное пространство измеримых функций на $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ (см., например, [2, Chapter II, §2]) (в этом случае, говорят, что симметричное пространство $(E(\Omega),\|\cdot\|_{E(\Omega)})$ порождено симметричным пространством E).

Множество $A\in\mathcal{A}$ с ненулевой конечной мерой называют атомом, если из включений $B\subset A,\ B\in\mathcal{A}$ следует, что $\mu(B)=0$ или $\mu(B)=\mu(A)$. Если измеримое пространство не имеет атомов, то оно называется неатомическим пространством. Поскольку мера μ является σ-конечной, то в σ-алгебре $\mathcal{A}$ имеется не более счетного числа атомов $\{A_n\}_{n\ge1}$. Если $\mu(\Omega\setminus(\bigcup\limits_{n\ge1}A_n)=0$, то измеримое пространство $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ называется атомическим.

Пусть $\nabla=\nabla_\mu$ полная булева алгебра всех классов эквивалентности $e=[A]$ равных μ-почти всюду подмножеств $A\in\mathcal{A}$. Известно, что $\widehat{\mu}(e)=\mu(A)$ есть строго положительная счетно аддитивная σ-конечная мера на ∇. В дальнейшем мера $\widehat{\mu}$ будет обозначаться через μ и алгебра $\mathcal{L}^0(\Omega)$ (соответственно, пространства $\mathcal{L}^p(\Omega),\ 1\le p\le\infty$) через $\mathcal{L}^0(\nabla)$ (соответственно, $\mathcal{L}^p(\nabla)$).

Если $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ есть атомическое измеримое пространство, то в случае счетности (конечности) множества всех атомов из $\mathcal{A}$ булева алгебра ∇_μ изоморфна полной булевой алгебре $2^{\mathbb{N}}$ (соответственно, $2^{\mathbb{N}_n}$) всех подмножеств из $\mathbb{N}$ (соответственно, из $\mathbb{N}_n=\{1,\ldots,n\}$). Согласно [3, Chapter III, §2, Theorem 8], для произвольного измеримого пространства $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ существует такой элемент $e\in\nabla_\mu$, что $e\cdot\nabla_\mu=\{q\in\nabla_\mu:q\le e\}$ есть атомическая булева алгебра, а $(\mathbf{1}-e)\cdot\nabla_\mu$ — непрерывная булева алгебра (т.е. не имеет атомов), где $\mathbf{1}=[\Omega]$.

Пусть $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ неатомическое пространство с полной σ-конечной мерой. Для каждой функции $f\in\mathcal{L}^0(\nabla)$ через $\mathrm{supp}(f)$ обозначим носитель этой функции. Положим $\mathcal{R}_\mu=\{f\in\mathcal{L}^1+\mathcal{L}^\infty:\ \mu_t(f)\to0$ при $t\to\infty\}$.

Следующая теорема устанавливает мультипликативное изометрическое вложение симметричного пространства $E((0,\infty),\mathcal{A}_\nu,\nu)$ в симметричное пространство $E(\Omega,\mathcal{A},\mu)$.

Теорема 1. *Пусть $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ — измеримое пространство с полной непрерывной σ-конечной мерой и $E((0,\infty),\mathcal{A}_\nu,\nu)$ — симметричное пространство измеримых функций на $((0,\infty),\mathcal{A}_\nu,\nu)$. Тогда для каждой функции $0\le f\in\mathcal{R}_\mu$ с $\mathrm{supp}(f)=\mathbf{1}$ существуют σ-подалгебра $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$ и изоморфизм Φ из алгебры $\mathcal{L}^0((0,\infty),\mathcal{A}_\nu,\nu)$ на алгебру $\mathcal{L}^0(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ такие, что мера $\mu_{|\mathcal{B}}$ — σ-конечна, функции $\Phi(g)$ и g равноизмеримы для всех $g\in\mathcal{L}^0(0,\infty)$, $\Phi(E((0,\infty),\mathcal{A}_\nu,\nu))=E(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ и $\Phi:(E((0,\infty),\mathcal{A}_\nu,\nu),\|\cdot\|_{E(0,\infty)})\to(E(\Omega,\mathcal{B},\mu),\|\cdot\|_{E(\Omega)})$ есть мультипликативная сюръективная изометрия, для которой $\Phi(\mu_t(f))=f$.*

Пусть теперь $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ произвольное измеримое пространство с полной σ-конечной мерой, в котором имеются атомы. Согласно [3, Ch. III, §2, Theorem 8], существуют такие попарно дизъюнктные элементы

$e,\ p \in \nabla_\mu$, что $e \vee p = \mathbf{1}$, при этом, булева алгебра $e \cdot \nabla_\mu$ является непрерывной, а булева алгебра $p \cdot \nabla_\mu$ — атомической.

Теорема 2. *Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — измеримое пространство с полной σ-конечной мерой, $\mu(\Omega) = \infty$, $p_k \in \nabla_\mu, k \in \mathbb{N}$ (соответственно, k=1,...,n) — атомы в булевой алгебре ∇_μ, имеющие меру, равную единице, (соответственно, меры $\mu(p_k)$, $k = 1, \ldots, n$), $e,\ p \in \nabla_\mu$, $e \wedge p = \mathbf{0} = [\varnothing]$, $e \vee p = \mathbf{1}$, булева алгебра $e \cdot \nabla_\mu$ — непрерывна, булева алгебра $p \cdot \nabla_\mu$ — атомическая. Пусть $E((0,\infty), \mathcal{A}_\nu, \nu)$ — симметричное пространство измеримых функций на $((0,\infty), \mathcal{A}_\nu, \nu)$. Тогда для каждой функции $0 \le f \in \mathcal{R}_\mu$ с $\mathrm{supp}(f) = \mathbf{1}$ существуют σ-подалгебра $\mathcal{B}$ в $e \cdot \nabla_\mu$ и изоморфизм Φ из алгебры $\mathcal{L}^0((0,\infty), \mathcal{A}_\nu, \nu) + \mathcal{L}^0(\mathbb{N})$ (соответственно, $\mathcal{L}^0((0,\infty), \mathcal{A}_\nu, \nu) + \mathbb{R}^n$) на алгебру $\mathcal{L}^0(\mathcal{B}) + \mathcal{L}^0(p \cdot \nabla_\mu)$ такие, что мера $\mu_{|\mathcal{B}}$ — σ-конечна, функции $\Phi(g)$ и g равноизмеримы для всех $g \in \mathcal{L}^0(0,\infty) + \mathcal{L}^0(\mathbb{N})$ (соответственно, $g \in \mathcal{L}^0(0,\infty) + \mathbb{R}^n$ (в булевой алгебре $2^{\mathbb{N}_n}$ задана мера λ_n с помощью равенств $\lambda_n(\{k\}) = \mu(p_k)$, $k = 1, \ldots, n$)), $\Phi(E((0,\infty), \mathcal{A}_\nu, \nu) + E(\mathbb{N})) = E(\mathcal{B}, \mu) + E(p \cdot \nabla_\mu)$ (соответственно, $\Phi(E((0,\infty), \mathcal{A}_\nu, \nu) + \mathbb{R}^n) = E(\mathcal{B}, \mu) + E(p \cdot \nabla_\mu)$) и $\Phi : (E((0,\infty), \mathcal{A}_\nu, \nu), \|\cdot\|_{E(0,\infty)}) + (E(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{E(\mathbb{N})}) \to (E(\mathcal{B}, \mu), \|\cdot\|_{E(\Omega)}) + (E(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{E(\mathbb{N})})$ (соответственно, $\Phi : (E((0,\infty), \mathcal{A}_\nu, \nu), \|\cdot\|_{E(0,\infty)}) + (E(n), \|\cdot\|_{E(n)}) \to E(\mathcal{B}, \mu) + E(p \cdot \nabla_\mu)$) есть мультипликативная сюръективная изометрия, для которой $\Phi(\mu_t(f)) = f$.*

Литература

1. *Krein S. G., Petunin Ju. I. and Semenov E. M.* Interpolation of Linear Operators. Translations of Mathematical Monographs, Amer. Math. Soc. 54. 1982.
2. *Lord S., Sukochev F. and Zanin D.* Singular Traces. Theory and Applications. Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2013.
3. *Vladimirov D. A.* Boolean Algebras in Analysis. Mathematics and its Applications vol. 540. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

Об условие существование изоморфизма для W*-подалгебр.

Болтаев Х.Х.

БухГУ, Бухара, Узбекистан.

bkhabibzhan@mail.ru

Теория W*-подалгебр, последное время, интенсивно развивается. Обобщая понятие индекса для W*-подалгебр, В. Джонс нашёл множество всех возможых значение индекса. Его основное достижение заключается в том, что при доказательстве основного результата он построил возрастающую последовательность факторов, обладающим уникальными свойствами, которые в точности является алгебрами Гекке $H_m(q)$. Кроме того, каждому пару W*-алгебр $N \subset M$ сопоставляя некоторый двудольный граф. В настоящей работе, с помощью множество примеров, для каждой пары $N \subset M$ дана схема построение графов, а также паралельно изучая вещественный аналог W*-подалгебр, найдены интересные свойства, отличающиеся от комплексного случая.

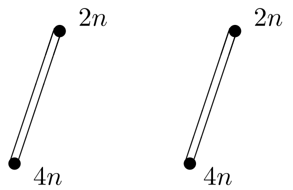
Пусть A - банахова *-алгебра над полем $\mathbf{C}$. Напомним, что алгебра A называется C*-*алгеброй*, если $\|aa^*\| = \|a\|^2$, для любого $a \in A$. Дадим вещественный аналог определения C*-алгебры. Вещественная банахова *-алгебра A называется *вещественной* C*-*алгеброй*, если $\|aa^*\| = \|a\|^2$ и элемент $+aa^*$ обратим для любого $a \in A$. Это эквивалентно тому, что норму на A можно поднять на комплексификации $A_c = A + iA$ алгебры A так, чтобы алгебра A_c являлась(комплексной) C*-алгеброй (см. [1]). Пусть $B(H)$ - алгебра всех ограниченых линейных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H. Слабо замкнутая *-подалгебра M в $B(H)$, содержашая единичный оператор называется W*-*алгеброй*. Вещественная *-подалгебра $R \subset B(H)$ с называется *вещественной* W*-*алгеброй*, если она слабо замкнута и $R \cap iR = \{0\}$. Комплексная или вещественная W*-алгебра R называется *фактором*, если ее центр тривиален, т.е. состоит из скалярных кратных единичного оператора . Пусть $A \subseteq B$ - конечномерные вещественные (соответственно, комплексные) C*-алгебры. Тогда $A \cong \bigoplus_{i+1}^k M_{n_i}(F)$ и $B \cong \bigoplus_{j+1}^l M_{m_j}(F)$, где $F = \mathbf{R}$ или $F = \mathbf{H}$ - тело кватернионов (соответственно, $F = \mathbf{C}$). Положим $\overrightarrow{n} = (n_1, ..., n_k)$ и $\overrightarrow{m} = (m_1, ..., m_l)$, и назавем их вектор-размерностями A и B, соответственно. Определим элементы Λ_{ij} $k \times l$-матрицы Λ_A^B как: Λ_{ij} - число i-го слагаемого в представление A в j-м слагаемом B

(см. [2]).

Теорема 1. Пусть $N \subset M$ и $N_1 \subset M_1$ - пары конечномерных C*-алгебр, для которых имеются совпадающие графы. Тогда существует изоморфизм $\theta : M \to M_1$ с $\theta(N) = N_1$.

Замечание 1. Теорема 1 неверна в вещественном случае, как показывает следующий пример.

Пример 1. Пусть $P_1 = M_n(\mathbf{H}) \subset R_1 = M_{2n}(\mathbf{H})$ и $P_2 = M_{2n}(\mathbf{R}) \subset R_2 = M_{4n}(\mathbf{R})$, $n \geq 1$. Рассмотрим графы этих пар:



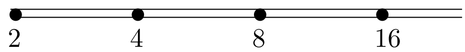
Очевидно, что графы одинаковы. Однако, как известно [3], что вещественные факторы R_1 и R_2, и вещественные подфакторы P_1 и P_2 не изоморфны, соответственно.

Теорема 1 обобщается следующим образом.

Теорема 2. Пусть $\in M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset ...$ и $\in N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset ...$ - две цепы матрычных алгебр, для которых графы совпадают. Тогда существуеть изоморфизм $\varphi : \bigcup_k M_k \to \bigcup_k N_k$, такой что $\varphi(M_k) = N_k$, для всех k.

Ясно что теорема 2 также неверна в вещественном случае, как показывает следующий пример.

Пример 2. Пусть $\in M_2(\mathbf{R}) \subset M_4(\mathbf{R}) \subset M_8(\mathbf{R}) \subset M_{16}(\mathbf{R}) \subset ...$ и $\in \mathbf{H} \subset M_2(\mathbf{H}) \subset M_4(\mathbf{H}) \subset M_8(\mathbf{H}) \subset ...$ - две цепы матрычных алгебр. Легко видеть, что цепы имеют одинаковый граф:



Тем не менее, теорема 2 неверна, так как алгебры $M_{2n}(\mathbf{R})$ и $M_n(\mathbf{H})$ не изоморфны (см. [3]).

Замечание 2. Все результаты в комплексном случае получены В.Джонсоном [2].

Литература.

1. Li Bing-Ren. Real operator algebras.World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2003. 241p.
2. Jones V., Sunder V.S. Introduction to Subfactors, Lon. Mat. Soc., 234, (1997), 162.
3. Ayupov Sh.A., Rakhimov A.A., Usmanov Sh.M. Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras.The Book:Kluwer Academic Publishers, MAIA,(1997),V.418,235p.

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Курганов К.А., Шодиев О.Н.

Национальный Университет Узбекистана

В симплексе $S^2=\{u=(x,y,z): x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z=1\}$ расмотрим следующие операторы:

$$V_0:\begin{cases} x'=x[x^3+4(x^2y+y^3+xyz+y^2z+yz^2)+6xy^2] \\ y'=y[y^3+4(y^2z+z^3+xyz+x^2z+xz^2)+6yz^2] \\ z'=z[z^3+4(xz^2+x^3+xyz+x^2y+xy^2)+6zx^2] \end{cases},$$

$$V_1:\begin{cases} x'=x[x^3+4(x^2z+z^3+xyz+y^2z+yz^2)+3(xy^2+xz^2)] \\ y'=y[y^3+4(xy^2+x^3+xyz+x^2z+xz^2)+3(x^2y+yz^2)] \\ z'=z[z^3+4(yz^2+y^2z+xyz+x^2z+xz^2)+3(x^2z+y^2z)] \end{cases}.$$

Каждый из этих операторов имеет 4 неподвижных точек: $M_1(1;0;0)$, $M_2(0;1;0)$, $M_3(0;0;1)$ и $C(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3})$.

Утверждение 1. Для операторов V_0, V_1 верны следующие утверждения:
1) если $u^0\in x=1-t,\ y=t,\ z=0$, то траектории сходятся к M_2;
2) если $u^0\in x=0,\ y=1-t,\ z=t$, то траектории сходятся к M_3;
3) если $u^0\in x=t,\ y=0,\ z=1-t$, то траектории сходятся к M_1.

Разделим симплекс на следующие части:

$$G_1=\{u\in S^2:\ x\geq y\geq z\},\ G_2=\{u\in S^2:\ y\geq x\geq z\},\ G_3=\{u\in S^2:\ y\geq z\geq x\},$$

$$G_4=\{u\in S^2:\ z\geq y\geq x\},\ G_5=\{u\in S^2:\ z\geq x\geq y\},\ G_6=\{u\in S^2:\ x\geq z\geq y\}.$$

Утверждение 2. Если $u^0\in intS^2$, то траектории операторов V_0, V_1 имеют цепочку движения по маршруту

$$G_1\to G_2\to G_3\to G_4\to G_5\to G_6\to G_1.$$

Утверждение 3. Для оператора V_0 существует функция Ляпунова вида:

$$\varphi(u)=(xyz)^{\frac{1}{3}}.$$

Теорема. При любом $u^0\in intS^2$, $u^0\neq c$ траектории оператора $V_0(V_1)$ не сходятся, предельное множество лежит на ∂S^2 и неэргодично (сходятся к c).

Литература

[1] U.U.Jamilov, M.Scheutzow and M.Wilke-Berenguer. On the Random dinamics of Volterra quadratic operators. Ergodic Theory and Dinamical Systems, 37(1):228-243. 2017.

Динамика квадратичных ситохаситических операторов вольтерровекого типа соответствующей "5-странным"турнирам.

Курганов К.А., Тухтамешова Ф.Г

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
fayoza.to‘xtamisheva0195@gmail.com

Известно, квадратичные стохаситические операторы вольтерровекого типа (к.с.о.в.т) имеет вид:

$$V : {x'}_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i\right), k = 1, ..., m \tag{1}$$

где $|a_{ki}| \leq 1$, $a_{ki} = -a_{ik}$ и

$$x \in S^{m-1} = \left\{x \in R^n, x_i \geq 0, i = 1, m, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\right\} \tag{2}$$

Определение 1. Непрерывный функционал $\varphi : S^{m-1} \to R$ называется функцией Ляпунова для $(1) - (2)$, если для любой начальной точки $x^{(0)} \in S^{m-1}$` существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x^{(n)})$.

В работе [1] доказано существование фукции Ляпунова вида $\varphi(x) = \prod\limits_{i=1}^{m} x_i^{p_i}$, где $p_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$ и $V(p) = p, p(p_1, p_2, ..., p_m)$.

Пусть $a_{ki} \neq 0$ при $k \neq i$. Рассмотрим полный граф c m вершинами пронумерованными числами $1, 2, ..., m$. На ребрах графа зададим направления следкющим образом: ребро соединяющее вершины k и i направлено от $k-$ той вершины k $i-$ той, если $a_{ki} < 0$ и имеет обратное направление, если $a_{ki} > 0$. Полученный ориентированный граф называется турниром к.с.о.в.т $(1) - (2)$ и обозначается через T_m . Через $S(k)$ обозначим количество входящих стрелок в $k-$ тую вершину и $S(k)$ называется числом очков $k-$ той вершины. Набор чисел $S(1), S(2), ..., S(m)$ называется порядком турнира.

Определение 2. Турнир T_m называется "$r-$ странным если существуют такие вершины $i_1, i_2, ..., i_r$, что

1. $S(i_e) \neq S(k)$ для всех $k \neq i_e$, где $e = 1, 2, ..., r$.
2. Если $S(k) > S(i_e)$ для некоторого k, то стрелка соединяющие вершины i_e и k направлена из k в i_e.
3. Если $S(k) < S(i_e)$ для некоторого k, то стрелка соединяющие вершины направлена из i_e в k.
4. $S(i_1) = S(i_2) = ... = S(i_r)$.

Если $r = 1$ турнир называется "странной". К.с.о.в.т. соответствующеи "странной"и "3-странной"турнирам изучены в работах [2] , [3] . Цель настоящей работы состоят в исследовании динамики траекторий к.с.о.в.т. соответствующих "5-странной"турнирам. Для простаты рассмотрим случай $a_{ki} = \pm 1$. Первый "5-странным"турнир имеет порядок

$$1010101010101010999998888888 \tag{3}$$

т.е., если $I_+ = \{k : S(k) > S(i_e)\}, I_- = \{k : S(k) < S(i_e)\}$, то в этом случае $I_+ = I_- = 7$ и они автономно образуют сильные подтурнира.

Теорема 1. *Если "5-странной" турнир имеет порядок* $(3), I_+ = I_-$, *то к.с.о.в.т. имеет функцию Ляпунова вида*

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{7} x_i^{\frac{1}{21}} \prod_{j=8}^{12} x_j^{\frac{1}{15}} \prod_{k=13}^{19} x_k^{\frac{1}{21}}$$

и $\omega(x^0) \in \partial S^{18}$. *Аналогичные резултаты можно получит, если "5-странной" турнир имеет порядок*

$$13131313131313131311111111111999999999$$

или

$$16161616161616161616161613131313131310101010101010101010$$

т.е. верна следующая.

Теорема 2. *Если "5-странном"турнире* $I_+ = I_- = 2m+1 (m = 3, 4, ...)$, *то соответствующий имеет функцию Ляпунова вида* $\varphi(x) = \prod\limits_{i=1}^{2m+1} x_i^{\frac{1}{3(2m+1)}} \prod\limits_{i=2m+2}^{2m+6} x_i^{\frac{1}{15}} \prod\limits_{i=2m+7}^{4m+7} x_i^{\frac{1}{3(2m+1)}}$ *и* $\omega(x^0) \in \partial S^{4m+6}$.

Литературы

1. Ганиходжаев Р.Н, Курганов К.А, Таджиева М.А. Динамика некоторых квадратичных стохастических операторов вольтерровского типа соответствуюших "странным"турнирам. TURIN POLYTECHNIC University in Tashkent. Abstracts of the Republic scientific conferens 2017 ст. 201-202.

2. Ганиходжаев Р.Н. Квадратичние стахастические операторы функции Ляпунова и турниры. Математик сборник 1992 Ташкент 183 номери 8. Ст.129-141.

ДИНАМИКА КВАДРАТИЧНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА В ШЕСТИМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ

Курганов К.А, Юсупов Ф.А

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
www.farrukhyusupovchambil@mail.ru

В симплексе $S^6 = \left\{ x \in R^7 : x_i \geq 0, x = (x_1, x_2, ..., x_7), \sum\limits_{i=1}^{7} x_i = 1 \right\}$ рассмотрим квадратичный стохатческий оператор волтерровского типа (к.с.о.в.т)

$$V: \begin{cases} x'_1 = x_1[1 - a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - a_{14}x_4 + a_{15}x_5 - a_{16}x_6 + a_{17}x_7] \\ x'_2 = x_2[1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3 + a_{24}x_4 - a_{25}x_5 + a_{26}x_6 - a_{27}x_7] \\ x'_3 = x_3[1 - a_{13}x_1 + a_{23}x_2 - a_{34}x_4 + a_{35}x_5 - a_{36}x_6 + a_{37}x_7] \\ x'_4 = x_4[1 + a_{14}x_1 - a_{24}x_2 + a_{34}x_3 - a_{45}x_5 + a_{46}x_6 - a_{47}x_7] \\ x'_5 = x_5[1 - a_{15}x_1 + a_{25}x_2 - a_{35}x_3 + a_{45}x_4 - a_{56}x_6 + a_{57}x_7] \\ x'_6 = x_6[1 + a_{16}x_1 - a_{26}x_2 + a_{36}x_3 - a_{46}x_4 + a_{56}x_5 - a_{67}x_7] \\ x'_7 = x_7[1 - a_{17}x_1 + a_{27}x_2 - a_{37}x_3 + a_{47}x_4 - a_{57}x_5 + a_{67}x_6] \end{cases} \quad (1)$$

где $|a_{ki}| \leq 1$. Введем обозначением:

$\Delta_1 = a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24} + a_{12}a_{34}$, $\Delta_2 = a_{15}a_{23} - a_{13}a_{25} + a_{12}a_{35}$, $\Delta_3 = a_{16}a_{23} - a_{13}a_{26} + a_{12}a_{36}$, $\Delta_4 = a_{17}a_{23} - a_{13}a_{27} + a_{12}a_{37}$, $\Delta_5 = a_{15}a_{24} - a_{14}a_{25} + a_{12}a_{45}$, $\Delta_6 = a_{16}a_{25} - a_{15}a_{26} + a_{56}a_{12}$, $\Delta_7 = a_{17}a_{25} - a_{15}a_{27} + a_{12}a_{57}$, $\Delta_8 = a_{13}a_{45} - a_{14}a_{35} + a_{15}a_{34}$, $\Delta_9 = a_{13}a_{47} - a_{14}a_{37} + a_{17}a_{34}$, $\Delta_{10} = a_{13}a_{67} - a_{16}a_{37} + a_{17}a_{36}$, $\Delta_{11} = a_{14}a_{56} - a_{15}a_{46} + a_{16}a_{45}$, $\Delta_{12} = a_{15}a_{67} - a_{16}a_{57} + a_{17}a_{56}$, $\Delta_{13} = a_{17}a_{24} - a_{14}a_{27} + a_{12}a_{47}$, $\Delta_{14} = a_{17}a_{26} - a_{16}a_{27} + a_{12}a_{67}$, $\Delta_{15} = a_{14}a_{67} - a_{16}a_{47} + a_{17}a_{46}$, $\Delta_{16} = a_{17}a_{45} - a_{15}a_{47} + a_{14}a_{57}$, $\Delta_{17} = a_{26}a_{34} - a_{24}a_{36} + a_{23}a_{46}$, $\Delta_{18} = a_{25}a_{34} - a_{24}a_{35} + a_{23}a_{45}$, $\Delta_{19} = a_{23}a_{47} - a_{24}a_{37} + a_{27}a_{34}$, $\Delta_{20} = a_{23}a_{56} - a_{25}a_{36} + a_{26}a_{35}$, $\Delta_{21} = a_{23}a_{67} - a_{26}a_{37} + a_{27}a_{36}$, $\Delta_{22} = a_{24}a_{56} - a_{25}a_{46} + a_{26}a_{45}$, $\Delta_{23} = a_{25}a_{67} - a_{26}a_{57} + a_{27}a_{56}$, $\Delta_{24} = a_{34}a_{56} - a_{35}a_{46} + a_{36}a_{45}$, $\Delta_{25} = a_{45}a_{37} - a_{35}a_{47} + a_{34}a_{57}$, $\Delta_{26} = a_{46}a_{37} - a_{36}a_{47} + a_{34}a_{67}$, $\Delta_{27} = a_{35}a_{67} - a_{36}a_{57} + a_{37}a_{56}$, $\Delta_{28} = a_{47}a_{56} - a_{57}a_{46} + a_{67}a_{45}$ и

$A = \Delta_{12}\Delta_{22} - \Delta_{11}\Delta_{23} + \Delta_6\Delta_{28}$, $B = \Delta_{23}\Delta_{24} - \Delta_{22}\Delta_{27} + \Delta_{20}\Delta_{28}$, $C = \Delta_9\Delta_{18} - \Delta_8\Delta_{19} + \Delta_1\Delta_{25}$, $D = \Delta_{18}\Delta_{26} - \Delta_{17}\Delta_{25} + \Delta_{19}\Delta_{24}$, $K = \Delta_{12}\Delta_{21} + \Delta_{14}\Delta_{27} - \Delta_{10}\Delta_{23}$, $L = \Delta_{10}\Delta_{28} + \Delta_{12}\Delta_{26} - \Delta_{15}\Delta_{27}$, $M = \Delta_{11}\Delta_{18} - \Delta_8\Delta_{22} + \Delta_5\Delta_{24}$, $N = \Delta_8\Delta_{28} - \Delta_{11}\Delta_{25} + \Delta_{16}\Delta_{24}$, $E = \Delta_1\Delta_7 - \Delta_2\Delta_{13} + \Delta_4\Delta_5$, $F = \Delta_4\Delta_6 - \Delta_7\Delta_8 + \Delta_2\Delta_{14}$, $P = \Delta_1\Delta_{20} - \Delta_2\Delta_{17} + \Delta_3\Delta_{18}$, $Q = \Delta_1\Delta_{21} - \Delta_3\Delta_{19} + \Delta_4\Delta_{17}$

Теорема. *Если в (1)* $a_{ki} > 0(a_{ki} < 0)$, *то существует функция Ляпунова вида*

$$\varphi(x) = (\sqcap_{i=1}^{7} x_i^{\Delta_i})^{\frac{1}{\Delta}}$$

и $\omega(x^{(0)}) \subset \partial S^6$.

Литературы

1. Ганиходжаев Р.Н, Курганов К.А, Таджиева М.А. Динамика некоторых квадратичных стохастических операторов вольтерровского типа соответствуюших "странным"турнирам. TURIN POLYTECHNIC University in Tashkent. Abstracts of the Republic scientific conferens 2017 ст. 201-202.

2. Ганиходжаев Р.Н. Квадратичние стахастические операторы функции Ляпунова и турниры. Математик сборник 1992 Ташкент 183 номери 8. Ст.129-141.

БАЗИС ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ ИНВАРИАНТОВ ГРУППЫ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Муминов К. К.[1], Чилин В. И.[2]

[1] Национальный университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент
[2] Национальный университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент
[1]m.muminov@rambler.ru, [2]vladimirchil@gmail.com

Решении проблемы об эквивалентности путей и кривых, лежащих в конечномерном пространстве, как правило, использует теорию инвариантов линейных групп. Основная задача этой теории формулируется следующим образом. Пусть даны две конечные системы $\{x_i\}_{i=1}^k$, $\{y_i\}_{i=1}^k$ элементов из конечномерного линейного пространства V. Требуется определить необходимые и достаточные условия, обеспечивающие G-эквивалентность заданных наборов при действии подгруппы G группы $GL\,(V)$ всех обратимых линейных преобразований пространства V, т.е. необходимые и достаточные условия, устанавливающие справедливость равенств $y_i = g(x_i)$ для всех $i = 1, \dots, k$, и некоторого $g \in G$.

При решении такой задачи необходимо, с одной стороны, установить конечную порождаемость кольца всех полиноминальных инвариантов группы G , а с другой стороны, найти явный вида конечного рационального базиса соответствующего поля рациональных инвариантов группы G. Это означает, что решение задачи об G-эквивалентности конечных наборов элементов из V осуществляется с помощью нахождения конечных наборов G-инвариантных рациональных функций, порождающих все поле рациональных инвариантов группы G.

При решение задач дифференциальной геометрии, относящихся к классификации кривых, возникает похожая ситуация. Пусть G-подгруппа группы $GL\,(V)$, γ и β — две гладкие кривые, лежащие в V. Требуется найти необходимые и достаточные условия, обеспечивающие G-эквивалентность кривых γ и β, т.е. необходимые и достаточные условия, устанавливающие справедливость равенства $\beta = g\,(\gamma)$ для некоторого $g \in G$. С помощью методов теории дифференциальных инвариантов, в работах Дж.Х.Хаджиева, Р.Г.Арипова, К.К.Муминова и других получены эффективные критерии G-эквивалентности путей и кривых для действий ортогональных, симплектических и псевдоортогональных групп (изложение этих результатов см., например, в монографии [1]).

Основным шагом в решении указанных выше задач дифференциальной геометрии является нахождение в явном виде конечного базиса трансцендентности соответствующего поля рациональных инвариантов группы G. В настоящей заметке такая задача решается для группы Гейзенберга, действующей в трехмерном линейном пространстве.

Пусть $\mathbb{R}^3$ — трехмерное линейное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Элементы из $\mathbb{R}^3$ представляем в виде трехмерных вектор-столбцов. Пусть $GL(3,\mathbb{R})$ группа всех обратимых линейных преобразований пространства линейного $\mathbb{R}^3$. Эта группа отождествляется с группой всех обратимых 3×3-матриц. Действие подгруппы G группы $GL(3,\mathbb{R})$ в $\mathbb{R}^3$ определятся как обычное умножение матрицы на вектор-столбец.

Обозначим через $\mathbb{R}\,[x_1, x_2, x_3]$ алгебру всех многочленов от счетного числа переменных $x_1, x_2, x_3,\ x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, ..., x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}...$ над полем $\mathbb{R}$. Записав набор $\{x_1, x_2, x_3\}$ коротко через $\vec{x}$ будем алгебру $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ обозначать через $\mathbb{R}[\vec{x}]$. Положим $d(x_i) = x_i^{(1)}$, $d(x_i^{(k)}) = x_i{}^{(k+1)}$, $i = 1, ..., n$, $k = 1, 2, ...$, $d(\lambda) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Отображение d однозначно продолжается до дифференцирования в алгебре $\mathbb{R}[\vec{x}]$, наделяя эту алгебру структурой дифференциального кольца. Затем дифференцирование d, заданное на дифференциальном кольце $\mathbb{R}[\vec{x}]$, единственным образом продолжается до дифференцирования на соответствующее поле частных кольца $\mathbb{R}[\vec{x}]$. Это поле частных называется дифференциальным полем (d-полем) дифференциально рациональных функций и обозначается через $\mathbb{R}\langle\vec{x}\rangle$.

Если G — подгруппа в $GL(3, \mathbb{R})$ и $f\langle g\vec{x}\rangle = f\langle\vec{x}\rangle$ для всех $g \in G$, то d-рациональная функция $f\langle\vec{x}\rangle \in \mathbb{R}\langle\vec{x}\rangle$ называется G-инвариантной. Множество всех G-инвариантных d-рациональных функций обозначается через $\mathbb{R}\langle\vec{x}\rangle^G$. Известно, что $\mathbb{R}\langle\vec{x}\rangle^G$ является дифференциальным подполем в дифференциальном поле $\mathbb{R}\langle\vec{x}\rangle$ [2].

Элементы $f_1, \ldots, f_m$ из d-поля $\mathbb{R}\langle\vec{x}\rangle^G$ называются d-алгебраически зависимыми, если существует такой ненулевой многочлен $p[x_1, \ldots, x_m]$ из $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$, что $p[f_1, \ldots, f_m] = 0$. В противном случае система элементов $f_1, \ldots, f_m$ называется d-алгебраически независимой.

Подмножество L элементов d-поля $\mathbb{R}\langle\vec{x}\rangle^G$ называют d-алгебраически независимым, если любое конечное подмножество из L является d-алгебраически независимым. Любое максимальное d-алгебраически независимое множество элементов d-поля $\mathbb{R}\langle\vec{x}\rangle^G$ называют базисом трансцендентности d-поля $\mathbb{R}\langle\vec{x}\rangle^G$. В силу леммы Цорна, в d-поле $\mathbb{R}\langle\vec{x}\rangle^G$ всегда существует базис трансцендентности.

Группа Гейзенберга есть подгруппа Nil в группе $GL(3, \mathbb{R})$, состоящая из всех матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Если $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ стандартный базис в $\mathbb{R}^3$, то $ge_1 = e_1$ для всех $g \in Nil$. Кроме того, для многочлена $p_1\langle\vec{x}\rangle = x_3$ верно равенство $p_1\langle g\vec{x}\rangle = p_1\langle\vec{x}\rangle$ для всех $g \in Nil$, т.е. многочлен $p_1\langle\vec{x}\rangle = x_3$ является Nil-инвариантным. Легко проверяется, что следующие многочлены также являются Nil-инвариантными:

$$p_2\langle\vec{x}\rangle = \begin{vmatrix} x_2 & x_2^{(1)} \\ x_3 & x_3^{(1)} \end{vmatrix} = x_2 \cdot x_3^{(1)} - x_3 \cdot x_2^{(1)}; \quad p_3\langle\vec{x}\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2 & x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \\ x_3 & x_3^{(1)} & x_3^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Следующая теорема устанавливает явный вид одного из базисов трансцендентности дифференциального поля $\mathbb{R}\langle\vec{x}\rangle^{Nil}$ дифференциальных рациональных инвариантов группы Гейзенберга Nil.

Теорема 1. *Конечный базис трансцендентности в дифференциальном поле $\mathbb{R}\langle\vec{x}\rangle^{Nil}$ образуют многочлены $p_1\langle\vec{x}\rangle$, $p_2\langle\vec{x}\rangle, p_3\langle\vec{x}\rangle$.*

Из теоремы 1, в частности, следует, что дифференциальное поле $\mathbb{R}\langle\vec{x}\rangle^{Nil}$ является конечнопорожденным полем.

Литература

1. *Муминов К.К., Чилин В.И.* Эквивалентность кривых в конечномерных пространствах. LAP LAMBERT Academic Publishing. Deutschland (Германия). 2015.

2. *Хаджиев Дж.* Приложение теории инвариантов к дифференциальной геометрии кривых. Ташкент. ФАН. 1988.

ОПИСАНИЕ РАЗРЕШИМЫХ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА С ПЯТИМЕРНЫМ КВАЗИ-ФИЛИФОРМНЫМ ЛИЕВЫМ НИЛЬРАДИКАЛОМ МАКСИМАЛЬНОЙ ДЛИНЫ

Саттаров А.М., Халкулова Х.А.

saloberdi90@mail.ru, xalkulova@gmail.com
Институт Математики им. В.И. Романовского

Алгебра Лейбница - это неассоциативная алгебра с билинейным произведением, удовлетворяющая так называемому тождеству Лейбница, которое превращает правое умножение на элемент алгебры в дифференцирование этой алгебры. Впервые этот класс алгебр был определен в работе А.М. Блоха, однако активный интерес к ним появился после работ Ж.-Л. Лоде и Т. Пирашвили, а именно Ж.-Л. Лоде впервые использовал термин алгебры Лейбница.

В данной работе получено описание комплексных разрешимых алгебр Лейбница с пятимерным квазифилиформным нильрадикалом максимальной длины.

Определение 1. Алгебра L над полем F называется алгеброй Лейбница, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество:

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z]] - [[x,z],y],$$

где $[-,-]$ умножение на L.

Пусть $L-$комплекная алгебра Лейбница. Для произвольной алгебры Лейбница L определим следующие ряды:

$$L^{[1]} = L, \quad L^{[k+1]} = [L^{[k]}, L^{[k]}]; \quad L^1 = L, \quad L^{k+1} = [L^k, L^1], \ k \geq 1.$$

Определение 2. Алгебра Лейбница L называется *разрешимой* (соответственно, *нильпотентной*), если существует $s \in N$ такое, что $L^{[s]} = \{0\}$ (соответственно, $L^s = \{0\}$).

Максимальный нильпотентный идеал называется нильрадикалом.

Пусть $L-$ Z-градуированная алгебра Лейбница с конечным числом ненулевых пространств. Будем говорить, что нильпотентная алгебра Лейбница L допускает связное градуирование, если $L = V_{k_1} \oplus V_{k_2} \oplus \cdots \oplus V_{k_t}$, где $V_i \neq 0$ для всех i $(k_1 \leq i \leq k_t)$.

Число $len(L) = k_t - k_1 + 1$ называется длиной градуировки. В дальнейшем $l(L) = max\{len(L) = k_t - k_1 + 1 \mid$ градуирование $L = V_{k_1} \oplus V_{k_2} \oplus \cdots \oplus V_{k_t}$ связно$\}$ будем называть длиной алгебры Лейбница L.

Определение 3. Алгебра Лейбница L называется алгеброй максимальной длины, если $l(L) = dimL$.

Теорема 1. Пусть $L-$ пятимерная алгебра Ли максимальной длины. Тогда L изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$G^1 : [e_1,e_2] = -[e_2,e_1] = e_3, \ [e_1,e_3] = -[e_3,e_1] = e_4, \ [e_2,e_3] = -[e_3,e_2] = e_5;$$

$$G^2 : [e_1,e_2] = -[e_2,e_1] = e_4, \ [e_1,e_4] = -[e_4,e_1] = e_5, \ [e_2,e_3] = -[e_3,e_2] = e_5.$$

Теорема 2. Пусть $L-$ шестимерная разрешимая алгебра Лейбница, нильрадикал которой изоморфен G^1. Тогда существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, x\}$ алгебры L такой, что умножение в этом базисе имеет один из следующих видов:

$$L_1 : \begin{cases} [e_1,x] = -[x,e_1] = e_1, & [e_2,x] = -[x,e_2] = -2e_2, \quad [e_3,x] = -[x,e_3] = -e_3, \\ [e_5,x] = -[x,e_5] = -3e_5, & [x,x] = \beta_4 e_4, \qquad \beta_4 \in \{0,1\}, \end{cases}$$

$$L_2 : \begin{cases} [e_1,x] = -[x,e_1] = e_1, & [e_2,x] = -[x,e_2] = -\frac{1}{2}e_2, \\ [e_3,x] = -[x,e_3] = \frac{1}{2}e_3, & [e_4,x] = -[x,e_4] = \frac{3}{2}e_4, \quad [x,x] = \beta_5 e_5, \ \beta_5 \in \{0,1\}, \end{cases}$$

$$L_3 : \begin{cases} [e_1,x] = -[x,e_1] = e_1, & [e_2,x] = -[x,e_2] = \alpha e_2, \quad [e_3,x] = -[x,e_3] = (\alpha+1)e_3 \\ [e_4,x] = -[x,e_4] = (\alpha+2)e_4, & [e_5,x] = -[x,e_5] = (2\alpha+1)e_5, \quad \alpha \neq -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \end{cases}$$

$$L_4 : \begin{cases} [e_1,x] = -[x,e_1] = e_1, & [e_2,x] = -[x,e_2] = -e_2 + \alpha_{2,5}e_5, \\ [e_4,x] = -[x,e_4] = e_4, & [e_5,x] = -[x,e_5] = -e_5, \ \alpha_{2,5} \in \{0,1\}, \end{cases}$$

$$L_5:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1+\alpha_{1,5}e_5, & [e_3,x]=-[x,e_3]=e_3,\\ [e_4,x]=-[x,e_4]=2e_4, & [e_5,x]=-[x,e_5]=e_5,\ \alpha_{1,5}\in\{0,1\},\end{cases}$$

$$L_6:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1+e_2, & [e_2,x]=-[x,e_2]=e_2, \quad [e_3,x]=-[x,e_3]=2e_3,\\ [e_4,x]=-[x,e_4]=3e_4+e_5, & [e_5,x]=-[x,e_5]=3e_5.\end{cases}$$

Теперь приведем описание разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом G^2 и одномерным дополняющем подпространством.

Теорема 3. Пусть $L-$ шестимерная разрешимая алгебра Лейбница, нильрадикал которой изоморфен G^2. Тогда существует базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,x\}$ алгебры L такой, что умножение в этом базисе имеет один из следующих видов:

$$L_7:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, \quad [e_2,x]=-[x,e_2]=-2e_2,\\ [e_3,x]=-[x,e_3]=2e_3, \quad [e_4,x]=-[x,e_4]=-e_4, \quad [x,x]=\delta e_5,\ \delta\in\{0,1\},\end{cases}$$

$$L_8:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, \quad [e_3,x]=-[x,e_3]=2e_3+a_{3,5}e_5,\\ [e_4,x]=-[x,e_4]=e_4, \quad [e_5,x]=-[x,e_5]=2e_5,\ \alpha_{3,5}\in\{0,1\},\end{cases}$$

$$L_9:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, & [e_2,x]=-[x,e_2]=\mu_2e_2, \quad [e_3,x]=-[x,e_3]=2e_3,\\ [e_4,x]=-[x,e_4]=(1+\mu_2)e_4, & [e_5,x]=-[x,e_5]=(2+\mu_2)e_5, \quad \mu_2\neq-2,0,\end{cases}$$

$$L_{10}:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1+e_2, \quad [e_2,x]=-[x,e_2]=e_2,\\ [e_3,x]=-[x,e_3]=2e_3-e_4, \quad [e_4,x]=-[x,e_4]=2e_4, \quad [e_5,x]=-[x,e_5]=3e_5.\end{cases}$$

Теорема 4. Пусть L – разрешимая алгебра Лейбница, нильрадикал которой пятимерная квазифилиформная алгебра Ли максимальной длины и размерность дополняющего пространства равно двум. Тогда L изоморфна одной из следующих неизоморфных алгебр:

$$L(G^1):\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, & [e_3,x]=-[x,e_3]=e_3, & [e_4,x]=-[x,e_4,]=2e_4,\\ [e_5,x]=-[x,e_5]=e_5, & [e_2,y]=-[y,e_2]=e_2, & [e_3,y]=-[y,e_3]=e_3,\\ [e_4,y]=-[y,e_4]=e_4, & [e_5,y]=-[y,e_5]=2e_5,\end{cases}$$

$$L(G^2):\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, & [e_3,x]=-[x,e_3]=2e_3, & [e_4,x]=-[x,e_4]=e_4,\\ [e_5,x]=-[x,e_5]=2e_5, & [e_2,y]=-[y,e_2]=e_2, & [e_4,y]=-[y,e_4]=e_4,\\ [e_5,y]=-[y,e_5]=e_5.\end{cases}$$

Литература

1. L. M. Camacho, E. M. Cañete, J. R. Gómez, B. A. Omirov, *Quasi-filiform Leibniz algebras of maximum length.* Sibirsk. Mat. Zh., 2011, Vol. 52(5), p. 1058– 1073.
2. J.M. Casas, M.A.Insua, M.Ladra, S.Ladra, *An algorithm for the classification of 3-dimensional complex Leibniz algebras.* Linear Algebra and its Applications, 2012, Vol. 436, p. 3747–3756.
3. J.R. Gómez, A. Jiménez-Merchán, J.Reyes, *Quasi-filiform Lie algebras of maximum length.* Linear Algebra and its Applications, 2012, Vol. 335, p. 119–135.
4. E.M. Cañete, A.Kh. Khudoyberdiyev, *The classification of 4-dimensional Leibniz algebras.* Linear Algebra and its Applications, 2013, Vol. 439, p.273–288.
5. К.К.Абдурасулов, Х.А.Халкулова, Разрешимые алгебры Лейбница с пятимерным квазифилиформным нильрадикалом максимальной длины. Вестник НУУз, 2017, сдано.

SODDA LEYBNITS ALGEBRASINING LOKAL DIFFERENSIALLASHI

Sultonova D.Y.

O'zbekiston Milliy universiteti, O'zbekiston, Toshkent
dilrabo_sultonova@mail.ru.

Lokal differensiallash tushunchasi Sh.A.Ayupov, K.K.Kudaybergenovlarning ishlarida *Li* algebralari uchun kiritilib [1], ushbu ishda sodda Li algebraning ixtiyoriy lokal differensiallashi oddiy ma'noda differensiallash bo'lishi isbotlangan.

Leybnits algebralari *Li* algebralarining umumlashmasi hisoblanib, fransuz matematigi J.L.Loday tomonidan fanga kiritilgan [2]. Leybnits algebralari *Li* algebrasining umumlashmasi bo'lganligi uchun, Li algebralari nazariyasidan ma'lum bo'lgan bir qancha natijalar Leybnits algebrasi uchun davom ettiriladi.

Ushbu ishda uch o'lchamli sodda *Li* algebrasi orqali hosil qilinadigan Leybnits algebrasining lokal differensiallashlari o'rganilgan

Ta'rif 1. Agar F maydon ustida berilgan L algebrada $\forall x, y, z \in L$ elementlar uchun quyidagi ayniyat bajarilsa

$$[[x,y],z] = [x,[y,z]] + [[x,z],y] \tag{1}$$

u holda L algebra Leybnits algebrasi deyiladi.

Bizga *Li* bo'lmagan L - Leybnits algebrasi berilgan bo'lsin. Quyidagi

$$I = span\{[x,x] | x \in L\}$$

to'plam L algebraning ikki tomonli ideali bo'ladi. L/I faktor algebrasi esa *Li* algebrasini tashkil qiladi. Endi algebraning differensiallashi tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif 2. $L-$Leybnits algebrasi va $d : L \to L$ chiziqli akslantirish berilgan bo'lsin. Agar d chiziqli akslantirish uchun

$$d([x,y]) = [d(x),y] + [x,d(y)] \qquad \forall\ x,y \in L$$

tenglik o'rinli bo'lsa, bu chiziqli akslantirish L Leybnits algebrasining differensiallashi deyiladi.

Ta'rif 3. $\triangle : L \to L$ chiziqli akslantirish bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x \in L$ element uchun shunday

$$d_x : L \to L$$

differensiallash mavjud bo'lib, $\triangle(x) = d_x(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, $\triangle$ chiziqli akslantirish L Leybnits algebrasining lokal differensiallashi deyiladi.

Teorema 1 ([4]). L algebra I bo'yicha faktor algebrasi L/I uch o'lchamli sodda *Li* algebrasi sl_2 ga izomorf bo'ladigan sodda Leybnits algebrasi bo'lsin. U holda L da shunday $\{e, h, f, x_0, x_1, \dots, x_m\}$ bazis mavjud bo'lib, L dagi ko'paytmalar quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$[e,h] = 2e, \qquad [f,h] = -2f, \qquad [e,f] = h,$$
$$[h,e] = -2e, \qquad [h,f] = 2f, \qquad [f,e] = -h,$$
$$[x_k,e] = -k(m+1-k)x_{k-1}, \qquad 1 \le k \le m,$$
$$[x_k,f] = x_{k+1}, \qquad 0 \le k \le m-1,$$
$$[x_k,h] = (m-2k)x_k, \qquad 0 \le k \le m.$$

Ushbu Leybnits algebrasining differensiallashlari quyidagi teoremada tasniflangan.

Teorema 2 ([3]). Aytaylik L algebra $L/I \cong sl_2$ shartni qanoatlantiruvchi $m+4$ o'lchamli Leybnis algebrasi bo'lsin. U holda uning differensiallashlari quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$d = R_a + \alpha + \triangle$$

Bunda $a \in \langle e,f,h \rangle, \ \ \alpha\langle e,f,h \rangle = 0, \ \ \alpha(x_k) = \lambda x_k, \ \ 0 \le x \le m, \ \ \lambda \in \mathbb{C}$

$m \ne 2$ uchun $\triangle(x_k) = 0, \ \ \triangle(e) = \triangle(f) = \triangle(h) = 0,$

$m = 2$ uchun $\triangle(x_k) = 0, \ \ \triangle(e) = \mu x_0, \ \ \triangle(f) = \mu x_2, \ \ \triangle(h) = \mu x_1 \ \ \mu \in \mathbb{C}$

Ushbu ishning asosiy natijasi quyidagi teoremada keltirilgan.

Teorema 3. Aytaylik L algebra $L/I \cong sl_2$ shartni qanoatlantiruvchi $m+4$ $(m \ne 2)$ o'lchamli Leybnits algebrasi bo'lsin U holda uning ixtiyoriy lokal differensiallashi oddiy ma'noda differensiallash bo'ladi.

Adabiyotlar

1. *Shavkat Ayupov, Karimbergen Kudaybergenov.* Local derivations on finite-dimensional Lie algebras. arXiv:1508.03939v1.

2. *Loday J.-L.* Une version non commutative des algebres de Lie: les algebres de Leibniz, L'Enseignement Mathematique 39 (1993), 269-292.

3. *Rakhimov I.S., Masutova K.K., Omirov B.A.* On derivations of semisimple Leibniz algebras, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society. 2015.

4. *Rakhimov I.S., Omirov B.A., Turdibaev R.M.* On description of Leibniz algebras corresponding to Algebras and Representation Theory. vol. 16(5), 2013, p. 1507 - 1519

ОБ ОЦЕНКЕ ГРАНЕЙ ОДНОЙ БЛОЧНО-ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ РАЗМЕРА 2×2

Эшкабилов Ю.Х.[1], Расулов Т.Х.[2], Гайбуллаев Р.К.[3]

[1] Каршинский государственный университет, Узбекистан, Карши
[2] Бухарский государственный университет, Узбекистан, Бухара
[3] Национальный Университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент
[1]`yusup62@rambler.ru`, [2]`rth@mail.ru`, [3]`r_gaybullayev@mail.ru`

Проблемы, связанные с изучением спектральных свойств блочно-операторных матриц, элементы которой являются линейными операторами в банаховом или гильбертовом пространствах, обычно возникают в задачах физики твердого тела [1], квантовой теории поля [2], статистической физики [3] и других областях математики.

В данной работе рассматривается ограниченная и самосопряженная блочно-операторная матрица $\mathcal{A}$ размера 2×2, действующая в прямой сумме одночастичного и двухчастичного подпространств фоковского пространства. Описано местоположение спектра оператора $\mathcal{A}$ через спектр соответствующих семейств обобщенных моделей Фридрихса. Установлено, что спектр $\mathcal{A}$ является чисто существенным и оно состоит из объединения не более, чем трех отрезков. Получена оценка для нижних граней двухчастичных и трехчастичных ветв спектра оператора $\mathcal{A}$.

Пусть $\Omega := [a, b]$ и $\mathcal{H}_n := L_2(\Omega^n)$, $n = 1, 2$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на Ω^n, $n = 1, 2$. Обозначим через $\mathcal{H}$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, т.е. $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ называются одночастичным и двухчастичным подпространствами фоковского пространства $\mathcal{F}(L_2(\Omega))$ по $L_2(\Omega)$, соответственно, где $\mathcal{F}(L_2(\Omega)) := \mathbf{C} \oplus L_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega^2) \oplus \cdots$.

Рассмотрим гамильтониан $\mathcal{A}$, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ как блочно-операторная матрица размера 2×2 :

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{12}^* & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix},$$

где матричные элементы $\mathcal{A}_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i, j = 1, 2$ определяются по формулам

$$(\mathcal{A}_{11}f_1)(x) = \varphi(x)f_1(x), \quad (\mathcal{A}_{12}f_2)(x) = \varepsilon \int_{\Omega} v(t)f_2(x,t)dt,$$

$$(\mathcal{A}_{22}f_2)(x,y) = \psi(x,y)f_2(x,y), \quad f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 1, 2.$$

Здесь $\varepsilon > 0$– фиксированное вещественное число (параметр "взаимодействия"), $\varphi(\cdot)$, $v(\cdot)$ и $\psi(\cdot,\cdot)$ – вещественнозначные непрерывные функции на Ω и Ω^2, соответственно.

С целью изучения спектра оператора $\mathcal{A}$ введем семейство операторов $\mathcal{A}(x)$, $x \in \Omega$, действующее в $\mathbf{C} \oplus L_2(\Omega)$ как

$$\mathcal{A}(x) := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{00}(x) & \mathcal{A}_{01} \\ \mathcal{A}_{01}^* & \mathcal{A}_{11}(x) \end{pmatrix}$$

с матричными элементами:

$$\mathcal{A}_{00}(x)f_0 = \varphi(x)f_0, \, \mathcal{A}_{01}f_1 = \varepsilon \int_{\Omega} v(t)f_1(t)dt,$$

$$(\mathcal{A}_{11}(x)f_1)(y) = \psi(x,y)f_1(y),\ f_0 \in \mathbf{C},\ f_1 \in L_2(\Omega).$$

Очевидно, что семейство операторов $\mathcal{A}(x)$, $x \in \Omega$ ограничено и самосопряжено в $\mathbf{C} \oplus L_2(\Omega)$. Известно, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}(x)) = [m(x); M(x)]$, где числа $m(x)$ и $M(x)$ определяются следующим образом:

$$m(x) := \min_{y\in\Omega} \psi(x,y), \quad M(x) := \max_{y\in\Omega} \psi(x,y).$$

При каждом фиксированном $x \in \Omega$ определим регулярную в $\mathbf{C} \setminus [m(x); M(x)]$ функцию

$$\Delta(x\,; z) := \varphi(x) - z - \varepsilon^2 \int_\Omega \frac{v^2(t)dt}{\psi(x,t) - z}.$$

Положим $m_0 := \min\limits_{x,y\in\Omega} \psi(x,y)$, $\quad M_0 := \max\limits_{x,y\in\Omega} \psi(x,y)$.

Теорема 1. *Оператор $\mathcal{A}$ имеет чисто существенный спектр и имеет место равенство $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup_{x\in\Omega} \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}(x)) \bigcup [m_0; M_0]$, где*

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}(x)) = \{z \in \mathbf{C} \setminus [m(x); M(x)] :\ \Delta(x\,; z) = 0\}.$$

Более того, множество $\sigma(\mathcal{A})$ представляет собой объединение не более чем трех отрезков.

Допустим, что множества

$$\Omega_{\min} := \{(x,y) \in \Omega^2 :\ m_0 = \psi(x,y)\} \subset \Omega^2, \quad \Omega_{\max} := \{(x,y) \in \Omega^2 :\ M_0 = \psi(x,y)\} \subset \Omega^2$$

конечны. Из непрерывности функции $\psi(\cdot,\cdot)$ на компактном множестве Ω^2 вытекает, что существуют точки $(x_0,y_0),(x_1,y_1) \in \Omega^2$ такие, что $m_0 = \psi(x_0,y_0)$ и $M_0 = \psi(x_1,y_1)$. Следовательно, $\Omega_{\min} \neq \emptyset$ и $\Omega_{\max} \neq \emptyset$.

Для удобства положим $n := \mathrm{card}(\Omega_{\min})$, $k := \mathrm{card}(\Omega_{\max})$ и

$$\Omega_{\min} = \{(x_{\min}^{(i)}, y_{\min}^{(i)})\}_{i=1}^n, \quad 1 \le n < \infty; \quad \Omega_{\max} = \{(x_{\max}^{(j)}, y_{\max}^{(j)})\}_{j=1}^k, \quad 1 \le k < \infty.$$

Обсуждаем следующие две случая:

1) при некотором $i \in \{1,\ldots,n\}$ интеграл

$$\int_\Omega \frac{v^2(t)dt}{\psi(x_{\min}^{(i)},t) - m_0} \tag{1}$$

расходится;

2) для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$ интеграл (1) сходится.

Положим

$$E_{\min} := \min\{\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}, \quad \sigma_{\mathrm{two}}(\mathcal{A}) := \bigcup_{x\in\Omega} \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}(x)) \quad \text{и} \quad \sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}) := [m_0; M_0].$$

Тогда $E_{\min}$. Число $E_{\min}$ будем называть нижней грани (краем) спектра оператора $\mathcal{A}$.

Теорема 2. 1) *Пусть выполняется один из следующих условий:*

1.1) *при некотором $i \in \{1,\ldots,n\}$ интеграл (1) расходится;*

1.2) *при всех $i \in \{1,\ldots,n\}$ интеграл (1) сходится и $\min\limits_{x\in\Omega} \Delta(x\,; m_0) < 0$.*

Тогда $E_{\min} = \min \sigma_{\mathrm{two}}(\mathcal{A}) < \min \sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}) (= m_0)$.

2) *Если при всех $i \in \{1,\ldots,n\}$ интеграл (1) сходится и $\min\limits_{x\in\Omega} \Delta(x\,; m_0) \ge 0$, то $E_{\min} = m_0$.*

Литература

1. *Mogilner A. I.*Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: problems and results // Advances in Sov. Math. 1991. V. 5, P. 139-194.

2. *Фридрихс К. О.* Возмущения спектра операторов в гильбертовом пространстве. Москва: Мир, 1972. 297 p.

3. *Malishev V. A., Minlos R. A.* Linear infinite-particle operators. Translations of Mathematical Monographs. 143, AMS, Providence, RI, 1995.

7. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

NUMERICAL METHODS

AND MATHEMATICAL MODELING

ALGEBRAIC CRYPTANALYSIS OF SIMPLIFIED RIJNDAEL ALGORITHM

Aloev R.[1], **Juraev SH.**[2],

[1] National University of Uzbekistan, Uzbekistan, Tashkent
[2] National University of Uzbekistan, Uzbekistan, Tashkent
[1]aloevr@mail.ru, [2]shaxboz0594@mail.ru

In this article, using the simplified RIJNDAEL encryption algorithm, using cryptographic analytics using the XL (Extended Linearization) algebraic method, using a pair of coded text and open text, and the initial (12 bits) key and round keys (12 bit)used in this encryption algorithm . The algorithm of restoration.

Cryptanalysis has been long time based on statistical approaches. Thus, statistical methods of cryptanalysis as a linear and differential for the implementation of an attack requires a large number of open texts and cipher texts. In addition, modern encryption algorithms were developed taking into account the provision of resistance to such attacks. The relevance of algebraic methods of cryptanalysis is based on the possibility of breaking with their help encryption algorithms in the presence of cryptanalyst of just one open text / cipher text pair. Also important

Note that these methods are applicable to persistent modern ciphers, such as Rijndael encryption algorithms, Serpent. In that work, The development and investigation of the XL method of algebraic cryptanalysis. The study was carried out using the developed software application that allows the generation of systems equations for nonlinear transformations, namely for S-blocks replacement. The essence of this method is to obtain equations describing non-linear transformations of the replacement of S-blocks, followed by solving the found systems of equations and obtaining an encryption key. This method of cryptanalysis refers to attacks with a known open text, so one pair of open text / cipher text. As a result of the attack, the cryptanalyst calculates the secret key. Algebraic methods of cryptanalysis consist of the following stages: - compilation of a nonlinear system of equations describing transformations in S-blocks;

- solution of a nonlinear system. Let us consider in more detail the first stage of algebraic cryptanalysis. For ciphers like Rijndael, with the replacement table for S-blocks is used. We shall confine ourselves to by considering monomials consisting of a product of two variables. Then the equations describing the operation of S-blocks have the form [1]:

$$\sum \alpha_{ij}x_ix_j + \sum \beta_{ij}y_iy_j + \sum \gamma_{ij}x_iy_j + \sum \delta_i x_i + \sum \varepsilon_i y_i + \tau = 0$$

- the input value of the S-block is represented as the sum modulo 2 of the open text and initial key:

$$x = a + k_n$$

- the output value of the S-block is written as the result of the sum modulo 2 of the cipher text and the round key:

$$y = z + k_r$$

From these replacements, we express the initial and round keys through the known open text, cipher text, inputs and outputs of S-blocks:

$$k_n = a + x$$

$$k_r = z + y$$

By the condition of attack, one open pair is available to the cryptanalyst text / cipher text. Set the clear text a = 010 101 001 110 and corresponding to its cipher text is s = 111 011 100 101. Then the calculation keys is executed as follows:

$$k_{n0} = a_0 + x = 010 + 110 = 100, \quad k_{n1} = a_1 + x = 101 + 110 = 011,$$

$$k_{n2} = a_2 + x = 001 + 110 = 111, \quad k_{n3} = a_3 + x = 110 + 110 = 000,$$

$$k_{r0} = z_0 + y = 111 + 001 = 110, \quad k_{r1} = z_1 + y = 011 + 001 = 010,$$

$$k_{r2} = z_2 + y = 100 + 001 = 101, \quad k_{r3} = z_3 + y = 101 + 001 = 100,$$

$$k_n(initial\ key) = 100011111000$$

$$k_r(round\ key) = 110010101100$$

MATHEMATICAL MODELING OF CHARGES GENERATION RATE IN THE SiC* SEMICONDUCTOR

Akimchenko A. A., Chepurnov V. I., Dolgopolov M. V., Dolgopolov N. M., Gurskaya A. V., Kuznetsov O. V. [1]

[1] *Samara University, Samara, Russia,* mikhaildolgopolov68@gmail.com

The miniature and low-power devices with long service life in hard operating conditions like beta-decay energy converters indeed as power supply for integrated MEMS and NEMS are actively modeled by several groups nowdays. The idea of the C-14 atoms including in Silicon Carbide porous structure molecules by endotaxy technology results to increase the efficiency of the converter due to the greater intensity of electron-hole pairs generation rate in the space charge region and due to the larger volume charge density.

The development of energy-saving technologies, the functioning of the MEMS devices, the reliability of their operation for a longer time in offline conditions led to the search of appropriate means of generating energy for them. Especially in trends of the microelectronics into the 30 micron size benchmark active microprocessor board that hosts all the necessary devices.

Authors will discuss how to model the power source for MEMS/NEMS devices based on por-SiC/Si porous structure, which is to be tested and used as the beta-decay energy converter of radioCarbon-14 into electrical energy. This involves Silicon Carbide obtaining by self-organizing mono 3C-SiC endotaxy way on the Si substrate [1, 2]. The key interest in the present aspect has the systematic optimization of main parameters that affect the operational efficiency of the betavoltaic current source [3].

The non-porous layer of n-type is determined by under the porous SiC, which is inevitably formed on the bottom of the pores and in fact is non-porous, i. e. p-n junction is the place to be in the right picture in Figure 1 is still not in the porous layer, and indirectly associated with it and the space-charge region (SCR), between non-porous layers.

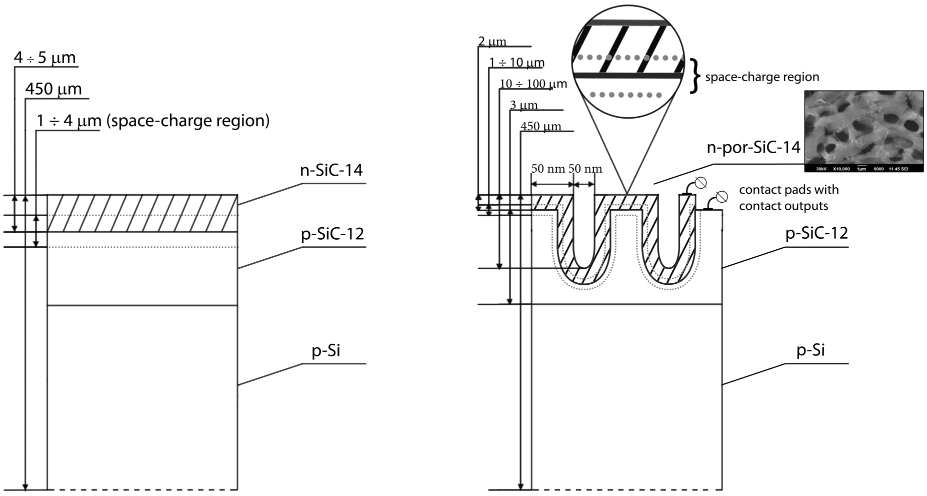


Рис. 2: Two model structures variants [1, 2].

To calculate the depth of the active layer, known methods of mathematical physics with partial differential equations for electron-hole pairs will be used, and the probabilistic approach is applied for the sorting of the electron energy and the construction of the loss function [4].

References

1. **A. V. Gurskaya, M. V. Dolgopolov, V. I. Chepurnov** *C-14 Beta Converter* // Physics of Particles and Nuclei. - 2017. V. 48. - № 6. - P. 941-944.

2. **A. Akimchenko, V. Chepurnov, M. Dolgopolov, A. Gurskaya, O. Kuznetsov, A. Mashnin, A. Radenko, V. Radenko, O. Surnin, G. Zanin** *Betavoltaic device in por-SiC/Si* // EPJ Web of Conferences, QFTHEP 2017. (2017). 158, 06004. 10 p.

3. **Tariq R. Alam, Mark A. Pierson**. *Principles of Betavoltaic Battery Design* // J. Energy Power Sources. - 2016. Vol. 3. - No. 1. - P. 11-41.

4. **A.A. Gorbatsevich, V.I. Korneev, A.B. Danilin, E.P. Magomedbekov, A.A. Molin** *Analysis (Simulation) of Ni-63 beta-voltaic cells based on silicon solar cells* // Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics. - 2016. T. 61. - № 7. - P. 1053-1059.

НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Абдикаримов Р.А., Ходжаев Д.А.

Ташкентский финансовый институт, Узбекистан, Ташкент,
Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Узбекистан, Ташкент
rabdikarimov@mail.ru

Во многих областях техники и строительства широкое применение имеют пластинки и оболочки переменной толщины. В строительстве такие конструкции встречаются при перекрытии большепролетных сооружений: цирков, рынков, крытых спортивных сооружений и т.д. Для определения условий эксплуатации этих конструкций требуются надежные оценки их прочностных характеристик. Как известно, только при достаточно малых нагрузках можно приближенно считать, что конструкции деформируются по линейным законам. Но, чтобы выявить истинный характер деформирования конструкций, необходимо учитывать нелинейные факторы. С одной стороны, это усложняет решение поставленных задач, но с другой – дает обширное поле для исследований.

Следует отметить, что в настоящее время известно большое количество пакетов прикладных программ для расчета различных тонкостенных конструкций на прочность, устойчивость и колебания. А это не означает, что с помощью уже известных программных комплексов можно решить многие задачи механики деформируемого твердого тела. Разработка новых, более совершенных математических моделей деформирования тонкостенных конструкций с учетом переменности толщины, реальных свойств материала и другие, при статическом и динамическом нагружении и новых, более удобных, оптимальных алгоритмов, а также пакетов прикладных программ для их исследования всегда будет актуальной задачей.

В работе рассматриваются нелинейные свободные колебания вязкоупругой пологой оболочки двоякой кривизны переменной толщины. Считается, что на пологую оболочку действует статическая нагрузка q. При заданных физических и геометрических соотношениях на основе гипотезы Кирхгоффа-Лява построена математическая модель задачи, которая описывается системой нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) в частных производных с переменными коэффициентами относительно прогиба $w = w(x, y)$ и перемещений $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Решение полученной, достаточно сложной и громоздкой, системы нелинейных ИДУ в частных производных со слабо-сингулярными ядрами наследственности при различных граничных условиях представляет собой значительные математические трудности. Поэтому естественным способом решения этих систем является дискретизация по пространственным переменным, и получение системы обыкновенных ИДУ относительно функций времени. При построении дискретной модели (разрешающие уравнения) нелинейных задач динамики наследственной теории вязкоупругости использован вариационный метод Бубнова-Галеркина и получены системы нелинейных ИДУ типа Вольтерра.

Интегрирование полученной системы уравнений проводилось с помощью численного метода, основанного на использовании квадратурных формул [1,2].

На основе алгоритма решения задачи составлена программа на алгоритмическом языке Delphi. Исследованы амплитудно-временные, напряженно-деформированные и моментно-временные характеристики колебаний вязкоупругой пологой оболочки двоякой кривизны переменной толщиной при различных значениях реологических и геометрических параметров пологой оболочки. Расчеты проводились при различных законах изменения толщины. Результаты отражены в виде графиков и таблиц.

Литература

1. *Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М.* О некоторых методах решения систем интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // Прикладная математика и механика, 1987. Т. 51. №5. С. 867-871.

2. *Эшматов Х., Абдикаримов Р.А., Бобоназаров Ш.П.* Колебания и устойчивость вязкоупругой трубы с протекающей через нее жидкостью при различных граничных условиях // Узбекский журнал Проблемы механики, Ташкент, 1995. №1. С. 20-24.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА

Бакирова Э.А.[1], Кадирбаева Ж.М.[2],

[1] Институт математики и математического моделирования МОН РК, Казахстан, Алматы)
[2] Институт математики и математического моделирования МОН РК, Казахстан, Алматы
[1]bakirova1974@mail.ru, [2]apelman86pm@mail.ru

Различные проблемы современной теории интегро-дифференциальных уравнений исследуются в [1-5]. Разрешимость начальных и краевых задач для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма и методы нахождения их решений были рассмотрены многими авторами. Обзор часто используемых современных методов решения краевых задач для интегро- дифференциальных уравнений приводится в [1]. В настоящей работе рассматривается нелинейная двухточечная краевая задача для систем интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма

$$\frac{dx}{dt} = f_0(t,x) + \int\limits_0^T f_1(t,s,x(s))ds, \quad x \in R^n, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

$$g(x(0),x(T)) = 0, \tag{2}$$

где $f_0 : [0,T] \times R^n \to R^n$, $f_1 : [0,T] \times [0,T] \times R^n \to R^n$ непрерывны. По шагу $h > 0 : Nh = T$ $(N = 1,2,\dots)$ произведем разбиение $[0,T) = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h, rh)$ и задачу (1), (2) сведем к эквивалентной многоточечной краевой задаче для систем интегро-дифференциальных уравнений с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = f_0(t, u_r + \lambda_r) + \sum_{i=1}^N \int\limits_{(i-1)h}^{ih} f_1(t,s,u_i(s)+\lambda_i)ds, \quad t \in [(r-1)h, rh], \tag{3}$$

$$u_r[(r-1)h] = 0, \quad r = \overline{1,N}, \tag{4}$$

$$g[\lambda_1, \lim_{t\to T-0} u_N(t) + \lambda_N] = 0, \tag{5}$$

$$\lambda_p + \lim_{t \to ph-0} u_p(t) - \lambda_{p+1} = 0, \quad p = \overline{1,N-1}. \tag{6}$$

При фиксированных значениях параметров λ_r, специальная задача Коши эквивалентна системе нелинейных интегральных уравнений

$$u_r(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau, u_r(\tau)+\lambda_r)d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t} \sum_{i=1}^N \int\limits_{(i-1)h}^{ih} f_1(\tau,s,u_i(s)+\lambda_i)dsd\tau, \quad t \in [(r-1)h, rh], \tag{7}$$

В первом интеграле вместо $u_r(\tau)$ подставив соответствующее выражение (7) получим

$$u_r(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0\Big(\tau, \lambda_r + \int\limits_{(r-1)h}^{\tau} f_0(\tau_1) + \lambda_r)d\tau_1 + \int\limits_{(r-1)h}^{\tau} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{(i-1)h}^{ih} f_1(\tau_1, s, u_i(s) + \lambda_i)dsd\tau_1\Big)d\tau +$$

$$+ \int\limits_{(r-1)h}^{t} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{(i-1)h}^{ih} f_1(\tau, s, u_i(s) + \lambda_i)dsd\tau, \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad r = \overline{1, N}. \tag{8}$$

Соответствующие выражения из (8) подставив в краевые условия (5) и условия непрерывности решения (6) имеем

$$g[\lambda_1, \lambda_N + \int\limits_{(N-1)h}^{Nh} f_0\Big(\tau, \lambda_N + \int\limits_{(N-1)h}^{\tau} f_0(\tau_1, u_N(\tau_1) + \lambda_N)d\tau_1 +$$

$$+ \int\limits_{(N-1)h}^{\tau} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{(i-1)h}^{ih} f_1(\tau_1, s, u_i(s) + \lambda_i)dsd\tau_1\Big)d\tau + \int\limits_{(N-1)h}^{Nh} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{(i-1)h}^{ih} f_1(\tau, s, u_i(s) + \lambda_i)dsd\tau] = 0,$$

$$\lambda_p + \int\limits_{(p-1)h}^{ph} f_0\Big(\tau, \lambda_p + \int\limits_{(p-1)h}^{\tau} f_0(\tau_1, u_p(\tau_1) + \lambda_p)d\tau_1 + \int\limits_{(p-1)h}^{\tau} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{(i-1)h}^{ih} f_1(\tau_1, s, u_i(s) + \lambda_i)dsd\tau_1\Big)d\tau +$$

$$+ \int\limits_{(p-1)h}^{ph} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{(i-1)h}^{ih} f_1(\tau, s, u_i(s) + \lambda_i)dsd\tau - \lambda_{p+1} = 0, \quad p = \overline{1, N-1},$$

которую запишем в виде

$$Q_{2,h}(\lambda, u) = 0, \quad \lambda \in R^{nN}. \tag{9}$$

Построенная система позволяет найти начальное приближение по параметру решения нелинейной многоточечной краевой задачи с параметрами (3)-(6). Также эта система является основой алгоритмов нахождения решения нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма (1), (2). Разработаны эффективные приближенные и численные методы решения нелинейной краевой задачи (1), (2), основанные на решений соответствующих систем нелинейных алгебраических уравнений (9) относительно введенных параметров.

Литература

1. *Быков Я.В.* О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. Фрунзе. Киргиз. гос.ун-т. 1957. 328с.

2. *Lakshmikantham V., Rao M.R. M.* Theory of Integro-Differential Equations. Gordon Breach, London. 1995.

3. *Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A.* Criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations // Differential equations. 2013. Vol 49. №9. P. 1-16.

4. *Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A.* On the unique solvability of the boundary value problems for Fredholm integrodifferential equations with degenerate kernel // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2017. - V. 220. №4. P. 440-460.

5. *Бакирова Э.А., Искакова Н.Б.* Алгоритмы нахождения решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с интегральным условием на основе сплайн-аппроксимации // Математический журнал Алматы. 2016. Т. 16. №1. С. 17-34.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ В СРЕДАХ С ФРАКТАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Байков В.А.[1], Жонин А.В.[2], Колушов А.В.[3],

[1,2,3] Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия, Уфа
[1]gammett@ugatu.su, [2]alexanderzhonin@gmail.com

Ряд физических процессов Џ диффузия, случайные блуждания, теплопроводность, фильтрация описываются одинаковым видом уравнений. В работе рассматриваются процессы фильтрации в средах с фрактальными свойствами [1,2]. Нужно отметить, что в природе фрактальность может носить случайный нерегулярный характер и иметь конечный предел. Фундаментальным уравнением, описывающим перенос вещества во фрактальной среде, является уравнение [3]:

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial t} = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left[k r^{D-1-\theta} \frac{\partial \hat{P}}{\partial r} \right] \tag{1}$$

где $\hat{P}\left(r,t\right)$ — сглаженная по флуктуациям плотность вероятности нахождения диффундирующей частицы вещества в точке (r,t); D — размерность фрактала по Хаусдорфу; k, θ — параметры, описывающие аномальную проводимость фрактальной среды.

В работе исследуются вопросы эффективной проницаемости среды, перколяционные эффекты в модельных задачах. Исследование проводится с помощью компьютерного моделирования на плоских моделях фрактальных сред с размерностями $1 \leqslant D \leqslant 2$. Для построения случайных фрактальных полей используются алгоритм случайного размещения полос на плоскости и метод случайного смещения средней точки.

Литература

1. *O'Shaughnessy B., Procaccia I.* Analytical Solutions for Diffusion on Fractal Objects // Phys. Rev. Lett. 1985. 54. C. 455-458.
2. *O'Shaughnessy B., Procaccia I.* Diffusion on fractals // Phys. Rev. A. 1985. 32. C. 3073-3083.
3. *Багманов В.Х., Байков В.А., Латыпов А.Р., Васильев И.Б.* Методика интерпретации и определния параметров уравнения фильтрации в пористой среде с фрактальными свойствами // Вестник УГАТУ. 2006. є 2. С. 146-149.

БЕРИЛГАН МАЪЛУМОТЛАР АСОСИДА ЛОКАЛ ИНТЕРПОЛЯЦИОН КУБИК СПЛАЙН КУРИШ ВА УЛАНИШ ТУГУН НУКТАЛАРИДАГИ УЗЛУКСИЗЛИГИНИ ТЕКШИРИШ

Бахромов С.А.[1], Сайидова Г.Д.[2]

[1] Узбекистон Миллий университети, Тошкент, Узбекистон
[1]baxromov59@mail.ru, [2]parizoda-2016@mail.ru

Сплайн функция асосан функцияларни интерполяциялашда энг яхши аппарат хисобланади. Жадвал куринишида берилган функциянинг аналитик куринишини тиклашда классик интерполяцион формулаларга нисбатан яхши якинлашади. Сплайн функциялар хар хил геофизик сигналларни кайта ишлаш ва тиклашда хам кулланилади. Сплайн функциялар ердамида регуляр ва сигнуляр интегралларни такрибий хисоблашларда хамда регуляр ва сигнуляр интеграл тенгламаларни такрибий ечишларда кулланиладиган квадратур ва кубатур формулалар курилади хамда уларнинг хатоликлари хар хил синфларда бахоланади.

Ушбу ишда $A(0.5;1.5), B(1;4), C(1.5;2)$- нукталардан утувчи $Y_1(x)$-парабола курилди

$$Y_1(x) = -9x^2 + 18.5x - 5.5$$

$B(1;4), C(1.5;2), E(2;3)$ - нукталардан утувчи $Y_2(x)$-парабола курилди

$$Y_2(x) = 6x^2 - 19x + 17$$

$C(1.5;2), E(2;3), D(2.5;1)$-нукталардан утувчи $Y_3(x)$-парабола курилди

$$Y_3(x) = -6x^2 + 23x - 19$$

$E(2;3), D(2.5;1), F(3.2)$-нукталардан утувчи $Y_4(x)$-парабола гурилди

$$Y_4(x) = 6x^2 - 31x + 41$$

Юкоридаги курилган $Y_1(x)$ ва $Y_2(x)$ параболаларнинг куйидаги чизикли комбинацияси асосида

$$S_{3_1} = (1-t)Y_1(x) + tY_2(x)\ x \in [1;1,5]$$

локал интерполяцион кубик сплайн функция курилди.

$$S_{3_1}(x) = 30x^3 - 114x^2 + 138,5x - 50,5$$

$Y_2(x)$ ва $Y_3(x)$ параболаларнинг куйидаги чизикли комбинацияси асосида

$$S_{3_2} = (1-t)Y_2(x) + tY_3(x)\quad x \in [1,5;2]$$

локал интерполяцион кубик сплайн функция курилди.

$$S_{3_2}(x) = -24x^3 + 126x^2 - 217x + 125$$

$Y_3(x)$ ва $Y_4(x)$ параболаларнинг куйидаги чизикли комбинацияси асосида

$$S_{3_3} = (1-t)Y_3(x) + tY_4(x)\quad x \in [2;2,5]$$

$$S_{3_3}(x) = 24x^3 - 162x^2 + 359x - 259$$

локал интерполяцион кубик сплайн функция курилди.

Maple дастуридан фойдаланиб локал интерполяцион кубик сплайн функциялар курилиши жараенида уланиш тугун нукталарида локал интерполяцион кубик сплайн функцияларнинг узлуксизликларини текшириш хамда график асосида параболалар ердамида курилган локал интерполяцион кубик сплайн функцияларнинг жойлашишлари тахлил килинди.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Завьялов Ю. С., Квасов.Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн - функций. Москва "Наука Главная редакция физика - математической литературы, 1980г.

УСТОЙЧИВОСТЬ И СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ, АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ТРЕТЬЮ КРАЕВУЮ ЗАДАЧУ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Бештокова З.В.

Институт прикладной математики и автоматизации, Россия, Нальчик
zarabaeva@yandex.ru

В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим следующую краевую задачу

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u + f(x,t),\quad 0 < x < l,\ 0 < t \le T, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0} x^m k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$-k\left(x,t\right)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \beta(t)u(l,t) - \mu(t),\ 0 \le t \le T,\quad \beta(t) \ge c_0 > 0. \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ 0 \le x \le l, \tag{4}$$

где $\partial_{0t}^{\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{u_\eta(x,\eta)}{(t-\eta)^\alpha}d\eta$ - дробная производная Капуто порядка α, $0<\alpha<1$,

$$0<c_0\le k(x,t)\le c_1,\ |r(x,t),\ q(x,t)|\le c_2,\quad 0\le m\le 2. \tag{5}$$

При $x=0$ ставится условие ограниченности решения $|u(0,t)|<\infty$, которое эквивалентно условию (2) (см. [1, стр.173]).

Допуская существование регулярного решения задачи $(1)-(4)$ в цилиндре $\overline{Q}_T$, получим априорную оценку для ее решения в разностной форме. Для этого задаче $(1)-(4)$ поставим в соответствие следующую разностную схему порядка аппроксимации $O(\frac{h^2+\tau}{x})$:

$$\bar{\varkappa}\Delta_{0t_j}^{\alpha}y=\tilde{\Lambda}(t^*)y^{(\sigma)}+\varphi,\ (x,t)\in\omega_{h\tau}, \tag{6}$$

$$\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)}=\tilde{\beta}_1 y_0^{(\sigma)}+h^*\Delta_{0t}^{\alpha}y_0-\tilde{\mu}_1,\ t\in\bar{\omega}_\tau, \tag{7}$$

$$-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)}=\tilde{\beta}_2 y_N^{(\sigma)}+\frac{\tilde{\varkappa}h}{2}\Delta_{0t}^{\alpha}y_N-\tilde{\mu}_2,\ t\in\bar{\omega}_\tau, \tag{8}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\bar{\omega}_h, t=0, \tag{9}$$

где

$$\tilde{\Lambda}(t^*)y^{(\sigma)}=\frac{\varkappa}{x^m}\Big(\bar{x}^m a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big)_x+\frac{b^-}{x^m}\Big(x_{i-0.5}^m a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big)+\frac{b^+}{x^m}\Big(x_{i+0.5}^m a^{(+1)}y_x^{(\sigma)}\Big)-dy^{(\sigma)},$$

$$\mu_2=\mu_2(t^{j+\frac12}),\tilde{\mu}_2=\tilde{\varkappa}\mu^{(j+\frac12)}+0.5h\varphi_N^{j+\frac12},\ \tilde{\beta}_1=h^*d_0,\ \tilde{\beta}_2=\tilde{\varkappa}\beta^{(j+\frac12)}+0.5hd_N^{j+\frac12},$$

$$\varkappa_0=\frac{1}{1+\frac{0.5h|r_0|}{(m+1)a_1}},\ r_0\le 0,\quad \tilde{\varkappa}=\frac{1}{1-\frac{0.5hm}{l}},\ \varkappa_N=\frac{1}{1+\frac{0.5h|r_N|}{k_{N-0.5}}},\ r_N\ge 0.$$

$$\widetilde{\mu}_1=h*\varphi_0,\ t^*=t^{j+\frac12},b^{\pm}=\frac{\overline{\varkappa}r^{\pm}}{k},\ \bar{x}^m=x_{i-0.5}^m,$$

$$d_i^j=\begin{cases}q_i^{j+\frac12},\ i=0,N,\\ \bar{\varkappa}_i q_i^{j+\frac12},\ i=\overline{1,N-1},\end{cases}\quad \varphi_i^j=\begin{cases}f_i^{j+\frac12},\ i=0,N,\\ \bar{\varkappa}_i f_i^{j+\frac12},\ i=\overline{1,N-1},\end{cases}\quad h^*=\frac{0.5h}{m+1},$$

$$a_i^j=k_{i-0.5}^{j+0.5}=k(x_{i-0.5},t^{j+\frac12}),\ y=y(x_i,t^j),\ y^{(\sigma)}=\sigma\hat{y}+(1-\sigma)y,\ h,\tau-\text{шаги сетки}.$$

Введем скалярное произведение и норму в виде

$$(u,v]=\sum_{i=1}^{N}u_iv_i\hbar,\quad \|u\|_0^2=\sum_{i=1}^{N-1}u_i^2h.$$

Теорема. *Пусть выполнены условия* (5), *тогда существуют такие* τ_0,h_0, *что если* $\tau\le\tau_0, h\le h_0$, *то при* $\sigma\ge\dfrac{1}{3-2^{1-\alpha}}$ *для решения задачи* $(6)-(9)$ *справедлива априорная оценка*

$$\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\|x^{\frac m2}y^{j+1}]|_1^2+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{j'=0}^{j}\Big(t_{j-s+1}^{1-\alpha}-t_{j-s}^{1-\alpha}\Big)\|x^{\frac m2}y^{j'}]|_1^2+\sum_{j'=0}^{j}\|\overline{x}^{\frac m2}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\tau\le$$

$$\le M\Bigg(\sum_{j'=0}^{j}\bigg(\|x^{\frac m2}\varphi^{j'}\|_0^2+\tilde{\mu}_1^2+\tilde{\mu}_2^2\bigg)\tau+\Big((1-\sigma)\tau+\frac{t_{j+2}^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\Big)\|x^{\frac m2}y^0]|_1^2\Bigg), \tag{10}$$

где $\|x^{\frac m2}y]|_1^2=\|x^{\frac m2}y]|_0^2+\big(x_{0.5}^{\frac m2}y_0\big)^2$, $M-$ *положительное число, зависящее только от входных данных задачи* $(1)-(4)$. *Из априорной оценки (10) следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной схемы* $(6)-(9)$ *к решению дифференциальной задачи (1)-(4).*

Литература

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука,1983. 616 с.

Алгоритм построения дифференциального оператора $2m-$го порядка общего вида и нахождение фундаментальное решение

Ик.И. Жалолов.

Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, Узбекистан, Ташкент
o_jalolov@mail.ru

Для описание некоторого аналитического алгоритма отыскания оптимальных коэффициентов С.Л.Соболев определил и исследовал дискретный аналог $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ полигармонического оператора Δ^m[1]. Задача построения дискретного оператора $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ при произвольном n оказалось очень трудной.
В настоящей работе рассматривается задачу построения дифференциального оператора $2m$- го порядка общего вида

$$\left(1-\frac{d^2}{(2\pi\omega)^2dx^2}\right)^m \tag{1}$$

и доказана, что $V_m(x)$ является фундаментальное решение этого дифференциального оператора[2], где

$$V_m(x)=\frac{\pi\omega e^{-2\pi|x|}}{2^{2m-2}(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega)^k}{k!(m-k-1)!}|x|^k \qquad ,\omega>0.$$

Дискретный аналог $D_m[\beta]$ дифференциального оператора $\left(1-\frac{d^2}{(2\pi\omega)^2dx^2}\right)^m$ имеет важную роль при вычислении коэффициентов оптимальных квадратурных, кубатурных формул и оптимальных интерполяционных формул в пространстве $W_2^m(R)$.
Определение. Пространство $W_2^m(R)$ определяется как замыкание бесконечно дифференцируемых функций, заданных в R и убывающих на бесконечность быстрее любой отрицательной степени в норме (см.[1])

$$\|f(x)|W_2^m(R)\|=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|F^{-1}[(1+y^2)^{\frac{m}{2}}F[f(x)](y)]|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Здесь F и F^{-1} прямое и обратное преобразование Фурье : Для дискретной функции $D_m[\beta]$ имеет следующего равенство

$$D_m[\beta]*V_m[\beta]=\delta[\beta] \tag{2}$$

Отметим что уравнение (2) является дискретным аналогом следующего уравнения

$$\left(1-\frac{d^2}{(2\pi\omega)^2dx^2}\right)^m V_m(x)=\delta(x).$$

Справедлива следующие
Лемма. Имеет места следующая рекуррентная формула

$$\left(1-\frac{d^2}{(2\pi\omega)^2dx^2}\right)V_m(x)=V_{m-1}(x)\,, m=2,3,...,V_1(x)=\pi\omega\ell^{-2\pi\omega|x|}$$

Теорема. Функция $V_m(x)$ являются фундаментальным решением $2m$-го порядка дифференциального оператора общего вида (1), т.е. имеет место равенство

$$\left(1-\frac{d^2}{(2\pi\omega)^2dx^2}\right)^m V_m(x)=\delta(x).$$

В конце отметим, что построенный дифференциальный оператор имеют многочисленные применения в механике, особенно в задачах теории колебаний (см. [3]).

Литература

1. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука 1974. - 808 с.
2. *Градштейн И.С., Рыжик И.И.* Таблицы произведений. интегралов, сумм рядов и Наука, физ-мат., М. 1971.
3. *В. Кеч, П. Теодореску.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике.-М.: Мир, 1978. 518 с.

Алгоритм вычисление нормы функционала погрешности оптимальных интерполяционных формул в пространстве периодических функций С.Л. СОБОЛЕВА $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$

Жалолов И. Ф.

Бухарский государственный университет, Узбекистан, Бухара
o_jalolov@mail.ru

Теории интерполяционных формул построены многими авторами, например [1]-[4].
Рассматривается вопрос построении интерполяционную формулу $P_f(x)$,т.е.

$$f(x) \cong P_f(x) = \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(x) f(x^{(\lambda)}), \tag{1}$$

совпадающую функцией $f(x)$ в узлах интерполирования:

$$f(x_i) = P_f(x_i), i = 0, 1, ...N,$$

здесь точки $x^{(\lambda)} \in T_1$ и параметры $c_\lambda(x)$ называем соответственно узлами и коэффициентами интерполяционной формулы (1), T_1-одномерный тор ,т.е. окружность длины равной единице. Основной задачей в теории интерполирование является нахождение максимума ошибки интерполяционной формулы $f(x) \cong P_f(x)$ над данном классом функций. Значение этой функции в некоторой точки z есть функционал определенный как

$$< \ell_N(x), f(x) >= \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) f(x) dx = f(z) - P_f(z) = f(z) - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) f(x^{(\lambda)}) \tag{2}$$

где ясно, что $P_f(z) = \sum\limits_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) f(x^{(\lambda)})$ интерполяционная формула и

$$\ell_N(x) = \delta(x - z) - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) \delta(x - x^{(\lambda)})$$

функционал погрешности этой интерполяционной формулы, $C_\lambda(z)$- коэффициенты, а $x^{(\lambda)}$ узлы формулы $P_f(z), \delta(x)$- дельта- функция Дирака и $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Определение.Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ определяется как пространство функций заданных одномерном T_1 - окружности длины равной единице и имеющих все обобщчнные производные порядка m суммируемые с квадратом [5].

Норма функции определяется по формуле

$$\left\| f \middle/ \tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|^2 = \left(\int_{T_1} f(x) \, dx \right)^2 + \sum_{k \neq 0} |2\pi k|^{2m} \left| \hat{f}_k \right|^2.$$

Для того чтобы оценить погрешность (2) интерполяционной формулы $P_f(z)$, достаточно решить следующую задачу.
Задача 1. Вычислить ному функционала погрешности $\ell_N(x)$ рассматриваемой интерполяционной формулы $P_f(z)$. Понятно, что норма функционала погрешности $\ell_N(x)$ зависит от коэффициентов и узлов $x^{(\lambda)}$. Если

$$\left\| \overset{0}{\ell}_N \,|\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\| = \inf_{c_\lambda(x), x^{(\lambda)}} \left\| \ell_N \,|\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\|, \qquad (3)$$

тогда функционал $\overset{0}{\ell}(x)$ называется оптимальным функционалом погрешности, а соответствующую интерполяционную формулу оптимальной интерполяционной формулой.
Таким образом, возникает следующая задача
Задача 2. Найти значения коэффициентов и узлов x_λ интерполяционной формулы $P_f(z)$ которые удовлетворяют равенству (3). Коэффициенты и узлы x_λ, удовлетворяющие равенству (3), называют оптимальными коэффициентами и оптимальными узлами интерполяционной формулы $P_f(z)$.
Справедлива следующая.
Теорема. Квадрат нормы функционала погрешности интерполяционной формулы (1) над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ равен

$$\left\| \ell_N \Big/ \tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1) \right\|^2 = \left| 1 - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda(z) \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\left| \cos 2\pi kz - \sum\limits_{\lambda=1}^{N} c_\lambda(z) e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^{2m}}.$$

где $c_\lambda(z)$ - коэффициенты, $x^{(\lambda)}$ - узлы интерполяционной формулы вида (1).

Литература

1. *Соболев С.Л.* Об интерполировании функций n переменных. Докл. АНСССР, 1961, 137,-с. 778-781.
2. *Лоран П.Ж.* Аппроксимация и оптимизация. М. Мир 1975. 496с.
3. *Arcangelu R, Lopez de Silanes M.C, Torrens T.T.* Multidimensianal minimizing splines. Keuwer Academic publishers. Boston, 2004, 261p.
4. *Хаетов А.Р.* Алгоритм вычисления коэффициентов оптимальных интерполяционных формул в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$. Узбекский математический журнал. -Тошкент, 2010, N:3,-С.154-161.
5. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. -808с.

Экстремальная функция и нормы функционала погрешности оптимальных интерполяционных формул в пространстве С.Л. СОБОЛЕВА $L_2^m(S)$.

Жалолов О. И.

Бухарский государственный университет, Узбекистан, Бухара
o_jalolov@mail.ru

Задача о построении интерполяционных формул является одной из классических задач вычислительной математики и численного анализа. Теории интерполяционных формул в функциональном постановке в первые рассмотрен С.Л. Соболевым [1].
Допустим, что в $n+1$ произвольно расположенных точках $\theta_i\ \left(i=\overline{0,N}\right)$, которые всюду ниже мы будем называть узлами интерполирования, даны значения $f(\theta_0), f(\theta_1), ..., f(\theta_N)$ функции $f(\theta)$.
Требуется построит интерполяционную формулу $P_f(\theta)$,т.е.

$$f(\theta) \cong P_f(\theta) = \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(\theta) f(\theta^{(\lambda)}), \qquad (1)$$

совпадающую функцией $f(\theta)$ в узлах интерполирования:
$f(\theta_i) = P_f(\theta_i)$, $i = 0, 1, ...N$, здесь точки $\theta^{(\lambda)} \in S$ и параметры $c_\lambda(\theta)$ называем соответственно узлами и коэффициентами интерполяционной формулы (1), $S - n$- мерная единичная сфера.
Важной задачей в теории интерполирование является нахождение максимума ошибки интерполяционной формулы $f(\theta) \cong P_f(\theta)$ над данном классом функций. Значение этой функции в некоторой точки z есть функционал определенный как

$$< \ell_N(\theta), f(\theta) >= \int\limits_S \ell_N(\theta) f(\theta) d\theta = f(z) - P_f(z) = f(z) - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) f(\theta^{(\lambda)}), \quad (2)$$

где ясно, что $P_f(z) = \sum\limits_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) f(\theta^{(\lambda)})$ интерполяционная формула и

$$\ell_N(\theta) = \delta(\theta - z) - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) \delta(\theta - \theta^{(\lambda)}),$$

функционал погрешности этой интерполяционной формулы, $C_\lambda(z)$- коэффициенты, а $\theta^{(\lambda)}$ узлы формулы $P_f(z), \theta^{(\lambda)} \in S$, $\delta(\theta)$- дельта- функция Дирака и $f(\theta) \in L_2^m(S)$.
Определение. Пространство$L_2^m(S)$ - определяется как пространство функций заданных на S и обладающих квадратично суммируемыми обобщенными производными порядка m, норма которых определяется равенством [2]

$$\|f(\theta)/L_2^m(S)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}^2 K^m (k+n-2)^m,$$

и предположим, что $2m > n$.
Для того чтобы оценить погрешность (2) интерполяционной формулы $P_f(z)$, достаточно решить следующую задачу.
Задача 1. Вычислить ному функционала погрешности $\ell_N(\theta)$ рассматриваемой интерполяционной формулы $P_f(z)$. Понятно, что норма функционала погрешности $\ell_N(\theta)$ зависит от коэффициентов и узлов $\theta^{(\lambda)}$. Если

$$\left\| \overset{0}{\ell}_N | L_2^{m*}(S) \right\| = \inf_{C_\lambda(x), \theta^{(\lambda)}} \left\| \ell_N \left| L_2^{m*}(S) \right. \right\|, \quad (3)$$

тогда функционал $\overset{0}{\ell}_N(\theta)$ называется оптимальным функционалом погрешности, а соответствующую интерполяционную формулу оптимальной интерполяционной формулой.
Таким образом, возникает следующая задача
Задача 2. Найти значения коэффициентов и узлов $\theta^{(\lambda)}$ интерполяционной формулы $P_f(z)$ которые удовлетворяют равенству (3). Коэффициенты и узлы $\theta^{(\lambda)}$, удовлетворяющие равенству (3), называют оптимальными коэффициентами и оптимальными узлами интерполяционной формулы $P_f(z)$.
Основным результатом настоящей работы является следующая
Теорема. Норма функционала погрешности ℓ_N интерполяционной формулы (1) над пространством $L_2^{m^*}(S)$ равна

$$\left\| \ell_N \middle/ L_2^{m^*}(S) \right\| = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[Y_{k,\ell}(z) - \sum\limits_{\lambda=1}^{N} C_\lambda(z) Y_{k,\ell}\left(\theta^{(\lambda)}\right) \right]^2}{K^m (k+n-2)^m} \right\}^{1/2},$$

где $Y_{k,l}(\theta)$- сферические гармоники порядка k вида ℓ и $\sigma(n,k)$- число линейно независимых сферических гармоник.

Литература

1. *Соболев С.Л.* Об интерполировании функций n переменных. Докл. АНСССР, 1961, 137,-с. 778-781.
2. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. -808с.

Номинал аломатларнинг вазн ва интервалларга ажратишнинг детерминистик усуллари

Ибрагимов М.Ф.[1], Абдулхамидов С.[2], Сапаев Ш.О.[3]

Ўзбекистон Миллий Университети

[1]nuu.ibragimov@mail.ru

Детерминистик мезонлар асосида сонли аломатларнинг (берилган, латент) ўзаро кесишмайдиган интервалларга ажратишнинг икки усули маълум. Мазкур усуллар алгоритмлари ўлчов масштабларига инвариант ва қуйидагилар ҳоллар учун ишлатилади:

- интуитив ечимлар қабул қилиш жараёнини моделлаштиришда берилганлар базасидан латент (ошкор, бевосита ўлчаш мумкин бўлмаган) аломатларни қидиришда;

- сонли аломатлардан номинал аломатларни шакллантиришда йўқотиладиган ахборотнинг минимал бўлишини таъминлашда;

- турли тоифадаги аломатлардан информатив тўпламлар танлашда.

Мезонлар талқини. Икки ўзаро кесишмайдиган K_1, K_2 синфларга ажратилган объектларнинг мумкин бўлган тўплами $E_0 = S_1, ..., S_m$, берилган бўлсин. Хар бир объект n та турли типдаги аломатлар $X(n) = (x_1, ..., x_n)$ асосида ифодаланади, $\delta(\delta > 0)$ си интервал шкалада, қолган, n -δ таси номинал шкалаларда ўлчанади. X(n) дан олинган аломатлар $Y(\mu) = (y_1, ..., y_\mu)$ сонли аломатларга акслантирувчи оператор мавжуд бўлсин. $Y(\mu)$ нинг элементлари ичида X(n) дан олинган δ сонли, латент аломатлар бор бўлсин. Латент (сонли) аломатларга мисол тариқасида $x_i x_j, x_i x_j^{-1}$ комбинациялар хамда сонли ва номинал аломатлардан олинган умумлашган кўрсатгичларни кўрсатиб ўтиш мумкин.

E_0 тупламда $Y(\mu)$ дан олинган аломатлар қийматларини кесишмайдиган интервалларга ажратишнинг икки мезонси аниқланган бўлсин. Биринчи мезон синфлар сонига тенг интерваллар сонига амал қилишга асосланган. Биз қараётган холда бу сон иккига тенг.

Хар бир $y_j \in Y(\mu)$ мезонга мос оптимал ажратиш қуйидагича амалга оширилади. Аломатнинг тартибланган қийматлар тўплами икки $[c_0, c_1], (c_1, c_2]$ интервалга ажратилади, бу ерда $c_0 = \min\limits_{S_v \in E_0} y_{vj}$ ва $c_2 = \min\limits_{S_v \in E_0} y_{vj} (S_v = (y_{v1}, ..., y_{v\mu}))$.

c_1 нинг қийматларини ҳисоблаш қуйидаги гипотеза, яъни хар бир интервал объектлар аломатлари қийматларининг K_t ёки K_{3-t}, t=1,2 дан олинганига асосланади.

Фараз қилайлик $u_1^1, u_1^2 \left(u_2^1, u_2^2\right)$ лар $y_j \in Y(\mu)$ аломатнинг $K_1 (K_2)$ синфларга $[c_0, c_1]$ ва $(c_1, c_2]$ интервалларга тегишли қийматлари сони бўлсин. $A = (a_0, a_1, a_2), a_0 = 1, a_2 = m, a_1 - E_0$ тўпламдан олинган $y_j \in Y(\mu)$ аломат қийматларининг ўсиб бориш тартибида тартибланган ва интервал чегарасини $c_1 = r_{a_1}$, $m_t = |K_t \cap E_0|$, t=1,2 аниқловчи кетма-кетлиги.

Қуйидаги

$$\left(\frac{\sum\limits_{p=1}^{2} u_1^p \left(m - m_t - u_2^p\right) + u_2^p \left(m_t - u_1^p\right)}{2 m_1 m_2} \right) \left(\frac{\sum\limits_{p=1}^{2} \sum\limits_{i=1}^{2} u_i^p \left(u_i^p - 1\right)}{m_1 \left(m_1 - 1\right) + m_2 \left(m_2 - 1\right)} \right) \to \max_{\{A\}} (1)$$

мезонни интервалнинг c_1 чегарасининг оптимал қийматини ҳисоблаш ва унинг (мезоннинг) қийматидан E_0 тўплам объектларини классификациялашда сонли аломатнинг компактлик кўрсатгичи сифатида фойдаланиш мумкин. Агар иккита объектнинг хар бирининг чегараларида фақат K_t ёки K_{3-t} олинган объектлар аъломатлари қийматлари $y_j \in Y(\mu)$ жойлашган бўлса, у холда (1) мезон қиймати бирга тенг бўлади.

Агар $r_{j_1} = r_{j_2}, ..., r_{j_{m-1}} = r_{j_m}$ бўлса, мезон қиймати 0 га тенг бўлади. Бошқа барча ҳолларда (1) мезон қийматлари (0,1) интервалга тегишли қийматларни қабул қилади, (1) мезон синфлар сони l>2 бўлган ҳолларда ҳам ишлатилиши мумкин.

Ҳисоблашни соддалаштириш учун берилганларни дастлабки қайта ишлаш тавсия қилинади.

Берилганларни дастлабки ишлов бериш деганда тартибланган $r_{j1}, ..., r_{jm}$ кетма-кетлик асосида қуйидаги бутун сонли матрицани шакллантириш тушунилади:

$$D = \begin{pmatrix} d_{10} d_{11} \dots d_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_{l0} d_{l1} \dots d_{lm} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

Бу ерда d_{pi}, p=1,...,l, i=1,...,m устун элементи аломат қиймати r_{ji} бўлган $S \in E_0$ объектга тегишли. (2) матрица элементлари қуйидагича ҳисобланади:

$$d_{pi} = \begin{cases} 0, \ i = 0, \\ d_{p,\,i-1} + g(p,i), i > 0, \end{cases}$$

бу ерда

$$g\,(p,i) = \begin{cases} 1, \ S \in \ K_p, \\ 0, \ S \notin \ K_p. \end{cases}$$

K_p, p=1,...,l, t=1,...,l синфнинг $[c_1, c_2]$ интервалдаги, ўнг ва чап чегаралари қуйидаги индексларга мос келувчи $\eta = a_{t-1}, v = a_t, c_{2t-1} = r_{j\eta}, c_{2t} = r_{jv}, t = 1$ ва t>1 да $(c_{2t-1}, c_{2t}]$ вакиллари сони μ_t^p қуйидагича топилади:

$$u_t^p = d_{p\nu} - d_{p\eta}, \tag{3}$$

Сонли аломат қийматларини (1) мезон асосида ўзаро кесишмайдиган интервалларга ажратиш алгоритмини кўриш мумкин.

Фойдаланилган адабиётлар

1. *Игнатьев Н.А.* "Интеллектуальный анализ данных на базе непараметрических методов классификации и разделения выборок объектов поверхностями". Монография.- Ташкент: Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, 2010.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ 2D ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАСЫЩЕННОЙ МИНЕРАЛИЗОВАННОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Имомназаров Х.Х.[1], Михайлов А.А.[2]

[1] ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск, Россия
[2] ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск, Россия
[1]e-mail:imom@omzg.sscc.ru, [2]e-mail:imom@omzg.sscc.ru

Исследование влияния минерализации на динамические свойства гетерофазных сред, на характер фильтрации и распространение акустических волн в пористых средах является актуальным для широкого класса прикладных задач. Минерализация насыщающей жидкости может приводить к повышению эффективной вязкости [1], влиять на характер затухания объемных и поверхностных волн. Учет минерализации, насыщающей пористые среды жидкостью, необходим при построении моделей современных технологических систем. При изменении концентрации насыщающего раствора (для песчаника Береа) в пределах от 0–20 г/л не наблюдалось заметного изменения фазовой скорости волны Стоунли.

В данной работе для моделирования волновых полей в насыщенных минерализованной жидкостью пористых средах используется система динамических уравнений теории двухскоростного континуума. Данный континуум описывается тремя скоростями распространения упругих волн: двумя продольными и одной поперечной. Во всех двухскоростных теориях вводится понятие продольной волны второго рода. Л.Д. Ландау в теории сверхтекучего гелия II вводит термин квторая скорость звукањ, М. Био для своей теории вводит термин кмедленная продольная волнањ. Скорость распространения продольной волны II рода является параметром, трудноизмеримым в скважинных условиях и является функцией пористости. Величина второй продольной скорости меньше скоростей первой продольной и поперечной волн, что согласуется с известными экспериментальными наблюдениями. При численном моделировании, данная система свелась к двум последовательно решаемым системам, а именно: сначала решается система динамических уравнений пороупругости, а потом решается уравнение для концентрации растворов. Другими словами, обратным влиянием концентрации растворов на распространения сейсмических волн в пористой среде. Решения данной задачи позволяют изучать особенности распространения сейсмических волн в насыщенных минерализованной жидкостью пористых средах. При этом полученные формулы позволяют моделировать скорости смещений пористого каркаса и насыщающей минерализованной жидкости в нем, а также порового давления и компоненты тензора напряжений, как при заданных упругих параметрах среды, так и при заданных скоростях распространений поперечных и продольных волн в пористой среде. Такой подход при моделировании сейсмических полей в реальных средах позволяет учитывать механизмы поглощения упругой энергии в среде и соответствующие законы дисперсии. Численное моделирование волновых полей в данной среде позволяет объяснять наблюдаемые эффекты распространения сейсмических волн с учетом минерализации насыщающей жидкости.

Система уравнений, описывающая распространение сейсмических волн в пористой среде насыщенной минерализованным флюидом в диссипативном приближении для декартовой системы координат описывается следующей системой дифференциальных уравнений [2]:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}+\frac{\rho_l}{\rho\rho_s}\frac{\partial p}{\partial x_i}=F_i,\quad \frac{\partial p}{\partial t}-(K-\alpha\rho\rho_s)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+\alpha\rho\rho_l\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}=F_i,\quad \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t}+\mu\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)+\left(\frac{\rho_s}{\rho}K-\frac{2}{3}\mu\right)\delta_{ik}\mathrm{div}\mathbf{u}-\frac{\rho_s}{\rho}K\delta_{ik}\mathrm{div}\mathbf{v}=0, \tag{2}$$

$$\rho\frac{\partial c}{\partial t}=\mathrm{div}\left(\rho\, D\,\nabla c+\rho\bar{\lambda}\,(\mathbf{u}-\mathbf{v})\right)-(\mathbf{j},\nabla c) \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ и $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ - вектора скорости матрицы с парциальной плотностью ρ_s и минерализованной жидкости с парциальной плотностью ρ_l соответственно, p - поровое давление, σ_{ik} - тензор напряжений, c – концентрация, $\mathbf{F}=(F_1,F_2)$ - вектор массовых сил, $\rho=\rho_l+\rho_s$, $\rho_s=\rho_s^f(1-d_0)$, $\rho_l=\rho_l^f d_0$, ρ_s^f и ρ_l^f – физические плотности матрицы и минерализованной жидкости соответственно, d_0 - пористость, χ - коэффициент трения (проницаемосить), δ_{ik} - символ Кронекера, $K=\lambda+2\mu/3$,$\lambda>0$, $\mu>0$ - коэффициенты Ламе, $\alpha=\rho\alpha_3+K/\rho^2$, $\rho^3\alpha_3>0$ - модуль объемного сжатия жидкой компоненты гетерофазной среды. Упругие модули K, μ, α_3 выражаются через скорость распространения поперечной волны c_s и две скорости продольных волн c_{p_1}, c_{p_2} следующими формулами: $\mu=\rho_s c_s^2$, $K=\frac{\rho}{2}\frac{\rho_s}{\rho_l}\left(c_{p_1}^2+c_{p_2}^2-\frac{8}{3}\frac{\rho_l}{\rho}c_s^2-\sqrt{\left(c_{p_1}^2-c_{p_2}^2\right)^2-\frac{64}{9}\frac{\rho_l\rho_s}{\rho^2}c_s^4}\right)$, $\alpha_3=\frac{1}{2\rho^2}\left(c_{p_1}^2+c_{p_2}^2-\frac{8}{3}\frac{\rho_s}{\rho}c_s^2+\sqrt{\left(c_{p_1}^2-c_{p_2}^2\right)^2-\frac{64}{9}\frac{\rho_l\rho_s}{\rho^2}c_s^4}\right)$.

Система (1)–(3) рассматривается с нулевыми данными Коши и поверхность $x_2=0$ считается свободной от напряжений и порового давления.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 16-01-00729, 16-07-01052).

Reference

1. *Кадет В.В., Корюзлов А.С.*Эффективная вязкость минерализованной воды при течении в пористой среде. Теория и эксперимент // Теоретические основы химических технологий 2008. Т. 42, No.5, С. 703–708.

2. *Перепечко Ю.В.*Уравнение течения минерализованной жидкости в пористой среде // Материалы научн. конф. КаршиГУ кАктуальные вопросы анализањ, Карши: Изд. КаршиГУ, 2016, С. 162–164.

ПАРАМЕТРЛИ ВОЛЬТЕРРА ОПЕРАТОРЛАРИ ТРАЕКТОРИЯЛАРИНИНГ ДАСТУРИЙ ТАЪМИНОТИ

Исмаилова А.С.[1], Нарзиев Н.Б.[2]

[1] Ташкентский университет Информационных Технологий, Узбекистан, Ташкент
[2] Национальный университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент
[1]aismoilova@yahoo.com, [2]nnarziev@yahoo.com

Маълумки, 1865 йилда Г.Мендель[5] томонидан Ирсият қонунлари назариясига асос солиниб, алгебраик тилда формаллаштирилди. Унинг таъкидлашича, мазкур модел орқали популяцион генетикани ўрганишда коммутатив, аммо, умуман олганда ассоциатив бўлмаган алгебраларга дуч келамиз. Шунинг учун, математик генетика ҳам ўз навбатида чекли коммутатив, умуман олганда ассоциатив бўлмаган алгебраларни ўрганиш ва классификация қилиш масаласини вужудга келтирди.

XX аср бошларидан генетика фанини ўрганишда турли хилдаги математик методлардан фойдаланиб келинмоқда. Илк бора қўлланилган методлар сифатида комбинаторика элементлари, эҳтимоллар назарияси ҳамда математик статистика фанларини келтириб ўтишимиз мумкин. Генетик масалаларни анализ қилишда эҳтимолий ёндашувларни талқин қилиш тушунчалари П. Моран [6] ишларида келтирилган. Кейинчалик, Ю.М. Свирежев, В.П. Пасеков [8], М. Кимура [9] ва бошқа бир қатор олимлар томонидан стохастик генетик моделлар таҳлил қилиниб, турли хилдаги назарияларга асос солинди ҳамда бу назариялар ҳозирги кунда фан сифатида шаклланиб, жадал ривожланиб бормоқда.

Ҳозирги кунда популяцион генетиканинг алгебраик структураларини ўрганишга бағишланган турли алгебралар мавжуд. M.L.Reed [11], M.Ladra, У.А.Розиқов, Б.А.Омиров[10] ва кўпгина ёш олимлар томонидан ўрганилаётган генетик ҳамда эволюцион алгебралар шулар жумласидандир. Айниқса, бу алгебралар орасида квадратик операторлар орқали келтирилган генетик алгебралар муҳим аҳамиятга эга.

Ўтган асрнинг 80-йилларида академик Т.А.Саримсоқов[2] популяцион генетиканинг умумий математик моделини алгебраик талқин этишни таклиф этди. Кейинчалик, Т.А.Саримсоқовнинг шогирди профессор Р.Н.Ғаниxўжаев[2,3] томонидан бу ғоялар ривожлантирилди ва Вольтерра типидаги квадратик стохастик операторлар назариясига асос солинди. Бу квадратик стохастик операторлар ёрдамида кўпайтириш амали киритилиб, бу кўпайтма орқали ҳақиқий сонлар майдонида чекли коммутатив, умуман олганда ассоциатив бўлмаган генетик алгебраларни ҳосил қилиш мумкин. Бундай алгебраларнинг хусусий ҳоллари С.Н.Бернштейн[1], Ю.И.Любич [4](стационар алгебралар) каби олимларнинг ишларида ўрганилган.

n та индивид(тур)га эга бўлган популяцияни қараймиз ва тасодифий чатишиш(панмиксия) натижасида ҳосил бўлган индивид(тур) ҳам шу индивид(тур)лар тўпламига тегишли бўлсин деб фараз қиламиз. $p_{ij,k}$-сони i-ҳамда j-индивид(тур)ларнинг чатишиши натижасида ҳосил бўлган k-индивид(тур)нинг туғилиш эҳтимоли бўлсин. Бу ерда

$$p_{ij,k} = p_{ji,k} \geq 0, \ \sum_{k=1}^{n} p_{ij,k} = 1 \tag{1}$$

ва $i, j, k = \overline{1, n}$. Бу ҳолда эволюция қонуни қуйидаги муносабат орқали аниқланади:

$$(Vx)_k = {x_k}' = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij,k} x_i x_j. \tag{2}$$

Ушбу акслантириш *квадратик операторлар (акслантириш)* дейилади. Математик генетикада бундай V акслантириш популяциянинг эволюцион оператори дейилади[2,3]. қаралаётган популяция мазкур популяциядаги организмлар кўпайишига нисбатан ёпиқ деб қаралади ва бу популяциядаги авлодлар кетма-кетлиги $F_1, F_2, ...$ фарқланади ҳамда турли авлодларга мансуб индивид(тур)лар орасида чатишиш содир бўлмайди деб фараз қилинади.

R^n фазодаги ихтиёрий $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ ва $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$ векторлар учун бу фазода кўпайтириш амали қуйидагича аниқланади:

$$x \circ y = \left(\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij,1} x_i y_j, \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij,2} x_i y_j, \ ..., \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij,n} x_i y_j \right). \tag{3}$$

$p_{ij,k} = p_{ji,k}$ эканлигидан $x \circ y = y \circ x$, яъни аниқланган кўпайтманинг коммутативлигини кўриш қийин эмас.

Таъриф 1[7]. *Кўпайтириш амали (3) тенглик билан аниқланган R^n фазога n ўлчовли генетик алгебра дейилади.*

Бундай алгебраларни шартли равишда $(R^n, \circ)$ орқали белгилаймиз. Кўриш қийин эмаски, ҳосил бўлган алгебралар чекли коммутатив ва умуман олганда ассоциатив эмас.

Эслатиб ўтамиз, n ўлчовли $(R^n, \circ)$ генетик алгебраларнинг кўпгина хоссалари кичик ўлчовли ҳолларда Н.Б.Нарзиев[7] томонидан ўрганилган.

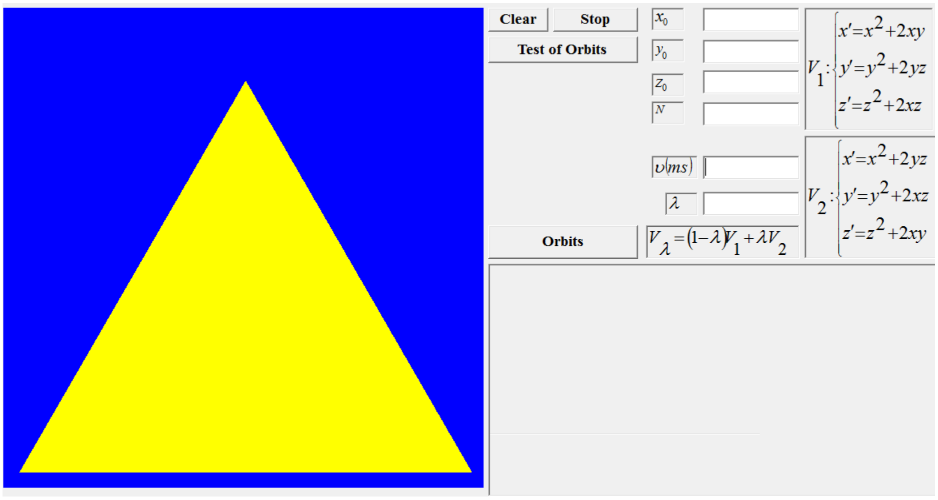
Таъриф 2[2],[3]. *Квадратик оператор $V : R^n \to R^n$-Вольтерра типидаги оператор дейилади, агарда барча $k \notin \{i, j\}$ лар учун $p_{ij,k} = 0$ тенглик ўринли бўлса.*

Вольтерра типидаги квадратик стохастик операторлар назарияси Т.А. Саримсоқов ва Р.Н. Ғанихўжаев [2] томонидан етарлича кенг қамровда ўрганилган. Лотка-Вольтерра дискрет динамик ситемаларининг траекториялари ассимптотик ҳолатини ўрганишда Ляпунов функциясини қўллаш натижасида Р.Н. Ғанихўжаев томонидан ихтиёрий Лотка-Вольтерра квадратик оператори S^{n-1} симплексни ўзини-ўзига акслантирувчи гомеоморфизм эканлиги исботланди. Бундан ташқари, умумий ҳолда квадратик стохастик операторлар учун гомеоморфизмнинг зарурий ва етарлилик шарти топилди.

Мазкур ишда биз юқорида ўрганилган Вольтерра типидаги квадратик операторлар назариясига таянган ҳолда ушбу

$$V_1 : \begin{cases} x' = x^2 + 2xy \\ y' = y^2 + 2yz \\ z' = z^2 + 2xz \end{cases}, V_2 : \begin{cases} x' = x^2 + 2yz \\ y' = y^2 + 2xz \\ z' = z^2 + 2xy \end{cases}$$

операторлар орқали ҳосил қилинган λ параметрли $V_\lambda = (1-\lambda) V_1 + \lambda V_2$ оператор траекториясининг ассимптотик ҳолатини ўрганишда ёрдам берадиган алгоритмни келтирамиз:



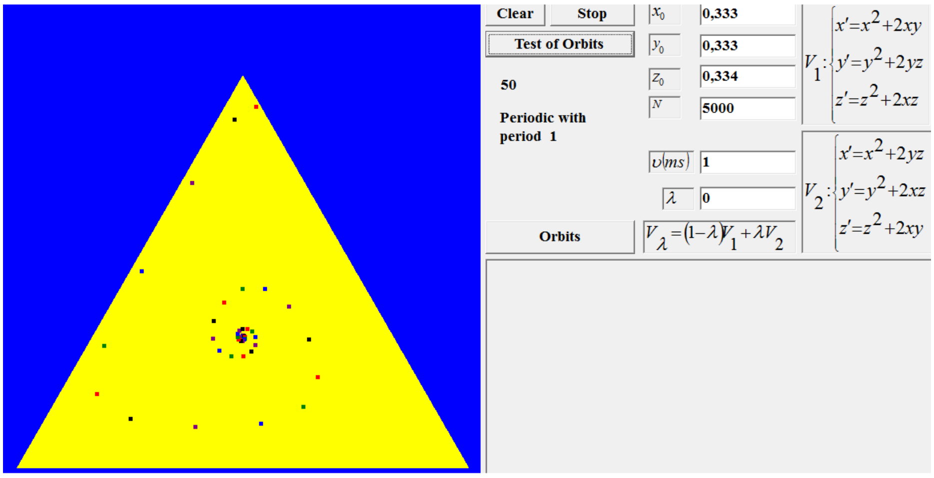
1-расм

Демак, ушбу иш столининг ўнг томонида бизнинг асосий элементларимиз жойлашган бўлиб, бу ерда икки ўлчовли симплексда ётувчи

$$(x_0, y_0, z_0) \in S^2 = \left\{(x, y, z) \in R^3 : \ x + y + z = 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0\right\}$$

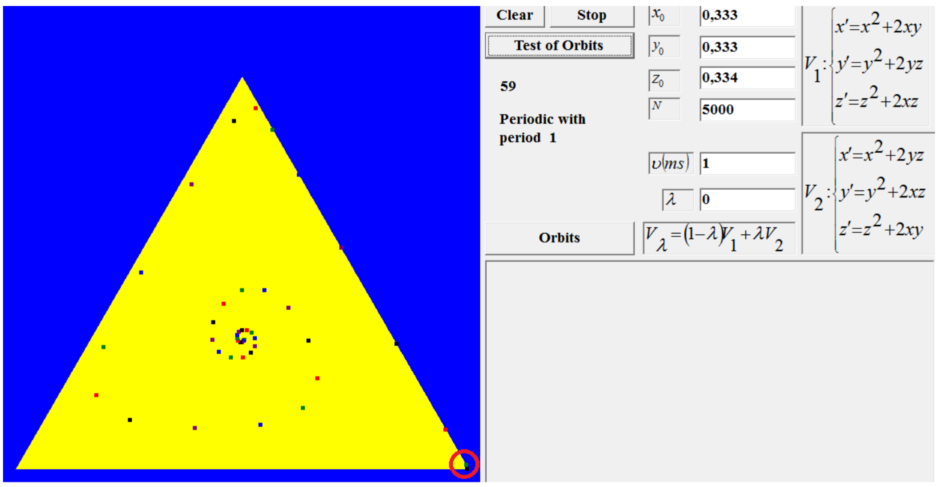
нуқтанинг ҳамда $\lambda \in R$ параметрнинг аниқ қийматларини киритамиз(1-расм).

Мисол: Айтайлик, дастлабки, $(x_0; \ y_0; \ z_0) = (0,333; \ 0,333; \ 0,334)$ нуқта ва $\lambda = 0$ бўлсин. Ушбу қийматларни киритган ҳолда, Orbits тугмасини босиш орқали биз бир вақтнинг ўзида $N = 5000$ та қадам(итерация)да берилган нуқтанинг траекторияси қандай ўзгаришини ҳамда Test of Orbits тугмасини босиш орқали қайси қадамдан сўнг ёки бошлаб бу нуқтанинг даврий(периодик)лигини кузатиб боришимиз мумкин. Берилган $(x_0; y_0; z_0)$ нуқтанинг траекториясини кузатайлик. Нуқтанинг 50- итерациягача бўлган траекториясининг кўриниши қуйидагича(2-расм):



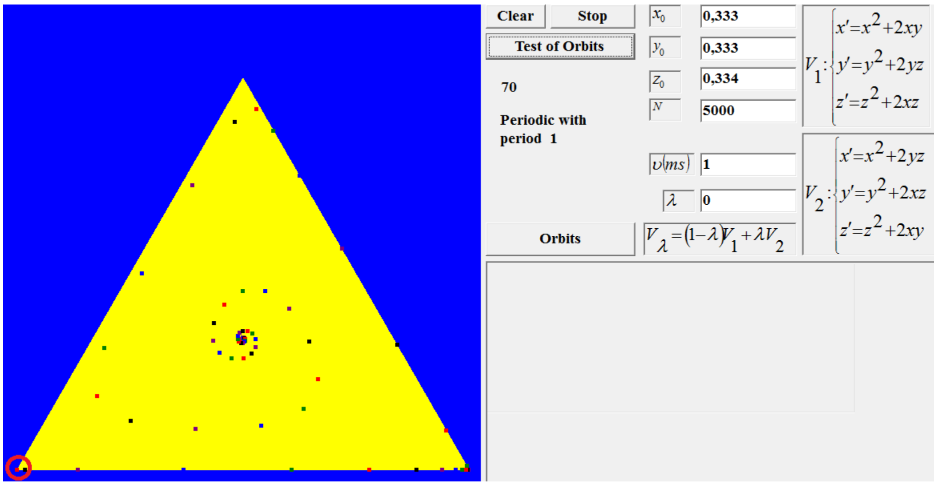
2-расм

Кўриниб турибдики, 50-қадамгача бўлган итерацияларда нуқтаннинг траекторияси симплекснинг ичида жойлашган. Кейинчалик, 51-қадамдан бошлаб нуқта траекторияси симплекснинг фақат чегарасига тегишли бўлади ва 59-қадамда унинг ўнг қуйи учига етиб боради(3-расм).

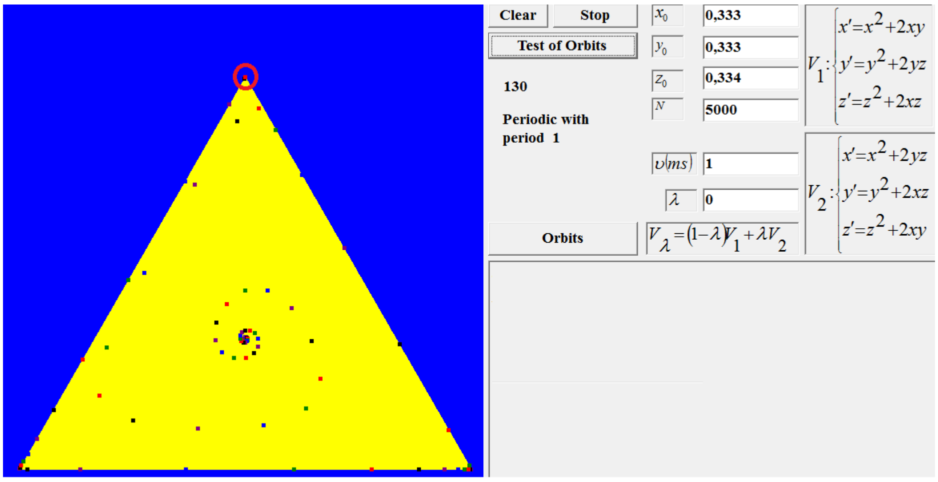


3-расм

60-қадамдан 69-қадамгача қуйи чегарада ҳаралатланиб, 70-қадамда симплекснинг чап қуйи учига етиб боради(4-расм). 71-итерациядан 119-итерациягача шу учида туриб, 120-итерациядан бошлаб симплекснинг чап чегараси бўйлаб ҳаракатланади ва 130-итерацияда унинг юқори учига етиб боради (5-расм).



4-расм



5-расм

130-итерациядан сўнг эса берилган нуқта фақат юқори учда қолади ва бошқа ҳеч қаерга силжимайди. Бу эса, симплекснинг юқори учи барча $(x_0^n;\ y_0^n;\ z_0^n)$, $n \geq 130$ нуқталар учун лимит нуқтаси эканлиги билдиради.

Хулоса: Мазкур алгоритм λ параметрнинг аниқ фиксирланган қийматида ҳосил бўлган Вольтерра операторининг динамикаси(нуқталарнинг траекториялари)ни ўрганишда, уларни амалий таҳлил қилишда ҳамда назарий баҳолашда ёрдам беради.

Фойдаланилган адабиётлар

1. *Бернштейн С.Н.* Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности // Ученые записки н.-и. каф. Укр. Отд. Мат.1924. Вып.1., с.83-115.

2. *Ганиходжаев Р.Н., Сарымсаков А.Т.* Математическая модель коалиции биологических систем // Докл. АН РУз. 1992. №3. с.14-17.

3. *Ганиходжаев Р.Н.* Исследование по теории квадратичных стохастических операторов // Дисс. на соиск. учен. степ. док. физ. мат. наук.Ташкент: ИМ АН РУз, 1993. 231 с.

4. *Любич Ю.И.* К математической теории наследственности // Доклады РАН. 1973. №5 (290). с.1028-1030.

5. *Мендель Г., Нодэн Ш., Сажрэ О.* Избранные работы // М.: Медицина, 1986. с.105-139 (Рус. пер. в кн.: Mendel G. Versuche uber Pflanzen-Hydriden // Verh. Naturforsch. Verein in Brunn. №4. с.3-47).

6. *Моран П.* Статистические процессы эволюционной теории // М.: Наука, 1973.

7. *Нарзиев Н.Б.* Алгебраические структуры, возникающие в задачах популяционной генетики// Дисс. на соиск.учен. степ. кан. физ.мат. наук. - Ташкент: ИМ АН РУз, 2011. с.108.

8. *Свирижев Ю.М., Пасеков В.П.* Основы математической генетики // М. Наука,1982. с.511.

9. *Kimura M., Ohta M.* Theoretical aspects of population genetics // Princeton: Univ. press., 1971. p.374.

10. *Ladra M., Omirov B.A., Rozikov U.A.* On dibaric and evolution algebras// arxiv: 1104. 2578v1 [math.RA] 13 Apr 2011.

11. *Reed M.L.* Algebraic structure of genetic inheritance // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 34(2), p.107-130 (1997).

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ В СТРАХОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Мамуров Э.Н.

Ташкентский финансовый институт, Узбекистан, Ташкент
mamurovin@mail.ru

В настоящее время математическая теория и модели страховой деятельности бурно развиваются в связи с теорией вероятностей, теорией игр, теорией рисков, теорией случайных процессов. Ниже приводим статические и динамические модели которые являются типичными в страхование.

1. Статическая модель. Пусть страховая компания реализует n страховых полисов. Сумма оплачиваемая по i-му страховому контракту является случайной величиной и обоз-начим ее через X_i. Тогда общая сумма оплачиваемая компанией тоже является случайной величиной и она определяется суммой

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_n. \tag{1}$$

Функция распределения $F(x)$ этой случайной величины называется также распределением риска страховой компании. Пусть M-математическое ожидание случайной величины S, т.е. $M(S) = M$. Если страховая компания реализует каждый полис по цене $M_1 = \frac{M}{n}$ то средний доход компании равен нулю. На практике компании к сумме полиса прибавят величину называемую страховой загрузкой и она служит для покрытия расходов по образованию страховой деятельности. Если L_i-загрузка прибавляемая к i-му полису, то капитал компании до начало страховых выплат определяется величиной

$$K + \sum_{i=1}^{n} L_i + M = R + M$$

Здесь K-начальный капитал, а $R = K + \sum_{i=1}^{n} L_i$ – так называемый свободный резерв компании.

Риск страховой компании характеризуется величинами R и $F(x)$. Через эти величины решаются задачи рисков и задачи по определению стоимости страховых полисов.

2. Динамическая модель. В этой модели вводится временной параметр t и проведение страховых выплат является случайным процессом. Текущий капитал компании также зависеть от временного параметра t и в качестве основной характеристикой деятельности компании считается вероятность разорения. Общая сумма страховых выплат компании в промежутке времени $(0, t]$ определяется случайным процессом

$$S(t) = X_1 + X_2 + ... + X_{N(t)}, \tag{2}$$

где $N(t)$-число страховых случаев происходящих в промежутке времени $(0, t]$. Обычно предполагается, что величина $N(t)$ не зависеть от случайных величин X_i и характеризуется интенсивностью α т.е. $M(N(t)) = \alpha$. В этом случае среднее значение величины $S(t)$ определяется равенством

$$M(S(t)) = M(N(t)) \cdot M(X_1) = \alpha\mu t, \qquad (\mu = M(X_1)).$$

В отличие от статической модели в динамической модели доход – $D(t)$ страховой компании в момент времени t равен

$$D(t) = K + (\alpha\mu + \lambda)t$$

где λ-коэффициент характеризующий загрузку. Текущий капитал страховой компании выражается случайным процессом

$$Y(t) = D(t) - S(t) = K + (\alpha\mu + \lambda)t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \tag{3}$$

В математических моделях страховой деятельности исследуются величины (1), (2), (3) и на их основе делаются выводы о компании.

Ознакомление студентов и магистров обучающихся по специальности "Страховое дело" вышеприведенными моделями и применяемых в них математическими методами имеет важное значение в подготовке квалифицированных специалистов.

Литература

1. *Ротарь В.И., Бенинг В.Е.* Введение в математическую теорию страхования. Обозрение прик-ладной и промышленной математики. 1994, Том 1, Выпуск 5.

2. *Мамуров Э.Н.* Об одной математической модели страхования. Материалы 6-Ферганской конференции Предельные теоремы и их приложения. 2011 г.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ФЛАТТЕРА ГИБКИХ ВЯЗКОУПРУГИХ УДЛИНЕННЫХ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ

Мансуров М., Эргашев А., Эсонов М.

Кокандский государственный педагогический институт, Узбекистан, Коканд
esonovm@mail.ru

Рассмотрим вынужденные колебания гибких вязкоупругих удлинчнных пластин и цилиндрических панелей.

Согласно [1], основное уравнение в безразмерных координатах запишется в виде

$$\begin{gathered} W_{tt} + \alpha_1 \left\{ (1-R^*)\, W_{xxxx} + 12\lambda^2 (1-R^*) \int_0^1 W dx - 6\,(1-R^*)\, W_{xx} \int_0^1 W_x^2 dx + \right. \\ \left. +12\lambda W_{xx} (1-R^*) \int_0^1 W dx - 6\lambda (1-R^*) \int_0^1 W_x^2 dx \right\} = z_0 \alpha_1 \overline{q}(x,t), \end{gathered} \tag{1}$$

где $W = \frac{\overline{W}}{h}$, $x = \frac{\overline{x}}{a}$, $\lambda = \frac{a^2}{Rh}$, $t = \frac{\bar{t}}{t_1}$, $t_1 = \sqrt{\frac{12(1-\mu^2)\rho a^4\alpha_1}{Eh^3}}$, $z_0 = \frac{12\left(1-\mu^2\right)a^4 q_0}{Eh^4}$, $\alpha_1 = \frac{1}{(\theta N\pi)^4}$, $q(x,t) = \frac{\overline{q}(x,t)}{q_0}$.

При движении удлиненной конструкции в потоке газа, возложено возникновение динамической неустойчивости конструкции – флаттера, который проявляется в быстром нарастании амплитуд колебаний. Для исследования данного явления согласно поршневой теорией Ильюшина в качестве $q(x,t)$ принимаем аэродинамическую нагрузку, т.е.

$$q(x,t) = \Delta p - p_c - BW_t + BVW_x - B_1V^2W_x^2$$

где $p_c = -\frac{\rho_c V_\infty^2}{ad}\int\limits_0^a W dx$, $B = \frac{\chi p_\infty}{V_\infty}$, $B_1 = \frac{\chi(\chi+1)p_\infty}{4V_\infty^2}$, $\Delta = const$ – статический перепад давлений, остальные обозначения приняты из [1]. Тогда в (1) $\overline{q}(x,t)$ принимает вид (при $q_0 = p_\infty$)

$$\overline{q}(x,t) = \frac{\Delta p}{p_\infty} + \lambda_c\left(\frac{a}{d}\right)\int\limits_0^1 W dx - MW_t + M_1M^*W_x - M_2{M^*}^2W_x^2. \tag{2}$$

Здесь

$$\lambda_c = \rho_c V_\infty^2\left(\frac{h}{a}\right), \quad M = \frac{\chi h}{V_\infty t_1}, \quad M_1 = \chi\left(\frac{h}{a}\right), \quad M^* = \left(\frac{V}{V_\infty}\right),$$

$$M_2 = \frac{\chi+1}{4\chi}M_1^2, \qquad z_0 = \frac{12\left(1-\mu^2\right)a_4 p_\infty}{Eh^4}.$$

Решим уравнение (1) при начальных:

$$W|_{t=0} = W_0(x), \qquad W_t|_{t=0} = 0 \tag{3}$$

и граничных условиях:

$$W|_{\substack{x=0\\x=1}} = 0, \quad W_{xx}|_{\substack{x=0\\x=1}} = 0 \tag{4}$$

Решение уравнение (1) ищем в виде

$$W(x,t) = \sum_{i=1}^{N} U_i(t)\phi_i(x) \tag{5}$$

где $\varphi_i(x) = \sin i\pi x$ – известные координатные функции, удовлетворяющие всем граничным условиям для $W(x,t)$.

Подставляя (5) в (1) учитывая (2), (3) и (4) согласно метода Бубнова-Галеркина будем иметь:

$$\ddot{U}_j(t) + \left(\frac{j}{N}\right)^4\left(1-R^*\right)U_j(t) + \frac{96\lambda^2\alpha_j}{jN^4\pi^6}\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i}{i}\left(1-R^*\right)U_i(t)+$$

$$+\frac{3j^2}{N^4}U_j(t)\sum_{i=1}^{N}i^2\left(1-R^*\right)U_i^2(t) - \frac{24\lambda j^2}{N^4\pi^6}U_j(t)\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i}{i}\left(1-R^*\right)U_i(t)-$$

$$-\frac{12\lambda\alpha_j}{jN^4\pi^3}\sum_{i=1}^{N}i^2\left(1-R^*\right)U_i^2(t) = z_0\alpha_1\left\{\frac{4\Delta p\alpha_j}{jp_\infty\pi} + 8\lambda_c\left(\frac{a}{d}\right)\frac{\alpha_j}{j\pi^2}\times\right.$$

$$\times\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i}{i}U_i(t) - M\dot{U}_j(t) + 2M_1M^*\sum_{i=1}^{N}iU_i(t)\left[\frac{\alpha_{j-i}}{j-i} + \frac{\alpha_{j+i}}{j+i}\right]-$$

$$-M_2 {M^*}^2 \pi \sum_{i,s=1}^{N} isU_i(t)\,U_s(t)\ \times \left[\frac{\alpha_{j-i+s}}{j-i+s}+\frac{\alpha_{j+i-s}}{j+i-s}-\frac{\alpha_{j-i-s}}{j-i-s}-\frac{\alpha_{j+i+s}}{j+i+s}\right]\Bigg\}, \qquad (6)$$

где $\alpha_i = \begin{cases} 1 \ \text{если}\ \ i - \text{нечетная} \\ 0 \ \text{если}\ \ i - \text{четная или}\ \ i = 0. \end{cases}$

Решение этой системы находим численным методом предложенным в [2]. Расчет произведен как в идеально упругой, так и вязкоупругой постановках. Численные результаты приведены в виде графиков и таблиц.

Литература

1. *Бадалов Ф.Б.* Метод степенных рядов в нелинейной наследственной теории вязкоупругости. Т.: Фан, 1980.

2. *Бадалов Ф.Б.* Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Т.: Мехнат, 1987.

3. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФРАЗВУКОВЫХ И СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ МОДЕЛИ "АТМОСФЕРА-ЗЕМЛЯ"С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА

Мартынов В.Н.[1], Михайлов А.А.[2]

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

[1]e-mail:vnm@nmsf.sscc.ru, [2]e-mail:imom@omzg.sscc.ru

В данной работе рассматривается решение задачи численного моделирования распространения инфразвуковых и сейсмических волн в пространственно-неоднородной модели "Атмосфера-Земля". Приведчнный алгоритм решения совмещчнной математической задачи для модели "Атмосфера-Земля"является продолжением результатов исследований, описанных в работах [1, 2], но в данной работе рассматривается распространение волн в случае криволинейной границы раздела сред. Полученные результаты численного моделирования позволяют исследовать влияние криволинейной границы на распространения инфразвуковых волн и эффект взаимодействия между волнами в литосфере и атмосфере.

Распространение акусто-гравитационных волн в изотермической атмосфере описывается линеаризованной системой уравнений Навье-Стокса в виде гиперболической системы первого порядка для трчхмерной Декартовой системы координат. Предполагается что плотность атмосферы и скорость ветра зависят от высоты.

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x} - u_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial y}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\rho g}{\rho_0}, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v_x \frac{\partial P}{\partial x} = c_0^2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_z \frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right] - u_z \frac{\partial P_0}{\partial z} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_x\frac{\partial\rho}{\partial x}=-\rho_0\left[\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]-u_z\frac{\partial\rho_0}{\partial z}. \tag{5}$$

Здесь g - ускорение силы тяжести, $\rho_0(z)$- плотность невозмущчнной атмосферы, $c_0^(z)$- скорость звука, $v_x(z)$- скорость ветра вдоль оси x, $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ - вектор скорости смещения частиц воздуха, P и ρ- соответственно возмущения давления и плотности под действием распространения волны. Нулевые подиндексы для физических параметров среды означают, что их значения задаются для невозмущенного состояния атмосферы.

Распространение сейсмических волн в литосфере описывается гиперболической системой первого порядка в терминах скоростей вектора смещения $\vec{u}$ и компонент тензора напряжений σ_{ij} согласно теории упругости. При этом полагается, что параметры среды (плотность и скорости продольных и поперечных волн) имеют зависимость только по двум координатам , а по третьей координате среда однородна. Данную постановку задачи принято называть 2.5-D задачей. Полагается, что граница раздела сред атмосфера и упругое полупространство проходит по плоскости $z=0$. В этом случае условие контакта двух сред при $z=0$ записывается как:

$$u_z|_{z=-0}=u_z|_{z=+0};\quad \left.\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial t}\right|_{z=-0}=\left.\left(\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial t}+\rho_0 g u_z\right)\right|_{z=+0};\quad \sigma_{xz}|_{z=-0}=\sigma_{yz}|_{z=-0}=0. \tag{6}$$

Задача решается при нулевых начальных данных

$$u_i|_{t=0}=\sigma_{ij}|_{t=0}=P|_{t=0}=\rho|_{t=0}=0,\qquad i=1,2,3\quad j=1,2,3. \tag{7}$$

Предлагаемый алгоритм решения основан на применении интегрального преобразования Лагерра по временной координате. Данный метод решения динамических задач теории упругости был впервые предложен в работе [3]. По пространственной y применяется конечное преобразование Фурье, а по координатам x и z используется разностный метод.

В результате сделанных преобразований получим систему линейных алгебраических уравнений, Которая может быть записана в векторной форме в виде:

$$(A+\frac{h}{2}E)\ \vec{W}=\vec{F}.$$

Последовательность компонент волнового поля в векторе решения $\vec{W}$ выбирается с учетом минимизации количества диагоналей в матрице A. При этом на главной диагонали матрицы решаемой системы уравнений специально располагаются компоненты, входящие в уравнения системы как слагаемые, имеющие в качестве сомножителя параметр h (параметр преобразования по Лагерру). За счет выбора значения параметра h имеется возможность существенно улучшать обусловленность матрицы системы.

Литература

1. *Михайленко Б. Г., Михайлов А. А.* Численное моделирование распространения сейсмических и акусто-гравитационных волн для модели Земля-Атмосфера при наличии ветра в атмосфере // СибЖВМ. 2014. Т. 17, № 2. С. 149-162.

2. *Михайлов А. А., Мартынов В. Н.* Математическое моделирование распространения акустико-гравитационных и сейсмических волн в неоднородной модели Земля-Атмосфера при наличии стратификации ветра в атмосфере // Математические заметки СВФУ. 2015. Т. 22, є 2. С. 92-105.

3. *Mikhailenko B. G.* Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // Applied Mathematics Letters. 1999. № 12. P. 105-110.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СПЛОШНЫХ СРЕД НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ УРАВНЕНИЙ

Мирзоев[1,2] А.А., Маткаримов[1] С.Ю., Назаров[2] Ш.Э.

[1]ТАСИ, Ташкент, [2]БухГУ, Бухара

[1]akmal_mirzo@mail.ru

Процесс деформации реального сплошного тела весьма сложен, поэтому построить математическую модель такого тела трудно даже при наличии эмпирических коэффициентов [1-3]. В действительности модель должна описывать такие свойства, как упругая деформация, пластическое и вязкое течение, ползучесть и релаксация и т.д. Если бы даже удалось создать такую модель, то она была бы слишком громоздкой для того, чтобы служить основой для решения задач, связанных с определением напряжений и деформаций в твердых телах. В связи с этим обычно пользуются более простыми моделями, описывающими лишь те механические свойства, которые наиболее существенны для рассматриваемой задачи.

Наиболее известными моделями такого типа являются упругое тело Гука (в уравнения (1): $A_0 = 1$, $B_0 = G$, $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0$) и ньютоновская вязкая жидкость (в уравнения (1): $A_0 = 1$, $B_1 = \mu$, $A_1 = A_2 = B_0 = B_2 = 0$), представляющие собой математические абстракции, лишенные физической реальности и тем не менее являющиеся полезными средствами для изучения реальных физических свойств.

Упругое тело является консервативной системой, т.е. механическая энергия, используемая для совершения деформации, накапливается в теле и может быть получена обратно приразгрузке. Вязкое тело, т.е. такое тело, в котором напряжение зависит от скорости деформации, является диссипативной системой, поскольку механическая энергия, затраченная на преодоление внутреннего трения, препятствующего деформированию, обращается в теплоту.

При математическом описании конечных деформаций упругого тела возникают определенные трудности, обойти которые можно, ограничившись рассмотрением бесконечно малых деформаций.

Рассмотрение конечных деформаций для вязких жидкостей не приводит к особым математическим затруднениям. Различия в математическом описании конечных деформаций для упругих тел и вязких жидкостей состоят в том, что механическое поведение упругого тела определяется напряжениями и деформациями, а механическое поведение вязких жидкостей - напряжениями и скоростями деформаций. При определении деформаций мы сопоставляем деформированное состояние с некоторым исходным состоянием, обычно с состоянием, свободным от напряжений. При конечном отклонении от этого со стояния математические формулы, определяющие деформации, становятся весьма сложными. Кроме того, при определении скоростей деформаций сопоставляют состояния в момент времени, разница между которыми равна dt. Отклонения между этими состояниями бесконечно малы, поэтому не возникает математических усложнений.

В упругих телах напряжение связано с мгновенным состоянием деформации, а в вязкой жидкости и пластических телах - с мгновенным состоянием течения; вязкое и пластическое течения связаны с диссипацией энергии и приводят к остаточным деформациям. В случае вязкого течения механическая энергия, которая диссипировалась при возникновении данной деформации, зависит от скорости деформации; в случае пластического течения диссипированная энергия не зависит от скорости деформации.

Математическую зависимость между напряжением деформаций и временем в виде линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами можно установить и без моделей, однако модели в значительной степени облегчают уяснение физической сущности механического поведения того или иного тела, а также дают возможность определить, обладает ли тело мгновенной упругой деформацией, запаздывающей упругой деформацией, релаксацией напряжений. Поскольку зависимости между напряжением, деформацией и временем определяются обычно линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, то в общем виде уравнение может быть записано следующим образом:

$$A_0\tau + A_1\dot{\tau} + A_2\ddot{\tau} = B_0\gamma + B_1\dot{\gamma} + B_2\ddot{\gamma}, \tag{1}$$

где A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2 - постоянные коэффициенты, которые определяют механические свойства изучаемого тела; τ - напряжение; γ - относительная деформация.

Для математического описания деформаций и напряжений исследуемого тела можно сначала в соответствии с экспериментальными данными подобрать подходящую модель, состоящую из упругих, вязких и деформационный инертности элементов или их комбинаций, а затем описать ее математически. Или же сразу подобрать тип уравнения, начиная с простейших видов, которое качественно описывает экспериментальную зависимость. Качественное совпадение находят по наличию или отсутствию мгновенной упругой деформации, запаздывающей деформации, остаточной деформации и релаксации напряжений. Постоянные коэффициенты находят, исходя из экспериментальных данных, и определяют количественное расхождение между выбранным уравнением и опытными данными.

Литература

1. *Рейнер М. Реология.* Пер. с англ. под ред. Э.И. Григолюка - М.: Наука, 1965. 324 с.
2. *Larson R.G.* The Structure and Rheology of Complex Fluids. Oxford University Press, Oxford,1999
3. *Mirzoev A.A.* Multiphase medium with complex rheology and their mechanical models. -TIIF-2015. Proceedings of the Tashkent international innovation forum,19-21.05.2015., Tashkent, - pp.165-169.

Построения вычислительных алгоритмов решения трехмерной задачи вытеснения

Каюмов Ш.

Ташкентский государственный технический университет имени И.Каримова, Ташкент, Узбекистан

m_hamdam@mail.ru

Известно, что движение жидкостей и газов в пористых средах связано с решением квазилинейных параболических уравнений в частных производных второго порядке, моделирующих эти движения. Пусть область D занята газом, а Ω- область, которая содержит водоносную зону. Предположим что, газоносная область "плавують"на водоносной структуре, и границы имеют большую протяженность по сравнению с размерами области D.

Требуется определить функцию $U(x,y,z,t)$ и подвижную границу $h(x,y,z,t)$ из системы дифференциальных уравнений в виде:

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{K(x,U)U}{\mu_2(U)Z(U)}\frac{\partial U}{\partial x_i}\Big) = M_1(x,U)\sigma_0\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{m(U)}{z(U)}U\Big) + F(x,t),\ x\in D,\ t>0, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{K(x,v)v}{\mu_b(v)Z(v)}\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big) = M(x,v)\sigma_1\frac{\partial}{\partial t}\Big(m(v)v\Big), \tag{2}$$

с начальными

$$u(x,0) = v(x,0) = \varphi_0(x),\ x\in\Omega\bigcup\overline{D}, \tag{3}$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = \varphi_1,\ \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = \varphi_2,\ \frac{\partial v}{\partial x_3}\Big|_{x_3=H_1} = \varphi_3,\ \frac{\partial v}{\partial x_3}\Big|_{x_3=H} = 0, \tag{4}$$

а также с условиями на контакте газ-вода

$$u(x,t)\Big|_{x_3=h} = v(x,t)\Big|_{x_3=h^+},\ \frac{K}{\mu_\imath}\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x_3=h^-} = \frac{K}{\mu_b}\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{x_3=h^+}, \tag{5}$$

$$m\sigma\frac{dh}{dt} = -\frac{K}{\mu_b}\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{x_3=h^-},\ h(x_1,x_2,0) = \omega_0, \tag{6}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $z = x_3$, $D = \{(x_1,x_2,x_3):\ h(x_1,x_2,t) \le \Gamma_1(x_1,x_2)\}$,

$$\Omega = \{(x_1,x_2,x_3):\ H(x_1,x_2,x_3) \le x_3 \le h(x_1,x_2,t)\}.$$

Ввиду сильной нелинейности краевых задач (1)-(6), построение точных решений почти невозможно. Для построения приближенных решений строим сетку:

$$\omega = \Big\{(x_1,x_2,x_3):\ x_1 = \sum_{i=1}^{N_1}\Delta x_i,\ x_2 = \sum_{j=1}^{N_2}\Delta y_j,\ x_3 = \sum_{k=1}^{N_3}\Delta z_k,$$

$$\Delta S_i = \frac{1}{2}\Big(\Delta S_{i+\frac12} + \Delta S_{i-\frac12}\Big),\ \Delta S_{i+\frac12} = S_{i+1} - S_i,\ \Delta S_{i-\frac12} = S_i - S_{i-1}\Big\}.$$

Тогда задача (1)-(6) переходить к конечноразностным уравнениям, после преоброзование их получим матричное уровнения:

$$C\frac{du}{dt} = A(t)U + g(t),\ \overline{C}\frac{dV}{dt} = \overline{A}(t)V + \overline{G}(t). \tag{7}$$

Интегрируя (7), от t_n до t_{n+1} по схеме

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi dt \approx [\varphi(t_{n+1}) + (1-\theta)\varphi(t_n)](t_{n+1} - t_n).$$

где $\theta = 1$, метод конечных разностей с интерполированием назад, при $\theta = 1/2$- метод центральных разностей (метод Кранка-Николсона).

Тогда (7) преходить к уравнениям:

$$\overline{\overline{A}}U_{n+1} = b_{n+1},\ \tilde{\tilde{A}}V_{n+1} = \tilde{\tilde{b}}_{n+1}, \tag{8}$$

где b_{n+1}, $\tilde{\tilde{b}}_{n+1}$– известные векторы, матрицы $\overline{\overline{A}}$ и $\tilde{\tilde{A}}$ семидиагональный.

Матричные уравнения решаетсястрого неявным методом (СНМ) Для первого выражение (8), она имеет вид: $(\overline{\overline{A}}^{(s)} + N)U_{n+1}^{(s+1)} = (\overline{\overline{A}}^{(s)} + N)U_{n+1}^{(s)} - (\overline{\overline{A}}U_{n+1}^{(s)} - b_{n+1})$ и если $R^{(s)} = A^{(s)}U_{n+1}^{(s)} - b_{n+1}$, $\delta_{n+1}^{(s+1)} = U_{n+1}^{(s+1)} - U_{n+1}^{(s)}$, то получим $(\overline{\overline{A}}^{(s)} + N)\delta_{n+1}^{(s+1)} = -R^{(s)}$ или $L\overline{V}\delta_{n+1}^{(s+1)} = -R^{(s)}$, где L и $\overline{V}$– нижние и верхние треугольные матрицы, имеющие по четыре неизвестных элемента в строке. Матрицы L и $\overline{V}$ вычисляется по формулам.

$$Z_{ijk} = Z_{ijk}[1 + \alpha(b_{i,j,k-1} + f_{i,j,k-1})^{-1}],\ g_{ijk} = g_{ijk}[1 + \alpha(b_{i,j-1,k} + f_{i,j-1,k})^{-1}],$$

$$C_{ijk} = C_{ijk}[1 + \alpha(S_{i-1,j,k} + f_{i-1,j,k})^{-1}],\ A_{ijk} = Z_{ijk}b_{i,j,k-1},\ C_{ijk} = g_{ijk}f_{i-1,j,k},$$

$$C_{ijk} = C_{ijk}f_{i-1,j,k},\ W_{ijk} = C_{ijk}f_{i-1,j,k},\ T_{ijk} = Z_{ijk}f_{i,j,k-1},$$

$$U_{ijk} = g_{ijk}S_{i,j-1,k},\ \partial_{ijk} = a_{ijk} + \alpha[A_{ijk} + C_{ijk} + g_{ijk} + W_{ijk} + T_{ijk} + U_{ijk}] -$$
$$-C_{ijk}b_{i-1,j,k} - g_{ijk}f_{i,j-1,k} - r_{ijk}h_{i,j,k-1},\ b_{ijk} = \partial^{-1}_{ijk}[b_{ijk} - \alpha(A_{ijk} + C_{ijk})],$$
$$f_{ijk} = \partial^{-1}_{ijk}[f_{ijk} - \alpha(T_{ijk} + C_{ijk})],\ S_{ijk} = \partial^{-1}_{ijk}[S_{ijk} - \alpha(W_{ijk} + U_{ijk})].$$

После определения L и U получим вектор $L\overline{U}^{(s+1)}_{n+1} = R^{(s)}$.

Прямой подстановкой решается уравнения

$$\overline{U}^{(s+1)}_{n+1} = \partial^{-1}_{ijk}\Big[R^{(s)}_{ijk} - Z^{-1}_{i,j,k}\overline{U}^{(s+1)}_{ijk-1} - g_{i,j,k}\overline{U}^{(s+1)}_{ij-1k} - C_{i,j,k}\overline{U}^{(s+1)}_{i-1jk}\Big].$$

Вектор $\delta^{(s+1)}_{n+1}$ находится из $U\delta^{(s+1)}_{n+1} = \overline{U}\delta^{(s+1)}_{n+1}$, обратной подстановкой, как решения уравнения $\delta^{(s+1)}_{ijk} = \overline{U}^{(s+1)}_{ijk} - b_{ijk}\delta^{(s+1)}_{i+1,jk} - f_{ijk}\delta^{(s+1)}_{i,j+1,k} - S_{ijk}\delta^{(s+1)}_{i,j,k+1}$. В этих уравнениях $Z_{ij1} = h_{ijk} = 0$, если $i = 1, 2, 3, ..I$, $j = 1, 2, 3, 4, .J$; $g_{i1k} = f_{ijk} = 0$ если $i = 1, 2, 3, ..I$, $k = 1, 2, 3, 4, .K$; $C_{1jk} = b_{ijk} = 0$, если $j = 1, 2, 3, ..J$, $k = 1, 2, 3, 4, .K$, .

После определения U_{ijk} и V_{ijk} производится уточнение положения ГВК поформуле (6) предварительно дискретизируя $h_{e+1} = h_e - G_{ijk}P_{ijk}$, где $P_{ijk} = (\frac{\partial V}{\partial n}\Big|_{x_3=h^+})_{ijk}$, которые можно аппроксимировать первым или вторым порядком точности. При необходимости нетрудно улучшить значения Г по формуле Эйлера.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ДУФФИНГА С ПАМЯТЬЮ

Ким В.А.[1], Паровик Р.И.[1,2],

[1] Камчатский госудасртвенный университет имени Витуса Беринга, Россия, г. Петропавловск-Камчатский)

[2] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Россия, Камчаткский край, с. Паратунка

[1]e-mail: valentinekim93@mail.ru, [2]e-mail: romanparovik@gmail.com

В работе рассматривается математическая модель нелинейного осциллятора Дуффинга с памятью, которая представляет собой задачу Коши. Модельное уравнение является уравнением с производными дробных порядков Герасимова-Капуто. Строиться явная конечно разностная схема для численного решения задачи Коши. Исследуются вопросы устойчивости и сходимости схемы. С помощью разработанной схемы были построены осциллограммы и фазовые траектории. С помощью сечений Пуанкаре выявлены периодические и хаотические режимы колебаний, построена карта динамических режимов.

Рассмотрим следующую задачу Коши для функции смещения $x(t) \in C^2[0, T]$:

$$\partial^{\beta}_{0t}x(\eta) + \lambda\partial^{\gamma}_{0t}x(\eta) + x(t)^3 - x(t) = a\sin(bt), x(0) = \alpha_1, \dot{x}(0) = \alpha_2, \qquad (1)$$

где $\partial^{\beta}_{0t}x(\eta) = \dfrac{1}{\Gamma(3-\beta)}\int\limits_0^t \dfrac{\ddot{x}(\eta)\,d\eta}{(t-\eta)^{\beta-1}}$ и $\partial^{\gamma}_{0t}x(\eta) = \dfrac{1}{\Gamma(2-\gamma)}\int\limits_0^t \dfrac{\dot{x}(\eta)\,d\eta}{(t-\eta)^{\gamma}}$ — операторы дробного дифференцирования Герасимова-Капуто порядков $1 < \beta < 2, 0 < \gamma < 1$, λ — вязкое трение, a и b – амплитуда и частота гармонического внешнего воздействия.

Задача Коши (1) описывает нелинейный осциллятор Дуффинга с памятью [1]. Случай, когда $\beta = 2$ в уравнении (1) рассмотрен в работе [2], а его обобщение при $\gamma(t)$ в работе [3], однако в терминах оператора Римана-Лиувилля. В случае, когда $\beta = 2$ и $\gamma = 1$ задача Коши (1) переходит в классическую задачу Коши для осциллятора Дуффинга.

Далее строится для численного решения задачи Коши явная конечно-разностная схема по аналогии с работами [4,5], исследуется устойчивость и сходимость схемы, с помощью которой строятся осциллограммы и фазовые траектории. Исследуется периодические и хаотические колебательные режимы предложенного осциллятора.

Работа выполнена по госзаданию КамГУ им. Витуса Беринга, НИР "Применение дробного исчисления в теории колебательных процессов є рег. АААА-А17-117031050058-9.

Литература

1. *Parovik R.I.* Mathematical modeling of nonlocal oscillatory Duffing system with fractal friction //Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2015. vol. 10. no 1. pp. 16–21.

2. *Syta A., Litak G., Lenci S., Scheffler M.* Chaotic vibrations of the Duffing system with fractional damping // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2014. vol. 24. no 1. 013107.

3. *Kim V.A.* Duffing oscillator with external harmonic action and variable fractional riemann-liouville derivative characterizing viscous friction // Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2016. vol. 13. no 2. pp. 46–49.

4. *Паровик Р.И.*Дробное исчисление в теории колебательных систем // Современные наукоемкие технологии. 2017. №. 1. С. 61–68.

5. *Parovik R.I.* Explicit finite-difference scheme for the numerical solution of the model equation of nonlinear hereditary oscillator with variable-order fractional derivatives // Archives of Control Sciences. 2016. vol. 26. no 3. pp. 429–435.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСЦИЛЛЯТОРА ФИТЦХЬЮ-НАГУМО С ПАМЯТЬЮ

Липко О.Д.[1], Паровик Р.И.[1,2],

[1] Камчатский госудасртвенный университет имени Витуса Беринга, Россия, г. Петропавловск-Камчатский)

[2] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Россия, Камчаткский край, с. Паратунка

[1]e-mail: valentinekim93@mail.ru, [2]e-mail: romanparovik@gmail.com

В работе исследована математическая модель динамической системы ФитцХью-Нагумо с учетом эффекта эредитарности. Модель была предложена Джин-Ичи Нагумо, Сугуру Аримото и Сюдзи Йошизава [1] в 1962 году, а годом ранее - Ричардом ФитцХью [2] для математического описания распространения нервного импульса в мембране. Данная модель описывает простейшую физиологическую модель с двумя переменными — ингибитором и активатором [3]. Она представляет собой упрощенную модель Ходжкина-Хаксли. Термин «эредитарность» используется для описания эффекта последействия, или памяти, а также примерно эквивалентен понятиям наследственности, запаздывания [4]-[6]. Математическое описание эредитарного осциллятора представляло собой интегро-дифференциальное уравнение с ядром, которое называется функцией памяти. В данной работе функция памяти является степенной функцией. Тогда интегро-дифференциальные уравнения можно переписать как дифференциальные уравнения дробных порядков, теория которых достаточно хорошо разработана [7]. Обобщенная математическая модель содержит уравнение с производными дробных порядков в смысле Герасимова-Капуто. Решается она с помощью конечно-разностной схемы [8]-[9].

Рассмотрим следующее уравнение для смещения $x\,(t) \in C^2[0,T]$:

$$\int\limits_0^t K_1(t-\tau)\ddot{x}(\tau)d\tau - c(x^2(t)+p)\int\limits_0^t K_2(t-\tau)\dot{x}(\tau)d\tau+, \tag{1}$$

$$+qx(t)+gx^3(t)-a-bz=0,$$

где $K_1(t-\tau)$ и $K_2(t-\tau)$ — функции памяти, характеризующие эредитарность; a, b, c — константы, удовлетворяющие условиям $1-2b/3<a<1$, $0<b<1$, $b<c^2$, $x(t)$ — мембранный потенциал, z — интенсивность раздражителя, константа в первом приближении, которая также может иметь вид прямоугольного импульса или дельта-функции, $t \in [0,T]$ — время процесса, $T>0$ — время моделирования.

Функции памяти в уравнении (1) могут быть любыми, но интерес представляет именно функции памяти, которые являются степенными функциями. В этом случае говорят, что эредитарная система обладает частичной памятью. Выберем функции памяти в виде:

$$K_1(t-\tau)=\frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, K_2(t-\tau)=\frac{(t-\tau)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}, 1<\alpha<2, 0<\beta<1, \tag{2}$$

где $\Gamma(t)$ — гамма-функция Эйлера.

Подставим данные функции памяти (2) в интегро-дифференциальное уравнение (1), и тогда получим следующую задачу Коши:

$$\partial_{0t}^{\alpha}x(\tau)-c(x^2(t)+p)\partial_{0t}^{\beta}x(\tau)+qx(t)+gx^3(t)-a-bz=0, x\,(0)=\phi, \dot{x}\,(0)=\eta \tag{3}$$

где дифференциальные операторы

$$\partial_{0t}^{\alpha}x(\tau)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int\limits_0^t\frac{\ddot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}, \quad \partial_{0t}^{\beta}x(\tau)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int\limits_0^t\frac{\dot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\beta}},$$

определены в смысле Герасимова-Капуто с дробными порядками $1<\alpha<2$, $0<\beta<1$.

Замечание.Также следует заметить, что в предельном случае, когда $\alpha=2$, $\beta=1$ уравнение (3) переходит в классическое уравнение ФитцХью-Нагумо [2]. Отметим, что уравнение (3) содержит кубическую нелинейность, характерную для осциллятора Дуффинга [10], а также квадратичную нелинейность при коэффициенте трения, характерную для осциллятора Ван дер Поля [11].

Далее была разработана компьютерная программа, которая реализует численную конечно-разностную схему для решения задачи Коши (3), согласно работам [12],[13], построены иисследованы осциллограммы и фазовые таректории эредитарной колебательной системы.

Литература

1. *Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc. IRE. 2016. vol. 50. pp. 2061–2070.

2. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophysical Journal. 1961. vol. 1. pp. 446–466.

3. *Литвинов Р. Г.* Разработка и исследование алгоритма для оценки электрической активности сердца. —Томск: Национальный исследовательский томский политехнический университет. 2016. 71 с.

4. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. — М.: Наука. 1982.

5. *Ризниченко Г. Ю.* Лекции по математическим моделям в биологии. — 2-е изд. испр. и доп. — М. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2010. — 560 с.

6. *Максимов А. Г.* Анализ решений типа кбегущий импульсъ сложной формы в распределенной экономической среде, описываемой моделью ФитцХью-Нагумо // Труды Института системного анализа Российской академии наук. 2013. Т. 63. №1. С. 30–37.

7. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. "Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.

8. *Липко О. Д.* Эредитарное модельное уравнение Фитцхью-Нагумо // Международный студенческий научный вестник. — 2017. — №2. — С. 28–28.

9. *Липко О. Д.* Динамическая система ФитцХью-Нагумо // Материалы Международной научной конференции кАктуальные проблемы прикладной математики и физикиъ Нальчик: ИПМА КБНЦ РАН, 2017. С. 126–127.

10. *Новикова Е.Р.* Математическая модель эредитарного осциллятора Ван дер поля-Дуффинга // Международный студенческий научный вестник. 2017. №2. С. 40–40.

11. *Паровик Р.И.* Об исследовании устойчивости эредитарного осциллятора Ван-дер-Поля // Фундаментальные исследования. — 2016. — №3-2. — С. 283–287.

12. *Паровик Р.И.* Конечно-разностные схемы для фрактального осциллятора с переменными дробными порядками // Вестник КРАУНЦ. Физико-математический. — 2015. — №2(11). — С. 88–85.

13. *Parovik R.I.* Explicit finite-difference scheme for the numerical solution of the model equation of nonlinear hereditary oscillator with variable-order fractional derivatives //Archives of Control Sciences. 2016. vol. 26. no. 3. pp. 429–435.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕНОСА РАДОНА В ГРУНТЕ КОНЕЧНОЙ МОЩНОСТИ

Першина М.А.[1], Паровик Р.И.[1,2],

[1] Камчатский госудасртвенный университет имени Витуса Беринга, Россия, г. Петропавловск-Камчатский)

[2] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Россия, Камчаткский край, с. Паратунка

[1]e-mail: ciceronchik@mail.ru, [2]e-mail: romanparovik@gmail.com

Математическое моделирование процессов переноса радона (222Rn) является актуальной задачей в силу различных приложений. Одним из таких приложений является изучение предвестников сильных землетрясений с целью их возможного прогнозирования [1]. В этих работах показано, что радон является индикатором напряженно-деформированного состояния геосреды и наблюдаются его отклики в поле подпочвенного радона в виде различных аномалий.

Математическое моделирование процессов переноса радона рассматривается в рамках эманационного метода, который подробно изложен в работ [2,3]. Как правило, основной вклад в механизм переноса Rn, вносят процессы диффузии и адвекции, однако на миграционную способность Rn влияют метеорологические условия, дебит грунтовых вод, эффузия, геологических параметров и свойства геосреды и т.д. [2,3]. Поэтому математическая модель переноса Rn в геосреде принимается с некоторыми допущениями.

В работе мы будем предполагать, что нестационарный перенос Rn осуществляется в однородном слое пористого грунта только за счет диффузионно-адвективного механизма, также считаем, что влияние метеоусловий на процесс переноса Rn незначительно и им можно пренебречь. В работе [4] была рассмотрена задача переноса радона в пористом грунте бесконечной мощности. Рассмотрим следующую задачу.

Задача. *Имеется эманирующий однородный слой грунта толщиной l со свободной эманации. Требуется найти диффузионно-адвективное распределение объемной активности радона $A(z,t)$ во времени и пространстве.*

$$\frac{\partial A(z,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial z^2}+v\frac{\partial A(z,t)}{\partial z}-\lambda\left(A(z,t)-A_\infty\right),0<z<l. \tag{1}$$

$$1)\ z=0,A=0,\ 2)\ z=l,A=A_\infty,3)\ t=0,A=A_\infty. \tag{2}$$

где D - коэффициент диффузии Rn в грунте, м^2/с; v - скорость адвекции Rn в грунте, м/с; λ - постоянная распада Rn, 1/с; $A_\infty=K_{em}A_{Ra}\rho_s(1-\eta)$ - объемная активность радона, который находится в радиоактивном равновесии с радием (^{226}Ra) некоторой глубине; K_{em} - коэффициент эманирования Rn, от. ед.; A_{Ra} - удельная активность ^{226}Ra, Бк/кг; ρ_s- плотность твердых частиц грунта, кг/м^3; η - пористость, от. ед.

Используя интегральное преобразование Лапласа, перейдем к изображению $F(z,p)$:

$$D\frac{d^2F(z,p)}{dz^2}+v\frac{dF(z,p)}{dz}-(p+\lambda)F(z,p)-\frac{A_\infty(p+\lambda)}{p}=0, \tag{3}$$

$$1)\ z=0,F=0,\ 2)\ z=l,F=\frac{A_\infty}{p}. \tag{4}$$

Решение задачи (3) и (4) можно записать так:

$$F(z,p)=\frac{A_\infty}{p}\left(1+\frac{\exp\left(-\frac{zv}{2D}\right)\sinh\left((z-l)\sqrt{\frac{\lambda+p}{D}+\frac{v^2}{4D^2}}\right)}{\sinh\left(l\sqrt{\frac{\lambda+p}{D}+\frac{v^2}{4D^2}}\right)}\right), \tag{5}$$

$\sinh(z)=\dfrac{\exp(z)-\exp(-z)}{2}$ — гиперболический синус.

Так как по изображению (5) невозможно получить точно оригинал, например согласно работе [5], то далее в работе мы с помощью алгоритма построения численной квадратурной формулы повышенной точности [6] для изображения (5), строиться решение задачи. На основе полученного решения, были построены расчетные кривые распределения радона в грунте конечной мощности [7].

Алгоритм планируется использовать в решении более общей задачи переноса радона во многослойной геологической среде по аналогии с работой [8].

Литература

1. *Фирстов П.П., Рудаков В.П.*Результаты регистрации подпочвенного радона в 1997Ц2000 гг. на Петропавловск-Камчатском геодинамическом полигоне // Вулканология и сейсмология. 2002. є 6. С. 1Ц16.

2. *Новиков Г.Ф.* Радиометрическая разведка. Л: Недра, 1989. 407 с.

3. *Паровик Р.И.* Математические модели классической теории эманационного метода. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2014. 128 с.

4. *Паровик Р.И.*Модель нестационарной диффузии - адвекции радона системе грунт Ц атмосфера // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2010. Т. 1. є1. С. 39-45

5. *Диткин В.А., Прудников А.П.*Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965. 465 с.

6. *Матвеева Т.А.*Некоторые методы обращения преобразования Лапласа и их приложения. Дисс. канд. физ.-мат. наук. Санкт-Петербург. 2003. 117 с.

7. *Parovik R.I.* Radon transport model into a porous ground layer of finite capacity // E3S Web of con. Electronic resource. 2017. pp. 03004.

8. *Yakovleva V.S., Parovik R.I.* Solution of diffusion-advection equation of radon transport in many-layered geological media // Nukleonika. 2010. vol. 55. no 4. pp. 601-606.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ОДНОЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ БЛОЧНО-ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ

Расулов Т. Х.

Бухарский государственный университет, Узбекистан, Бухара
e-mail: rth@mail.ru

Блочно-операторная матрица - это матрица, элементы которой являются линейными операторами в банаховом или гильбертовом пространствах [1]. Одним из специальных классов блочно-операторных матриц являются Гамильтонианы системы с несохраняющимся числом квантовых частиц на целочисленной решетке. Их количество может быть неограниченным, как в случае моделей спин-бозонов [2, 3] или ограниченным, как в случае урезанных моделей спин-бозонов [4, 5]. Отметим, что такие системы обычно возникают в задачах физики твердого тела, квантовой теории поля, статистической физики, магнитогидродинамики, квантовой механики и т.д.

В настоящей работе рассматривается линейная самосопряженная неограниченная блочно-операторная матрица H размера 2×2 в прямой сумме двух гильбертовых пространств. При некоторых естественных предположениях, получены асимптотические формулы для числа собственных значений оператора H, лежащих вне существенного спектра.

Пусть $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ - две гильбертовы пространства. В прямой сумме $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ рассмотрим блочно-операторную матрицу H размера 2×2 :

$$H := \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12}^* & H_{22} \end{pmatrix}.$$

Здесь $H_{11} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ - линейный ограниченный самосопряженный оператор, $H_{12} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ - линейный ограниченный оператор, и $H_{22} : \mathcal{H}_2 \supset D(H_{22}) \to \mathcal{H}_2$ - линейный неограниченный самосопряженный оператор с ограниченным существенным спектром.

Тогда оператор H является линейным самосопряженным оператором в $\mathcal{H}$ с областью определения $D(H) = \mathcal{H}_1 \oplus D(H_{22})$.

Если вводим блочно-операторные матрицы

$$H_0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_{22} \end{pmatrix}, \quad V := \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12}^* & 0 \end{pmatrix}$$

в $\mathcal{H}$, то $H_0 = H_0^*$ и $V = V^*$ такие, что $D(H_0) = D(H)$ и $D(V) = \mathcal{H}$. Следовательно, оператор H записывается как $H = H_0 + V$.

Рассмотрим случай когда для некоторого (и следовательно, для всех) $z \in \rho(H) \cap \rho(H_0)$ разность резольвент имеет конечный ранг:

$$T = (H - zI)^{-1} - (H_0 - zI)^{-1}, \quad \operatorname{rank} T = \dim R(T) = r < \infty, \tag{1}$$

где I-единичный оператор в $\mathcal{H}$. Тогда (даже, если T только компактно) из аналитической теоремы Фредгольма следует равенство

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma_{\text{ess}}(H_0).$$

При этом оператор H также имеет ограниченный существенный спектр.

Рассмотрим типичный пример когда выполняется условие (1).

Лемма 1. *Если* $\operatorname{rank} V = r < \infty$, *то имеет место* (1).

Лемма 2. *Если* $z \in \rho(H) \cap \rho(H_0)$ *и оператор* $V(H_0 - zI)^{-1}$ *является компактным, то оператор* T *также является компактным.*

Замечание 1. *Из определения оператора* V *видно, что оно имеет конечный ранг тогда и только тогда, когда операторы* H_{11}, H_{12} *имеют конечный ранг.*

Обозначим через $\sharp\{\cdot\}$ мощность множества и через $N_{(a,b)}(H)$ число собственных значений оператора H, с учетом кратности, лежащих в $(a, b) \subset \mathbf{R} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H)$, т.е.

$$N_{(a,b)}(H) = \dim E_{(a,b)}(H)\mathcal{H}.$$

Один из основных результатов настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть операторы* H *и* H_0 *удовлетворяют условию* (1) *и предположим, что существенный спектр оператора* H_0 *имеет следующий вид*

$$\sigma_{\text{ess}}(H_0) = \bigcup_{n=1}^{m} [a_{2n-1}, a_{2n}] \tag{2}$$

такое, что $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2m}$ *и* $m < \infty$. *Пусть* a_0 *и* a_{2m+1} *фиксированные вещественные числа с условиями* $a_0 < a_1$ *и* $a_{2m+1} > a_{2m}$. *Тогда для любых* $n = 0, \ldots, m$ *имеем*

$$\sharp(\sigma_{\text{disc}}(H) \cap (a_{2n}, a_{2n+1})) = \infty \Leftrightarrow \sharp(\sigma_{\text{disc}}(H_0) \cap (a_{2n}, a_{2n+1})) = \infty;$$

в этом случае, обе точки a_{2n}, a_{2n+1} *являются точками накапления собственных значений и*

$$\lim_{z \nearrow a_{2n+1}} \frac{N_{(a_{2n}+\delta_n,\, z)}(H)}{N_{(a_{2n}+\delta_n,\, z)}(H_0)} = \lim_{z \searrow a_{2n}} \frac{N_{(z,\, a_{2n+1}-\delta_n)}(H)}{N_{(z,\, a_{2n+1}-\delta_n)}(H_0)} = 1,$$

где $0 < \delta_n < a_{2n+1} - a_{2n}$.

Часто нам придется рассмотреть положительные или отрицательные компактные возмущения оператора H_0. Следующая теорема показывает, что конечность или бесконечность дискретного спектра оператора H_0 сохраняется при таких возмущениях.

Теорема 2. *Пусть* V *компактный оператор с условием* $V > 0$ (*соответственно* $V < 0$) *и для существенного спектра оператора* H_0 *имеет место равенство* (2). *Если дискретный спектр оператора* H_0 *в* $(a_{2n} + \delta_n, a_{2n+1})$ (*соответственно* $(a_{2n}, a_{2n+1} - \delta_n)$) *конечен* (*бесконечен*), *то такое же утверждение также верно для оператора* H *в* $(a_{2n} + \delta_n, a_{2n+1})$ (*соответственно* $(a_{2n}, a_{2n+1} - \delta_n)$), *где* $0 < \delta_n < a_{2n+1} - a_{2n}$.

Литература

1. *Tretter C.* Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. London: Imperial College Press, 2008. 297 p.

2. *Spohn H.*Ground states of the spin-boson Hamiltonian // Comm. Math. Phys. 1989. V. 123, P. 277-304.

3. *Hübner M., Spohn H.*Spectral properties of the spin-boson Hamiltonian // Ann. Inst. Henri Poincaré. 1995. V. 62, No 3. C. 289-323.

4. *Жуков Ю.В., Минлос Р.А.*Спектр и рассеяние в модели "спин-бозон"с не более чем тремя фотонами // Теор. и матем. физика. 1995. Т. 103, є 1. С. 63-81.

5. *Minlos R.A., Spohn H.*The three-body problem in radioactive decay: the case of one atom and at most two photons // Topics in Statistical and Theoretical Physics, American Mathematical Society Translations–Series 2. 1996. V. 177. C. 159-193.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ АДСОРБЦИИ ВОДОРОДА НА ФРАКТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рехвиашвили С.Ш.[1], Мурга З.В.[2]

[1] Институт прикладной математики и автоматизации, Россия, Нальчик
[2] Российский университет дружбы народов, Россия, Москва
[1]rsergo@mail.ru, [2]z.pskhu@mail.ru

В данной работе рассмотрено дисперсионное взаимодействие Ван-дер-Ваальса нейтрального атома с веществом фрактальной структуры. В аналитическом виде получена обобщенная формула для потенциала взаимодействия, который определяется дробно степенной функцией от расстояния. Показано, что степень потенциала зависит от фрактальной размерности объема. Вычислены сечение рассеяния и частота столкновений атомов водорода с фрактальным континуумом в квантовом (квазиклассическом) приближении при произвольном значении фрактальной размерности.

Найдено уравнение изотермы адсорбции атомов водорода на фрактальной поверхности. Данное уравнение совпадает по виду с уравнением Ленгмюра-Фрейндлиха. Для случая гладкой поверхности из этого уравнения следует уравнение Ленгмюра. При малых значениях давлений получается уравнение Фрейндлиха с показателем, зависящим от фрактальной размерности поверхности. При малых давлениях и для гладкой поверхности адсорбента получается уравнение Генри. Таким образом, показано, что показатель степени в эмпирическом уравнении Фрейндлиха определяется фрактальной размерностью поверхности. Ряд опытных данных указывает на то, что показатель степени в изотерме Фрейндлиха зависит от температуры. В этом случае может происходить изменение фрактальной размерности поверхности структуры, что можно идентифицировать как фазовый переход второго рода на поверхности материала. Такие переходы всегда происходят раньше, чем объемные структурные превращения, и могут иметь место даже в том случае, когда фазовые переходы в объеме вообще отсутствуют. Материалы доклада будут опубликованы в [1].

Литература

1. *Рехвиашвили С.Ш., Мурга З.В.* Адсорбция водорода на фрактальной поверхности // Конденсированные среды и межфазные границы. 2017. № 4. (принято в печать).

Алгоритм нахождения экстремальной функции и нормы функционала погрешности квадратурной формулы типа Фурье в непериодическом пространстве Хермандера

Шадиметов Х.М.[1],Шадманов И. У.[2]

[1]Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта,Узбекистан,Ташкент
[2] Бухарский государственный университет, Узбекистан, Бухара
o_jalolov@mail.ru

С.Л.Соболев рассмотрел проблему построения оптимальных решетчатых формул над пространством $L_2^{(m)}\left(R^n\right)$ и нахождение оптимальных коэффициентов свел к решению дискретной задачи типа Винера - Хопфа (см[1]).
В настоящей работе рассмотрим следующую квадратурную формулу:

$$\int_0^1 \ell^{2\pi i\sigma x} f(x)dx \approx \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta f(x_\beta), \tag{1}$$

где соответственно, C_β и x_β называют коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1), $f(x)$ является элементом гильбертова пространства Хермандера $H_2^\mu(R)$ [2] и назовем ее квадратурную формулу типа Фурье.
Определения 1. Пространство $H_2^\mu(R)$ определяется как замыкания пространства бесконечно дифференцируемых функций, убивающих на бесконечности быстрее любой отрицательной степени, которая норма функций определяется следующим образом:

$$\|f \mid H_2^\mu(R)\| = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \left|F^{-1}[\mu(\xi)\cdot F[f^c(x)](\xi)](x)\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $f^c\left(x\right)$ класс функций, следы которых в областиR совпадают, F-преобразование Фурье, $\mu(\xi)$ бесконечно дифференцируемая, $\mu > 0$, R и F^{-1} прямое и обратное преобразование Фурье. Отметим, что условие

$$\nu_m(x) = \left(F^{-1}\left(\frac{1}{\mu(\xi)}\right)\right)(x) \in L_2(R),$$

обеспечивает вложение пространстве $H_2^\mu(R)$ в $C(R)$ - непрерывные функции. Условие вложения пространства $H_2^\mu(R)$ в пространство непрерывных функций $C(R)$ является необходимом условием функциональном подходе к теории квадратурных и кубатурных формул.
Рассмотрим квадратурную формулу типа Фурье вида (1).
Погрешностью квадратурной формулы (1) называется разность

$$\ell(f) =< \ell_N, f(x) >= \int_0^1 \ell^{2\pi i\sigma x} f(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta f(x_\beta), \tag{2}$$

и этой разности (2) соответствует функционал погрешности $\ell_N\left(x\right)$, который имеет вид

$$\ell_N(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x)\ell^{2\pi i\sigma x} - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x - x_\beta). \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon_{[0,1]}(x)$- индикатор отрезка [0,1], $\delta(x)-$ дельта - функция Дирака.
Качество квадратурной формулы оценивается при помощи нормы функционала погрешности :

$$\left\|\ell_N \mid H_2^{\mu^*}(R)\right\| = \sup_{f(x)\neq 0} \frac{|\ell(f)|}{\|f\, |H_2^\mu(R)\,\|}.$$

Если

$$\left\| \overset{0}{\ell}_N | H_2^{\mu *}(R) \right\| = \inf_{C_\beta, x_\beta} \sup_{||f|| \neq 0} \frac{|< \ell_N(x), f(x) >|}{\| f | H_2^{\mu}(R) \|},$$

то говорят , что функционала $\overset{0}{\ell}_N(x)$ соответствует оптимальной квадратурной формуле в $H_2^{\mu}(R)$. Справедлива следующая

Теорема. Экстремальная функция функционала погрешности (3) квадратурной формулы (1) имеет вид

$$\psi_e(x) = [\ell^{2\pi i \sigma x} \cdot \varepsilon_{[0],1}(x)] * \nu_m(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \nu_m(x - h\beta),$$

квадрат нормы функционала погрешности $\ell_N(x)$ в пространстве Хермандера $H_2^{\mu}(R)$ имеет следующий вид

$$\left\| \ell_N \left| H_2^{\mu *}(R) \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| [\ell^{2\pi i \sigma x} \cdot \varepsilon_{[0],1}(x)] * \nu_m(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \nu_m(x - h\beta) \right|^2 dx.$$

Литература

1. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука 1974. - 808 с.

2. *Валевич Л.Р., Панеях Б.П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения. УМН. XX,1(121),165,3.

О ПОВЕДЕНИЯХ ТРАЕКТОРИИ ОДНОГО КУБИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Хамраев А.Ю.

Каршинский государственный университет, Узбекистан, Карши

khamrayev-a@yandex.ru

В данной работе для одного вольтерровского кубического оператора на двумерном симплексе найдены все неподвижние точки и польностью изучены траектории операторов.

Многочисленные задачи биологии решаются применением теории меры и теории динамических систем. Эти динамические системы определяются итерациями нелинейных операторов. Дадим определение таких операторов [6].

Пусть $E = \{1, 2, ..., n\}$.

Рассмотрим множество

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1,\, x_2, ..., x_n) \in R^n : x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

Множество S^{n-1} называется $n-1$ мерным симплексом. Каждый элемент $x \in S^{n-1}$ является вероятностной мерой на E и его можно интерпретировать как состояние биологической (физической, социологической и т. п.) системы, состоящей из n элементов.

В настоящей работе мы изучаем динамические системы, задаваемые кубическими операторами.

В простейшей задаче популяционной генетики рассматривается биологическая система E,состоящая из n разновидностей $1, 2, ..., n$. Считаем, что разновидности родителей i, j, k однозначно определяют вероятность каждой разновидности l для непосредственного потомка. (Заметим, что тройное (i, j, k) скрешевание можно принимать и получить сорт l). Обозначим эту вероятность через $P_{ijk,l}$. Тогда $P_{ijk,l} \geq 0, \sum_{l=1}^{n} P_{ijk,l} = 1$ и значения $P_{ijk,l}$ не меняется при любой перестановке i, j, k, если разновидности не сваны с полом.

Состояние популяции описывается набором $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ вероятности разновидностей ([1]-[5]). Следовательно, $x \in S^{n-1}$.

При случайном скрещивании

$$x_l' = \sum_{i,j,k=1}^{n} P_{ijk,l} x_i x_j x_k, \;\; l = 1, 2, ..., n \tag{1}$$

будет полной вероятностью разновидности для непосредственных потомков.

Пусть $W : S^{n-1} \to S^{n-1}$ отображение, определяемое равенством (1). Оператор W назовем кубическим оператором.

Таким образом, если в некотором поколении популяция находиться в состоянии x, то в следующем поколении она находиться в состоянии $x' = Wx$.

Напомним, что если в скрешевании участвуют только два родителя i, j и рождается k, тогда поколение популяции определяется оператором V:

$$x_k' = \sum_{i,j=1}^{n} P_{ij,k} x_i x_j, \; k = 1, 2, ..., n \tag{2}$$

где $P_{ij,k \geq 0}, \;\; \sum_{k=1}^{n} P_{ij,k} = 1$ и $P_{ij,k} = P_{ji,k}$ для любого i, j, k.

Оператор (2) называется квадратичным оператором.

Рассмотрим кубический оператор $W : S^2 \to S^2$ следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x\left(x^2 + (2+3\varepsilon)\,xy + (1-3\varepsilon)\,y^2 + (1-3\varepsilon)\,z^2 + (2+3\varepsilon)\,xz + 2yz\right), \\ y' = y\left(y^2 + (2+3\varepsilon)\,xy + (1-3\varepsilon)\,x^2 + (2+3\varepsilon)\,yz + (1-3\varepsilon)\,z^2 + 2xz\right), \\ z' = z\left(z^2 + (2+3\varepsilon)\,yz + (1-3\varepsilon)\,y^2 + (1-3\varepsilon)\,x^2 + (2+3\varepsilon)\,xz + 2xy\right), \\ \qquad\qquad\qquad -\frac{2}{3} \leq \varepsilon \leq \frac{1}{3}. \end{array} \right. . \tag{3}$$

Пусть $\lambda_0 = (x_0,\, y_0,\, z_0) \in S^2$ начальное распределение. Траектория точки λ_0 при действии оператора (3) определяется следующим образом: $\lambda_n = W_\varepsilon^{(n)}(\lambda_0)\,, \; n = 0, 1, 2...$.

Основная задача этого пункта состоит в изучении траектории $\{\lambda_n\}$, т.е. описать множество предельных точек последовательности $W_\varepsilon^{(n)}(\lambda_0)$ для любого $\lambda_0 \in S^2$.

Очевидно, что все грани симплекса $S^2 = M_1M_2M_3$ являются инвариантными подмножествами для оператора (3). Кроме того, все медианы $M_1\,N_1, \;\; M_2\,N_2, \;\; M_3N_3$ являются инвариантными.

Действительно, подставляя, например, $x = y$ в (3) заметем, что $x' = y'$. Рассмотрим множества

$$\begin{array}{l} G_1 = \left\{(x,y,z) \in S^2 : x > y > z > 0\right\}, \; G_2 = \left\{(x,y,z) \in S^2 : x > z > y > 0\right\}, \\ G_3 = \left\{(x,y,z) \in S^2 : y > x > z > 0\right\}, \; G_4 = \left\{(x,y,z) \in S^2 : y > z > x > 0\right\}, \\ G_5 = \left\{(x,y,z) \in S^2 : z > x > y > 0\right\}, \; G_6 = \left\{(x,y,z) \in S^2 : z > y > x > 0\right\}. \end{array}$$

Лемма. *Множества G_i, $i = 1, 2, ..., 6$ является инвариантными подмножествами S^2 относительно W_ε.*

Литература

1. *Ганиходжаев Р.Н.* Квадратичные стохастические операторы, функция Ляпунова и турниры // Матем. сб. 1992. Т. 183, № 8. С. 121-140.

2. *Ganikhodzhaev R.N., Mukhamedov F.M., Rozikov U.A.* Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems. // Inf. Dim. Anal. Quant. Prob.rel/ fields. 2011. T. 14, № 2. C. 279-335.

3. *Хамраев А.Ю.* Об одном кубическом операторе вольтеровского типа // Узбекский математический журнал. 2009. № 3. С. 65-71.

4. *Розиков У.А., Хамраев А.Ю.* О кубических операторах определенных на конечномерным симпелксах // УкрМЖ. 2004. Т. 56, № 10. С. 1418-1427.

5. *Rozikov U.A., Khamrayev A.Yu.* On construction and a Class of Non-Volterra cubic stochastic operators // Nonlinear dynamics and systems theory An International Journal of Research and Surveys. 2014. № 14. P. 9.

6. *Хамраев А.Ю.* Поведение траекторий одного кубического оператора на двумерном симплексе // Узбекский математический журнал. 2013. № 1. С. 130-137.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ТРУБОПРОВОДОВ С ЖИДКОСТЬЮ

Б.А. Худаяров[1] , О.Р. Кучаров[2]

[1,2] ТИИИМСХ, Узбекистан, Ташкент
[1] bakht-flpo@yandex.ru

В настоящее время нефтегазовая промышленность часто сталкивается с проблемами ремонта, реконструкции и восстановления трубопроводов из-за воздействия на них различных внешних факторов. Одним из путей решения данной проблемы является применение современных, ресурсосберегающих, экологически безопасных технологий, к которым можно отнести использование неметаллических, в частности, полимерных композиционных материалов [1-3].

Настоящая работа посвящена решению вышеназванных задач и поэтому ее тематика весьма актуальна.

Целью данной работы является создание математической модели, численного алгоритма и компьютерной программы для решения задачи о колебаниях вязкоупругих трубопроводов на базе теории балок [4, 5].

Постановка задачи и методы решения

Рассмотрим вязкоупругий трубопровод в виде прямой однопролетной шарнирно опертой с обоих концов балки. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ось проходила через центры тяжести сечений трубы в опорах, которым соответствуют координаты $x = 0$ и $x = L$. Перемещения точек оси трубопровода по оси z представляют неизвестную функцию прогибов $w(x,t)$. Скорость течения жидкости вдоль оси трубопровода – V. Продольные колебания трубопровода не рассматриваются.

Уравнение колебаний трубопровода имеет вид:

$$\begin{gathered} EJ\left(1-R^*\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+m_1\left(L-x\right)\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left(m_1V^2+pF\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+ \\ +2m_1V\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+\left(m_1+m_2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0. \end{gathered} \quad (1)$$

Здесь – модуль упругости материала трубы; J – момент инерции сечения трубы; JиL – –жесткость и длина консоли; – независимая переменная, продольная осевая координата трубы; m_1 – масса жидкости на единицу длины трубы; m_2 – масса трубы на единицу длины; F – площадь поперечного сечения трубы; – внутреннее рабочее давление; R^*– интегральный оператор вида: $R^*\phi(t)=\int\limits_0^t R(t-\tau)\phi(\tau)d\tau$; $R(t-\tau)$ – ядро релаксации.

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде:

$$w\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{N}w_n\left(t\right)\varphi_n\left(x\right), \tag{2}$$

где функции $\varphi_n\left(x\right)$ подобраны так, чтобы каждый член суммы (2) удовлетворял граничным условиям, а $w_n\left(t\right)$- некоторые функции, подлежащие к определению.

Скорость пульсирующей жидкости $V(t)$ предполагается гармонически колеблющейся, и имеет следующий вид [3]:

$$\begin{gathered} V(t)=\upsilon_0(1+\mu_1 cos\varpi t), \qquad (3)\\ V^2(t)\approx\upsilon_0^2(1+2\mu_1 cos\varpi t), \end{gathered}$$

здесь υ_0 - постоянная скорость жидкости, μ_1- коэффициент возбуждения, ϖ - частота пульсации жидкости. Эта пульсирующая скорость потока появляется как параметрический член возбуждения в уравнении движения и может привести к неограниченному возрастанию амплитуды параметрических колебаний и наступлению явления параметрического резонанса.

Подставляя (2) в уравнение (1) и применяя к этому уравнению метод Бубнова-Галеркина, получим систему интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) относительно коэффициентов (2). Введя следующий безразмерный параметр w/L и сохраняя прежние обозначения, систему ИДУ сводим к уравнению относительно w_k:

$$\begin{gathered} \ddot{w}_k+2\upsilon\sqrt{\beta_{12}}\left(1+\mu\cos\omega\tau\right)\sum_{n=1}^{N}\dot{w}_n\gamma_{nk}+\left(1-R^*\right)k^4\pi^4 w_k+\\ +\left[\mu\upsilon\sqrt{\beta_{12}}\left(1-\xi\right)\omega\sin\omega\tau-\upsilon^2\left(1+\mu\cos\omega\tau\right)^2+T_1\right]k^2\pi^2 w_k=0. \end{gathered} \tag{4}$$

$$w_n(0)=w_{0n};\quad \dot{w}_n(0)=\dot{w}_{0n}.$$

Здесь $\xi=\frac{x}{L},\upsilon=\upsilon_0 L\left(\frac{m_1}{EL}\right)^{0,5}, T_1=pF\frac{L^2}{EJ},\beta_{12}=\frac{m_1}{m_1+m_2},\tau=\frac{t}{L^2}\left(\frac{EL}{m_1+m_2}\right)^{0,5},\quad \omega{=}\bar{\omega}\cdot L^2\left(\frac{m_1+m_2}{EJ}\right)^{0,5}$- безразмерные параметры.

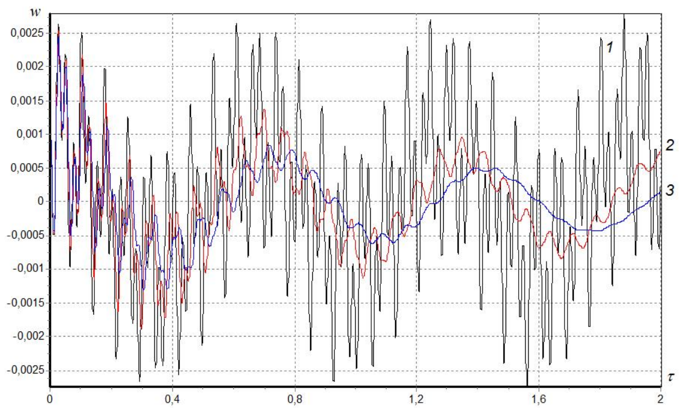
Численные результаты

Решение ИДУ (4) находится численным методом, основанным на использовании квадратурных формул [6-9]. На основе этого метода описан алгоритм численного решения системы (4). Интегрируя систему (4) два раза по t, можно записать ее в интегральной форме и с помощью рационального преобразования исключим слабо-сингулярные особенности интегрального оператора R^*. Затем, полагая $t=t_i$, $t_i=i\cdot\Delta t$, i=1,2,... ($\Delta t=const$) и заменяя интегралы квадратурными формулами трапеций для вычисления $w_{ik}=w_k\left(t_i\right)$, получим рекуррентные формулы для ядра Колтунова-Ржаницына.

Таким образом, согласно численному методу относительно неизвестных получим систему алгебраических уравнений. Для решения системы используется метод Гаусса. На базе разработанного алгоритма создан пакет прикладных компьютерных программ.

Рис.1. Влияние вязкоупругого свойства материала конструкций на амплитуды прогиба.
$A=0(1)$; 0,05(2); 0,1(3); α=0,25; β=0,001; ξ=0,5; T_1=2; β_{12}=0,1; υ=1,5; ω=2,5.

На рис. 1 изображен закон распределения прогиба трубопровода с учетом вязкоупругих свойств материала и показано его развитие во времени. При этом пренебрегаем кориолисовой силой.



Для упругих трубопроводов колебания носят практически периодический характер. Как видим, с учетом вязкоупругого свойства материала конструкций амплитуда колебаний резко снижается. Между тем влияние вязкоупругого свойства материала трубопровода на амплитуду колебаний трубопровода в начальном процессе (участок кривой $w(\tau)$ в диапазоне $0\leq \tau \leq 0{,}2$) проявляется в существенно меньшей степени. Начиная с $\tau \geq 0{,}2$ вязкоупругие свойства материала существенно влияют на колебательный процесс трубопровода. Анализ результатов показывает, что увеличение параметра вязкости A приводит к затуханию колебательного процесса. Решение рассмотренной задачи позволяет также исследовать колебательное движения, сопровождающиеся прощелкиванием трубы и представляющие собой опасность в отношении развития усталостных трещин.

Выводы. Разработана математическая модель динамики прямого вязкоупругого трубопровода при протекании через него пульсирующей жидкости. Разработан вычислительный алгоритм для решения задач динамики вязкоупругих трубопроводов с протекающей жидкостью. На основе разработанного вычислительного алгоритма создан пакет прикладных компьютерных программ, позволяющий исследовать колебательные процессы вязкоупругих трубопроводов с протекающей пульсирующей газо-жидкостью. Учет вязкоупругих свойств материала трубопровода приводит к уменьшению амплитуды и частоты колебаний на 20-40% . Увеличение значения частоты пульсации жидкости и коэффициента возбуждения приводит к колебательному движению с интенсивно нарастающими амплитудами, которое может привести к разрушению конструкции. Полученные результаты численного моделирования могут быть использованы в предприятиях нефтегазовой отрасли, а также проектными организациями.

Литература

[1] Аношкин А.Н., Зуйко В.Ю., Иванов С.Г. Расчет напряженно-деформированного состояния и прогнозирование прочности полимерных армированных труб газового назначения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2007. –є6(56). – С.419-426.

[2] Ягубов Э.З. Использование высокопрочных стеклопластиковых труб в нефтяной промышленности // Нефтяное хозяйство. – 2001. – є6. – С.68-70.

[3] Ягубов Э.З., Цхадая Н.Д., Якубов З.Х. Многоканалные трубопроводы для транспортировк нефтегазовых сред и востановление изношенных нефтегазопроводов // Научные труды. – 2013. – є1. – С. 57-63.

[4] Païdoussis M.P., Issid N.T. Dynamic stability of pipes Conveying Fluid // Journal of Sound and Vibration. – 1974. – Vol. 33. – No 3. – P.267-294.

[5] Long Liu., Fuzhen Xuan. Flow-Induced Vibration Analysis of Supported Pipes Conveying Pulsating Fluid Using Precise Integration Method // Mathematical Problems in Engineering. – 2010. DOI:10.1155/2010/806475.

[6] Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Мехнат, 1987. 269 с.

[7] Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // Прикладная математика и механика. – 1987. – Т. 51. – є5. – С. 867–871.

[8] Худаяров Б.А., Бандурин Н.Г. Нелинейный флаттер вязкоупругих ортотропных цилиндрических панелей // Математическое моделирование. РАН. 2005. Том 17, є10. - С. 79–86.

[9] Бадалов Ф.Б., Худаяров Б.А., Абдукаримов А. Исследование влияния ядра наследственности на решение линейных и нелинейных динамических задач наследственно-деформируемых систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. Российская академия наук. – 2007. – є4. – С. 107–110.

Гиперболическая система из двух уравнений

Худойберганов М.У.,[1], Неъматова Д.Э[2],

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА
[1]mirzoali@mail.ru, [2]nematova_dilfuza@mail.ru

Рассмотрим смешанную задачу для гиперболической системы из двух уравнений в канонической форме:

$$\begin{matrix} \partial_t R_1 + \lambda_1 \partial_x R_1 = 0, \\ \partial_t R_2 - \lambda_2 \partial_x R_2 = 0, \end{matrix} \quad t \in [0, +\infty), \quad x \in [0, L], \;\; \lambda_1 > 0 > -\lambda_2, \tag{1}$$

с начальным условием при $t = 0$

$$R_1(0, x) = R_{10}(x), \; R_2(0, x) = R_{20}(x), \; x \in [0, L], \tag{2}$$

и с граничными условиями при $x = 0$

$$R_1(t, 0) = k_1 R_2(t, 0), \qquad R_2(t, L) = k_2 R_1(t, L), \quad t \in (0, +\infty). \tag{3}$$

где k_1, k_2, $\lambda_1 > 0$ и $-\lambda_2 > 0$ - постоянные вещественные коэффициенты.

Определим L^∞ -норму функции $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T \in L^\infty((0, L); \mathbf{R}^2)$:

$$\|\phi\|_{L^\infty((0,L);\mathbf{R}^2)} \triangleq \max\left(\|\phi_1\|_{L^\infty((0,L);\mathbf{R})}, \|\phi_2\|_{L^\infty((0,L);\mathbf{R})}\right) < +\infty.$$

Предположим, что функции $R_{1o} : [0, L] \to \mathbf{R}$ и $R_{2o} : [0, L] \to \mathbf{R}$ ограничены и, следовательно, $(R_{1o}, R_{2o})^T \in L^\infty((0, L); \mathbf{R}^2)$.

Теорема 1. Существуют положительные константы C, ν такие, что для любых ограниченных функций R_{1o} и R_{2o} решение смешанной задачи (1), (2), (3), удовлетворяет

$$\left\|(R_1(t, .), \, R_2(t, .))^T\right\|_{L^\infty((0,L);\mathbf{R}^2)} \le Ce^{-\nu t}\left\|(R_{1o}, \, R_{2o})^T\right\|_{L^\infty((0,L);\mathbf{R}^2)}, \;\; t \in [0, +\infty),$$

тогда и только тогда если $k_1 k_2 < 1$.

Докажем устойчивость решение системы (1) в пространстве L^2.

Рассмотрим снова смешанную задачу (1-3) при условии, что функция $(R_{1o}, R_{2o})^T \in L^2((0, L); \mathbf{R}^2)$ с L^2-нормой

$$\left\|(R_{1o}, \, R_{2o})^T\right\|_{L^2((0,L);\mathbf{R}^2)} \triangleq \left(\int_0^L \left(R_{1o}^2(x) + R_{2o}^2(x)\right) dx\right)^{1/2} < +\infty. \tag{4}$$

Решение смешанной задачи (1-3) в $L^2((0, L); \mathbf{R}^2)$ определяется следующим образом. Умножим (1) слева на $(\phi_1, \phi_2)^T \in C^1([0, T] \times [0, L]; \mathbf{R}^2)$ где Т задано. Получим уравнение

$$\phi_1(\partial_t R_1 + \lambda_1 \partial_x R_1) + \phi_2(\partial_t R_2 - \lambda_2 \partial_x R_2) = 0.$$

Интегрируем это уравнение на $(0, T) \times (0, L)$. Предположим,что решение R_1, R_2 принадлежать классу C^1 по отношению к t и x , используя интегрирование по частям имеем:

$$\begin{aligned} 0 = & \int_0^L \int_0^T \left(\phi_1(\partial_t R_1 + \lambda_1 \partial_x R_1) + \phi_2(\partial_t R_2 - \lambda_2 \partial_x R_2)\right) dtdx \\ & = \int_0^L \left(\phi_1(T, x) R_1(T, x) + \phi_2(T, x) R_2(T, x)\right) dx \\ & \quad - \int_0^L \left(\phi_1(0, x) R_{1o}(x) + \phi_2(T, x) R_{2o}(x)\right) dx \end{aligned}$$

$$
\begin{gathered}
+\int_0^T (\lambda_1\phi_1(t,L)R_1(t,L)-\lambda_2\phi_2(t,L)R_2(t,L))\,dt \\
-\int_0^T (\lambda_1\phi_1(t,0)R_1(t,0)-\lambda_2\phi_2(t,0)R_2(t,0))\,dt \\
-\int_0^L\int_0^T ((\partial_t\phi_1+\lambda_1\partial_x\phi_1)R_1+(\partial_t\phi_2-\lambda_2\partial_x\phi_2)R_2)\,dtdx.
\end{gathered}
$$

Тогда, используя граничное условие (3), получим

$$
\begin{gathered}
0=\int_0^L (\phi_1(T,x)R_1(T,x)+\phi_2(T,x)R_2(T,x))\,dx \\
-\int_0^L (\phi_1(0,x)R_{1o}(x)+\phi_2(T,x)R_{2o}(x))\,dx \\
+\int_0^T (\lambda_1\phi_1(t,L)-k_2\lambda_2\phi_2(t,L))\,R_1(t,L)dt \\
-\int_0^T (k_1\lambda_1\phi_1(t,0)-\lambda_2\phi_2(t,0))\,R_2(t,0)dt \\
-\int_0^L\int_0^T ((\partial_t\phi_1+\lambda_1\partial_x\phi_1)R_1+(\partial_t\phi_2-\lambda_2\partial_x\phi_2)R_2)\,dtdx.
\end{gathered}
$$

Выбирая функции ϕ_1 и ϕ_2 такими, что

$$
\begin{gathered}
k_1\lambda_1\phi_1(t,0)-\lambda_2\phi_2(t,0)=0 \\
\lambda_1\phi_1(t,L)-k_2\lambda_2\phi_2(t,L)=0,
\end{gathered} \tag{5}
$$

получаем

$$
\begin{gathered}
0=\int_0^L (\phi_1(T,x)R_1(T,x)+\phi_2(T,x)R_2(T,x))\,dx \\
-\int_0^L (\phi_1(0,x)R_{1o}(x)+\phi_2(T,x)R_{2o}(x))\,dx \\
-\int_0^L\int_0^T ((\partial_t\phi_1+\lambda_1\partial_x\phi_1)R_1+(\partial_t\phi_2-\lambda_2\partial_x\phi_2)R_2)\,dtdx.
\end{gathered} \tag{6}
$$

L^2 -решения определяются как функции (R_1,R_2) , которые удовлетворяют (6) для всех (ϕ_1,ϕ_2) , удовлетворяющих (5), когда начальные условия принадлежать в L^2.

Определение. Пусть $(R_{1o},R_{2o})\in L^2((0,L);\mathbf{R}^2)$. Отображение $(R_1,R_2):[0,+\infty)\times(0,L)\to\mathbf{R}^2$ является L^2-решением смешанной задачи (1-3), если

$$
(R_1,R_2)\in C^0([0,+\infty);L^2((0,L);\mathbf{R}^2))
$$

таково, что (6) выполняется для любого $T\in[0,+\infty)$ и для каждого $(\phi_1,\phi_2)^T\in C^1([0,T]\times[0,L];\mathbf{R}^2)$, удовлетворяющих (5).

Справедлива следующая теорема об устойчивости.

Теорема 2. Для любой функции $(R_{1o},R_{2o})\in L^2((0,L);\mathbf{R}^2)$ смешанная задача (1-3) имеет одно и только одно решение. Кроме того, существуют положительные константы C,ν такие, что

$$
\left\|(R_1(t,.),\,R_2(t,.))^T\right\|_{L^2((0,L);\mathbf{R}^2)}\le Ce^{-\nu t}\left\|(R_{1o},\,R_{2o})^T\right\|_{L^2((0,L);\mathbf{R}^2)},\quad t\in[0,+\infty),
$$

тогда и только тогда, когда $|k_1k_2|<1$.

В докладе рассматривается вопрос о численном решении устойчивых решений. Предлагается новая устойчивая разностная схема.

Литература

1. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. - М. : Наука, 1979. - 392 с.

Об устойчивости решений гиперболических систем

Худойберганов М.У.,[1], Неъматова Д.Э[2], Бомуротов Ш.,[3], Мингбаева А.А.[4]

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА
[1]mirzoali@mail.ru, [2]nematova_dilfuza@mail.ru, [4]aadimetra@mail.ru

Рассмотрим смешанную задачу для гиперболической системы в канонической форме:

$$\mathbf{R}_t + \Lambda \mathbf{R}_x = 0, \qquad t \in [0, +\infty), \quad x \in [0, L], \tag{1}$$

с начальным условием при $t = 0$

$$\mathbf{R}(0, x) = \mathbf{R}_0(x), \quad x \in (0, L). \tag{2}$$

и с граничными условиями при $x = 0$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}^+(t,0) \\ \mathbf{R}^-(t,L) \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} \mathbf{R}^+(t,L) \\ \mathbf{R}^-(t,0) \end{pmatrix} \text{с} \mathbf{K} \triangleq \begin{pmatrix} K_{00} & K_{01} \\ K_{10} & K_{11} \end{pmatrix}, \, t \in [0, +\infty), \tag{3}$$

где $\mathbf{R} : [0, +\infty) \times [0, L] \to R^n$,
$\mathbf{R}^+ = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix}$ и $\mathbf{R}^- = \begin{pmatrix} R_{m+1} \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$ такие что $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^+ \\ \mathbf{R}^- \end{pmatrix}$,
Λ - диагональная матрица и определяется следующим образом

$$\Lambda \triangleq \begin{pmatrix} \Lambda^+ & 0 \\ 0 & -\Lambda^- \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \Lambda^+ = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_\mathrm{m}\}, \\ \Lambda^- = \mathrm{diag}\{\lambda_{\mathrm{m}+1}, \cdots, \lambda_\mathrm{n}\}, \end{cases} \qquad \lambda_i > 0 \;\; \forall i. \tag{4}$$

Определение. Система (1-3) экспоненциально устойчива для L^2 -нормы, если существуют $\nu > 0$ и $C > 0$ такие, что для каждого $\mathbf{R}_0 \in L^2((0, L; \mathbf{R}^n)$, L^2 -решение смешанной задачи (1-3) удовлетворяет условию

$$\|\mathbf{R}(t,.)\|_{L^2((0,L;\mathbf{R}^n)} \le Ce^{-\nu t} \|\mathbf{R}_0\|_{L^2((0,L;\mathbf{R}^n)}, \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Теорема 1. Для каждого $\mathbf{R}_0(x) \in H^1((0, L);\ \mathbf{R}^n)$ удовлетворяющего условию совместимости

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_0^+(0) \\ \mathbf{R}_0^-(L) \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_0^+(L) \\ \mathbf{R}_0^-(0) \end{pmatrix}$$

существует одно и только одно

$$\mathbf{R} \in C^1([0, +\infty);\ L^2((0, L);\ \mathbf{R}^n)) \cap C^0([0, +\infty);\ H^1((0, L);\ \mathbf{R}^n))$$

являющееся решением смешанной задачи (1-3). Кроме того, существует такое $C_0 > 0$, что для каждого $\mathbf{R}_0(x) \in H^1((0, L);\ \mathbf{R}^n)$ удовлетворяющего условию совместимости, это единственное решение $\mathbf{R}$ удовлетворяет неравенствам:

$$\|\mathbf{R}(t,.)\|_{H^1((0,L);\mathbf{R}^n)} + \|\mathbf{R}_t(t,.)\|_{L^2((0,L);\mathbf{R}^n)} \le C_0 e^{C_0 t} \|\mathbf{R}_0\|_{H^1((0,L);\mathbf{R}^n)}, \ \forall t \in [0, +\infty),$$

$$\|\mathbf{R}(t,.)\|_{L^2((0,L);\mathbf{R}^n)} \le C_0 e^{C_0 t} \|\mathbf{R}_0\|_{L^2((0,L);\mathbf{R}^n)}, \ \forall t \in [0, +\infty).$$

Для формулировки условие устойчивости, введем функции $\rho_p : \mathbf{M}_{n,n}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, определенные с помощью

$$\rho_p(M) \triangleq \ \inf \left\{ \left\| \Delta M \Delta^{-1} \right\|_p, \ \Delta \in D_n^+ \right\}, \qquad 1 \le p \le \infty, \tag{5}$$

где D_n^+ обозначает множество диагональных nxn вещественных матриц со строго положительными диагональными элементами и

для $\xi \triangleq (\xi_1, \ldots, \xi_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$, $\quad \|\xi\|_p \triangleq \left[\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad \|\xi\|_\infty \triangleq \max\{|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|\}$, для $M \in \mathbf{M}_{n,n}(\mathbf{R})$, $\|M\|_p \stackrel{\Delta}{=} \max\limits_{\|\xi\|_p=1} \|M\xi\|_p$.

Теорема 2. Система (1-3) экспоненциально устойчива для L^2 -нормы, если $\rho_2(\mathbf{K}) < 1$.

В докладе рассматривается проблема построения адекватной вычислительной модели для численного расчета устойчивых решений. Авторами предложен новая устойчивая разностная схема.

Литература

1. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. - М. : Наука, 1979. - 392 с.

8. ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

PROBLEMS OF MODERN GEOMETRY AND TOPOLOGY

О ГЕОМЕТРИИ РИМАНОВЫХ СУБМЕРСИЙ

Г.М.Абдишукурова,

Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Пусть M - гладкое связное риманово многообразие размерности n с римановой метрикой g, $V(M)$-множество гладких векторных полей, определенных на M.

Всюду в работе гладкость будет означать гладкость класса C^∞.

Пусть $\pi : M \to B$ дифференцируемое отображение максимального ранга, где M, B-гладкие многообразия размерности n, m соответственно, $n > m$. Такие отображения называются субмерсиями. Для субмерсий имеет место следующая теорема [1].

Изучению геометрии и топологии слоений, порожденных субмерсиями, посвящены многочисленные исследования [1-4].

Пример. Субмерсия $f : R^3 \to R^1$, определенная формулой

$$f(x, y, z) = z - x^2 - y^2,$$

задает на M двумерное слоение, каждый слой которого есть эллиптический параболоид.

Теорема-1. Пусть $\pi : M \to B$ - дифференцируемое отображение максимального ранга, где M - гладкое многообразие размерности n, B - гладкое многообразие размерности m, $n > m$. Тогда для каждой точки $q \in N$ множество $L_q = \{p \in M : \pi(p) = q\}$ является многообразием размерности $(n - m.)$

Из этой теоремы вытекает,что если поверхности уровня являются линейно связными,то разбиение M на подмногообразия L_q является $k = n - m$-мерным слоением.

Изучению геометрии и топологии слоений, порожденных субмерсиями, посвящены многочисленные исследования [1-4].

Пусть M-гладкое риманово многообразие размерности n, F-слоение размерности k, где $0 < k < n$.

Обозначим через L_p слой слоения F, проходящий через точку $p \in M$,через T_qF- касательное пространство слоя L_p в точке $q \in L_p$,через $H(q)$ - ортогональное дополнение под-простран-ства T_qF.В результате возникают подрасслоения $TF = \{T_qF\}$, $TH = \{H(q)\}$ касательного расслоения TM и имеем ортогональное разложение $TM = TF \oplus H$. Таким образом каждое векторное полеX разложимо в виде: $X = X^v + X^h$, где $X^v \in TF$, $X^h \in TH$. Если X^h=0 (соответственно $X^v = 0$), то поле X называется вертикальным (соответственно горизонтальным) векторным полем.

Кусочно-гладкая кривая γ :0,1$\to$ M называется горизонтальной (вертикальной), если касательный вектор $\gamma'(t)$ этой кривой является горизонтальным (вертикальным) полем.

Если дифференциал $d\pi$ субмерсии $\pi : M \to B$ сохраняет длину горизонтальных векторов,то она называется римановой субмерсией.

В этой работе мы изучаем вопрос о линейной связности слоя $\pi^{-1}(q)$ субмерсии $\pi : M \to B$. В общем случае слой $\pi^{-1}(q)$ может иметь бесконечно много компонентов связности даже в случае в простейших случаях. Функции многих переменных без критических случаев являются простейшими примерами субмерсий. Легко построить примеры функций, поверхности уровня которых не являются линейно связными. В работе [4] доказано, что для римановых субмерсий $\pi : M \to R^1$, где M- полное риманово многообразие, для каждой точки $q \in R^1$ слой $\pi^{-1}(q)$ является линейно связным.

*Теорема-2.*Пусть $\pi : M \to B$- риманова субмерсия, где M- полное односвязное многообразие, $B-$ односвязное многообразие. Тогда подмногообразия $\pi^{-1}(q), q \in B$ являются линейно связными подмножествами многообразии M.

Следующее следствие теоремы является результатом работы [3].

Следствие. Пусть $\pi : M \to R^1$- метрическая функция, M- где полное односвязное многообразие. Тогда для каждой точки $q \in B$ слой $\pi^{-1}(q)$ является линейно связным подмногообразием.

Литература

1. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. Москва, "Мир 1971, 343 с.*

2. *Нарманов А., Бойтураев А. Об одном классе субмерсий. Узбекский математический журнал, 2003, е2, с.29-36.*

3. *Нарманов А., Шарапов С. О поверхностей уровня субмерсий. Узбекский математический журнал, 2004, е 2,С. 62-66*

4. *Нарманов А., Каипназарова Г. Метрические функции на римановых многообразиях. Узбек. Математ. журнал, 2010, е1, С. 11-20.*

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА СУБМЕРСИЙ

А.М.Байтураев

Ташкент, Национальный университет Узбекистана
e-mail: abayturaev@mail.ru

Если на гладком многообразии задана дифференцируемая функция без критических точек, то компоненты связности поверхностей уровня порождают слоение коразмерности один.

В этом работе рассматривается вопрос о том, насколько богато множество дифференцируемых функций без критических точек, все поверхности уровня которых линейно связны. Получено результат, что множество дифференцируемых функций без критических точек, для которых все множества уровней нелинейно связны, является открытым множеством в пространстве всех дифференцируемых функций.

Пусть $C^1(R^n,R^1)$ - множество всех дифференцируемых функций класса C^1. На множестве $C^1(R^n,R^1)$ введем слабую (C^1 -компактно-открытую) топологию.

Множество всех C^r-гладких отображений $f: M \to N$ обозначим через $C^r(M,N)$, где M,N - гладкие многообразия класса Предположим, что $r = 0,1,2,...$

Слабая топология (C^r -компактно-открытая топология) в $C^r(M,N)$ порождается множествами, определяемыми следующим образом. Пусть $f \in C^r(M,N)$ и пусть $(\varphi,U),(\psi,V)$ - карты многообразий M,N. Пусть, далее, $K \subset U$ - компактное множество, такое, что $f(K) \subset V$; пусть, $0 < \varepsilon < \infty$.

Предбазисную окрестность

$$\mathfrak{N}(f;(\varphi,U),(\psi,V),K,\varepsilon) \qquad (1)$$

слабой топологии определяется как множество таких C^r -отображений $g: M \to N$ что $g(K) \subset V$ и для любых $x \in \varphi(K), k = 0,...,r$,

$$||D^k(\psi f\varphi^{-1})(x) - D^k(\psi g\varphi^{-1})(x)|| < \varepsilon$$

Это означает, что локальные представления отображений f,g вместе с их первыми r производными различаются не более, чем на ε в каждой точке компактного множестваK.

Слабая топология в $C^r(M,N)$ порождается множествами (1); этим определяется топологическое пространство $C^r_w(M,N)$. Окрестностью точки f по отношению к этой топологии является, таким образом, всякое множество, содержащее пересечение конечного числа множеств типа (1).

В данной работе качестве многообразия N мы рассматриваем одномерное многообразие R^1 и полагаем, что $r = 1$ Пространство $C^1(R^n,R^1)$ рассматривается со слабой топологией (C^r -компактно-открытой топологией). Известно, что пространство $C^r(M,N)$ со слабой топологией имеет счетную базу. Обозначим через $NLS(R^n,R^1)$ множество субмерсий, для которых все поверхности уровня нелинейно связно.

Теорема. Множество $NLS(R^n,R^1)$ является открытым подмножеством пространства $C^1(R^n,R^1)$ всех дифференцируемых функций класса C^1.

Литература

1. *Бакельман И.Я., Вернер А.А., Кантор Б.Е.* Введение в дифференциальную геометрию "в целом". - М.: Наука, 1973 г.

2. *Тамура И.* Топология слоений. - Москва, "Мир 1979 г.

3. *Хирш М.* Дифференциальнаятопология. -Москва, "Мир 1979 г.

ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПО СЕМЕЙСТВУ КРИВЫМ С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Акрам.Х. Бегматов, З.Х. Очилов
Самаркандский государственный университет, Узбекистан

Задача интегральной геометрии

$$\int_{S(y)} g(x,y)f(y)u(x)ds = f(y) \tag{1}$$

есть задача решения операторного уравнения относительно функции $u(x)$ в предположении, что заданы правая часть $f(y)$, весовая функция $g(x,y)$ и многообразия, по которым ведется интегрирование.

Основная задача компьютерной томографии является задачей интегральной геометрии.

Задача решения уравнения (1) называется слабо некорректной, если для данных задачи и ее решения уравнения можно подобрать такую пару функциональных пространств, в определении нормы которых участвует конечное число производных, что оператор обращения для этой пари пространств непрерывен [2].

Если такой пари пространств не существует, то задача является сильно некорректной. Разумеется, эта классификация имеет место не только для задач интегральной геометрии, но и в общей теории некорректных задач.

В.Г. Романов в [3] исследовал вопросы единственности и устойчивости решения задач интегральной геометрии в случае, когда многообразия, по которым ведется интегрирование, имеют вид параболоидов, весовые функции и многообразия инварианты относительно группы всех движений вдоль фиксированной гиперплоскости.

Слабо некорректные задача интегральной геометрии вольтеровского типа с весовыми функциями, имеющими особенность исследовались в работах [4-7], слабо некорректных задач интегральной геометрии по специальным кривим и поверхностям с особенностями получены в [8-11].

Задачи интегральной геометрии на параболоидах с возмущением в трехмерном слое рассмотрены в работе [11].

Пусть G-множество ограниченных функций $g(\cdot)$, определенных на R^1 и удовлетворяющих следующим условиям:

I. Функция $\mathrm{I}(\cdot,\cdot)$определена на$R \times C$ по формуле

$$\mathrm{I}(\lambda,p) = \int_0^\infty [e^{i\lambda h}g(h) - e^{-i\lambda h}g(-h)]e^{-ph}dh, \tag{2}$$

непрерывна на $R \times C \exists \rho \in R$,такое, что $\mathrm{I}(\lambda,p)$ отлична от нуля для всех $\lambda \in R$ с $Rep > \rho$;

II. Существуют числа n,m$\in \{0,1,2,....\}$и такие , что

$$\left|\frac{1}{\mathrm{I}(\lambda,p)}\right| \le C(|p|^n + |\lambda|^m) \tag{3}$$

для всех $\lambda \in R$ и $Rep > \rho$;

Замечание. Отметим, что множество G не пусто. Например, если функция $g(\cdot)$имеет вид

$$g(h) = \begin{cases} a_1 e^{-kh}, & h \ge 0, \\ -a_1 e^{kh}, & h < 0, \end{cases}$$

$a_1 k > 0$, то

$$\mathrm{I}(\lambda,p) = 2a_1 \int_0^\infty e^{-(p+k)h}\cos(\lambda h)dh = 2\frac{a_1(k+p)}{(k+p)^2+\lambda^2} \ne 0 \tag{4}$$

для всех $\lambda \in R$ и$Rep \ge 0$;

Введем обозначения:

$$(x,y) \in R^2, \quad (\xi,\eta) \in R^2, \quad \lambda \in R^1, \quad \mu \in R^1,$$

$$\Omega = \left\{ (x,y), x \in R^1, y \in (0,l), l < \infty \right\},$$

$$\bar{\Omega} = \left\{ (x, y), x \in R^1, y \in [0, l] \right\}.$$

В полосе $\bar{\Omega}$ рассмотрим семейство кривых, которое однозначно параметризируются с помощью координат своих вершин (x, y), произвольная кривая семейства $P(x, y)$ определяется соотношениями

$$P(x,\ y) = \{(\xi, \eta) : (y - \eta) = (x - \xi)^2,\ 0 \le \eta \le y,\ y \le l,\ l < \infty\}.$$

Задача 1. Определить функцию двух переменных $u(x, y)$, если для всех (x, y) из полосы $\bar{\Omega}$ известны интегралы от функции $u(x, y)$по кривым $P(x, y)$:

$$\int_{x-\sqrt{y}}^{x+\sqrt{y}} g(x - \xi) u(\xi, y - (x - \xi)^2) d\xi = f(x, y). \tag{5}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. Пусть функция $f(x, y)$ известна для всех (x, y) из полосы $\bar{\Omega}$. Тогда решение задачи 1 в классе U единственно и имеет место представление

$$u(x, y) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty I_2(x - \xi, y - \eta) \left[E - \frac{\partial^{n=m+4}}{\partial \xi^{m+2} \partial \eta^{n+2}} \right] f(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{6}$$

кроме того выполняется неравенство

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \le C_0 \|f\|_{W_2^{n+2, m+2}(\Omega)}$$

где C_0-некоторая постоянная.

Литература

1. М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. *Некорретные задачи математической физики и анализа.* М.: Наука, 1980.

2. М.М. Лаврентьев. *Интегральная геометрия и обратные задачи // некорректные задачи математической физики и анализа.* Новосибирск.: Наука, 1984. С. 81-86.

3. В.Г. Романов. *Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа.* Новосибирск. Наука.

4. Акр.Х. Бегматов. *Два класса слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости.* // Сиб. мат. журнал. 1995. Т. 36. No 2. С. 243-247.

5. Akram H. Begmatov. *On a class of Weakly ill-posed problems of integral geometry in three-dimensional space.* //J. Inverse and Ill-Posed problems. 1995. Vol. 3. No 3. P. 231-235.

6. Акр.Х. Бегматов. *Задачи интегральной геометрии для семейства конусов в n-мерном пространстве.* // Сиб. мат. журнал. 1997. Т. 38. No4. С 723-737.

7. Акб.Х. Бегматов. *О единственности решения задачи интегральной геометрии вольтерровского типа на плоскости.* // ДАН. 2009. Т.427. No 2. С. 439-441.

8. Акб.Х. Бегматов, Н.Н. Петрова. *Задача интегральной геометрии с возмущением на кривых эллиптического типа в полосе.* // ДАН. 2011. Том.436. No 2. С. 151-154.

9. Акр.Х. Бегматов, З.Х. Очилов. *Задачи интегральной геометрии с разрывной весовой функцией.* // Доклады РАН. 2009. No 3. С.

10. Akbar H. Begmatov and Akram H. Begmatov. *Problems of integral geometry on curves and surfaces in Euclidean space* // Ill-Posed and Non-Classical Problems of Mathematical Physics and Analysis, M.M. Lavrente'v et al., Eds., Proceedings of International Conference, VSP, Utrecht-Boston, 2003,1-18.

11. Акбар Х. Бегматов. *Задачи интегральной геометрии с возмущением в трехмерном пространстве* // Сиб. мат. журнал. 2000. Т. 41. No 1. С. 3-14.

ВЕС И ПЛОТНОСТЬ ГИПЕРПРОСТРАНСТВА С КОМПАКТНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Бешимов Р.Б.[1], Эштемирова Ш.Х.[2]

[1] *Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Узбекистан, Ташкент*
[2] *Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Узбекистан, Ташкент*
[1] rbeshimov@mail.ru, [2] ms.eshtemirova@mail.ru

В последнее время в работах [1], [2] появились понятия гиперпространства элементы которых состоят из конечного числа компонентов. Для пространства X через $C_n(X)$ обозначим множество всех замкнутых подмножеств состоящих из не более n компонентов. Это пространство чем хорошо, что он содержит гиперпространства $\exp_n X$ замкнутых множеств мощность которых не более n элементов и гиперпространства $\exp{}^c X$ замкнутых связных множеств.

Пусть X - топологическое T_1-пространство. Множество всех непустых замкнутых подмножеств топологического пространства X обозначим $\exp X$. Семейство всех множеств вида

$$O\langle U_1, ..., U_n\rangle = \left\{ F: \ F \in \exp X, \ F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i, \ F \bigcap U_i \neq \emptyset, \ i = 1, 2, ..., n \right\},$$

где $U_1, ..., U_n$ - последовательность открытых подмножеств пространства X, порождает топологию на множестве $\exp X$. Эта топология называется топологией Виеториса. Множество $\exp X$ топологией Виеториса называется экспоненциальным или гиперпространством пространства X [3]. Положим $\exp_n X = \{F \in \exp X : |F| \leq n\}$, $\exp_\omega X = \bigcup\{\exp_n X : n = 1, 2, ...\}$, $\exp^c X = \{F \in \exp X : F$ − связно в $X\}$. Ясно, что $\exp^c X \subset C_n(X) \subset \exp X$ для любого топологического пространства X. В $C_n(X)$ рассматривается топология индуцированная из гиперпространства $\exp X$. Заметим, что $\exp_n(X) = C_n(X)$ для дискретного пространства X.

Через $C_n^c(X)$ обозначим такое пространство, что $C_n^c(X) \subset C_n(X)$ и $C_n^c(X) = \left\{ F \in \exp X, \quad F_i \text{ - компакт}, \ F = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i, \ \ i = 1, 2, ..., n \right\}$.

Теорема 1. *Пусть X- бесконечное тихоновское пространство. Тогда $w(X) = w(C_n^c(X))$.*

Доказательство. a) Покажем неравенство $w(X) \leq w(C_n^c(X))$. Пусть вес $w(X) = \tau \geq \aleph_0$. Выберем произвольный элемент $F \in C_n^c(X)$ и его окрестность $F \in O\langle U_1, U_2, ...U_n\rangle$, где $F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$, $F \cap U_i \neq \emptyset$, $i = \overline{1,n}$ и $F_1 \otimes F_2 \otimes ... \otimes F_n = F$, F_i - связный компакт для каждого $i = \overline{1,n}$. Предположим, что $F_1 \subset U_1$, $F_2 \subset U_2$, ..., $F_n \subset U_n$. Существуют окрестности V_1, V_2, ..., V_n такие, что $F_1 \subset V_1 \subset U_1$, $F_2 \subset V_2 \subset U_2$, ..., $F_n \subset V_n \subset U_n$. Отсюда вытекает, что $F \subset \bigcup_{i=1}^n V_i \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. Ясно, что $F \in O\langle V_1, V_2, ..., V_n\rangle \subset O\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle$. Значит, $w(X) = \tau \geq \aleph_0$.

b) Так как вес наследует всякому подпространство, то $w(C_n^c(X)) \leq w(X)$. Из а) и б) вытекает равенство $w(X) = w(C_n^c(X))$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть X - бесконечное T_1-пространство, тогда* $d(C_n^c(X)) = d(X)$.

Доказательство. a) Пусть $d(X) = \tau \geq \aleph_0$ и множество $M = \{a_\alpha : \alpha \in S, |S| = \tau\}$ всюду плотно в пространстве X, т.е. $|M| = d(X) = \tau$. Через $\sum$ множество обозначим такое множество, что $\sum = \{M_\alpha \subset M : |M_\alpha| < \aleph_0\}$ и $|\sum| = \tau$. Покажем, что $\sum$ есть всюду плотное подмножество в $C_n^c(X)$. Пусть $F \in C_n^c(X)$ и $O\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle$ - произвольная окрестность точки F, т.е. $F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$, $F \cap U_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2, ..., n$. Так как M всюду плотно в X, то существует точки $x_i \in U_i \cap M$, $i = \overline{1,n}$ и положим $L = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и $L \in C_n^c(X) \cap O\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle$. Ясно, что $L \in \sum$. Значит, множество $\sum$ всюду плотно в $C_n^c(X)$, т.е. $d(C_n^c(X)) \leq d(X)$.

b) Докажем обратное включение $d(X) \leq d(C_n^c(X))$. Пусть $B = \{F_\alpha : \alpha \in S, |S| = \tau, F_\alpha \in C_n^c(X)\}$ всюду плотно в $C_n^c(X)$. Из каждого множества $F_\alpha \in B$ выберем по точке $x_\alpha \in F_\alpha$. Положим $E = \{x_\alpha : \alpha \in S, |S| = \tau\}$. Покажем, что подмножество E всюду плотно в X.

Пусть $x \in X$ - произвольная точка и Ox произвольная окрестность точки x. Так как $\{x\}$ - замкнутое компактное связное подмножество, то $\{x\} \in C_n^c(X)$ и $\{x\} \in O\langle Ox\rangle$. Так как множество B всюду плотно в $C_n^c(X)$, тогда существует элемент $F_\alpha \in C_n^c(X)$ такой, что $F_\alpha \in O\langle Ox\rangle$. Отсюда, имеем, что $F_\alpha \subset Ox$. Выбирая $x_\alpha \in F_\alpha$, получим $x_\alpha \in E \cap Ox \neq \emptyset$, т.е. подмножество E всюду плотно в X. Из а) и б) имеем $d(X) = d(C_n^c(X))$. Теорема 2 доказана.

Литература

1. *Javier Camargo, Sergiyo Macias.* Quotients of n-fold hyperspaces. // Topology and its Applications, 197 (2016), pp. 154 – 166.

2. *Sergiyo Macias.* On n-fold hyperspaces of a continua. // Glas. Mat. 44(64) (2009), pp. 479-492.

3. *Федорчук В.В., Филиппов В.В.* Общая топология. Основные конструкции, Москва, 2014 г.

4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. Москва: Мир, 1986. – 752 с.

ДИСКРЕТНО ПОРОЖДЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Бешимов Р.Б.[1], Одилова Ш.С.[2]

[1,2] *Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Узбекистан, Ташкент*
[1] rbeshimov@mail.ru, [2] shokhista08@gmail.com

Определение 1 [1]. *Множество называется дискретно порожденным, если для любой точки $x \in [A]$, существует множество $D \subset A$ такое, что $x \in [D]$.*

Определение 2. *Топологическое пространство X называется дискретно порожденным мощности $\tau \geq \aleph$, если для любого множества $A \subset X$ и любого $x \in [A]$ существует дискретное множество $D \subset A$ такое, что $|D| \leq \tau$ и $x \in [D]$.*

Пример 1. *Пространство R^n, $n \in N$ является счетно дискретно порожденным.*

Определение 3 [3]. *Топологическое пространство X называется локально вложенной базой, если для любых различных элементов $A, B \in \mu$ базой имеем $A \subset B$ или $B \subset A$.*

Теорема 1. *Пусть X - регулярное пространство имеющий локальную вложенную базу в каждой точке x. Тогда пространство X^2 также является локально вложенной базой в каждой точке.*

Следствие 1. *Пусть X- регулярное пространство имеющий локальную вложенную базу в каждой точке x. Тогда пространство X^n, $n \in N$ также является локально вложенной базой в каждой точке.*

Пусть X - топологическое T_1-пространство. Множество всех непустых замкнутых подмножеств топологического пространства X обозначим $expX$. Семейство всех множеств вида

$$O\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle = \{F : F \in expX, F \subset \bigcup U_i, F \bigcap U_i \neq \emptyset, i = 1, 2, ..., n\}$$

где $U_1, U_2, ..., U_n$ - последовательность открытых подмножеств пространства X, порождает топологию на множестве $expX$. Эта топология называется топологией Виеториса. Множество $expX$ топологией Виеториса называется экспоненциальным или гиперпространством пространства X [2].

Положим $exp_n X = \{F \in expX : |F| \leq n\}$, $exp_\omega X = \bigcup exp_n X$.

Теорема 2. *Пусть X - регулярное пространство имеет вложенную базу в каждой точке. Тогда пространство $exp_n X$ является дискретно порожденным тогда и только тогда, когда пространство X дискретно порожденным.*

Следствие 2. *Пусть X - регулярное пространство имеет вложенную базу в каждой точке. Тогда пространство $exp_\omega X$ является дискретно порожденным тогда и только тогда, когда пространство X дискретно порожденным.*

Литература

1. *A.Dow, M.G.Tkachenko, V.V.Tkachuk and R.G.Wilson. Topologies generated by discrete subspaces// Glasnik Mat.Ser.III 37(1), (2012), 187-210.*

2. *V.V.Tkachuk, R.G.Wilson. Box products are often discretely generated// Topology and it's Applications 159 (2012), 272-278.*

3. *В.В.Федорчук, В.В.Филиппов.* Общая топология. Основные конструкции, Москва, 2014 г.

4. *Р.Энгелькинг.* Общая топология. Москва: Мир, 1986. – 752 с.

Геодезические на поверхностях вращения

Зойидов А. Н.

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека
e-mail:monaslan@mail.ru

Рассмотрим движение по инерции материальной точки единичной массы по поверхности вращения. Уравнение этой поверхности запишем в виде $r(\varphi, z) = \rho(z)(\mathbf{e}(\varphi) + z\mathbf{k})$. Здесь φ - угол вращения, $\rho(z) > 0$ - радиус параллели на высоте z. Система криволинейных координат $u^1 = \rho, u^2 = z$ на поверхности ортогональная, матрица метрического тензора имеет вид

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & \rho_z^2 + 1 \end{pmatrix}$$

Поэтому кинетическая энергия точки равна $K = \frac{1}{2}q'^2 = \frac{1}{2}(\rho^2\dot{\varphi}^2 + (\rho_z^2 + 1)\dot{z}^2)$. Найдем уравнения геодезических. При отсутствии потенциальных сил уравнения Эйлера имеет вид

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial K}{\partial \dot{u}^i}) - \frac{\partial K}{\partial u^i} = 0$$

Запишем эти уравнения подробнее. Имеем

$$\frac{\partial K}{\partial u^i} = (0, \rho\dot{\varphi}^2 + \rho_{zz}\dot{z}^2), (\frac{\partial K}{\partial \dot{u}^i}) = (\rho^2\dot{\varphi}, (\rho_z^2+1)\dot{z}), \frac{d}{dt}(\frac{\partial K}{\partial \dot{u}^i}) = (\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}), \frac{d}{dt}((\rho_z^2+1)\dot{z})).$$

Следовательно, уравнения движения точки имеют вид

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) = 0, \frac{d}{dt}((\rho_z^2+1)\dot{z}) - \rho\dot{\varphi}^2 - \rho_{zz}\dot{z}^2.$$

Первое из них дает первый интеграл $\rho^2\dot{\varphi} = const$. Выясним его геометрический смысл. Обозначим через α угол между вектором скорости $\dot{\mathbf{r}}$ движущейся точки и касательным вектором к меридиану $\mathbf{r}_z$. Положим $v = |\dot{\mathbf{r}}|$. Тогда в силу ортогональности координатной сети

$$\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_\varphi)}{|\dot{\mathbf{r}}||\mathbf{r}_\varphi|} = \frac{g_{11}\dot{\varphi}}{v\sqrt{g_{11}}} = \frac{\rho\dot{\varphi}}{v}$$

откуда $\rho\dot{\varphi} = const$. Так как $\rho^2\dot{\varphi} = const$, то $\rho v \sin\alpha = const$, а поскольку $K = \frac{1}{2}v^2 = const$ является интегралом консервативной системы, то скорость движения точки $v = const$ и, следовательно, мы приходим к выводу

Теорема Клеро. При движении точки по поверхности вращения произведение ее расстояния до оси вращения на синус угла между касательной и меридианом есть величина постоянная

$$\rho\sin\alpha = const$$

Этот результат дает возможность дать качественное поведение геодезических путей на поверхностях вращения. Так как $|\sin\alpha| \leq 1$, то $\rho \geq \rho_0 \sin\alpha_0$. При этом наклон орбиты к меридиану увеличивается при уменьшении радиуса ρ и достигнув наименьшего значения $\rho = \rho_0\sin\alpha_0$, орбита возвращается в область с большим значением ρ. Разумеется, чтобы получить более точное поведение геодезических, надо проинтегрировать еще второе уравнение - это ОДУ второго порядка.

Пример. На прямом круговом цилиндре $\rho = const$ и мы получаем $\sin\alpha = const$. Это винтовые линии.

Литература

1. **Шапуков Б. Н.** *Дифференциальная геометрия и основы тензорного анализа.* с.135.

2. **Gromoll D.,Walschap G.** *Metric Foliations and Curvature.* Birkhдuser Basel · Boston · Berlin 2009, p.174

О ГЕОМЕТРИИ КОНФОРМНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

А.Я.Нарманов[1], Холбозоров К[2],

[1] Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
[2] Ташкентский финансовый институт, Ташкент, Узбекистан
[1]narmanov@yandex.ru, [2]piratiy...daler@inbox.ru

Пусть M - гладкое многообразие размерности n, $V(M)-$ всех гладких векторных полей на многообразии M, $[X,Y]-$ скбока Ли векторных полей $X,Y \in V(M)$.

Множество $V(M)-$ является линейным пространством над полем действительных чисел и является алгеброй Ли относительно скобки Ли.

Для векторного поля $X \in D$ через $X^t(x)$ обозначим интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку $x \in M$ при $t = 0$. Отображение $t \to X^t(x)$ определено в некоторой области $I(x)$, которая в общем случае зависит не только от поля X , но и от начальной точки x. В дальнейшем всюду в формулах вида $X^t(x)$ будем считать, что $t \in I(x)$. Если для всех точек $x \in M$ область определения $I(x)$ кривой $t \to X^t(x)$ совпадает с числовой осью, то векторное поле X называется полным векторным полем.В статье всюду под гладкостью понимается гладкость класса C^∞.

Говорят, что векторное поле X на M конформно, если $L_X g = \sigma g$, где σ есть функция на M.

Известно, что векторное поле X на M является конформным тогда и только тогда, когда локальная однопараметрическая группа локальных преобразований, порожденная векторным полем X, состоит из конформных преобразований [2].

Напомним, что диффеоморфизм $\phi : M \to M$ называется конформным преобразованием, если $d\phi\,(g) = \lambda g$, где λ - положительная функция на M. Еслиλ постоянна, то ϕ есть преобразование гомотетии. Если λ тождест-венно равно 1, то ϕ является изометрией. Локальная однопараметрическая группа локальных преобразований, порожденная конформным векторным полем, состоит из гомотетий если σ- константа, и состоит из изометрий если $\sigma = 0$.

Следующая теорема показывает, что конформные векторные поля порождают конечномерную алгебру Ли [2].

Теорема 1. Множество $K(M)$ конформных векторных полей связного n-мерного риманова многообразия M является алгеброй Ли размерности не более $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ при $n \geq 3$.

Изучение геометрии конформных векторных полей является объектом многочисленных исследований [1-4].

В этой статье рассматриваем конформные векторные поля в евклидо-вом пространстве. Вышеприведенное определение конформного преобразо-вания для евклидового пространства можно переформулировать следующим образом.

Диффеоморфизм $\phi : R^n \to R^n$ называется конформным преоб-разованием, если $|d\phi\,(v)| = \lambda\,(x)\,|v|$ для всех $v \in T_x R^n$ для каждой точки $x \in R^n$, где$\lambda\,(x)$- числовая функция, $|v|$-длина касательного вектора. Конформные преобразование сохраняет углы между линиями. Поэтому дифференциал конформного преобразования в каждой точке x задается матрицей вида $\lambda\,(x)\,O$, где O- ортогональная матрица. Простейшим частным случаем конформного преобразования является подобие

$$x \to \lambda O x + a,$$

дифференциал которого равен оператору λO.

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие того чтобы данное векторное поле в евклидовом пространстве было конформным :

Теорема-2. Векторное поле $X = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ в R^n является конформным тогда и только тогда, когда выполняется условия

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = 0,\ i \neq j,\ \ \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = \mu\,(x)\,,\ \ i,j = \overline{1,n}.$$

для некоторой функции $\mu(x)$.

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие того чтобы данное векторное поле в евклидовом пространстве было Киллинговым :

*Теорема-3.*Векторное поле $X = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ в R^n является полем Киллинга тогда и только тогда, когда выполняется условия

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = 0,\ i \neq j,\ \ \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = 0,\ \ i,j = \overline{1,n}.$$

Литература

1. *Азамов А.А., Нарманов А. Я.* О предельных множествах орбит систем векторных полей. // Дифференциальные уравнения.2004. 40, є2. С. 257-260.

2. *А.Я.Нарманов, С.С.Саитова,.* О геометрии векторных полей Киллинга. // Дифференциальные уравнения.2014. 40, є2. С. 257-260.

3. *Кобаяси.Ш,Номидзу.К* Основы дифференциальной геометрии. Москва: Наука, 1981. 344 с.

4. Capocci M.S.,Hall G.S.Conformal vector fields on decomposable space-times. // Гравитация и Космология. 1997,Том:3,1,С. 1-7.

КЎПБУРЧАК ЮЗИНИ ҲИСОБЛАШНИНГ ГЕРОН АНАЛОГИЯСИ

Нармуратов Н.К.

Мирзо Улугбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети, Тошкент ш.

Геометрик шаклларнинг юзаларини аниқлаш – энг қадимги амалий масалалардан бири бўлиб, бунда учбурчак юзасини унинг учта a, b ва c томонлари узунликлиги бўйича ҳисоблаш имконини берувчи қуйидаги Герон формуласи алоҳида аҳамият касб этади:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \tag{1}$$

бунда p – учбурчакнинг ярим периметри, яъни $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Агар (1) ни икки томонини квадратга ошириб, p ни ифодасини қўйсак ва соддалаштирсак, қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$S^2 = (2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) \tag{2}$$

Тўртбурчаклар учун ҳам Герон формуласига ўхшаш формулалар мавжуд. Берилган тўртта a, b, c, d томони бўйича тўртбурчакни ягона усулда ясаб бўлмаслиги туфайли, тўртбурчак юзасини ҳисоблаш учун умумий ҳолда томонлари узунлигини билишнинг ўзи етарли эмас. Бу ҳолда қўшимча параметрлар киритиш ёки чегаралар қўйишга тўғри келади. Масалан, тўртбурчак томонлари узунликликларидан ташқари, иккита қарама–қарши бурчаклари катталиги ёки диагоналлари узунлиги берилган бўлса, (1) ва (2) га ўхшаш қуйидаги формулаларни ҳосил қилиш мумкин:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcdcos^2\frac{A+C}{2}}, \tag{1}$$

ёки

$$S^2 = \frac{1}{16}(2ef + b^2 + d^2 - a^2 - c^2)(2ef + a^2 + c^2 - b^2 - d^2) \tag{4}$$

Бу ерда a, b, c, d – тўртбурчак томонлари узунлиги, e, f – тўртбурчак диагоналлари узунлиги.

Агар қаралаётган тўртбурчак айланага ички чизилган бўлса, у ҳолда (3) ва (4) ни мос равишда $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ кўринишда ёки

$$S^2 = \frac{1}{16}(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 - a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 8abcd)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(Бу формула VI–VII асрда яшаган хинд математиги Брахмагупта (598–660) кашф қилгани учун, унинг номи билан юритилади)

Агар қаралаётган тўртбурчак айланага ташқи чизилган бўлса, у ҳолда

$$S^2 = \frac{1}{4}(ef + bd - ac)(ef - bd + ac)$$

бђлади [1].

Агар қаралаётган тўртбурчак айланага ҳам ташқи, ҳам ички чизилган бўлса, у ҳолда $S^2 = abcd$ кўринишда бўлади.

Энди (2) формула асосида ихтиёрий кўпбурчак юзини унинг томонлари узунлиги ва бирор учидан чиқувчи диагоналлари узунлиги орқали ифодаловчи формулани келтириб чиқарамиз.

Маълумки, ихтиёрий n бурчакли кўпбурчакни бирор учидан чиқувчи диагоналлари уни $n-2$ та учбурчакка ажратади. Демак, берилган кўпбурчак юзи уни бирор учидан чиқувчи диагоналлари ҳосил қилган учбурчаклар юзлари йиғиндисига тенг. Ушбу тасаввурга асосланиб ва (2) формулани қўллаб, ихтиёрий қавариқ кўпбурчак юзини ҳисоблаш формуласини келтириб чиқариш мумкин: CD қавариқ тўртбурчакда $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AC = d$, $AC = e$ бўлса, у ҳолда

$$S2 = \frac{1}{16}(2a^2b^2 + 2b^2e^2 + 2a^2e^2 + 2e^2c^2 + 2e^2d^2 + 2c^2d^2 - a^4 - b^4 - c^4 - d^4 - 2e^4)$$

бўлади.

Худди шундай, CD қавариқ бешбурчакда $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$, $FA = e$, $AC = f$, $AD = k$ бўлса, у ҳолда

$$S2 = \frac{1}{16}(2a^2c^2 + 2a^2f^2 + 2f^2e^2 + 2f^2k^2 + 2f^2d^2 + 2k^2d^2 + 2k^2b^2 + \\ + 2k^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 - d^4 - e^4 - 2f^4 - 2k^4)$$

бўлади.

Ушбу жараённи ихтиёрий қавариқ кўпбурчакка қўллаб, унинг томонлари ва бир учидан чиққан диагоналлари узунлигини билган ҳолда, уни юзини ҳисоблаш мумкин.

Фойдаланилган адабиётлар

1. *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия: В 2 т.-Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. - М.: МЦНМО, 2004.- 312 с.

2. *Сабитов И.Х.* Объемы многогранников. (Серия: "Библиотека Математическое просвещение"). М.: МЦНМО, 2002. - 32 с.

СОДЕРЖАНИЕ

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ И РОДСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ АНАЛИЗА

НЕКОРРЕКТНЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

МЕТОДЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА И АЛГЕБРЫ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ