

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM
VAZIRLIGI
NIZOMIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI
MAGISTRATURA BO‘LIMI**

*Qo‘lyozma huquqida
UDK (517.564)*

Rizayev Rustam Qobilovichning

**«O‘zgarish chizig‘i xarakteristika bo‘lgan parabolo-
giperbolik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy
masalalar»**

Mutaxassislik: 5A110101- matematika o‘qitish metodikasi

Magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan

DISSERTATSIYA

Himoyaga tavsiya etaman

Magistratura bo‘limi boshlig‘i

_____M.Esanov

2013 y «____» iyun

“Matematik analiz”

kafedrasi mudiri, f.-m.f.n., dotsent

_____ D. Boytillayev

Ilmiy rahbar: f.-m.f.d., professor

_____ J.O. Taxiroy

Toshkent-2014 yil

MUNDARIJA

Kirish.....	3
I bob. Ikkinchi tartibli xususiy hosilali tenglamalar haqida.....	7
1. Ikkinchi tartibli giperbolik tipdagi tenglamalar va ular uchun asosiy chegaraviy masalalar	11
2. Ikkinchi tartibli parabolik tipdagi tenglamalar va ular uchun asosiy chegaraviy masalalar	21
I bob bo'yicha xulosa.....	31
II bob. Parabola-giperbolik tenglamalar bo'yicha umumiy ma'lumotlar.....	32
1. Asosiy boshlang'ich-chegaraviy masalalarning qo'yilishi	32
2. Asosiy masalalar yechimlarining mavjudligi va yagonaligi.....	36
II bob bo'yicha xulosa	45
III bob. O'zgarish chizig'i xarakteristika bo'lgan tenglamalar uchun ba'zi chegaraviy masalalar.....	46
1. Integral tenglamalar haqida umumiy ma'lumotlar	46
2. Masalaning qo'yilishi va ekstremum prinsipi	54
3. Masala yechimining mavjudligi va yagonaligi.....	59
III bob bo'yicha xulosa	66
Xulosa.....	67
Adabiyotlar ro'yxati.....	70
Glossariy	

Kirish

O'zbekiston mustaqillikka erishgach, prezidentimiz I.A.Karimov tomonidan ta'lim tizimini tubdan takomillashtirish, yoshlarga jahon andozalari darajasida bilim berish, yuksak intellektual salohiyatli, boy dunyoqarashga ega barkamol avlodni tarbiyalash davlat siyosatining ustuvor yo'nalishiga aylandi.

Prezidentimiz ta'limning jamiyat rivojidagi o'rniga "Shuni unutmazlik kerakki, kelajagimiz poydevori bilim dargohlarida yaratiladi, boshqacha aytganda xalqimizning ertangi kuni qanday bo'lishi farzandlarimizning bugun qanday ta'lim va tarbiya olishiga bog'liq"¹ deya baho beradilar.

Prezidentimiz tashabusslari bilan qabul qilingan va qabul qilinayotgan qator tarixiy qaror va farmonlar uzluksiz ta'limning barcha bosqichlaridagi islohotlar uchun huquqiy-me'yoriy asos va amaliy dastur sifatida xizmat qilib kelmoqda. Jumladan 2012 yil 28 dekabrda qabul qilingan 365-sonli "Oliy malakali ilmiy va ilmiy-pedagog kadrlar tayyorlash va attestatsiyadan o'tkazish tizimini yanada takomillashtirish to'g'risida"gi qarorida O'zbekistonda bir pog'onali ilmiy kadrlar tayyorlash masalasida jahon tajribasidan kelib chiqqan holda, bakalavriat va magistraturaga bo'lgan talabni o'zgartirish va ishlab chiqarishni talab etmoqda.^{2,3}

Aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar hozirgi vaqtda xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining keng rivojlangan va rivojlanib borayotgan sohalaridan biri bo'lib, bu yo'nalishda nafaqat respublikamizda, balki, xorijda ham ko'plab ilmiy izlanishlar olib borilmoqda va yangi ilmiy natijalar olinmoqda.

Mexanika, fizika, biologiya, ekologiya va ishlab chiqarishning bir qator masalalari hamda fanning zamonaviy muammolari parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun nafaqat klassik, balki, noklassik masalalarni o'rganishni talab

¹ Islom Karimov, Yuksak ma'naviyat - yengilmas kuch. Toshkent "ma'naviyat" 2008

²O'zbekiston Respublikasi "Magistratura to'g'risidagi nizomi" Toshkent. 29 oktabr 2012 yil ta'sdiqlangan.

³ «Oliy malakali ilmiy va ilmiy-pedagog kadrlar tayyorlash va attestatsiyadan o'tkazish tizimini yanada takomillashtirish to'g'risida» (O'zbekiston Respublikasi qonun hujjatlari to'plami, 2013 y., 1-son, 5-modda).

etmoqda. Bu esa parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun noklassik masalalarni o'rganish bugungi kunning dolzarb masalalaridan biri ekanligini anglatadi. Noklassik masalalar jumlasiga nolokol shartli masalalar (sohaning chegaralarida shartlar berilmaydi, balki, sohaning u yoki bu qismida bog'lanishlar beriladi) kiradi.

Tadqiqot ob'ekti. Tadqiqotning ob'ektini Parabola-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar tashkil etadi.

Tadqiqot predmeti. O'zgarish chizig'i xarakteristika bo'lgan parabola-giperbolik tipdagi tenglama uchun chegaraviy masalani yechimini mavjudligi va yagonaligi ishning predmeti sifatida qaraladi.

Tadqiqot maqsadi va vazifalari. Ko'plab fizik va mexanik jarayonlarni ifoda etuvchi parabolik va giperbolik tipdagi tenglamalar uchun ba'zi elementlarni o'rganish hamda parabola-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun nolokal shartli boshlang'ich chegaraviy masala yechimining yagonaligi mavjudligi haqidagi teoremlarni isbotlash tadqiqotning asosiy maqsadi etib belgilandi.

Tadqiqot maqsadini amalga oshirish uchun quyidagi vazifalarni hal etish nazarda tutilgan:

1. Giperbolik va parabolik tipdagi tenglamalar haqida umumiy ma'lumotlar to'plash va o'rganish;
2. Asosiy boshlangich-chegaraviy masalalarni korrekt qo'yilishi, ularni yechish usullari xaqida umumiy tushunchalarga ega bo'lish, Fur'e va xarakteristika metodlari, ularni ba'zi tadbirlarini o'rganish;
3. Boshlangich chegaraviy masalalar yechimlari mavjudligi va yagonaligi teoremlarini isbotlash;
4. Aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning qo'yilishi va uning yechimlari mavjudligi va yagonaligi teoremlarini isbotlash;
5. O'zgarish chizig'i xarakteristika bo'lgan parabola-giperbolik tipdagi tenglama uchun chegaraviy masalaning yechimining mavjudligi va yagonaligi teoremlarini isbotlash.

Tadqiqotning asosiy masalalari va farazlari. Dissertatsiyaning birinchi va

ikkinchi boblarida o'rganilgan masalalar natijalaridan foydalangan holda oxirgi bobda tadqiqotning asosiy masalasi, ya'ni, o'zgarish chizig'i xarakteristika bo'lgan parabola-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun qo'yilgan nolokal shartli chegaraviy masala yechimining mavjudligi va yechimning sohada yagona ekanligi isbotlanadi.

Agarda boshlanishida elliptiko-parabolik tipdagi tenglamalar uchun masalalar qaralgan bo'lsa, 1960 yillardan boshlab elliptiko-parabolik va parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar ham o'rganila boshlandi. Birinchi marta 1959 yilda I.M.Gelfand tomonidan sohaning bir qismida parabolik ikkinchi qismida esa giperbolik tipdagi tenglama bilan ifodalanadigan masala qaraldi.¹ Bu ishda g'ovak muhit bilan o'ralgan kanalda gazning harakati bilan bog'liq bo'lgan masala qaralgan bo'lib, gazning kanaldagi harakati to'lqin tenglamasi bilan, uning tashqarisida esa diffuziya tenglamasi bilan ifodalanadi.

1964 yilda Y.S.Uflyand tomonidan elektr kabellarining tebranishi haqidagi masala qaraladi va bu masalaning matematik modeli birinchi chorakda quyidagi parabolo-giperbolik tenglama bilan ifodalanadi.

$$0 = \begin{cases} Ma_1^2 u_{xx} - u_{yy}, & 0 < x < l, \\ Ha_2^2 u_{xx} - u_y, & l < x < +\infty. \end{cases}$$

Keyingi izlanishlar shuni ko'rsatadiki, juda ko'plab jarayonlarning matematik modellari aralash-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun qaraladigan klassik masalalar bilan ifodalanadi. Jumladan, g'ovak-kapilyar muhitda issiqlik va issiqlik almashish jarayonining matematik modeli, bir jinsli bo'lmagan muhitda elektromagnit maydonning tarqalishining matematik modeli, qovushqoq va qovushqoq-elastik suyuqliklar harakitining modellari va boshqalar.

G.M.Struchinoy, I.S.Gayduk, A.Ivanov, O.A.Ladijenskaya tomonidan qaralgan ishlar bu sohadagi ishlardan bo'lib, bu ishlar parabolo-giperbolik

¹ Гельфанд И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнения – УМН, т. IV, вып. 3 (87), 1959 с.3-19

tipdagi tenglamalar uchun boshlang'ich va boshlang'ich-chegaraviy masalalarni o'rganishga bag'ishlangan.

L.A.Zolina tomonidan $x = 0, x = 1, y = h, x + y = 0, x - y = 1$ to'g'ri chiziqli kesmalari bilan chegaralangan sohada

$$\Delta u = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0. \end{cases}$$

tenglama uchun Triкоми masalasining analogi va uning umumlashmasi o'rganiladi.¹

Hozirgi kunga kelib, parabolo-giperbolik tenglamalar uchun asosiy klassik chegaraviy shartli masalalardan tashqari Triкоми masalasi, Gellersted masalasi va ularning umumlashmasidan iborat bir qator yangi lokal va nolokol masalalar o'rganilgan. Shuningdek, tekislikda va fazoda ikkinchi va uchinchi tartibli turli ko'rinishdagi parabolo-giperbolik tenglamalar uchun masalalar qaralgan.

Parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalarning to'liq bibliografiyasini T.D.Juraev, A.Sopuyev va M.Mamajonovlarning monografiyasidan², shuningdek, M.S.Salohitdinov, X.G.Bjixatlova, V.N.Vragov, A.M.Naxushev, K.B.Sabitov, J.O.Taxirov va ularning shogirdlarining ishlaridan topish mumkin.

Tadqiqotning metodlari. Qo'yilgan masalada mavjudlik teoremasini isbotlashda giperbolik tenglamaning umumiy yechimidan, parabolik sohada Grin funksiyasidan foydalangan holda Volterra tipdagi integral tenglamalar sistemasiga keltirilib va bu sistema yechimining mavjudligini integral tenglamalar nazariyasi teoremlaridan foydalangan holda isbotlangan. Yagonalik teoremasini isbotlashda esa giperbolik va parabolik tenglamalar uchun ekstremum prinsiplaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning natijalarini nazariy va amaliy ahamiyati. Ushbu magistrlik

¹ Золина Л.А. “ О краевой задаче для модельного уравнения гипербола-параболического типа ” //вычислительной математики и математической физики. ЖЛМ ЖВМ и МФ, 1966-1001

² ДжураевТ.Д., СопуевА., МамажановМ. Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа. Ташкент:Фан, 1986.

dissertatsiyasini bajarish davomida olingan natijalar amaliy va nazariy ahamiyatga ega bo'lib, nazariy jihatdan keyinchalik parabolo-giperbolik, elliptiko-giperbolik va parabolo-elliptik tipdagi ikkinchi tartibli tenglamalar uchun uchun lokal va nolokal chegaraviy masalalarni o'rganishda qo'l keladi; amaliy ahamiyati shundaki, dissertatsiyada qo'yilgan asosiy masalani yechish orqali bir qancha biologik jarayonlardagi muammolarni hal qilish mumkin.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi. Qo'yilgan masalada nolokal shart o'rnida parabolik sohaning chegaralaridagi qiymatlari berilganda masala yechimi mavjud, ammo sohaning chegaralaridagi qiymatlari berilmasdan, chap chegara va sohaning ichki qismi bilan bog'lanishni ta'minlovchi nolokal shart berilgan.

Ushbu magistrlik dissertatsiyasi parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun nolokal shartli masalani o'rganishga bag'ishlangan bo'lib, kirish, 3 bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan tashkil topgan.

I bobda ikkinchi tartibli xususiy hosilali tenglamalar haqida umumiy ma'lumotlar berilgan. Giperbolik va parabolik tipdagi tenglamalar va ular uchun asosiy chegaraviy masalalarning qo'yilishi va bob bo'yicha xulosa berilgan.

II bobda aralash tipdagi tenglamalar haqida umumiy ma'lumotlar berilgan, ya'ni, parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun asosiy boshlang'ich-chegaraviy masalalarning qo'yilishi, birinchi chegaraviy masalaning yechimining mavjudligi va yagonaligi teoremasi isbotlangan va bob bo'yicha xulosa berilgan.

III bob esa integral tenglamalar nazariyasining asosiy tushunchalari, o'zgarish chizig'i xarakteristika bo'lgan parabola-giperbolik tipdagi tenglama uchun bitta chegaraviy masala yechimining mavjudligi va yagonaligi hamda bob bo'yicha xulosadan tashkil topgan.

I BOB. IKKINCHI TARTIBLI XUSUSIY HOSILALI TENGLAMALAR HAQIDA

Mexanika, fizika va texnikaning bir qancha masalalari, masalan, tovush, elektromagnit to'liqlarning tarqalishi, tebranish xodisalari, har xil muhitlarda issiqlikning tarqalishi, deffuziya kabi xodisalar ikkinchi tartibli xususiy hosilali deffirensial tenglamalar bilan xarakterlanadi.¹

Ushbu

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial^{k_1} x_1 \dots \partial^{k_n} x_n}\right) = 0 \quad (1)$$

(Bu yerda $\frac{\partial u}{\partial x_1} = u_{x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} = u_{x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = u_{x_1 x_1}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = u_{x_1 x_2}, \dots$) tenglik noma'lum $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyaga nisbatan k -tartibli xususiy hosilali deffirensial tenglama deyiladi.

Bu yerda $x_1, x_2, \dots, x_n$ lar tenglamaning erkli o'zgaruvchilari, u – argumentlari shu o'zgaruvchilardan iborat bo'lgan noma'lum funksiya, F -o'zgaruvchilar va u funksiyadan olingan hosilalarning berilgan funksiyasi.

Agar F tenglamadagi barcha o'zgaruvchilar va ularning barcha hosilalariga nisbatan chiziqli funksiya bo'lsa, (1) tenglama chiziqli deffirensial tenglama deyiladi. Agarda F faqatgina teglamadagi barcha eng yuqori tartibli hosilalarga nisbatan chiziqli bo'lsa, bunday tenglama kvazichiziqli deffirensial tenglama deyiladi.

D sohada aniqlangan $u(x)$ funksiya (1) tenglamada ishtirok etuvchi barcha hosilalari bilan uzluksiz bo'lib, uni ayniyatga aylantirsa, $u(x)$ ni (1) tenglamaning regulyar (klassik) yechimi deyiladi.²

Ikkinchi tartibli xususiy hosilali chiziqli deffirensial tenglama

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x) \quad (2)$$

¹ Бизадзе А.В. Уравнения математической физики. М. Наука. 1976г. 291с.

² Salohiddinov M. Matematik fizika tenglamalari. "O'zbekiston" nashriyoti. T. 2002 y.

ko'rinishda yoziladi, bu yerda $A_{ij}, B_i, C, f - D$ sohada berilgan haqiqiy funksiyalar, $A_{ij}(x) \in C(D)$ forma biror $Q(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j$ ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ haqiqiy o'zgaruvchilar) kvadratik formadir.

Barcha $x \in D$ lar uchun (2) tenglamaning o'ng tomoni $-f(x)$ nolga teng bo'lsa, (2) tenglama bir jinsli, $f(x)$ funksiya nolga teng bo'lmasa, (2) tenglama bir jinsli bo'lmaga tenglama deyiladi.

Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar bir jinsli bo'lmagan (2) tenglamaning yechimlari bo'lsa, ravshanki, $\omega(x) = u(x) - v(x)$ ayirma bir jinsli ($f=0$) tenglamaning yechimi bo'ladi.

Agarda $u_i(x), i=1, 2, \dots, k$ funksiya bir jinsli tenglamaning yechimi bo'lsa, $u(x) = \sum_{i=1}^k c_i u_i(x)$ (c_i - haqiqiy o'zgarmaslar) funksiya hamshu tenglamaning yechimi bo'ladi.

(2) tenglamada $n=2$ bo'lgan holda, ya'ni, ikkita x va y haqiqiy o'zgaruvchili ikkinchi tartibli kvazichiziqli tenglama ushbu

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad (3)$$

ko'rinishda yoziladi. [4,5,6]

Xususiyl hosilali deffirensial tenglamalar, shu jumladan, xususan (3) ko'rinishdagi ikkinchi tartibli tenglama tekshirilayotganda, iloji boricha erkli o'zgaruvchilarni almashtirib, tenglamalarni soddaroq ko'rinishga keltirishga harakat qilinadi va ayrim hollarda bunga erishiladi ham.¹

Qulaylik uchun (3) tenglamani quyidagi shaklda yozib olamiz:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (4)$$

Ushbu tenglamada A, B, C koeffisientlar ikkinchi tartibli hosilalari bilan uzluksiz va bir vaqtda nolga teng bo'lmagan funksiyalar bo'lsin. Tenglamani

¹ Salohiddinov M. Matematik fizika tenglamalari. "O'zbekiston" nashriyoti. T. 2002 y.

integrallash, echimga erishish maqsadida uning koeffitsientlariga shart qo'yish bilan bir qatorda tenglamani kanonik ko'rinishga keltirib olishga harakat qilamiz.

Tenglamaga quyidagicha almashtirish kiritamiz:

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \quad (5)$$

Ushbu yangi funksiyalar birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari bilan uzluksiz va $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ teskari almashtirish o'rinli bo'lishi uchun yakobian

$$I = \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \frac{\left| \begin{array}{cc} \frac{d\xi}{dx} & \frac{d\xi}{dy} \\ \frac{d\eta}{dx} & \frac{d\eta}{dy} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} \frac{d\xi}{dx} & \frac{d\xi}{dy} \\ \frac{d\eta}{dx} & \frac{d\eta}{dy} \end{array} \right|} \neq 0 \quad (*)$$

bo'lsin. Shu (*) shart bajarilsa, (5) almashtirish teskari almashtirishga ega bo'ladi, ya'ni, $x = x(\xi, \eta)$ $y = y(\xi, \eta)$.

(4) tenglamani yangi (ξ, η) o'zgaruvchilar bo'yicha birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini hisoblab,

$$A_1 u_{\xi\xi} + 2B_1 u_{\xi\eta} + C_1 u_{\eta\eta} + F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0, \quad (6)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda koeffisientlar quyidagiga teng:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2, \\ B_1 &= A\xi_x\xi_y + B(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + C\xi_y\eta_y, \\ C_1 &= A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

A_1 va C_1 tengliklarni xarakterlash maqsadida

$$A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = 0 \quad (8)$$

birinchi tartibli tenglamani qaraylik. Agar $\varphi(x, y)$ funksiya (8) tenglamaning echimi bo'lsa va $\xi = \varphi(x, y)$ desak (7) dan ko'rinib turibdiki, $A_1 = 0$ bo'ladi, xuddi shunday $\psi(x, y)$ ham (7) tenglamaning boshqa echimi bo'lsa, $\eta = \psi(x, y)$ desak, (7) dan $C_1 = 0$ bo'lishi ko'rinadi. ¹

¹ Тихонов А.Н, Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.Наука. 1977г.

(8) tenglama uchun quyidagi ikki tasdiqni keltirishimiz mumkin:

1. Agar $\varphi(x, y)$ funksiya (8) tenglamaning xususiy echimi bo'lsa, u holda $\varphi(x, y) = \text{const}$

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0 \quad (9)$$

oddiy differensial tenglamaning umumiy echimi bo'ladi.

2. Agar $\varphi(x, y) = C$ (9) tenglamaning umumiy echimi bo'lsa, u holda $\varphi(x, y)$ funksiya (8) tenglamani qanoatlantiradi.

(9) tenglama (4) tenglamaning xarakteristik tenglamasi, uning echimlari esa (4) tenglamaning xarakteristiklari deyiladi.¹

Ikkinchi tartibli xususiy hosilali tenglamalarni qaysi tipga tegishli ekanligini ularning xarakteristik tenglamalari yordamida aniqlashga erishiladi.

$$A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} + F = 0$$

tenglama uchun biror M nuqtada $B^2 - AC > 0$ bo'lsa, u giperbolik tipdagi tenglama bo'ladi. Qolgan ikki holda, ya'ni, $B^2 - AC < 0$ bo'lganda (4) tenglama M nuqtada elliptik, $B^2 - AC = 0$ holda esa M nuqtada parabolik tipdagi tenglama deyiladi.

Agar sohaning barcha nuqtalarida $B^2 - AC > 0$ bo'lsa, (4) tenglama butun sohada giperbolik deyiladi. Bu xossa elliptik va parabolik tipdagi tenglamalar uchun ham o'rinlidir.

Tenglamalarning bunday nomlanishlari ikkinchi tartibli egri chiziqlarni o'rganishdan kelib chiqqan. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy tenglamasi

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (10)$$

da $B^2 - AC > 0$ bo'lsa, tenglama giperbolani, $B^2 - AC < 0$ bo'lsa ellipsni, $B^2 - AC = 0$ bo'lganda esa parabolani ifoda etadi.²

¹ Гайдук С.И. Иванов А.В. Обобщенной задачи на сопряжение уравнение параболического и гиперболического типов. – ДАН ВССР 1964 №9 с. 560-563

² Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа. УМН. 1962 г.

Matematik-fizika tenglamalari uchun biror bir aniq masalani echish vaqtida shu yechimlar ichidan aynan shu fizik mazmundan kelib chiqib qo'yilgan qo'shimcha talab yoki shartlarni qanoatlantiruvchi echimni topish talab qilinadi. Ana shu qo'shimcha shartlarga boshlang'ich va chegaraviy shartlar deyiladi.

Har qanday tenglama uchun qo'yilgan masala quyidagi uchta shartni bajarishi lozim:

1. Echimning mavjudligi.
2. Echimning yagonaligi.
3. Echimning turg'unligi.

Ushbu shartlar bajarilgan masala korrekt qo'yilgan masala deb ataladi.

1. Ikkinchi tartibli giperbolik tipdagi tenglamalar va ular uchun asosiy chegaraviy masalalar.

Mexanika va fizikaning tebranish jarayonlari bilan bog'liq bir qator muammolari masalan, tor va membrana tebranishi, gaz elektromexanik tebranish kabi jarayonlar giperbolik tipdagi xususiy hosilali tenglamalar bilan ifodalanadi. Bunday tenglamalar bilan ifodalanuvchi jarayonlarning o'ziga xos tomoni tebranishlarninig chekli tezlikda tarqalishidir.

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + F = 0 \quad (1.1)$$

tenglama uchun biror M nuqtada $B^2 - AC > 0$ bo'lgan holda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

tenglamalarga erishamiz. Bu tenglamalarning integrallari

$$\varphi(x, y) = \text{const}, \quad \psi(x, y) = \text{const}$$

lar haqiqiy va turlicha bo'ladi. Bu yechimlarni

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

deb belgilab, yangi ξ va η o'zgaruvchilarni kiritamiz.

Bizga ma'lumki, ular (8) tenglamani qanoatlantirib, (7) munosabatlarga ko'ra, (6) tenglamada $A_1 = 0$, $C_1 = 0$ bo'ladi. Natijada (6) tenglama quyidagi

$$2B_1 u_{\xi\eta} + F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0$$

ko‘rinishga keladi.

$$F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = -\frac{F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)}{2B_1}$$

almashtirish bajarsak,

$$u_{\xi\eta} = F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad (1.2)$$

bo‘ladi.

(1.2) tenglama giperbolik tipdagi tenglamaning kanonik ko‘rinishini ifodalaydi.

Agar α va β o‘zgaruvchilarni

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2}$$

deb olsak, giperbolik tenglama ushbu

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = F(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$

ko‘rinishga keladi. Bu giperbolik tipdagi tenglamaning ikkinchi kanonik ko‘rinishidir.

Shunday qilib, giperbolik tipdagi tenglama quyidagi

$$u_{xx} - u_{yy} = F \text{ yoki } u_{xy} = F$$

kanonik ko‘rinishlarga ega bo‘ladi.

Tabiatda tebranishga bog‘liq bo‘lgan jarayonlarning matematik modeli giperbolik tipdagi ikkinchi tartibli xususiy hosilali tenglamalarga keladi. Giperbolik tipdagi tenglamalarning eng sodda vakili bu tor tebranish tenglamasidir.

Torning majburiy tebranishi tenglamasi

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$$

ko‘rinishga ega edi. Agar bunda $f(x, t) = 0$ bo‘lsa,

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

eng sodda tor tebranish yoki to'liqin tarqalish tenglamasi deyiladi. Ba'zi hollarda torning erkin tebranish tenglamasi deb ham yuritiladi.¹

Tor tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasi.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (1.3)$$

tenglamaning $((x, t) \in D)$ $D = \{(x, t) : -\infty < x < \infty, 0 < t \leq T\}$ sohada

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \Psi(x) \end{cases} \quad -\infty < x < \infty \quad (1.4)$$

shartni qanoatlantiruvchi $u(x, t)$ echimi topilsin.

Tor tebranish tenglamasini (x, t) tekislikdagi biror D sohada qaradik.

Ta'rif. Agar $u(x, t)$ funksiya D sohada aniqlangan uzluksiz va ikki marta uzluksiz deffirersiallanuvchi bo'lib, shu sohada (1.3) tenglamani qanoatlantirsa, bu funksiya tor tebranish tenglamasining sohadagi regulyar (klassik) echimi deyiladi.

Yuqorida berilgan shartlardagi $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarni etarlicha silliq funksiyalar deb hisoblaymiz.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

tenglamani kanonik ko'rinishga keltiramiz.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

$$A = a^2, \quad B = 0, \quad C = -1, \quad \Delta = A^2 - BC = 0 + a^2 = a^2 > 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{0 \pm a}{a^2}.$$

Bundan

$$dx = -adt, \quad dx = adt$$

tenglamalarga ega bo'lamiz. Bularni integrallab, mos ravishda

$$x - at = c_1, \quad x + at = c_2$$

(1.3) tenglamaning xarakteristikalariga erishamiz. (1.3) tenglamada

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at \quad (1.5)$$

¹ Гайдук С.И. Переменные метода контурного интеграла к решению одной задачи на сопряжение уравнение параболического и гиперболического типов. – деф-ние ур-ние, 1965 т. 1 №10 с.1366-1382

almashtirishni bajaramiz. Natijada (1.3) tenglama

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

ko'rinishga keladi va uni

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0$$

ko'rinishda yozish ham mumkin. Bu tenglikka

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \omega(\xi)$$

ko'rinishda belgilash kiritamiz. Bunda $\omega(\xi)$ - ixtiyoriy funksiya. Bu tenglamani yana bir bor integrallasak

$$u = \int \omega(\xi) d\xi + f_2(\eta)$$

bo'ladi, bunda $f_2(\eta)$ ixtiyoriy funksiya, yoki

$$\int \omega(\xi) d\xi = f_1(\xi)$$

deb belgilasak,

$$u(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

formula hosil bo'ladi. Bu formulada eski o'zgaruvchilar (x, t) larga qaytamiz:

$$u(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at) \quad (1.6)$$

Agar f_1 va f_2 funksiyalar ikkinchi tartibli hosilalarga ega bo'lsa, (1.6) formula bilan aniqlangan $u(x, t)$ funksiya (1.3) tenglamaning echimi bo'ladi.

Qisqa qilib aytganda, $f_1(x - at)$ funksiya x o'qining musbat yo'nalishi bo'yicha a tezlik bilan tarqalayotgan to'g'ri to'lqinni ifodalaydi, $f_2(x + at)$ funksiya x o'qining manfiy yo'nalishi bo'yicha a tezlik bilan tarqalayotgan teskari to'lqinni ifodalaydi. Demak, (1.6) echim to'g'ri va teskari to'lqinlar yig'indisidan iborat ekan.

Tor chegaralanmaganligi tufayli chegaraviy shartlar qo'yilmaydi, lekin (1.4) shartdagi $\varphi(x), \psi(x)$ funksiyalar $-\infty < x < +\infty$ oraliqda berilgan bo'ladi. Umumiy echim (1.6) dagi f_1 va f_2 funksiyalar ixtiyoriy bo'lganligidan, ularni

$u(x, y)$ (1.6) shartlarni qanoatlantiradigan qilib tanlab olish mumkin. Shu maqsadda (1.4) va (1.5) dan topamiz.

$$\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$\psi(x) = -a \left[f_1'(x) - f_2'(x) \right]$$

yoki ikkinchi tenglikni integrallab

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= \varphi(x) \\ f_1(x) - f_2(x) &= -\frac{1}{a} \int_0^x \psi(z) dz + c \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

tenglamalar sistemasiga kelamiz. ($c = \text{const}$).

(1.7) sistemani yechib

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(z) dz + \frac{c}{2}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(z) dz - \frac{c}{2}.$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Bu topilgan qiymatlarni (1.5) ga qo'yib, integrallarni birlashtirsak, ushbu

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz \quad (1.8)$$

Dalamber formulasi hosil bo'ladi. Bu (1.8) formula qo'yilgan Koshi masalasining echimi bo'ladi. Bunda, albatta, $\varphi(x)$ ikkinchi tartibli, $\psi(x)$ birinchi tartibli uzluksiz hosilalarga ega deb faraz qilish kerak.

(1.3), (1.4) Koshi masalasining echimi mavjud, yagona va turg'un ekanligi bevosita (1.8) formuladan kelib chiqadi.¹

Tor tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masala.

Masalaning qo'yilishi.

(1.3) tenglamaning $((x, t) \in D)$ $D = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ sohada

¹ Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. Наука. 1977г.

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \Psi(x) \end{cases} \quad 0 < x < l \quad (1.9)$$

boshlang'ich va

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.10)$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ echimi topilsin.

Masalani (1.3) tenglamaning umumiy echimi (1.6) dan foydalanib yechish mumkin. Lekin, bu erda (1.9) shartdada $x \in (0,l)$ oraliqda o'zgaradi va shuning uchun $\varphi(x)$, $\psi(x)$ funksiyalar $0 \leq x \leq l$ oraliqda berilgan. Yuqoridagi f_1 va f_2 funksiyalarni φ va ψ orqali aniqlasak, ular $(0,l)$ oraliqda aniqlangan bo'ladi. Ammo, ularning argumentlari $x-at$ va $x+at$ lar $(0,l)$ oraliqdan chiqib ketadi, φ , ψ lar esa $(0,l)$ dan tashqarida aniqlanmagan. SHunday qilib, agar (1.3), (1.9), (1.10) masalani (1.6) formula orqali yechish uchun $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarni $(0,l)$ oraliqdan tashqariga (1.9) shartlarni qanoatlantiradigan qilib davom ettirish lozim bo'ladi.

Qo'yilgan birinchi chegaraviy masalani Fur'e metodi bilan echamiz. Bu metod boshqa tipdagi tenglamalarni echishda ham keng qo'llaniladi.

(1.3) tenglamaning echimini

$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad (1.11)$$

ko'rinishda qidiramiz. Bunda X faqat x ning, T faqat t ning funksiyasi bo'lib, $u(x,t) \neq 0$ bo'lishi va (1.10) shartlarni qanoatlantirishi kerak. (1.11) ni (1.3) ga qo'yib quyidagini topamiz:

$$T''(t)X(x) = a^2 X''(x)T(t)$$

yoki

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (1.12)$$

(1.12) tenglikning chap tomoni faqat t ga bog'liq, o'ng tomoni esa faqat x ga bog'liq. Bu holda (1.12) tenglik, ikki tomoni ham biror o'zgarmas songa teng bo'lgandagina o'rinli bo'lishi mumkin.

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

(1.12) dan quyidagi ikki oddiy differensial tenglamalarni olamiz.

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (1.13)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (1.14)$$

Chegaraviy (1.10) shartlar bajarilishi uchun (1.11) ga asosan $X(x)$ funksiya

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \quad (1.15)$$

shartlarni qanoatlantirishi kerak va $X(x) \neq 0$ bo'lishi shart, aks holda $u(x, t) = 0$ bo'lib qoladi.

λ parametrning shunday qiymatlarini topishimiz kerakki, (14) tenglamaning echimi (15) shartlarni qanoatlantirsin va aynan nolga teng bo'lmasin. λ parametrning bunday qiymatlari xos qiymatlar, unga mos kelgan echim esa (1.14), (1.15) masalaning xos funksiyalari deyiladi. (1.14), (1.15) masalaning o'zi esa Shturm-Liuville masalasi deb yuritiladi.

(1.14), (1.15) masalaning xos qiymatlari va xos funksiyalarini topish uchun bo'lishi mumkin bo'lgan uch hol: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ ni alohida-alohida ko'rib chiqamiz.

1) $\lambda < 0$ bo'lsa, (1.14) tenglamaning umumiy echimi

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

bo'ladi, C_1 va C_2 - ixtiyoriy o'zgarmas sonlar. Bu echimni (1.15) chegaraviy shartlarga qo'yisak,

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0$$

bo'lib, undan $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, bu holda $X(x) \equiv 0$.

2) $\lambda = 0$ bo'lsa, (1.14) tenglamaning umumiy echimi

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

bo‘ladi va (1.15) shartlarga qo‘ysak, yana $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ chiqadi, demak, $X(x) \equiv 0$.

3) $\lambda > 0$ bo‘lsa, (1.14) tenglamaning umumiy echimi

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

bo‘ladi va uni (1.15) shartlarga qo‘ysak,

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, \quad C_1 \cos \sqrt{\lambda} l + C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

kelib chiqadi. Bundan $C_1 = 0$ va $C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$ bo‘lishini topamiz.

$C_2 = 0$ deb olsak, $X(x) \equiv 0$ bo‘ladi. Shuning uchun

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0, \quad \text{ya'ni} \quad \sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{l}$$

deymiz, bunda k -ixtiyoriy butun son. Demak, (1.14), (1.15) masalaning noldan farqli yechimi faqatgina

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2, \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

qiymatlarda mavjud bo‘lar ekan.

Bu λ_k xos qiymatlarga

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$$

xos funksiyalar mos keladi.

Endi topilgan λ_k qiymatlarni (1.13) tenglamaga qo‘yib, tenglamani yechsak

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l}$$

bo‘ladi, bunda a_k va b_k lar ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar.

$X_k(x)$ va $T_k(t)$ larni (1.14) ga qo‘yib quyidagini topamiz:

$$u_k(x, t) = X_k(x) T_k(t) = \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Bu $u_k(x,t)$ ($k=1,2,\dots$) funksiyalarning har biri (1.3) tenglamani va (1.10) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. (1.3) tenglama chiziqli va bir jinsli bo'lgani uchun quyidagi

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (1.16)$$

qatorning har bir hadi tekis yaqinlashuvchi hamda u_{tt} , u_{xx} hosilalarga mos kelgan qatorlar ham tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, qatorning yig'indisi $u(x,t)$ ham (1.3) tenglamani va (1.10) shartlarni qanoatlantiradi.

Endi ixtiyoriy o'zgarmas sonlar bo'lgan a_k va b_k larni topish hisobiga (1.16) formula bilan aniqlangan $u(x,t)$ funksiyani (1.9) boshlang'ich shartlarni qanoatlantirishini aniqlaymiz.

(1.16) ni t bo'yicha differensiallab topamiz:

$$u_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} \left(-a_k \sin \frac{k\pi at}{l} + b_k \cos \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (1.17)$$

(1.16) va (1.17) da $t=0$ deb, (1.9) ga asosan topamiz:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (1.18)$$

Bu $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarning $(0,l)$ oraliqdagi sinuslar bo'yicha Fure qatoriga yoyilmalaridir. [18]

U holda bizga ma'lumki,

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = \frac{2}{2\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \quad (1.19)$$

bo'ladi.

Demak, qaralayotgan (1.3)-(1.9) masalaning yechimi (1.16) qator bo'lib, u erdagi a_k , b_k lar (1.19) formulalar orqali topiladi. Bu savolning javobini isbotsiz keltiramiz: buning uchun $[0,l]$ da berilgan $\varphi(x)$ funksiya uch marta, $\psi(x)$ funksiya ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lishlari va

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0$$

shartlarni qanoatlantirsa, (1.16) qator va uni x, t lar bo'yicha ikki martadan differensiallaganda hosil bo'ladigan qatorlar tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Topilgan echim (1.16) qatordan turli xulosalarni chiqarish mumkin. Masalan tor nuqtalarining xarakati garmonik tebranishlardan iborat bo'ladi, tovushlar yo musiqali, yo musiqasiz bo'ladi - birinchisi notalar, ikkinchisi shovqinlar deyiladi.¹

Tor tebranish tenglamasi uchun 2-chegaraviy masalaning qo'yilishi.

(1.3) tenglamaning D sohada

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \Psi(x) \end{cases} \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.20)$$

boshlang'ich va

$$\begin{cases} u_x(0, t) = \gamma_1(t) \\ u_x(l, t) = \gamma_2(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.21)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi echimi topilsin, hamda

$$\begin{cases} u_x(0, 0) = \varphi'(0) \\ u_x(0, 0) = \gamma_1(0) \end{cases} \Rightarrow \varphi'(0) = \gamma_1(0)$$

$$\begin{cases} u_x(l, 0) = \varphi'(l) \\ u_x(l, 0) = \gamma_2(0) \end{cases} \Rightarrow \varphi'(l) = \gamma_2(0) \quad (1.22)$$

kelishuvlik shartlarini qanoatlantirsin.

Tor tebranish tenglamasi uchun 3-chegaraviy masala.

(1.3) tenglamaning D sohada

(1.20) boshlang'ich va

$$\begin{cases} u_x(0, t) + h_1 u(0, t) = \theta_1(t) \\ u_x(l, t) - h_2 u(l, t) = \theta_2(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.23)$$

chegaraviy hamda

¹ Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Минск, 1974.

$$\begin{cases} u_x(0,0) = \varphi(0) \\ u_x(0,0) = \varphi'(0) \end{cases} \quad \begin{cases} u_x(l,0) = \varphi(l) \\ u_x(l,0) = \varphi'(l) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x(0,0) - h_1 u(0,0) = \theta_1(0) \\ u_x(l,0) + h_2 u(l,0) = \theta_2(0) \end{cases}$$

$$\varphi'(0) - h_1 \varphi(0) = \theta_1(0), \quad \varphi'(l) - h_2 \varphi(l) = \theta_2(l) \quad (1.24)$$

kelishuvlik shartlarini qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Ushbu masalalar ham ko‘plab fizik jarayonlarni ifodalaydi. Bir qancha tadbiqiy masalalarda, ayniqsa gaz tozalash, quritish jarayonlari bilan bog‘liq masalalarni o‘rganishda giperbolik tenglamalar uchun Gursa masalasini yechishga to‘g‘ri keladi.

Gursa masalasining qo‘yilishi.

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), \quad (1.25)$$

giperbolik tipdagi tenglamaning

$$\begin{cases} u(0,y) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \Psi(x) \end{cases} \quad (1.26)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab qilinadi.

Ko‘rinib turibdiki, (1.26) qo‘shimcha shartlar (1.25) tenglamaning xarakteristikalari bo‘lmish $x=0$ va $y=0$ to‘g‘ri chiziqlarda berilgan, bunda $j(y)$, $y(x)$ berilgan differensiallanuvchi funksiyalar va $j(0) = y(0)$.¹

2. Ikkinchi tartibli parabolik tipdagi tenglamalar va ular uchun asosiy chegaraviy masalalar.

Ikkinchi tartibli xususiy hosilali tenglamalarning keyingi vakili bo‘lgan parabolik tipdagi tenglamalar issiqlik tarqalishi va diffuziya hodisalarini o‘rganishda eng ko‘p uchraydi.

Aytaylik, ushbu

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + F = 0$$

¹ М.Салохитдинов, Б.Исломов Математик физика тенгламалари фанидан масалалар тўплами. Тошкент “MUMTOZ SO‘Z” 2010.

tenglama uchun biror M nuqtada

$$B^2 - AC = 0$$

bo'lsin. Unda qaralayotgan tenglama parabolik tipdagi tenglama bo'lib, u bitta karrali haqiqiy xarakteristika

$$\varphi(x, y) = \text{const}$$

ga ega bo'ladi.

Yangi o'zgaruvchi ξ va η lar sifatida

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$$

larni olamiz, bunda $\eta = \eta(x, y)$ funksiya $\varphi(x, y)$ ga bog'liq bo'lmagan ixtiyoriy funksiya.

Bu holda $\xi = \varphi(x, y)$ funksiya (8) tenglamani qanoatlantirib, (7) munosabatga ko'ra $A_1 = 0$ bo'ladi. Ikkinchi tomondan, $B = \sqrt{A} \cdot \sqrt{C}$ bo'lishini e'tiborga olib,

$$A_1 = A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = (\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y)^2,$$

va

$$\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y = 0 \quad (2.1)$$

bo'lishini topamiz.

Ravshanki,

$$\begin{aligned} B_1 &= A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_y\eta_y = \\ &= (\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y)(\sqrt{A}\eta_x + \sqrt{C}\eta_y). \end{aligned}$$

(2.1) tenglikka ko'ra $B_1 = 0$ bo'ladi. Natijada (6) tenglama quyidagi

$$C_1 u_{\eta\eta} + F = 0$$

ko'rinishga keladi. Bundan:

$$u_{\eta\eta} = F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad (2.2)$$

bunda

$$F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = -\frac{1}{C_1} F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

ekanligi bizga ma'lum. (2.2) tenglama parabolik tipdagi tenglamaning kanonik ko'rinishini ifodalaydi.

Parabolik tipdagi tenglamalarning eng sodda vakili bo'lgan-sterjenda issiqlik tarqalishi tenglamasi

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (2.3)$$

misolida bu tipdagi tenglamalarga quyiladigan masalalar va ularni echish metodlari ko'rib chiqamiz.¹

Birinchii chegaraviy masala. Ekstremum prinsipi.

Masalaning qo'yilishi. Berilgan $Q\{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ sohada (2.3) tenglamaning

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (0 \leq x \leq l) \quad (2.4)$$

boshlang'ich va

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(l, t) = \mu_2(t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq T) \quad (2.5)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan echimini topish masalasi birinchi chegaraviy masala deb yuritiladi. Bundan tashqari yechimning yopiq sohada uzluksizligini ta'minlash uchun quyidagi kelishuvlik shartlari bajarilishi lozim.

$$\begin{cases} \mu_1(0) = \varphi(0) \\ \mu_2(0) = \varphi(l) \end{cases}$$

Bu erda l uchi koordinat boshida bo'lgan sterjenining uzunligini, T esa shu fizik jarayonni o'rganish qancha vaqt davom etishini bildiradi, $j(x)$, $m_1(t)$, $m_2(t)$ lar ko'rsatilgan sohalarda berilgan funksiyalar.

Izlanayotgan $u(x, t)$ echimni $\bar{Q}$ yopiq sohada uzluksiz funksiya deb faraz qilamiz va shuning uchun berilgan $f(x, t)$, $j(t)$, $m_1(t)$, $m_2(t)$ funksiyalarni uzluksizligini va demak, $j(0) = m_1(0)$, $j(l) = m_2(0)$ bo'lishini talab qilamiz.

Agar yuqoridagi masalada (2.5) chegaraviy shart o'rniga

¹ Михлин С.Г. Курс математической физики. М. "Наука", 1968.

$$\begin{cases} u_x(0,t) = \mu_1(t) \\ u_x(l,t) = \mu_2(t) \end{cases} \quad (2.6)$$

shartlar berilgan bo'lsa, masala ikkinchi chegaraviy masala, yoki (2.5) shartlar o'rniga

$$\begin{cases} \{\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial x}\}(0,t) = \mu_1(t) \\ \{\gamma u + \delta \frac{\partial u}{\partial x}\}(l,t) = \mu_2(t) \end{cases} \quad (2.7)$$

chegaraviy shartlar berilgan bo'lsa, masala uchinchi chegaraviy masala deyiladi. Umuman $x = 0$ va $x = l$ da beriladigan shartlarni turli kombinatsiyalarini olish hisobiga bir nechta chegaraviy masalalar qo'yish mumkin.

Qaralayotgan Q to'rtburchakning $t = 0$, $x = 0$ va $x = l$ chiziqlar ustida yotgan chegaralari yig'indisini Γ deb belgilaymiz.¹

Ekstremum prinsipi: yopik $\bar{Q}$ sohada uzluksiz bo'lgan va Q soha ichida bir jinsli

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (2.8)$$

tenglamani qanoatlantiradigan $u(x,t)$ funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga Γ chiziq ustida erishadi.²

Isbot. Faraz qilamiz, $u(x,t)$ funksiyaning $Q \{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ yopiq sohadagi eng katta qiymati M , Γ chiziq ustidagi eng katta qiymati esa m bo'lsin va ekstremum prinsipida aytilgan tasdiq o'rinli emas deb qaralsin. Bu holda shunday $(\bar{x}, \bar{t})$ ichki nuqta topilsinki, bu nuqtada $M > m$ bo'lsin deganidir. Quyidagi

$$u(x,t) = u(x,t) + \frac{M - m}{2T}(\bar{t} - t)$$

funksiyani yordamchi funksiya sifatida qaraylik. Q sohaning Γ chegarasida (ya'ni $t = 0$, $x = 0$ va $x = l$ da)

¹ Бицадзе А.В., Калининченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: "Наука", 1977.

² Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: "Наука", 1974.

$$u(x,t) \leq m + \frac{M-m}{2} = \frac{M+m}{2} < M$$

ekanligi ko'rinib turibdi. Shu bilan birga

$$u(\bar{x}, \bar{t}) = u(\bar{x}, \bar{t}) = M.$$

Demak, yordamchi $u(x,t)$ funksiya ham, $u(x,t)$ kabi o'zining eng katta qiymatiga Γ da erishmaydi.

Shunday ekan, faraz qilaylik $u(x,t)$ funksiya o'zining eng katta qiymatiga birorta ichki (x_1, t_1) ($0 < x_1 < l, 0 < t_1 < T$) nuqtada erishsin. U holda, matematik analiz kursidan ma'lumki, shu nuqtada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \leq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t_1} = 0$$

$$(t_1 < T \text{ bo'lsa, } \frac{\partial u}{\partial t_1} = 0; \quad t_1 = T \text{ bo'lsa, } \frac{\partial u}{\partial t_1} \leq 0)$$

munosabatlar o'rinli buladi. Demak, (x_1, t_1) nuqtada

$$u_t - a^2 u_{xx} \leq 0 \quad (2.9)$$

tengsizlik bajariladi. Ikkinchi tomondan

$$u_t - a^2 u_{xx} = u_t - a^2 u_{xx} - \frac{M-m}{2T} = -\frac{M-m}{2T} < 0$$

bo'lishi kerak. Bu esa (2.9) ga zid. Demak, $M > m$ bo'ladigan nuqta topiladi. Bu esa yuqoridagi farazimizga zid va eng katta qiymat uchun prinsip isbotlandi. Eng kichik qiymat uchun ham xuddi shunday isbotlanadi.

Isbotlangan ekstremum prinsipidan (2.3)-(2.5) birinchi chegaraviy masala echimining yagonaligi va turg'unligi kelib chiqadi:

1) Haqiqatan, agar echim ikkita, u_1 va u_2 bo'lsa, ularning ayirmasi $u = u_1 - u_2$ bir jinsli (2.8) tenglamani qanoatlantiradi va

$$u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0$$

shartlar o'rinli bo'ladi (ya'ni Γ da $u = 0$ bo'ladi). U holda ekstremum prinsipiga binoan $u(x,t)$ funksiyaning eng katta qiymati ham, eng kichik qiymati ham nolga teng, demak $u \equiv 0$ yoki $u_1 = u_2$.

2) (2.3)-(2.5) masalaning echimi tenglamaning o'ng tomoni $f(x,t)$ va boshlang'ich hamda chegaraviy shartlardagi funksiyalarga uzluksiz ravishda bog'liq. Haqiqatan ham, agar boshlang'ich va chegaraviy shartlarga kirgan funksiyalar u_1 va u_2 echimlar uchun turli bo'lib, ularning ayirmalari absolyut qiymati bo'yicha biror $\epsilon > 0$ dan kichik bo'lsa, u holda $u_1 - u_2 = u$ funksiya bir jinsli tenglamani qanoatlantiradi va butun Q sohada $|u_1 - u_2| < \epsilon$ tengsizlik bajariladi.¹

Birinchi chegaraviy masalaning echimi. Umumiy (2.3)-(2.5) masalani echishni, uning xususiy holi bo'lgan quyidagi masalani echishdan boshlaymiz: bir jinsli

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (2.10)$$

tenglamaning

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2.11)$$

boshlang'ich va

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(l, t) = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi echimi topilsin. Bu erda $j(x)$ uzluksiz bo'lakli hosilaga ega va $j(0) = j(l) = 0$ shartlarni bajaradigan funksiya. (2.10)-(2.12) masalani Fure metodi bilan echamiz.

Echimni quyidagi

$$u(x, t) = T(t)X(x), \quad T(t) \geq 0, \quad X(x) \geq 0 \quad (2.13)$$

ko'rinishda izlaymiz

Bu ko'rinishdagi echimni (2.10) tenglamaga qo'yib,

$$X(x)T'(t) = a^2 T(t)X''(x)$$

yoki

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -l$$

¹ Тихонов А.Н, Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. Наука. 1977г.

tenglikni hosil qilamiz. Bundan esa

$$T''(t) + a^2 l T(t) = 0 \quad (2.14)$$

$$X''(x) + l X(x) = 0 \quad (2.15)$$

tenglamalarga ega bo'lamiz. Bu erda (2.15) tenglamaning

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \quad (2.16)$$

shartlarni qanoatlantiradigan, lekin aynan nolga teng bo'lmagan echimini topish lozim, chunki, shundagina (2.13) ko'rinishdagi echim (2.12) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi va $u(x,t) \neq 0$ bo'ladi. [31]

(2.15), (2.16) masalaning noldan farqli echimi l parametrning faqat

$$l_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.17)$$

qiymatlaridagina mavjud va bu echim

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (2.18)$$

dan iborat ekanligini yuqorida giperbolik tipdagi tenglama uchun qo'yilgan masalada ko'rib o'tgan edik.

l parametrning (2.17) xos qiymatlariga (2.14) tenglamaning

$$T_n(t) = a_n e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} t} \quad (2.19)$$

yechimlari mos keladi, a_n - ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

Qaralayotgan (2.10) tenglama chiziqli bo'lganligi uchun

$$u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = a_n e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (2.20)$$

funksiyalarning barchasi (2.10) tenglamani va (2.12) shartlarni qanoatlantiradi. Shu funksiyalardan quyidagi qatorni tuzamiz

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (2.21)$$

va undan (2.11) boshlang'ich shartni bajarishini talab qilib, topamiz

$$u(x,0) = j(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{np\pi x}{l} \quad (2.22)$$

Hosil qilingan bu (2.22) formula esa $j(x)$ funksiyaning $(0,l)$ oraliqda sinuslar buyicha Furie qatoriga yoyilmasidir. Bilamizki, bu qatorning koeffitsientlari a_n lar

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l j(x) \sin \frac{np\pi x}{l} dx \quad (2.23)$$

formula bilan aniqlanadi. Yuqorida $j(x)$ funksiyaga nisbatan qo'yilgan talablar (2.22) qatorning $j(x)$ funksiyaga tekis va absolyut yaqinlashishini ta'minlaydi. Shu bilan birga ixtiyoriy $t \geq 0$ uchun

$$0 < e^{-\frac{\pi^2 p^2}{l^2} t} < 1$$

bo'lganligidan (2.21) qator ham tekis va absolyut yaqinlashuvchi va $u(x,t)$ funksiya Q sohada uzluksiz bo'ladi hamda boshlang'ich va chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

(2.21) qatordan t bo'yicha bir marta va x bo'yicha ikki marta hosila olgandan keyin hosil bo'lgan qatorlar tekis va absolyut yaqinlashuvchi bo'lsalar, (2.21) qator bilan aniqlangan $u(x,t)$ funksiya (2.10) tenglamani ham qanoatlantiradi. Keyingi qatorlarning yaqinlashishi esa ixtiyoriy $t > 0$ uchun

$$0 < \frac{\pi^2 p^2}{l^2} e^{-\frac{\pi^2 p^2}{l^2} t} < 1, \quad 0 < \frac{\pi^2 p^2}{l^2} e^{-\frac{\pi^2 p^2}{l^2} t} < 1$$

tengsizliklar, n etarli darajada katta bo'lganda, o'rinli ekanligidan kelib chiqadi.

Endi quyidagi masalani echaylik: Q to'g'ri to'rtburchakda bir jinsli bo'lmagan

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad (2.24)$$

tenglamaning bir jinsli

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad (2.25)$$

boshlang'ich va bir jinsli

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin. Bu erda $f(x,t)$ funksiya uzluksiz va x bo'yicha bo'lakli uzluksiz hosilaga ega, hamda barcha $t > 0$ lar uchun $f(0,t) = f(l,t) = 0$ bo'lsin deb faraz qilamiz.

Bu masalaning echimini

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{np x}{l} \quad (2.27)$$

ko'rinishida izlaymiz. (2.27) ni (2.24) tenglamaga qo'yishdan oldin $f(x,t)$ funksiyani sinuslar bo'yicha Fure qatoriga yoyib ($f(x,t)$ funksiyaga qo'yilgan shartlar bunga imkon beradi), topamiz

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{np x}{l}, \quad (2.28)$$

bu erda

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \frac{np x}{l} dx.$$

(2.27) qatorni (2.24) ga qo'yib va (2.28) ni hisobga olsak:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 n^2 \pi^2}{l^2} T_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{np x}{l} = 0.$$

Bundan esa

$$T_n''(t) + \frac{\lambda^2 n^2 \pi^2}{l^2} T_n(t) = f_n(t), \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.29)$$

tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz.

(2.27) qatorni (2.25) boshlang'ich shartga qo'yib

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{np x}{l} = 0$$

ekanligini topamiz, bundan esa $T_n(t)$ funksiyalar uchun

$$T_n(0) = 0, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.30)$$

boshlang'ich shartlarga ega bo'lamiz.

(2.29), (2.30) masalaning echimini topish qiyin emas:

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2}(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau. \quad (2.31)$$

Shu (2.31) echimni (2.27) ga qo'yib, (2.24)-(2.26) masalaning echimini hosil qilamiz

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2}(t-\tau)} f_n(\tau) dt \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.32)$$

Endi yuqoridagi umumiy birinchi chegaraviy masala (2.3)-(2.5) ga qaytsak, uni hozirgina echilgan masalaga keltirish mumkin. SHu maqsadda yangi $u(x,t)$ funksiyani kiritaylik:

$$u(x,t) = u(x,t) - w(x,t).$$

Bu erda

$$w(x,t) = m_1(t) + \left[m_2(t) - m_1(t) \right] \frac{x}{l} - \text{ma'lum funksiya.}$$

Noma'lum funksiya $u(x,t)$ uchun esa

$$u_t = a^2 u_{xx} + \bar{f}(x,t)$$

tenglamaga va

$$u(x,0) = j(x) - w(x,0)$$

boshlang'ich, hamda

$$u(0,t) = u(0,t) - w(0,t) = m_1(t) - m_1(t) = 0,$$

$$u(l,t) = u(l,t) - w(l,t) = m_2(t) - m_2(t) = 0$$

bir jinsli chegaraviy shartlarga ega bo'lamiz. $u(x,t)$ funksiya uchun hosil qilingan bu masala (2.10)-(2.12) masala va (2.24)-(2.26) masalalarga ajratilgan holda echildi.¹

Uchinchi chegaraviy masalaning qo'yilishi.

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

tenglamaning D sohada

¹ Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: "Наука".

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

boshlang'ich va

$$\begin{cases} u_x(0, t) + h_1 u(0, t) = \theta_1(t) \\ u_x(l, t) - h_2 u(l, t) = \theta_2(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi echimi topilsin.

Bundan tashqari echimning yopiq sohada uzluksizligini ta'minlash uchun quyidagi kelishuvlik shartlari bajarilishi lozim.

$$\begin{cases} \varphi'(0) + h_1 \varphi(0) = \theta_1(0) \\ \varphi'(l) - h_2 \varphi(l) = \theta_2(0) \end{cases}$$

Koshi masalasining qo'yilishi.

$D = \{(x, t) : -\Gamma < x < +\Gamma, t > 0\}$ sohada

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (2.33)$$

tenglamani va boshlang'ich

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (-\Gamma < x < \Gamma) \quad (2.34)$$

shartni qanoatlantiruvchi $u(x, t)$ funksiya topilsin, bu erda $j(x)$ uzluksiz va chegaralangan funksiya.¹

¹ Salohiddinov M. Matematik fizika tenglamalari. "O'zbekiston" nashriyoti. T. 2002 y.

I bob bo'yicha xulosa

Dissertasiyaning birinchi bobi xususiyl hosilali differensial tenglamalar haqida umumiy ma'lumotlar, ularning klassifikatsiyasi va ikkinchi tartibli xususiyl hosilali giperbolik va parabolik tipdagi tenglamalarning xossal-xususiylatlar hamda ularga qo'yilgan qator boshlang'ich-chegaraviyl masalalar va ularni yechishga bag'ishlandi.

Ishning asosini ikki o'zgaruvchili ikkinchi tartibli xususiyl hosilali tenglamalarni klassifikatsiyalash va kanonik ko'rinishga keltirish, parabolik va giperbolik tipdagi tenglamalar, ularga qo'yilgan ba'zi masalalar va masalalarning yechimlari tashkil etadi.

Giperbolik tipdagi tenglamalarning eng soda vakili tor tebranish tenglamasi va unga qo'yilgan Koshi masalasi, asosiy boshlang'ich-chegaraviyl masalalar va ularning yechilish usullari, xuddi shunday parabolik tipdagi issiqlik tarqalish tenglamasi uchun qo'yilgan masalalar, ularni yechish usullari hamda masala yechimi yagonaligini ko'rsatishda foydalaniladigan ekstrimum prinsipi batafsil o'rganib chiqildi.

II-BOB. Parabola-giperbolik tenlamalar bo'yicha umumiy ma'lumotlar.

Agar tekshirilayotgan D sohaning turli qismida

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0$$

tenglama har xil tipga tegishli bo'lsa, uni aralash tipdagi tenglama deyiladi.

Xususiylar hosilali differensial tenglama tekshirilayotgan sohaning bir qismida parabolik tipga, ikkinchi qismida esa giperbolik tipga tegishli bo'lsa, uni aralash yoki parabola-giperbolik tipga tegishli deyiladi; bu qismlar o'tish chizig'i (yoki sirti) bilan ajraladi, bu chiziqda tenglama parabolik buziladi, yoki bo'lmasa, aniqlanmagan bo'ladi.

Aralash tipdagi tenglama uchun chegaraviy masalani XX asrning 20-yillarida birinchi marta Italiyalik matematik Franchisko Trikomini

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

tenglama uchun qo'ygan va tekshirgan.

Aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun har xil sohalarda klassik chegaraviy masalalarga misol sifatida Trikomini, Gallerstedta, Bizatze masalalari va ularni o'xshashi, analogini aytishimiz mumkin.¹

1. Asosiy boshlang'ich-chegaraviy masalalarning qo'yilishi.

Birinchi chegaraviy masalaning qo'yilishi. Quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_t; (x, t) \in D_1 \\ u_{xx} - u_{tt}; (x, t) \in D_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

Bu yerda D_1 soha - $t=0$, $x=1$, $t=T$ va $x=0$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan sohaning ichki qismi, ya'ni $\{0 < x < 1, 0 < t < T\}$ to'g'ri to'rtburchak bilan chegaralangan.

¹ Salohiddinov M. Matematik fizika tenglamalari. "O'zbekiston" nashriyoti. T. 2002 y.

D_2 sohada- X o'qida $A(0,0)$, $B(1,0)$ nuqtalar bilan chegaralangan AB kesmadan (1) tenglamaning ikkita xarakteristikasi $AC: x+t=0$, $BC: x-t=1$ chiziqlar bilan chegaralangan sohaning ichki qismi.

D_1 va D_2 sohalarning birlashgan joyi ochiq AB intervalni (I orqali belgilasak), D_1 va D_2 birgalikda D orqali belgilaymiz, ya'ni $D=D_1 \cup D_2 \cup I$; $I=\{(x,t): t=0, 0 < x < 1\}$

Quyidagi xossalarga ega bo'lgan $u(x,t)$ funksiya topilsin:

$$1) \quad u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_{x,t}^{2,1}(D_1) \cap C^2(D_2)$$

$$2) \quad u(x,t) \text{ funksiya (1) tenglamani } D_1 \text{ va } D_2 \text{ sohalarda qanoatlantirsin}$$

$$3) \quad u_t(x,t) \in C(D_1 \cup I) \cap C(D_2 \cup I), \text{ hamda } u_t(x,0) \text{ funksiya } x \rightarrow 0 \text{ chekli, } x \rightarrow 1 \text{ ga birdan kichik maxsuslikka ega.}$$

$$4) \quad \text{Quyidagi chegaraviy shartlar o'rinli:}$$

$$u(0,t) = \varphi(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.2)$$

$$u(1,t) = \psi(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.3)$$

$$u(x,-x) = \gamma(t) \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad (1.4)$$

$$5) \quad \text{Ulash sharti}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} u_t(x,t) = \lim_{x \rightarrow -0} u_t(x,t) \quad (1.5)$$

$$\text{Bu yerda: } \varphi(t), \psi(t), \gamma(x) \in C(D) \quad \varphi(0) = \gamma(0) \text{ }^1$$

Ikkinchi chegaraviy masalaning qo'yilishi. Quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_t; (x,t) \in D_1 \\ u_{xx} - u_{tt}; (x,t) \in D_2 \end{cases} \quad (1.5)$$

Bu yerda D_1 soha - $y=0$, $x=1$, $y=T$ va $x=0$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan sohaning ichki qismi, ya'ni $\{0 < x < 1, 0 < t < T\}$ to'g'ri to'rtburchak bilan chegaralangan.

¹ ДжураевТ.Д., СопуевА., МамажановМ. Краевые задачи для уравнений параболического типа. Ташкент:Фан, 1986.

D_2 sohada- X o'qida $A(0,0)$, $B(1,0)$ nuqtalar bilan chegaralangan AB kesmadan (1.6) tenglamaning ikkita xarakteristikasi $AC: x+y=0$, $BC: x-y=1$ chiziqlar bilan chegaralangan sohaning ichki qismi.

D_1 va D_2 sohalarning birlashgan joyi ochiq AB intervalni

(I orqali belgilasak), D_1 va D_2 birgalikda D orqali belgilaymiz, ya'ni $D=D_1 \cup D_2 \cup I$; $I=\{(x, t): t = 0, 0 < x < 1\}$

Quyidagi xossalarga ega bo'lgan $u(x,t)$ funksiya topilsin:

$$1) \quad u(x,t) \in C(\bar{D}) \cap C_{x,t}^{2,1}(D_1) \cap C^2(D_2)$$

$$2) \quad u(x,y) \text{ funksiya (1) tenglamani } D_1 \text{ va } D_2 \text{ sohalarda qanoatlantirsin}$$

$$3) \quad u_t(x,t) \in C(D_1 \cup I) \cap C(D_2 \cup I), \text{ hamda } u_t(x,0) \text{ funksiya } x \rightarrow 0 \text{ chekli } x \rightarrow 1 \text{ ga birdan kichik maxsuslikka ega.}$$

$$4) \quad \text{Quyidagi chegaraviy shartlar o'rinli:}$$

$$u(0,t) = \varphi(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.7)$$

$$u(1,t) = \psi(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.8)$$

$$u(x, x-1) = \gamma_2(t) \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \quad (1.9)$$

$$5) \quad \text{Ulash sharti}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} u_t(x,t) = \lim_{x \rightarrow -0} u_t(x,t) \quad (1.10)$$

Bu yerda: $\varphi(t), \psi(t), \chi_2(x) \in C(D)$, $\psi(0) = \chi_1(1)$

Uchinchi chegaraviy masalaning qo'yilishi. Quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_t; (x,t) \in D_1 \\ u_{xx} - u_{tt}; (x,t) \in D_2 \end{cases} \quad (1.11)$$

Bu yerda D_1 soha - $y=0$, $x=1, y=T$ va $x=0$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan sohaning ichki qismi, ya'ni $\{0 < x < 1, 0 < t < T\}$ to'g'ri to'rtburchak bilan chegaralangan.

¹ Ладженская О.А. Об уравнения смешанного типа. Вестник ИЛГУ серия мат.мех. и АСТР., 1965 №4 с. 38-46

D_2 sohada- X o'qida $A(0,0)$, $B(1,0)$ nuqtalar bilan chegaralangan AB kesmadan (1.11) tenglamaning ikkita xarakteristikasi $AC: x+y=0$, $BC: x-y=1$ chiziqlar bilan chegaralangan sohaning ichki qismi.

D_1 va D_2 sohalarning birlashgan joyi ochiq AB intervalni

(I orqali belgilasak), D_1 va D_2 birgalikda D orqali belgilaymiz, ya'ni $D=D_1 \cup D_2 \cup I$; $I=\{(x, t): t = 0, 0 < x < 1\}$

Quyidagi xossalarga ega bo'lgan $u(x,t)$ funksiya topilsin:

$$1) \quad u(x, t) \in C(\bar{D}) \cap C_{x,t}^{2,1}(D_1) \cap C^2(D_2)$$

$$2) \quad u(x, y) \text{ funksiya (1) tenglamani } D_1 \text{ va } D_2 \text{ sohalarda qanoatlantirsin}$$

$$3) \quad u_t(x, t) \in C(D_1 \cup I) \cap C(D_2 \cup I), \text{ hamda } u_t(x, 0) \text{ funksiya } x \rightarrow 0 \text{ chekli } x \rightarrow 1 \text{ ga birdan kichik maxsuslikka ega.}$$

$$4) \quad \text{Quyidagi chegaraviy shartlar o'rinli:}$$

$$u_x(0, t) = \varphi_2(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.12)$$

$$u_x(1, t) = \psi_2(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.13)$$

$$u(x, x-1) = \gamma_2(t) \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \quad (1.14)$$

$$5) \quad \text{Ulash sharti}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} u_t(x, t) = \lim_{x \rightarrow -0} u_t(x, t) \quad (1.15)$$

Bu yerda: $\varphi_2(t), \psi_2(t), \chi_2(x) \in C(D)$, $\psi(0) = \chi_1(1)$.

Trikomi masalasining qo'yilishi. Quyidagi masalani qaraymiz:

$$0 = \begin{cases} L_1[u] = u_{xx} + a_1(x, t)u_x + b_1(x, t)u_t + c_1(x, t)u, & (x, t) \in D_1 \\ L_2[u] = u_{xx} - u_{tt} + a_2(x, t)u_x + b_2(x, t)u_t + c_2(x, t)u, & (x, t) \in D_2 \end{cases} \quad (1.16)$$

Bu yerda D_1 soha $y=0$, $x=1$, $y=h$ va $x=0$ to'g'ri chiziqlarda yotuvchi, ichki qismi, ya'ni, $\{0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ to'g'ri to'rtburchak bilan chegaralangan.

¹ Елеев В.А. Аналог задачи Трикоми для смешанных парабола -гиперболических уравнений с нехарактерикой линией изминия типа. Дифференциальные уравнения, 1978, Т XIII, №1, с 56-63.

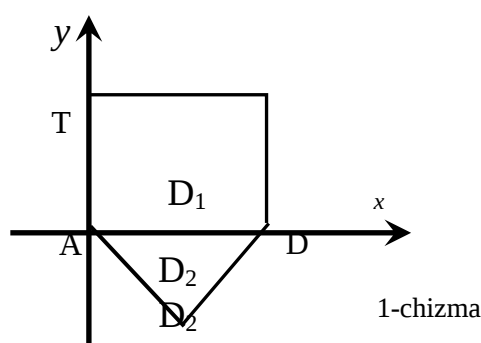
D_2 -uchburchakli harakteristika : X o'qida $A(0,0)$, $B(1,0)$ kesmadan (1.16) tenglama ikkita harakteristikasi $AC: x+y=0$, $BC: x-y=1$ hamda A va B nuqtalardan chiquvchi harakteristikalarning kesishish nuqtasi $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ nuqtalardan iborat. D_1 va D_2 sohalarning birlashgan joyi ochiq AB kesmani, D_1 va D_2 sohalarning birgalikda D orqali belgilaymiz.¹

2. Asosiy masalalar yechimlarining mavjudligi va yagonaligi.

Quyidagi tenglamani qaraymiz.

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_t; & (x, t) \in D_1 \\ g_{xx} - g_t; & (x, t) \in D_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$(2.2)$$



Bu yerda D_1 soha – $y=0$, $x=1$, $x=0$ va $y=T$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan sohaning ichki qismi, yani $\{0 < x < 1, 0 < t < T\}$ to'g'ri to'rtburchak bilan chegaralangan. D_2 sohada- X o'qi $A(0,0)$, $B(1,0)$ nuqtalar bilan chegaralangan AB kesmadan (2.1) tenglamaning ikkita xarakteristikasi $AC: x+t=0$, $BC: x-t=1$ chiziqlari bilan chegaralangan sohani ichki qismi D_1 va D_2 sohalarning birlashgan joyi ochiq AB intervalni (I orqali belgilasak), D_1 va D_2 birgalikda D orqali belgilaymiz , yani $D = D_1 \cup D_2 \cup I$; $I = \{(x, t): t=0, 0 < x < 1\}$

Quyidagi hossalarga ega bo'lgan $u(x, t)$ va $v(x, t)$ funksiyalar topilsin:

$$1) u(x, t) \in C(\bar{D}) \cap C_{x,t}^{2,1}(D_1) \cap v(x, t) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D_2)$$

2) $u(x, t)$ funksiya (1) tenglamani D_1 va $g(x, t)$ funksiya (2.2) tenglamani D_2 sohalarda qanoatlantirsin.

¹ Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболического типа. Ташкент: Фан, 1986.

3) $u_t(x,t) \in C(D_1 \cup I)$ $\vartheta_t(x,t) \in C(D_2 \cup I)$ hamda $u_t(x,0)$, $\vartheta_t(x,0)$ funksiyalar $x \rightarrow 0$ chekli.

4) Quyidagi chegaraviy shartlar o`rinli.

$$u(0,t) = \psi_1(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.3)$$

$$u(l,t) = \psi_1(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.4)$$

$$\vartheta(x,-x) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq \frac{\ell}{2} \quad (2.5)$$

$$5) \quad u(x,0) = \vartheta(x,0) \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.6)$$

$$u_t(x,0) = \vartheta_t(x,0) \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.7)^1$$

Teorema. (2.1)-(2.7) masalaning yechimi yagonadir.

Isboti: D_2 sohada (2.2) tenglamaning yechimini yagonalagini isbotlash uchun teoremani shartini teskarisini faraz qilamiz, ya`ni, tenglamani yechimi ikkita,  $\vartheta_1(x,t)$  va  $\vartheta_2(x,t)$  bo`lsin. Ular yechim bo`lgani uchun (2.2) tenglamani va (2.5) shartni qanoatlantiadi.

$$\vartheta_{1xx} = \vartheta_{1tt}$$

$$\vartheta_{2xx} = \vartheta_{2tt}$$

$$\vartheta_1(x,-x) = \psi(x)$$

$$\vartheta_2(x,-x) = \psi(x)$$

Tenglama chiziqli bo`lgani uchun yechimlar ayirmasi ham yechim bo`ladi.

$$V(x,t) = \vartheta_1 - \vartheta_2 \quad (2.8)$$

belgilash kirisak, quyidagilar o`rinli

$$V_{xx} = V_{tt} \quad (2.9)$$

$$V(x,-x) = 0 \quad (2.10)$$

(2.9)-(2.10) bir jinsli masalaga ega bo`lamiz.

Giperbolik tenglamani umumiy yechimidan foydalansak:

$$V(x,t) = f_1(x-t) + f_2(x+t) \quad (2.11)$$

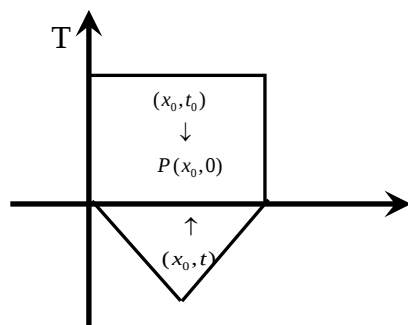
(2.11) tenglikdan (2.10) shartni hisoblasak,

¹ Золина Л.А. “ О краевой задаче для модельного уравнения гипербола-параболического типа ” //вычислительной математики и математической физики. ЖЛМ ЖВМ и МФ, 1966-1001

$$\begin{aligned}
V(x, -x) &= f_1(2x) + f_2(0) = 0 \\
f_1(2x) &= -f_2(0) = \text{const.} \\
f_1(x) &= \text{const.}
\end{aligned}$$

$V(x, t) = f_2(x+t) + c = \bar{f}_2(x+t)$ AC xarakteristikada $x+t=c$ bo'lgani uchun $V(x, t) = \bar{f}_2(c) = \text{const}$ ekanligi kelib chiqadi. (2.10) shartni hisoblasak:

$$V(x, -x) = c \quad V(x, -x) = 0 \Rightarrow c = 0$$



2-chizma

Demak, AC xarakteristikada $V(x, t)$ funksiya nolga teng ekan. Giperbolik tipdagi tenglamalar uchun ekstremum prinsipiga ko'ra AC xarakteristikada $V(x, t)$ funksiya nolga teng bo'lgani uchun $V(x, t)$ funksiya D_2 sohaning AB chegarasida o'zining musbat maksimumiga erishadi, demak AB kesmadagi ixtiyoriy P nuqtada musbat maksimumga erishsin, u holda $V_t(P) \geq 0$ bo'ladi. Hosila ta'rifiga ko'ra,

$$V_t(P) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V(x_0, t) - V(x_0, 0)}{t} \quad (2.12)$$

Ma'lumki, $t < 0$, ekstremum prinsipiga ko'ra,

$$\max_{(x, t) \in D_2} V(x, t) = V(x_0, 0) \Rightarrow V(x_0, t) \leq V(x_0, 0)$$

Bundan

$$V_t(P) \geq 0 \quad (2.13)$$

kelib chiqadi. Parabolik tomondan qarasak, unda ham ikkita $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ yechimlari bor deb faraz qilsak, ular (2.1) tenglamaning va (2.3), (2.4) shartlarni qanoatlantiradi:

$$u_{1xx} = u_{1t}$$

$$u_1(0, t) = \psi_1(t)$$

$$u_1(l, t) = \psi_2(t)$$

$$u_{2xx} = u_{2t}$$

$$u_2(0, t) = \psi_1(t)$$

$$u_2(l, t) = \psi_2(t)$$

(2.1) tenglamaning chiziqli ekanligidan bu yechimlar ayirmasi ham yechim bo'ladi.

$$U(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t) \quad (2.14)$$

belgilash kiritsak, quyidagilar o'rinli bo'ladi:

$$\begin{aligned} U_{xx} &= U_t \\ U(0, t) &= 0 \\ U(l, t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Parabolik tipdagi tenglamalar uchun ekstremum prinsipiga ko'ra, (2.15) masalaning yechimi bo'lgan $U(x, t)$ funksiya o'zining musbat maksimumiga sohaning chegaralarida erishadi. (2.15) masalaning shartlariga ko'ra qaralayotgan sohaning o'ng va chap chegaralarida aynan nolga teng. Demak, $U(x, t)$ funksiya o'zining musbat maksimumiga sohaning AB chegarasida erishar ekan.

$$U_t(P) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{U(x_0, t_0) - U(x_0, 0)}{t_0} \quad (2.16)$$

Eksrtimum prinsipidan foydalansak,

$$\max_{(x, t) \in D_1} U(x, t) = U(x_0, 0) \Rightarrow U(x_0, t_0) \leq U(x_0, 0) \text{ va } t_0 > 0 \text{ ekanligidan}$$

$$U_t(P) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{U(x_0, t_0) - U(x_0, 0)}{t_0} < 0$$

kelib chiqadi. (2.7) shartdan (2.13) va (2.16) bir-biriga ziddir. Bundan qilgan farazimiz noto'g'ri ekani kelib chiqadi, ya'ni (1)-(7) masalaning yechimi yagona ekan.¹

Teorema (2.1)-(2.7) masalani mavjud.

Isboti: Bizga ma'lum bo'lgan (2.11) giperbolik tenglamaning umumiy yechimi ko'rinishidan va (2.5) shartdan foydalanib, $f_1'(x)$ funksiyanı topamiz

$$\mathcal{A}(x, -x) = f_1(2x) + f_2(0) = \psi(x) \Rightarrow f_1(2x) = \psi(x) - f_2(0) \Rightarrow f_1(x) = \psi\left(\frac{x}{2}\right) - f_2(0)$$

¹ Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том I, II. Издательства «Наука» Москва 1969 г.

$$f_1'(x) = \frac{1}{2} \psi^1\left(\frac{x}{2}\right) \quad (2.17)$$

(2.11) formuladan x va t bo'yicha birinchi tartibli hosilalarini ayirmasini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_x(x, t) &= f_1'(x-t) + f_2'(x+t); & \mathcal{G}_t(x, t) &= -f_1'(x-t) + f_2'(x+t) \\ \mathcal{G}_x(x, t) - \mathcal{G}_t(x, t) &= 2f_1'(x-t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

(2.18) tenglikni $t \rightarrow 0$ intilgandagi limitini hisoblaylik:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{G}_x(x, t) - \mathcal{G}_t(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0} 2f_1'(x-t) \\ \mathcal{G}_x(x, 0) - \mathcal{G}_t(x, 0) &= 2f_1'(x) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Shu o'rinda quyidagicha belgilash kiritaylik:

$$\mathcal{G}(x, 0) = \tau(x) \quad \text{va} \quad \mathcal{G}_t(x, 0) = \nu(x) \quad (2.20)$$

(2.17) va (2.19) larni tenglab, (2.20) belgilashga ko'ra quyidagicha yoza olamiz:

$$\tau^1(x) - \nu(x) = \psi^1\left(\frac{x}{2}\right) \quad (2.21)$$

(2.1) tenglamani ham $t \rightarrow 0$ intilgandagi limitini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= u_t(x, t) \\ \lim_{t \rightarrow 0} u_{xx}(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0} u_t(x, t) \\ u_{xx}(x, 0) &= u_t(x, 0) \end{aligned} \quad (2.22)$$

(2.22) tenglikni (2.20) belgilashga o'tib, (2.21) tenglama bilan ikkalasidan $\tau(x)$, $\nu(x)$ larni topamiz.

$$\begin{cases} \tau''(x) - \nu(x) = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\begin{cases} \tau'(x) - \nu(x) = \psi'\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\begin{cases} \tau(0) = \varphi_1(0) \\ \tau(\ell) = \varphi_2(0) \end{cases} \quad (2.25)$$

(2.23) tenglamadan (2.24) tenglamani ayirib $\tau(x)$ ga bog'liq oddiy differensial tenglamaga ega bo'lamiz.

$$\tau''(x) - \tau'(x) = -\psi' \left(\frac{x}{2} \right) \quad (2.26)$$

$$\tau(0) = \psi_1(0) \quad \tau(l) = \psi_2(0) \quad (2.27)$$

Bu masalani yechish uchun Grin funksiyasini tuzamiz. Buning uchun

$$\tau''(x) - \tau'(x) = 0 \quad (2.28)$$

tenglamani umumiy yechimi

$$\tau(x) = c_1 + c_2 e^x \quad (2.29)$$

ko`rinishida bo'ladi. (2.26) tenglamaning (2.27) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topishda qaralayogan masalaning Grin funksiyasidan foydalanamiz. Buning uchun (2.29) -bir jinsli tenglamaning yechimini (2.26) shartlarni qanoatlantiruvchi $\tau_1(x)$ va $\tau_2(x)$ shunday xususiy yechimlarni topamizki, $\tau_1(x)$ funksiya (2.27) chegaraviy shartlarni birinchisini qanoatlantirib, ikkinchisini qanoatlantirmasin.

$$\tau_1(0) = c_1 + c_2 = \psi_1(0) \quad (2.30)$$

$$\tau_2(l) = c_1 + c_2 e^l = \psi_2(0) \quad (2.31)$$

(2.30) tenglamani qanoatlantiruvchi $\tau_1(x) = \psi_1(0)e^x$, (2.31) tenglamani qanoatlantiruvchi $\tau_2(x) = \psi_2(0)$ xususiy yechimlarni tanlab olamiz. Demak, Grin funksiyasini quyidagi ko`rinishda izlaymiz:

$$G(x, t) = \begin{cases} A(t)\psi_1(0)e^x \\ B(t)\psi_2(0) \end{cases} \quad (2.32)$$

Buning uchun Grin funksiyasi $[0, T]$ oraliqdan olingan har bir t uchun x ning funksiyasi sifatida quyidagi shartlarni qanoatlantirishidan foydalanamiz:

1. $x \neq t$ da

$$\tau^{11}(x) - \tau^1(x) = 0$$

tenglamani qanoatlantiradi.

2. $x=0$ da va $x=l$ da (2.27) chegaraviy shartni qanoatlantiradi.

3. $[0, T]$ oraliqdan olingan ixtiyoriy fiksirlangan t uchun $G(x, t)$ funksiya $x=t$ da x bo'yicha uzluksiz, x bo'yicha birinchi tartibli hosilasi esa $x=t$ da birga teng bo'lgan sakrashga ega, ya'ni

$$G(t+0, t) = G(t-0, t), \quad G'_x(t+0, t) - G'_x(t-0, t) = 1$$

Grin funksiyasini (2.3) shartiga ko'ra quyidagilarni yoza olamiz:

$$\begin{cases} A(t)\psi_1(0)e^t = B(t)\psi_2(0) \\ A(t)\psi_1(0)e^t + 1 = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

(2.33) tenglamalar sistemasidan $A(t)$ va $B(t)$ funksiyalarni topamiz.

$$A(t) = -\frac{1}{\psi_1(0)e^t}, \quad B(t) = -\frac{1}{\psi_2(0)}$$

Bulardan (2.32) Grin funksiyasini ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$G(x, t) = \begin{cases} -e^{x-t} & 0 \leq x < t \\ -1 & t < x \leq l \end{cases} \quad (2.34)$$

(26)-(27) masalaning yechmini

$$\tau(x) = \int_0^l G(x, t) f(t) dt \quad (2.35)$$

formula orqali topamiz. Bu yerda $f(x) = -\psi^1\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \int_0^l G(x, t) f(t) dt = \int_0^x e^{x-t} \psi^1\left(\frac{t}{2}\right) dt + \int_x^l \psi^1\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ \tau(x) &= 2\psi\left(\frac{l}{2}\right) - 2\psi(0)e^x + 2 \int_0^x e^{x-t} \psi\left(\frac{t}{2}\right) dt \end{aligned} \quad (2.36)$$

(2.23) dan ya'ni $v(x) = \tau^{11}(x)$ tenglikdan ikkinchi noma'lum $v(x)$ funksiyani topamiz. Buning uchun (2.36) tenglikdan x bo'yicha ikki marta hosila olamiz.

Chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan integraldan quyidagi formuladan foydalangan holda hosila olamiz:

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t, x) dt \quad \text{bo'lsa,} \quad F'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f'_x(t, x) dt + \beta'(x) f(\beta(x), x) - \alpha'(x) f(\alpha(x), x)$$

Endi esa $\tau^1(x)$ va $\tau^{11}(x)$ larni topamiz.

$$\begin{aligned}\tau'(x) &= -2\psi(0)e^x + 2\psi\left(\frac{x}{2}\right) + 2\int_0^x e^{x-t}\psi\left(\frac{t}{2}\right)dt \\ \tau''(x) &= -2\psi(0)e^x + \psi'\left(\frac{x}{2}\right) + 2\psi\left(\frac{x}{2}\right) + 2\int_0^x e^{x-t}\psi\left(\frac{t}{2}\right)dt\end{aligned}$$

Bundan

$$v(x) = \tau''(x) = -2\psi(0)e^x + \psi'\left(\frac{x}{2}\right) + 2\psi\left(\frac{x}{2}\right) + 2\int_0^x e^{x-t}\psi\left(\frac{t}{2}\right)dt \quad (2.37)$$

Biz (2.36) va (2.37) tengliklarda mos ravishda $\tau(x)$ va $v(x)$ funksiyalarni aniqladik. Bu esa (2.2) tenglamani va (2.20) belgilashdan Koshi masalasini yechimini beruvchi

$$\vartheta(x, t) = \frac{\tau(x+t) - \tau(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v(\xi) d\xi \quad (2.38)$$

Dalamber formulasidan foydalangan holda $\vartheta(x, t)$ funksiyani ya'ni (2.2) tenglamani D_2 sohadagi yechimini yoza olamiz. Buning uchun

$\tau(x+t)$, $\tau(x-t)$ va $\int_{x-t}^{x+t} v(\xi) d\xi$ larni alohida-alohida hisoblab olamiz.

$$\begin{aligned}\tau(x+t) &= 2\psi\left(\frac{t}{2}\right) - 2\psi(0)e^{x+t} + 2\int_0^{x+t} e^x \psi\left(\frac{t}{2}\right)dt \\ \tau(x-t) &= 2\psi\left(\frac{t}{2}\right) - 2\psi(0)e^{x-t} + 2\int_0^{x-t} e^{x-2t} \psi\left(\frac{t}{2}\right)dt \\ \int_{x-t}^{x+t} (-2\psi(0)e^\xi + \psi'\left(\frac{\xi}{2}\right) + 2\psi\left(\frac{\xi}{2}\right) + 2\int_0^\xi e^{\xi-t} \psi\left(\frac{t}{2}\right)dt) d\xi &= \\ &= (-2\psi(0)e^\xi + 2\psi\left(\frac{\xi}{2}\right) + 2\int_0^\xi e^{\xi-t} \psi\left(\frac{t}{2}\right)dt) I_{x-t}^{x+t} = \\ &= -2\psi(0)[e^{x+t} - e^{x-t}] + 2\psi\left(\frac{x+t}{2}\right) - 2\psi\left(\frac{x-t}{2}\right) + 2\int_0^{x+t} e^x \psi\left(\frac{t}{2}\right)dt - 2\int_0^{x-t} e^{x-2t} \psi\left(\frac{t}{2}\right)dt\end{aligned}$$

Bundan

$$\begin{aligned}\int_{x-t}^{x+t} v(\xi) d\xi &= \\ &= -2\psi(0)[e^{x+t} - e^{x-t}] + 2\psi\left(\frac{x+t}{2}\right) - 2\psi\left(\frac{x-t}{2}\right) + 2\int_0^{x+t} e^x \psi\left(\frac{t}{2}\right)dt - 2\int_0^{x-t} e^{x-2t} \psi\left(\frac{t}{2}\right)dt\end{aligned}$$

ekanligini bilib oldik. Endi esa topilganlarni (2.38) formulaga qo'yamiz.

$$\vartheta(x,t) = 2\psi\left(\frac{l}{2}\right) - 2\psi(0)e^{x+t} + \psi\left(\frac{x-t}{2}\right) - \psi\left(\frac{x+t}{2}\right) + 2 \int_0^{x+t} e^x \psi\left(\frac{t}{2}\right) dt \quad (2.39)$$

yoki

$$\vartheta(x,t) = \tau(x+t) + \psi\left(\frac{x-t}{2}\right) - \psi\left(\frac{x+t}{2}\right) \quad (2.40)$$

Biz (40) tenglikda (2.2) tenglamani yechimini topdik. Bu yechimni tog'riligini tekshirish uchun topilgan $\vartheta(x,t)$ yechim (2.5) shartni qanoatlantirishi ko'rsatishimiz kerak. Yechimni (2.40) ko'rinishida $\vartheta(x,-x)$ ni hisoblaymiz.

$$\vartheta(x,-x) = \tau(0) + \psi(x) - \psi(0)$$

(2.27) va (2.6) kelishuvlik shartidan $\tau(0) = \psi(0)$ bo'ladi. Bundan

$$\vartheta(x,-x) = \psi(x)$$

Demak, yechim to'g'ri topilgan ekan.

Endi esa (2.1) tenglamani D_1 sohadagi yechimini topishimiz kerak.

Buning uchun

$$u_t = u_{xx} \quad (x,t) \in D_1 \quad (2.1)$$

$$u(0,t) = \psi_1(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.3)$$

$$u(l,t) = \psi_2(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.4)$$

$$u(x,0) = \tau(x) \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.5)$$

(2.1) tenglamani D_1 sohada (2.3)-(2.5) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini, ya'ni, issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalaning yechimi ko'rinishidan foydalanamiz.¹

$$u(x,t) = \int_0^t G_\xi(x,t;0,\eta) \psi_1(\eta) d\eta - \int_0^t G_\xi(x,t;l,\eta) \psi_2(\eta) d\eta + \int_0^l G(x,t;\xi,0) \tau(\xi) d\xi \quad (2.41)$$

Bunda $G(x,t;\xi,\eta)$ (1) tenglamaning fundamental yechimi ya'ni,

¹ Елеев В.А. О некоторых краевых задачах для одного уравнения смешанного парабола – гиперболического типа. Дифференциальные уравнения, 1978, Т XIII, №1, с 22-29

$$G(x, t; \xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\eta)}} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}} \quad (2.42)$$

(2.41) yechimdagi integrallarni alohida hisoblab olamiz.

$$G(x, t; \xi, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}}$$

$$G_\xi(x, t; \xi, \eta) = \frac{(x-\xi)}{4\sqrt{\pi(t-\eta)^3}} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}$$

$$G_\xi(x, t; 0, \eta) = \frac{x}{4\sqrt{\pi(t-\eta)^3}} e^{\frac{-x^2}{4(t-\eta)}}$$

$$G_\xi(x, t; l, \eta) = \frac{(x-l)}{4\sqrt{\pi(t-\eta)^3}} e^{\frac{-(x-l)^2}{4(t-\eta)}}$$

Topilgan munosabatlarni (2.41) yechimga qo'ysak, yechim quyidagicha bo'ladi.

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^t \frac{x}{4\sqrt{\pi(t-\eta)^3}} e^{\frac{-x^2}{4(t-\eta)}} \psi_1(\eta) d\eta - \int_0^t \frac{(x-l)}{4\sqrt{\pi(t-\eta)^3}} e^{\frac{-(x-l)^2}{4(t-\eta)}} \psi_2(\eta) d\eta + \\ & + \int_0^l \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}} \left[2\psi\left(\frac{l}{2}\right) - 2\psi(0)e^\xi + 2 \int_0^\xi e^{\xi-t} \psi\left(\frac{t}{2}\right) dt \right] d\xi \end{aligned} \quad (2.43)$$

Demak, (2.43) tenglik biz izlayotgan (2.1) parabolik tenglamaning D_1 sohadagi yechimi bo'ladi.

II bob bo'yicha xulosa

Dissertasiyaning ikkinchi bobida aralash tipdagi parabola-giperbolik tenglamalar bo'yicha umumiy ma'lumotlar va bu tenglamalarga bir nechta chegaraviy masalarning qo'yilishi hamda bitta chegaraviy masala yechimining yagonaligi va mavjudligi ko'rsatildi.

Birinchi chegaraviy masala mavjudlagani isbotlashda giperbolik tenglamaning umumiy yechimidan foydalanib, oddiy differensial tenglamaga keltirildi. Yechimni topishda Grin funksiyasidan, so'ngra Koshi masalasi yechimi bo'lgan Dalamber formulasidan foydalangan holda giperbolik sohadagi yechim topildi. Parabolik sohadagi yechimni topish uchun Potensiallar usuli o'rganildi va undan foydalanildi.

Yechimning yagonaligini isbotlashda parabolik va giperbolik tenglamalar uchun ekstrimum prinsipidan foydalanildi.

Aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning qo'yilishi, birinchi chegaraviy masalaning yechilashi, unda foydalanilgan usullar tadqiqotning yangiligi sifatida qaralayotgan o'zgarish chizig'i xarakteristika bo'lgan parabola-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun qo'yilgan nolokal shartli chegaraviy masalani o'rganish va uni yechish uchun bilim va ko'nikma hosil qilishga xizmat qiladi.

III-BOB. O'zgarish chizig'i xarakteristika bo'lgan tenglamalar uchun ba'zi chegaraviy masalalar.

1. Integral tenglamalar haqida umumiy ma'lumotlar.

Matematik fizika tenglamalari deyilganda, albatta, o'z-o'zidan integral tenglamalar ham tushuniladi. Integral tenglamalar matematikaning turli sohalarida muhim rol o'ynaydi, ayniqsa, integral tenglamalar nazariyasi oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalarni o'rganishda keng qo'llaniladi.

Noma'lum funksiya integral ishorasi ostida qatnashgan har qanday tenglama integral tenglama deyiladi.¹

Umumiy tushunchalar. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $a \leq x \leq b$ oraliqda, $K(x,y)$ funksiya esa $Q\{a \leq x, y \leq b\}$ soha (kvadrat) da aniqlangan bo'lsin. U holda

$$f(x) - \int_a^b K(x,y)f(y)dy = f(x) \quad (1.1)$$

tenglama $f(x)$ noma'lum funksiya nisbatan chiziqli integral tenglama deyiladi, l -sonli parametr. Izlanayotgan $f(x)$ funksiyaning argumenti x ham $[a,b]$ oraliqda o'zgaradi deb hisoblaymiz.

$K(x,y)$ funksiya (1.1) tenglamaning Yadrosi, $f(x)$ funksiya esa (1.1) tenglamaning ozod hadi deyiladi. Ozod had $f(x)$ aynan nolga teng yoki teng emasligiga qarab, (1.1) tenglama bir jinsli yoki bir jinsli bo'lmagan tenglama deyiladi.²

Agar integral tenglama

$$\int_a^b K(x,y)f(y)dy = f(x) \quad (1.2)$$

ko'rinishda bo'lsa, u birinchi turdagi integral tenglama deb yuritiladi. SHu munosabat bilan (1.1) tenglama ikkinchi turdagi integral tenglama hisoblanadi.

¹ Ловитт У.В. Линейные интегральные уравнения. М., 1957.

² Salohiddinov M. Matematik fizika tenglamalari. "O'zbekiston" nashriyoti. T. 2002 y.

Integrallash chegaralari a va b lar chekli ham cheksiz ham bo'lishi mumkin.

Fredgolm tenglamalari. Agar (1.1) tenglamada $K(x, y)$ Yadro $Q\{a \leq x, y \leq b\}$ kvadratda ikkala argumenti bo'yicha ham uzluksiz va $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz bo'lsa yoki umumiyroq bo'lgan

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dx dy < +\infty, \quad (1.3)$$

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty \quad (1.4)$$

shartlarni qanoatlantirsa (1.1) tenglama 2-turdagi Fredgolm tenglamasi deyiladi.

Volterraa tenglamalari. Quyidagi

$$j(x) - \int_a^x K(x, y)j(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1.5)$$

tenglama 2-turdagi chiziqli Volterra integral tenglamasi deyiladi.

(1.5) tenglamaning (1.1) tenglamadan asosiy farqi integral chegarasining biri o'zgaruvchi ekanligidadir. Umumiy tushunchalar punktida (1.1) tenglamaga nisbatan berilgan barcha ta'riflar (1.5) tenglama uchun ham o'rinlidir, shuning uchun ularni qaytarib o'tirmaymiz.

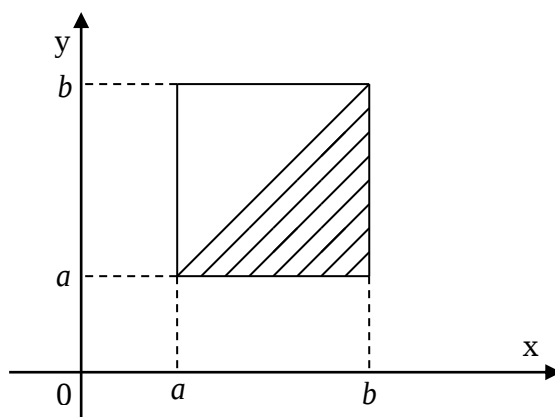
Volterra tenglamalarini Fredgolm tenglamalarining xususiy holi deb qarash mumkin. Volterra tenglamasining Yadrosi $K(x, y)$ $a \leq y \leq x$ oraliqda aniqlangan. Agar uni $y > x$ lar uchun

$$K(x, y) \equiv 0, \quad x < y \leq b$$

deb aniqlasak, hosil bo'lgan yangi

$$\bar{K}(x, y) = \begin{cases} K(x, y), & y \leq x \\ 0, & y > x \end{cases}$$

Yadro Fredgolm Yadrosi deb qaralishi mumkin.



3-чизма

Bu $\bar{K}(x, y)$ Yadro kvadratning (3-chizma) shtrixlangan qismida $K(x, y)$ Yadro bilan ustma-ust tushadi, qolgan qismida esa aynan nolga teng. Shunday aniqlangan $\bar{K}(x, y)$ Yadro uchun

$$j(x) - l \int_a^b \bar{K}(x, y) j(y) dy = f(x)$$

tenglama Fredgolm tenglamasi bo'lib, u Volterra tenglamasining aynan o'zidir.

Demak, Fredgolm tenglamasi uchun olingan barcha natijalar, uning xususiy holi bo'lgan Volterra tenglamalari uchun ham o'rinli bo'lishi shubhasiz.

Lekin Volterra tenglamalarining faqat o'zlarigagina xos xususiyatlari borki, ular bu tenglamalarni yechishda alohida ahamiyat kasb etadi.

Ketma-ket yaqinlashish usuli va rezolventa.

1. Quyidagi Fredgolm tipidagi tenglamani qaraylik,

$$j(x) = f(x) + l \int_a^b K(x, y) j(y) dy \quad (1.6)$$

$K(x, y)$ Yadro Q kvadratda, $f(x)$ esa $[a, b]$ da uzluksiz funksiyalar bo'lsin. Shu shartlar bajarilganda (1.6) tenglamani echish uchun kema-ket yaqinlashish metodini qo'llaymiz. Buning uchun echim $j(x)$ ni parametr l ning butun va musbat darajalari bo'yicha yoyilgan qator ko'rinishida qidiramiz, ya'ni

$$j(x) = j_0(x) + j_1(x)l + j_2(x)l^2 + \dots \quad (1.7)$$

Agar (1.7) qator x bo'yicha $[a, b]$ oraliqda tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, uni (1.6) tenglamaga qo'yib, hadma-had integrallab, so'ngra l ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni o'zaro tenglab topamiz:

$$j_0(x) = f(x), \quad j_1(x) = \int_a^b K(x, y) j_0(y) dy$$

$$j_2(x) = \int_a^b K(x, y) j_1(y) dy,$$

va umuman

$$j_n(x) = \int_a^b K(x, y) j_{n-1}(y) dy \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.8)$$

Barcha $j_0(x), j_1(x), j_2(x), \dots$ funksiyalar uzluksiz funksiyalar bo'lishi o'z-o'zidan ravshan. Agar l parametr etarli darajada kichik bo'lsa, (1.8) ketma-ketlikdan tuzilgan qator absolyut va tekis yaqinlashishini ko'rsatamiz. U holda (1.8) qatorning yig'indisi $j(x)$ ham uzluksiz funksiya bo'ladi va (1.6) tenglamani qanoatlantiradi.

$f(x)$ va $K(x, y)$ larning yopik sohalarda uzluksizligidan

$$|f(x)| \leq m, \quad |K(x, y)| \leq M$$

deb yoza olamiz, m, M -lar musbat o'zgarmas sonlar.

Shunga asoslanib, (1.8) formulalardan $j_n(x)$ funksiyalar uchun quyidagi baholarni olamiz:

$$|j_0(x)| \leq m, \quad |j_1(x)| \leq \int_a^b |K(x, y)| |j_0(y)| dy \leq$$

$$m \int_a^b |K(x, y)| dy \leq mM(b-a),$$

$$|j_2(x)| \leq \int_a^b |K(x, y)| |j_1(y)| dy \leq mM(b-a) \int_a^b |K(x, y)| dy = mM^2(b-a)^2,$$

va umuman

$$|j_n(x)| \leq m[M(b-a)]^n.$$

Demak (1.7) qatorning umumiy hadi uchun

$$|j_n(x)| \leq \frac{1}{M(b-a)} \int_a^b |j_{n-1}(y)| dy$$

bahoni hosil qilamiz. Bundan ko‘rinadiki, (1.7) qator absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi, agarda

$$\int_a^b |K(x,y)| dy \leq \frac{1}{M(b-a)} \quad (1.9)$$

shart bajarilsa. Shunday qilib, (1.6) tenglama uchun (1.9) shart o‘rinli bo‘lsa, bu tenglama echimga ega va bu echim yagonadir. Yagonaligini ko‘rsatish etarli.

Faraz qilaylik, (1.6) tenglamaning ikkita echimi $j(x)$ va $y(x)$ mavjud bo‘lsin. U holda $u(x) = j(x) - y(x)$ (1.6) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning echimi bo‘ladi, ya’ni

$$u(x) = \int_a^b K(x,y)u(y)dy$$

Bundan $u_0 = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)|$ deb, $u_0 \leq \frac{1}{M(b-a)} u_0$, ekanligini topamiz. Bu tengsizlik esa (1.9) ga teskaridir. Demak, $u_0 = 0$ yoki $u(x) \equiv 0$, ya’ni $j(x) = y(x)$.¹

2. Endi ketma-ket yaqinlashish metodini

$$j(x) = f(x) + \int_a^b K(x,y)j(y)dy \quad (1.10)$$

Volterra tenglamasini echishga tadbiiq etaylik. Bu erda ham $f(x)$ va $K(x,y)$ lar uluksiz funksiyalar bo‘lsin. Avvalgidek echimni (1.7) qator ko‘rinishda izlaymiz va $j_n(x)$ funksiyalar uchun ushbu formulalarni hosil qilamiz:

$$j_0(x) = f(x), \quad j_n(x) = \int_a^b K(x,y)j_{n-1}(y)dy, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

¹ Гайдук С.И. Переменение метода контурного интеграла к решению одной задачи на сопряжение уравнение параболического и гиперболического типов. – деф-ние ур-ние, 1965 т. 1 №10 с.1366-

Yuqoridagidek $|f(x)| \leq m$, $|K(x, y)| \leq M$ ekanligidan quyidagi tengsizliklarni hosil qilamiz:

$$|j_0(x)| \leq m, \quad |j_1(x)| \leq \int_a^x |K(x, y)| |j_0(y)| dy \leq mM(x-a),$$

$$|j_2(x)| \leq \int_a^x |K(x, y)| |j_1(y)| dy \leq mM^2 \int_a^x (y-a) dy = mM^2 \frac{(x-a)^2}{2}$$

va umuman

$$|j_n(x)| \leq m \frac{[M(x-a)]^n}{n!}.$$

Bu tengsizliklardan ko'rinadiki, $\sum_{n=0}^{\infty} j_n(x) l^n$ qatorning hadlari mos ravishda

$m e^{\frac{[l |M(x-a)]^n}{n!}}$ qatorning hadlaridan katta emas. Keyingi qator esa l ning

ixtiyoriy chekli qiymatlari uchun tekis yaqinlashadi va

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[l |M(x-a)]^n}{n!} = m e^{l |M(x-a)|}.$$

Demak, $\sum_{n=0}^{\infty} j_n(x) l^n$ qator absolyut va tekis yaqinlashadi, uning yig'indisi $j(x)$

(1.10) tenglamani qanoatlantiradi. Bu echim ixtiyoriy fiksirlangan l uchun yagonadir.

Haqiqatan ham, $j(x)$ va $y(x)$ (1.10) tenglamaning ikkita uzluksiz echimlari desak, u holda $u(x) = j(x) - y(x)$ funksiya birjinsli

$$u(x) = l \int_a^x K(x, y) u(y) dy \quad (1.11)$$

tenglamani echimi bo'ladi. (1.11) dan topamiz.

$$|u(x)| \leq |l|^2 m_* M_* (x-a) \quad (1.12)$$

bunda $m_* = \max |u(x)|$, $M_* = \max |K(x, y)|$, (1.12) bahoni (1.11) tenglikning o'ng tomoniga qo'yib topamiz

$$|u(x)| \leq \frac{m_* M_*^2 (x-a)^2}{2}$$

va shu protsessni davom ettirib

$$|u(x)| \leq \frac{m_* M_*^n (x-a)^n}{n!}$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tengsizlik ixtieriy n uchun o‘rinli bo‘lganligidan, $n \in \mathbb{N}$ desak $u(x) = 0$ bo‘lishini hosil qilamiz yoki $j(x) = y(x)$.

SHunday qilib, biz xulosa qilamizki, Volterra tipidagi (1.10) tenglamada ozod had $f(x)$ va Yadro $K(x, y)$ uzluksiz bo‘lsa, bu tenglama l ning har qanday chekli qiymati uchun birdan bir echimga ega ekan.

Ikkinchi turdagi Fredgolm tenglamalari uchun esa bunday emas, ya’ni, ular l ning har qanday qiymati uchun ham echimga ega bo‘lavermaydi, ba’zi l lar uchun esa bir nechta echimlarga ega bo‘lishi mumkin.¹

Rezolventa tushunchasi. Yuqorida (1.6) Fredgolm tenglamasi (1.9) shart bajarilganda birdan-bir echimga ega ekanligini ko‘rdik. Endi shu echimni boshqacha ko‘rinishda yozamiz. Buning uchun esa takroriy Yadrolar tushunchasini kiritamiz. Takroriy $K_n(x, y)$ Yadrolar berilgan $K(x, y)$ Yadro orqali quyidagicha ifodalanadilar:

$$K_1(x, y) = K(x, y), \quad K_n(x, y) = \int_a^b K_{n-1}(x, y_1) K(y_1, y) dy_1 \quad (1.13)$$

$K(x, y)$ Yadroning Q kvadratda uzluksizligidan har bir takroriy Yadroning ham Q da uzluksizligi kelib chiqishi shubhasiz.

Takroriy Yadrolarni (1.13) dagidek birini ikkinchisi orqali emas, hammasini berilgan $K(x, y)$ Yadro orqali ifodalash mumkin. Haqiqatan ham

$$K_1(x, y) = K(x, y)$$

$$K_2(x, y) = \int_a^b K_1(x, y_1) K(y_1, y) dy_1 = \int_a^b K(x, y_1) K(y_1, y) dy_1$$

¹ Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М.: "Наука", 1975

$$K_3(x, y) = \int_a^b K_2(x, y_1) K(y_1, y) dy_1 =$$

$$\int_a^b \int_a^b K(x, y_2) K(y_2, y_1) dy_2 \int_a^b K(y_1, y) dy_1$$

yoki

$$K_3(x, y) = \int_a^b \int_a^b K(x, y_2) K(y_2, y_1) K(y_1, y) dy_1 dy_2$$

va umumiy holda

$$K_n(x, y) = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b K(x, y_{n-1}) K(y_{n-1}, y_{n-2}) \dots K(y_2, y_1) \int_a^b K(y_1, y) dy_1 \dots dy_{n-1}. \quad (1.14)$$

Bu formulada integrallash tartibi ixtiyoriy bo'lishi mumkin. Yadro $K(x, y)$ uchun $|K(x, y)| \leq M$ ekanligini nazarda tutib, (1.14) formuladan quyidagi tengsizlikni olamiz:

$$|K_n(x, y)| \leq M_n (b-a)^{n-1} \quad (1.15)$$

Endi takroriy Yadrolardan tuzilgan quyidagi qatorni olaylik

$$K_1(x, y) + K_2(x, y)l + K_3(x, y)l^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x, y)l^n. \quad (1.16)$$

Bu qator l uchun (1.9) shart bajarilganda Q kvadratda absolyut va tekis yaqinlashadi, chunki (1.15) ga asosan (1.16) qatorning umumiy hadi uchun

$$|K_{n+1}(x, y)l^n| \leq M^{n+1}(b-a)^n |l|^n = M [|l| M(b-a)]^n$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. (1.16) qatorning yig'indisini $R(x, y; l)$ deb belgilaylik, ya'ni,

$$R(x, y; l) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x, y)l^n. \quad (1.17)$$

YUqorida (1.6) Fredgolm tenglamasining echimini (1.9) shart bajarilganda (1.7) qator orqali topgan edik. Shu $\sum_{n=0}^{\infty} j_n(x)l^n$ qatordagi har bir

$j_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) funksiyani berilgan $f(x)$ funksiya orqali ifodalashga urinib ko'raylik:

(1.8) formulalarni esga olib topamiz:

$$\begin{aligned} j_0(x) &= f(x), \quad j_1(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy, \\ j_2(x) &= \int_a^b K(x, y) j_1(y) dy = \int_a^b \int_a^b K(x, y) K(y, y_1) f(y_1) dy_1 dy = \\ &= \int_a^b K_2(x, y_1) f(y_1) dy_1 \end{aligned}$$

davom etsak,

$$j_n(x) = \int_a^b K_n(x, y) f(y) dy$$

hosil bo'ladi.

$j_n(x)$ uchun topilgan formulalarni (1.7) qatorga qo'yib topamiz:

$$j(x) = f(x) + l \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b K_{n+1}(x, y) l^n f(y) dy$$

yoki Q kvadratda (1.17) qatorning tekis yaqinlashuvchi ekanligini nazarda tutib yoza olamiz:

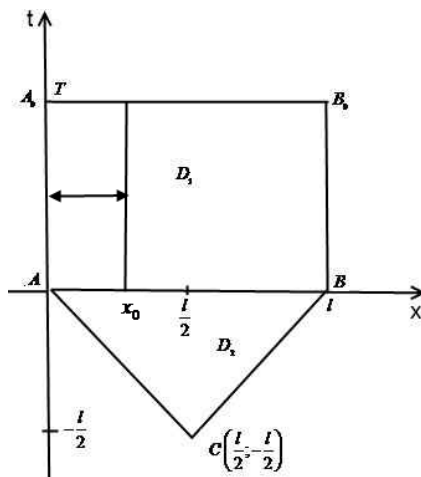
$$j(x) = f(x) + l \int_a^b R(x, y; l) f(y) dy. \quad (1.18)$$

Eslatib o'tamiz, (1.18) formula (1.9) shart bajarilgandagina o'rinlidir. Ko'rinib turibdiki, (1.17) formula bilan aniqlangan $R(x, y; l)$ funksiya ozod had $f(x)$ ga bog'liq emas. Bu funksiya $K(x, y)$ Yadroning yoki (1.6) tenglamaning rezolventasi deb ataladi.¹

¹ Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том I, II. Издательства «Наука» Москва 1969 г.

2. Masalaning qo'yilishi va ekstremum prinspi.

Aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar xususiy hosilali tenglamalar nazariyasida muhim o'rin tutadi hamda mexanika, fizika va boshqa ko'plab sohalarda tadbirlarga ega.¹



4-chizma

Masalaning qo'yilishi. Quyidagi parabolo-giperbolik tipdagi tenglamani qaraymiz.

$$\begin{cases} L_1(u) = u_{xx} - u_t, & (x,t) \in D_1, \\ L_2(u) = u_{xx} - u_{tt}, & (x,t) \in D_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

Bu yerda $D_1 = \{(x,t): 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$, $D_2 = \{(x,t): -t < x < t+l, -\frac{l}{2} < t < 0\}$.

Shunday $u(x,t)$ va $u(x,t)$ funksiyalar topilsinki, D_i ($i = 1, 2$) sohada mos ravishda (2.1) va (2.2) tenglamalarni va quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$u(0,t) = au(x_0,t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.3)$$

$$u(l,t) = y_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.4)$$

$$u(x,t)|_{t=-x} = y_2(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \quad (2.5)$$

$$u(x,0) = u(x,0), \quad u_t(x,0) = u_t(x,0), \quad 0 < x < l. \quad (2.6)$$

Bu yerda $y(x)$ –ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya.

¹ Стручина Г.М. Задача о сопряжение уравнения – Инженерно физический журнал 1961 IV №11 с. 99-104

Parabolik tipdagi tenglama uchun (2.3) – (2.4) ko'rinishdagi nolokol shartlar bir qator biologik jarayonlarni o'rganishdan kelib chiqqan [21]. Parabolik tipdagi tenglamalarning turli ko'rinishlari uchun (2.3) – (2.4) ko'rinishdagi nolokol shartli chegaraviy masalalar ishlarda qaralgan¹.

Ekstremum prinsipi.

$u(x,t), u(x,t)$ funksiyalarga quyidagich shartlar kiritamiz:

1) $u(x,t), u(x,t) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$;

2) $u(x,t), u(x,t)$ funksiyalar mos ravishda L_1 va L_2 operatorlarga tegishli, shu bilan birga ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega;

3) $u(x,t)$ funksiya uchun D_1 sohada $L_1(u) \leq 0$, $u(x,t)$ funksiya uchun D_2 sohada $L_2(u) \leq 0$ tengsizliklar o'rinli bo'lib,

4) $u(x,y)$ funksiya $x+t=0$ xarakteristikada t bo'yicha monoton kamaymaydigan bo'lsa, u holda $u(x,y)$ va $u(x,y)$ funksiyalar o'zining ekstremumiga $\bar{D}$ yopiq sohaning BB_0 kesmasida erishadi.

Bu yerda $D = D_1 \cup D_2$, $\bar{D} = \bar{D}_1 \cup \bar{D}_2$ (1-chizma).

Teorema 1. Agar $u(x,y)$ va $u(x,y)$ funksiyalar (2.1) - (2.6) masalaning yechimi bo'lib, ekstremum prinsipinig 1) - 4) shartlar bajarilsa, u holda bu funksiyalar o'zining ekstremumiga $\bar{D}$ yopiq sohaning BB_0 kesmasida erishadi.

Isboti. Giperbolik tenglama yechimi o'z ekstremumiga AB kesmada erishishini ko'rsatamiz. Ma'lumki, giperbolik tenglama umumiy yechimi

$$u(x,t) = f_1(x+t) + f_2(x-t) \quad (2.7)$$

ko'rinishda bo'ladi. (2.5) ifodadan foydalanib

$$u(x, -x) = f_1(0) + f_2(2x) = 0,$$

$$f_2(2x) = -f_1(0) = \text{const},$$

$$f_2(z) = \text{const},$$

¹ Сопуев А. О краевых задачах А.В. Бицадзе для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа. Известия АН УЗССР, серия физ.-мат.наук, 1982, №2, с.23-27.

$$u(x,t) = f_1(x+t) + C = f(x+t).$$

Demak, AC da nolga aylanuvchi yechimning ko'rinishi

$$u(x,t) = f(x+t) \quad (2.8)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar D_2 sohaning ichki $P(x_1, t_1)$ nuqtasida ekstremumga erishsa, u holda

$$u(p) = f(p) = C = u(x,t).$$

Demak, ekstremumga AB da erishadi.

Endi parabolik qismga o'tamiz.

Parabolik tenglama yechimi maksimum prinsipiga ko'ra, sohaning ichkarisida ekstremumga erishmaydi.

Faraz qilaylik, (2.1) va (2.2) tenglamaning yechimlari AB da musbat maksimumga erishsin.

(2.6) shartga ko'ra, quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u(x,0) = t(x), \\ u_t(x,0) &= u_t(x,0) = v(x). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Farazga ko'ra, D_1 sohada $t(x_1) > 0, v(x_1) < 0$. Uzluksizlik shartiga ko'ra, D_2 sohada $t(x_1) > 0, v(x_1) < 0$. Bu esa (2.6) ning ikkinchi shartiga ko'ra ziddiyatga kelamiz.

Faraz qilaylik, $(0, t_1)$ nuqtada musbat maksimumga erishsin, bu yerda $0 < t_1 < T$. U holda (2.3) shartga ko'ra, $0 < a < 1$ bo'lgani uchun $u(0, t_1) < u(x_1, t_1)$ tengsizlik o'rinli. Bu esa ekstremum prinsipiga ko'ra ziddiyatga olib keladi. Xuddi shunday $(0, t_1)$ nuqtada minimumga erishmasligini ham ko'rsatamiz.

Demak, ekstremum BB_0 da bo'lishi lozim.

Teorema 1 isbot bo'ldi.

Ekstremum prinsipidan foydalanib, qo'yilgan masala uchun quyidagi aprior baholarni olamiz. Buning uchun quyidagi ko'rinishdagi yordamchi funksiyani kiritamiz:

$$W_i(x,t) = \pm U_i(x,t) + Me^{N(x+2t)} \quad (i = 1, 2) \quad (2.10)$$

Bu yerda $U_1(x,t) = u(x,t)$, $U_2(x,t) = u(x,t)$ - masalaning yechimi, M va N - ixtoriy musbat o'zgarmas sonlar. Bu sonlar quyida aniqlanadi. M va N sonlarni tanlash orqali $W_i(x,t)$ funksiya ekstremum prinsipining hamma shartlarini qanoatlantirishini ko'rsatamiz.

(2.1), (2.2) tenglama, (2.10) tenglik, hamda ekstremum prinsipining 3) shartidan

$$\begin{aligned} W_{1xx} - W_{1t} &= MN(N-2)e^{N(x+2t)} \geq 0 \quad \text{yoki } N \geq 2 \\ W_{2xx} - W_{2t} &= -3MN^2e^{N(x+2t)} \leq 0 \end{aligned}$$

Endi ekstremum prinsipining 4) sharti bajarilishini tekshiramiz. Bu shart bajarilishi uchun $W_{2t}(x,t)|_{x=-t} \geq 0$ tengsizlik o'rinli bo'lishi kerak, shu maqsatda (2.10) tenglikdan

$$\begin{aligned} W_{2t}(x,t)|_{x=-t} &= \pm (u_x(x,t)\Psi(-t)_t + u_t(x,t)\Psi_t) + 2MNe^{N(x+2t)} \geq 0 \quad \forall \Psi \in \Psi_1 \\ &\pm (u_x(x,-x) - u_t(x,-x)) \geq 2MNe^{N(x-2x)} \\ &\pm (u_x(x,-x) - u_t(x,-x)) \frac{e^{Nx}}{2N} \geq M \\ &\pm (u_x(x,-x) - u_t(x,-x)) \frac{e^{Nx}}{2N} \geq \max_{AC} |u_x(x,-x) - u_t(x,-x)| \frac{e^{\frac{Nl}{2}}}{2N} \geq M \\ u_x(x,-x) - u_t(x,-x) &= u_x(x,-x) \end{aligned}$$

(2.5) shartga ko'ra,

$$u_x(x,-x) = y_2'(x) \quad \text{yoki} \quad (2.10')$$

$$M \leq \frac{1}{N} e^{\frac{N}{2}} \max |y_2'(x)|$$

Oxirgi tengsizlikning tenglik shartini olishimiz etarli, ya'ni,

$$M = \frac{1}{N} e^{\frac{N}{2}} \max |y_2'(x)| \quad (2.11)$$

tenglik o'rinli.¹

Demak, $W_i(x, t)$ funksiya ekstremum prinsipining hamma shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun

$$|W_i(x, t)| \leq \max_{BB_0} |W_i(x, t)| \quad (2.12)$$

tengsizlik o'rinli.

Natijada (2.10), (2.11), (2.12) ifodalardan $u(x, t)$ va $u(x, t)$ funksiyalar uchun quyidagi bahoni olamiz, ya'ni:

$$\begin{aligned} & \left| \pm U_i(x, t) + Me^{N(x+2t)} \right| \leq |U_i(x, t)| + \frac{1}{N} e^{\frac{N}{2}} \max |y_2(x)| e^{N(x+2t)} \leq \\ & \leq \max_{BB_0} |U_i(l, t)| + \frac{1}{N} e^{\frac{N}{2}} \max |y_2(x)| e^{N(l+2T)} \leq \\ & |U_i(x, t)| \leq \max |y_1(x)| + \frac{1}{N} e^{\frac{N}{2}} \max |y_2(x)| (e^{N(l+2T)} - e^{N(x+2t)}) \leq \\ & \leq \max |y_1(x)| + \frac{1}{N} e^{\frac{N}{2}} \max |y_2(x)| (e^{N(l+2T)} - e^{-Nl}) \leq \\ & |U_i(x, t)| \leq \max |y_1(x)| + \frac{1}{N} e^{\frac{N}{2}} \frac{e^{2N(l+T)} - 1}{e^{Nl}} \max |y_2(x)| \leq \\ & |U_i(x, t)| \leq \max |y_1(x)| + \frac{1}{N} e^{\frac{N}{2}(l+2l)} (e^{2N(l+T)} - 1) \max |y_2(x)| \end{aligned} \quad (2.13)^2$$

3. Masalaning yechimining yagonaligi va mavjudligi.

Masala yechimining yagonaligi.

Teorema2. Agar $u(x, y)$ va $u(x, y)$ funksiyalar (2.1) - (2.6) masalaning yechimi bo'lib, teorema1 o'rinli bo'lsa, u holda bu masalaning yechimi yagonadir.

Isboti. Agar bir jinsli masala faqat nol yechimga ega bo'lsa, isbot bajarilgan bo'ladi.

¹ Кружков С.Н. Априорная оценка для производной решения параболического уравнения. // Вест. МГУ, Сер.1, 1967, N2, с.41-48.

² Сопуев А. Оценка решения одной задачи Геллерстедта для уравнения смешанного параболического типа. - ДАН УЗССР, 1982, №7, с.3-4.

Faraz qilamiz, $U_{1,i}(x,t)$ va $U_{2,i}(x,t)$, ($i = 1,2$) D sohada berilgan masalaning yechimlari bo'lsin. Bu yerda $U_{1,1}(x,t) = u_1(x,t)$, $U_{2,1}(x,t) = u_2(x,t)$ va $U_{1,2}(x,t) = u_1(x,t)$, $U_{2,2}(x,t) = u_2(x,t)$.

Chiziqli tenglamalarining xossasiga ko'ra, yechimlarning ayirmasi $V_i = U_{i,1}(x,t) - U_{i,2}(x,t)$ ($i = 1,2$) ham berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi.

(2.4) va (2.10') tengliklardan

$$V_1(l,t) = y_1(t) - y_1(t) \text{ IO}$$

$$V_1(l,t) = 0, \quad (3.1)$$

$$V_{2,x}(x,-x) = y_2'(x) - y_2'(x) \text{ IO}$$

$$V_{2,x}(x,-x) = 0. \quad (3.2)$$

Farazga ko'ra, $V_i(x,t)$ funksiya (2.1)-(2.6) masalaning yechimi bo'lgani uchun (2.13) tengsizlikdan

$$|V_i(x,t)| \leq 0 \text{ IO}$$

$$V_i(x,t) = 0 \text{ IO}$$

$$U_{i,1}(x,t) = U_{i,2}(x,t) \quad (3.3)$$

Teorema 2 isbot bo'ldi.

Masala yechimining mavjudligi.

Teorema 3. (2.1) – (2.6) masala uchun yechimi mavjud.

Isboti. (2.9) ifoda uchun mos ravishda D_1 va D_2 sohalarda $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarni topamiz. D_2 sohada (2.2) tenglamaning umumiy yechimi (2.7) dan AC xarakteristikada

$$u_x(x,t) - u_t(x,t) = y_2' \frac{x-t}{2}, \quad (3.4)$$

AB kesmada (2.9) va (2.10) dan

$$u(x,t) - v(x) = y_2' \frac{x-t}{2}, \quad (3.5)$$

(2.1) va (2.9) dan

$$u(x,t) - v(x) = 0 \quad (3.6)$$

tenglamani olamiz. (2.11) va (2.12) esa

$$t \ddot{y}(x) - t \dot{y}(x) = -y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3.7)$$

ekanligi kelib chiqadi. (2.3), (2.4) va (2.9) shartlardan

$$\begin{aligned} \ddot{y}(0) &= at(x_0), \\ \ddot{y}(l) &= y(0). \end{aligned} \quad (3.8)$$

nolokal chegaraviy shartni olamiz.

(2.13) tenglamaning (3.4) shartni qanoatlantiruvchi yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$t(x) = 2(e^x - 1)y(0) - 2e^x \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz + C_1^* + C_2^* e^x, \quad (3.9)$$

bu yerda

$$\begin{aligned} C_1^* &= 2(1 - 2e^l) y_2(0) + 4e^l \int_0^{\frac{l}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz + \\ &+ 4 \frac{(a-1)e^{2l} \int_0^{\frac{l}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz - ae^{x_0+l} \int_0^{\frac{x_0}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz + y_1(0)(1 - ae^l)}{(a-1)e^l - ae^{x_0} + 1}, \\ C_2^* &= 2y_2(0) - 4 \frac{(a-1)e^l \int_0^{\frac{l}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz - ae^{x_0} \int_0^{\frac{x_0}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz - y_1(0)(a-1)}{(a-1)e^l - ae^{x_0} + 1}. \end{aligned}$$

Oddiy differensial tenglamalar kursidan ma'lumki, (3.7) tenglamaning (3.8) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi quyidagicha topiladi:

$$A) \quad t \ddot{y}(x) - t \dot{y}(x) = 0$$

$$t(x) = C_1 + C_2 e^x$$

$$B) \quad \begin{cases} C_1 \ddot{y}(x) + C_2 \dot{y}(x) e^x = 0 \\ C_1 \dot{y}(x) + C_2 \dot{y}(x) (e^x)^{\dot{y}} = -y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{cases} \quad \text{IO}$$

$$C_2 \dot{y}(x) = -e^{-x} y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \text{IO}$$

$$\begin{aligned}
C_2(x) &= - \int_0^x e^{-a} y_2'(z) da = - \int_0^x y_2'(z) dz = - 2 \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-2z} y_2'(z) dz = \\
&= - 2 \left[e^{-2z} y_2(z) \right]_0^{\frac{x}{2}} + 2 \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz = - 2 e^{-x} y_2\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz + C_2^* \\
C_1 y_2(x) &= y_2\left(\frac{x}{2}\right), \quad \text{Ю} \quad C_1(x) = 2 y_2\left(\frac{x}{2}\right) + C_1^*
\end{aligned}$$

Demak,

$$\begin{aligned}
t(x) &= 2 y_2\left(\frac{x}{2}\right) + 2 y_2(0) + C_1^* + C_2^* - 2 e^{-x} y_2\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz e^x = \\
&= \cancel{2 y_2\left(\frac{x}{2}\right)} - \underline{2 y_2(0) + C_1^* + C_2^* e^x} - \cancel{2 y_2\left(\frac{x}{2}\right)} + \underline{2 y_2(0) e^x} - 4 e^x \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz \\
t(x) &= 2(e^x - 1) y_2(0) - 4 e^x \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz + C_1^* + C_2^* e^x \\
t(0) &= C_1^* + C_2^* \\
t(x_0) &= 2(e^{x_0} - 1) y_2(0) - 4 e^{x_0} \int_0^{\frac{x_0}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz + C_1^* + C_2^* e^{x_0} \\
t(l) &= 2(e^l - 1) y_2(0) - 4 e^l \int_0^{\frac{l}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz + C_1^* + C_2^* e^l = y_1(0)
\end{aligned}$$

Yuqoridagilar, hamda (3.8) shartdan:

$$\begin{aligned}
C_1^* + C_2^* &= a \left[2(e^{x_0} - 1) y_2(0) - 4 e^{x_0} \int_0^{\frac{x_0}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz + C_1^* + C_2^* e^{x_0} \right] \\
2(e^l - 1) y_2(0) &- 4 e^l \int_0^{\frac{l}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz + C_1^* + C_2^* e^l = y_1(0)
\end{aligned}$$

$$y_1(0) = 2(e^l - 1)y_2(0) - 4e^l \int_0^{\frac{l}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz + C_1^* + C_2^* e^l$$

$$0 = a 2(e^{x_0} - 1)y_2(0) - 4a e^{x_0} \int_0^{\frac{x_0}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz + (a - 1)C_1^* + (a e^{x_0} - 1)C_2^*$$

Ы

$$y_1(0) = 2(e^l - 1)y_2(0) - 4e^l \int_0^{\frac{l}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz + C_1^* + C_2^* e^l$$

$$y_1(0) = 2y_2(0)(e^l - 1) - \frac{a(e^{x_0} - 1)}{(a - 1)} 4e^l \int_0^{\frac{l}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz - \frac{a e^{x_0}}{(a - 1)} \int_0^{\frac{x_0}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz +$$

$$+ C_2^* e^l - \frac{(a e^{x_0} - 1)}{(a - 1)}$$

Ы

$$y_1(0) = 2(e^l - 1)y_2(0) - 4e^l \int_0^{\frac{l}{2}} e^{-2z} y_1(z) dz + C_1^* + C_2^* e^l$$

$$y_1(0) = 2y_2(0) \frac{(a - 1)e^l - a e^{x_0} + 1}{a - 1} - 4 \frac{(a - 1)e^l \int_0^{\frac{l}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz - a e^{x_0} \int_0^{\frac{x_0}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz}{a - 1} +$$

$$+ C_2^* \frac{(a - 1)e^l - a e^{x_0} + 1}{a - 1}$$

Ы

$$y_1(0) = 2(e^l - 1)y_2(0) - 4e^l \int_0^{\frac{l}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz + C_1^* + C_2^* e^l$$

$$C_2^* = 2y_2(0) \frac{(a - 1)e^l - a e^{x_0} + 1}{(a - 1)e^l - a e^{x_0} + 1} - 4 \frac{(a - 1)e^l \int_0^{\frac{l}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz - a e^{x_0} \int_0^{\frac{x_0}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz}{(a - 1)e^l - a e^{x_0} + 1} -$$

$$- \frac{y_1(0)(a - 1)}{(a - 1)e^l - a e^{x_0} + 1}$$

Ы

$$y_1(0) = 2(e^l - 1)y_2(0) - 4e^l \int_0^{\frac{l}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz + C_1^* + C_2^* e^l$$

$$C_2^* = 2y_2(0) - 4 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(a-1)e^l \int_0^{\frac{x_0}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz - ae^{x_0} \int_0^{\frac{x_0}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz - y_1(0)(a-1)}{(a-1)e^l - ae^{x_0} + 1} dz$$

$$C_2^* = 2y_2(0) - 4 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(a-1)e^l \int_0^{\frac{x_0}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz - ae^{x_0} \int_0^{\frac{x_0}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz - y_1(0)(a-1)}{(a-1)e^l - ae^{x_0} + 1} dz$$

$$y_1(0) = 2(e^l - 1)y_2(0) - 4e^l \int_0^{\frac{l}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz + C_1^* + e^l 2y_2(0) -$$

$$4 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(a-1)e^{2l} \int_0^{\frac{x_0}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz - ae^{x_0+l} \int_0^{\frac{x_0}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz - y_1(0)(a-1)e^l}{(a-1)e^l - ae^{x_0} + 1} dz$$

$$C_2^* = 2y_2(0) - 4 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(a-1)e^l \int_0^{\frac{x_0}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz - ae^{x_0} \int_0^{\frac{x_0}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz - y_1(0)(a-1)}{(a-1)e^l - ae^{x_0} + 1} dz$$

$$C_1^* = 2(1 - 2e^l)y_2(0) + 4e^l \int_0^{\frac{l}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz +$$

$$4 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(a-1)e^{2l} \int_0^{\frac{x_0}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz - ae^{x_0+l} \int_0^{\frac{x_0}{2}} e^{-2z} y_2(z) dz + y_1(0)(1 - ae^l)}{(a-1)e^l - ae^{x_0} + 1} dz.$$

Natijada (3.9) tenglik to'liq isbotlandi.

D_2 sohada (2.2) tenglamani (2.5) chegaraviy va (2.6) ulash shartlar, hamda (2.9) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi

$$u(x, y) = t(x + y) + y_2\left(\frac{x-y}{2}\right) + y_2\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Isboti D_2 sohada (2.2) tenglamani (2.5) va (2.9) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi Dalamber formulasiga ko'ra ($y < 0$ hisobga olgan holda), ya'ni,

$$u(x, y) = \frac{t(x+y) + t(x-y)}{2} - \int_{x+y}^{x-y} v(a) da$$

$$u(x, y) = \frac{t(x+y) + t(x-y)}{2} - \frac{1}{2} \int_{x+y}^{x-y} v(a) da - y \int_{\frac{x+y}{2}}^{\frac{x-y}{2}} v(a) da$$

$$u(x, y) = t(x+y) + y_2 \left(\frac{x-y}{2} \right) - y_2 \left(\frac{x+y}{2} \right)$$

$$\text{Haqiqatdan } u(x, y)|_{y=-x} = t(0) + y(x) - y(0) = y_2(x)$$

(3.1) tenglama uchun D_1 sohada berilgan masala shartlarini qanoatlantiruvchi yechimini topish uchun birinchi chegaraviy masalaning umumiy yechimidan foydalanamiz.

$$u(x, t) = \int_0^t G_\xi(x, t; 0, \eta) \psi_1(\eta) d\eta - \int_0^t G_\xi(x, t; l, \eta) \psi_2(\eta) d\eta + \int_0^l G(x, t; \xi, 0) \varphi(\xi) d\xi \quad (3.10)$$

Bu yerda $G(x, t; \xi, \eta)$ funksiya (3.1) tenglamaning fundamental yechimi:

$$G(x, t; \xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\eta)}} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}} \quad (3.11)$$

$\psi(t) = u(0, t)$, $\psi_2(t) = u(l, t)$ noma'lum funksiyalar. (3.4) chegaraviy va boshlang'ich shartlarda berilgan funksiyalar.

(3.10) yechimni (3.3) shartga bo'ysindirsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\psi(t) = \alpha \int_0^t G_\xi(x_0, t; 0, \eta) \psi(\eta) d\eta - \alpha \int_0^t G_\xi(x_0, t; l, \eta) \psi(\eta) d\eta + \alpha \int_0^l G(x_0, t; \xi, 0) \varphi(\xi) d\xi \quad (3.12)$$

Demak, yuqoridagi tenglama Volterra tipidagi tenglamaga keldi. Integral tenglamalar nazariyasiga asosan bu tenglamaning yechimi mavjud va yagonadir.

III bob bo'yicha xulosa

Dissertatsiyaning so'ngi, uchinchi bobi o'zgarish chizig'i xarakteristika bo'lgan parabolo-giperbolik tenglamalar uchun chegaraviy masalalar deb nomlanadi. Bu bobda asosiy masalani qarashdan oldin integral tenglamalar nazariyasining asosiy tushunchalari keltirib o'tildi. Bundan maqsad, asosiy masala yechimining mavjudligini isbotlash integral tenglamalar nazariyasi teoremlariga asoslanadi.

Dissertatsiyadagi asosiy masala yechimining mavjudligini isbotlashda giperbolik tenglama yechimining umumiy ko'rinishidan va Grin funksiyasi yordamida Volterra tipidagi integral tenglamalar sistemasiga keltirildi. Hosil qilingan sistemaning yechimi mavjudligi integral tenglamalar nazariyasiga asosan isbotlandi. Yechimning yagonaligi esa parabolik va giperbolik tenglamalar uchun ekstremum prinsiplaridan foydalanildi.

Mazkur bobda tadqiq qilingan yangi masala va uning yechimidan ba'zi biologik jarayonlarni o'rganishda model sifatida hamda shunga o'xshash masalalar yechimlarini isbotlashda manba sifatida foydalanish mumkin.

Xulosa

Ushbu tadqiqot ishida matematik-fizikani masalalari o'rganildi. Tadqiqot mavzusini o'rganish jarayonida bu sohaning asosiy tushunchalarini o'rganishdan boshlandi. Ishning ikkinchi qismida asosiy tushuncha va birinchi bo'limda o'rganilgan masalalarni yechish metodlaridan foydalangan holda aralash tipdagi tenglamalar uchun masalalarni qo'yilishi va yechimlarini mavjudligi, yagonaligi teoremlarni isbotlashni, asosiy bobida esa integral tenglamalar haqida asosiy tushuncha, ta'riflar va teoremlari o'rganildi, asosiy masala qo'yildi, uning yechimining yagonaligi va mavjudligi isbotlandi.

Ishning oxirgi bobida ko'rilgan masala tadqiqotning ilmiy yangilini tashkil etib, u yerda o'zgarish chizig'i xarakteristika bo'lgan parabola- giperbolik tipdagi tenglama uchun bitta nolokal shartli chegaraviy masala qo'yilgan bo'lib, masala yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan. Giperbolik va parabolic sohalarida yechimning yagonaligini ko'rsatishda ekstrimum prensipidan, masalayechimining mavjudligini isbotlashda esa Potensiallar usuli hamda Grin funksiyalaridan foydalanildi.

Masala natijasi ikkinchi tur Volterra integral tenglamasiga keltirildi. Bizga Integral tenglamalar kursidan ma'lumki, ikkinchi tur Volterra integral tenglamasi bir qiymatli yechimga ega.

Ushbu masalani matematik model sifatida bir qancha fizik, biologic jarayonlarni o'rganishda, balki, jarayonning ba'zi xossa-xususiytlarini aniqlashda foydalanish mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

- I. *O'zbekiston Respublikasi qonunlari.*
 1. O'zbekiston Respublikasi "Magistratura to'g'risidagi nizomi" Toshkent. 29 oktabr 2012 yil ta'sdiqlangan.
- II. *O'zbekiston Respublikasi Prezidenti farmonlari va qarorlari, Vazirlar Mahkamasining qarorlari.*
 2. «Oliy malakali ilmiy va ilmiy-pedagog kadrlar tayyorlash va attestatsiyadan o'tkazish tizimini yanada takomillashtirish to'g'risida» (O'zbekiston Respublikasi qonun hujjatlari to'plami, 2013 y., 1-son, 5-modda).
- III. *O'zbekiston Respublikasi Prezidenti I.AKarimovning asarlari.*
 3. Islom Karimov, Yuksak ma'naviyat - yengilmas kuch. Toshkent "ma'naviyat" 2008.
- IV. *Asosiy adabiyotlar.*
 4. Тихонов А.Н, Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. Наука. 1977г.
 5. Salohiddinov M. Matematik fizika tenglamalari. "O'zbekiston" nashriyoti. T. 2002 y.
 6. Бизадзе А.В. Уравнения математической физики. М. Наука. 1976г. 291с.
 7. Ильин А.М, Калашников А.С, Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа. УМН. 1962 г.
 8. Гельфанд И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнения – УМН, т. IV, вып. 3 (87), 1959 с.3-19
 9. Стручина Г.М. Задача о сопряжении уравнения – Инженерно физический журнал 1961 IV №11 с. 99-104
 10. Гайдук С.И. Переменные метода контурного интеграла к решению одной задачи на сопряжение уравнение параболического и

- гиперболического типов. – деф-ние ур-ние, 1965 т. 1 №10 с.1366-1382
- 11.Гайдук С.И. Иванов А.В. Обовной задачи на сопряжение уравнение параболического и гиперболического типов. – ДАН ВССР 1964 №9 с. 560-563
 - 12.Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Минск, 1974.
 - 13.Михлин С.Г. Курс математической физики. М. "Наука", 1968.
 - 14.Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: "Наука". 1982.
 - 15.Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. -IV.: Физматгиз, 1957.
 - 16.Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М. Физматгиз, 1961.
 - 17.Соболев С.Л. Уравнения математической физики.М. Гостехиздат, 1966.
 - 18.Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: "Наука", 1974.
 - 19.Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М.: "Наука", 1975.
 - 20.Ловитт У.В. Линейные интегральные уравнения. М., 1957.
 - 21.Бицадзе А.В., Калинин Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: "Наука", 1977.
 22. Ладженская О.А. Об уравнения смешанного типа. Вестник ИЛГУ серия мат.мех. и АСТР., 1965 №4 с. 38-46
 - 23.Золина Л.А. “ О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболического типа ” //вычислительной математики и математической физики. ЖЛМ ЖВМ и МФ, 1966-1001
 - 24.ДжураевТ.Д., СопуевА., МамажановМ. Краевые задачи для уравнений параболо–гиперболического типа. Ташкент:Фан, 1986.

25. Жўраев Т. Ж, Рахмонов У, Об одной краевой задаче для уравнения смешанного-составного типов. //Известия АН УЗССР, физ -мат .наук .1981. .№6, с 8-14
 26. Жўраев Т. Ж, Эгамбердиев У, О некоторых краевых задачах для смешанного парабола-гиперболического уравнения. Известия АН УЗССР, физ -мат .наук .1984. .№2, с 15-20
 27. Елеев В.А. Аналог задачи Трикоми для смешанных парабола - гиперболических уравнений с нехарактерной линией изминия типа. Дифференциальные уравнения, 1978, Т XIII, .№1, с 56-63.
 28. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том I, II. Издательства «Наука» Москва 1969 г.
 29. Елеев В.А. О некоторых краевых задачах для одного уравнения смешанного парабола –гиперболического типа. Дифференциальные уравнения, 1978, Т XIII, .№1, с 22-29
 30. Нахушев А.М. К теории линейных краевых задач для уравнения второго порядка смешанного гипербола-параболического типа. - Дифференциальные уравнения, 1978, т. XIY, № 1, с. 66-73.
- V. *Qo'shimcha adabiyotlar.*
31. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М. Выс.шк. 1995 301 с.
 32. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. М.: Изд. МГУ. 1984, 136 с.
 33. Salohiddinov M. Integral tenglamar. "Yangiyo'l poligraph servise" Toshkent. 2007y.
 34. Сопуев А. О краевых задачах А.В. Бицадзе для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа. Известия АН УЗССР, серия физ.- мат. наук, 1982, №2, с. 23-27.

35. Сопуев А. Оценка решения одной задачи Геллерстедта для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа. - ДАН УЗССР, 1982, №7, с.3-4.
 36. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.Мир, 1968, 427 с.
 37. Камынин Л.И. Метод тепловых потенциалов для параболического уравнения с разрывными коэффициентами. СМЖ, 1963, Т.4, №5, с.1071-1105.
 38. Кружков С.Н. О некоторых задачах с неизвестной границей для уравнения теплопроводности.// ПММ, 1967, т.31, вып.6, с. 1009-1020.
 39. Кружков С.Н. Априорная оценка для производной решения параболического уравнения.// Вест. МГУ, Сер.1, 1967, N2, с.41-48.
 40. Радкевич Е.И, Меликулов А.С. Задача со свободной границей. Ташкент: Фан 1991, 184 с.
 41. Тахиров Ж.О. Нелокальная краевая задача для квазилинейного параболического уравнения // УзМЖ, 1998, N3, с.57-62.
 42. М.Салохитдинов, Б.Исломов Математик физика тенгламалари фанидан масалалар тўплами. тошкент “MUMTOZ SO’Z” 2010.
 43. Собиров Р Математикадан “русча-ўзбекча луғат” Тошкент 1994.
- VI. *Davriy nashrlar, statistik to'plamlar va hisobotlar.*
44. Boytillayev D., Rizayev R. Aralash parabola-giperbolik tipdagi tenglama uchun ichki nolokal shartli masala // Oliy va o'rta maxsus, kasb-hunar ta'limida aniq va tabiiy fanlarning o'zaro aloqadorlik va uzviyligi masalalari. Qarshi. 2014 y.//

45. To'rayev R., Rizayev R. Aralash parabola-giperbolik tipdagi tenglama uchun integral shartli chegaraviy masala // Zamonaviy fizika va astronomiya yutuqlari: muammolar va yechimlar. T.2013 y.//

VII. *Internet saytlari.*

46. www.ziyonet.uz
47. www.math.ru
48. www.google.ru
49. www.liberary.ru