

**ÓZBEKISTAN RESPUBLIKASÍ INFORMACIYLÍQ
TEXNOLOGIYALARÍ HÁM KOMMUNIKACIYALARÍN
RAWAJLANDÍRÍW MINISTRLIGI**

**MUXAMMED AL-XOREZMIY ATÍNDAĞÍ TASHKENT
INFORMACIYALÍQ TEXNOLOGIYLARÍ UNIVERSITETI NÓKIS
FILIALÍ**

Informaciyalıq texnologiyaları kafedrası

**Kompyuter injiniringi (Kompyuter injiniringi)
bağdarı**

**Jaqlawğa ruxsat
Kafedra bashlıǵı
Aytmuratov B. Sh.
2017 j. «___»_____**

**«Sızıqlı emes programmalastırıwdıń ámeliy máselelerin kompyuterde
modellestiriw» temasındaǵı**

PITKERIW QÁNIYGELIK JUMÍSÍ

Pitkeriwshi: _____ Nietbaeva B.Q.
Ilimiy basshı: _____ prof.Uteuliev N.U.

MAZMUNÍ

I-Bap. Kompyuterlik modellestiriw haqqında.....	6
1.1 Kompyuterlik modellestiriwdiń etapları	6
1.2 Matematikalıq model túsiniǵı hám modellestiriw principi.....	8
II-Bap. Sızıqlı emes programmalaştırıw hám olardı sheshiw algoritmleri.....	9
2.1 Sızıqlı emes programmalaştırıw máselesi	9
2.2 Sızıqlı emes programmalaştırıw máselesin sheshiwdiń usılları.....	18
III – Bap. Sızıqlı emes programmalaştırıwdiń ámeliy máseleleri hám sheshiw algoritmleri.....	25
3.1 Sızıqlı emes programmalaştırıwdiń ámeliy máselelerin sheshiwge grafikalıq usıldı qollanıw.....	25
3.2 Sızıqlı emes programmalaştırıw anıq máselelerin sheshiwge Frank-Vulf, Errou –Gurvic usıllarınıń qollanıwı.....	27
Juwmaqlaw	39
Paydalánǵan ádebiyatlar	40
Qosımsha	Ошибка! Закладка не определена.

Kirisiw

Sızıqlı emes programmalastırıw, sızıqlı emes teńlemelerdiń hám teńsizliklerdiń sisteması menen anıqlanǵan oblastta kóp argumentli sızıqlı emes funkciyanıń ekstremumın izertlew hám tabıw usılları haqqındaǵı ilim boladı. Basqasha aytqanda belgisizlerine sızıqlı emes sheklewler qoyılǵanda, sızıqlı emes funkciyanıń ekstremumın tabıw sızıqlı emes programmalastırıwdıń pánin quraydı. Sızıqlı emes programmalastırıw, kóp ózgeriwshili funkciyalardıń shártli ekstremumın tabıwdıń usılların úyretetuǵın hám ámeliy matematikanıń matematikalıq programmalastırıw dep atalatuǵın bóliminiń bir tarawı boladı.

Kóplegen ekonomikalıq processlerdiń matematikalıq modellerin jasaǵanda máseleniń optimal sheshimge iye bolıwına hám sheklewlerine tásir etetuǵın kórsetkishlerdi hám faktorlardı tolıǵıraq hám dálirek esapqa alıw zárurlıǵı kelip shıǵadı. Ádette, bul jaǵday sızıqlı emes baylanıslarǵa, yaǵniy sızıqlı emes matematikalıq modellerdi jasawǵa alıp keledi.

Sızıqlı matematikalıq modellerdi sanlı analizlew ushın oǵada kóp matematikalıq usıllar islep shıǵılǵan, biraq sızıqlı emes matematikalıq modellerdi analizlew mumkinshilikleri tiykarınan esaplaw matematikalıq usılları menen baylanıslı. Sistemaniń sızıqlı emes matematikalıq modelin izertlew maqsetinde analitikalıq usıllardı qollanıw ushın onı ádette sızıqlandıradı, yaǵniy, parametrler arasındaǵı sızıqlı emes qatnaslardı anıq sızıqlı qatnaqlarǵa ózgerterdi hám sistemaniń sızıqlandırılǵan dep atalatuǵın matematikalıq modelin aladı, sızıqlandıradı qosımsha qátelerdi alıp kiriwi mumkin bolǵanlıqtan, sızıqlandıırıw modeldi analizlewdiń nátiyjelerin belgili dárejede abaylap qabıl etiw kerek. Sebebi, matematikalıq modeldi sızıqlandıırıw onıń adekvatlıǵınıń joǵalıwına alıp keliwi mumkin. Matematikalıq modelde sızıqlı emes effektlerdi esapqa alıw oǵada ulken áhmiyetke iye hám házirgi kúnniń aktual máselelerdiń biri bolıp esaplanadı. Kompyuterlik modellestiriw metodologiya sıpatında ózi menen matematikanı, fizikanı, biologiyanı hám basqa ilimiy pánlerdi albastırmaydı, olardıń ornın baspaydı, al sintezlewshi roldi atqaradı. Úshlikti dúziw hám qollanıwdı hár qıylı usıllarǵa hám jantasıwǵa súyenbesten iske asırıw múmkin emes – sızıqlı emes

modellerinen sapalı emes analizinen baslap házirgi zamannıń programmalıq tillerine shekem.

Kompyuterlik modellestiriw – quramalı sistemanı onıń kompyuterlik modelin paydalanıw tiykarında analizlew yamasa sintezlew máselesin sheshiw usılı. Kompyuterlik modellestiriwdiń mánisi bar bolǵan model boyınsha sanlı hám sapalı nátiyjelerdi alıwdan ibarat. Analizlew nátiyjesinde alınatuǵın sapalı juwmaqlar quramalı sistemanıń burın belgisiz bolǵan qásiyetlerin tabıwǵa múmkinshilik beredi: onıń strukturasın, rawajlanıw dinamikasını, turaqlılıǵın, pútinligin h.t.b. Sanlı juwmaqlar tiykarınan geypara keleshekte kútiletuǵın prognoz harakterine iye yamasa ótkendi túsindiretuǵın ózgeriwshilerdiń mánislerinen ibarat bolıp, olar sistemanı harakterleydi.

Kompyuterlik modellestiriw tómendegilerdi izertleydi: firma yamasa banktiń ekonomikalıq iskerligin; firma yamasa bankiń ekonomikalıq iskerligin; óndiris kárxanasın; informaciyalıq esaplaw tarmaǵın; texnologiyalıq processti; qálegen real obekt yamasa processti, mısalı infilaciya processin, hám ulıwma aytqanda – qálegen quramalı sistemanı izertleydi. Kompyuterlik modellestiriwdiń maqsetleri hár qıylı bolıwı múmkin, biraq, jiyi jaǵdaylarda modellestiriw sistemalı oraylıq procedurası boladı.

Biraq, modellestiriwdi injinerdiń is instrumenti sıpatında úyreniw, onıń múmkinshiliklerin iyelep alıw ushın kompyuterde sistemalardıń funkciyaların orınlaw processlerin modellestiriw texnologiyaları menen tolıq úyreniw kerek.

Solay etip usınılıp atırǵan pitkeriw qánigelik jumısınıń maqseti sıızqlı emes programmalastırıwdıń ámeliy máselelerin kompyuterde modellestiriw hám izertlewden ibarat.

Pitkeriw qánigelik jumısı kirisiw bólimi, úsh baptan, juwmaqlaw bóliminen, qosımsha hám paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen turadı.

Pitkeriw qánigelik jumısınıń kirisiw bóliminde kompyuterlik modellestiriw háqqında hám onıń qollanıwı, sıızqlı emes programmalastırıwdıń ámeliy

máselelerin kompyuterde modellestiriw, pitkeriw qánigelik jumısınıń quramı, temanıń aktuallıǵı keltirip ótıledi.

Bakalavr jumısınıń I –babında kompyuterlik modellestiriw haqqında haqqında sóz etiledi.

Bakalavr jumısınıń II -babında sızıqlı emes programmalaştırıw máselelerin sheshiw algoritmleri úyreniledi.

Bakalavr jumısınıń III - sızıqlı emes programmalaştırıwdıń shártli hám shártsiz ekstremumın tabıw máseleleriniń matematikalıq modelleri hám sheshiw usılları koriledi.

Bakalavr jumısınıń juwmaqlaw bóliminde alıńǵan nátiyjeler kórsetiledi.

I-Bap. Kompyuterlik modellestiriw haqqında

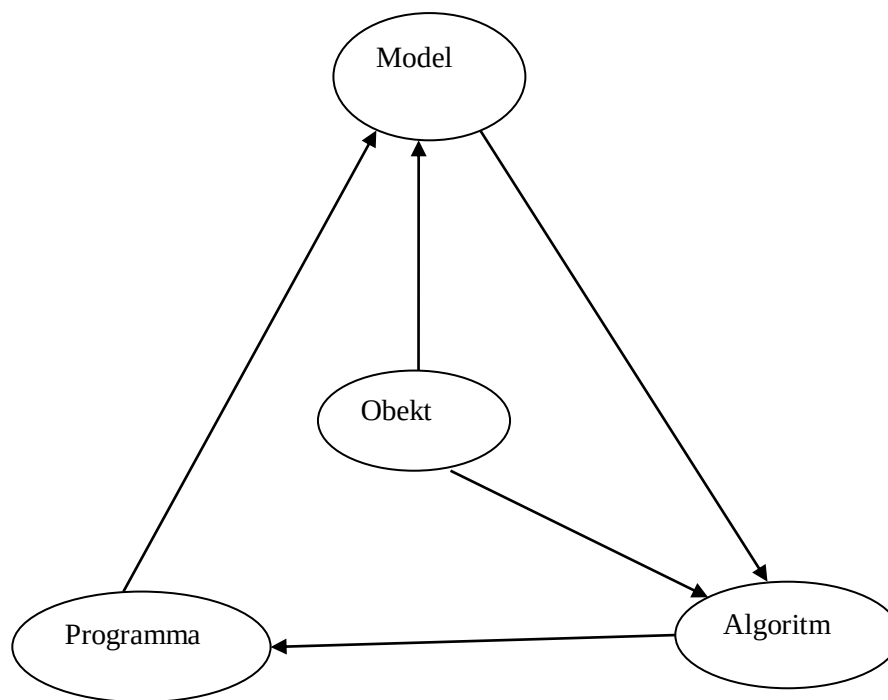
1.1 Kompyuterlik modellestiriwdiń etaplari

Kompyuterlik modellestiriw ushın rawajlanıwdıń úsh basqıshın atap ótiwge boladı. Birinshi basqısh anıq pánlerdiń payda bolıwı menen baylanıslı. Sonlıqtan esaplawdıń geypara usılları Nyuton, Eyler sıyaqlı ulla ilimpazlardıń atı menen atalǵan, al “algoritm” orta ásirlerde jasaǵan ilimpaz ulla jerlesimiz, alım Al – Xorezmiy atınan kelip shıqqan. Ekinshi basqısh XX – ásirdiń 50 – jıllarınan baslanadı, sol dáwirde házirgi kóz – qarastan ápiwayı bolıp kórinetuǵın kompyuterler payda boldı, olar ilimpazlardı kólemi júdá úlken bolǵan jumıslardan qutqardı. Házir jámiyet rawajlanıwınıń úshinshi basqıshına jetip keldi, bunda modellestiriw informaciyalıq jámiyet strukturasınıń ayırılmas bólegi boladı.

Qanday – da bir obekttiń Kompyuterlik modellestiriliwi is – háreketler rejesin payda etedi, onı úsh etapqa bóliwge boladı: model – algoritm – programma(1.1 – súwret).

Birinshi etapta obekttiń “ekvivalenti” dúziledi. Sol “ekvivalent” usı izertlew ushın áhmiyetli bolǵan obekttiń qásiyetlerin matematikalıq formada kórsetip beredi: sol obekttiń boysınatuǵın nızamların, onıń bóleklerine tán bolǵan óz – ara baylanıslardı h.t.b. Keyin matematikalıq model teoriyalıq usıllar menen izertlenedi, ol obekt haqqında aldın – ala bilimge iye bolıw múmkinshiligini beredi.

Ekinshi etap – modeldi kompyuterde iske asırıw ushın algoritm islep shıǵıw. Model sanlı usıllardı qollanıw ushın qolaylı bolǵan formaǵa keltiriledi, esaplaw hám logikalıq operaciýalar izbe – iz anıqlanadı, olardı orınlaw berilgen anıqlıqtaǵı sanlardı tabıw ushın kerek. Esaplaw algoritmeleri modeldiń tiykargı qásiyetlerin buzbay, durıs kórsetiwi kerek hám, demek, berilgen obekttiń de qásiyetlerin tap sonday etip kórsetiwi, olar únemli bolıwı kerekjáne sheshilip atırǵan máselelerdiń hám paydalanıp atırǵan kompyuterlerdiń ózgesheliklerine iykemli bolıwı kerek.



1.1– súwret – Kompyuterlik modellestiriwdiń texnologiyası

Úshinshi etapta modeldi hám algoritmdi kompyuterge túsinkli bolǵan tilge “awdarıwshı” programmalar dúziledi. Olarǵa da únemlilik hám áhmiyetlilik talapları qoyıladı. Olardı izertlenip atırǵan obektтіń kompyuterde sınap kóriw ushın jaramlı bolǵan “elektron” ekvivalent dep atawǵa boladı.

“Model – algoritm – programma” úshligin jaratıp, izertlewshi universal, qolaylı hám arzan instrumentke iye boladı, tol “tájiriybe” esaplaw eksperimentlerinde ele de jaqsılanadı hám tekseriledi. Úshliktiń dáslepki obektke adekvatlıǵı(jeterli dárejede sáykeslik) alıngannan soń model menen hár qıylı “sınaqlar” ótkeriledi, olar obektтіń barlıq talar etiletuǵın qásiyetlerin ǵám sıpatlamaların beredi. Modellestiriw processi úshliktimń barlıq bóleklerin jaqsılap hám anıqlap baratuǵını áhmiyetli.

Biliwdiń bul usılı ózinde hám teoriya, hám eksperimenttiń artıqmashılıǵın toplaydı. Haqıyqatında da, obektтіń ózi menen emes, al kompyuterlik model menen jumıs islew, salıstırmalı tez waqıtta, úlken shıǵınǵa ushıramastan, onıń qásiyetlerin hám qálegen múmkin bolǵan jaǵdaylardaǵı háreketin úyreniwge múmkinshilik beredi. Bul teoriyanıń artıqmashılıǵı bolıp tabıladı. Sonıń menen birge obektlerdiń

modelleri menen esaplaw eksperimentlerin júrgiziw, esaplaw usıllarınıń hám kompyuterlerdiń quwaina súyengen halda, obektlerdi tolıq hám tereń úyreniwge imkaniyat beredi, al bul nársege teoriyalıq jandasıw menen erisip bolmaydı. Usı tárepi eksperimenttiń artıqmashılıǵı bolıp tabıladı.

Biraq informaciyalıq jámiyettiń mashqalaların sheshkende tek ǵana kompyuterdiń quwatlılıǵına isene beriwge bolmaydı. Matematikalıq modellestiriw úshligin jaqsılap barıw kerek.

1.2 Matematikalıq model túsiniǵı hám modellestiriw principleri

Matematikalıq model túsiniǵı qatań formalastırılǵan anıqlamaǵa iye emes, biraq onıń matematikalıq qollanıw menen baylanıslı konkret mánisi bar. Ilimiy pánlerdiń kópshiligin durısın aytqada tártiplestirilgen matematikalıq modeller kópligi bolıp tabıladı.

Matematikalıq modelldiń adekvatlıǵı, ádette, úlken ilimiy jetiskenlik boladı. Ol túyrenilip atırǵan obekttiń detallı izertleniwine múmkinshilik beredi hám onıń hár qıylı jaǵdaydaǵı is – háreketine isenimli prognoz beredi. Biraq matematikalıq model adekvat bolıwı ushın jiyi jaǵdaylarda onı quramalı qılıp dúziw kerek boladı, bul onı paydalanıwda qıyınshılıqlar tuwdıradı. Usınday jaǵdayda matematikanıń házirgi zamandaǵı texnikası járdemge keledi, ol jeterli dárejede sanlı analizlew múmkinshiligine iye bolǵan matematikalıq modeller klassın keńeytedi.

Matematikalıq modellerdiń bunday ulıwmalıǵınıń hám universallıǵınıń sebebi, matematikada abstrakt tiykargı túsinikler qollanıladı, olar az sanlı bolsa da, mazmunı jaǵınan oǵada keń túsinikler. Bul ilimniń hár qıylı taraıwan alınǵan konkret faktlerdi sol túsiniklerdiń kórinisi hám olardıń arasındaqı qatnasıqlardıń kórinisi sıpatında qarawǵa múmkinshilik beredi.

Obekttiń úyrenilip atırǵan geypara qásiyetlerin súwretleytuǵın hám matematikalıq simvollar menen belgilewler sisteması járdeminde berilgen túsinikler hám qatnasıqlar kópligi sol obekttiń matematikalıq modeli dep ataladı.

II-Bap. Sızıqlı emes programmalaştırıw hám olardı sheshiw algoritmleri

2.1 Sızıqlı emes programmalaştırıw máselesi

Sızıqlı emes programmalaştırıw máselesiniń ulıwma jaǵdayda qoyılıwı hám onıń matematikalıq modeli tomendegi kóriniste boladı.

Tómendegi sheklewler shártlerin

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, & (i = \overline{1, k}) \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, & (i = \overline{k+1, m}) \end{cases} \quad (2.1)$$

qanaatlantırılshı sonday $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ noqatın tabıwdı talap qılınadı, nátiyjede maqset funkciyası

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.2)$$

máseleniń ekonomikalıq tárepinen qoyılıwına qarap, ozınıń eń kishi (eń úlken) mánisine erissin. Bul jerde $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ hám

$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qandayda bir funkciyalar, $b_i (i = \overline{1, m})$ berilgen sanlar bolıp tabıladı.

(2.1), (2.2) máselesin sheshiw processinde tabılatuǵın $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ noqat ushın maqset funkciya (2.1) dıń eń kishi mánisin tabıwdı talap etilse, $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \leq f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ keri jaǵdayda bolsa $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \geq f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ shártleriniń orınlanıwı zárúr bolıp tabıladı.

Eger (2.1)-(2.2) máselede f hám g_i funkciyalar sızıqlı funkciyalardan ibarat bolsa, sızıqlı programmalaştırıw máselesinen ibarat boladı.

3-§. SIZIQLI EMES PROGRAMMALASTIRIW máselesiniń ekonomikalıq mánisi

Kóplegen ilimiy–texnikalıq hám ekonomikalıq máselelerdiń matematikalıq modelleri SIZIQLI EMES PROGRAMMALASTIRIW máselelerine keltiriledi. Sonlıqtan SIZIQLI EMES PROGRAMMALASTIRIW máseleleriniń ekonomikalıq mánisleri kóp usıllar menen tu’sindiriliwi mu’mkin. Usi sebepli bul

paragrafta SIZIQLI EMES PROGRAMMALASTIRIW máselesine alıp keletuǵın geypara ekonomikalıq máselelerdi qaraymız.

1. Óndiristi hám awısıq ónimlerdi jobalaw máselesi.

Bul másele ni sızıqlı emes programmalastırıw máselesiniń ekonomikalıq mánisin tu'sindiriw ushın alıwǵa boladı. Óytkeni, ol sızıqlı programmalastırıw máselesiniń ekonomikalıq mánisin tábiyǵıy tu'rde ulıwmalastırıw bolıp tabıladi. Kórsetilgen másele tómendegishe qoyıladi.

Kárxanam' bir dáwirde ónim islep shıǵarıwǵa jumsalǵan shıǵınlarınıń ulıwma muǵdarı eń az (minimum) bolǵanday hám ónimge bolǵan talap tolıq qanaatlandırılǵanday etip, onıń S dáwir ushın ónim islep shıǵarıw jobasın jasaw talap etiledi.

Berilgen másele niń matematikalıq modelin jasaw ushın tómendegi belgilewlerdi kirgizemiz:

L_s -s — dáwirde kárxanada jumis isleytuǵın jumisshilardıń sanı;

$u_s = L_s - L_{s-1} - (s - 1)$ — dáwirden s — dáwirge ótkende jumisshi ku'shine bolǵan talaptıń ózgeriwı; J_s — s — dáwirdegi awısıq ónimniń muǵdarı.

Sonda jumsalatuǵın shıǵınlardıń muǵdarı jumisshilardıń sanınıń turaqlı bolmawı menen, yaǵnıy u_s tiń ($s = 1, 2, 5$) mánisleri menen hám hár bir s dáwir ushın jobalanǵan awısıq ónimniń J_s muǵdarı menen anıqlanadı.

Kerekli jumisshi ku'shine bolǵan turaqsızlıqtı azaytıw ushın u_s tiń ózgeriwine baylanıslı shıǵınlar u_s^2 qa proporsional boladı dep esaplaw maqsetke muwapiq keledi. Meyli bul jaǵdayda, awısıq ónimlerdi belgili muǵdarda saqlaw ushın jumsalatuǵın J_s shıǵınlari awısıq ónimlerdiń bar muǵdarına proporsional bolsın.

Solay etip, berilgen máselede hár bir $s = 1, 2, \dots, S$ dáwirinde ónimge bolǵan d_s talabı tolıq qanaatlandırılǵanday hám shıǵınlardıń ulıwma muǵdarı eń az bolǵanday etip, jumisshilardıń kerekli L_s sanın hám awısıq ónimniń muǵdarı J_s ti anıqlaw talap etiledi. Basqasha aytqanda, bul máselede hár bir waqtı dáwirine eki funktsiyalıq ózgeriwshi — awısıq ónimlerdiń muǵdarı J_s hám jumisshilardıń

kerekli sani L_s sáykes keledi (bul shamalar hár bir $s = 1, 2, \dots, S$ dáwirinde hár qiyli mánislerge iye boladı). Bunda basqarıwshı parametr u_s , yaǵnıy kerekli miynet resurslarınm' ózgeriw sanı boladı ($u_s < 0$ — jumısshılardıń kerekli sanınıń azayıwın ańlatadı). Usılardıń tiykarında, qoyılǵan máseleńiń matematikalıq modeli tómendegishe jazıladi:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^S (c_s u_s^2 + J_s) &\rightarrow \min, \\ L_s &= L_{s-1} + u_s, \quad s = 1, 2, \dots, S \\ J_s &= J_{s-1} + p L_{s-1} - d, \quad s = 1, 2, \dots, S \\ 0 \leq L &\leq \frac{b}{p}, \quad s = 1, 2, \dots, S. \\ J_s &\geq 0, \quad s = 1, 2, \dots, S \end{aligned}$$

Bunda J_0 — awisiq ónimniń baslanǵısh muǵdarı, — kárxanadaǵı jumısshılardıń dáslepki sanı, d_s — hár bir waqıt dáwirinde ónimge bolǵan talaptıń muǵdarı, b — kárxananiń bir waqıt dáwiri ishinde islep shıǵarıwı mu'mkin bolǵan eń kóp (maksimum) óniminiń muǵdarı.

2. Ásbap-u'skenelerdi jaylastırıw máselesi

Is ju'zinde óndiris yamasa xizmet orayların optimal jaylastırıw máseleleri tez-tez ushirasadi. Bunday máselelerge máselen, fabrikada yamasa zavodta stanoklardı yamasa tsexlardı jaylastırıw, tayar ónimleri sawda oraylarına yamasa tutınıwshılarga jiberiletuǵın fabrikalardı yamasa skladlardı jaylastırıw, qala ishinde órt óshiriw yamasa militsiya postların jaylastırıw h.t.b. máseleleri jatadi.

Mina ápiwayi máseleni qaraymız. Meyli, jaylasqan orni belgili n bazarlar hám olardıń hár birindegi tutınıwshılardıń ónimge bolǵan talabı berilgen bolsın. Tutınıwshılardıń talabın siyimlılıǵı belgili m qoyma qanaatlandıradı. Sonda,. olardıń bazarlarǵa alıp kelingén ónimlerdiń muǵdarlarına teń salmaq koeffitsienleri menen esaplanılǵan, bazarlardan ulıwma qashıqlıǵı eń kishi bolǵanday etip, qoymalardı jaylastırıw talap etiledi. Dálirek aytqanda, meyli tómendegi belgilewler kirgizilgen bolsın:

(x_i, y_i) - i - qoymanıń belgisiz koordinataları, $i = \overline{1, m}$ c- i —; qoymanıń siyimliliği, $i = \overline{1, m}$ (a_j, b_j) - j — bazardıń belgili koordinataları, $j = \overline{1, n}$; r_j - j — bazardağı ónimge bolğan belgili talap, $j = \overline{1, n}$ d_{ij} - i — qoymadan j — bazarğa shekemgi qashıqlıq, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$; v_{ij} - i — qoymadan j — bazarğa alıp kelinetuǵın ónimniń muǵdarı, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$.

Bul belgilewlerden paydalanıp, qoymalardı jaylastırıw hám ónimdi tasıwdıń kólemin anıqlaw máselesiniń matematikalıq modelin tómendegishe qalıplestiriwge boladı:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n v_{ij} d_{ij} &\rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n v_{ij} &\leq c_i \quad i = \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^m v_{ij} &= r_j \quad j = \overline{1, n}, \\ v_{ij} &\geq 0 \quad i = \overline{1, m} \quad j = \overline{1, n} \end{aligned}$$

Qalıplestirilgen máselede v_{ij} hám d_{ij} belgisiz ózgeriwshiler bolğanlıqtan, bul másele SIZIQLI EMES PROGRAMMALASTIRIW máselesi boladı. Bunda qashıqlıqtı ólshewdiń hár qiyli usıllarınan paydalanıw mu'mkin. Máselen,

$$d_{ij} = |x_i - a_j| + |y_i - b_j|, \quad d_{ij} = [(x_i - a_j)^2 + (y_i - b_j)^2]^{1/2}$$

dep alıwǵa boladı. Bul jaǵdaylarda ózgeriwshileri $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n, v_{11}, v_{22}, \dots, v_{nm}$ bolğan sızıqlı emes programmalastırıw máselesi kelip shıǵadı.

Al, egerde qoymalardıń jaylasıw ornı aldın ala belgili bolsa, yaǵmy d_{ij} shamaları belgili bolsa, onda tek ónimdi tasıwdıń kólemi v_{ij} ǵana belgisiz bolıp qaladı. Sonlıqtan, sońǵı jaǵdayda sızıqlı programmalastırıw máselesiniń dara jaǵdayı — transport máselesi kelip shıǵadı.

3. Gaz ótkeriwshi tarmaqlarındaǵı gaz aǵımların optimizatsiyalaw máselesi

Bul másele joybarlawdın belgili qásiyetke iye bolǵan optimizatsiyalaw máselesiniń mısalı boladı.

Onıń mánisi tómendegilerden ibarat. $A_1, A_2, \dots, A_m$ gaz kánleri bar bolıp, olardaǵı gaz aǵımınıń eń joqarǵı quwatlılıǵı sáykes $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ ge teń. Aǵımınıń quwatlılıǵı g ǵa teń bolǵan hár bir gaz káninen gazdı óndiriwge jumsalatuǵın shıǵın g nıń $\varphi_i(g)$ $i=1, m$ kórinisindegi funkciyası boladı. Óndirilgen gazden $B_1, B_2, \dots, B_n$ punktleri paydalanadı. Bul punktlerdiń hár biri talap etetuǵın gaz aǵımınıń quwatlılıǵı P_j ,

$j=1, n$. Gaz kánlerinen tutınıwshılarga gazdı jetkerip beretuǵın gaz ótkeriwshi tarmaqtan aldın ala belgili bolıp, olar $C_1, C_2, \dots, C_N$ N túyinlerden hám olardı tutastıratuǵın M sandaǵı $D_1, D_2, \dots, D_M$ shaqapshadan turadı. Hár bir k — shaqapshadan gazdı jetkerip beriwdiń bahası $f_k(r)$ kórinisindegi funkciya boladı, bunda r - bul shaqapshadaǵı gaz aǵımınıń quwatlılıǵı.

Meyli κ — shaqapshadaǵı gaz aǵımınm' kerekli quwatlılıǵı r_k , $k=1, M$ bolsın. Sonda Kirxgoftıń 1-mzami boyınsha hár bir túyinge keletuǵın gaz aǵım onnan shıǵatuǵın gaz aǵımına teń boladı, yaǵniy gaz ótkeriwshi tarmaǵınıń túyinlerinde

$$\sum_{k \in C_s^+} r_k = \sum_{k \in C_s^-} r_k, s=1, \dots, N$$

teńligi orınlanadı. Bunda C_s^+ hám C_s^- arqalı gaz ótkeriwshi tarmaǵınıń s túyinine keletuǵın hám onnan shıǵatuǵın shaqapshalarınń kóplikleri belgilengen.

Sunday-aq, hár bir j — tutınıw punktine kelgen gaz aǵımı, bul punktte paydalanılǵan hám onnan shıqqan qosindısına teń boladı, yaǵniy bul jaǵdayda mına teńlik orınlanadı.

$$\sum_{k \in B_j^+} r_k = P_j + \sum_{k \in B_j^-} r_k, j=1, n$$

Bunda B_s^+ hám B_s^- belgilewleri joqanda kórsetilgendey mánislerge iye boladı.

Gazdı óndiriw punktlerinde

$$g_i = \sum_{k \in A_j^-} r_k, j = 1, m$$

teńligi orınlanadı, yaǵniy i — punktinde gaz óndiriwdıń quwatlılıǵı, onnan shıǵatuǵın gaz aǵımlarınıń qosındısına teń boladı.

Sonıń menen birge, hár bir gaz óndiriw punktinde gaz aǵımınm' quwatlılıǵı sheklengen:

$$0 \leq g_i \leq Q_i, i = 1, m$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^m \varphi_i(g_i) + \sum_{k=1}^M f_k(r_k) \right\} \Rightarrow \min$$

mániske iye bolǵanday etip, gaz jetkerip berıwdıń sistemasm anıqlawdan ibarat boladı.

Bul másele sızıqlı emes programmalastırıw máselesi boladı. Al, egerde $\varphi_i(g_i)$ hám $f_k(r_k)$

funktsiyalan sáykes gaz óndiriwiniń i - punktindegi hám gaz ótkeriwshi tarmaǵınıń k – shaqapshadaǵı gaz aǵımınm' quwatlıqlan

g. hám r_k lardan sızıqlı ǵárezli bolsa, yaǵniy

$$\varphi_i(g_i) = c_i g_i, f_k(r_k) = d_k r_k$$

teńlikleri orınlansa, onda bul másele sızıqlı programmalastırıw máselesine aylanadı.

Funkciyanıń gradienti túsinigi

Meyli Bizge n ólshemli E_n Evklid keńisligi berilgen bolsın. E_n keńisliginiń bir tarawında $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkciya óziniń jeke nátiyjeleri menen birgelikte úzliksiz funkciyalar toplamın qurasın. Bul funkciyalar toplamın S^1 menen belgilesek, E_n da $f \in C^1$ funkciyanıń gradienti proekciyaların tómendegishe jazıw múmkin.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Demek E_n da $f \in C^1$ funkciyanıń gradienti proekciyaları vektor baǵana bolıp, ol simvolliq ráwishte tómendegishe ráwishte.

$$g \text{ ga } df = \Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \overline{\ell_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \overline{\ell_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \overline{\ell_n}$$

bul jerde $\overline{\ell_1}, \overline{\ell_2}, \dots, \overline{\ell_n}$ ortlar.

Gradientni E_n da koordinata oqlarındaǵı proekciyalari tómendegishe jazıladı

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \overline{\ell_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \overline{\ell_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \overline{\ell_n} \right)$$

$f(x)$ funkciyanıń berilgen x^0 noqatındaǵı gradientin tómendegi

$$\nabla f(x^0) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n}$$

kóriniste jazıw múmkin.

Berilgen $x = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ noqatta $f(x)$ funkciyadan gradient baǵdarı boyınsha alınǵan nátiye eń úlken mániske erisedi hám

$$|\nabla f(x^0)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n} \right)^2}$$

ge teń boladı hám gradient baǵdarı eń tez ósiw baǵdarı esaplanadı.

$f(x)$ funkciyanıń E_n ishi x^0 noqatındaǵı gradienti $\nabla f(x^0)$ noqattan ótiwshi joqarılıq sırtı ($f(x) = \text{const}$) ǵa perpendikulyar boladı.

$$-\nabla f(x^0) = \left(-\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}, -\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}, \dots, -\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n} \right)$$

vektor $\nabla f(x)$ funkciyanıń x^0 noqatındaǵı eń tez kemeyiw baǵdarın kórsetedi hám onıń X^0 noqatındaǵı antigradienti deyiledi.

Eger x noqatta $f(x)$ funkciya ushın $\nabla f(x)=0$ bolsa, ol waqıtta

$X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ noqatqa stacionar noqat deyiledi.

Endi $f(x) \in C^1$ funkciyadan qálegen baǵdar boyınsha

jeke nátiyje alıw túsiniǵin kiritemiz.

Анықлама . Berilgen $x^0=(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ noqatta

$f(x)=f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^1$ funkciyadan $S(s_1, s_2, \dots, s_n)$ ($\|S\|=1$) baǵdar boyınsha alınǵan nátiyje dep tómendegi limitge aytiladı.

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial S} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + \lambda S) - f(x^0)}{\lambda}.$$

Eger $f(x)$ funkciya $x^0=(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ noqatta

differentiallanıwshı funkciya bolsa, qálegen $S(\|S\|=1)$ ushın $\frac{\partial f(x^0)}{\partial S}$ bar boladı hámde

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial S} = (\nabla f(x^0), S) \quad (2.1)$$

orınlı boladı.

Haqıyqattan da qálegen sheksiz kishi $\lambda > 0$ ushın tómendegi

teńlik

$$f(x^0 + \lambda S) - f(x^0) = (\nabla f(x^0), (x^0 + \lambda S - x^0)) + o(\|x^0 + \lambda S - x^0\|).$$

orınlanadı.

Bunda

$$f(x^0 + \lambda S) = f(x^0) + \lambda (\nabla f(x^0), S) + o(\|\lambda S\|)$$

hám

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{f(x^0 + \lambda S) - f(x^0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{\lambda(\nabla f(x^0), S) + o(\|\lambda S\|)}{\lambda} = (\nabla f(x^0), S)$$

Bizge belgili

$$(\nabla f(x^0), S) = \|\nabla f(x^0)\| \|S\| \cos(\nabla f(x^0)^\wedge, S).$$

Demek

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial S} = \|\nabla f(x^0)\| \|S\| \cos(\nabla f(x^0)^\wedge, S).$$

Sunday qılıp bunnan kórinip turıptı, $f(x)$ funkciyadan x^0 noqatta S baǵdar boyınsha alınǵan nátiyje

$$\cos(\nabla f(x^0)^\wedge, S) = 1$$

bolǵanda maksimal mániske iye boladı.

Demek, S baǵdar x^0 noqatındaǵı funkciya gradientiniń $(\nabla f(x^0))$ baǵdar menen bir qıylı bolǵanda $\frac{\partial f(x^0)}{\partial S}$ maksimal mániske erisedi.

Anıqlama . Sunday $\bar{\lambda}$ san bar bolıp, hár qanday $\lambda \in [0, \bar{\lambda}]$ ushın $x^0 + \lambda S \in M$ orınlı bolsa, $x^0 \in M$ noqattan baslanatuǵın baǵdar múmkin bolǵan baǵdar deyiledi.

1-Teorema. Eger M toplam $g_i(x) \leq 0 \quad (i = \overline{1, m})$ teńsizlikler sisteması arqalı anıqlanǵan toplam bolıp, $x^0 \in M$ hám $g_i(x) = 0$ shártti orınlawshı i indeksler toplamı $I(x)$ bolsa, ol jaǵdayda

$$(\nabla g_i(x^0), S) + \varepsilon \leq 0, \quad (i \in I(x^0)) \quad (2.2)$$

teńsizlikler sistemasın ayırım $\varepsilon > 0$ de qanaatlantırırshı S baǵdar múmkin bolǵan baǵdar boladı.

2-Teorema . Eger $x^0 \in M$ noqatındaǵı S baǵdar múmkin bolǵan baǵdar bolsa, ol jaǵdayda hár qanday $i \in I(x^0)$ ushın

$$(\nabla g_i(x^0), S) \leq 0 \quad (2.3)$$

teńsizlik orınlı esaplanadı.

Joqarıdağı gradient usıllarınan paydalanıp hár qanday sızıqlı emes programmalaştırıw máseleleri sheshiledi hám ulıwma jaǵdayda lokal ekstremumlardı tabıw múmkin boladı.

Sonıń ushın gradient usılların qollap dónes programmalaştırıw máselelerin lokal ekstremumların tabıw múmkin. Hár qanday lokal ekstremum, bir waqıttıń ózinde global ekstremum da boladı.

Gradient usılların qollap máselelerdi sheshiw processı birar bir $x^{(k)}$ noqattan baslap izbe-iz izlew nátiyjesinde dáslepki máseleniń sheshimi tabıladı.

Gradient usılların eki toparǵa ajratıw múmkin:

1. Izlenetuǵın $x^{(k)}$ noqatlar múmkin bolǵan sheshimler tarawınan shetke shıqpaytuǵın máselelerdiń sheshiw usılı;

2. Izlenetuǵın $x^{(k)}$ noqatlar múmkin bolǵan sheshimler tarawında hám izlenetuǵın sheshim múmkin bolǵan tarawdan sırtta bolǵan máselelerdi sheshiw usılları.

Birinshi toparǵa qaraslı máselelerdi Frank-Vulf usılı menen, ekinshi toparǵa qaraslı máselelerdi ese jariyma funkciyasi usılı yamasa Errow – Gurvic usılı menen sheshiw múmkin.

2.2 Sızıqlı emes programmastırıw máselesin sheshiwdiń usılları

Sızıqlı emes programmastırıw máselesiniń ekstremumın tabıw ushın gradientlik usıllardan paydalanıw úlken áhmiyetke iye. Bunday usıllardan eń tez túsiw usılı, túyinles gradientler usılı praktikada kóp qollanıladı.

Endi usı usıllardıń algoritmlerine qısqasha toqtap ótemiz.

1. Eń tez túsiw usılı.

Meyli bizge $f(x)$ funkciyanıń shártsiz minemumın tabıw máselesi berilgen bolsın:

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in R^n} \quad (2.4)$$

Bunda $x = (x_1, \dots, x_n)$ -n ólshemli vektor. Demek, biz $x_0, x_1, \dots, x_n$ tochkalardıń izbe-izligin dúziwdi qarap ótemiz, ol tómendegi shártti qanaatlandıırıwı kerek.

$$f(x_0) \geq f(x_1) \geq \dots \geq f(x_n) \quad (2.5)$$

Túsiwdiń hárqıylı usılları bir-birinen túsiwdiń bağıtın saylap alıw menen hám de adımıń uzınlıgın usı bağıt boyınsha alıw menen ayırıladı. Bul usıllarda tochkalar izbe izligin $\{x_k\}$ tómendegi járdeminde esaplanadı.

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k / p_k \quad (2.6)$$

Bunda p_k -túsiwdiń bağıtı al, α_k -adımınıń uzınlıgı (bağıt boyınsha).

Egerde, p_k -antigradientke teń dep alsaq, onda tómendegige iye bolamız:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k f'(x_k) \quad (2.7)$$

Koordinat formasında bul process tómendegi kóriniste jazıladı:

$$x_{k+1}^i = x_k^i - \alpha_k \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_k), \quad i = \overline{1, n} \quad (2.8)$$

Egerde hár bir iteraciya da adım α_k , $f(x)$ funkciyasınıń minemum shártinen alınsa

$$f(x_k - \alpha_k f'(x_k)) = \min_{\alpha \geq 0} f(x_k - \alpha f'(x_k)) \quad (2.9)$$

(2.6)- eń tez túsiw usılı dep ataladı.

Bunda $\varphi(\alpha)$ tómendegi teńlikten anıqlanadı:

$$\frac{d\varphi(\alpha_k)}{d\alpha} = -f'(x_{k+1}) - f'(x_k) = 0$$

Praktikada gradient usılları boyınsha esaplaw tómendegi shárt orınlangansha dawam ettiriledi:

$$\|x_{k+1} - x_k\| < \delta \text{ yamasa } \|f(x_{k+1}) - f(x_k)\| \leq \varepsilon$$

Bunda δ hám ε bazıbir oń sanlar. Bul shártlerden basqada iteraciyalıq process $\|f(x^k)\| \rightarrow 0$ shárti orınlangansha dawam etiledi.

Sızıqlı emes programlastırıw máseleleriniń mumkin bolǵan sheshimler oblasti barlıq waqıt hám dónes oblasttan ibarat bolmaydı. Onnan sonday noqat tabıladı, usı noqattan $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = h$ gipertekislik ótip, (2.1) – maqset funkciya óziniń eń úlken yamasa eń kishi mánislerine erisiwı mumkin.

Usı noqat mumkin bolǵan sheshimler oblastniń shegarasında yamasa oblasttiń ishinde jaylasqan bolıwı mumkin.

2 Frank –Vulf usılı.

Aytayıq tómendegi shártlerde

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \leq \epsilon_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (2.10)$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1, n}) \quad (2.11)$$

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.12)$$

oyıs funkciyanıń maksimum mánisin tabıw kerek bolsın.

Bul máseleńiń qásiyetlerinen biri teńsizlikler sisteması sızıqlı teńsizliklerden ibarat bolǵanı esaplanadı. Sol qásiyetlerinen paydalanıp sızıqlı emes programlastırıw máseleler kórinisine keltiriw mumkin hám máseleńi izbe-iz almasıwlar járdeminde sheshiw mumkin.

(2.10)-(2.12) máseleńi sheshiw processı máseleńiń mumkin bolǵan sheshimler tarawınan bir $x^{(k)}$ noqatın tabıwdan baslanadı hám $x^{(k)}$ noqatta $f(x)$ funkciyanıń gradienti tabıladı.

Endi $x^{(k)}$ noqatta $f(x)$ funkciyanıń gradientin tabamız

$$\nabla f(x^{(k)}) = \left(\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_n} \right)$$

hám buǵan tiykarınan sızıqlı funkciyanı dúzetemiz

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_n} x_n \quad (2.13)$$

Bunnan keyin (2.10)-(2.12) shártlerge tiykarınan $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, funkciyanıń maksimum mánisin tabamız. Aytayıq $x^{(k)}$ noqatta $f(x)$ funksiya maksimum mánis qabıl qılsın. Ol waqıtta dáslepki máseleni múmkin bolǵan sheshiminiń koordinatı $x^{(k+1)}$ noqatta boladı:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda(z^{(k)} - x^{(k)}), \quad (2.14)$$

bul jerde λ_k –qálegen san bolıp, esaplaw adımı dep aytıladı hám $0 \leq \lambda \leq 1$ ge teń.

λ_k - qálegen san bolıp, onı sonday tańlaw aytıw $f(x)$ funkciyanıń $x = x^{(k+1)}$ noqatındaǵı λ_k baylanıslı bolǵan mánisi maksimum mánis bolsın, yaǵnıy $f_{\max} = f(x^{(k+1)})$ bolsın. Sonıń ushın $\frac{df}{d\lambda_k} = 0$ teńlemenı sheship, λ_k korenleri ishinen eń kishisin tańlap alamız.

Eger bul izlenetuǵın korenler birden úlken bolsa, ol waqıtta $\lambda_k = 1$ dep alamız hám sonnan keyin $x^{(k+1)}$ noqattıń koordinatların esaplap maqset funkciyanı bul noqatındaǵı mánisin tabamız. Sonnan keyin jańa $x^{(k+2)}$ noqatqa ótiw zárúr ma yaki joqlıǵın anıqlaymız. Eger zárúr bolsa, ol waqıtta $x^{(k+1)}$ noqatta maqset funksiyanıń gradientin esaplap sızıqlı programmalaştırıw máselesin sheship, $x^{(k+2)}$ sheshimlerin tabamız. $x^{(k+2)}$ noqattı da ayırım sıyaqlı tekseremiz.

Demek shekli adımlar nátiyjesinde belgili anıqlıqta dáslepki máseleni sheshimlerin tabıw múmkin Sonday qılıp (2.10)-(2.12) máseleni Fran-Vulf metodı menen Sheshiw processi tómendegi basqışlardı óz ishine aladı:

1. Dáslepki múmkin bolǵan sheshim tabıladı;
2. (2.9) funkciyanıń múmkin sheshimin anıqlawshı noqatta gradienti esaplanıladı.
3. (2.9) funkciyanı dúzip (2.10) hám (2.12) shártlerde maksimal mánisi esaplanıladı.
4. Esaplaw adımı λ_k tabıladı.

5. (2.13) formula járdeminde múmkin bolǵan sheshiminiń quramlıq bólimleri jańadan tabıladı.

6. Keyingi múmkin bolǵan sheshimge ótiw zárúrligi kórip shıǵıladı. Eger zárúr bolsa, ekinshi basqıshqa ótileđi. Eger zárúr bolmasa dáslepki máseleniń kerekli sheshimi tabılǵan esaplanıladı.

3. Jarıyma funkciyasi usılı. Tómenдеgi shártlerde

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq v_i \quad (i = \overline{1, m})$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1, n})$$

$f(x) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ oyıs funkciyanıń maksimum mánisin tabıw kerek bolsın.

Bul jerde $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = \overline{1, m})$ funkciyalar dónes funkciyalar toplamın quraydı.

Bunnan keyin maqset funkciyanıń maksimum mánisin izlew ornına $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkciyanıń maksimum mánisi tabıladı, yaǵnıy

$$f(x) = f(x) + h(x) \rightarrow \max, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Demek $f(x)$ funkciya maqset funkciya hám $h(x)$ belgili shegaralar sisteması menen anıqlanǵan jarıyma funkciyası jıyındısınan ibarat.

$n(x)$ jarıyma funkciyasın hár qıylı usıllar menen dúziw múmkin.

Kóbinshe jarıyma funkciyası tómendegi kóriniste izlenedi

$$N(X) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) g_i(x),$$

bul jerde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\text{Soday} \quad \alpha_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{egerde} \quad \epsilon_i - g_i(x) \geq 0, \\ \alpha_i, & \text{egerde} \quad \epsilon_i - g_i(x) \leq 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

$x_i \geq 0$ - ózgermes sanlar bolıp awırlıq koefficientleri dep ataladı.

Jarıyma funkciyasınan paydalanıp izbe-iz bir noqattan ekinshisi hám basqa noqatlargá adım-ba-adım dawam etip, bul process kerekli sheshimler tabılǵangá shekem dawam ettiriledi.

Sol menen birge hár bir kelesi noqattıń koordinatası tómendegi formula járdeminde tabıladı.

$$x_i^{(k+1)} = \max \left\{ 0; x_j^k + \left[\frac{\partial f(x^k)}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\partial g_i(x^{(k)})}{\partial x_j} \right] \right\} \quad (2.16)$$

(2.16) dan kórinip turıptı, eger kelesi noqat dáslepki máseleniń múmkin bolǵan sheshimler tarawında bolsa, kvadrat qawıs ishindegi qosılıwshı nolge teń hám kelesi noqattı koordinatası maqset tabıladı. Eger noqat múmkin bolǵan sheshimler tarawınan sırtta bolsa ol waqıtta jáne qaytadan sheshimler tarawına ótiwge tuwrı keledi hám qaytadan ózgartiriledi.

Sonday qılıp jarıyma funkciyası usıl dónes programmalastırıw máselelerin Sheshiw processı tómendegi basqıshlardı óz ishine aladı:

1. Dáslepki máseleni múmkin bolǵan sheshimleri anıqlanadı;
2. Esaplaw adımı anıqlanılardı;
3. Maqsetli funkciyadan hámme ózgeriwshiler boyınsha jeke nátiyjeler hám múmkin bolǵan sheshimler tarawını anıqlawshı funkciya tabıladı;
4. (2.16) formula járdeminde múmkin bolǵan jańa sheshim noqatlari anıqlanadı;
5. Tabılǵan noqatlarnı koordinatlari berilgen shegara shártlerdi qanaatlantırıwı tekseriledi. Qanaatlantırmasa kelesi basqıshqa ótileđi. Eger tabılǵan noqattıń koordinatlari múmkin bolǵan sheshimler tarawında anıqlansa, ol waqıtta kelesi múmkin bolǵan sheshimlerine ótiw zárúrligi úyreniledi. Eger zárúr bolsa, máseleni sheshiwdiń ekinshi basqıshına ótileđi. Eger zárúr bolmasa tabılǵan sheshimler dáslepki máseleniń kerekli sheshimleri esaplanılardı.
6. Awırlıq koefficientleriniń mánisleri anıqlanadı hám 4-shi basqıshqa ótileđi.

4. Errou – Gurvic usılı. Joqarıda jariyma funkciyası usılın qollap qıya sızıqlı programmalastırırw máselesin sheshtik. Biraq bul usıldı qollağanda α_i -lardı mánislerin qálegen tańlap alğan edik hám hár bir anıqlanğan $x^{(i)}$ ($i = \overline{1, n}$) noqat dáslep múmkin bolğan sheshimler tarawınan ádewir uzaqlasıp jıljıǵan edi. Bul kemshilikke Errou-Gurvic usılın qollağanda orın qalmaydı. Bul usılǵa tiykarınan hár bir kelesi adım $\alpha_i^{(k)}$ tómendegi formula járdeminde esaplanıladı

$$\alpha_i^{(k)} = \max\{0; \alpha_i^{(k-1)} - \lambda g_i(X^{(k)})\} \quad (i = \overline{1, m}) \quad (2.17)$$

$\alpha_i^{(k)}$ - nıń dáslepki $\alpha_i^{(0)}$ mánisi dep qálegen oń san alınadı.

III – Bap. Sızıqlı emes programmalaştırıwdıń ámeliy máseleleri hám sheshiw algoritmleri

3.1 Sızıqlı emes programmastırıwdıń ámeliy máselelerin sheshiwge grafikalıq usıldı qollanıw.

Másele Reje boyınsha qurılıs firmasında 150 dana plita islep shıǵarılıwı zárur . Plita islep shıǵarıw processı eki túrlı texnologikalıq usıl menen ámelge asırıladı . Birinshı texnologikalıq usıl járdeminde x_1 dana plita islep shıǵarıw ushın $4x_1 + x_1^2$ nızamlılıq, ekinshı texnologikalıq usıldı qollaǵanda x_2 dana plita islep shıǵarıw ushın $8x_2 + x_2^2$ nızamlılıq boyınsha qárejet qılınadı.

Hár bir usıldı qollaǵanda jámi ónimdi islepsh shıǵarıw ushın jumsalatuǵın ulıwma qárejet eń minimal bolıwı anıqlansın.

Máseleniń matematikalıq modelin dúzemiz.

Islep shıǵarıw firması x_1 hám x_2 múǵdarlardagı plita islep ch shıǵarıw ushın jumsalatuǵın qárejetler eń minimal bolıwı usı funkciya

$$F(x_1, x_2) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \rightarrow \min \quad (3.1)$$

arqalı anıqlangǵan bolsın, hámde tomendegi shártlerdi qanaatlantırsın. Islep shıǵarılatuǵın plitalardıń ulıwma múǵdarı

$$x_1 + x_2 = 150 \quad (3.2)$$

ǵa teń bolıp, belgisizlerdiń teris manfiy bolmaslıǵı

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \quad (3.3)$$

názerde tutılsın.

Bul máseleniń optimal sheshimin eki usıl járdeminde tabamız.

Máselesiniń optimal sheshimin anıqlawda tómendegi basqısh jumsların orınlaymız.

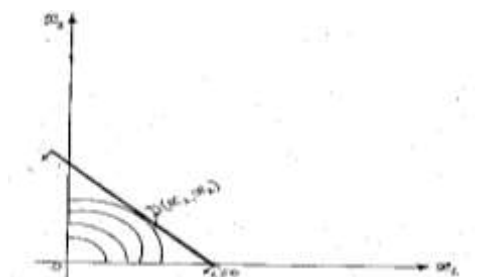
Sheshiliwi:

1. (3.1)–maqset funkciya sızıqlı emes funkciya kórinisinde bolǵanlıǵı ushın (3.1)–(3.3) másele sızıqlı emes máselesinen ibarat bolıp tabıladı.

Máseleniń mumkin bolǵan sheshimler oblastin (3.2) – (3.3) qatnaslarga tiykarlangan halda payda qılamız. Buniń ushın

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 150 & (L_1) \\ x_1 &= 0 & (L_2) \\ x_2 &= 0 & (L_3) \end{aligned}$$

tuwrı sızıqlardı x_1, x_2 keńislikte (tekislikde) suwretleymiz



3.1-suwret.

2. Gipersırt $F(x_1, x_2) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2$ maqset funkciya arqalı payda qılınadı.

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 = h \\ (x_1 + 2)^2 + (x_2 + 4)^2 - 4 - 16 &= h \\ (x_1 + 2)^2 + (x_2 + 4)^2 &= h + 20 = c \\ (x_1 + 2)^2 + (x_2 + 4)^2 &= (\sqrt{c})^2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

(3.4) – tengleme orayı $E(-2; -4)$ noqatda bolǵan hám radiusı $\sqrt{c}$ ge teń bolǵan sheńber teńlemesinen ibarat bolıp tabıladı. S -niń túrli qıylı mánisleri ushın gipersırt sheńber semyasınan (oilasidan) ibarat boladı (3.1 – suwret).

Qoyılǵan máseleniń mumkin bolǵan sheshimler oblasti AV kesindi hámde orayı $E(-2; -4)$ hám radiusı $R = \sqrt{c}$ ge teń bolǵan sheńberlerdi payda etiwshi iyemek sızıqlardıń ulıwma noqatınan ibarat bolıp tabıladı. 3.1–suwretten orayı $E(-2; -4)$ noqattan ótiwshı, R radiusdıń túrli mánisleri ushın sheńber semeystvasın (oilasini) payda qılamız.

(3.1) – maqset funkciya óziniń eń kishi mánisine $D(x_1, x_2)$ noqatta erisedi. Usı noqattıń koordinataların anıqlawda $x_1 + x_2 = 150$ tuwrı sızıqtıń múyesh koefficientı $k = -1$ teńligi hámde $4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 = c$ sheńber menen $D(x_1, x_2)$

noqatta sáykes(ustma–ust) túsiwinnen paydalanamız. Dóngelek(Aylana) tenglemesindegi x_2 nı x_1 ge qarata anıq emes funkciya sıpatında qarap, onı differenciallasaq tómendegige iye bolamız

$$4 + 2x_1 + 8x_2^1 + 2x_2 x_2^1 = 0.$$

Payda bolğan teńlemenı x_2 ge qarata sheship,

$$x_2^1 = \frac{2 + x_1}{4 + x_2}$$

dı payda qılamız.

Payda bolğan teńlemenı -1 ge teńlestirip $D(x_1, x_2)$ noqattıń koordinataların tabıw processinde bir teńlemege iye bolamız.

$$x_1 - x_2 = 2$$

$x_1 - x_2 = 2$ teńlemenı hámde $D(x_1, x_2)$ noqattıń $x_1 + x_2 = 150$ tuwrı sızıqda jatqallığın itibargá alsak, tómendegi teńlemeler sistemasına iye bolamız .

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 150. \end{cases}$$

Bul teńlemeler sistemasın sheship, $x_1=76$ hámde $x_2=74$ lardı anıqlaymız hám maqset funkciyasınıń mánisin tabamız.

$$F = 4 \cdot 76 + 76^2 + 8 \cdot 74 + 74^2 = 304 + 5776 + 5476 = 12148$$

Bunnan bolsa qurılıs firması I–texnologikalıq usıl menen 76, II–texnologikalıq usıl menen 74 dana plita islep shıǵarıp, eń kem jumsalatuǵın qárejet 12 mln.148 miń somdı shólkemlestirilgenin anıqlaymız.

1.2 Sızqlı emes programmalaştırıw anıq máselelerin sheshiwge Frank-Vulf, Errou –Gurvic usıllarınıń qollanılıwı

Frank-Vulf usılı járdeminde tómendegi mısaldı sheshiw

1-Másele.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12. \end{cases} \quad (3.5)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (3.6)$$

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \quad (3.7)$$

$f(x_1, x_2)$ funkciyanıń maksimum mánisin tabıń.

Sheshiw. $f(x_1, x_2)$ funkciyanıń gradientin tabamız

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = [2(1-x_1); 4(1-x_2)]$$

hám máseleniń múmkin bolǵan dáslepki sheshimi dep $x^{(0)} = (0; 0)$, tabılǵan sheshiminiń anıqlıq sıpatın ese $|f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})| < \varepsilon$, bul jerde $\varepsilon = 0,01$ dep alamız. Endi bul sheshimdi adım-ba-adım jaqsılaymız

I. Almastırıw.

$x^{(0)}$ noqatta $f(x_1, x_2)$ funkciyanıń gradientin $x_1 = 0; x_2 = 0$ noqatta tabamız.

$$\nabla f(x^0) = (2; 4).$$

Demek birinshi basqısha máseleni tómendegi shártlerde

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 8, \\ 2x_1 - x_2 &\leq 12. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad (3.9)$$

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 \quad (3.10)$$

$f(x_1, x_2)$ funkciyanıń maksimum mánisin tabıw talap etiledi.

(3.8)-(3.10) máseleni simpleks usıl menen sheship dáslepki optimal reje $z^0 = (0, 4)$ tabıladı.

Máseleniń múmkin bolǵan sheshimin (3.11) formula járdeminde tabamız

$$x^{(k)} = x^{(0)} + \lambda_1(z^{(0)} - x^{(0)}), \text{ bul jerde } 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (3.11)$$

$^{(0)}$ hám $z^{(0)}$ ler mánislerdi (3.11) qoysaq

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(1)} &= 0 + \lambda; 0, \\ x_2^{(2)} &= 0 + \lambda; 4. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

kelip shıǵadı. Bul jerden λ_1 dı tabıw ushın x_1 hám x_2 lerdiń mánislerin (3.11) ge (3.12) den tabıp qoysaq, tómendegi kelip shıǵadı

$$f(\lambda_1) = 16\lambda_1 - 32\lambda_1^2.$$

$f(\lambda_1)$ funkciyadan nátiyje alıp 0-ge teńlestirsek hám sheshsek tómendegi nátiyje boladı

$$f'(\lambda_1) = 16 - 64\lambda_1 = 0, \quad \lambda_1 = \frac{1}{4} = 0,25.$$

$0 \leq \lambda_1 \leq 1$ bolǵanı ushın, λ_1 nıń bul mánisin adım dep qabıl qılamız. Ol waqıtta $x^{(1)} = (0; 1)$

$$f(x^{(1)}) = 2$$

$$f(x^{(1)}) - f(x^{(0)}) = 2 > \varepsilon = 0,01.$$

II Almastırıw. Dáslepki mäseleniń $x^{(1)}$ noqatındaǵı gradienti

$\nabla f(x^{(1)}) = (2; 0)$ bolǵanı ushın $f_2(x_1, 0) = 2x_1$ maqsetli funkciyanı (3.11) hám (3.12) shártlerge tiykarınan maksimum mánisin tabıw talap etiledi. Bul mäseleni simleks usıldı qollap sheshsek

$z^{(1)} = (6,4; 0,8)$ sheshim kelip shıǵadı.

Endi $x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_2(z^{(1)} - x^{(1)})$ anıqlaymız. Aqırǵı teńlikti tómendegishe jazıw múmkin.

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(2)} &= 6,4\lambda_2, \\ x_2^{(2)} &= 1 - 0,2\lambda_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

(3.11) dı (3.12) ge qoysaq λ_2 ge salıstırǵanda tómendegi teńlik nátiyje boladı

$$f(\lambda_2) = 2 + 12,8\lambda_2 - 41,76\lambda_2^2, \quad \text{bul jerden}$$

$f^1(\lambda_2)=12,8-83,52\lambda_2$. $f^1(\lambda_2)$ ni 0-ge teńlestirsek

$\lambda_2 \approx 0,15$ nátiyje boladı

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(2)} &= 0,96, \\ x_2^{(2)} &= 0,97. \end{aligned} \right\}$$

$x^{(2)}=(0,96;0,97)$, $f(x^{(2)})=2,996$ bolǵanı ushın

$f(x^{(2)})-f(x^{(1)})=2,9966-2=0,9966>\varepsilon=0,01$ kelip shıǵadı.

III. Almastırıw. $x^{(2)}$ noqatta $f(x)$ funkciyanıń gradientin esaplaymız.

$$\nabla f(x^{(2)})=(0,08;0,12)$$

Demek $f_3(x)$ funkciyanıń kórinisi tómendegishe boladı

$$f_3(x_1, x_2)=0,08x_1+0,12x_2 \quad (3.14)$$

(3.14) funkciyanıń (3.11) hám (3.12) shártlerge tiykarınan mánisin tabamız.

Bul mánis tómendegishe kórinisine iye boladı $z^{(2)}=(6;0)$.

Ayrımlarǵa tiykarınan $x^{(3)}$ di anıqlaymız

$$x^{(3)}=x^{(2)}+\lambda_3(z^{(2)}-x^{(2)})$$

Nátiyjede tómendegiler tabıladı

$$\left\{ \begin{aligned} x_1^{(3)} &= 0,96 + \lambda_3(6 - 0,96) = 0,96 + 5,04\lambda_3, \\ x_2^{(3)} &= 0,97 + \lambda_3(0 - 0,97) = 0,97 - 0,97\lambda_3. \end{aligned} \right.$$

$$f(\lambda_3)=2,9384+0,4032\lambda_2-27,3416\lambda_3^2,$$

$$f^1(\lambda_3)=0,4032-54,6832\lambda_3,$$

$$0,4032-54,6832\lambda_3=0,$$

$$\lambda_3=\frac{0,4032}{54,6832} \approx 0,007.$$

Demek $x^{(3)}=(0,99528 ; 0,96321)$

$$f(x^{(3)})=2,99957$$

$$f(x^{(3)})-f(x^{(2)})=2,99957-2,9966=0,00297<\varepsilon=0,01.$$

Sunday qılıp $x^{(3)}=(0,99528 ; 0,96321)$ máseleniń izlenip atırǵan sheshimi esaplanadı. Eger ε muǵdarǵa jáne kemlew mánis bersek $x^{(k)}=(1,1)$ sheshimge jánede jawınlaw maksimal sheshimdi tabıw múmkin.

Jariyma funkciyalar usılınan paydalanıp tómendegi máseleni sheshiw

2-Másele .. Tómendegi shegara shártlerinde

$$(x_1-7)^2+(x_2-7)^2\leq 18, \quad (3.15)$$

$$x_1\geq 0, \quad x_2\geq 0. \quad (3.16)$$

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \quad (3.17)$$

Sheshiw. Maqsetli funkciya teris anıqlanǵan kvadratlıq forma bolǵanı ushın, ol oyıs funkciya esaplanadı. Múmkin sheshimleriniń tarawı (3.15), (3.16) ese dónes taraw esaplanadı. Demek (3.15)-(3.17) másele dónes programmalastırıw tarawı. Máseleni Sheshiw ushın jariyma funkciyalar usılın qollaymız. Aldın múmkin bolǵan sheshimler tarawın anıqlaymız. Bul noqatta maqset funkciyası izlenip atırǵan maksimum mániske iye boladı. X^0 noqattı anıqlanıw tarawınan alsaq $x^0=(6,7)$ teń boladı. λ niń mánisin $\lambda=0,1$ alıp hám $g(x_1, x_2)=18-(x_1-7)^2-(x_2-7)^2$ dep belgilep, onnan x_1 hám x_2 ózgeriwshiler boyınsha birinshi tártipli jeke nátiyjeler alsaq tómendegiler nátiyje boladı

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -2x_1; \quad \frac{\partial g}{\partial x_1} = -2x_1 + 14;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2; \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = -2x_2 + 14;$$

Endi (2.20) formulanı qollap noqatlar izbe-izligin dúzip shıǵamız. Nátiyjede dúzilgen noqatlardıń ishinen kerek bolǵan sheshim tabıladı.

I Almastırıw. $X^{(0)}=(6,7)$ noqat múmkin bolǵan sheshimler tarawında bolǵanı ushın (2.20) formuladaǵı kvadrat qawıs ishindegi mánis nolge teń. Demek kelesi noqattıń koordinatları tómendegi formula járdeminde esaplanıladı

$$x_1^{(1)} = \max \left\{ 0; x_1^{(0)} + \lambda \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} \right\} = \max \{0; 6 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 6\} = \max \{0; 4,8\} = 4,8,$$

$$x_2^{(1)} = \max \left\{ 0; x_2^{(0)} + \lambda \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_2} \right\} = \max \{0; 7 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 7\} = 5,4.$$

Endi $x^{(1)}=(4,8 ; 5,6)$ noqattıń mäseleniń sheshimler toplamı tarawına kiredime yaki joqlıǵın tekseremiz. $G(x^{(1)})=18-4,84-1,96=11,2$ bolǵanı ushın $g(x^{(1)})=-54,4$.

II. almastırıw ayırımlarǵa tiykarınan tómendegilerdi tabamız:

$$x_1^{(2)} = \max \{0; 0,48 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 4,8\} = 3,48;$$

$$x_2^{(2)} = \max \{0; 0,56 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 5,6\} = 4,48;$$

$$g(x^{(2)}) = 18 - 9,9856 - 6,3504 = 1,664 > 0, f(x^{(2)}) = -34,816.$$

III Almastırıw. Endi tómendegilerdi esaplaymız:

$$x_1^{(3)} = \max \{0; 0,384 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 3,84\} = 3,072;$$

$$x_2^{(3)} = \max \{0; 4,48 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 4,48\} = 3,584;$$

$$g(x^{(3)}) = 18 - 15,429184 - 11,669056 \approx -9,0981.$$

IV. Almastırıw $x^{(3)}$ noqat mäseleniń múmkin bolǵan sheshimler tarawına kirmeydi.

Sonıń ushın,

$$\begin{aligned} x_1^{(4)} &= \max \left\{ 0; x_1^{(3)} + \lambda \left[\frac{\partial f(x^{(3)})}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial f(x^{(3)})}{\partial x_1} \right] \right\} = \\ &= \max \{0; 3,072 + 0,1 \cdot [((-2) \cdot 3,072) + \\ &+ \alpha((-2) \cdot 3,072 + 14)]\} = \max \{0; 2,4576 + \alpha \cdot 0,7856\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2^{(4)} &= \max\{0; x_2^{(3)} + \lambda \left[\frac{\partial f(x^{(3)})}{\partial x_2} + \alpha \frac{\partial f(x^{(3)})}{\partial x_2} \right]\} = \\
&= \max\{0; 3,584 + 0,1[(-2) \cdot 3,584] + \\
&+ \alpha((-2) \cdot 3,584 + 14)]\} = \max\{0; 2,8672 + \alpha \cdot 0,6832\}.
\end{aligned}$$

Bul jerde α sandı tańlaw mashqalası kelip shıǵadı. A sandı sonday tańlaw aytıw $X^{(4)}$ noqat múmkin bolǵan sheshimler tarawınıń shegarasına jaqın bolsın hám sol tarawda jaylasqan bolsın.

Bul talaptı $\alpha = 1,9$ mánis qandıradı.

A = 1,9 mániste $x_1^{(4)}, x_2^{(4)}$ lerdı esaplaymız:

$$x_1^{(4)} = \max\{0; 2,4576 + 1,9 \cdot 0,7856\} \approx 3,950;$$

$$x_2^{(4)} = \max\{0; 2,8672 + 1,9 \cdot 0,6832\} \approx 4,165;$$

$$g(x^{(4)}) = 9,3025 + 8,037225 \approx 0,660;$$

$$f(x^{(4)}) \approx -32,950.$$

V. Almastırıw. Tómendegilerdi esaplaymız

$$\begin{aligned}
x_1^{(5)} &= \max\{0; 3,950 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 3,950\} = \\
&= \max\{0; 3,950 - 0,790\} = \max\{0; 3,18\} = 3,18.
\end{aligned}$$

$$x_2^{(5)} = \max\{0; 4,165 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 4,165\} = 3,332;$$

$$g(X^{(5)}) = 18 - 14,7456 - 13,454224 \approx -10,2$$

VI. Almastırıw. Tómendegilerdi esaplaymız

$$x_1^{(6)} = \max\{0; 3,18 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,18 + 1,9((-2) \cdot 3,18 + 14)]\} \approx 3,987;$$

$$x_2^{(6)} = \max\{0; 3,332 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,332 + 1,9 \cdot ((-2) \cdot 3,332 + 14)]\} \approx 4,059;$$

$$g(x^{(6)}) = 18 - 9,078169 - 8,649481 \approx 0,272;$$

$$f(x^{(6)}) \approx -32,372.$$

VII. Almastırıw. Tómendegilerdi esaplaymız

$$x_1^{(7)} = \max\{0; 3,987 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 3,987\} \approx 3,189;$$

$$x_2^{(7)} = \max\{0; 4,059 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 4,059\} \approx 3,247;$$

$$g(x^{(7)}) = 18 - 10,169721 - 10,543009 \approx -2,713$$

$$f(x^{(7)}) \approx -3,189^2 - 3,247^2 \approx -10,24.$$

VIII. Almastırıw. Tómendegilerdi esaplaymız

$$x_1^{(8)} = \max\{0; 3,189 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,189 + 1,9((-2) \cdot 3,189 + 14)]\} \approx 3,999;$$

$$x_2^{(8)} = \max\{0; 3,247 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,247 + 1,9 \cdot ((-2) \cdot 3,247 + 14)]\} \approx 4,027;$$

$$g(x^{(8)}) = 18 - 9,006001 - 8,856576 \approx 0,137;$$

$$f(x^{(8)}) \approx -32,185.$$

XIX. Almastırıw. Tómendegilerdi esaplaymız

$$x_1^{(9)} = \max\{0; 3,999 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,99]\} \approx 3,199;$$

$$x_2^{(9)} = \max\{0; 4,024 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 4,024]\} \approx 3,219;$$

$$g(x^{(9)}) = 18 - 14,447601 - 14,29596 \approx -10,744$$

$$f(x^{(9)}) \approx -3,199^2 - 3,219^2 \approx -10,22.$$

X. Almastırıw. Tómendegilerdi esaplaymız

$$x_1^{(10)} = \max\{0; 3,199 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,199 + 1,9((-2) \cdot 3,199 + 14)]\} \approx 4,004;$$

$$x_2^{(10)} = \max\{0; 3,219 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,219 + 1,9((-2) \cdot 3,219 + 14)]\} \approx 4,012;$$

$$g(x^{(10)}) = 18 - 8,976016 - 8,928144 \approx 0,096$$

$$f(x^{(10)}) \approx -32,128;$$

XI. Almastırıw. Tómendegilerdi esaplaymız

$$x_1^{(11)} = \max\{0; 4,004 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 4,004]\} \approx 3,203;$$

$$x_2^{(11)} = \max\{0; 4,012 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 4,012]\} \approx 3,210;$$

$$g(x^{(11)}) = 18 - 14,417209 - 14,3641 \approx -10,781$$

$$f(x^{(11)}) \approx -3,203^2 - 3,210^2 \approx -10,18$$

XII. Almastırıw. Tómendegilerdi esaplaymız

$$x_1^{(12)} = \max\{0; 3,203 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,203 + 1,9((-2) \cdot 3,203 + 14)]\} \approx 4,005;$$

$$x_2^{(12)} = \max\{0; 3,210 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,210 + 1,9((-2) \cdot 3,210 + 14)]\} \approx 4,008;$$

$$g(x^{(12)}) = -32,104$$

$$f(x^{(12)}) \approx -4,005^2 - 4,008^2 \approx -32,104;$$

Eger X hám XII almastırıwları ózara salıstırsaq 10^{-1} anıqlıqta bir-birine teń boladı. Demek bul sheshim aqırǵı almastırıw nátiyjesinde maksimal sheshim boladı. Sonday ayırım sıyaqlı maqset funkciya mánislerin $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar gradientin $x^{(12)} = (4,005 ; 4,008)$ noqatta tekserip kóriw múmkin; yaǵnıy

$$\nabla f(x^{(12)}) = (-8,01; -8,016); \quad \nabla g(x^{(12)}) = (5,99; 5,984);$$

Mas koordinatlarınıń qatnasın esaplasaq;

$$\frac{-8,01}{5,99} \approx -1,337, \quad \frac{-8,016}{5,984} \approx -1,339$$

Bul koordinatlardan kórinip turıptı olar ádewir bir-birine teń. Demek $\nabla f(x^{(12)})$ hám $\nabla g(x^{(12)})$ vektorlar derlik parallel vektorlar esaplanadı. Sol menen bir katarda $x^{(12)} = (4,005 ; 4,008)$ noqat múmkin bolǵan sheshimler tarawı shegarasına ádewir jaqın jaylasqan, sebebi $\nabla g(x^{(12)}) \approx 0,078$ bolǵanı ushın $x_1^{(12)} = 4,005$ hám $x_2^{(12)} = 4,008$ sheshimlerdi máseleniń kerekli sheshimleri dese boladı. Ayırım kórsetilgen almastırıwları dawam ettirip sheshimlerdi úlkenrek anıqlıqta tabıw múmkin.

Errou –Gurvic usılınan paydalanıp tómendegi máseleni sheshiw

3-Másele

$$(x_1-7)^2+(x_2-7)^2 \leq 18, \quad (3.18)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (3.19)$$

$$F(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max. \quad (3.20)$$

Sheshiw. Errou-Gurvic usılın qollap joqarıağı máseleni sheshkende birinshi úsh almastırıwda $\lambda=0,1$ bolǵanda sheshimler bir-birine tuwrı keledi. Bul sonı kórsetedi hár-bir tabılǵan noqat múmkin bolǵan sheshimler tarawında jaylasqan bolıp $x_i^{(k)}$ lardı mánislerin II baptaǵı (2.16) hám (2.17) formulalar menen esaplaǵanda bir-birinen parıq qılmaıdı, yaǵnıy $x_i^{(k)}=0$ ($k=\overline{1,3}$), boladı.

IV. Almastırıw . $g(x^{(3)}) < 0$ bolǵanı ushın kelesi $x^{(4)}$ noqattı (3.20) formula járdeminde esaplaymız:

$$x_1^{(4)} = \max \left\{ 0; x_1^{(3)} + \lambda \left[\frac{gf(x^{(3)})}{gx_1} + \alpha^{(4)} \frac{dg(x^{(3)})}{dx_1} \right] \right\} = \max \{ 0; 3,072 + 0,1[(-3,072 +$$

$$+ \alpha^{(4)}((-2) \cdot 3,072 + 14)] \}.$$

$$x_2^{(4)} = \max \left\{ 0; x_2^{(3)} + \lambda \left[\frac{df(x^{(3)})}{dx_2} + \alpha^{(4)} \frac{dg(x^{(3)})}{dx_2} \right] \right\} = \max \{ 0; 3,584 + 0,1[(-2) \cdot 3,584 +$$

$$+ \alpha^{(4)}((-2) \cdot 3,584 + 14)] \}.$$

$\alpha^{(4)}$ -tı (3.21) formula járdeminde esaplaymız:

$$\alpha^{(4)} = \max \{ 0; \alpha^{(3)} - 0,1 \cdot g(x^{(3)}) \} = \max \{ 0; 0 - 0,1 \cdot (-9,0981) \} \approx 0,91$$

Demek $x_1^{(4)} \approx 3,172$; $x_2^{(4)} \approx 3,489$; $g(X^{(4)}) \approx -8,981$.

V. Almastırıw. Tabılǵan $x^{(4)} = (3,172; 3,489)$ dáslepki berilgen máseleniń múmkin bolǵan sheshimler tarawına kirmeydi. Sonıń ushın (3.20) formula járdeminde tabamız. Biraq aldın (3.21) formula járdeminde tómendegini esaplaymız:

$$\alpha^{(5)} = \max \{ 0; 0,91 - 0,1(-8,981) \} \approx 1,81$$

$$x_1^{(5)} = \max \{ 0; 3,172 + 0,1[(-2) \cdot 3,172 + 1,81((-2) \cdot 3,172 + 14)] \} \approx 3,923.$$

$$x_2^{(5)} = \max\{0; 3,489 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,489 + 1,81((-2) \cdot 3,489 + 14)]\} \approx 4,062$$

$$g(x^{(5)}) \approx -0,1.$$

VI. Almastırıw. Tómendegilerdi esaplaymız:

$$\alpha^{(6)} = \max\{0; 1,81 - 0,1 \cdot (-0,1)\} \approx 1,82$$

$$x_1^{(6)} = \max\{0; 3,923 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,923 + 1,82((-2) \cdot 3,923 + 14)]\} \approx 4,258.$$

$$x_2^{(6)} = \max\{0; 4,062 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 4,062 + 1,82((-2) \cdot 4,062 + 14)]\} \approx 4,319$$

$$g(x^{(6)}) \approx 1,294;$$

$$f(x^{(6)}) \approx -36,784.$$

VII. Almastırıw. Tómendegilerdi esaplaymız:

$$x_1^{(7)} = \max\{0; 4,258 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 4,258]\} \approx 3,406.$$

$$x_2^{(7)} = \max\{0; 4,319 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 4,319]\} \approx 3,455$$

$$g(x^{(7)}) \approx -7,484.$$

VIII. Almastırıw. Tómendegilerdi esaplaymız:

$$\alpha^{(8)} = \max\{0; 1,82 - 0,1(-7,484)\} \approx 2,57;$$

$$x_1^{(8)} = \max\{0; 3,406 + 0,1[(-2) \cdot 3,406 + 2,57((-2) \cdot 3,406 + 14)]\} \approx 4,572;$$

$$x_2^{(8)} = \max\{0; 3,455 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,455 + 2,57((-2) \cdot 3,455 + 14)]\} \approx 4,586;$$

$$g(x^{(8)}) \approx 6,278;$$

$$f(x^{(8)}) \approx -41,935.$$

IX. Almastırıw. $x_1^{(9)}$, $x_2^{(9)}$, hám $g(x^{(9)})$ lardı tabamız:

$$x_1^{(9)} = \max\{0; 4,572 + 0,1[(-2) \cdot 4,572]\} \approx 3,658,$$

$$x_2^{(9)} = \max\{0; 4,586 + 0,1[(-2) \cdot 4,586]\} \approx 3,669,$$

$$g(x^{(9)}) \approx 4,265.$$

X. Almastırıw. $\alpha^{(10)}$, $x_1^{(10)}$, $x_2^{(10)}$, hám $g(x^{(10)})$ lardı tabamız:

$$\alpha^{(10)} = \max\{0; 2,57 - 0,1 \cdot (-4,265)\} \approx 3,0$$

$$x_1^{(10)} = \max\{0; 3,658 + 0,1[(-2) \cdot 3,658 + 3,0 \cdot ((-2) \cdot 3,658 + 14)]\} \approx 4,931;$$

$$x_2^{(10)} = \max\{0; 3,669 + 0,1[(-2) \cdot 3,669 + 3,0((-2) \cdot 3,669 + 14)]\} \approx 4,934;$$

$$g(x^{(10)}) \approx 9,451.$$

XI. Almastırıw. $x_1^{(11)}$, $x_2^{(11)}$, hám $g(X^{(11)})$ lardı esaplaymız:

$$x_1^{(11)} = \max\{0; 4,931 + 0,1[(-2) \cdot 4,931]\} \approx 3,945;$$

$$x_2^{(11)} = \max\{0; 4,934 + 0,1[(-2) \cdot 4,934]\} \approx 3,947;$$

$$g(x_2^{(11)}) \approx -0,654.$$

XII. Almastırıw. $\alpha^{(12)}$, $x_1^{(12)}$, $x_2^{(12)}$, hám $g(x^{(12)})$, $f(x^{(12)})$ lardı tabamız:

$$x_1^{(12)} = \max\{0; 3,945 + 0,1[(-2) \cdot 3,945 + 3,06((-2) \cdot 3,945 + 14)]\} \approx 5,026;$$

$$x_2^{(12)} = \max\{0; 3,947 + 0,1[(-2) \cdot 3,947 + 3,06 \cdot ((-2) \cdot 3,947 + 14)]\} \approx 5,026;$$

$$g(x^{(12)}) \approx 10,207;$$

$$f(x^{(12)}) \approx -50,521.$$

XIII. Almastırıw. $x_1^{(13)}$, $x_2^{(13)}$, $g(x^{(13)})$ hám $f(x^{(13)})$ lardı esaplaymız:

$$x_1^{(13)} = \max\{0; 5,026 + 0,1[(-2) \cdot 5,026]\} \approx 4,021;$$

$$x_2^{(13)} = \max\{0; 5,026 + 0,1[(-2) \cdot 5,026]\} \approx 4,021;$$

$$g(x_2^{(13)}) \approx 0,251;$$

$$f(x^{(13)}) \approx -32,337.$$

Bul almastırıwda tabılğan $x=(4,021; 4,021)$ sheshimlerdi kerekli sheshimler dep esaplasa boladı. Sonı aytıw kerek ayırım almastırıwlar processin dawam ettirse dáslepki máseleniń sheshimlerin qálegen anıqlıqta tapsa boladı.

Juwmaqlaw

Kompyuterlik modellestiriw metodologiya sıpatında ózi menen matematikanı, fizikanı, biologiyanı hám basqa ilimiy pánlerdi albastırmaydı, olardıń ornın baspaydı, al sintezlewshi roldi atqaradı. Ásirese Kompyuterlik modellestiriw járdeminde sızıqlı emes programmalastırıwdıń ámeliy máselelerin sheshiw hám analiz islew quramalı sistemalardı úyreniwge úlken járdem beredi.

Pitkeriw qánigelik jumısında sızıqlı emes progammalastırıwdıń ámeliy máseleleri modellestirilip gradientler usılı , Frank-Vulf, Errou –Gurvic, Jariyma, Eń tez túsiw hám grafikalıq usıllar járdeminde kompyuterde sheshildi hám nátiyje alındı.

Solay etip bul pitkeriw qánigelik jumısınıń tiykargı nátiyjeleri tómengilerden ibarat:

- Kompyuterlik modellestiriw máseleleri úyrenildi;
- Sızıqlı emes programmalastırıwdıń ámeliy máseleleri hám sheshiw algoritmleri úyrenildi hám analiz qılındı;
- Sızıqlı emes programmalastırıwdıń ámeliy máseleleri hám sheshiw algoritmleri járdeminde anıq mısallar sheshilip nátiyjeler alındı;

Juwmaqlap aytqanda pitkeriw qánigelik jumısınıń nátiyjelerin TITU Nókis filialınıń kompyuter injiniringi fakultetiniń 3- kursları uhın ótiletuǵın «Sistemalı modellestiriw hám proektlestiriw»predmeti ushın metodikalıq qollanba sıpatında paydalanıw múmkin.

Paydalangan ádebiyatlar