МИНИСТЕРСТВО ПО РАЗВИТИЮ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОММУНИКАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НУКУССКИЙ ФИЛИАЛ ТАШКЕНТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ИМЕНИ МУХАММАДА АЛ-ХОРЕЗМИ

Факультет «КОМПЬЮТЕРНЫЙ ИНЖИНИРИНГ»

КАФЕДРА информационных технологий

Направления компьютер инжиниринг (ИТ-сервис)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой

Айтмуратов Б. Ш.

2017 г. «___»____________

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

на тему: «Применение математического пакета MathCad к решению некоторых оптимизационных задач»

Выпускник: **Темирбекова Ш.Т.**

Научный руководитель: **проф.Утеулиев Н.У.**

НУКУС-2017

Оглавление

Введение

Каждый шаг человеческой деятельности связан с выбором какого-либо решения. Например конструктор принимает решение о параметрах проектируемой системы, военачальник – о проведении военной операции, домохозяйка- о распределении бюджета семьи. К сожалению, нередко спустя некоторое время мы убеждаемся в том, что принятые нами решения оказались неудовлетворительными или неоптимальными. Ошибочность принимаемых решений может привести к тяжелым последствиям, поэтому вполне естественным должно быть стремление человека к наилучшим решениям. Значит, в практике принятия решений в самых разных областях человеческой деятельности приходится сталкиваться с задачами, относящимся к классу оптимизационных.

В настоящее время существует множество методов, алгоритмов и программных средств решения задач оптимизации. Справедливо ожидать возможности решения данных задач системами компьютерной математики, которые представляют собой специализированные программные пакеты решения математических задач разного характера. В данное время к числу популярных систем компьютерной математики относятся Mathematica, Maple, Matlab, Mathcad. А также, широкими возможностями для решения оптимизационных задач обладает табличный процессор Excel.

Система - Mathcad содержит текстовый редактор, мощный вычислитель и простой в применении графический процессор. Это позволяет готовить документы, по виду напоминающие статьи или разделы из книг. Вычислитель системы содержит множество математических функций- от элементарных до весьма специфических. Современные версии Mathcad дают пользователям возможность производить символьные расчёты. В этом случае результатом вычисления выражения является другое выражение. При этом желаемая форма этого второго выражения может быть задана. Первоначальное выражение можно продифференцировать, проинтегрировать, разложить на множители, в ряд и т. д. Целью предлагаемой выпускной квалификационной работы является изучение различных постановок некоторых оптимизационных задач и их решение с помощью математического пакета Mathcad.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы.

В первой главе рассматриваются анализ системы компьютерной математики и решение оптимизационных задач на Mathcad.

Во второй главе рассматриваются оптимизационные задачи в экономике и управлении.

Третья глава посвящена графическому и численному решению некоторых оптимизационных задач.

В заключении приведены основные результаты, полученные в выпускной квалификационной работе и рекомендации по использованию полученных результатов.

Глава I. Анализ системы компьютерной математики и решение оптимизационных задач на Mathcad.

Оптимизационные задачи возникают в связи с многочисленностью возможных вариантов функционирования конкретного объекта, когда возникает ситуация выбора варианта, наилучшего по некоторому критерию, определяемому соответствующей целевой функцией.

Все множество оптимизационных задач можно разделить на задачи линейного и нелинейного программирования. Если целевая функции и функции ограничения линейны, то соответствующая задача является задачей линейного программирования. Если хотя бы одна из указанных функций нелинейна, то рассматриваемая задача является задачей нелинейного программирования.

1.1.Анализ системы компьютерной математики

В этом параграфе анализируем наиболее популярные системы компьютерной математики на предмет возможности решения в их рамках задач оптимизации разных классов.

Приведем задачи оптимизации, решаемые системами компьютерной математики:

1. Matlab. В этой системе компьютерной математики имеется возможность решения практически всех типов задач непрерывной оптимизации. Так, встроенные функции пакета Optimization Toolbox, ассоциированного с Matlab, позволяют получать в общем случае локально-оптимальные решения следующих типов задач: задачи линейного и смешанного линейного программирования; задач одно- и многомерной условной и безусловной нелинейной оптимизации, в том числе задачи квадратичного программирования.

Для решения задач безусловной многомерной нелинейной оптимизации используются метод Нелдера-Мида и квазиньютоновские методы , основанные на аппроксимации матрицы Гессе .

В задачах условной нелинейной оптимизации, в пакете Optimization

Toolbox используется метод последовательного квадратичного программирования (SQP-метод), основанный на квадратичной аппроксимации функции Лагранжа, учитывающей ограничения.

Ещё один пакет-Global Optimization Toolbox-расширяет возможности пакета Optimization Toolbox для решения задач оптимизации. С помощью встроенных функций этого пакета могут решаться задачи оптимизации с высокой степенью нелинейности и с плохой обусловленностью, не поддающиеся решению с помощью классических методов оптимизации.

С помощью встроенной функции gamultiobj, входящей в состав пакета Global Optimization Toolbox, можно решать задачи многокритериальной оптимизации на основе генетического алгоритма, реализованного в этой функции, а также - задачи стохастической оптимизации.

Система Matlab не содержит встроенных функций для решения задач дискретной оптимизации . Некоторые исследователи стремятся восполнить этот пробел путём разработки собственных функций. Система Matlog, являющаяся расширением Matlab, содержит встроенные функции для решения некоторых задач дискретной оптимизации, интерпретируемых как задачи теории графов, а именно: задача коммивояжёра, задача нахождения кратчайшего пути графа, задача отыскания потока сети минимальной стоимости, задача нахождения минимального остовного дерева.

В версиях системы Matlab, начиная с R2014a, для решения задачи БЛП, являющейся частным случаем задачи целочисленного ЛП, может быть использована функция intlinprog созданная для решения задач смешанного ЛП, когда некоторые аргументы целевой функции должны удовлетворять требованию целочисленности.

2. Mathematica. В этой системе компьютерной математики реализовано базовое множество функций (LinearProgramming, Minimize, NMinimize, FindMinimum, Maximize, NMaximize, FindMaximum), комбинации которых позволят пользователю решать основные типы задач линейной, также нелинейной оптимизации.

Функции LinearProgramming, Minimize, Maximize позволяют решать задачи линейной оптимизации, используя симплекс-метод либо же метод внутренней точки, в случае решения задачи ЦЛП-метод ветвей и границ.

Функции NMinimize, NMaximize используют различные итеративные методы для решения задач нелинейной оптимизации, например метод Нелдера-Мида. FindMinimum и FindMaximum позволяют решать задачи нелинейной локальной оптимизации путем использования итерационных методов на основе производных, например, метода Левенберга-Марквардта либо градиентного метода.

На платформе Mathematica разработано множество коммерческих продуктов, сконцентрированных непосредственно на решении задач оптимизации. Одним из наиболее ярких примеров являются пакеты Global Optimization 9, MathOptimizer 2 и MathOptimizer Professional 3, совместимые с версиями Mathematica 8 и Mathematica 9 [6].

3. Maple. Для решения задач оптимизации в этой системе компьютерной математики(СКМ) реализованы следующие пакеты:

Global Optimization,

Optimization ,

Simplex,

а также в случае решения задач на графах:

Network,

Graph Theory .

С помощью команд LPSolve, QPSolve, NLPSolve, содержащихся в пакете Optimization, можно получить решение задач линейного, квадратичного и нелинейного программирования.

Существуют некоторые ограничения. К примеру, спецификация метода, в случае использования команд LPSolve и QPSolve, возможна только в случае решения задач непрерывного программирования. В данном случае предложено использование двух методов: activeset и interiorpoint, первый из которых реализует метод активных множеств, а второй - метод внутренней точки.

В случае если метод не определен, пакет будет использовать второй метод.

Задачи целечисленного линейного программирования с использованием команды LPSolve решаются методом ветвей и границ.

В случае решения задач нелинейной оптимизации (NLPSolve) пользователю доступны следующие методы:

quadratic,

branchandbound,

modifiednewton,

nonlinearsimplex,

pcg

sqp.

В основе команды quadratic лежит использование метода квадратичной интерполяции, принимающий допущение о том, что целевая функция имеет непрерывную производную первого порядка;

Branchandbound-метод ветвей и границ, использующий условие Липшица;

Modifiednewton-модифицированный метод Ньютона, для использования которого необходимо явное определение, в матричном виде, градиента целевой функции;

Nonlinearsimplex-нелинейный симплекс-метод (метод Нелдера-Мида), рекомендован к использованию в случае повышенных условий точности решения;

sqp - метод последовательного квадратичного программирования.

Пакет Simplex содержит в себе команды, позволяющие решать задачи линейной оптимизации. при помощи симплекс-метода.

4. Mathcad. Для численного решения задач поиска локального минимума или максимума в Mathcad представлены встроенные функции Minner, Minimize и Maximize. В случае решения задачи линейной оптимизации Mathcad использует опцию Linear, реализующую метод ветвей и границ. В случае решения задач нелинейной оптимизации предусмотрена возможность выбора метода: метод сопряженных градиентов, Левенберга- Марквардта либо же квазиньютоновский метод. В отличие от рассмотренных выше систем компьютерной математики, в

Mathcad не предусмотрено специальное расширение для работы с графами, однако пользователь может использовать встроенный мощный графический редактор. Однако фактически пользователь может сформулировать задачи на графах в терминах ЦЛП и использовать рассмотренные выше функции. Функциональные возможности Mathcad могут быть расширены за счёт использования динамически подключаемых библиотек, разработанных с использованием высокоуровневых языков программирования.

5. Excel. В состав этой программной системы входит надстройка «Поиск решения», с помощью которой могут быть решены задачи однокритериальной линейной и нелинейной оптимизации. Для решения гладких задач нелинейной оптимизации используется метод обобщённого понижающего градиента, а для негладких задач - эволюционный алгоритм; для решения ЗЛП используется симплекс-мето. Те задачи дискретной оптимизации, которые могут быть сведены к задачам линейного программирования, решаются симплекс-методом. Наиболее популярные системы компьютерной математики (Mathematica, Maple, Matlab, Mathcad), а также система Excel располагают мощными средствами решения задач оптимизации различного типа. При этом разные системы компьтерной математики для решения оптимизационных задач одного типа используют порой одинаковые методы .

1.2 Основы работы с Mathcad

Для начала работы с системой, находясь в менеджере программ, следует войти в соответствующую библиотеку, щёлкнув по пиктограмме MathSoft, далее щёлкнуть дважды левой клавишей мыши по пиктограмме с названием Mathcad, после чего система начнёт загружаться. После завершения загрузки мы оказываемся перед основным меню (рис. 1.1), которое состоит из типичных для среды Windows элементов. Рассмотрим основные, необходимые начинающему пользователю.

В верхней части экрана располагается строка заголовка, содержащая название системы “Mathcad”. Под этой строкой находится строка меню. В результате щелчка мышью на каком-либо из её элементов открывается ниспадающее меню, содержащее набор команд. Рассмотрим это более подробно.

Меню File — файл (рис. 1.2.):

New [F7] — раскрывается окно для нового документа;

Open ... [F5] — позволят выбрать и раскрыть уже существующий документ;

Save [F6] — сохранение на диске документа под ранее определённым именем;

Save as ... — сохранение документа под новым именем;

Export Worksheet**... — сохранение рабочего документа в формате RTF;

Insert ... — вставка в документ;

Mail**... — посылка документа по электронной почте;

Close [Ctrl-F4] — закрытие документа;

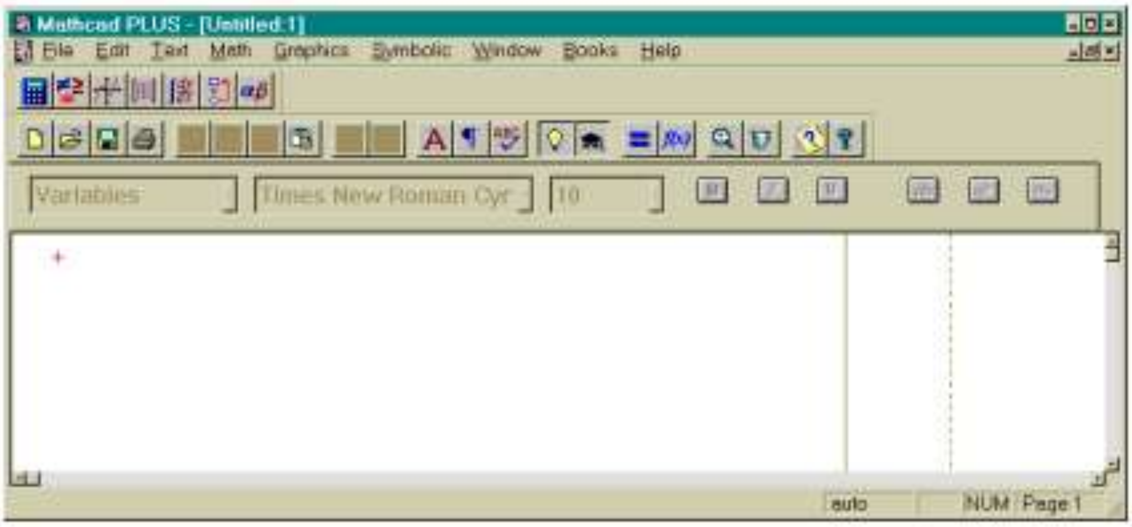


Рис. 1.1

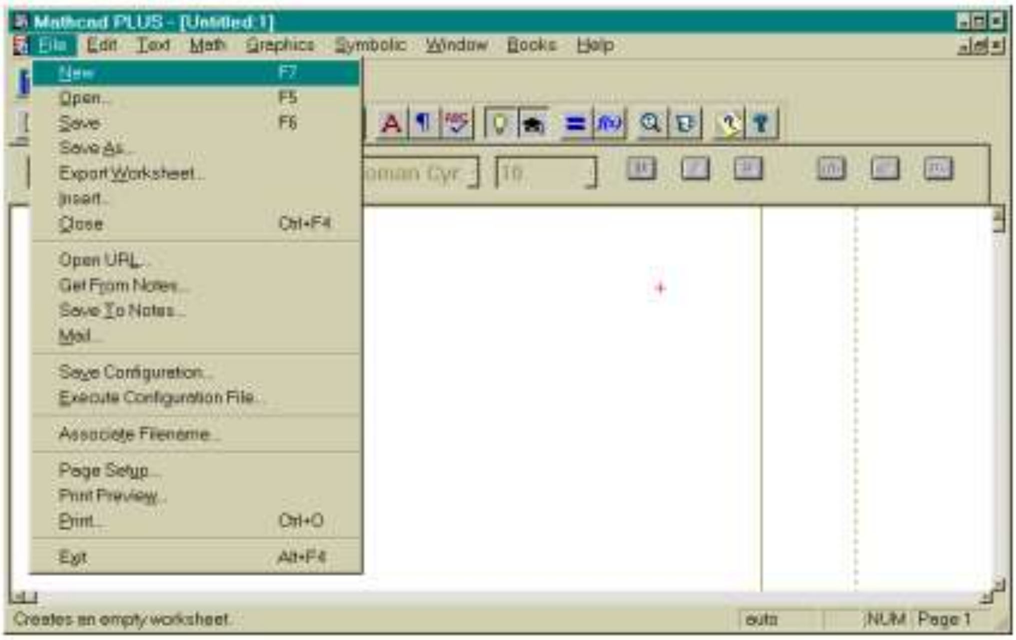


Рис. 1.2

Open URL**... — использование Интернет;

Get from Notes/Save In Notes** — использование базы данных в Lotus Notes;

Save Configuration file**... — сохранение файла конфигурации;

Associate Filename**... — связывание выделенной переменной с файлом данных;

Page Setup ... — установка отступов на странице;

Print Prewiew ... — просмотр документа перед печатью;

Print... [Ctrl-O] — печать документа;

Exit [Alt-F4] — выход из Mathcad.

Примечание. В квадратных скобках записаны названия клавиш, нажатие которых позволяет выполнить соответствующие команды без входа в меню File. Значок «**» отмечает команды, доступные достаточно подготовленным пользователям.

Меню Edit — редактирование (рис. 1.3):

Undo Last Edit [Alt-BkSp] — отмена последнего изменения;

Cut [Ctrl-X] — перемещение выделенного фрагмента документа в буфер обмена — ClipBoard;

Copy [Ctrl-C] — копирование выделенного фрагмента документа в ClipBoard;

Clear — удаление выделенного фрагмента документа;

Paste [Ctrl-V] — вставка содержимого ClipBoard в соответствующее место документа;

Paste Special**... — тоже, что и Paste, но при использовании различных форматов;

View Regions — установка режима подсветки областей;

Select All Regions — выделение всех областей в документе;

Separate Regions [Ctrl-S] — разделение наложившихся областей документа;

Horizontal/Vertical** — выравнивание выделенных областей вдоль горизонтальной/вертикальной линии;

Include ... — включение определений переменных и функций из какого-либо документа в текущий;

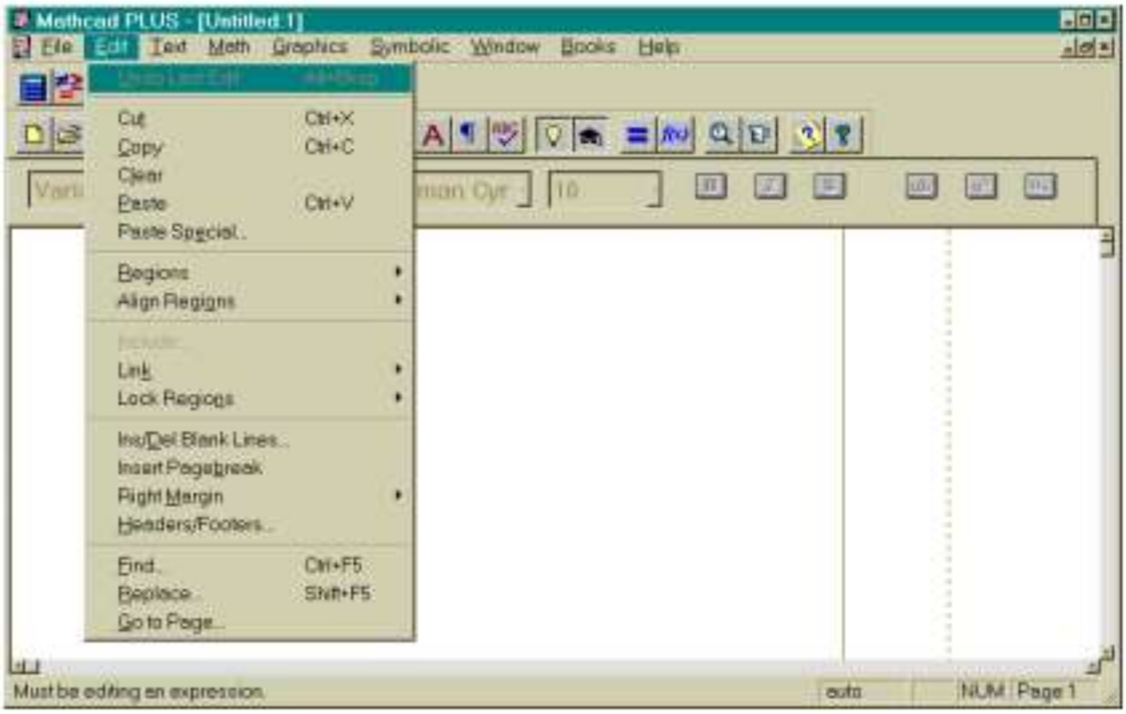


Рис 1.3

Рис. 1.4

New** — создание гипертекстовых ссылок на какой- либо документ;

Erase** — удаление гипертекстовых ссылок, связанных с текущим выделением;

Set Lock Area** — определение защищаемой области рабочего документа;

Lock Area**... — включение защиты области;

Unlock Area**... — редактирование защищаемой области;

Ins/Del Blank Lines ... — вставка/удаление чистой строки;

Insert Pagebreak — вставка независимого от форматирования разрыва страницы;

Set Right Margin — нанесение на лист документа правой границы;

Clear Right Margin — удаление правой границы;

Headers / Footers ... — определение верхних /нижних колонтитулов документа;

Align Region** — выравнивание областей;

Find ...[Ctrl-F5] — поиск заданной строки;

Replace ... [Shift-F5] — нахождение и замена строки;

Go to page ... — переход к указанной странице.

Примечание. В меню File и в дальнейшем имеются строки, снабжённые значком «->». Такие строки содержат подменю, команды которого мы и приводим. Например:

Right Margin

Set Right Margin Clear Right Margin Меню Text — текст (рис. 1.4):

Create Text Region — создание текстовой области, которая начинается в месте расположения курсора;

Create Text Paragraph [Ctrl-T] — создание текстового параграфа;

Embed Math — внедрение формул в текст;

Change Font... — изменение шрифта текста;

Change Paragraph Format... — изменение выравнивания параграфа;Change Default Font — изменение щрифта всего текста, кроме тех мест, где использовалась команда Change Font

Paragraph format... — изменение способов выравнивания текстовых параграфов;

Check Spelling ... — проверка орфографии;

Меню Math — математика (рис. 1.5):

Matrices ... [Ctrl-M] — создание матриц или изменение размеров ранее созданных;

Built-in Variables ... — установка значений системных переменных;

Insert Unit ... [Ctrl-U] — вставка единицы измерений;

Change System of Units — изменение системы единиц;

Dimensional Format... — изменение названий единиц измерения;

Insert Function ... — просмотр и вставка имеющихся функций;

Randomize ... — установка генератора случайных чисел;

Calculate [F9] — расчёты по формулам, расположенным за курсором;

Calculate Worksheet — расчёты по всем формулам документа;

Toggle Equation — выключение / включение формулы из вычислений;

Highlight Equation — изменение цвета выделенного выражения;

Automatic Mode — включение / выключение автоматического режима вычислений;

Live Symbolics — переключение режима автоматических символьных вычислений;

Optimize — переключение режима оптимизации численных расчётов;

Numerical Format ... — изменение формата числа;

Font Tag ... — изменение формата отображения числа;

Change to Greek Variable [Ctrl-G] — замена латинской буквы на греческую;

Меню Graphics — графика (рис. 1.6):

Create X-Y Plot [@] — создание двухмерного графика;

Create Polar Plot [Ctrl-7] — создание полярного графика;

Рис. 1.5

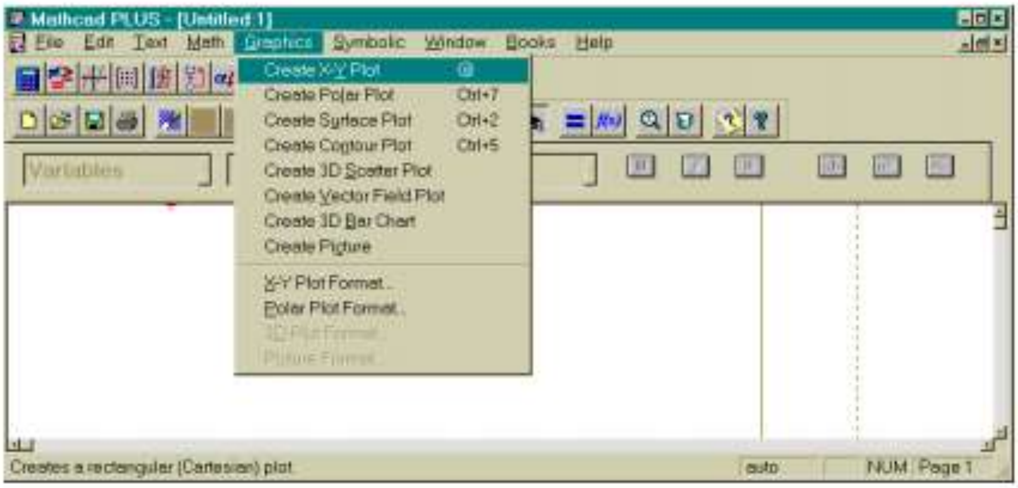


Рис. 1.6

Create Surface Plot [Ctrl-2] — создание поверхности;

Create Contour Plot [Ctrl-5] — создание карты линий уровня;

Create 3D Scatter Plot — создание трёхмерной гистограммы;

Create Vector Field Plot — создание векторного поля на плоскости;

Create 3D Bar Chart — создание изображения совокупности столбиков в трёхмерном пространстве;

Create Picture** — создание области для импорта рисунка;

X-Y Plot Format ... — задание формата двухмерного графика;

Polar Plot Format ... — задание формата полярного графика;

3D Plot Format ... — задание формата трехмерного графика;

Picture Format**... — задание характеристик области для импорта рисунка.

Меню Symbolic — символьные вычисления (рис. 1.7):

Evaluate Symbolically [Shift-F9] — вычисление выражения в символьном виде;

Complex Evaluation — преобразование выражения в комплексном виде;

Floating Point Evaluation — численное вычисление выражения;

Simplify — упрощение выделенного выражения;

Expand Expression — разложение по степеням;

Factor Expression — разложение на множители;

Collect on Subexpression — разложение по подвыражению;

Polynomical Coefficients — нахождение коэффициентов выражения, записанного как полином, относительно выделенной переменной;

Differintiate on Variable — дифференцирование выражения по выделенной переменной;

Integrate on Variable — интегрирование выражения по выделенной переменной;

Solve for Variable — определение выделенной переменной, входящей в выражение;

Substitute for Variable — замена переменной, содержащейся в ClipBoard, вместо какой-либо переменной в выражении всюду, где она встречается;

Expand to Series — разложение в ряд Тэйлора по выделенной переменной;

Convert to Partial Fraction — разложение на элементарные дроби;

Transpose Matrix — транспонирование матрицы;

Invert Matrix — инвертирование матрицы;

Determinant of Matrix — вычисление определителя матрицы;

Fourier Transform — преобразование Фурье относительно выделенной переменной;

Inverse Fourier Transform — обратное преобразование Фурье относительно выделенной переменной;

Z Transform** — вычисление Z — преобразований;

Inverce Z Transform** — вычисление обратного Z — преобразования;

Derivation Format... — задание расположения результата относительно искомого выражения;

Derive in place — замещение исходного выражения результатом его символьного преобразования.

Меню Window — окно (рис. 1.8):

Cascade — расположение документов друг под другом, при этом видны их заголовки;

Tile Horizontal/Vertical — горизонтальное/вертикальное расположение окон без перекрытия;

Arrange Icons — выравнивание пиктограмм документов;

Zoom ... — изменение масштаба изображения документа;

Refresh [Ctrl-R] — обновление экрана;

Create ... — создание анимационного клипа;

Playback — запуск существующего анимационного клипа;

Hide Palette — снятие панели символов;

Hide Tool Bar — снятие верхней панели инструментов;

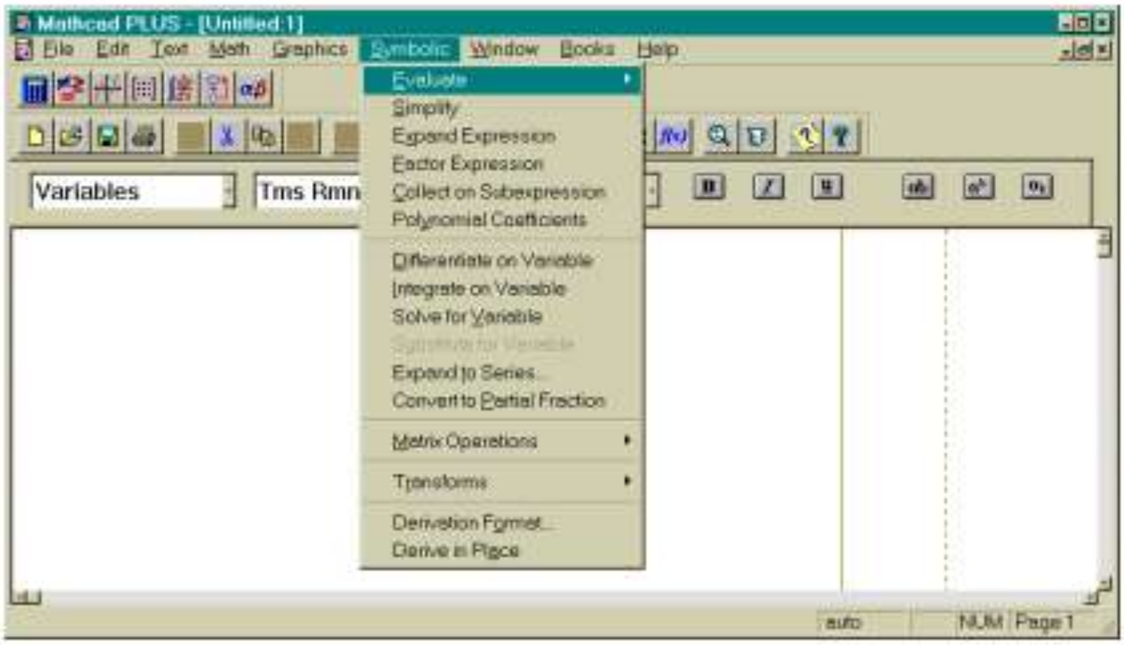


Рис. 1.7

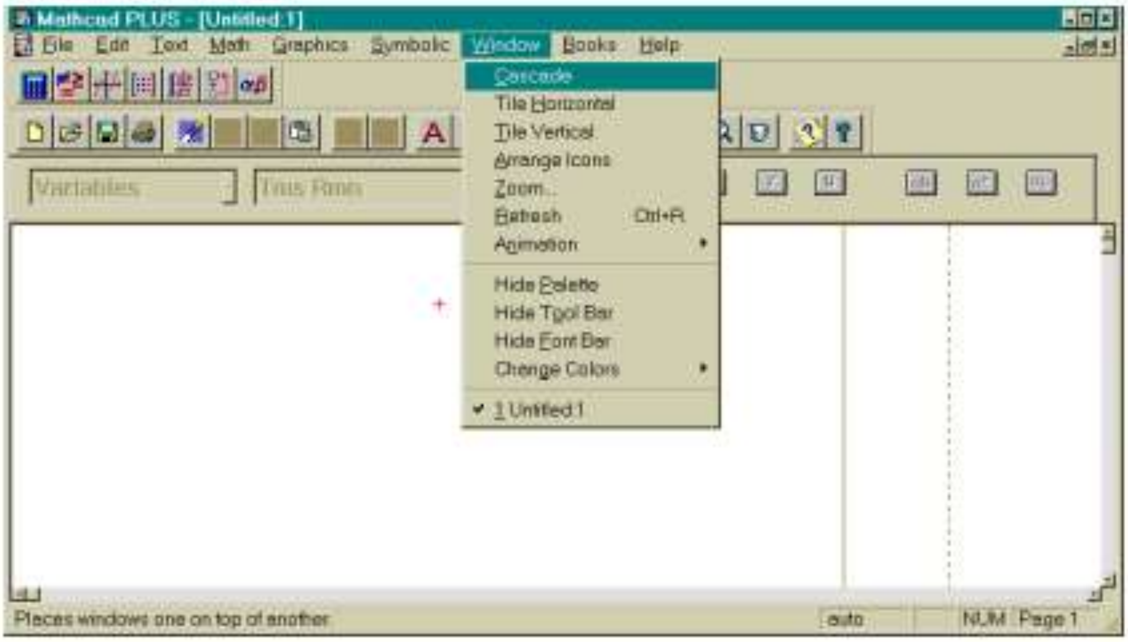


Рис. 1.8

Hide Font Bar — снятие панели шрифтов;

Background Color ... — изменение цвета фона;

Text Color ... — изменение цвета шрифта в текстовых областях;

Equation Color ... — изменение цвета формул;

Highlight Color ... — изменение цвета подсвеченных выражений;

Annotation Color ... — изменение цвета аннотаций к Электронным Книгам.

Меню Books — книги (рис. 1.9):

Open Book ... — открытие Электронной Книги;

History ... — перечисление всех просмотренных разделов;

Search Book ... — поиск по всем разделам Электронной книги;

Annotate Book — сохранение аннотированной копии Электронной Книги;

Annotate Options 4 — опции аннотирования...

Меню Help — Помощь (рис. 1.10):

Index ... [F1] — демонстрация всех тем Help;

Keyboard... — демонстрация тем по функциональным клавишам;

Using Help ... — информация о том, как пользоваться Help.

Quick Sheets ... — быстрые подсказки;

Technical Support ... — техническая поддержка;

About Mathcad ... — информация о версии Mathcad.

Вернёмся к главному меню (см. рис. 1.1).

Под строкой меню находится полоса кнопок, раскрывающая палитру символов : общие арифметические операторы; знаки отношения; различные двух — и трёхмерные графики; матричные и векторные операции; производные, интегралы, пределы, ряды и произведения; программные структуры; греческие буквы.

Далее располагается панель инструментов, содержащая кнопки, которые позволяют с помощью мыши создавать документы эффективнее, чем с помощью клавиатуры

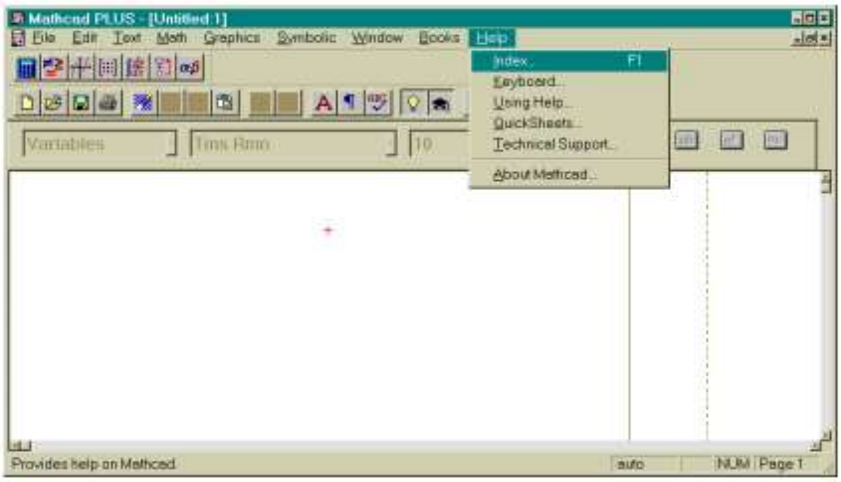
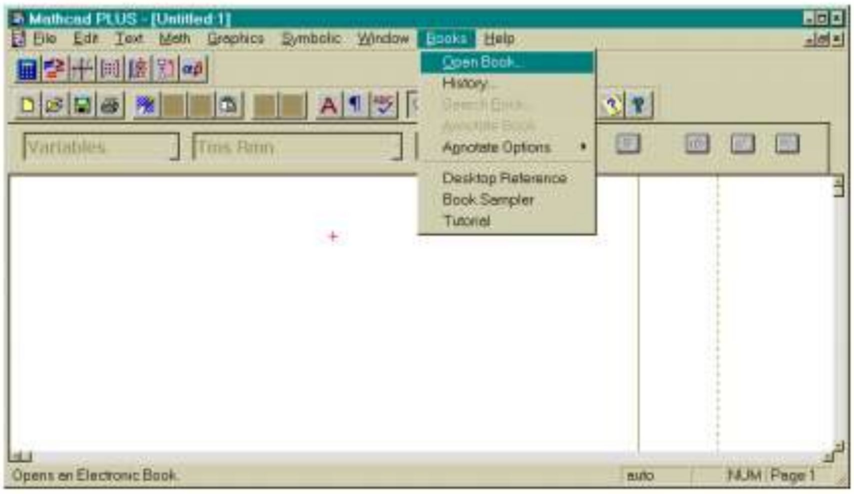


рис. 1.9



Щелчок мышью по кнопке, на которой изображён принтер, инициализирует функцию печати, а щелчок по кнопке с изображением дискеты, инициализирует сохранение документа...

Под панелью инструментов располагается панель шрифтов. Она содержит шаблоны выбора и кнопки, используемые для задания характеристик шрифтов в уравнениях и тексте.

1.3. Создание простейших документов

В строке заголовка основного меню (см. рис. 1.1) имеется запись *[Untitled: 1]* — “без имени: 1”. Это открыт новый документ, которому пока не присвоено имя.

После щелчка в любом месте этого документа, имеется в виду большое белое поле ввода, там появляется небольшой крестик. Вся программа, введенная пользователем, будет размещена в рабочем документе, начиная с места расположения крестика.

Напечатаем:

a: 10 — здесь переменной *“a"* присваивается значение 10.

Вы видите, что в документе набралось:

a:=10.

Знак равенства после набора появляется автоматически. Далее набираем:

$b{:}5$ — переменной $“b”$ присваивается значение 5.

$c{:}a+b$ — переменной “c” присваивается значение “a+b”.

$c=$ — узнаем чему равно “c”.

На экране появляется:

c= 15.

Можно было бы ранее набрать:

a+b =

На экране появляется:

a+b=15.

Представим себе, что пользователь решил сохранить этот расчет на диске в файле “*Mydocl*”.

Для этого необходимо щелкнуть на “дискете” в панели инструментов или в Save As ... меню File. Далее требуется набрать имя документа, которое после щелчка по кнопке “Ok”, появляется в строке заголовка вместо *[Untitled: 1]*. В нашем случае это *“Mydocl.mcd”*. В будущем для открытия этого документа требуется щелкнуть на Open ... меню File. Далее выбрать из списка документов *“Mydocl.mcd*", пометить его щелчком, после чего “Ok”. Теперь можно вновь работать с этим документом: продолжать его, вносить изменения и т.д.

Если Вы хотите начать работу с новым документом, то нажмите New из меню File. Перед Вами откроется новый документ *[Untitled:2]*.

Mathcad отображает формулы в точности в том виде, как их печатают в книгах. Система сама подбирает размеры для дробных черт, скобок, математических символов, чтобы они выглядели так, как их обычно пишут в физико- математической, технической литературе.

После ввода оператора, например “+”, и т.п.,

Mathcad показывает небольшой прямоугольник-поле ввода, которое содержит место для ввода выражений, чисел. Выражения на экране можно редактировать, устанавливая в нужном месте указатель и печатая новые символы, цифры или операторы, многие из которых могут быть набраны с помощью палитры символов, упомянутой ранее.

Ввод текста в документ

Для того, чтобы ввести текст, надо щелкнуть по Create Text Region или Create Text Paragraph из меню Text. Mathcad заменит курсор-крестик на вертикальную линию, называемую маркером ввода. Символы вводятся за ним. Маркер ввода окружен рамкой, обозначающей поле ввода, которое автоматически расширяется по мере необходимости. Для ввода новой строки следует нажать клавишу [Enter],

Итерационные вычисления

В Mathcad есть специальный тип переменных-дискретные аргументы. Такие переменные принимают целые значения. Mathcad вычисляет заданное выражение столько раз, сколько значений содержит дискретный аргумент.

Рассмотрим пример. Пусть пользователю необходимо вычислить функцию $y=10+x^2$ при аргументе, принимающем значения 0, 1, ... ,10. Это задание выполняется так: $j:0;10$ — задание дискретного аргумента. $y/j:10+x$^2- вычисление функции при фиксированном аргументе.

В результате набора на экране появляется для ввода нижнего индекса используется квадратная скобка-если набрать:

$$y=,$$

то перед пользователем появится вектор значений y-вертикальная таблица значений y с одним столбцом.

Задание функций

Использование функций при разработке документов позволяет существенно упростить труд пользователя, сделать программу более наглядной. Рассмотрим такой пример. Пусть в формулу, по которой придется производить повторяющиеся вычисления входит одно и тоже выражение:

$$x^2+2sinx+\frac{5}{[x2+2sinx]^2}+|(x^2+2sinx)^3| \qquad (1.5.1)$$

Этим выражением в данном случае является:

$$x^2 +2\text{-sinx}$$

В подобных ситуациях пользователь может задать функцию:

$$y(x) := x^2 + 2\sin x$$

Теперь в Mathcad (1.5.1) примет вид:

$$y(x) + \frac{5}{(y(x))^2} + |(y(x))^3|$$

Следует помнить, что определение функции должно предшествовать ее использованию. Теперь, если пользователю

необходимо вычислить *y* при различных x, то можно просто набрать *y(0)=* или *y (10)=* и т.п.

Например,

$$y(0)=0.$$

В Mathcad имеется весьма большое число встроенных функций. Эти функции можно просто набирать с клавиатуры, но можно воспользоваться меню. При этом необходимо щелкнуть по Math, далее по Choose Function ... .

Перед пользователем появляется диалоговое окно с прокручивающимся списком названий функций. Теперь следует дважды щелкнуть по имени функции, которую требуется вставить.

1.4. Построение формул и редактирование документа

Редактор формул Mathcad строит математические выражения, собирая отдельные его части, используя правила старшинства операций и некоторые другие правила, которые упрощают ввод знаменателей, показателей степени и выражений в радикалах. Для этого в Mathcad имеется особый маркер ввода. Рассмотрим, для примера, как набирается выражение:

$$\frac{2z - 3b^3}{a + \sqrt{z^3 - 8}}$$

Набираем:

2 z-3 -b ^3 ■

Пока мы печатали символы подряд, согласно правилам старшинства операций. Теперь нам надо имеющееся выражение сделать числителем. Для этого надо использовать выделяющую рамку. Чтобы она появилась, следует нажать клавишу [-](пробел). Последующие нажатия на [-] увеличивают рамку, и она охватит целиком все необходимое пространство.

Далее нажимаем клавишу [/] для появления на экране дробной черты. Теперь печатаем:

$$a + \sqrt{z\verb|^|3}$$

Нажимаем несколько раз [-] пока рамка не охватит z^5, после чего набираем:

-8.

Теперь все выражение набрано.

Основные потребности в редактировании формул можно удовлетворить, если уметь изменять буквы и числа, а также изменять или вставлять операторы.

Для замены буквы или числа надо щелкнуть мышью в месте, где один из этих элементов формулы располагается. Теперь маркер ввода оказывается в нужном месте. При необходимости маркер ввода можно перемещать с помощью клавиш [®], f^{-1}]. При наборе букв и чисел они будут располагаться в том месте, где и маркер ввода. Нажатие клавиши [BkSp] удаляет один символ слева от маркера.

Чтобы научиться заменять операторы, определим наивысший оператор в выражении. Для примера рассмотрим формулу:

$$(a + b)\text{-}(c + d).$$

Здесь наивысшим является оператор умножения, так как использует все компоненты в выражении и в нем нельзя изменить что-нибудь, не изменив результат операции умножения.

При замене оператора главным является расположение выделяющей рамки таким образом, чтобы нужный оператор оказался наивысшим в выделенном выражении.

В качестве примера изменим на «плюс» знак «минус» в числителе ранее рассмотренного выражения:

$$\frac{2z-3b^3}{a+\sqrt{z^3-8}}$$

Установим выделяющую рамку на числителе:

$$\frac{\boxed{2z-3b^3}}{a+\sqrt{z^3-8}}$$

Теперь нажимаем клавишу [Del], удаляя, при этом, наивысший оператор. Остается нажать на клавишу [+]. Знак «минус» в числителе при этом изменяется на «плюс».

1.5. Некоторые возможности символьной математики Mathcad

Построения графиков функции y(x) или поверхностей f(x,y) проводятся с помощью соответствующих меню и базируются на умении задавать функции и дискретные аргументы.

При использовании символьной математики, результатом вычисления выражения является другое выражение. В документе № 1.3 приведены примеры символьных вычислений.

Для символьного вычисления выражения следует $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ обвести выражение и в меню Symbolic щелкнуть по Evaluate, а после эуого по Evaluate Symbolically. В результате получается $\frac{\pi^2}{6}$. Для записи этого результата в виде числа с плавающей запятой следует щелкнуть по Floating Point Evaluation, предварительно поместив $\frac{\pi^2}{6}$-в рамку.

Для символьного упрощения выражения $\frac{(a+b)^3}{a^2+2ab+b^2}$ следует обвести выражение и щелкнуть по Simplify. В результате получается $a + b$.

Для разложения выражения $(a + b)(a + b)$ по степеням следует, обведя его, щелкнуть по Expand Expression. В результате получим $a^2 + 2ab + b^2$ ■

Для разложения на множители используется пункт меню Symbolic — Factor Expression.

Для дифференцирования выражения по переменной следует, пометив ее, щелкнуть по пункту Differentiate on

Variable. Аналогично поступают при интегрировании выражений — пункт меню Integrate on Variable.

Для решения уравнения относительно переменной следует записать его, используя символьный знак равенства [Ctrl]+[=], Далее, пометив переменную, необходимо щелкнуть на Solve on Variable.

В примере: sin(x) = cos(2x)

Результат: $x_1 = \frac{\pi}{6};\ x_2 = -\frac{\pi}{2}$.

Для символьного решения системы уравнений используются ключевые слова Given и Find(x,y). Здесь x, y- переменные, подлежащие определению. Уравнения следует записать, используя символьный знак равенства, между ключевыми словами. После того, как набрано Find(x,y), следует нажать [Ctrl]+[-].

В документе 1.4 приводится несколько примеров символьных действий над матрицами. Для ввода матрицы в документ необходимо из меню Math выбрать Matrices. После щелчка по Matrices следует задать размерность матрицы с помощью раскрывшегося диалогового окна. Теперь требуется создать матрицу и осуществить ввод ее элементов.

Для символьных действий следует заключить матрицу в выделяющую рамку, после чего щелкнуть по пункту меню Matrix Operations. Теперь если мы хотим осуществить:

— транспонирование, то щелкаем по Transpose Matrix;
— обращение, то щелкаем по Invert Matrix;
— вычисление определителя, то щелкаем по Determinant of Matrix.

▲ Документ-N1.1 Построение графика функции Y=Y(X)

Пример а)

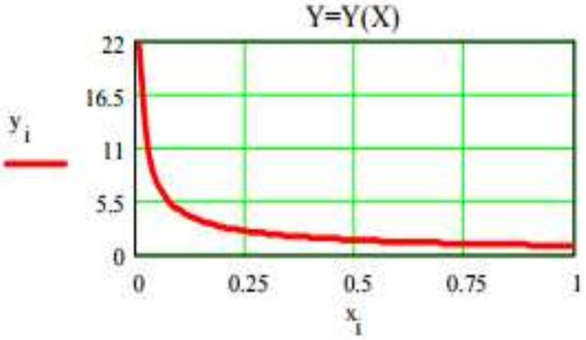
Для построения графика следует:

$y(x) := x^{-\frac{2}{3}}$ -задать соответствующую функцию;

$i := 1..100$ -определить дискретную переменную X , принимающую

$x_i := 0.01 \cdot i$ значения аргумента в желаемом диапазоне;

$y_i := y(x_i)$ -определить дискретные значения функции Y;



-напечатать выражение , график которого нужно получить;

-напечатать переменную-аргумент в среднем поле на оси абсцисс;

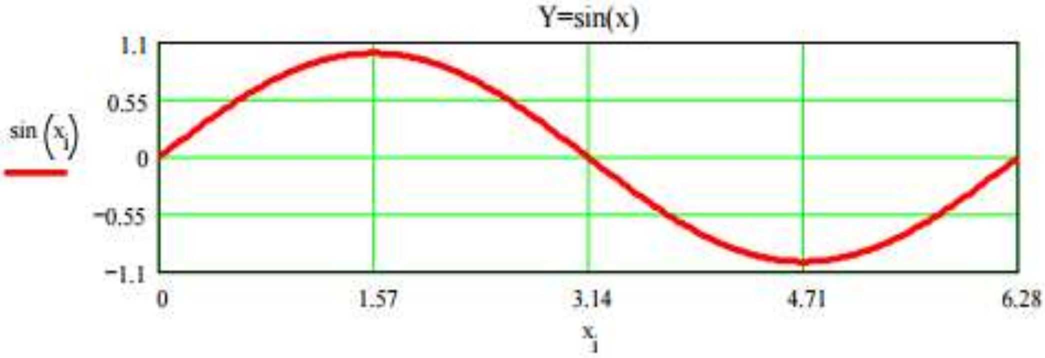
-дважды щёлкнув на графике, задать требуемый формат.

Пример b)

Изображение синусоиды:

$i := 0..359$

$x_i := i \cdot \frac{\pi}{180}$



■

▲

Документ-N1.2

Построение поверхностей

Пример a)

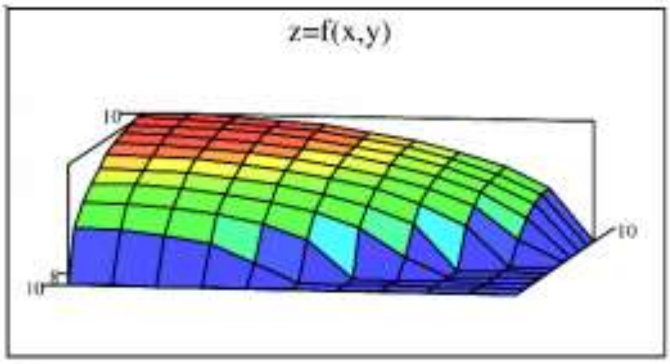
Для построения поверхности следует:

$f(x, y) := \sqrt{100 - x^2 - y^2}$ -задать функцию двух переменных;

$i := 0..10 \quad j := 0..10$ -задать дискретные аргументы, чтобы индексировать точки по осям x,y;

$x_i := i \quad y_j := j$

$Z_{i,j} := f(x_i, y_j)$ -заполнить матрицу (в данном примере Z) соответствующими значениями ;



Z

-из меню Graphics выбрать Create Surface Plot и осуществить ввод матрицы Z в поле ввода;

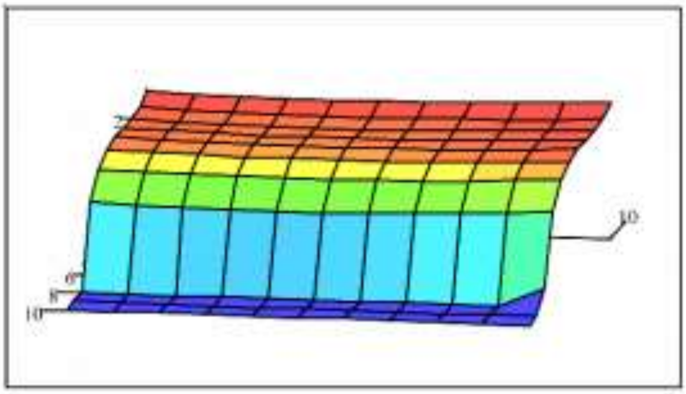
-дважды щёлкнув на изображении, форматировать график.

Пример b)

Данный пример отличается более простым заданием матрицы Z.

$i := 0..10 \qquad j := 0..10$

$$Z_{i,j} := \sqrt{\left(1 - \frac{i}{2.9}\right)^3 + \left(0.5 - \frac{j}{8}\right)^2 + 5}$$



Z

■

Документ-N1.3 Введение в символьную математику

1) Символьные преобразования

Выражение- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ результат- $\frac{1}{6}\cdot\pi^2$ числовой вид- 1.6449341

Числовая проверка- $\sum_{n=1}^{100000} \frac{1}{n^2} = 1.645$

2) Упрощение выражения

Выражение- $\frac{(a+b)^3}{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2}$ результат- $a+b$

3) Разложение по степеням

Выражение- $(a+b)\cdot(a+b)$ результат- $a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$

4) Разложение на множители

Выражение- $a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$ результат- $(a+b)^2$

5) Дифференцирование по переменной

Выражение- $\frac{\sin(2\cdot x)}{x^2}$ результат- $2\cdot\frac{(\cos(2\cdot x)\cdot x-\sin(2\cdot x))}{x^3}$

6) Интегрирование по переменной

Выражение- $2\cdot\frac{(\cos(2\cdot x)\cdot x-\sin(2\cdot x))}{x^3}$ результат- $\frac{\sin(2\cdot x)}{x^2}$

7) Решение уравнения относительно переменной

Выражение- $\sin(x)=\cos(2\cdot x)$

результат- $\begin{bmatrix} \frac{1}{6}\cdot\pi \\ \frac{-1}{2}\cdot\pi \end{bmatrix}$

▲

Документ-N1.4 Символьные действия над матрицами

Задание матрицы

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 5 \\ 3 & 0 & d \end{bmatrix}$$

Для транспонирования: выделяем матрицу; входим в меню Symbolics; щёлкаем по Matrix; щёлкаем по Transpose; в результате получаем

$$\begin{bmatrix} a & b & 3 \\ b & c & 0 \\ 0 & 5 & d \end{bmatrix}$$

Осуществим обращение полученной матрицы. Для этого выделяем матрицу, входим в меню Symbolics; щёлкаем по Matrix; щёлкаем по Invert; в результате получаем

$$\begin{bmatrix} c\cdot\dfrac{d}{\left(a\cdot c\cdot d - b^2\cdot d + 15\cdot b\right)} & \dfrac{-(b\cdot d - 15)}{\left(a\cdot c\cdot d - b^2\cdot d + 15\cdot b\right)} & -3\cdot\dfrac{c}{\left(a\cdot c\cdot d - b^2\cdot d + 15\cdot b\right)} \\ -b\cdot\dfrac{d}{\left(a\cdot c\cdot d - b^2\cdot d + 15\cdot b\right)} & a\cdot\dfrac{d}{\left(a\cdot c\cdot d - b^2\cdot d + 15\cdot b\right)} & 3\cdot\dfrac{b}{\left(a\cdot c\cdot d - b^2\cdot d + 15\cdot b\right)} \\ 5\cdot\dfrac{b}{\left(a\cdot c\cdot d - b^2\cdot d + 15\cdot b\right)} & -5\cdot\dfrac{a}{\left(a\cdot c\cdot d - b^2\cdot d + 15\cdot b\right)} & \dfrac{\left(a\cdot c - b^2\right)}{\left(a\cdot c\cdot d - b^2\cdot d + 15\cdot b\right)} \end{bmatrix}$$

Для нахождения определителя: выделяем матрицу . входим в меню Symbolics; щёлкаем по Matrix; щёлкаем по Determinant; в результате получаем

$$a\cdot c\cdot d - b^2\cdot d + 15\cdot b$$

Того же эффекта можно добиться, выделив выражение определителя матрицы, и щелкнув по Evaluate в меню Symbolics

$$\left|\begin{bmatrix} a & b & 3 \\ b & c & 0 \\ 0 & 5 & d \end{bmatrix}\right|$$

в результате получаем $a\cdot c\cdot d - b^2\cdot d + 15\cdot b$

■

1.6. Решение оптимизационных задач без ограничений

Для этого используются две функции MathCAD:

- Maximize(f, <список параметров>) – вычисление точки максимума;

- Minimize(f, <список параметров>) – вычисление точки минимума, где f - имя функционала, определенного до обращения к функции;

<список параметров> – содержит перечисление (через запятую) имен параметров, относительно которых решается оптимизационная задача.

Функции Maximize и Minimize возвращают вектор искомых параметров, при которых исследуемая функция имеет максимальное или минимальное значение соответственно.

Перед обращением к функциям Maximize, Minimize надо обязательно задать начальные значения параметров, по которым ищется решение оптимизационной задачи.

Пример 1. Дан функционал:

$$f(u,v) = \frac{1}{4\pi} e \cdot \frac{-41 - 32u - 16u^2 - 4v^2 + 20v}{32} \qquad (1.3.1)$$

Определить значения u, v, при которых функционал f(u,v) достигает максимального значения.

Решение. Фрагмент документа MathCAD, решающий эту задачу, приведен на рис. 1.1. В последних строках документа выполнена проверка найденного решения на максимум при небольшом отклонении от точки минимума (-1, 2.5) значение функционала уменьшается (хотя и незначительно).

1.7. Решение оптимизационных задач с ограничениями

При решении оптимизационных задач с ограничениями используются те же функции Maximize, Minimize, но они должны использоваться в составе блока решения Given, имеющего сле-дующую структуру:

<Функционал>

<Начальные условия>

Given

<Ограничения>

<Вызов функции Maximize или Minimize >

$$d(u,v) := \frac{1}{4\cdot\pi}\cdot e^{\frac{-41-32\cdot u-16\cdot u^2-4\cdot v^2+20\cdot v}{32}}$$

$u := 0 \quad v := 0$ *Задание точки "старта"*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := Maximize(d,u,v) \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2.5 \end{pmatrix} \quad d(u,v) = 0.0795775$$

$$d(u+0.01\cdot u, v+0.01\cdot v) = 0.0795673$$

$$d(u-0.001\cdot u, v-0.001\cdot v) = 0.0795774$$

Рис. 1.1. Максимизация функционала (1.3.1)

Перед блоком решения надо задать начальные значения искомых переменных. Внутри блока задаются ограничения в виде равенств или неравенств, определяющие допустимую область значений параметров оптимизации. Рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. (задача нелинейного программирования). Дан функционал:

$$F(a,b) = 100(a-b)^2 - 50\frac{a}{b} \qquad (1.3.2)$$

и ограничения в виде

$$a + 2b \le 5; \; b \ge 1; \; a \ge 0. \qquad (1.3.3)$$

Определить значения a, b, доставляющие максимальное значе-ние функционала (1.3.2) и удовлетворяющие неравенствам (1.3.3).

Решение. Фрагмент документа, решающий эту задачу, показан на рис. 1.2. Точка «старта» алгоритма берется из допустимой области, определяемой ограничениями (1.3.3).

$$F(a,b) := 100\cdot(a-b)^2 - 50\cdot\frac{a}{b}$$

$a := 1 \qquad b := 1$

Given

$a + 2\cdot b \le 5 \qquad b \ge 1 \qquad a \ge 0$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := Maximize(F, a, b) \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \end{pmatrix} \quad F(a,b) = 625$$

$a + 2\cdot b = 5$ **Проверка ограничений**

$b = 2.5$

Рис. 1.2. Условная максимизация функционала (1.3.2)

Пример 2. (задача нелинейного программирования). Пусть вектор v состоит из трех проекций и дан функционал:

$$N(v) = \|v\|^2 + 2v_1 - v_2 + 2v_3. \tag{1.3.4}$$

Вычислить точку минимума этого функционала при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{3} v_i = 1,\ v_i \ge 0.2,\ i = \overline{1,3}. \tag{1.3.5}$$

Решение. Фрагмент документа, решающий эту задачу, показан на рис. 1.3. В нижней части фрагмента выполнена проверка найденного решения–проекции вектора v. Видно, что все проекции удовлетворяют ограничениям (1.3.5).

В рассмотренных примерах целевая функция является нелинейной, и примеры относятся к задачам нелинейного программирования. Рассмотрим несколько примеров задач линейного программирования, в которых и целевая функция, и ограничения являются линейными функциями переменных задачи [12]. Рассмотренные задачи часто встречаются в планировании и организации производства.

$$N(v) := (|v|)^2 + v \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$v_2 := 1$ $\qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *Точка старт*

Given

$\sum v = 1 \qquad v > \dfrac{1}{5}$

$v := Minimize(N, v) \qquad v = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.6 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ *Решение*

$N(v) = 0.64 \qquad \sum v = 1$ *Проверка решения*

Рис. 1.3. Условная максимизация функционала (1.3.4)

Пример 3. (оптимальное планирование производства). Цех малого предприятия должен изготовить 100 изделий трех типов (x_1,x_2,x_3) и не менее 20 штук изделий каждого типа. На изделия уходит 4, 3.4 и 2 кг металла соответственно, при его общем запасе 340 кг, а также расходуются по 4.75, 11 и 2 кг пластмассы, при ее общем запасе 700 кг. Прибыль, полученная от каждого изделия, равна 4, 3 и 2 руб. Определить, сколько изделий каждого типа необходимо выпустить для получения максимальной прибыли в рамках установленных запасов металла и пластмассы.

Эта задача относится к очень широкому классу задач, получившему название «оптимальный план производства при ограниченных ресурсах». Очевидно, что линейные ограничения могут распространяться не только на сырьевые ресурсы, но и на оборудование, людские ресурсы и т.д.

Решение. Фрагмент документа MathCAD, решающий эту задачу, показан на рис. 1.4. В конце фрагмента выполнена проверка найденного решения (56, 20, 24). Видно, что по требуемому количеству металла (340 кг) достигнут уровень запаса – 340 кг (такое ограничение называют активным).

$$f(x_1, x_2, x_3) := 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3$$

$$x_1 := 1 \quad x_2 := 1 \quad x_3 := 1$$

Given

$$x_1 \geq 20 \quad x_2 \geq 20 \quad x_3 \geq 20$$

$$4 \cdot x_1 + 3.4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 340 \qquad \text{ограничение на металл}$$

$$4.75 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 700 \qquad \text{ограничение на пластмассу}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := Maximize\,(f, x_1, x_2, x_3) \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$4 \cdot x_1 + 3.4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 340$$

$$4.75 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 534 \qquad \text{Проверка Ограничений}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

Рис. 1.4. Решение задачи оптимального планирования

Пример 4. (задача оптимального распределения оборудования). Двум погрузчикам разной мощности не более чем за 24 часа нужно погрузить на первой площадке 230 тонн, на второй -218 тонн. Первый погрузчик на первой площадке может погрузить 10 тонн в час, на второй -12 тонн в час. Второй

погрузчик на каждой площадке может погрузить по 13 тонн в час. Стоимость работ, связанных с погрузкой одной тонны первым погрузчиком на первой площадке-8 у. е., на второй-7 у. е. Стоимость работ второго погрузчика соответственно-12 у. е. и 13 у. е. Нужно составить план работы, т.е. найти, сколько времени должен проработать каждый погрузчик на каждой площадке, чтобы стоимость всех работ по погрузке была минимальной. По техническим причинам первый погрузчик на второй площадке должен работать не более 16 часов.

Решение. Фрагмент документа MathCAD, в котором решается рассматриваемая задача, приведен на рис. 1.5. В качестве искомых параметров приняты следующие переменные: x_{ij}-время работы i-го погрузчика на j-й площадке. Обратите внимание на ограничения в виде равенств, стоящих в блоке Given, в которых стоит «жирный» знак =, вводимый с палитры инструментов «Логическая».

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) := 8 \cdot x_{11} + 7 \cdot x_{12} + 12 \cdot x_{21} + x_{22}$$

$x_{11} := 0 \quad x_{12} := 0 \quad x_{21} := 0 \quad x_{22} := 0$ **Начальные значения переменных**

Given

$10 \cdot x_{11} + 13 \cdot x_{21} = 230$ ***Объем работ на 1-ой площадке***

$12 \cdot x_{12} + 13 \cdot x_{22} = 218$ ***Объем работ на 2-ой площадке***

Задание ограничений по времени работы

$$x_{11} + x_{12} \le 24 \quad x_{21} + x_{22} \le 24 \quad x_{12} \le 16$$

$$x_{11} \ge 0 \quad x_{12} \ge 0 \quad x_{21} \ge 0 \quad x_{22} \ge 0$$

$$\begin{pmatrix} x_{c11} \\ x_{c12} \\ x_{c21} \\ x_{c22} \end{pmatrix} := Maximize(f, x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 17.692 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Проверка ограничений

$$10 \cdot x_{c11} + 13 \cdot x_{c21} = 230$$

$$12 \cdot x_{c12} + 13 \cdot x_{c22} = 218$$

$$x_{c11} + x_{c12} = 16 \quad x_{c21} + x_{c22} = 19.692 \quad x_{c12} = 16$$

Рис. 1.5. Решение задачи распределения оборудования

В нижней части документа выполнена проверка полученного решения (переменные xc11,xc12,xc21,xc22). Видно, что найденное решение удовлетворяет ограничениям задачи.

1.8. Решение оптимизационных задач из условий экстремума целевой функции

Один из подходов к решению оптимизационных задач как с ограничениями, так и без ограничений является решение системы уравнений, полученной из условия экстремума целевой функции относительно переменных оптимизационной задачи.

Напомним, что необходимые условия минимума или максимума функционала $f(x_1,x_2,\ldots x_m)$ (условия экстремума) имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, x_2, ..., x_m) = 0, \quad j = 1, 2, ..., m. \tag{1.5.1}$$

Достаточные условия максимума или минимума основаны на исследовании знака определенности матрицы вторых частных производных:

$$\Omega = \begin{Vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_{m-1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_{m-1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{m-1} \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{m-1} \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{m-1}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{m-1} \partial x_m} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_{m-1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{Vmatrix}. \tag{1.5.2}$$

Для упрощения изложения ниже будем полагать, что в точке экстремума, удовлетворяющей системе уравнений (1.5.1), будут удовлетворяться и достаточные условия. Поэтому решение оптимизационной задачи будем находить как решение системы уравнений (1.5.1).

Как найти это решение в пакете MathCAD? Условия экстремума (1.5.1) порождают систему уравнений (чаще всего нелинейных), которые располагаются в блоке Given, вместе с ограничениями, определяющими допустимую область. Само решение ищется с помощью функций Find, Minerr.

Краткая информация о функциях Find, Minerr применительно к решению систем уравнений есть в [3, 5].

Функция Find находит вектор решения системы уравнений. Вызов этой функции имеет вид Find(x) Find($x_1,x_2,\ldots,x_m$), где $x_1,x_2,\ldots,x_m$- проекции вектора решения. Если система уравнений не имеет решения, то следует вызвать функцию Minerr(x), которая возвращает вектор приближенного решения.

В функциях Find(x), Minerr(x) реализованы различные численные алгоритмы, и пользователю предоставляется возможность либо задать один из реализованных алгоритмов , либо предоставить право выбора алгоритма пакету MathCAD. Для этого необходимо щелкнуть правой кнопкой мыши на имени функции Find(x) и в появившемся контекстном меню (рис. 1.6) и выбрать подходящий алгоритм. Пользователю, не «искушенному» в вычислительных методах, рекомендуется предоставить выбор MathCAD, включив для этого команду «Автовыбор». В контекстном меню всегда можно увидеть выбранный алгоритм вычисления решения системы уравнений.

Аналогично можно задать алгоритм решения и для функции Minerr(x).

Использование численных методов в функциях Find(x), Minerr(x) требует перед блоком Given задать начальные значения переменным, по которым осуществляется поиск корней уравнения.

Пример 1. В качестве тестового функционала при поиске точки минимума часто используется функционал Розенброка:

$$f(x,y) = 100\,(y - x^2) + (1-x)^2\,. \tag{1.5.3}$$

Рис. 1.6. Задание алгоритма функции Find

«Поверхность» этого функционала напоминает глубокий овраг, что сильно осложняет работу многих алгоритмов минимизации. Требуется вычислить точку минимума функционала при ограничениях:

$$x \ge 0; \quad y \ge 0; \quad y \le 9 - x\,. \tag{1.5.4}$$

Решение. Документ MathCAD решения этой задачи показан на рис. 1.7. В последней строке вычислено значение функционала в точке экстремума (1,1) и показано, что в точке (1+ 0.001,1) значение функционала возросло, т.е. точка (1,1)– точка минимума функционала (1.5.3).

$$f(x,y) := 100\cdot\left(y - x^2\right)^2 + (1-x)^2$$

$$x := 2 \qquad y := 3$$

Given

$$\frac{d}{dx}f(x,y) = 0 \qquad \frac{d}{dy}f(x,y) = 0 \qquad \textit{Условия экстремума}$$

$$x \ge 0 \qquad y \ge 0 \qquad y \le 9 - x \qquad \textit{Ограничения}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := Find(x,y) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{Решение}$$

$$f(x,y) = 0 \qquad f(x + 0.001, y) = 4.014 \times 10^{-4}$$

Рис. 1.7. Минимизация функции Розенброка

Глава II. Графическое и численное решение оптимизационных задач

2.1.Методика графического решения задач линейного программирования

В частном случае, когда количество переменных равно двум возможна геометрическая интерпретация задачи линейного программирования. В этом случае математическая формулировка задачи упростится.

Необходимо найти переменные x_1, x_2, максимизирующие целевую функцию: $f(x_1, x_2)=c_1x_1+ c_2x_2\rightarrow max$

При ограничениях:

$a_{11}x_1+ a_{12}x_2\leq b_1$

$a_{21}x_1+ a_{22}x_2\leq b_2$

$x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$.

Каждое из неравенств означает, что допустимые значения переменных-координаты точек, лежащих в области, ограниченной координатными осями (условия $x_1>0$, $x_2>0$) ниже соответствующих прямых, заданных уравнениями:

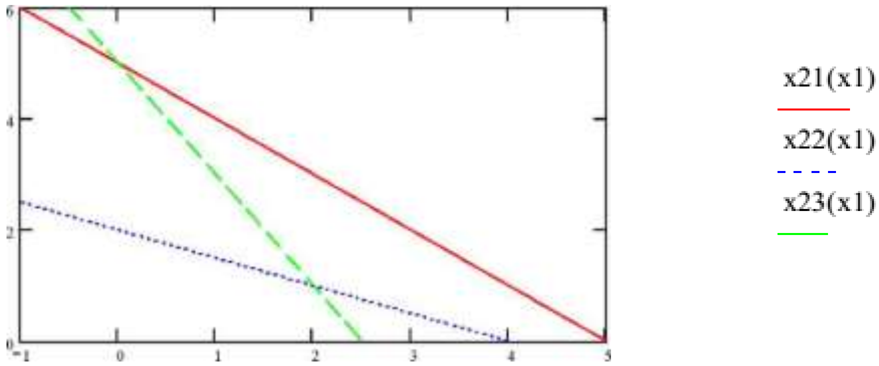
$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1$

$a_{21}x_1+ a_{22}x_2=b_2$

…………

$a_{m1}x_1+ a_{m2}x_2=b_m$

Для определенности будем считать, что m=3. Тогда множество допустимых значений переменных геометрически изображается точками, расположенными внутри и на границе заштрихованного многоугольника (рис. 1).



x_1

рис. 1

Линии уровня целевой функции $f(x_1,x_2)=c_1x_1+c_2x_2=C$ - семейство параллельных прямых. Чем больше значение константы C, тем правее расположена соответствующая прямая. Из приведенной геометрической интерпретации сразу следует следующий путь решения: необходимо построить совокупность параллельных прямых $c_1x_1+c_2x_2=C$ (рис.1), соответствующих разным числам, выбрать среди них такую прямую, которая имеет общие точки с многоугольником допустимых значений переменных и максимальное C.

2.2. Пример графического решения задачи нелинейного программирования

Фирма в процессе производства использует 2 ресурса в количестве x_1,x_2 единиц. Известны цены на ресурсы $c_1=20$, $c_2=10$ единиц и количество финансовых средств V=1000 единиц, находящихся в распоряжении фирмы. Необходимо определить оптимальную комбинацию ресурсов, которая максимизирует объём произведенной продукции фирмы.

Математическая формализация задачи

Целевая функция

$f(x_1,x_2)=0.95x_1{*}4x_2{*}6\rightarrow max$

Ограничения:

$c_1x_1+c_2x_2 \le 1000$; $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Последовательность действий при графическом решении задач]

1.Запустите пакет Mathcad.Установите порядок автоматических вычислений в пакете Mathcad.

2.Запишете в виде $x_2=k*x_1+b$ уравнения прямых, ограничивающих область допустимых значений переменных.

c1 := 20 c2 := 10 V := 1000

Уравнение изокосты

c1 • x1 + c2 • x2= V

$x21(x1) := \frac{V - c1 \cdot x1}{c2}$

Изобразите на графике соответствующие прямые и определите область допустимых значений переменных см. рис. 5

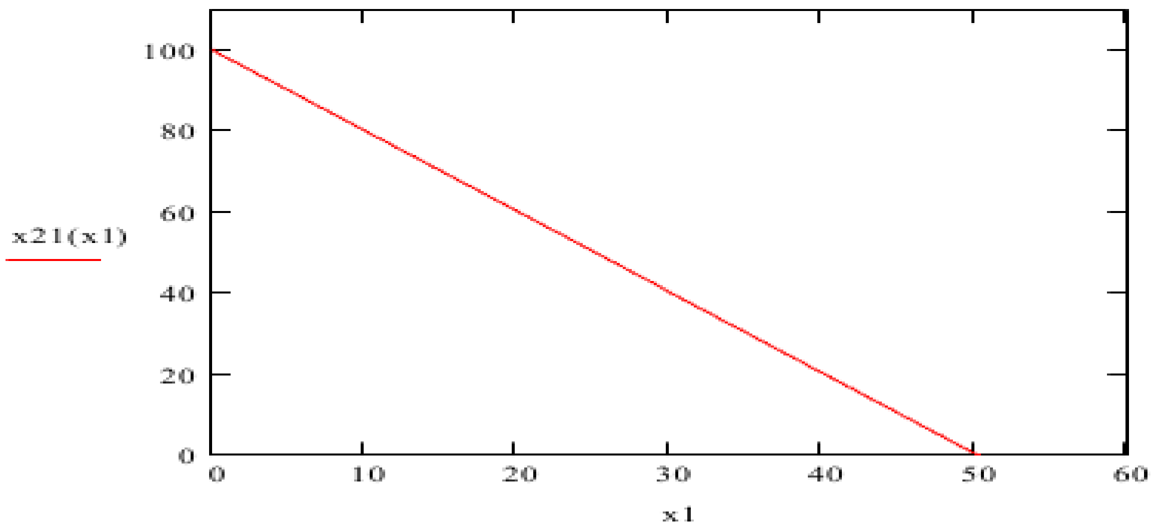


рис. 5

Область допустимых значений x_1 и x_2 - треугольник,ограниченный прямой и координатными осями абсцис и ординат.

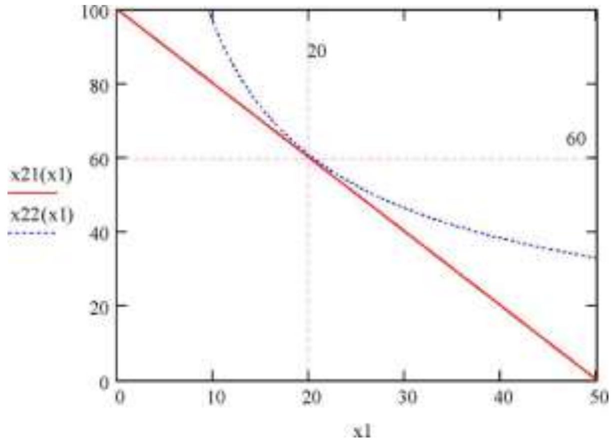
Постройте для одного или нескольких значений C линии уровня целевой функции $f(x_1,x_2)=C$ (столько, сколько понадобиться, чтобы понять, имеет ли задача решение и где достигается экстремум).

$a_0 := 0.95$ $a_1 := 0.4$ $a_2 := 0.6$ $C := 37$

Уравнение изокванты

$a_0 \bullet x_1 a_1 \bullet x_2 a_2 = C$

$x_{22} := \left(\frac{C}{a0 \cdot x1^{a1}} \right)^{\frac{1}{a2}}$



Для определения точки пересечения изокванты и изокосты установите на графике маркеры с помощью меню Format/Graph/X-Y Plot опций Show markers

При c=37 целевая функция достигает максимума в точке (20,60).

6.Запишите ответ.

Ответ:Оптимальная комбинация ресурсов x_1=20, x_2=60

2.3. Численное решение оптимизационных задач

Методика численного решения оптимизационных задач

Методика численного решения оптимизационных задач состоит из следующих этапов.

Запуск приложения Mathcad 2000 Professional. Выполнить двойной щелчок мышкой на пиктограмме Mathcad 2000 Professional рабочего стола Windows или выбрать мышкой кнопку основного меню Windows Пуск, пункт Программы, пункт MathSoftApps, пункт Mathcad 2000 Professional.

Ввод поясняющего текста и комментариев. Разместить курсор (красный крестик) в месте ввода текста. Выбрать пункт меню Insert (Вставка). В появившемся меню выбрать пункт Text Region (Текстовая область) или в месте расположения курсора нажать клавишу с двойной кавычкой (команда для ввода текста). Ввести в появившийся шаблон поясняющий текст или комментарии (название оптимизационной задачи, экономический смысл ограничений и т.д.). По окончании ввода текста вывести курсор за пределы текстовой области.

Ввод целевой функции (критерия оптимизации). Разместить курсор в месте ввода математического выражения. Ввести имя критерия оптимизации с аргументами, записанными через запятые и заключенными в скобки. Ввести знак присваивания := выбрав из математического меню Calculator (Калькулятор) или нажав комбинацию клавиш Shift+:. Ввести все выражение целевой функции.

Ввод начальных приближений для переменных. Вводятся аналогично целевой функции. Начальные значения переменных выбираются студентом самостоятельно.

Начало ввода блока Given...Maximize(Minimize). Ввести ключевое слово Given, используя клавиатуру.

Ввод ограничений. При вводе ограничений использовать жирный знак равенства, выбрав его с помощью меню Boolean (Отношения) или комбинации клавиш Ctrl-=.

Окончание блока Given...Maximize(Minimize). Ввести вектор- столбец переменных, выбрав мышкой математическую палитру Matrix (Матрица) или нажав комбинацию клавиш Ctrl+=. В появившемся диалоговом окне Insert Matrix в поле Rows (строки) ввести число строк, а в поле Columns (Столбцы) -1. Ввести знак присваивания, а затем функцию maximize для максимизации целевой функции или minimize для минимизации.

Вывод результатов решения. Ввести вектор-столбец переменных и знак «равно».

2.4 Пример численного решения задачи линейного программирования

Математическая формулировка задачи

Найти максимум целевой функции $f(x_1,x_2)=2\cdot x_1+3\cdot x_2$

при ограничениях

$x_1 + x_2 \leq 60$

$x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 40$

$2 x_1 + x_2 \leq 50$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Начальные приближение

$x_1 := 1,\ x_2 := 0$

Целевая функция $f(x_1,x_2) := (2x_1 + 3 \cdot x_2)$

Given

$x_1 + x_2 \leq 60$

$x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 40$

$2 x_1 + x_2 \leq 50$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \text{Maximize}(f, x_1, x_2)$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

$f(x_1,x_2)=70$

Оптимальный объём выпуска первого вида продукции $x_1=20$, второго $x_2=10$.

2.5. Пример численного решения задачи нелинейного программирования

$a_0 := 0.95$ $a_1 := 0.4$ $a_2 := 0.6$ $c_1 := 20$ $c_2 := 10$ $V := 1000$

Целевая функция

$f(x_1,x_2) := a_0 \cdot x_1 a_1 \cdot x_2 a_2$

$x_1 := 0,\quad x_2 := 0$

Given

$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = 1000$

$x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \text{Maximize}(f, x_1, x_2)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$f(x_1, x_2) = 36.73$

Оптимальная комбинация ресурсов $x_1=20$, $x_2=60$

Заключение

В закючении можно отметить, что система Mathcad-современный программный продукт, который может оказать существенную помощь студентам, инженерам и всем тем, кто выполняет какие-либо расчёты. Основное достоинство этой системы заключается в отсутствии необходимости пользователю осваивать основы программирования, так как Mathcad предельно приближен к обычному математическому языку. Поэтому на решение поставленных задач затрачивается незначительное время.

Таким образом, основные результаты выпускной квалификационной работы следующие:

-Изучена научная и методическая литература по тематике выпускной квалификационной работы;

-Проанализированы системы компьютерной математики и решение оптимизационных задач на Mathcad;

-показана методика решения конкретных оптимизационных линейных и нелинейных задач графическим и численным методами;

-решены конкретные оптимизационные задачи с помощью графического и численного методов на Mathcad.

Литература