

R.M.TURGUNBAEV

MATEMATIK ANALIZ

Bir o'zgaruvchili funksiyaning differensial hisobi

Pedagogika oliy o'quv yurtlari bakalavrlari

uchun uslubiy qo'llanma

Toshkent-2006

Annotatsiya

Ushbu uslubiy qo'llanma pedagogika oliy o'quv yurtlari «Matematika va informatika» bakalavriat yo`nalishi bo'yicha «Matematik tahlil» fanidan tuzilgan dasturga mos yozilgan. Bunda «Matematik tahlil» fanining biri o'zgaruvchili funksiyaning differensial hisobi bo'limining nazariy qismi to'liq yoritilgan, misol-masalalar yechib ko'rsatilgan, mustaqil yechish uchun misol va masalalar hamda nazariyani mustahkamlash uchun savollar keltirilgan.

Taqrizchilar:

O'.Toshmetov, fizika-matematika fanlari
nomzodi, TDPU professori.

M. A. Berdiqulov, fizika-matematika fanlari
nomzodi, dotsent.

Ma'sul muharrir:

B.Islomov, fizika-matematika fanlari doktori

Metodik ko'rsatma Nizomiy nomidagi Toshkent Davlat Pedagogika Universiteti kengashida ko'rib chiqilgan va nashrga tavsiya qilingan.

2006 yil « » _____ –sonli majlis bayoni.

© Nizomiy nomidagi Toshkent davlat
pedagogika universiteti

MUNDARIJA

KIRISH	6
I BOB. HOSILA	
1-§. Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar	
1.1. Egri chiziq urinmasi.	7
1.2. Egri chiziq urinmasining burchak koeffitsientini topish masalasi	8
1.3. Harakatdagi nuqta tezligini topish haqidagi masala	8
2-§. Hosila	
2.1. Funksiya hosilasining ta'rifi	9
2.2. Hosilaga ega bo'lgan funksiyaning uzluksizligi.	10
2.2. Bir tomonli hosilalar	11
2.3. Cheksiz hosilalar	12
3-§. Hosilaning geometrik va fizik ma'nolari	
3.1. Hosilaning geometrik ma'nosi	12
3.2. Hosilaning fizik ma'nosi	13
3.3. Urinma va normal tenglamalari.	14
3.4. Ikki chiziq orasidagi burchak	15
4-§. Hosilani hisoblash qoidalari	
4.1. Yig'indining hosilasi	16
4.2. Ko'paytmaning hosilasi	17
4.3. Bo'linmaning hosilasi	17
5-§. Murakkab funksiyaning hosilasi. Teskari funksiyaning hosilasi	
5.1. Murakkab funksiyaning hosilasi	19
5.2. Teskari funksiyaning hosilasi	21
6-§. Asosiy elementar funksiylarning hosilalari	
6.1. $y=x^{\mu}$ ($x>0$) darajali funksiyaning hosilasi	21
6.2. Ko'rsatkichli funksiyaning hosilalari	22
6.3. $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$, $x>0$) logarifmik funksiyaning hosilasi	23
6.4. Trigonometrik funksiylarning hosilalari	23
6.5. Teskari trigonometrik funksiylarning hosilalari	25
7-§. Logarifmik hosila. Daraja-ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi	
7.1. Logarifmik hosila	26
7.2. Daraja-ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi	27
8-§. Yuqori tartibli hosila	
8.1. Yuqori tartibli hosila tushunchasi	28
8.2. Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosi	30
8.3. Yuqori tartibli hosilaning xossalari. Leybnits formulasi	32
9-§. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasi	
9.1. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiya tushunchasi	33
9.3. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasi	34
10-§. Skalyar argumentli vektor funksiya va uning hosilasi	
10.1. Vektor funksiya tushunchasi	36
10.2. Vektor funksiyaning hosilasi	36

II BOB. DIFFERENSIAL

1-§. Differensiallanuvchi funksiya. Differensiallanuvchi bo‘lishining zaruriy va yetarli sharti

1.1. Differensiallanuvchi funksiya tushunchasi 39

1.2. Differensiallanuvchi bo‘lishining zaruriy va yetarli sharti 39

2-§. Funksiya differensial, uning geometrik va fizik ma’nolari.

2.1. Funksiya differensial 40

2.2. Differensialning geometrik ma’nosi 40

2.3. Differensialning fizik ma’nosi 41

3-§. Elementar funksiyalarning differensiallari. Differensial topish qoidalari. Differensial formasining invariantligi.

3.1. Elementar funksiyalarning differensiallari 41

3.2. Differensial topish qoidalari 42

3.3. Differensial formasining invariantligi 42

4-§. Taqribiy hisoblashlarda differensialning qo‘llanilishi 43

5-§. Funksiyaning yuqori tartibli differensiallari

5.1. Yuqori tartibli differensiallar 43

5.2. Murakkab funksiyaning yuqori tartibli differensiallari 44

III BOB. DIFFERENSIAL HISOBNING ASOSIY TEOREMALARI

VA ULARNING TATBIQLARI

1-§. O‘rta qiymat haqidagi teoremlar

1.1. Ferma teoremasi 46

1.2. Roll teoremasi 47

1.3. Lagranj teoremasi 48

1.4. Koshi teoremasi 49

2-§ Aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidalari

2.1. $\frac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmaslik 51

2.2. $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi aniqmaslik 54

2.3. Boshqa ko‘rinishdagi aniqmasliklar 55

3-§. Teylor formulasi

3.1. Teylor ko‘phadi. Peano qoldiq hadli Teylor formulasi 57

3.2. Teylor formulasining Lagranj ko‘rinishdagi qoldiq hadi 59

3.3. Teylor formulasining Koshi ko‘rinishdagi qoldiq hadi 60

4-§. Ba’zi bir elementar funksiyalar uchun Makloren formulasi

4.1. Ko‘rsatkichli funksiya uchun Makloren formulasi 60

4.2. Sinus funksiya uchun Makloren formulasi 62

4.3. Kosinus funksiya uchun Makloren formulasi 62

4.4. $f(x)=(1+x)^\mu$ funksiya uchun Makloren formulasi 63

4.5. $f(x)=\ln(1+x)$ funksiya uchun Makloren formulasi 63

4.6. Teylorformulasi yordamida taqribiy hisoblash 64

IV BOB. HOSILA YORDAMIDA FUNKSIYANI TEKSHIRISH

1-§. Birinchi tartibli hosila yordamida funktsiyani tekshirish	
1.1. Funktsiyaning o'zgarmaslik sharti	67
1.2. Funktsiyaning o'sishi va kamayishi	67
1.3. Funktsiyaning nuqtada monotonlik sharti	70
2-§. Birinchi tartibli hosila yordamida funktsiyani ekstremumga tekshirish	
2.1. Funktsiyaning ekstremumlari	72
2.2. Ekstremumning zaruriy sharti	72
2.3. Ekstremum mavjud bo'lishining yyyetarli shartlari	75
3-§. Yuqori tartibli hosilalar yordamida funktsiyani ekstremumga tekshirish	
3.1. Ikkinchi tartibli hosila yordamida ekstremumga tekshirish	77
3.2. Teylor formulasi yordamida ekstremumga tekshirish	78
4-§. Funktsiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari	80
5-§. Egri chiziqning qavariqligi va botiqligi, burilish nuqtasi	
5.1. Egri chiziqning qavariqligi va botiqligi	81
5.2. Egri chiziqning burilish nuqtasi	83
6-§. Asimptotalar	
6.1. Vertikal asimptota	85
6.2. Og'ma asimptota	86
7-§. Funktsiyani to'la tekshirish va grafigini yasash	89
Adabiyotlar	95

KIRISH

Ushbu qo'llanma pedagogika universitetlari va pedagogika institutlari matematika-informatika bakalavriat yo'nalishida tahsil olayatgan talabalar uchun mo'ljallangan bo'lib, matematik analiz dasturida bir o'zgaruvchili funksiyaning differensial hisobi bo'limi bo'yicha ko'rsatilgan barcha mavzulardan nazariy va qisman amaliy materiallar keltirilgan.

Qo'llanmani tayyorlashda ta'lim bosqichlari orasidagi izchillikka va ta'limning kasbiy yo'nalganlik tamoyillariga asoslanildi. Shuningdek, qo'llanmani tayyorlashda shu paytgacha o'zbek tilida mavjud bo'lgan darslik va o'quv qo'llanmalardan ijodiy foydalanildi. Foydalanilgan adabiyotlardagi terminlar, tushunchalar va belgilashlarni saqlab qolishga harakat qilindi.

Qo'llanma to'rtta bobdan iborat bo'lib, birinchi bobda hosila mavzusi batafsil yoritilgan. Differensial mavzusi alohida bob sifatida kiritildi. Bu bobdagi ba'zi teoremlarning isboti o'quvchilarga mashq sifatida qoldirildi. Uchinchi bobda differensial hisobning asosiy teoremlari va ularning tatbiqlari qaralgan. Asosiy teoremlarning ayniyat va tengsizliklarni isbotlashda qo'llanilishiga oid masalalar qaralgan. Funksiya va uning bir nechta Teylor ko'phadlarini bitta koordinatalar tekisligida chizish yordamida ularning yaqinlashishini ko'rgazmali tavsiflashga harakat qilindi. Teylor formulasi yordamida e sonining irratsional son ekanligining isboti keltirildi, shuningdek Teylor formulasining taqribiy hisoblashdagi tatbiqlari yoritildi.

To'rtinchi bobda differensial hisobning funksiyaning tekshirishga, grafigini chizishga tatbiqlari yoritilgan.

Qo'llanmada ko'p misollar yechib ko'rsatilgan, grafiklar keltirilgan bo'lib, ular nazariy materiallarni o'zlashtirishga, chuqurroq tushunishga yordam beradi. Grafiklarni chizish va ba'zi taqribiy hisoblashlarda MAPLE dasturidan foydalanildi.

Qo'llanmada teorema, ta'rif, misollar har bir paragraf bo'yicha, formulalar boblar uchun alohida nomerlangan, ularga ko'rsatmalar bob, paragraf va nomeri qayd qilingan. Rasmlar ketma-ket nomerlangan.

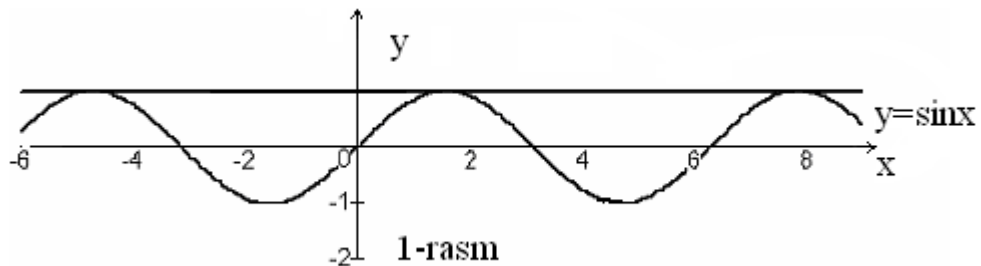
I BOB. HOSILA

1-§. Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar

1. Egri chiziq urinmasi.

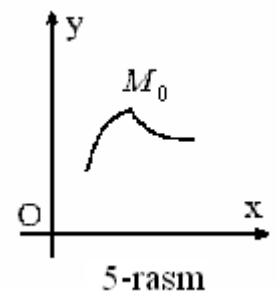
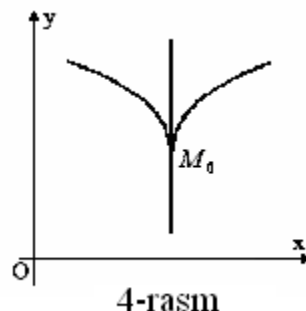
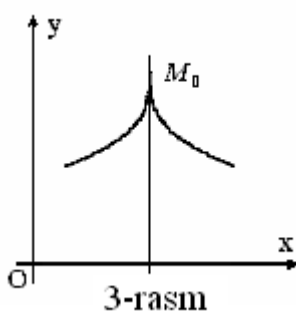
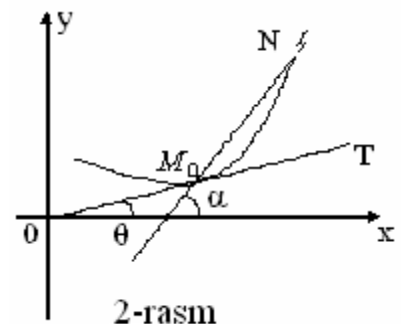
Siz aylananing urinmasi tushunchasi bilan tanishsiz. Aylanaga o'tkazilgan urinma shu aylana bilan yagona umumiy nuqtaga ega, shuningdek aylana to'g'ri chiziqning bir tomonida joylashgan bo'lar edi. Endi tekislikda ixtiyoriy egri chiziq berilgan bo'lsa, unga o'tkazilgan urinmani qanday aniqlash mumkin degan masalani qaraylik.

Urinmani egri chiziq bilan yagona umumiy nuqtaga ega bo'lgan to'g'ri chiziq sifatida aniqlash mumkin emas, chunki, masalan $y=ax^2$ parabolaning o'qi parabola bilan faqat bitta umumiy nuqtaga ega, lekin parabola urinmaydi. Egri chiziq urinma to'g'ri chiziqning bir tomonida joylashishi muhim xususiyat emas, chunki $y=ax^3$ egri chiziqqa absissa o'qi (0;0) nuqtada urinadi, lekin egri chiziq bu o'qni shu nuqtada kesib o'tadi. Urinmaning egri chiziq bilan yagona umumiy nuqtaga ega bo'lishi ham uning muxim



xususiyati bo'la olmaydi. Masalan $x=1$ to'g'ri chiziq $y=sinx$ sinusoida bilan cheksiz ko'p umumiy nuqtaga ega, ammo u sinusoidaga urinadi. (1-rasm)

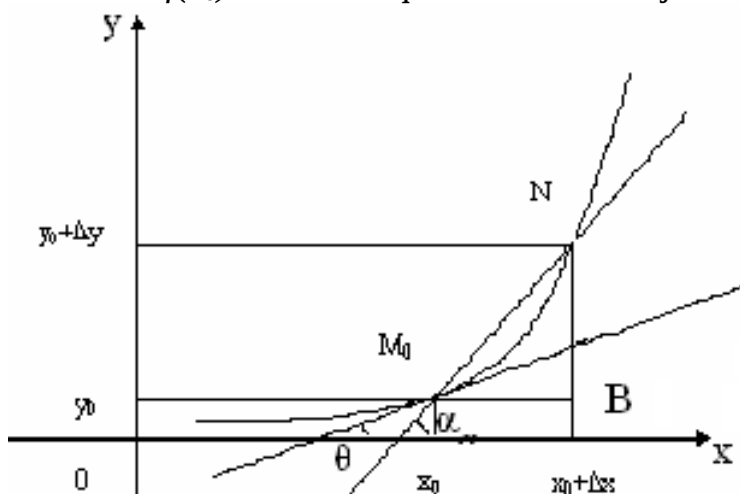
Urinmaga ta'rif berish uchun limit tushunchasidan foydalanishga to'g'ri keladi. Faraz qilaylik G biror egri chiziq yoyi, M_0 shu egri chiziqning nuqtasi bo'lsin. Egri chiziqqa tegishli N nuqtani tanlab, M_0N kesuvchi o'tkazamiz. Agar N nuqta egri chiziq bo'ylab M_0 nuqtaga yaqinlashsa, M_0N kesuvchi M_0 nuqta atrofida buriladi. Shunday holat bo'lishi mumkinki, N nuqta M_0 nuqtaga yaqinlashgan sari M_0N kesuvchi biror M_0T limit vaziyatga intilishi mumkin. Bu holda M_0T to'g'ri chiziq G egri chiziqning M_0 nuqtasidagi urinmasi deyiladi. (2-rasm)



Agar kesuvchining limit holati mavjud bo'lmasa, u holda M_0 nuqtada urinma o'tkazish mumkin emas deyiladi. Bunday hol M_0 nuqta egri chiziqning qaytish nuqtasi (3,4-rasmlar), yoki sinish (o'tkirlanish) nuqtasi (5-rasm) bo'lganda o'rinli bo'ladi.

2. Egri chiziq urinmasining burchak koeffitsientini topish masalasi.

Endi G egri chiziq biror oraliqda aniqlangan uzluksiz $y=f(x)$ funksiyaning grafigi bo'lgan holda urinmaning burchak koeffitsientini topaylik. Qaralayotgan $f(x)$ funksiya grafigini ifodolovchi G chiziqqa tegishli M_0 nuqtaning abssissasi x_0 , ordinatasi $f(x_0)$ va shu nuqtada urinma mavjud deb faraz qilaylik.



6-rasm

G chiziqda M_0 nuqtadan farqli $N(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ nuqtani olib, M_0N kesuvchi o'tkazamiz. Uning Ox o'qi musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchagini α bilan belgilaymiz (6-rasm). Ravshanki, α burchak Δx ga bog'liq bo'ladi: $\alpha = \alpha(\Delta x)$ va $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BN}{M_0B} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ o'rinli.

Urinmaning abssissa o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagini θ bilan belgilaymiz. Agar $\theta \neq \pi/2$ bo'lsa, u holda $\operatorname{tg} \alpha$ funksiyaning uzluksizligiga ko'ra $k_{\text{urinma}} = \operatorname{tg} \theta = \lim_{N \rightarrow M_0} \operatorname{tg} \alpha$, va N nuqtaning M_0 nuqtaga intilishi

Δx yning 0 ga intilishiga teng kuchli ekanligini e'tiborga olsak, $k_{\text{urinma}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ tenglikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib, $y=f(x)$ funksiyaning abssissasi x_0 bo'lgan nuqtasida novertikal urinma o'tkazish mumkin bo'lishi uchun shu nuqtada $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ limitning mavjud bo'lishi zarur va yyetarli, limit esa urinmaning burchak koeffitsientiga teng bo'lar ekan.

3. Harakatdagi nuqta tezligini topish haqidagi masala. Faraz qilaylik moddiy nuqta $s=s(t)$ qonuniyat bilan to'g'ri chiziqli harakatlanayotgan bo'lsin. Ma'lumki, fizikada nuqtaning t_0 va $t_0 + \Delta t$ vaqtlar orasida bosib o'tgan $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ yo'lining shu vaqt oralig'iga nisbati nuqtaning o'rtacha tezligi deyilar edi: $v_{o'rt} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$. Ravshanki, Δt qancha kichik bo'lsa, $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ o'rtacha tezlik nuqtaning t_0 paytdagi tezligiga shuncha yaqin bo'ladi. Shuning uchun

nuqtaning t_0 paytdagi oniy tezligi deb $[t_0; t_0 + \Delta t]$ vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlikning Δt nolga intilgandagi limitiga aytiladi.

$$\text{Shunday qilib, } v_{\text{oniy}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Yuqoridagi ikkita turli masalani yechish jarayoni bitta natijaga (odatda matematikada bunday holda bitta matematik modelga deb aytiladi) - funksiya orttirmasining argument orttirmasiga bo'lgan nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi limitini hisoblashga keltirildi. Ma'lum bo'lishicha, ko'pgina masalalar yuqoridagi kabi limitlarni hisoblashni taqoza qilar ekan. Shu sababli buni alohida o'rganish maqsadga loyiqdir.

2-§. Hosila.

1. Funksiya hosilasining ta'rifi.

Aytaylik $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo'lsin. Bu intervalga tegishli x_0 nuqta olib, unga shunday Δx orttirma beraylikki, $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ bo'lsin. Natijada $f(x)$ funksiya ham x_0 nuqtada $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ orttirmaga ega bo'ladi.

Ta'rif. Agar $\Delta x \rightarrow 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning limiti

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ mavjud va chekli bo'lsa, bu limit } f'(x_0)$$

funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va $f'(x_0)$, yoki $y'(x_0)$, yoki $\frac{dy(x_0)}{dx}$

orqali, ba'zan esa $y'|_{x=x_0}$ yoki $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ kabi belgilanadi.

Bu holda funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega deb ham aytiladi.
Demak,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Bunda $x_0 + \Delta x = x$ deb olaylik. U holda $\Delta x = x - x_0$ va $\Delta x \rightarrow 0$ bo'lib, natijada

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $x \rightarrow x_0$ da $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nisbatning limiti sifatida ham ta'riflanishi mumkin:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Yuqoridagi limit mavjud bo'lgan har bir x_0 ga aniq bitta son mos keladi, demak $f'(x)$ - bu yangi funksiya bo'lib, u yuqoridagi limit mavjud bo'lgan barcha x nuqtalarda aniqlangan. Bu funksiya $f(x)$ funksiyaning hosila funksiyasi, odatda, hosilasi deb yuritiladi.

Endi hosila ta'rifidan foydalanib, $y = f(x)$ funksiya hosilasini topishning quyidagi algoritmini berish mumkin:

1⁰. Argumentning tayinlangan x qiymatiga mos funksiyaning qiymati $f(x)$ ni topish.

2⁰. Argument x ga $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasidan chiqib ketmaydigan Δx orttirma berib $f(x+\Delta x)$ ni topish.

3⁰. Funksiyaning $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ orttirmasini hisoblash.

4⁰. $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ nisbatni tuzish.

5⁰. $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ nisbatning $\Delta x \rightarrow 0$ dagi limitini hisoblash.

Misollar. 1. $y=kx+b$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Hosila topish algoritmidan foydalanamiz.

1⁰. Argument x ni tayinlab, funksiya qiymatini hisoblaymiz: $f(x)=kx+b$.

2⁰. Argumentga Δx orttirma beramiz, u holda $f(x+\Delta x)=k(x+\Delta x)+b=kx+k\Delta x+b$.

3⁰. Funksiya orttirmasi $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=(kx+k\Delta x+b)-(kx+b)=k\Delta x$.

4⁰. $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k$.

5⁰. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k = k$.

Demak, $(kx+b)'=k$ ekan.

Xususan, $y=b$ o'zgarmas funksiya (bu holda $k=0$) uchun $(b)'=0$; $y=x$ ($k=1$) funksiya uchun $x'=1$ bo'ladi.

2. $y=\frac{1}{x}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. 1⁰. $f(x)=\frac{1}{x}$.

2⁰. $f(x+\Delta x)=\frac{1}{x+\Delta x}$. Bu erda umumiylikni cheklamagan holda $x>0$ va

$|\Delta x|<x$ deb hisoblaymiz.

3⁰. $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.

4⁰. $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)\Delta x} = -\frac{1}{x^2+x\Delta x}$.

5⁰. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2+x\Delta x}\right) = -\frac{1}{x^2}$.

Demak, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

2. Hosilaga ega bo'lgan funksiyaning uzluksizligi. $f(x)$ funksiyaning hosilasi faqat bu funksiya uzluksiz bo'lgan nuqtalardagina mavjud bo'lishi mumkinligini ko'rsatamiz. Oldin ushbu teoremani qaraylik.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya x nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya x nuqtada hosilaga ega bo'lsin. Demak, ushbu $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ limit mavjud va $f'(x)$ ga teng. Bizga agar funksiya chekli limitga ega bo'lsa, uni limit va cheksiz kichik yig'indisi ko'rinishda ifodalash mumkinligi ma'lum (). Bizning holimizda limitga ega bo'lgan funksiya deb funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatini olamiz. U holda ushbu tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

bu erda $\alpha = \alpha(\Delta x)$ va $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$. Bundan funksiya orttirmasi $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkinligi kelib chiqadi:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \quad (2.1)$$

Bu tenglikdan, agar $\Delta x \rightarrow 0$ bo'lsa, u holda $\Delta y \rightarrow 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning x nuqtada uzluksizligini bildiradi. Teorema isbot bo'ldi.

Bu teoremaning teskarisi o'rinli emas, ya'ni funksiyaning nuqtada uzluksizligidan uning shu nuqtada hosilasi mavjudligi kelib chiqavermaydi. Masalan, $y = |x|$ funksiya x ning barcha qiymatlarida, xususan $x = 0$ nuqtada uzluksiz, ammo $x = 0$ nuqtada hosilaga ega emas. Bu funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi orttirmasi $\Delta y = |\Delta x|$ bo'lib, undan

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1,$$

va $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning $\Delta x \rightarrow 0$ dagi limiti mavjud emasligi kelib chiqadi, demak $f(x) = |x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada hosilaga ega emas.

3. Bir tomonli hosilalar.

Ta'rif. Agar $\Delta x \rightarrow +0$ ($\Delta x \rightarrow -0$) da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning limiti

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \left(\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

mavjud va chekli bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng (chap) hosilasi deb ataladi va $f'(x_0 + 0)$ ($f'(x_0 - 0)$) kabi belgilanadi.

Odatda funksiyaning o'ng va chap hosilalari bir tomonli hosilalar deb ataladi.

Yuqoridagi misoldan, $f(x) = |x|$ funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi o'ng hosilasi 1 ga, chap hosilasi - 1 ga tengligi kelib chiqadi.

Funksiyaning hosilasi ta'rifi va bir tomonli hosila ta'riflardan hamda funksiya limiti mavjudligining zaruriy va yyetarli shartidan quyidagi teoremaning o'rinli ekanligi kelib chiqadi:

Teorema. Aytaylik $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida uzluksiz bo'lsin. U holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lishi uchun $f'(x_0+0)$, $f'(x_0-0)$ lar mavjud va $f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$ tenglikning o'rinli bo'lishi zarur va yyetarli bo'ladi.

Bu teoremaning isbotini o'quvchiga mashq sifatida qoldiramiz.

4. Cheksiz hosilalar. Ba'zi nuqtalarda $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ limiti $+\infty$ ($-\infty$) ga teng bo'lishi mumkin. Bunday hollarda shu nuqtalarda funksiya cheksiz hosilaga ega yoki funksiyaning hosilasi cheksizga teng deyiladi.

Ushbu $y = \sqrt[3]{x}$ funksiya uchun $\Delta y / \Delta x$ nisbatning $\Delta x \rightarrow 0$ dagi limitini qaraylik. Funksiyaning 0 nuqtadagi orttirmasini hisoblaymiz: $\Delta y = \Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = f(0 + \Delta x) - f(\Delta x) = \sqrt[3]{\Delta x}$.

Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbati $\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}$ va bu nisbatning $\Delta x \rightarrow 0$ dagi limiti $+\infty$ ga teng.

Demak, $y = \sqrt[3]{x}$ funksiya $x=0$ nuqtada cheksiz hosilaga ega ekan.

Cheksiz hosila uchun ham bir tomonli cheksiz hosila tushunchasini ham qarash mumkin.

Agar $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada $+\infty$ ($-\infty$) hosilaga ega bo'lsa, u holda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = +\infty \quad (-\infty)$$

munosabatning o'rinli ekanligini isbotlash mumkin. Bu tasdiqning teskarisi ham o'rinli ekanligi o'z-o'zidan ravshan.

Berilgan x_0 nuqtada $f'(x_0-0)=-\infty$, $f'(x_0+0)=+\infty$, ($f'(x_0-0)=+\infty$, $f'(x_0+0)=-\infty$) bo'lishi ham mumkin. Bunday holda $f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada hosilaga (xatto cheksiz hosilaga ham) ega emas deb hisoblanadi.

Misol tariqasida $y=\sqrt[3]{x^2}$ funksiyaning $x=0$ nuqtadagi bir tomonli hosilalarini aniqlaylik. Bu funksiyaning $x=0$ nuqtadagi orttirmasi $\Delta y(0) = \sqrt[3]{(\Delta x)^2}$ ga teng va

$\frac{\Delta y(0)}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$ ekanligini ko'rish qiyin emas. Shu sababli $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ va

$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$ bo'ladi. Demak, $y'(-0)=-\infty$, $f'(+0)=+\infty$ bo'lib, funksiya $x=0$

nuqtada cheksiz hosilaga ega emas.

3-§. Hosilaning geometrik va fizik ma'nolari.

Urinma va normal tenglamalari

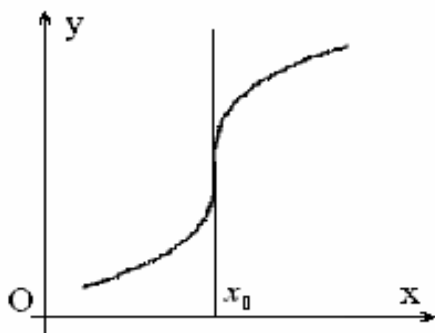
1. Hosilaning geometrik ma'nosi.

Yuqorida biz, agar $y=f(x)$ funksiya grafigining $M_0(x_0;f(x_0))$ nuqtasida urinma o'tkazish mumkin bo'lsa, u holda urinmaning burchak koeffitsienti

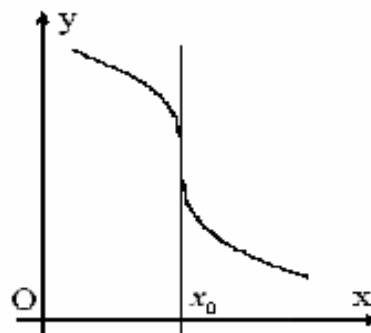
$k_{urinma} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ekanligini ko'rsatgan edik. Bundan hosilaning geometrik ma'nosi kelib chiqadi:

$y=f(x)$ funksiya grafigiga absissasi $x=x_0$ bo'lgan nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti hosilaning shu nuqtadagi qiymatiga teng $k_{urinma}=f'(x_0)$.

Faraz qilaylik $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksiz va $f'(x_0)=+\infty$ bo'lsin. U holda funksiya grafigi absissasi $x=x_0$ nuqtada vertikal urinmaga ega bo'lib, unga nisbatan funksiya grafigi 7-rasmda ko'rsatilgandek joylashadi.



7-rasm



8-rasm

Xuddi shu kabi $f'(x_0)=-\infty$ bo'lganda ham $x=x_0$ nuqtada funksiya grafigi vertikal urinmaga ega bo'ladi, funksiyaning grafigi urinmaga nisbatan 8-rasmda ko'rsatilgandek joylashadi.

Agar $f'(x_0+0)=+\infty$ va $f'(x_0-0)=-\infty$ bo'lsa, u holda funksiya grafigining $x=x_0$ nuqta atrofida 4-rasmda tasvirlangandek bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash, $f'(x_0+0)=-\infty$ va $f'(x_0-0)=+\infty$ bo'lganda, funksiya grafigi $x=x_0$ nuqta atrofida 3-rasmdagidek ko'rinishda bo'ladi. Bunday hollarda $(x_0, f(x_0))$ nuqtada urinma mavjud, ammo hosila mavjud emas.

Agar $x=x_0$ nuqtada chekli bir tomonli hosilalar mavjud, lekin $f'(x_0+0) \neq f'(x_0-0)$ bo'lsa, u holda funksiya grafigi 5-rasmdagiga o'xshash ko'rinishga ega bo'ladi. $(x_0, f(x_0))$ nuqta grafikning sinish nuqtasi bo'ladi.

2. Hosilaning fizik ma'nosi. Hosila tushunchasiga olib keladigan ikkinchi masalada harakat qonuni $s=s(t)$ funksiya bilan tavsiflanadigan to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanayotgan moddiy nuqtaning t vaqt momentidagi oniy tezligi $v_{oniy} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ekanligini ko'rgan edik. Bundan hosilaning fizik (mexanik) ma'nosi kelib chiqadi.

$s=s(t)$ funksiya bilan tavsiflanadigan to'g'ri chiziqli harakatda t vaqt momentidagi harakat tezligining son qiymati hosilaga teng: $v_{oniy}=s'(t)$.

Hosilaning mexanik ma'nosini qisqacha quyidagicha ham aytish mumkin: yo'ldan vaqt bo'yicha olingan hosila tezlikka teng.

Hosila tushunchasi nafaqat to'g'ri chiziqli harakatning oniy tezligini, balki boshqa jarayonlarning ham oniy tezligini aniqlashga imkon beradi. Masalan, faraz qilaylik $y=Q(T)$ jismni T temperaturaga qadar qizdirish uchun uzatilayotgan

issiqlik miqdorining o'zgarishini tavsiflovchi funksiya bo'lsin. U holda jismning issiqlik sig'imi issiqlik miqdoridan temperatura bo'yicha olingan hosilaga teng bo'ladi:

$$C = \frac{dQ}{dT} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Umuman olganda, hosilani $f(x)$ funksiya bilan tavsiflanadigan jarayon oniy tezligining *matematik modeli* deb aytish mumkin.

3. Urinma va normal tenglamalari.

Faraz qilaylik $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega, $M(x_0;f(x_0))$ funksiya grafigiga tegishli nuqta bo'lsin. Funksiya grafigiga berilgan nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasini tuzaylik.

Bu tenglamani $y=kx+b$ ko'rinishda izlaymiz. Izlanayotgan to'g'ri chiziq $M(x_0;f(x_0))$ nuqtadan o'tishi ma'lum, shu sababli $f(x_0)=kx_0+b$ tenglik o'rinli. Bundan $b=f(x_0)-kx_0$ ekanligini topamiz. Demak, urinma tenglamasini $y=kx+f(x_0)-kx_0$ yoki $y=f(x_0)+k(x-x_0)$ ko'rinishga ega bo'ladi. Agar urinmaning k burchak koefitsienti hosilaning x_0 nuqtadagi qiymatiga tengligini e'tiborga olsak, $y=f(x)$ funksiya grafigiga $M(x_0;f(x_0))$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (3.1)$$

Ma'lumki, agar $k_{urinma} \neq 0$ bo'lsa, urinma va normalning burchak koefitsientlari perpendikulyarlik sharti $k_{normal} \cdot k_{urinma} = -1$ bilan bog'langan bo'ladi. Bundan $y=f(x)$ funksiya grafigiga $M(x_0;f(x_0))$ nuqtasida o'tkazilgan normal tenglamasini

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (3.2)$$

keltirib chiqarish mumkin.

1-misol. Abstsissasi $x=1$ bo'lgan nuqtada $y=1/x$ giperbolaga o'tkazilgan urinma va normal tenglamalarini tuzing.

Yechish. Bu misolda $x_0=1$, $f(x_0)=1$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $f'(1)=-1$. Bu qiymatlarni (3.1)

formulaga qo'yib urinma tenglamasini hosil qilamiz:

$y=1-(x-1)$, ya'ni $y=2-x$;

(3.2) formuladan foydalanib, normal tenglamasini yozamiz: $y=1+(x-1)$, ya'ni $y=x$.

2-misol. $y=x^2$ parabolaning $A(0;-4)$ nuqtadan o'tuvchi urinma tenglamasini yozing.

Yechish. Berilgan nuqta $y=x^2$ parabolaga tegishli emasligi ko'rinib turibdi. Faraz qilaylik $x=x_0$ nuqta urinish nuqtasining absissasi bo'lsin. U holda $f(x_0)=x_0^2$, $f'(x)=2x$, $f'(x_0)=2x_0$. (3.1) formuladan foydalansak

$$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0)$$

ya'ni

$$y = 2x_0x - x_0^2 \quad (3.3)$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

Shartga ko'ra urinma $(0; -4)$ nuqtadan o'tishi kerak. (3.3) tenglamada x va y o'rniga 0 va -4 qiymatlarini qo'yib x_0 ga nisbatan $-4 = -x_0^2$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bundan $x_0 = 2$, $x_0 = -2$ bo'lishini topamiz.

Agar $x_0 = 2$ bo'lsa, u holda urinma tenglamasi $y = 4x - 4$; agar $x_0 = -2$ bo'lsa, $y = -4x - 4$ bo'ladi.

Shunday qilib, ko'rsatilgan shartni qanoatlantiruvchi ikkita $y = 4x - 4$, $y = -4x - 4$ urinma tenglamasini hosil qildik.

4. Ikki chiziq orasidagi burchak. Urinmalar yordamida ikki egri chiziq orasidagi burchak tushunchasi ta'riflanadi.

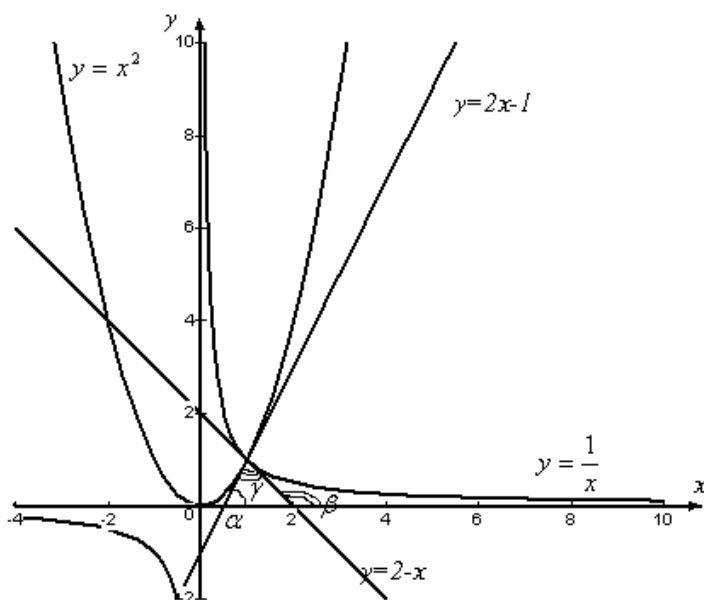
Ikki egri chiziq orasidagi burchak deb ularning kesishish nuqtasida shu chiziqlarga o'tkazilgan urinmalari orasidagi burchakka aytiladi.

Bu ta'rifdan foydalanib ikki chiziq orasidagi burchak tangensini topish mumkin. Faraz qilaylik $y = f_1(x)$ va $y = f_2(x)$ chiziqlar $M_0(x_0; y_0)$ nuqtada kesishsin, hamda $y = f_1(x)$ chiziqqa M_0 nuqtada o'tkazilgan urinma abssissa o'qi bilan α burchak, $y = f_2(x)$ chiziqqa M_0 nuqtada o'tkazilgan urinma esa β burchak tashkil qilsin. (3-rasm)

Agar γ urinmalar orasidagi burchak bo'lsa, u holda $\gamma = \beta - \alpha$ bo'ladi. Bundan esa

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha}$$

tenglikka ega bo'lamiz.



9-rasm

Ammo hosilaning geometrik ma'nosiga ko'ra $\operatorname{tg} \alpha = f_1'(x_0)$ va $\operatorname{tg} \beta = f_2'(x_0)$, demak ikki chiziq orasidagi burchak uchun

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 - f_2'(x_0) \cdot f_1'(x_0)} \quad (3.4)$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

3-misol. $y=x^2$ parabola va $y=\frac{1}{x}$ giperbolalar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Avvalo parabola va giperbolaning kesishish nuqtasini topamiz.

Buning uchun ushbu
$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$
 sistemani yechamiz. Bundan $x^2 = \frac{1}{x}$, $x^3=1$, $x=1$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, sistemaning yolg‘iz $(1,1)$ yechimi mavjud. $(x^2)'=2x$

bo‘lgani uchun $f_1'(1)=2$, shuningdek, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ bo‘lgani uchun $f_2'(1)=-1$

bo‘ladi. Demak, (3.4) formulaga ko‘ra $tg\gamma = \frac{-1-2}{1+2 \cdot (-1)} = 3$ bo‘lib, bundan burchak

kattaligi uchun $\gamma = \arctg 3$ tenglikning o‘rinli ekani kelib chiqadi. (9 -rasm).

4-§. Hosila hisoblash qoidalar

Biz oldingi paragraflarda hosila tushunchasini turli fizik masalalarni yechishda, urinma tenglamasini yozishda foydalandik. Hosilaning boshqa tatbiqlarini kelgusida o‘rganamiz. Bu degani har xil masalalarda uchrashishi mumkin bo‘lgan turli xil funksiyalarning hosilalarini hisoblashni bilish zarurligini anglatadi. Ushbu paragrafda $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarning hosilalarini bilgan holda ularning yig‘indisi, ko‘paytmasi va bo‘linmasining hosilalarini topishni o‘rganamiz.

Quyida keltirilgan teoremlar isbotida hosila topish algoritmidan, limitga ega bo‘lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar haqidagi teoremlardan foydalanamiz. Shuningdek $\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x)$ va $\Delta v = v(x+\Delta x) - v(x)$ ekanligini hisobga olgan holda, $u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u$, $v(x+\Delta x) = v(x) + \Delta v$ tengliklardan foydalanamiz.

$u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar (a,b) intervalda aniqlangan bo‘lsin.

1. Yig‘indining hosilasi.

1-teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarning $x \in (a,b)$ nuqtada hosilalari mavjud bo‘lsa, u holda $f(x) = u(x) + v(x)$ funksiyaning ham x nuqtada hosilasi mavjud va

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) \quad (4.1)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isboti. 1^o. $f(x) = u(x) + v(x)$.

2^o. $f(x+\Delta x) = u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u + v(x) + \Delta v$.

3^o. $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta u + \Delta v$.

4^o. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$.

5^o. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) + v'(x)$.

Shunday qilib, (4.1) tenglik o‘rinli ekan. Isbot tugadi.

Misol. $(x^2 + 1/x)' = (x^2)' + (1/x)' = 2x - 1/x^2$.

Matematik induksiya metodidan foydalanib, quyidagi natijani isbotlash mumkin:

Natija. Agar $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ funksiyalarning x nuqtada hosilalari mavjud bo'lsa, u holda $f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$ funksiyaning ham x nuqtada hosilasi mavjud va quyidagi formula o'rinli bo'ladi:

$$f'(x) = (u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x))' = u_1'(x) + u_2'(x) + \dots + u_n'(x).$$

2. Ko'paytmaning hosilasi.

2-teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $x \in (a, b)$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda ularning $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ ko'paytmasi ham $x \in (a, b)$ nuqtada hosilaga ega va

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad (4.2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. 1^0 . $f(x) = u(x) \cdot v(x)$.

$$2^0. f(x + \Delta x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) = (u(x) + \Delta u) \cdot (v(x) + \Delta v) = u(x)v(x) + \Delta u v(x) + \Delta v u(x) + \Delta u \Delta v.$$

$$3^0. \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta u v(x) + \Delta v u(x) + \Delta u \Delta v.$$

$$4^0. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u v(x) + \Delta v u(x) + \Delta u \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v(x) + \frac{\Delta v}{\Delta x} u(x) + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v.$$

$$5^0. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \cdot v(x) + \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) \cdot u(x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v.$$

Bunda $v(x)$ funksiyaning uzluksizligini e'tiborga olsak $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$ va natijada

(4.2) formulaga ega bo'lamiz.

1-natija. Quyidagi $(Cu(x))' = C \cdot u'(x)$ formula o'rinli.

Isboti. Ikkinchi teoremaga ko'ra $(Cu(x))' = C' \cdot u(x) + C \cdot u'(x)$. Ammo $C' = 0$, demak $(Cu(x))' = C \cdot u'(x)$.

Misollar. 1. $(6x^2)' = 6(x^2)' = 6 \cdot 2x = 12x$.

$$2. (x^4)' = ((x^2)(x^2))' = (x^2)'(x^2) + (x^2)(x^2)' = 2x(x^2) + (x^2) \cdot 2x = 4x^3.$$

$$3. (0,25x^4 - 3x^2)' = (0,25x^4)' + (3x^2)' = 0,25 \cdot 4x^3 + 3 \cdot 2x = x^3 + 6x.$$

2-natija. Agar $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ funksiyalar x nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda ularning ko'paytmasi $f(x) = u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \dots \cdot u_n(x)$ ham x nuqtada hosilaga ega va quyidagi formula o'rinli bo'ladi:

$$f'(x) = (u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \dots \cdot u_n(x))' = u_1'(x) \cdot u_2(x) \cdot \dots \cdot u_n(x) + u_1(x) \cdot u_2'(x) \cdot \dots \cdot u_n(x) + \dots + u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \dots \cdot u_n'(x).$$

3. Bo'linmaning hosilasi.

3-teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $x \in (a, b)$ nuqtada hosilaga ega, $v(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda ularning $f(x) = u(x)/v(x)$ bo'linmasi $x \in (a, b)$ nuqtada hosilaga ega va

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (4.3)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isboti. 1^o. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

2^o. $f(x+\Delta x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} = \frac{u(x) + \Delta u}{v(x) + \Delta v}$.

3^o. $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{u(x) + \Delta u}{v(x) + \Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\Delta u \cdot v(x) - \Delta v \cdot u(x)}{(v(x) + \Delta v)v(x)}$

4^o. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u \cdot v(x) - \Delta v \cdot u(x)}{(v(x) + \Delta v)v(x)\Delta x} = \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} v(x) - u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) \cdot \frac{1}{v^2(x) + v(x)\Delta v}$

5^o. $\Delta x \rightarrow 0$ da limitga o'tamiz, limitga ega funksiyalarning xossalari va 2-teorema isbotidagi kabi $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$ tenglikdan foydalansak

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} v(x) - u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) \cdot \frac{1}{v^2(x) + v(x)\Delta v} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

natijaga erishamiz, ya'ni (4.3) formula o'rinli ekan.

Misol. Ushbu $f(x) = \frac{3x+7}{5x-4}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $\left(\frac{3x+7}{5x-4} \right)' = \frac{(3x+7)' \cdot (5x-4) - (3x+7) \cdot (5x-4)'}{(5x-4)^2} =$
 $= \frac{3(5x-4) - 5(3x+7)}{(5x-4)^2} = -\frac{47}{(5x-4)^2}.$

Shunday qilib biz ushbu paragrafda hosilani hisoblashning quyidagi qoidalarini keltirib chiqardik:

1. Ikkita, umuman chekli sondagi funksiyalar yig'indisining hosilasi hosilalar yig'indisiga teng.
2. O'zgarma ko'paytuvchini hosila belgisi oldiga chiqarish mumkin.
3. Ikkita $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar ko'paytmasining hosilasi $u'v + uv'$ ga teng.
4. Ikkita $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar bo'linmasining hosilasi $(u'v - uv')/v^2$ ga teng.

1- va 2-teorema natijalaridan foydalangan holda quyidagi qoidaning ham o'rinli ekanligini ko'rish qiyin emas:

5. Chekli sondagi differensiallanuvchi funksiyalar chiziqli kombinatsiyasining hosilasi hosilalarning aynan shunday chiziqli kombinatsiyasiga teng, ya'ni agar $f(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_n u_n(x)$ bo'lsa, u holda $f'(x) = c_1 u_1'(x) + c_2 u_2'(x) + \dots + c_n u_n'(x)$.

Bu qoidaning isbotini o'quvchilarga havola qilamiz.

Eslatma. Yuqoridagi teoremlar funksiyalar yig'indisi, ko'paytmasi, bo'linmasining hosilaga ega bo'lishining yyetarli shartlarini ifodalaydi. Demak, ikki funksiya yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbatidan iborat bo'lgan

funksiyaning hosilaga ega bo'lishidan bu funksiyalarning har biri hosilaga ega bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi. Masalan, $u(x)=|x|$, $v(x)=|x|$ deb, ularning ko'paytmasini tuzsak, $y=x^2$ ko'rinishdagi funksiya hosil bo'ladi. Bu funksiyaning $\forall x \in (-\infty; +\infty)$ nuqtada, xususan, $x=0$ nuqtada hosilasi mavjud. Ammo, ma'lumki $y=|x|$ funksiyaning $x=0$ nuqtada hosilasi mavjud emas.

Savollar

1. Yig'indining hosilasi qanday hisoblanadi?
2. Hosilaga ega bo'lmagan funksiyalar yig'indisining hosilasi mavjud bo'lishi mumkinmi, misollar keltiring.
3. Hosilaga ega bo'lmagan va hosilaga ega bo'lgan funksiyalar yig'indisining hosilasi mavjud bo'lishi mumkinmi, javobingizni asoslang.
4. Ko'paytmaning hosilasini hisoblash haqidagi teoremani ayting.
5. Ko'paytmaning hosilasi qanday hisoblanadi?
6. Ayirmaning hosilasi qanday hisoblanadi?
7. Hosilaga ega bo'lmagan funksiyalar ko'paytmasining hosilasi mavjud bo'lishi mumkinmi, misollar keltiring.
8. Bo'linmaning hosilasi haqidagi teoremani ayting.
9. Bo'linmaning hosilasi qanday hisoblanadi?

Misollar

1. Quyidagi funksiyalarning hosilalarini toping:

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= 4x^3 - 5x^2 - 2x + 7; & \text{b) } y &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{x^8}{4} - 3,5x^2 + 0,5x + 9; \\ \text{c) } y &= -5x^{-2} + x^{-3} + 5; & \text{d) } y &= x^{1/4} + 4x^{3/8}; \\ \text{e) } y &= 4\sqrt{x} - \frac{2}{x}; & \text{f) } y &= -\frac{3}{x^2} - x\sqrt{x} + 2x^3\sqrt{x}. \end{aligned}$$

2. Quyidagi funksiyalarning hosilalarini toping:

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= (2-5x)(x^3+2x-1); & \text{b) } y &= (2\sqrt{x}-1)\left(\frac{2}{x}+3\right); \\ \text{c) } y &= \frac{x^3-3x+1}{x^2+2}; & \text{d) } y &= \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt[4]{x}-2} + \frac{2-3x}{5}; \end{aligned}$$

3. Agar V to'g'ri doiraviy tsilindrning hajmi, h uning balandligi, r asosining radiusi bo'lsa, u holda o'zgaras r da $\frac{dV}{dh}$ tsilindr asosining yuziga, o'zgaras h da $\frac{dV}{dr}$ tsilindr yon sirtiga teng ekanligini ko'rsating.

4. Ushbu $f(x)=3x^2-4\sqrt{x}+7$ funksiya uchun 1) $f'(1)$; 2) $f'(9)$ 3) $f'(\frac{1}{4})$; 4) $2f'(4)-f'(16)$ larni hisoblang.

5-§. Murakkab funksiyaning hosilasi.

Teskari funksiyaning hosilasi.

1. **Murakkab funksiyaning hosilasi.** Aytaylik, $u=\varphi(x)$ funksiya (a,b) intervalda, $y=f(u)$ funksiya esa $(c;d)$ da aniqlangan bo'lib, bu funksiyalar

yordamida $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin (bunda, albatta, $x \in (a,b)$ da $u=\varphi(x) \in (c,d)$ bo'lishi talab qilinadi).

Teorema. Agar $u=\varphi(x)$ funksiya $x \in (a,b)$ nuqtada hosilaga ega, $y=f(u)$ funksiya esa $u=\varphi(x)$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya x nuqtada hosilaga ega va

$$(f(\varphi(x)))' = f'(u) \cdot \varphi'(x) \quad (5.1)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isboti. $u=\varphi(x)$ funksiya x nuqtada hosilaga ega bo'lganligi uchun uning x nuqtadagi orttirmasini (2.1) formuladan foydalanib

$$\Delta u = \varphi'(x)\Delta x + \alpha\Delta x \quad (5.2)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu erda $\Delta x \rightarrow 0$ da $\alpha \rightarrow 0$.

Shunga o'xshash, $y=f(u)$ funksiyaning u nuqtadagi orttirmasini

$$\Delta y = f'(u)\Delta u + \beta\Delta u \quad (5.3)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bunda $\Delta u \rightarrow 0$ da $\beta \rightarrow 0$.

So'ngi (5.3) tenglikdagi Δu o'rniga uning (5.2) tenglik bilan aniqlangan ifodasini qo'yamiz. Natijada

$$\Delta y = f'(u)(\varphi'(x)\Delta x + \alpha\Delta x) + \beta(\varphi'(x)\Delta x + \alpha\Delta x) = f'(u)\varphi'(x)\Delta x + (f'(u)\alpha + \varphi'(x)\beta + \alpha\beta)\Delta x$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Agar $\Delta x \rightarrow 0$ bo'lsa, (5.2) tenglikdan $\alpha \rightarrow 0$ va $\Delta u \rightarrow 0$ bo'lishi, agar $\Delta u \rightarrow 0$ bo'lsa, u holda (5.3) tenglikdan $\beta \rightarrow 0$ ekanligi kelib chiqadi. Bulardan esa $\Delta x \rightarrow 0$ da $f'(u)\alpha + \varphi'(x)\beta + \alpha\beta$ cheksiz kichik funksiya ekanligi kelib chiqadi, uni γ bilan belgilaymiz.

Shunday qilib, $\Delta y = f'(u)\varphi'(x)\Delta x + \gamma\Delta x$ tenglik o'rinli. Bundan $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\varphi'(x) + \gamma$ va $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\varphi'(x)$ o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $y' = f'(u)\varphi'(x)$ ekanligini isbotlaydi.

Misol. $y = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^4$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Bu erda $y = u^4$, $u = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)$. Demak, $y' = (u^4)' \cdot \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)' =$
 $= 4u^3 \left(2x + \frac{2}{x^2}\right) = 8 \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^3 \left(x + \frac{1}{x^2}\right)$.

Amalda (5.1) tenglikni

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{yoki} \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

ko'rinishda yozib, quyidagi qoida tarzida ifodalaydi:

Murakkab funksiyaning erkli o'zgaruvchi bo'yicha hosilasi oraliq o'zgaruvchi bo'yicha olingan hosila va oraliq o'zgaruvchidan erkli o'zgaruvchi bo'yicha olingan hosilalar ko'paytmasiga teng.

Bu qoidani quyidagicha talqin qilish mumkin: agar berilgan nuqtada y o'zgaruvchi u ga nisbatan y'_u marta tez, u esa x ga nisbatan u'_x marta tez o'zgarsa, u holda y o'zgaruvchi x ga nisbatan $y'_u \cdot u'_x$ marta tez o'zgaradi, ya'ni $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Yuqoridagi qoida uchta, umuman chekli sondagi hosilaga ega bo'lgan funksiyalar kompozitsiyasi uchun ham o'rinli. Masalan, agar $y=f(u)$, $u=\varphi(t)$, $t=h(x)$ bo'lsa, u holda $y'_x=y'_u \cdot u'_t \cdot t'_x$ tenglik o'rinli bo'ladi.

2. Teskari funktsiyaning hosilasi.

Faraz qilaylik $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada monoton o'suvchi, $(a;b)$ intervalda $y'=f'(x)$ hosilaga ega va $\forall x \in (a,b)$ uchun $f'(x) \neq 0$ bo'lsin. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$. U holda $y=f(x)$ funksiya uchun teskari funktsiyaning mavjudligi va uzluksizligi haqidagi teorema shartlari bajariladi, chunki $y=f(x)$ funktsiyaning uzluksizligi uning hosilaga ega ekanligidan kelib chiqadi. Shunday qilib, $[\alpha;\beta]$ kesmada $y=f(x)$ funktsiyaga nisbatan teskari bo'lgan $x=\varphi(y)$ funksiya mavjud bo'ladi.

Teskari funksiya argumenti y ga $\Delta y \neq 0$ orttirma beramiz. U holda $x=\varphi(y)$ funksiya biror $\Delta x=\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)$ orttirma oladi va teskari funktsiyaning monotonligidan $\Delta x \neq 0$, uzluksizligidan esa $\Delta y \rightarrow 0$ da $\Delta x \rightarrow 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Endi $x=\varphi(y)$ funktsiyaning hosilasini topamiz. Yuqorida aytilganlarni e'tiborga olsak, hosilaning ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{f'(x)}, \text{ demak } x'_y = \varphi'(y) = 1/f'(x) \text{ formula o'rinli ekan.}$$

Shunday qilib, quyidagi teorema isbot bo'ldi.

Teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada monoton o'suvchi, $(a;b)$ intervalning har bir nuqtasida noldan farqli $y'=f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funktsiyaga teskari bo'lgan $x=\varphi(y)$ funksiya $(f(a);f(b))$ intervalda hosilaga ega va $\forall y \in (f(a);f(b))$ uchun uning hosilasi $1/f'(x)$ ga teng bo'ladi.

Ushbu teorema $f(x)$ funksiya kamayuvchi bo'lganda ham o'rinli ekanligini isbotlashni o'quvchilarga qoldiramiz.

Demak, teskari funksiya hosilasini hisoblash qoidasi

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \quad (5.4)$$

formula bilan ifodalanadi.

6-§. Asosiy elementar funktsiyalarning hosilalari

1. $y=x^\mu$ ($x>0$) darajali funktsiyaning hosilasi

Bu funktsiyaning x nuqtadagi orttirmasi $\Delta y=(x+\Delta x)^\mu - x^\mu = x^\mu \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1 \right)$ ga

teng va $\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{\mu-1} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}}$ bo'ladi. Ma'lumki, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu$. Shuning

uchun $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\mu-1} \cdot \frac{(1 + \frac{\Delta x}{x})^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \mu x^{\mu-1}$. Bundan funksiyaning x nuqtadagi

hosilasi mavjud va $y' = \mu x^{\mu-1}$ bo'ladi.

Demak, $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$ va $d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1} dx$ formulalar o'rinli.

Murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash va differensial formulalarini foydalangan holda, $(u(x))^\mu$ ko'rinishdagi murakkab funksiya uchun quyidagi formulalarni yozish mumkin:

$$((u(x))^\mu)' = \mu(u(x))^{\mu-1} \cdot u'(x), \quad d((u(x))^\mu) = \mu(u(x))^{\mu-1} \cdot u'(x) dx.$$

Masalan $y = (x^2 + 1)^3$ funksiyaning hosilasini topish talab qilinsin. Bu misolda $u(x) = (x^2 + 1)$, $\mu = 3$. Demak, yuqoridagi formulaga ko'ra $y' = 3(x^2 + 1)^2 \cdot (x^2 + 1)' = 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2 + 1)^2$ bo'ladi.

2. Ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi.

$y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) ko'rsatkichli funksiya uchun $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$ va $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$.

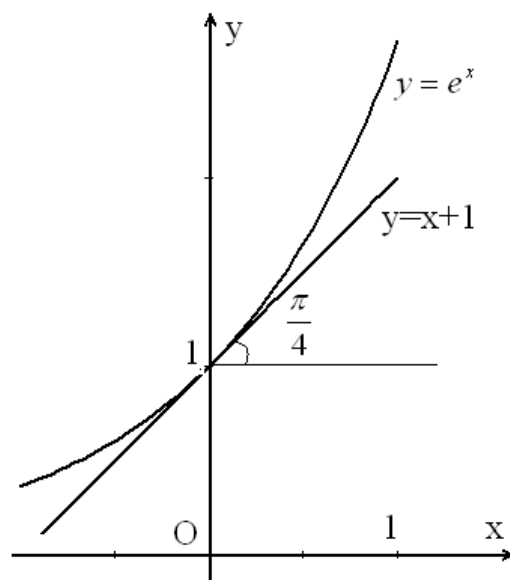
Ma'lumki, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$. Shuning uchun $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$ mavjud. Demak $(a^x)' = a^x \ln a$ va $d(a^x) = a^x \ln a dx$, xususan, $(e^x)' = e^x$ va $d(e^x) = e^x dx$ formulalar o'rinli ekan.

Ko'rinib turibdiki, $y = e^x$ funksiya ajoyib xossaga ega: uning hosilasi o'ziga teng ekan.

Misol. $y = e^x$ funksiya grafigi Oy o'qini qanday burchak ostida kesib o'tadi?

Yechish. Funksiya grafigi Oy o'qini $(0;1)$ nuqtada kesib o'tadi. Funksiya grafigiga shu nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini topamiz: $y' = e^x$ va $y'(0) = e^0 = 1$, bundan esa urinmaning Ox o'qi bilan kattaligi $\pi/4$ ga teng bo'lgan burchak tashkil qilishi kelib chiqadi. U holda urinma Oy o'qi bilan ham kattaligi $\pi/4$ ga teng bo'lgan burchak tashkil qiladi.

1-rasmda $y = e^x$ funksiya grafigi berilgan, bunda funksiya grafigi $x=0$ nuqta atrofida $y=x-1$ to'g'ri chiziqqa urinadi.



10-rasm

Yuqoridagi misolda olingan natija e soniga quyidagicha ta'rif berishga imkon beradi: e soni deb ordinata o'qini $\pi/4$ burchak ostida kesib o'tuvchi ko'rsatkichli funktsiyaning asosiga aytiladi.

$a^{u(x)}$ ($a>0$, $a\neq 1$) funktsiya uchun quyidagi formulalarning o'rinli bo'lishini ko'rish qiyin emas: $(a^{u(x)})' = a^{u(x)} \cdot u'(x) \cdot \ln a$, $d(a^{u(x)}) = a^{u(x)} \cdot u'(x) \cdot \ln a \cdot dx$.

Masalan, $(3^{5x-3})' = 3^{5x-3} \cdot (5x-3)' \cdot \ln 3 = 5 \cdot 3^{5x-3} \cdot \ln 3$.

3. $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$, $x>0$) logarifmik funktsiyaning hosilasi.

Bu funktsiya $x=a^y$ funktsiyaga nisbatan teskari funktsiya bo'lgani uchun teskari funktsiyaning hosilasini topish qoidasiga ko'ra $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$

ya'ni $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$. Xususan, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ formula o'rinli.

Bu formulalardan quyidagi muhim xulosani chiqarish mumkin:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_a x)' = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln a} = 0$, ammo $(\log_a x)'$ geometrik nuqtai nazardan $y=\log_a x$

funktsiya grafigiga absissasi x ga teng bo'lgan nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientiga teng. Shunday qilib, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tan \alpha = 0$, ya'ni $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha = 0$, bu esa

yyetarlicha katta x lar uchun urinma absissalar o'qiga «deyarli parallel» bo'lishini anglatadi. Bu holni funktsiya grafigini chizishda hisobga olish zarur.

$\log_a u(x)$ funktsiya uchun quyidagi formula o'rinli: $(\log_a u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x) \cdot \ln a}$.

4. Trigonometrik funktsiyalarning hosilalari

1) $y=\sin x$ funktsiyaning hosilasi. Funktsiyaning x nuqtadagi orttirmasini sinuslar ayirmasi formulasidan foydalanib topamiz:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}).$$

Funktsiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbati

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \text{ ga teng. Bu tenglikda birinchi ajoyib limit va } \cos x$$

funktsiyaning uzluksizligini e'tiborga olgan holda limitga o'tsak,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \cos x \text{ bo'ladi.}$$

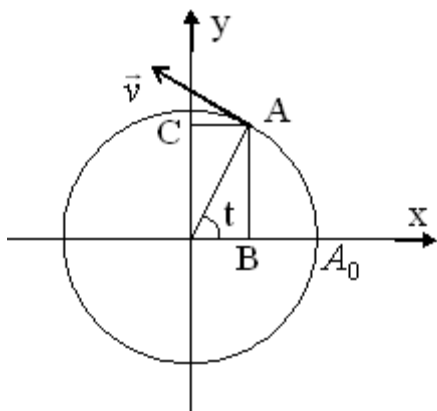
Demak, $(\sin x)' = \cos x$ formula o'rinli.

2) $y=\cos x$ funktsiyaning hosilasi. Bu funktsiyaning hosilasini topish uchun $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ ayniyat va murakkab funktsiyaning hosilasini topish qoidasidan foydalanamiz. U holda

$$(\cos x)' = (\sin(x + \pi/2))' = \cos(x + \pi/2) \cdot (x + \pi/2)' = \cos(x + \pi/2) \cdot 1 = \cos(x + \pi/2).$$

$\cos(x + \pi/2) = -\sin x$ ayniyatni e'tiborga olsak, quyidagi formulalarning o'rinli ekanligi kelib chiqadi:

$$(\cos x)' = -\sin x.$$



11-rasm

$y = \sin x$ va $y = \cos x$ funksiyalarning hosilalarini quyidagi fizik mulohazalardan foydalanib ham keltirib chiqarish mumkin. Faraz qilaylik birlik aylanada burchak tezligi $\omega = 1$ rad/s bo'lgan nuqta harakatlanayotgan bo'lsin (11-rasm). Vaqtning boshlang'ich momentida nuqta A_0 , vaqtning t momentida A holatda bo'lsin. U holda A_0A yoyning uzunligi t ga, A_0OA markaziy burchak t radianga teng bo'ladi. Sinus va kosinusning ta'riflariga ko'ra A nuqtaning ordinatasi $\sin t$, absissasi esa $\cos t$ ga teng.

Demak, A nuqtaning absissa o'qidagi proeksiyasi B nuqta $x = \sin t$ qonuniyat bilan, ordinata o'qidagi proeksiyasi S nuqta $y = \cos t$ qonuniyat bilan harakat qiladi. Shu harakatlarning tezliklarini topamiz.

Ma'lumki, A nuqtaning chiziqli tezligi $v = \omega R$ formula bilan ifodalanadi. Bizning holimizda $\omega = 1$, $R = 1$ bo'lganligi sababli $v = 1$ bo'ladi. Chiziqli tezlikni ikkita- gorizontaal va vertikal- tashkil etuvchilarga ajratamiz. A nuqta tezligining vektori $\vec{v}$, bu erda $|\vec{v}| = 1$, aylanaga A nuqtada o'tkazilgan urinma bo'ylab yo'nalgan. Shu sababli Ox o'qi bilan $t + \pi/2$, Oy o'qi bilan t burchak tashkil qiladi. Demak, uning Ox o'qiga proeksiyasi (ya'ni B nuqtaning tezligi) $v_x = \cos(t + \pi/2) = -\sin t$ ga, Oy o'qiga proeksiyasi $v_y = \cos t$ ga teng bo'ladi.

Tezlik yo'ldan vaqt bo'yicha olingan hosila bo'lganligi, B nuqtaning harakat qonuni $x = \cos t$, tezligi $v_x = -\sin t$ ekanligini e'tiborga olsak, $(\cos t)' = -\sin t$ degan xulosaga kelimiz.

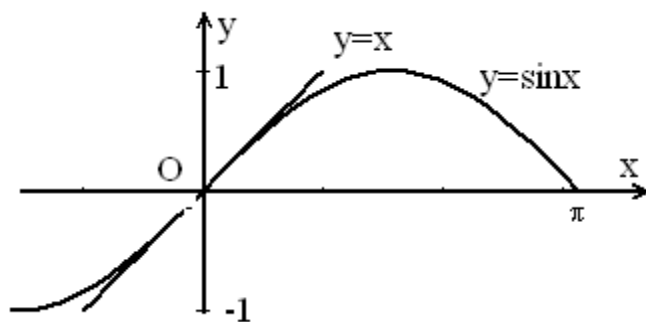
Shunga o'xshash, S nuqtaning harakat qonuni $y = \sin t$, tezligi $v_y = \cos t$ ekanligini e'tiborga olsak, $(\sin t)' = \cos t$ degan xulosaga kelimiz.

3) **$y = \tan x$ va $y = \cot x$ funksiyalarning hosilalari.** Ushbu funksiyalarning hosilalarini topish uchun bo'linmaning hosilasini topish qoidasidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Xuddi shunga o'xshash

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{ formulani ham keltirib chiqarish mumkin.}$$



12-rasm

Buni mashq sifatida o'quvchilarga qoldiramiz.

Trigonometrik funksiyalarning argumentlari x erkli o'zgaruvchining $u(x)$ funksiyasi bo'lsa, u holda murakkab funksiyaning hosilasini topish qoidasiga ko'ra quyidagi formulalar o'rinli bo'ladi:

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u, \quad (\cos u)' = -u' \sin u, \quad (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}, \quad (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

Misol. $y = \sin x$ funksiya grafigi koordinatalar boshida Ox o'qi bilan qanday burchak tashkil etadi?

Yechish. Buning uchun $y = \sin x$ funksiya grafigiga abssissasi $x=0$ bo'lgan nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini topamiz: $y' = \cos x$, demak $f'(0) = \cos 0 = 1$, burchak koeffitsienti $\operatorname{tg} \alpha = 1$, bundan izlanayotgan burchak $\pi/4$ ga teng.

Misol. $y = \operatorname{tg} x$ funksiya grafigi koordinatalar boshida Ox o'qi bilan qanday burchak tashkil etadi?

Yechish. Buning uchun $y = \operatorname{tg} x$ funksiya grafigiga abssissasi $x=0$ bo'lgan nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini topamiz: $y' = (\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$, demak $f'(0) = \sec^2 0 = 1$, burchak koeffitsienti $\operatorname{tg} \alpha = 1$, bundan izlanayotgan burchak $\pi/4$ ga teng.

Bu misollarda olingan natijalarni $y = \sin x$ va $y = \operatorname{tg} x$ funksiya grafiklarni chizishda e'tiborga olish kerak. Rasmlarda $y = \sin x$ va $y = \operatorname{tg} x$ funksiya grafiklari keltirilgan. Bu funksiya grafiklari koordinatalar boshida $y=x$ to'g'ri chiziqqa urinadi.

5. Teskari trigonometrik funksiyalarning hosilalari.

Teskari funksiyaning hosilasi haqidagi teoremdan foydalanib, $y = \arcsin x$ ($-1 \leq x \leq 1$) funksiyaning hosilasini topaylik.

Bu funksiya teskari bo'lgan $x = \sin y$ funksiya $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ da monoton o'suvchi va $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervalda hosilaga ega, hamda bu intervalning har bir nuqtasida hosila noldan farqli: $x'_y = \cos y \neq 0$. Shuning uchun $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}$.

Endi $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervalda $\cos y > 0$ va bunda $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ formula o'rinli

bo'lganligi uchun $y'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ bo'ladi.

Demak,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (-1 < x < 1)$$

formula o'rinli.

Endi $y = \arccos x$ ($-1 \leq x \leq 1$) funksiyaning hosilasi uchun formula keltirib chiqaramiz. Bu funksiya teskari bo'lgan $x = \cos y$ funksiya $[0, \pi]$ da monoton

kamayuvchi, $(0;\pi)$ da hosilaga ega bo'lib, bu intervalning har bir nuqtasida noldan farqli $x'_y = -\sin y$ hosilaga ega. Demak, teskari funktsiyaning hosilasi haqidagi teorema shartlari o'rinli. Shu sababli (5.4) ga ko'ra

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{ham o'rinli bo'ladi. (Bu erda } (0;\pi)$$

da $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ ekanligidan foydalandik).

$$\text{Shunday qilib, } (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1) \text{ formula o'rinli ekan.}$$

Ma'lumki, $y = \arctg x$ funktsiyaning qiymatlar to'plami $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervaldan iborat. Shu intervalda unga teskari bo'lgan $x = tgy$ funktsiya mavjud va bu funktsiyaning hosilasi $x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}$ noldan farqli. Teskari funktsiyaning hosilasi haqidagi teoremdan foydalansak,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(tgy)'} = \cos y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

bo'ladi.

Demak, quyidagi formula o'rinli:

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Xuddi yuqoridagi kabi $y = \text{arcstg} x$ funktsiya uchun

$$(\text{arcstg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

formulaning o'rinli ekanligini ko'rsatish mumkin.

Teskari trigonometrik funktsiyalarning argumentlari x erkli o'zgaruvchining $u(x)$ funktsiyasi bo'lsa, u holda murakkab funktsiyaning hosilasini topish qoidasidan quyidagi formulalar kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} (\arcsin u(x))' &= \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}; & (\arccos u(x))' &= -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}; \\ (\arctg u(x))' &= \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}; & (\text{arcstg} u(x))' &= -\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}; \end{aligned}$$

7-§. Logarifmik hosila. Daraja-ko'rsatkichli funktsiyaning hosilasi.

1. Logarifmik hosila.

Faraz qilaylik $y = f(x)$ funktsiya $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi va $f(x) > 0$ bo'lsin. U holda shu intervalda $\ln y = \ln f(x)$ funktsiya aniqlangan bo'ladi. Bu funktsiyani x argumentning murakkab funktsiyasi sifatida qarab, x nuqtadagi hosilasini hisoblash mumkin. bo'lgan x_0 nuqtada $f(x)$ funktsiyaning hosilasini topish

kerak bo'lsin. Murakkab funksiyaning hosilasini topish qoidasidan foydalanib

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = (\ln f(x))', \text{ bundan}$$

$$y' = y(\ln f(x))' \quad (7.1)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Funksiya logarifmidan olingan hosilaga logarifmik hosila deyiladi.

Bir nechta funksiyalar ko'paytmasining hosilasini hisoblashda (7.1) formuladan foydalanish hisoblashlarni birmuncha soddalashtirishga imkon beradi. Haqiqatan ham $y = u_1 \cdot u_2 \dots u_n$ funksiya (bu erda har bir $u_i, i = \overline{1, n}$ funksiya hosilaga ega va $\forall x \in D(f)$ da $u_i > 0$) berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning logarifmlab, $\ln y = \ln u_1 + \ln u_2 + \dots + \ln u_n$, bundan esa

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \dots + \frac{u'_n}{u_n} \text{ tenglikni hosil qilamiz. So'ngi tenglikning ikkala}$$

tomonini y ga ko'paytirib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y' = u_1 \cdot u_2 \dots u_n \cdot \left(\frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \dots + \frac{u'_n}{u_n} \right).$$

Misol. $y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Berilgan funksiyaning logariflaymiz:

$\ln y = 2\ln(x+1) - 3\ln(x+2) - 4\ln(x+3)$. Bu tenglikdan hosila olib, ushbu tenglikka ega bo'lamiz:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} - \frac{4}{x+3}.$$

Bundan

$$y' = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4} \left(\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} - \frac{4}{x+3} \right) = -\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}.$$

2. Daraja-ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi. Aytaylik $y = (u(x))^{v(x)}$ ($u(x) > 0$) ko'rinishdagi daraja-ko'rsatkichli funksiya berilgan va $u(x)$, $v(x)$ funksiyalar x ning qaralayotgan qiymatlarida differensiallanuvchi bo'lsin. Bu funksiyaning hosilasini hisoblash uchun (7.1) formulani qo'llaymiz. U holda (7.1) formulaga ko'ra

$$y' = u(x)^{v(x)} \cdot (\ln(u(x)^{v(x)}))' = u(x)^{v(x)} (v(x) \cdot \ln u(x))' = u(x)^{v(x)} (v'(x) \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)})$$

bo'ladi. Bundan $(u(x)^{v(x)})' = u(x)^{v(x)} \ln u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u(x)^{v(x)-1} \cdot u'(x)$ formula kelib chiqadi.

Shunday qilib, daraja-ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi ikkita qo'shiluvchidan iborat: agar $u(x)^{v(x)}$ ko'rsatkichli funksiya deb qaralsa birinchi qo'shiluvchi, agar $u(x)^{v(x)}$ darajali funksiya deb qaralsa ikkinchi qo'shiluvchi hosil bo'ladi.

Misol. $y = x^{x-1}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. (7.1) formulani qo'llaymiz.

$$y' = y \cdot (\ln x^{x-1})' = x^{x-1} \cdot ((x-1)\ln x)' = x^{x-1} \cdot (\ln x + 1 - \frac{1}{x}).$$

Savollar

1. Funksiyalar kompozitsiyasi qanday aniqlanadi?
2. Murakkab funksiyaning differensiallanuvchi bo'lishligi haqidagi teoremani ayting.
3. «Differensial formasining invariantligi» iborasi nimani anglatadi?
4. Teskari funksiyaning differensiallanuvchi bo'lishi haqidagi teoremani ayting.
5. Teoremaga qanday geometrik izoh berish mumkin?
6. Teskari funksiyaning hosilasi qanday topiladi?
7. Ko'ratkichli funksiyaning grafigi ordinata o'qi bilan qanday burchak tashkil qiladi?
8. Logarifmik funksiya grafigi abssissalar o'qi bilan qanday burchak tashkil qiladi?
9. $(\sin x)' = \cos x$ formulani keltirib chiqarganda $\cos x$ funksiyaning uzluksizligidan qanda foydalanildi?
10. $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$ formula x ning qanday qiymatlarida o'rinli?
11. Daraja-ko'rsatkichli funksiyaning hosilasini topish qoidasini ayting.

Misollar.

1. Quyidagi murakkab funksiyalarning hosilalarini toping:
a) $y = (3x^3 - 4x^2 + 7)^6$; b) $y = \sqrt[3]{x^3 + 6x - 5}$; c) $y = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}$; d) $y = \sqrt{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}}$.
2. Ushbu $f(x) = x^3$ funksiya teskari bo'lgan funksiyaning $x=5$ nuqtadagi hosilasini toping.
3. Giperbolik ($\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$ va $\coth x$) funksiylarning hosilalari uchun formulalar keltirib chiqaring.
4. Teskari giperbolik funksiylarning hosilalari uchun formulalar keltirib chiqaring.
5. Quyidagi funksiyalarning hosilalarini toping:
a) $y = 3^x \cdot \tan x$; b) $y = \ln^3 4x$; c) $y = \sin 3x + 2^{1-2x}$; d) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.
6. Logarifmik hosiladan foydalanib, quyidagi funksiyalarning hosilalarini toping:
a) $y = (\tan x)^x$; b) $y = (\cos x)^{\arctan x}$; c) $y = (x-1)(x+2)^4(x+3)^{0.5}$;
d) $y = (x+1)^2 \sqrt[5]{(x-4)^4 \cdot (9-x)^{1/3}}$; e) $y = x^{\frac{x}{\ln^2 x}}$.

8-§. Yuqori tartibli hosilalar

1. Yuqori tartibli hosila tushunchasi. Faraz qilaylik, biror (a, b) da hosilaga ega $f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. Ravshanki, $f'(x)$ hosila (a, b) da aniqlangan funksiya bo'ladi. Demak, hosil bo'lgan funksiyaning hosilasi, ya'ni hosilaning hosilasi haqida gapirish mumkin. Agar $f'(x)$ funksiyaning hosilasi mavjud bo'lsa, uni $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va y'' , $f''(x)$,

$\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ simvollarning biri bilan belgilanadi. Shunday qilib, ta'rif bo'yicha $y''(x)=(y')'$ ekan.

Shunga o'xshash, agar ikkinchi tartibli hosilaning hosilasi mavjud bo'lsa, u uchinchi tartibli hosila deyiladi va y''' , $f'''(x)$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$, $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$ kabi belgilanadi.

Demak, ta'rif bo'yicha $y'''=(y'')'$.

Berilgan funksiyaning to'rtinchi va h.k. tartibdagi hosilalari xuddi shunga o'xshash aniqlanadi. Umuman $f(x)$ funksiyaning $(n-1)$ -tartibli $f^{(n-1)}(x)$ hosilasining hosilasiga uning n -tartibli hosilasi deyiladi va $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ simvollarning biri bilan belgilanadi. Demak, ta'rif bo'yicha n -tartibli hosila $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$ rekurrent (qaytma) formula bilan hisoblanar ekan.

Misol. $y=x^4$ funksiya berilgan. $y'''(2)$ ni hisoblang.

Yechish. $y'=4x^3$, $y''=12x^2$, $y'''=24x$, demak $y'''(2)=24 \cdot 2=48$.

Yuqorida aytilganlardan, funksiyaning yuqori tartibli, masalan, n - tartibli hosilalarini topish uchun uning barcha oldingi tartibli hosilalarini hisoblash zarurligi kelib chiqadi. Ammo ayrim funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari uchun umumiy qonuniyatni topish va undan foydalanib formula keltirib chiqarish mumkin.

Misol tariqasida ba'zi bir elementar funksiyalarning n -tartibli hosilalarini topamiz.

1) $y=x^\mu$ ($x>0$, $\mu \in \mathbb{R}$) funksiya uchun $y^{(n)}$ ni topamiz. Buning uchun uning hosilalarini ketma-ket hisoblaymiz: $y'=\mu x^{\mu-1}$, $y''=\mu(\mu-1)x^{\mu-2}$, ...

Bundan

$$(x^\mu)^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)x^{\mu-n} \quad (8.1)$$

deb induktiv faraz qilish mumkinligi kelib chiqadi. Bu formulaning $n=1$ uchun o'rinliligi yuqorida ko'rsatilgan. Endi (1) formula $n=k$ da o'rinli, ya'ni $y^{(k)}=\mu(\mu-1)\dots(\mu-k+1)x^{\mu-k}$ bo'lsin deb, uning $n=k+1$ da o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz.

Ta'rifga ko'ra $y^{(k+1)}=(y^{(k)})'$. Shuning uchun

$$y^{(k+1)}=(y^{(k)})'=(\mu(\mu-1)\dots(\mu-k+1)x^{\mu-k})'=\mu(\mu-1)\dots(\mu-k+1)(\mu-k)x^{\mu-k-1}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa (8.1) formulaning $n=k+1$ da ham o'rinli bo'lishini bildiradi. Demak, matematik induksiya usuliga ko'ra (8.1) formula $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun o'rinli.

(8.1) da $\mu=-1$ bo'lsin. U holda $y=\frac{1}{x}$ funksiyaning n -tartibli hosilasi

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)(-2)\dots(-n)x^{-1-n}=\frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}} \quad (8.2)$$

formula bilan topiladi.

2) $y = \ln x$ ($x > 0$) funksiyaning n -tartibli hosilasini topamiz. Bu funksiyainng birinchi hosilasi $y' = \frac{1}{x}$ bo'lishidan hamda (8.2) formuladan foydalansak,

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \quad (8.3)$$

formula kelib chiqadi.

3) $y = \sin x$ bo'lsin. Ma'lumki, bu funksiya uchun $y' = \cos x$. Biz uni quyidagi

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

ko'rinishda yozib olamiz. So'ngra $y = \sin x$ funksiyaning keyingi tartibli hosilalarini hisoblaymiz.

$$y'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(IV)} = (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

Bu ifodalardan esa $y = \sin x$ funksiyainng n -tartibli hosilasi uchun

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (8.4)$$

formula kelib chiqadi. Uning to'g'riligi yana matematik induksiya usuli bilan isbotlanadi.

Xuddi shunga o'xshash

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (8.5)$$

ekanligini ko'rsatish mumkin.

Masalan,

$$(\cos x)^{(115)} = \cos\left(x + 115 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin x.$$

2. Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosi.

Ikkinchi tartibli hosila sodda mexanik ma'noga ega. Faraz qilaylik moddiy nuqtaning harakat qonuni $s = s(t)$ funksiya bilan aniqlangan bo'lsin. U holda uning birinchi tartibli hosilasi $v(t) = s'(t)$ harakat tezligini ifodalashi bizga ma'lum. Ikkinchi tartibli $a = v'(t) = s''(t)$ hosila esa harakat tezligining o'zgarish tezligi, ya'ni harakat tezlanishini ifodalaydi.

Misol. Moddiy nuqta $s = 5t^2 + 3t + 12$ (s metrlarda, t sekundlarda berilgan) qonun bo'yicha to'g'ri chiziqli harakat qilmoqda. Uning o'zgarmas kuch ta'sirida harakat qilishini ko'rsating.

Yechish. $s' = (5t^2 + 3t + 12)' = 10t + 3$; $s'' = (10t + 3)' = 10$, bundan $a = 10 \text{ m/s}^2$ bo'lib, harakat tezlanishi o'zgarmas ekan. Nyuton qonuni bo'yicha kuch tezlanishga proporsional. Demak, kuch ham o'zgarmas ekan.

3. Yuqori tartibli hosilaning xossalari. Leybnits formulasi

1-xossa. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar n -tartibli hosilalarga ega bo'lsa, u holda bu ikki funksiya yig'indisining n -tartibli hosilasi uchun

$$(u(x) + v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x) + v^{(n)}(x)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isboti. Aytaylik $y=u+v$ bo'lsin. Bu funksiyaning hosilalarini ketma-ket hisoblash natijasida quyidagilarni hosil qilamiz: $y'=u'+v'$, $y''=(y')'=(u'+v')'=u''+v''$.

Matematik induksiya metodidan foydalanamiz, ya'ni $n=k$ tartibli hosila uchun $y^{(k)}=u^{(k)}+v^{(k)}$ tenglik o'rinli bo'lsin deb faraz qilamiz va $n=k+1$ uchun $y^{(k+1)}=u^{(k+1)}+v^{(k+1)}$ ekanligini ko'rsatamiz.

Haqiqatan ham, yuqori tartibli hosilaning ta'rifi, hosilaga ega bo'lgan funksiyalar xossalariidan foydalanib $y^{(k+1)}=(y^{(k)})'=(u^{(k)}+v^{(k)})'=(u^{(k)})'+(v^{(k)})'=u^{(k+1)}+v^{(k+1)}$ ekanligini topamiz.

Matematik induksiya prinsipiga ko'ra $y^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$ tenglik ixtiyoriy natural n uchun o'rinli deb xulosa chiqaramiz.

2-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini n -tartibli hosila belgisi oldiga chiqarish mumkin: $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$.

Bu xossa ham matematik induksiya metodidan foydalanib isbotlanadi. Isbotini o'quvchilarga qoldiramiz.

Misol. $y=\frac{2x+3}{x^2-5x+6}$ funksiyaning n -tartibli hosilasi uchun formula keltirib chiqaring.

Yechish. Berilgan kasr-ratsional funksiyaning maxrajini ko'paytuvchilarga ajratamiz: $(x^2-5x+6)=(x-2)(x-3)$. So'ngra

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \quad (8.6)$$

tenglik o'rinli bo'ladigan A va B koeffitsientlarni izlaymiz. Bu koeffitsientlarni topish uchun tenglikning o'ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz va ikki kasrning tenglik shartidan foydalanamiz. U holda $2x+3=A(x-3)+B(x-2)$, yoki

$$2x+3=(A+B)x+(-3A-2B)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Ikki ko'phadning tenglik shartidan (ikki ko'phad teng bo'lishi uchun o'zgaruvchining mos darajalari oldidagi koeffitsientlar teng bo'lishi zarur va yetarli) quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} A+B=2, \\ -3A-2B=3 \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimi $A=-7$, $B=9$ ekanligini ko'rish qiyin emas. Topilgan natijalarni (8.1) tenglikka qo'yamiz va yuqorida isbotlangan xossalardan foydalanib, berilgan funksiyaning n -tartibli hosilasini quyidagicha yozish mumkin:

$$y^{(n)} = -7\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} + 9\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)} \quad (8.7)$$

Endi $\frac{1}{x-2}$ va $\frac{1}{x-3}$ funksiyalarning n -tartibli hosilalarini topishimiz lozim.

Buning uchun $u = \frac{1}{x+a}$ funksiyaning n -tartibli hosilasini bilish yetarli. Bu funksiyaning $u = (x+a)^{-1}$ ko'rinishda yozib, ketma-ket hosilalarni hisoblaymiz. U holda

$$u' = -(x+a)^{-2}, u'' = 2(x+a)^{-3}, u''' = -2 \cdot 3(x+a)^{-4} = -6(x+a)^{-4}.$$

Matematik induksiya metodi bilan

$$u^{(n)} = (-1)^n \cdot n! (x+a)^{-n-1} \quad (8.8)$$

Shunday qilib, (8.7) va (8.8) tengliklardan foydalanib quyidagi

$$y^{(n)} = -7 \cdot (-1)^n \cdot n! (x-2)^{-n-1} + 9 \cdot (-1)^n \cdot n! (x-3)^{-n-1} = (-1)^n \cdot n! \left(\frac{9}{(x-3)^n} - \frac{7}{(x-2)^n} \right)$$

natijaga erishamiz.

3-xossa. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar n -tartibli hosilalarga ega bo'lsa, u holda bu ikki funksiya ko'paytmasining n -tartibli hosilasi uchun

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \dots + C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \dots + C_n^{n-1} u'v^{(n-1)} + uv^{(n)} \quad (8.9)$$

formula o'rinli bo'ladi. Bunda $C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$.

Isboti. Matematik induksiya usulini qo'llaymiz. Ma'lumki, $(uv)' = u'v + uv'$. Bu esa $n=1$ bo'lganda (8.9) formulaning to'g'riligini ko'rsatadi. Shuning uchun (8.9) formulani ixtiyoriy n uchun o'rinli deb olib, uning $n+1$ uchun ham to'g'riligini ko'rsatamiz. (8.9) ni differensiyalaymiz:

$$(uv)^{n+1} = u^{(n+1)}v + u^{(n)}v' + C_n^1 u^{(n)}v' + C_n^2 u^{(n-1)}v'' + C_n^3 u^{(n-2)}v''' + \dots + C_n^k u^{(n-k+1)}v^{(k)} + C_n^k u^{(n-k)}v^{(k+1)} + \dots + C_n^{n-1} u'v^{(n-1)} + C_n^{n-1} u'v^{(n)} + u'v^{(n)} + uv^{(n+1)} \quad (8.10)$$

Ushbu

$$1 + C_n^1 = 1 + n = C_{n+1}^1, \quad C_n^1 + C_n^2 = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2} = C_{n+1}^2,$$

$$C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n+2-k)}{(k-1)!} + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{(n+1)n\dots(n+1-(k-1))}{k!} = C_{n+1}^k$$

tengliklardan foydalanib, (8.10) ni quyidagicha yozamiz:

$$(uv)^{n+1} = u^{(n+1)}v + C_{n+1}^1 u^{(n)}v' + C_{n+1}^2 u^{(n-1)}v'' + \dots + C_{n+1}^k u^{(n+1-k)}v^{(k)} + \dots + uv^{(n+1)}$$

Demak, (8.9) formula $n+1$ uchun ham o'rinli ekan. Isbot etilgan (8.9) formula *Leybnits formulasi* deb ataladi.

Misol. $y = x^3 e^x$ ning 20-tartibli hosilasi topilsin.

Yechish. $u = e^x$ va $v = x^3$ deb olsak, Leybnits formulasiga ko'ra

$$y^{(20)} = x^3 (e^x)^{(20)} + C_{20}^1 (x^3)' (e^x)^{(19)} + C_{20}^2 (x^3)'' (e^x)^{(18)} + C_{20}^3 (x^3)''' (e^x)^{(17)} +$$

$+C_{20}^4(x^3)^{(4)}(e^x)^{16}+\dots+(x^3)^{(20)}e^x$ bo'ladi. $(x^3)'=3x^2$, $(x^3)''=6x$, $(x^3)'''=6$, $(x^3)^{(4)}=0$ tengliklarni va $y=x^3$ funksiyaning hamma keyingi hosilalarining 0 ga tengligini, shuningdek $\forall n$ uchun $(e^x)^{(n)}=e^x$ ekanligini e'tiborga olsak, $y^{(20)}=e^x(x^3+3C_{20}^1x^2+6C_{20}^2x+6C_{20}^3)$ tenglik hosil bo'ladi.

Endi koeffitsientlarni hisoblaymiz:

$$C_{20}^1=20, \quad C_{20}^2=\frac{20\cdot19}{2}=190, \quad C_{20}^3=\frac{20\cdot19\cdot18}{3!}=\frac{20\cdot19\cdot18}{6}=1140$$

Demak,

$$y^{(20)}=e^x(x^3+60x^2+1140x+6840).$$

Savollar

1. Yuqori tartibli hosilalar qanday aniqlanadi?
2. Chekli sondagi funksiyalar yig'indisining n -tartibli hosilasi qanday hisoblanadi?
3. Ikkita funksiya ko'paytmasining n -tartibli hosilasi qanday hisoblanadi? (Leybnits formulasi)
4. Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosi nimadan iborat?
5. n -tartibli differensial qanday hisoblanadi?
6. Agar x oraliq o'zgaruvchi bo'lsa, d^4y ni yozing.

Misollar.

1. Quyidagi funksiyalarning ko'rsatilgan tartibli hosilalarini toping:

$$\text{a) } y=x\sqrt{4+x^2}, y''; \quad \text{b) } y=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}, y''; \quad \text{c) } y=x^7\cdot e^{-2x}, y^{(4)};$$

$$\text{d) } y=x^2\ln x, y^{(6)}; \quad \text{e) } y=\frac{x^2}{1-x}, y^{(7)}; \quad \text{f) } y=x^2\sin 3x, y^{(50)}.$$

2. Quyidagi funksiyalarning n -tartibli hosilalarini toping:

$$\text{a) } y=\ln\frac{x^2-1}{x^2-6x+9}; \quad \text{b) } y=\frac{x+1}{x(x-1)}.$$

9-§. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiya tushunchasi. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasini topish.

1. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiya tushunchasi.

Ko'pincha x o'zgaruvchining u funksiyasi bitta $y=f(x)$ tenglama bilan berilmasdan, balki x va u lar parametr deb ataladigan uchinchi t o'zgaruvchining funksiyalari sistemasi

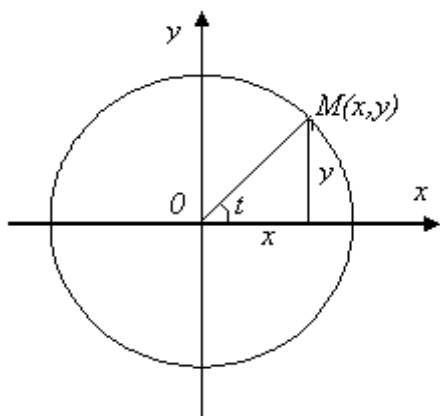
$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (9.1)$$

orqali beriladi. Bu erda t o'zgaruvchi biror $[\alpha, \beta]$ kesmadan qiymat qabul qiladi. Bunday sistema orqali aniqlangan funksiya parametrik ko'rinishda berilgan funksiya deyiladi.

Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning x va y larni bog'laydigan bitta formula orqali berish uchun (9.1) sistemada t parametrdan qutilish zarur. Buning

uchun (9.1) sistemadagi tenglamalardan biridan, masalan, birinchi $x=\varphi(t)$ tenglamadan t ni x orqali ifodalaymiz, ya'ni $t=\varphi_1(x)$, (bu erda $t=\varphi_1(x)$ funksiya $x=\varphi(t)$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya) va uni $y=\psi(t)$ ifodaga qo'yamiz. U holda $y=\psi(\varphi_1(x))=f(x)$ bo'ladi, ya'ni y o'zgaruvchi x argumentning funksiyasi sifatidagi ifodasi hosil bo'ladi.

Endi (9.1) sistema bilan berilgan x va y larni Oxy tekislikdagi nuqtaning koordinatalari sifatida qaraymiz. U holda $[\alpha;\beta]$ kesmadan olingan t parametrning har bir qiymatiga tekislikda aniq bitta nuqta mos keladi. Agar $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ funksiyalar t parametrning uzluksiz funksiyalari bo'lsa, u holda (9.1) sistema tekislikda biror uzluksiz chiziqni ifodalaydi. Bu holda chiziq (9.1) parametrik tenglamalar bilan berilgan deyiladi. (9.1) sistemadagi tenglamalar shu chiziqning parametrik tenglamalari deyiladi.



13-rasm

Chiziqlarni parametrik usulda berilishiga misol sifatida markazi koordinatalar boshida, radiusi R teng bo'lgan aylana tenglamasini keltirish

mumkin:
$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi], \text{ bu erda } t$$

geometrik nuqtai nazardan aylananing markaziy burchagini ifodalaydi. (1-rasm)

Aynan shu t parametrni vaqt deb qarashimiz ham mumkin. Haqiqatan ham, nuqtaning tekislikdagi har qanday harakatini t vaqtning funksiyasi bo'lgan x va y koordinatalar orqali berish mumkin. Shunday qilib, fizik nuqtai nazardan (9.1) sistemadagi ikki funksiya harakatdagi

nuqtaning traektoriyasini aniqlaydi.

Qaralayotgan masala mazmunidan kelib chiqqan holda t parametrga turli ma'no berish mumkin. Masalan t parametr burchak, vaqt, temperatura, yoy va h. bo'lishi mumkin.

2. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasi.

Faraz qilaylik x argumentning y funksiyasi quyidagicha

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta \quad (9.2)$$

parametrik tenglamalar bilan berilgan bo'lsin.

Agar $x=\varphi(t)$ funksiya teskarilanuvchi bo'lsa, ya'ni $t=\varphi_1(x)$ mavjud bo'lsa, u holda $y=\psi(t)$ tenglamani $y=\psi(\varphi_1(x))$ ko'rinishda yozib olish va $y=\psi(\varphi_1(x))$ funksiyaning hosilasini topish masalasini qarash mumkin. Odatda bu masala parametrik tenglamalar bilan berilgan funksiyaning hosilasini topish masalasi deb ham yuritiladi.

Teorema. Aytaylik $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha;\beta]$ da uzluksiz va $(\alpha;\beta)$ da differensiallanuvchi hamda $\varphi'(t)$ shu intervalda ishorasini saqlasin. Agar $x=\varphi(t)$ funksiyaning qiymatlar to'plami $[a,b]$ kesma bo'lsa, u holda $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$

tenglamalar $[a,b]$ da uzluksiz, (a,b) da differensiallanuvchi bo'lgan $y=f(x)$ funksiyani aniqlaydi va

$$y'_x = f'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad (9.3)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isboti. Teorema shartiga ko'ra $\varphi'(t)$ funksiya $[\alpha;\beta]$ da ishorasini saqlaydi, aniqlik uchun $\varphi'(t)>0$ bo'lsin. U holda $x=\varphi(t)$ funksiya $[\alpha;\beta]$ da uzluksiz va qat'iy o'suvchi bo'ladi. Shuning uchun $[a,b]$ kesmada unga teskari bo'lgan uzluksiz, qat'iy o'suvchi $t=\varphi_1(x)$ funksiya mavjud va bu funksiya (a,b) oraliqda differensiallanuvchi, hosilasi $t'_x = \frac{1}{x'_t}$ formula bilan hisoblanadi. Bu holda

$y=\psi(t)=\psi(\varphi_1(x))$ funksiya ham $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'ladi. Bu funksiyaning hosilasini topamiz. Murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasiga ko'ra

$y'_x = y'_t t'_x$, bundan esa $y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}$ ($x'_t \neq 0$) bo'lishi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

$(\alpha;\beta)$ da $\varphi'(t)<0$ bo'lgan holda teorema shunga o'xshash isbotlanadi.

Misol. Ushbu
$$\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$
 parametrik tenglamalar bilan

berilgan funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $(0,\pi/2)$ da $x'_t = -12\cos^2 t \sin t < 0$ va bu kesmada yuqoridagi teoremaning barcha shartlari bajariladi. Shuning uchun (9.3) formulaga ko'ra

$$y'_x = \frac{12\sin^2 t \cos t}{-12\cos^2 t \sin t} = -\operatorname{tg} t \text{ bo'ladi.}$$

Ravshanki,

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta \quad (9.4)$$

tenglamalar u'_x funksiyani x ning funksiyasi sifatida parametrik ifodalaydi.

Faraz qilaylik (9.4) tenglamalar sistemasi yuqoridagi teorema shartlarini qanoatlantirsin. U holda u'_x funksiyaning x bo'yicha hosilasi, ya'ni y ning x bo'yicha ikkinchi tartibli hosilasini quyidagicha hisoblash mumkin:

$$y''_{x^2} = (y'_x)_x' = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{(x'_t)'_t} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$

Shunday qilib, quyidagi qoida o'rinli ekan: y ning x bo'yicha ikkinchi tartibli hosilasini topish uchun parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning birinchi tartibli hosilasi u'_x ni t parametr bo'yicha differensiallab, so'ngra hosil qilingan natijani x'_t ga bo'lish kerak.

Misol tariqasida yuqorida berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topamiz: $y'_x = \operatorname{tg} t$, $(y'_x)'_t = (\operatorname{tg} t)'_t = 1/\cos^2 t$ va $x'_t = -12\cos^2 t \cdot \sin t$ ekanligini e'tiborga olsak, qoidaga ko'ra $y''_{x^2} = -\frac{1}{12\cos^4 t \cdot \sin t}$ bo'ladi.

Xuddi shu usulda uchinchi va boshqa yuqori tartibli hosilalar ham hisoblanadi.

10-§. Skalyar argumentli vektor funksiya va uning hosilasi

1. Vektor funksiya tushunchasi.

Ta'rif. Agar E sohadan olingan har bir haqiqiy t songa biror qoidaga ko'ra bittadan $\vec{r}(t)$ vektor mos qo'yilgan bo'lsa, E to'plamda t haqiqiy o'zgaruvchining vektor funksiyasi berilgan deyiladi.

Agar R^3 fazodagi bazis $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ bo'lsa, u holda vektor funksiyaning

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (10.1)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bunda $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ lar $\vec{r}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proeksiyalaridir. Vektor funksiyaning berilishi bilan uchta skalyar funksiya $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ larning berilishi teng kuchlidir.

Agar $\vec{r}(t)$ vektorning boshlang'ich nuqtasi koordinatalar boshiga joylashtirilsa (bunday vektor radius-vektor deb ataladi), u holda $\vec{r}(t)$ vektor uchlarining geometrik

o'rni vektor funksiyaning godografi deyiladi. Godografning fizik ma'nosi shundan iboratki, agar t parametr vaqt deb olinsa, $\vec{r}(t)$ radius-vektorning godografi harakatdagi nuqtaning traektoriyasini bildiradi. (14-rasm)

2. Vektor funksiyaning hosilasi.

Agar $t=t_0$ nuqtada $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ funksiyalar limitga ega bo'lsa, $\vec{r}(t)$ vektor funksiyaning $t=t_0$ nuqtadagi limiti

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t)\vec{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} y(t)\vec{j} + \lim_{t \rightarrow t_0} z(t)\vec{k} \quad (10.2)$$

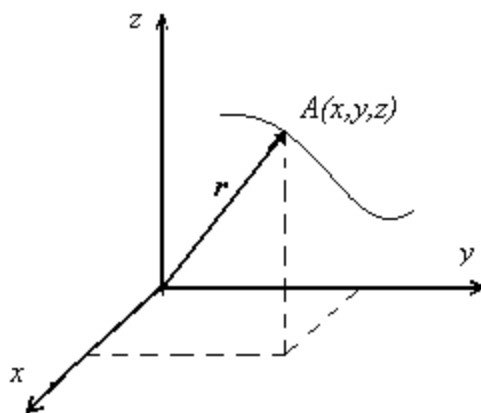
bo'ladi.

Agar $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$ bo'lsa, vektor-funksiya $t=t_0$ da uzluksiz deyiladi.

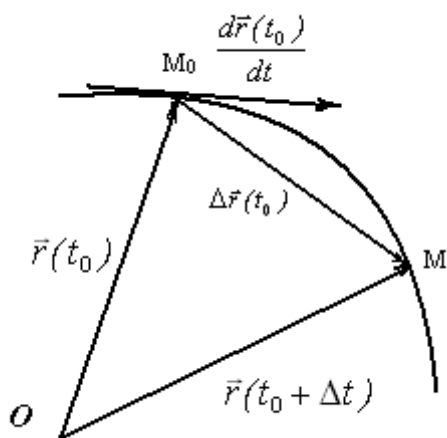
Endi $\vec{r}(t)$ vektor-funksiyaning hosilasi haqidagi masalaga o'tamiz.

$\Delta \vec{r}(t_0)$ vektorning boshi koordinatalar boshida deb faraz qilamiz. Bu holda $\vec{r}(t)$ vektor-funksiyaning godografi parametrik ko'rinishda $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ tengliklar bilan berilgan fazoviy egri chiziqdan iborat bo'ladi. O'zgaruvchi t ning shu egri chiziqdagi M_0 nuqtaga mos keladigan $t=t_0$ qiymatini olib, unga Δt ortirma beramiz. U vaqtda

$$\vec{r}(t_0 + \Delta t) = x(t_0 + \Delta t)\vec{i} + y(t_0 + \Delta t)\vec{j} + z(t_0 + \Delta t)\vec{k}$$



14-rasm



15-rasm

vektorni hosil qilamiz, bu vektor egri chiziqda biror M nuqtani aniqlaydi. (15- rasm).

Vektor-funksiya orttirmasini tuzamiz va uning skalyar argument orttirmasiga nisbatini qaraymiz:

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \vec{i} + \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} \vec{j} + \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} \vec{k} \quad (10.3)$$

Ta'rif. Agar $\Delta t \rightarrow 0$ da $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ nisbatning chekli limiti mavjud bo'lsa, u limit

$\vec{r}(t)$ vektor-funksiyaning $t=t_0$ nuqtadagi hosilasi deyiladi va $\vec{r}'(t_0)$ yoki $\frac{d\vec{r}(t_0)}{dt}$ orqali belgilanadi.

$$\vec{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (10.4)$$

Hosila vektorning yo'nalishini aniqlash maqsadida chizmaga e'tibor bersak, $t \rightarrow t_0$ da M nuqta M_0 ga, M_0M kesuvchi esa urinmaga intiladi. Demak, hosila vektor $\vec{r}'(t_0)$ parametrning o'sish tomoniga urinma bo'ylab yo'nalgan vektor bo'ladi.

Ravshanki, (10.3) tenglikdan $\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}$ ekanligi, bundan esa hosilani hisoblashning asosiy qoidalari vektor-funksiyalar uchun ham o'z kuchida qolishi kelib chiqadi.

Masalan: vektor-funksiyalar yig'indisining hosilasi qo'shiluvchi vektor-funksiyalar hosilalarining yig'indisiga teng.

Xususan, ikki vektor-funksiyalar yig'indisi uchun

$$(\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t))' = \vec{r}_1'(t) + \vec{r}_2'(t) \quad (10.5)$$

ko'rinishdagi formula o'rinlidir.

Shunga o'xshash, O'zgarmas son ko'paytuvchisini hosila ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\frac{d(a\vec{r}(t))}{dt} = a \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (10.6)$$

Endi vektor-funksiyalarga xos amallar bilan bog'liq bo'lgan hosilani hisoblashning ba'zi qoidalarni keltiramiz. Bu qoidalarning isbotini o'quvchilarga mashq sifatida qoldiramiz.

1. Vektor-funksiyalarning skalyar ko'paytmasidan olingan hosila ushbu formula bilan ifodalanadi:

$$\frac{d(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \frac{d\vec{r}_2}{dt} \quad (10.7)$$

2. Agar $f(t)$ skalyar funksiya va $\vec{r}(t)$ vektor-funksiya bo'lsa, $f(t) \cdot \vec{r}(t)$ ko'paytmaning hosilasi ushbu formula bo'yicha hisoblanadi:

$$\frac{d(f(t)\vec{r}(t))}{dt} = \frac{df}{dt} \vec{r} + f \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (10.8)$$

3. $\vec{r}_1(t)$ va $\vec{r}_2(t)$ vektor-funksiyalarning vektor ko'paytmasining hosilasi

$$\frac{d(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{r}_2}{dt} \quad (10.9)$$

formula bo'yicha topiladi.

Savollar.

1. Parametrik tenglama bilan berilgan funksiya grafigi va parametrik tenglama bilan berilgan egri chiziqli tushunchalari nimasi bilan farq qiladi?
2. Ellipsning parametrik tenglamasini yozing.
3. Parametrik tenglama bilan berilgan funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari qanday hisoblanadi?
4. Vektor-funksiya qanday aniqlanadi? Uning godografi nima? Godografning fizik ma'nosinimadan iborat?
5. Vektor-funksiyaning hosilasi qanday hisoblanadi? Uning yo'nalishi qanday?
6. Ikki vektor funksiyaning skalyar ko'paytmasi, vektor ko'paytmasining hosilasi qanday hisoblanadi?

Misollar.

1. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiylarning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini toping:

$$\text{a) } \begin{cases} x = \arctgt, \\ y = \frac{t^2}{2}. \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}, \quad \text{v) } \begin{cases} x = \sin t - t \cos t, \\ y = \cos t + t \sin t. \end{cases}, \quad \text{g) } \begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t-1}. \end{cases}.$$

2. Agar $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ –skalyar funksiylar, $\vec{r}_1(t)$ va $\vec{r}_2(t)$ vektor-funksiyalar $t=t_0$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda 1) $\lambda_1(t) \cdot \vec{r}_1(t) + \lambda_2(t) \cdot \vec{r}_2(t)$; 2) $(\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t))$; 3) $[\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)]$ funksiylarning $t=t_0$ nuqtada uzluksiz ekanligini isbotlang.

3. Yuqoridagi (10.5)-(10.9) formulalarni isbotlang.

II BOB. DIFFERENTSIAL

1-§. Differensiallanuvchi funksiya. Differensiallanuvchi bo'lishining zaruriy va yetarli sharti

1. Differensiallanuvchi funksiya.

Faraz qilaylik $y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda aniqlangan va $x_0 \in (a,b)$ bo'lsin.

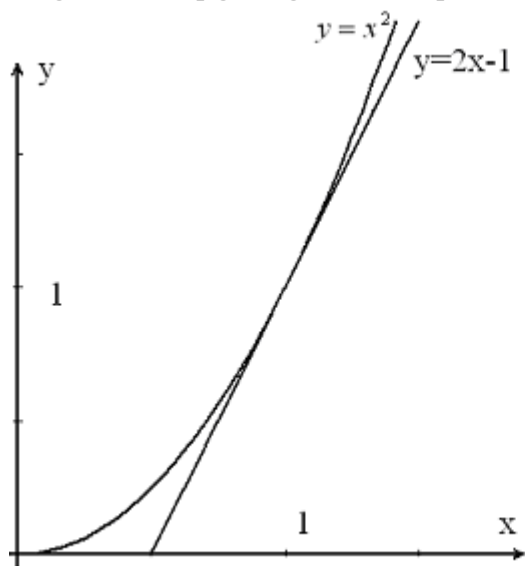
1-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi Δy orttirmasini

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x \quad (1.1)$$

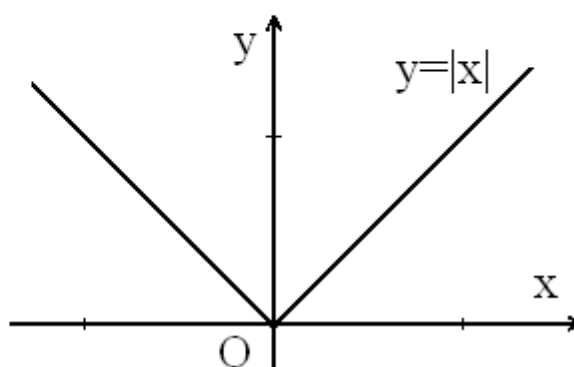
ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, bu funksiya $x=x_0$ nuqtada differensiallanuvchi funksiya deyiladi. Bunda A - Δx ga bog'liq bo'lmagan biror o'zgarmas son, $\alpha(\Delta x)$ esa $\Delta x \rightarrow 0$ da cheksiz kichik funksiya, ya'ni $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

$y=kx+b$ chiziqli funksiyaning qaraylik. Uning uchun $\Delta y=k\Delta x$ tenglik o'rinli, ya'ni funksiya orttirmasi argument orttirmasiga to'g'ri proporsional. Tarifdagi $\Delta y=A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x$ tenglik esa funksiya orttirmasi argument orttirmasiga «deyarli to'g'ri proporsional»ligini bildiradi, ya'ni $\Delta y \approx A \Delta x$. Bu tenglik $|\Delta x|$ qanchalik kichik bo'lsa, shunchalik aniqroq bo'ladi. Geometrik nuqtai nazardan funksiyaning x nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi funksiya grafigi x nuqtaning yetarlicha kichik atrofida biror novertikal to'g'ri chiziq, ya'ni biror chiziqli funksiya grafigi bilan «qo'shib» ketishini anglatadi. Shunday qilib, geometrik nuqtai nazardan funksiyaning x nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi funksiya grafigini x nuqtaning yetarlicha kichik atrofida «to'g'rilash» mumkinligini anglatadi.

Masalan, 16-rasmda $y=x^2$ funksiya grafigini $x_0=1$ nuqta atrofida $y=2x-1$ to'g'ri chiziq grafigi bilan «qo'shib» ketishi ko'rsatilgan.



16-rasm



17-rasm

17-rasmdan $y=|x|$ funksiyaning $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi emasligi kelib chiqadi, bu funksiya grafigini $x=0$ nuqtaning hech bir atrofida «to'g'irlab» bo'lmaydi.

2. Differensiallanuvchi bo'lishining zaruriy va yetarli sharti

Teorema. $f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun uning shu nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilasi mavjud bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti. Zaruriyligi. Funksiya $x=x_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda funksiyaning orttirmasini (1.1) ko'rinishda yozish mumkin. Undan $\Delta x \neq 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$ ni yozish mumkin. Bundan $\Delta x \rightarrow 0$ da $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$, demak x nuqtada hosila mavjud va $f'(x)=A$ ekanligi kelib chiqadi.

Yyetarliligi. Chekli $f'(x_0)$ hosila mavjud bo'lsin, ya'ni $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. U holda $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, bu erda $\alpha(\Delta x)$ $\Delta x \rightarrow 0$ da cheksiz kichik funksiya. Demak,

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x \quad (1.2)$$

yoki $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x$, bu erda $A = f'(x_0)$. Shunday qilib $x=x_0$ nuqtada $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi va $A=f'(x_0)$ ekan.

Bu teorema bir o'zgaruvchili funksiya uchun differensiallanuvchi bo'lish hosilaning mavjud bo'lishiga teng kuchli ekanligini anglatadi. Shu sababli hosilani topish amali funksiyaning differensiallash, matematik analizning hosila o'rganiladigan bo'limi differensial hisob deb ataladi.

Shunday qilib, avvalgi 1-ta'rif bilan ekvivalent bo'lgan ushbu ta'rifni ham berish mumkin:

2-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada differensiallanuvchi deyiladi.

2-§. Funksiya differensial, uning geometrik va fizik ma'nolari.

1. Funksiya differensial.

$f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda aniqlangan bo'lib, $x \in (a;b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Ya'ni funksiyaning x nuqtadagi orttirmasini

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x \quad (2.1)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsin, bunda $\Delta x \rightarrow 0$ da $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$.

Ta'rif. x nuqtada differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya orttirmasi (2.1) ning bosh qismi $f'(x) \Delta x$ berilgan $f(x)$ funksiyaning shu nuqtadagi differensial deyiladi va dy yoki $df(x)$ orqali belgilanadi, ya'ni $dy = f'(x) \Delta x$.

Masalan, $y=x^2$ funksiya uchun $dy=2x \Delta x$ ga teng.

Agar $f(x)=x$ bo'lsa, u holda $f'(x)=1$ va $df(x)=1 \cdot \Delta x$, ya'ni $dx=\Delta x$ bo'ladi. Shuni hisobga olgan holda argument orttirmasini, odatda, dx bilan belgilashadi.

Buni nazarga olsak, $f(x)$ funksiya differensialining formulasi

$$dy = f'(x) dx \quad \text{yoki} \quad dy = y' dx \quad (2.2)$$

bo'ladi.

2. Differensialning geometrik ma'nosi.

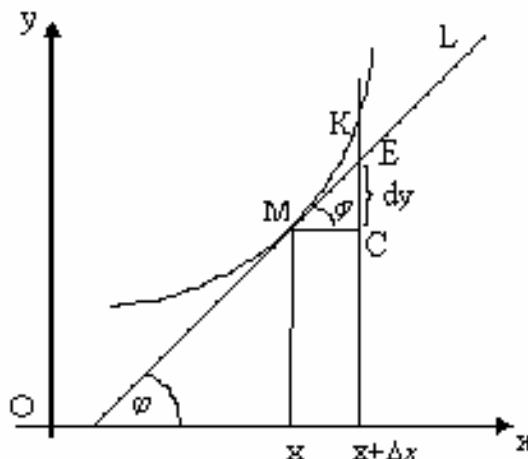
Endi $x \in (a;b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lgan $f(x)$ funksiyaning grafigi 18-rasmda ko'rsatilgan chiziqni ifodalasin deylik.

Bu chiziqning $(x, f(x))$ va $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ nuqtalarin mos ravishda M va K bilan belgilaylik. Unda $MS=\Delta x$, $KS=\Delta y$ bo'ladi. $f(x)$ funksiya x nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lgani uchun $f(x)$ funksiya grafigiga uning $M(x, f(x))$ nuqtasida

o'tkazilgan ML urinma mavjud va bu urinmaning burchak koeffitsienti $tg\varphi=f'(x)$. Shu ML urinmaning KS bilan kesishgan nuqtasini E bilan belgilaylik. Ravshanki, ΔMES dan

$$\frac{EC}{MC} = tg\varphi. \quad \text{Bundan}$$

$ES=MS \cdot tg\varphi=f'(x)\Delta x$ ekani kelib chiqadi. Demak, $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differensial $dy=f'(x)\Delta x$ funksiya grafigiga $M(x, f(x))$ nuqtada o'tkazilgan urinma orttirmasi ES ni ifodalaydi. Differensialning geometrik ma'nosi aynan shundan iborat.



18-rasm

3. Differensialning fizik ma'nosi.

Moddiy nuqta $s=f(t)$, bu erda s – bosib o'tilgan yo'l, t -vaqt, $f(t)$ -differensiallanuvchi funksiya, qonuniyat bilan to'g'ri chiziqli harakatlanayotgan bo'lsin.

Δt vaqt oralig'ida nuqta $\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t)$ yo'lni bosib o'tadi. Yo'lning bu orttirmasini

$$\Delta s=f'(t)\Delta t+\alpha(\Delta t)\Delta t$$

ko'rinishda ifodalashimiz mumkin. Bu yo'lni nuqta biror o'zgaruvchan tezlik bilan bosib o'tgan. Agar Δt vaqt oralig'ida nuqta o'zgarmas $f'(t)$ tezlik, ya'ni t vaqtdagi tezligiga teng tezlik bilan harakatlandi desak, bu holda bosib o'tilgan yo'l $f'(t)\Delta t$ ga teng bo'ladi. Bu esa yo'lning differensialiga teng:

$$ds=f'(t)\Delta t.$$

3-§. Elementar funksiyalarning differensiallari. Differensial topish qoidalari. Differensial formasining invariantligi.

1. Elementar funksiyalarning differensiallari.

Elementar funksiyalarning hosilalarini bilgan holda ularning differensiallari uchun quyidagi formulalarni yozish mumkin:

$$1. d(x^\mu)=\mu \cdot x^{\mu-1} dx \quad (x>0);$$

$$2. d(a^x)=a^x \cdot \ln a \, dx \quad (a>0, a \neq 1);$$

$$3. d(\log_a x)=\frac{1}{x \ln a} dx \quad (x>0, a>0, a \neq 1); \text{ xususan, } (\ln x)'=\frac{1}{x} \quad (x>0).$$

$$4. d(\sin x)=\cos x dx;$$

$$5. d(\cos x)=-\sin x dx;$$

$$6. d(\operatorname{tg} x)=\frac{1}{\cos^2 x} dx \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z});$$

$$7. d(\operatorname{ctg} x)=-\frac{1}{\sin^2 x} dx \quad (x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z});$$

$$8. d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (-1 < x < 1);$$

$$9. d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (-1 < x < 1);$$

$$10. d(\arctg x) = \frac{1}{1+x^2} dx;$$

$$11. d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx.$$

2. Differensial topish qoidalari.

Funksiya differensial ta'rifi va hosila topish qoidalaridan quyidagi tasdiqlarning o'rinli ekanligi kelib chiqadi:

a) Chekli sondagi differensiallanuvchi funksiyalar yig'indisining differensial ularning differensiallari yig'indisiga teng.

Masalan, ikki funksiya yig'indisi uchun bu tasdiqni quyidagicha isbotlash mumkin: (I.4.1) formulaga ko'ra

$$d(u(x)+v(x)) = (u(x)+v(x))' dx = (u'(x)+v'(x)) dx = u'(x) dx + v'(x) dx = du + dv.$$

b) Quyidagi $d(u(x) \cdot v(x)) = v(x) \cdot du + u(x) \cdot dv$ formula o'rinli.

Isboti. (I.4.2) va (2.2) formulalardan foydalanamiz.

$$d(u(x) \cdot v(x)) = (u(x) \cdot v(x))' dx = (u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)) dx =$$

$$= (u'(x) dx) \cdot v(x) + u(x) \cdot (v'(x) dx) = v(x) \cdot du + u(x) \cdot dv.$$

v) Quyidagi $d(Su(x)) = Sdu$ formula o'rinli.

g) Buclinmaning differensial uchun quyidagi

$$d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{du \cdot v(x) - u(x) \cdot dv}{v^2(x)}$$

formula o'rinli.

3. Differensial formasining invariantligi.

Aytaylik $y=f(x)$ funksiya x nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Differensialning ta'rifiga ko'ra $dy=y'_x \Delta x$, yoki erkli o'zgaruvchining orttirmasini dx kabi yozishga kelishganimizni e'tiborga olsak, $dy=y'_x dx$ edi.

Endi x erkli o'zgaruvchi emas, balki t erkli o'zgaruvchining differensiallanuvchi funksiyasi bo'lsin: $x=\varphi(t)$. U holda $y=f(\varphi(t))=g(t)$ funksiya t o'zgaruvchining murakkab funksiyasi va $dy=y'_t dt$ tenglik o'rinli bo'ladi. Lekin $y'_t = y'_x x'_t dt$ va $dx=x'_t dt$ larni e'tiborga olsak, $dy=y'_x dx$ formulaga ega bo'lamiz, ya'ni differensialning avvalgi ko'rinishiga qaytamiz.

Shunday qilib, differensial formasi o'zgarmadi, ya'ni funksiya differensialining formasi x erkli o'zgaruvchi bo'lganda ham, erksiz (oraliq) o'zgaruvchi bo'lganda ham bir xil ko'rinishda bo'ladi: differensial hosila va hosila qaysi o'zgaruvchi bo'yicha olinayotgan bo'lsa o'sha o'zgaruvchi differensial ko'paytmasiga teng bo'ladi. Bu xossa differensial ko'rinishning invariantligi deyiladi. Shuni aytib o'tish lozimki, bu xossada faqat differensial formasining saqlanishi haqida gap boradi. Agar x erkli o'zgaruvchi bo'lsa, u holda $dx=\Delta x$; x erksiz o'zgaruvchi bo'lsa, u holda, umuman olganda, $dx \neq \Delta x$ bo'ladi.

Misol. $y = \sqrt[3]{x}$ berilgan. 1) erkli x erkli o'zgaruvchi bo'lganda va 2) $x = t^5 + t^2 - 3$ bo'lganda dy ni hisoblang.

Yechish. 1) (2.2) formulaga ko'ra

$$dy = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

2) Differensial formasining invariantlik xossasidan foydalansak, $dy = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$\text{bo'lib, } dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{(t^5 + t^2 - 3)^2}} d(t^5 + t^2 - 3) = \frac{(5t^4 + 2t)dt}{3\sqrt[3]{(t^5 + t^2 - 3)^2}} \text{ ga ega bo'lamiz.}$$

4-§. Taqribiy hisoblashlarda differensialning qo'llanilishi.

Yuqorida ta'kidlaganimizdek, x_0 nuqtada differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya uchun $\Delta y \approx f'(x_0)dx$, ya'ni $\Delta y \approx dy$ taqribiy tenglik o'rinli. Shu taqribiy tenglik matematik analizning nazariy va tatbiqiy masalalarida muhim ahamiyatga ega bo'lib, differensialning mohiyatini belgilaydi. Yuqoridagi tenglikda $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$ deb olsak, quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0) \text{ yoki}$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (4.1)$$

(4.1) formula funksiya qiymatlarini taqribiy hisoblashda keng qo'llaniladi.

Masalan, $f(x) = \sqrt{x}$ funksiya uchun quyidagi

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}} \quad (4.2)$$

formula o'rinli. Agar $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyaning $x=0,98$ dagi qiymatini hisoblash talab qilinsa, (4.2) formulada $x=1$, $\Delta x = -0,02$ deb olish yyyetarli. U holda $\sqrt{0,98} \approx \sqrt{1} + \frac{-0,02}{2\sqrt{1}} = 1 - 0,01 = 0,99$ bo'ladi. Agar $\sqrt{0,98}$ kalkulyatorda hisoblasak,

uni 10^{-6} aniqlikda 0,989949 teng ekanligi ko'rish mumkin. Demak, differensial yordamida hisoblaganda xatolik 0,001 dan katta emas. Umumiy holda differensial yordamida taqribiy hisoblashlardagi xatolikni baholash masalasini kelgusida o'rganamiz.

5-§. Funksiyaning yuqori tartibli differensiallari

1. Yuqori tartibli differensiallar.

Faraz qilaylik $y=f(x)$ funksiya biror (a,b) intervalda berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning $dy=f'(x)dx$ differensial x ga bog'liq bo'lib, $dx=\Delta x$ va Δx orttirma x ga bog'liq emas, chunki x nuqtadagi orttirmani x ga bog'liq bo'lmagan holda ixtiyoriy tanlash mumkin. Bu holda differensial formulasidagi dx ko'paytuvchi o'zgarib bo'ladi va $f'(x)dx$ ifoda faqat x ga bog'liq bo'lib, uni x bo'yicha differensiallash mumkin.

Demak, bu funksiyaning differensial mavjud bo'lishi mumkin va u, agar mavjud bo'lsa, funksiyaning ikkinchi tartibli differensial deb ataladi.

Ikkinchi tartibli differensial d^2y yoki $d^2f(x)$ kabi belgilanadi. Shunday qilib, ikkinchi tartibli differensial quyidagicha aniqlanar ekan: $d^2y=d(dy)$.

Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli differensialni ifodasini topish uchun $dy=f'(x)dx$ formulada dx ko'paytuvchi o'zgaras deb qaraymiz. U holda

$$d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)=d(f'(x))dx=(f''(x)dx)dx=f''(x)(dx)^2$$

bo'ladi. Biz kelgusida dx ning darajalarini havssiz yozishga kelishib olamiz. Bu kelishuvni e'tiborga olsak, $(dx)^2=dx^2$ bo'ladi va ikkinchi tartibli differensial uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$d^2y=f''(x)dx^2 \quad (5.1)$$

Shunga o'xshash, uchinchi tartibli differensialni ta'riflash va uning uchun ifodasini keltirib chiqarish mumkin: $d^3y=d(d^2y)=d(f''(x)dx^2)=f'''(x)dx^3$.

Umumiy holda funksiyaning $(n-1)$ -tartibli differensial $d^{n-1}y$ dan olingan differensial funksiyaning n -tartibli differensial deyiladi va $d^n y$ kabi belgilanadi, ya'ni $d^n y=d(d^{n-1}y)$. Bu holda ham funksiyaning n -tartibli differensial uning n -tartibli hosilasi orqali quyidagi

$$d^n y=f^{(n)}(x)dx^n \quad (5.2)$$

ko'rinishda ifodalanishini isbotlash mumkin.

Yuqoridagi formuladan funksiyaning n -tartibli hosilasi uning n -tartibli differensial va erkli o'zgaruvchi differensialning n -darajasi nisbatiga teng ekanligi kelib chiqadi:

$$f^{(n)}(x)=d^n y/dx^n.$$

2. Murakkab funksiyaning yuqori tartibli differensiallari.

Endi x argument biror t o'zgaruvchining funksiyasi $x=\varphi(t)$ bo'lgan hol uchun yuqori tartibli differensiallarni hisoblash formulalarini keltirib chiqaramiz.

Bu holda $dx=\varphi'(t)dt$ bo'lganligi sababli, dx ni x ga bog'liq emas deb bo'lmaydi. Shu sababli ta'rif bo'yicha ($d^2y=d(f'(x)dx)$) hisoblaganda, d^2y ni ikkita $f'(x)$ va dx funksiyalar ko'paytmasining differensial deb qaraymiz.

Natijada

$$d^2y=d(f'(x)dx)=d(f'(x))dx+f'(x)d^2x=(f''(x)dx)dx+f'(x)d^2x=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x,$$

ya'ni

$$d^2y=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x \quad (5.3)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Endi ikkinchi tartibli differensial uchun hosil qilingan (5.1) formula (5.3) formulaning xususiy holi ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

Haqiqatan ham, agar x erkli o'zgaruvchi bo'lsa, u holda $d^2x=x''dx^2=0 \cdot dx^2=0$ bo'lib, (5.3) formuladagi ikkinchi qo'shiluvchi qatnashmaydi.

Uchinchi tartibli differensial uchun quyidagi

$$d^3y=f'''(x)dx^3+3f''(x)dx d^2x+f'(x)d^3x \quad (5.4)$$

formula o'rinli ekanligini isbotlashni o'quvchilarga taklif qilamiz.

Ikkinchi va uchinchi tartibli differensiallar uchun olingan formulalardan murakkab funksiyaning yuqori tartibli differensiallarini hisoblashda differensial formasining invariantligi buziladi. Boshqacha aytganda, ikkinchi va undan yuqori tartibli differensial formulalari ko'rinishi x argument erkli o'zgaruvchi yoki boshqa o'zgaruvchining differensiallanuvchi funksiyasi bo'lishiga bog'liq bo'ladi.

Savollar:

1. Differensiallanuvchi funksiya qanday ta'riflanadi?
2. Funksiyaning nuqtada differensiallanuvchi bo'lishining zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat?
3. Differensial nima?
4. Differensialning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
5. Differensial va hosila qanday tenglik bilan bog'langan?
6. Har qanday differensiallanuvchi funksiya uzluksiz bo'ladimi?
7. Har qanday uzluksiz funksiya differensiallanuvchi bo'ladimi?
8. «Differensial funksiya orttirmasining chiziqli qismi» degan iborani qanday tushuntirish mumkin?
9. Differensial yordamida taqribiy hisoblashda nima ishlar bajariladi?

Misollar

1. Ta'rifdan foydalanib quyidagi funksiyalarning x nuqtada differensiallanuvchi ekanligini ko'rsating va differensialini toping:
a) $y=x^3-2$, b) $y=x-3x^2$, c) $y=5+6x-x^2$, d) $y=3x^3$
2. Agar a) $y=x^7$, $x=1$, $\Delta x=0,1$; b) $y=2/x$, $x=2$, $\Delta x=-0,1$ bo'lsa, (1.1) formuladagi A va $\alpha(\Delta x)$ larni toping.
3. Ushbu
$$f(x)=\begin{cases} 2x, & \text{agar } x < 0, \\ 0, & \text{agar } 0 \leq x \leq 2, \\ x-2, & \text{agar } x > 2 \end{cases}$$
funksiyaning sonlar o'qida uzluksiz ekanligini, lekin 0 va 2 nuqtalarda differensiallanuvchi emasligini isbotlang.
4. Sonlar o'qida uzluksiz, lekin ko'rsatilgan nuqtalarda differensiallanuvchi bo'lmagan funksiyalarga misollar keltiring:
a) $x=3$; b) $x=-1$, $x=5$; c) $x=-2$, $x=0$, $x=2$.
5. Quyidagi funksiyalarning birinchi va ikkinchi tartibli differensial- larini toping:
a) $y=4x^3-3x^2+7$; b) $y=(2-\sqrt[3]{x^2})^2$; c) $y=x^3\sqrt{x}-\frac{2}{x}$; d) $y=e^{-x}+\ln x$;
6. Ushbu $f(x)=2x^2+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-5$ funksiyaning $x=8$ nuqtada $dx=0,1$ bo'lgandagi differensialini hisoblang.
7. Differensial yordamida quyidagi funksiyalarning berilgan nuqtalardagi qiymatini taqribiy hisoblang:
1) $y=\sqrt[3]{x}$, a) $x=65$; b) $x=125,1324$; 2) $y=\sin x$, a) $x=29^\circ$, b) $x=359^\circ$.
8. Radiusi $R=8$ sm bo'lgan sharning radiusi $0,2$ sm ga uzaytirilsa, sharning hajmi taxminan qanchaga o'zgaradi?

III BOB

Differensial hisobning asosiy teoremlari va tatbiqlari

1-§. O'rta qiymat haqidagi teoremlar

Matematik analiz kursida o'rganiladigan asosiy va amaliy masalalarni yechishda katta ahamiyatga ega bo'lgan funksiyalar sinflaridan (to'plamlaridan) biri-bu uzluksiz funksiyalar sinfi hisoblanadi. Oldingi bobda biz differensiallanuvchi funksiyalar sinfi uzluksiz funksiyalar sinfining qismi bo'lishini ko'rsatgan edik. Differensiallanuvchi funksiyalar o'ziga xos ahamiyatga ega, chunki ko'pgina tatbiqiy masalalarni yechish hosilasi mavjud funksiyalarni o'rganishga keltiriladi. Bunday funksiyalar ba'zi bir umumiy xossalarga ega. Bu xossalarda ichida o'rta qiymat haqidagi teoremlar nomi bilan birlashgan teoremlar alohida ahamiyatga ega. Ushbu teoremlar $[a;b]$ kesmada o'rganilayotgan funksiya uchun u yoki bu xossaga ega bo'lgan $[a;b]$ kesmaga tegishli s nuqtaning mavjudligini ta'kidlaydi.

1. Ferma teoremasi

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda aniqlangan va biror ichki c nuqtada eng katta (eng kichik) qiymatga erishsa va shu nuqtada chekli $f'(c)$ hosila mavjud bo'lsa, u holda $f'(c)=0$ bo'ladi.

Isbot. $f(c)$ funksiyaning eng katta qiymati bo'lsin, ya'ni $\forall x \in (a;b)$ da $f(x) \leq f(c)$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. Shartga ko'ra bu s nuqtada chekli $f'(c)$ hosila mavjud.

Ravshanki,

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Ammo $x < c$ bo'lganda $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow f'(c) \geq 0$ va $x > c$ bo'lganda

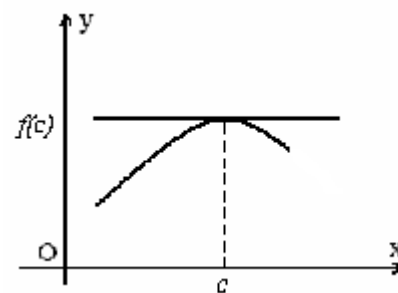
$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow f'(c) \leq 0 \text{ bo'lishidan } f'(c) = 0 \text{ ekani kelib chiqadi.}$$

Eng kichik qiymat holi shunga o'xshash isbotlanadi.

Ferma teoremasi sodda geometrik ma'noga ega. U $f(x)$ funksiya grafigiga $(c; f(c))$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning Ox o'qiga parallell bo'lishini ifodalaydi (19-rasm).

1- eslatma. Ichki s nuqtada $f'(s)=0$ bo'lsa ham bu nuqtada $f(x)$ funksiya eng katta (eng kichik) qiymatni qabul qilmasligi mumkin. Masalan, $f(x)=2x^3-1$, $x \in (-1;1)$ da berilgan bo'lsin. Bu funksiya uchun $f'(0)=0$ bo'ladi, lekin

$f(0)=-1$ funksiyaning $(-1;1)$ dagi eng katta yoki eng kichik qiymati bo'lmaydi.



19-rasm

2. Roll teoremasi

Teorema (Roll teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan bo'lib, quyidagi

- 1) $[a;b]$ da uzluksiz;
- 2) $(a;b)$ da differensiallanuvchi;
- 3) $f(a)=f(b)$

shartlarni qanoatlantirsa, u holda $f'(c)=0$ bo'ladigan kamida bitta c ($a < c < b$) nuqta mavjud bo'ladi.

Isbot. Ma'lumki, agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya shu kesmada o'zining eng katta M va eng kichik m qiymatlariga erishadi. Qaralayotgan $f(x)$ funksiya uchun ikki hol bo'lishi mumkin.

1. $M=m$, bu holda $[a,b]$ kesmada $f(x)=sonst$ va $f'(x)=0$ bo'ladi. Ravshanki, $f'(s)=0$ tenglamani qanoatlantiradigan nuqta sifatida $\forall c \in (a;b)$ ni olish mumkin.

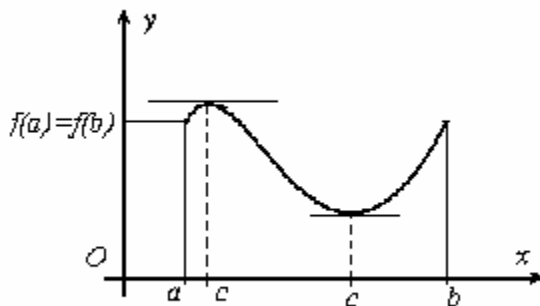
2. $M > m$, bu holda teoremaning $f(a)=f(b)$ shartidan funksiya M yoki m qiymatlaridan kamida birini $[a,b]$ kesmaning ichki nuqtasida qabul qilishi kelib chiqadi. Aniqlik uchun $f(c)=m$ bo'lsin. Eng kichik qiymatning ta'rifiga ko'ra $\forall x \in [a,b]$ uchun $f(x) \geq f(c)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Endi $f'(c)=0$ ekanligini ko'rsatamiz. Teoremaning ikkinchi shartiga ko'ra $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalning har bir x nuqtasida chekli hosilaga ega. Bu shart, xususan c nuqta uchun ham o'rinli. Demak, Ferma teoremasi shartlari bajariladi. Bundan $f'(c)=0$ ekanligi kelib chiqadi.

$f(c)=M$ bo'lgan holda teorema yuqoridagi kabi isbotlanadi.

Roll teoremasiga quyidagicha geometrik talqin berish mumkin

(20-rasm). Agar $[a,b]$ kesmada uzluksiz, (a,b) intervalda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya kesma uchlarida teng qiymatlar qabul qilsa, u holda $f(x)$ funksiya grafigida absissasi $x=c$ bo'lgan shunday C nuqta topiladiki, shu nuqtada funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma absissalar o'qiga parallel bo'ladi.



20-rasm

Eslatma. Roll teoremasining shartlari yyetarli bo'lib, zaruriy shart emas. Masalan,

1) $f(x)=x^3$, $x \in [-1;1]$ funksiya uchun teoremaning 3-sharti bajarilmaydi. ($f(-1)=-1 \neq 1=f(1)$), lekin $f'(0)=0$ bo'ladi.

2) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{agar } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{agar } -1 < x < 0, \\ 2, & \text{agar } x = -1 \end{cases}$ funksiya uchun Roll teoremasining barcha

shartlari bajarilmaydi, lekin $(-1;0)$ ning ixtiyoriy nuqtasida $f'(x)=0$ bo'ladi.

3. Lagranj teoremasi

Teorema (Lagranj teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va (a,b) da chekli $f'(x)$ hosila mavjud bo'lsa, u holda (a,b) da kamida bitta shunday c nuqta mavjud bo'lib,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (1.1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Quyidagi yordamchi funksiyanı tuzib olamiz:

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Bu $F(x)$ funksiyanı $[a,b]$ kesmada uzluksiz va (a,b) da hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ va x funksiylarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida qarash mumkin. Bundan $F(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada uzluksiz va (a,b) da hosilaga ega ekanligi kelib chiqadi. Shuningdek

$$F(a) = F(b) = 0,$$

demak $F(x)$ funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi.

Demak, Roll teoremasiga ko'ra (a,b) intervalda kamida bitta shunday s nuqta mavjud bo'ladiki, $F'(c) = 0$ bo'ladi.

Shunday qilib,

$$\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

va bundan esa isbot qilinishi kerak bo'lgan (1) formula kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

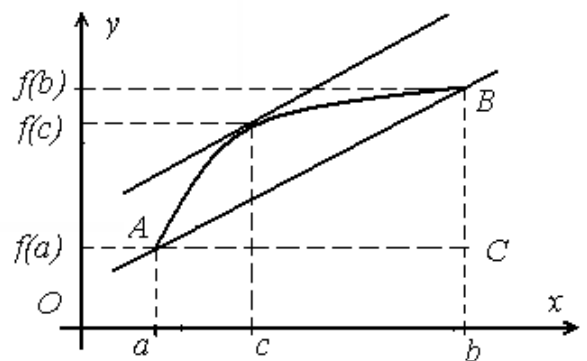
(1.1) formulani ba'zida Lagranj formulasi deb ham yuritiladi. Bu formula

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad (1.2)$$

ko'rinishda ham yoziladi.

Endi Lagranj teoremasining geometrik ma'nosiga to'xtalamiz. $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasining shartlarini qanoatlantirsin deylik (21-rasm). Funksiya grafigining $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ nuqtalar orqali kesuvchi o'tkazamiz, uning burchak koeffitsienti

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{BC}{AC} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ bo'ladi.}$$



21-rasm

Hosilaning geometrik ma'nosiga binoan $f'(c)$ - bu $f(x)$ funksiya grafigiga uning $(c; f(c))$ nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti: $\operatorname{tg} \beta = f'(c)$. Demak, (1.1) formula (a,b) intervalda kamida bitta shunday c nuqta mavjudligini ko'rsatadiki, $f(x)$ funksiya grafigiga $(c; f(c))$ nuqtada o'tkazilgan urinma AB kesuvchiga paralell bo'ladi.

Isbot qilingan (1.1) formulani boshqacha ko'rinishda ham yozish mumkin.

Buning uchun $a < c < b$ tengsizliklarni e'tiborga olib, $\frac{c-a}{b-a} = \theta$ belgilash kiritamiz, u

holda $c=a+(b-a)\theta$, $0<\theta<1$ bo'lishi ravshan. Natijada (1) formula ushbu $f(b) - f(a) = f'(a+\theta(b-a))(b-a)$ ko'rinishga keladi.

Agar (1) formulada $a=x_0$; $b=x_0+\Delta x$ almashtirishlar bajarsak, u

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(c)\Delta x \quad (1.3)$$

bu erda $x_0 < c < x_0+\Delta x$, ko'rinishga keladi. Bu formula argument orttirmasi bilan funksiya orttirmasini bog'laydi, shu sababli (1.3) formula chekli orttirmalar formulasi deb ataladi.

Agar (1.1) Lagranj formulasida $f(a)=f(b)$ deb olsak, Roll teoremasi kelib chiqadi, ya'ni Roll teoremasi Lagranj teoremasining xususiy holi ekan.

Misol. Ushbu $[0,2]$ kesmada $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$ funksiya uchun Lagranj formulasidagi c ning qiymatini toping.

Yechish. funksiyaning kesma uchlaridagi qiymatlarini va hosilasini hisoblaymiz: $f(0)=-2$; $f(2)=12$; $f'(x)=12x^2-10x+1$. Olingan natijalarni Lagranj formulasiga qo'yamiz, natijada

$12-(-2)=(12c^2-10c+1)(2-0)$ yoki $6c^2-5c-3=0$ kvadrat tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani yechamiz: $c_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{97}}{12}$. Topilgan ildizlardan faqat $\frac{5+\sqrt{97}}{12}$ qaralayotgan kesmaga tegishli. Demak, $c=\frac{5+\sqrt{97}}{12}$ ekan.

Lagranj teoremasi o'z navbatida quyidagi teoremaning xususiy holi bo'ladi.

4. Koshi teoremasi

Teorema (Koshi teoremasi). Agar $[a,b]$ kesmada $f(x)$ va $g(x)$ berilgan bo'lib,

- 1) $[a,b]$ da uzluksiz;
- 2) (a,b) intervalda $f'(x)$ va $g'(x)$ mavjud, hamda $g'(x)\neq 0$ bo'lsa, u holda hech bo'lmaganda bitta shunday c ($a<c<b$) nuqta topilib,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (1.4)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Ravshanki, (1.4) tenglik ma'noga ega bo'lishi uchun $g(b)\neq g(a)$ bo'lishi kerak. Bu esa teoremadagi $g'(x)\neq 0$, $x\in(a,b)$ shartdan kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, agar $g(a)=g(b)$ bo'lsa, u holda $g(x)$ funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantirib, biror $c\in(a,b)$ nuqtada $g'(c)=0$ bo'lar edi. Bu esa $\forall x\in(a,b)$ da $g'(x)\neq 0$ shartga ziddir. Demak, $g(b)\neq g(a)$.

Endi yordamchi

$$\Phi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)) \text{ funksiyanı tuzaylik.}$$

Shartga ko'ra $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da uzluksiz va (a,b) intervalda differensiyalanuvchi bo'lgani uchun $F(x)$ birinchidan $[a,b]$ kesmada uzluksiz funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida uzluksiz, ikkinchidan (a,b) intervalda

$$\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$$

hosilaga ega.

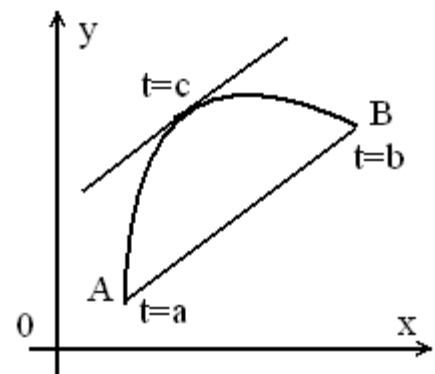
So'ngra $F(x)$ funksiyaning $x=a$ va $x=b$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz: $F(a)=F(b)=0$. Demak, $F(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada Roll teoremasining barcha shartlarini qanoailantiradi. Shuning uchun hech bo'lmaganda bitta shunday c ($a < c < b$) nuqta topiladiki, $F'(c)=0$ bo'ladi. Shunday qilib,

$$0 = \Phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c)$$

va bundan (1.4) tenglikning o'rinli ekani kelib chiqadi. Isbot tugadi.

Isbotlangan (1.4) tenglik Koshi formulasi deb ham ataladi.

Endi Koshi teoremasining geometrik ma'nosini aniqlaymiz. Aytaylik $x=\varphi(t)$, $y=f(t)$, $a \leq t \leq b$ tekislikdagi chiziqning parametrik tenglamasi bo'lsin. Shuningdek chiziqda $t=a$ ga mos keluvchi nuqtani $A(\varphi(a), f(a))$, $t=b$ ga mos keluvchi nuqtani $B(\varphi(b), f(b))$ kabi belgilaylik. (22-rasm).



22-rasm

U holda (1.4) formulaning chap qismi AB vatarning burchak koeffitsientini, o'ng tomoni esa egri chiziqqa parametrning $t=c$ qiymatiga mos keladigan nuqtasida

o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini anglatadi. Demak, Koshi formulasi AB yoyning AB vatarga parallel bo'lgan urinmasining mavjudligini ta'kidlaydi ekan.

Misol. Ushbu $f(x)=x^2$ va $\varphi(x)=\sqrt{x}$ funksiya uchun $[0,4]$ kesmada Koshi formulasini yozing va s ni toping.

Yechish. berilgan funksiylarning kesma uchlaridagi qiymatlari va hosilalarini topamiz: $f(0)=0$, $f(4)=16$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(4)=2$; $f'(x)=2x$, $\varphi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Bulardan foydalanib Koshi formulasini yozamiz:

$$\frac{16-0}{2-0} = \frac{2c}{\frac{1}{2\sqrt{c}}}, \text{ bundan } 4s\sqrt{c}=8 \text{ yoki } s\sqrt{c}=2. \text{ Demak } s=\sqrt[3]{4}.$$

Savollar

1. Ferma teoremasini ayting. Uning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
2. Roll teoremasini ayting. Uning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
3. Roll teoremasining shartlarini ayting. Ularning zaruriy shart ekanligini misollarda tushuntiring.
4. Lagranj teoremasini ayting. Uning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
5. Lagranj teoremasi shartlarining har biri zaruriy shart ekanligini misollarda tushuntiring.

6. Roll teoremasi Lagranj teoremasining xususiy holi ekanligini ko'rsating.
7. Koshi teoremasini ayting.
8. Koshi teoremasidan Lagranj teoremasini keltirib chiqaring.
9. Nima uchun Ferma, Roll, Lagranj, Koshi teoremlari o'rta qiymat haqidagi teoremlar deyiladi?

Misollar.

1. Ushbu $f(x)=x^3+5x^2-6x$ funksiya $[0;1]$ kesmada berilgan. Bu funksiya shu kesmada Roll teoremasini tatbiq qilib bo'ladimi? Agar tatbiq qilish mumkin bo'lsa, teoremadagi s nimaga teng?
2. Ushbu $f(x)=x^2-4x-5$ funksiya ildizlari orasida uning hosilasining ildizi mavjudligini isbotlang, uni toping. Bu natijaga geometrik talqin bering.
3. Ushbu $x^3+3x+5=0$ tenglamaning haqiqiy ildizi yagona ekanligini isbotlang.
4. Ushbu $f(x)=\ln x$ funksiya $[1;e]$ kesmada berilgan. Bu funksiya shu kesmada Lagranj teoremasini tatbiq qilib bo'ladimi? Agar tatbiq qilish mumkin bo'lsa, Lagranj formulasidagi s nimaga teng?
5. Berilgan $y=4-x^2$ egri chiziqning qaysi nuqtasida o'tkazilgan urinmasi $A(-2;0)$ va $B(1;3)$ nuqtalardan o'tadigan vatariga parallel bo'ladi?
6. Nima uchun $y=x+|\sin x|$ funksiya $[-1;1]$ kesmada Lagranj teoremasini tatbiq qilib bo'lmaydi? Chizmasini chizing.
7. Lagranj formulasidan foydalanib $x_2 > x_1$ bo'lganda $\arctg x_2 - \arctg x_1 \leq x_2 - x_1$ ekanligini isbotlang.
8. Agar $f(x)=x^3$, $g(x)=x^2+1$ bo'lsa, u holda bu funksiyalar uchun $[1;2]$ kesmada Koshi formulasini yozish mumkinmi? Yozish mumkin bo'lsa, s ni toping.

2-§ Aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidalari

Tegishli funksiyalarning hosilalari mavjud bo'lganda $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochish masalasi engillashadi. Odatda hosilalardan foydalanib, aniqmasliklarni ochish Lopital qoidalari deb ataladi. Biz quyida Lopital qoidalarining bayoni bilan shug'ullanamiz.

1. $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik. Ma'lumki, $x \rightarrow 0$ da $f(x) \rightarrow 0$ va $g(x) \rightarrow 0$ bo'lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi. Ko'pincha $x \rightarrow a$ da $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbatning limitini topishga qaraganda $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nisbatning limitini topish oson bo'ladi. Bu nisbatlar limitlarining teng bo'lish sharti quyidagi teoremda ifodalangan.

1-teorema. Agar

1) $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(a-\delta;a)\cup(a;a+\delta)$, bu erda $\delta>0$, to'plamda uzluksiz, differensiallanuvchi va shu to'plamdan olingan ixtiyoriy x uchun $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$;

$$2) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0;$$

3) hosilalar nisbatining limiti (chekli yoki cheksiz)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

mavjud bo'lsa, u holda funksiyalar nisbatining limiti $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ mavjud va

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (2.1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Har ikkala funksiyani $x=a$ nuqtada $f(a)=0$, $g(a)=0$ deb aniqlasak, natijada ikkinchi shartga ko'ra $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=0=f(a)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)=0=g(a)$ tengliklar o'rinli bo'lib, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Avval $x>a$ holni qaraymiz. Berilgan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a;x]$, bu erda $x<a+\delta$, kesmada Koshi teoremasining shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun a bilan x orasida shunday c nuqta topiladiki, ushbu $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ tenglik o'rinli bo'ladi. $f(a)=g(a)=0$ ekanligini e'tiborga olsak, so'ngi tenglikdan

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (2.2)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ravshanki, $a<c<x$ bo'lganligi sababli, $x \rightarrow a$ bo'lganda $c \rightarrow a$ bo'ladi. Teoremaning 3-sharti va (2.2) tenglikdan $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ kelib chiqadi.

Shunga o'xshash, $x<a$ holni ham qaraladi. Teorema isbot bo'ldi.

Misol. Ushbu $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$ limitni xisoblang.

Yechish. Bu holda $f(x)=\ln(x^2-3)$, $g(x)=x^2+3x-10$ bo'lib, ular uchun 1- teoremaning barcha shartlari bajariladi.

Haqiqatan ham,

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \ln(x^2-3) = \ln 1 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+3x-10) = 0;$$

$$2) f'(x) = \frac{2x}{x^2-3}, \quad g'(x) = 2x+3, \quad x \neq \pm\sqrt{3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{(x^2-3)(2x+3)} = 0 \text{ bo'ladi.}$$

Demak, 1-teoremaga binoan $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x^2 + 3x - 10} = 0$.

1-eslatma. Shuni ta'kidlash kerakki, berilgan funksiyalar nisbatining limiti 3) shart bajarilmasa ham mavjud bo'lishi mumkin, ya'ni 3) shart yyyetarli bo'lib, zaruriy emas.

Masalan, $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, $g(x) = x$ funksiyalar $(0;1]$ da 1), 2) shartlarni

qanoatlantiradi va $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} (x \sin \frac{1}{x}) = 0$, lekin

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x})$ mavjud emas, chunki $x_n = \frac{1}{\pi n} \rightarrow 0$ $n \rightarrow \infty$ da

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} (2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} + \sin \pi n) = 0,$$

$$x_n = \frac{1}{\pi(2n + \frac{1}{2})} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \text{ da esa}$$

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} (2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2}{\pi(2n + \frac{1}{2})} \cdot \cos(2\pi n + \frac{\pi}{2}) + \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2})) = 1.$$

2-teorema. Agar $[c; +\infty)$ nurda aniqlangan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar berilgan bo'lib,

1) $(c; +\infty)$ da chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud va $g'(x) \neq 0$,

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$;

3) hosilalar nisbatining limiti $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (chekli yoki cheksiz) mavjud bo'lsa, u

holda funksiyalar nisbatining limiti $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ mavjud va

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (2.3)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Umumiylikni saqlagan holda, teoremadagi c sonni musbat deb olish mumkin. Quyidagi $x = \frac{1}{t}$ formula yordamida x o'zgaruvchini t o'zgaruvchiga almashtiramiz. U holda $x \rightarrow +\infty$ da $t \rightarrow 0$ bo'ladi. Natijada $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar t o'zgaruvchising $f\left(\frac{1}{t}\right)$ va $g\left(\frac{1}{t}\right)$ funksiyalari bo'lib, ular $(0, \frac{1}{c}]$ da aniqlangan.

Teoremadagi (2) shartga asosan

$$\lim_{t \rightarrow +0} f\left(\frac{1}{t}\right) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +0} g\left(\frac{1}{t}\right) = 0 \text{ bo'ladi.}$$

Ushbu,

$$\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'_t = \left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'_x \cdot x'_t = -f'_x\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2}, \quad \left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'_t = \left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'_x \cdot x'_t = -g'_x\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2}$$

munosabatlardan $(0; \frac{1}{c})$ intervalda $f'_t(\frac{1}{t})$, $g'_t(\frac{1}{t})$ hosilalarning mavjudligi kelib chiqadi. So'ngra teoremaning 3) shartiga ko'ra

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'_t(\frac{1}{t})}{g'_t(\frac{1}{t})} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-f'_x(\frac{1}{t^2})}{-g'_x(\frac{1}{t^2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demak $f\left(\frac{1}{t}\right)$ va $g\left(\frac{1}{t}\right)$ funksiyalarga 1-teoremani qo'llash mumkin. Bunda

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} \quad \text{e'tiborga olsak, (2.3) tenglikning o'rinishligi kelib chiqadi.}$$

Teorema isbot bo'ldi.

2. $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslik. Agar $x \rightarrow a$ da $f(x) \rightarrow \infty$, $g(x) \rightarrow \infty$ bo'lsa,

$\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi. Endi bunday

aniqmaslikni ochishda ham $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning hosilalaridan foydalanish mumkinligini ko'rsatadigan teoremani keltiramiz.

3-teorema. Agar

- 1) $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(a; \infty)$ nurda differensiallanuvchi, hamda $g'(x) \neq 0$,
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$,
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo'lsa,

u holda $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ mavjud va $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ bo'ladi.

Isbot. Teorema shartiga ko'ra $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud. Aytaylik $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu$

bo'lsin. U holda $\forall \varepsilon > 0$ sonni olsak ham shunday $N > 0$ son topilib, $x \geq N$ bo'lganda

$$\mu - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \mu + \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.3)$$

tengsizliklar bajariladi. Umumiylikni cheklamagan holda $N > a$ deb olishimiz mumkin. U holda $x \geq N$ tengsizlikdan $x \in (a; \infty)$ kelib chiqadi.

Aytaylik $x > N$ bo'lsin. U holda $[N; x]$ kesmada $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarga Koshi teoremasini qo'llanib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{f(x)-f(N)}{g(x)-g(N)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \text{ bu erda } N < c < x.$$

Endi $c > N$ bo'lganligi sababli $x=c$ da (2.3) tengsizliklar o'rinli:

$$\mu - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(c)}{g'(c)} < \mu + \frac{\varepsilon}{2},$$

bundan esa

$$\mu - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x)-f(N)}{g(x)-g(N)} < \mu + \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizliklarga ega bo'lamiz.

Teorema shartiga ko'ra $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, $f(N)$ va $g(N)$ lar esa

chekli sonlar. Shu sababli x ning yyetarlicha katta qiymatlarida $\frac{f(x)-f(N)}{g(x)-g(N)}$ kasr

$\frac{f(x)}{g(x)}$ kasrdan istalgancha kam farq qiladi. U holda shunday M soni topilib, $x \geq M$ larda

$$\mu - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \mu + \varepsilon \quad (2.4)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday M soni mavjudki, barcha $x \geq M$ larda (2.4) tenglik o'rinli bo'ladi, bu esa $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu$ ekanligini anglatadi.

Teorema isbot bo'ldi.

Yuqorida isbotlangan teorema $x \rightarrow a$ (a -son) holda ham o'rinli. Buni isbotlash uchun $t = \frac{1}{x-a}$ almashtirish bajarish yyetarli.

Misol. Ushbu $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ limitni hisoblang.

Yechish. $f(x) = \ln x$, $g(x) = x$ funksiyalar uchun 3-teorema shartlarini tekshiramiz: 1) bu funksiyalar $(0, +\infty)$ da differensiallanuvchi; 2) $f'(x) = 1/x$ $g'(x) = 1$;

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0$, ya'ni mavjud. Demak, izlanayotgan limit ham

mavjud va $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ tenglik o'rinli.

3. Boshqa ko'rinishdagi aniqmasliklar. Ma'lumki, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, bo'lganda $f(x) \cdot g(x)$ ifoda $0 \cdot \infty$ ko'rinishidagi aniqmaslik bo'lib, uning quyidagi

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

kabi yozish orqali $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmaslikka keltirish mumkin.

Shuningdek, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, bo'lganda $f(x) \cdot g(x)$ ifoda $\infty \cdot \infty$ ko'rinishidagi aniqmaslik bo'lib, uni ham quyidacha shakl almashtirib

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}}$$

$\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka keltirish mumkin.

Ma'lumki, $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiya 1, 0 va ∞ ga, $g(x)$ funksiya esa mos ravshda ∞ , 0 va 0 intilganda $(f(x))^{g(x)}$ darajali-ko'rsatkichli ifoda 1^∞ , 0^0 , ∞^0 ko'rinishidagi aniqmasliklar edi. Bu ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochish uchun avval $y = (f(x))^{g(x)}$ ni logarifmlaymiz: $\ln y = g(x) \cdot \ln(f(x))$. Bunda $x \rightarrow a$ da $g(x) \ln(f(x))$ ifoda $0 \cdot \infty$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi.

Shunday qilib, funksiya hosilalari yordamida $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 , ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochiida, ularni $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka keltirib, so'ng yuqoridagi teoremlar qo'llaniladi.

2-eslatma. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalari ham $f(x)$ va $g(x)$ lar singari yuqorida keltirilgan teoremlarning barcha shartlarini qanoatlantirsa, u holda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi, ya'ni bu holda Lopital qoidasini takror qo'llanish mumkin bo'ladi.

Misol. Ushbu $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ limitni hisoblang.

Yechish. Ravshanki, $x \rightarrow 0$ da $\left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ ifoda 1^∞ ko'rinishdagi aniqmaslik

bo'ladi. Uni logarifmlab, $\frac{0}{0}$ aniqmaslikni ochishga keltiramiz:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{tgx}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln \frac{tgx}{x})'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{tgx} \cdot \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - tgx}{x^2}}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x^3} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x \cos x)'}{(x^3)'} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{3x^2} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Demak, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{tgx}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}.$

Misolalar

1. Quyidagi limitlarni hisoblang:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 7};$ b) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\pi - 2x};$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right);$
d) $\lim_{x \rightarrow 2} (2-x)tg \frac{\pi x}{4};$ e) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x;$ f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}}.$

3-§ Teylor formulasi

Teylor formulasi matematik analizning eng muhim formulalaridan biri bo'lib, ko'plab nazariy tatbiqlarga ega. U taqribiy hisobning negizini tashkil qiladi.

1. Teylor ko'phadi. Peano ko'rinishdagi qoldiq hadli Teylor formulasi. Ma'lumki, funktsiyaning qiymatlarini hisoblash ma'nosida ko'phadlar eng sodda funktsiyalar hisoblanadi. Shu sababli funktsiyaning x_0 nuqtadagi qiymatini hisoblash uchun uni shu nuqta atrofida ko'phad bilan almashtirish muammosi paydo bo'ladi.

Nuqtada differensiallanuvchi funktsiya ta'rifiga ko'ra agar $y=f(x)$ funktsiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda uning shu nuqtadagi orttirmasini $\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$, ya'ni

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Boshqacha aytganda x_0 nuqtada differensiallanuvchi $y=f(x)$ funktsiya uchun birinchi darajali

$$P_1(x) = f(x_0) + b_1(x-x_0) \quad (3.1)$$

ko'phad mavjud bo'lib, $x \rightarrow x_0$ da $f(x) = P_1(x) + o(x-x_0)$ bo'ladi. Shuningdek, bu ko'phad $P_1(x_0) = f(x_0)$, $P_1'(x_0) = b = f'(x_0)$ shartlarni ham qanoatlantiradi.

Endi umumiyroq masalani qaraylik. Agar $x=x_0$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan $y=f(x)$ funktsiya shu nuqtada $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo'lsa, u holda

$$f(x) = P_n(x) + o(x-x_0) \quad (3.2)$$

shartni qanoatlantiradigan darajasi n dan katta bo'lmagan $P_n(x)$ ko'phad mavjudmi?

Bunday ko'phadni

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \dots + b_n(x-x_0)^n, \quad (3.3)$$

ko'rinishda izlaymiz. Noma'lum bo'lgan $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ koeffitsientlarni topishda

$$P_n(x_0) = f(x_0), P_n'(x_0) = f'(x_0), P_n''(x_0) = f''(x_0), \dots, P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \quad (3.4)$$

shartlardan foydalanamiz. Avval $P_n(x)$ ko'phadning hosilalarini topamiz:

$$P_n'(x) = b_1 + 2b_2(x-x_0) + 3b_3(x-x_0)^2 + \dots + nb_n(x-x_0)^{n-1},$$

$$P_n''(x) = 2 \cdot 1b_2 + 3 \cdot 2b_3(x-x_0) + \dots + n \cdot (n-1)b_n(x-x_0)^{n-2},$$

$$P_n'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1b_3 + \dots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2)b_n(x-x_0)^{n-3},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P_n^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots \cdot 2 \cdot 1b_n.$$

Yuqorida olingan tengliklar va (3.3) tenglikning har ikkala tomoniga x o'rniga x_0 ni qo'yib barcha $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ koeffitsientlar qiymatlarini topamiz:

$$P_n(x_0) = f(x_0) = b_0,$$

$$P_n'(x_0) = f'(x_0) = b_1,$$

$$P_n''(x_0) = f''(x_0) = 2 \cdot 1b_2 = 2!b_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) = n \cdot (n-1) \dots \cdot 2 \cdot 1b_n = n!b_n$$

Bulardan $b_0 = f(x_0), b_1 = f'(x_0), b_2 = \frac{1}{2!}f''(x_0), \dots, b_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$ hosil qilamiz.

Topilgan natijalarni (3.3) qo'yamiz va

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n, \quad (3.5)$$

ko'rinishda ko'phadni hosil qilamiz. Bu ko'phad Teylor ko'phadi deb ataladi.

Teylor ko'phadi (3.2) shartni qanoatlantirishini isbotlaymiz. Funksiya va Teylor ko'phadi ayirmasini $R_n(x)$ orqali belgilaymiz: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. (3.4) shartlardan $R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \dots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$ bo'lishi kelib chiqadi.

Endi $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$, ya'ni $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ ekanligini ko'rsatamiz. Agar

$x \rightarrow x_0$ bo'lsa, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$ ifodaning 0/0 tipidagi aniqlanmaslik ekanligini ko'rish

qiyin emas. Unga Lopital qoidasini n marta tatbiq qilamiz. U holda

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = \frac{R_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0, \text{ demak } x \rightarrow x_0 \text{ da } R_n(x) = o((x-x_0)^n) \text{ o'rinli ekan.}$$

Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi:

Teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida n marta differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $x \rightarrow x_0$ da quyidagi formula

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \quad (3.6)$$

o'rinli bo'ladi, bu erda $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$ Peano ko'rinishidagi qoldiq had.

Agar (3.6) formulada $x_0=0$ deb olsak, Teylor formulasining xususiy holi hosil bo'ladi:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+o(x^n). \quad (3.7)$$

Bu formula Makloren formulasi deb ataladi.

2. Teylor formulasining Lagranj ko'rinishdagi qoldiq hadi.

Teylor formulasi $R_n(x)$ qoldiq hadi yozilishining turli ko'rinishlari mavjud. Biz uning Lagranj ko'rinishi bilan tanishamiz.

Qaralayotgan $f(x)$ funksiya x_0 nuqta atrofida $n+1$ -tartibli hosilaga ega bo'lsin deb talab qilamiz va yangi $g(x)=(x-x_0)^{n+1}$ funksiyani kiritamiz. Ravshanki,

$$g(x_0)=g'(x_0)=\dots=g^{(n)}(x_0)=0; \quad g^{(n+1)}(x_0)=(n+1)! \neq 0.$$

Ushbu $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$ va $g(x)=(x-x_0)^{n+1}$ funksiyalarga Koshi teoremasini tatbiq qilamiz. Bunda $R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\dots=R_n^{(n)}(x_0)=0$ e'tiborga olib, quyidagini topamiz:

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{R_n'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{R_n'(c_1)-R_n'(x_0)}{g'(c_1)-g'(x_0)} = \frac{R_n''(c_2)}{g''(c_2)} = \dots =$$

$$\frac{R_n^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)} = \frac{R_n^{(n)}(x)-R_n^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x)-g^{(n)}(x_0)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)},$$

bu erda $c_1 \in (x_0; x)$; $c_2 \in (x_0; c_1)$; ... ; $c_n \in (x_0; c_{n-1})$; $\xi \in (x_0; c_n) \subset (x_0; x)$.

Shunday qilib, biz $\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}$ ekanligini ko'rsatdik, bu erda

$\xi \in (x_0; x)$. Endi $g(x)=(x-x_0)^{n+1}$, $g^{(n+1)}(\xi)=(n+1)!$, $R_n^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)$ ekanligini e'tiborga olsak quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (x_0; x). \quad (3.8)$$

Bu (3.8) formulani Teylor formulasining Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadi deb ataladi.

Lagranj ko'rinishdagi qoldiq hadni

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad (3.9)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin, bu erda θ birdan kichik bo'lgan musbat son, ya'ni $0 < \theta < 1$.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaning Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi quyidagi shaklda yoziladi:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \text{bu erda } \xi \in (x_0; x).$$

Agar $x_0=0$ bo'lsa, u holda $\xi=x_0+\theta(x-x_0)=\theta x$, bu erda $0<\theta<1$, bo'lishi ravshan, shu sababli Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Makloren formulasi

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (3.10)$$

shaklida yoziladi.

3. Teylor formulasining Koshi ko'rinishidagi qoldiq hadi

Teylor formulasi qoldiq hadining boshqa ko'rinishlariga misol tariqasida Koshi ko'rinishidagi qoldiq hadni keltirish mumkin. Buning uchun

$$\varphi(t)=f(x)-f(t)-f'(t)(x-t)-\dots-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

yordamchi funksiyani tuzib olamiz va $[x_0;x]$ segmentda uzluksiz, $(x_0;x)$ intervalda esa noldan farqli chekli hosilaga ega bo'lgan biror $\psi(t)$ funksiyani olib, bu funksiyalarga Koshi teoremasini qo'llasak,

$$R_n(x)=\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(c)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n, \quad c\in(x_0;x) \quad (3.11)$$

ko'rinishdagi qoldiq hadni chiqarish mumkin.

Agar (3.11) formulada $\psi(t)$ funksiya sifatida $\psi(t)=x-t$ funksiya olinsa, natijada Koshi shaklidagi qoldiq hadni hosil qilamiz:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}, \quad c=x_0+\theta(x-x_0), \quad 0<\theta<1$$

4-§.Ba'zi bir elementar funksiyalar uchun Makloren formulasi

1. e^x funksiya uchun Makloren formulasi. $f(x)=e^x$ funksiyaning $(-\infty;+\infty)$ oraliqda barcha tartibli hosilalari mavjud: $f^{(k)}(x)=e^x$, $k=1, 2, \dots, n+1$. Bundan $x=0$ da $f^{(k)}(0)=1$, $k=1, 2, \dots, n$; $f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$ va $f(0)=1$ hosil bo'ladi. Olingan natijalarni (3.10) formulaga qo'yib

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \quad (4.1)$$

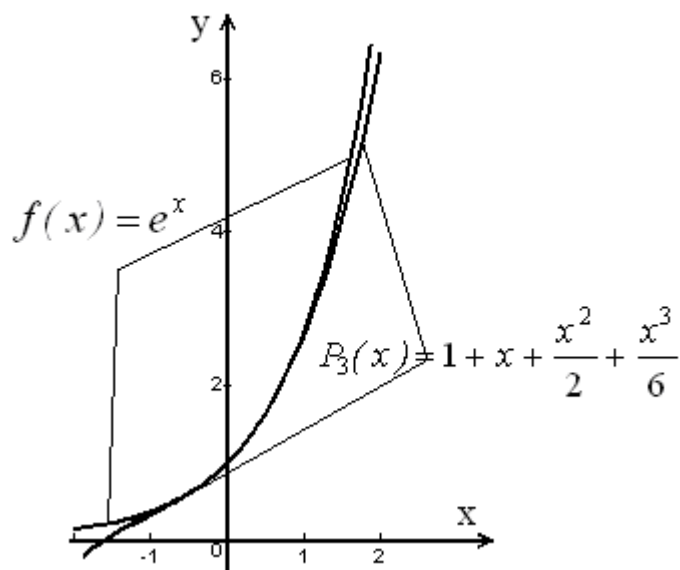
bu erda $0<\theta<1$, formulaga ega bo'lamiz.

23-rasmda $f(x)=e^x$ funksiya va $P_3(x)$ ko'phad funksiyaning grafiklari keltirilgan.

Agar $x=1$ bo'lsa,

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \quad (4.2)$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu formula yordamida e sonining irratsionalligini isbot qilish mumkin.



23-rasm

Haqiqatan ham, faraz qilaylik, $e = \frac{p}{q}$ - ratsional son bo'lsin. Bunda $e > 1$ bo'lganligi uchun $p > q$ bo'ladi. (4.2) da $e = \frac{p}{q}$ desak,

$$\frac{p}{q} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{p}{q} \right)^\theta$$

Bu tenglikning ikkala tomonini $n!$ ga ko'paytirsak quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\frac{p}{q} n! - \left(2 \cdot n! + \frac{1}{2!} \cdot n! + \frac{1}{3!} \cdot n! + \dots + 1 \right) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{p}{q} \right)^\theta \quad (4.3)$$

Bu erda n sonni r dan katta deb olishimiz mumkin. U holda $\theta < 1$, $p > q$ bo'lganligi uchun

$$0 < \frac{1}{n+1} \left(\frac{p}{q} \right)^\theta < \frac{1}{n+1} \frac{p}{q} \leq \frac{p}{n+1} < 1 \quad (4.4)$$

bo'ladi. Shuningdek, $n > p > q$ bo'lganligi uchun $\frac{p}{q} n!$ -butun son, chunki $n!$ da q ga teng bo'lgan ko'paytuvchi uchraydi.

Ravshanki,

$$2n! + \frac{1}{2!} \cdot n! + \frac{1}{3!} \cdot n! + \dots + 1$$

ko'rinishdagi yig'indi ham butun son bo'ladi. Demak, $n > p$ uchun (4.3) tenglikning chap tomoni musbat butun son, o'ng tomoni esa (4.4) ga ko'ra birdan kichik musbat son bo'ladi. Bu kelib chiqqan ziddiyat e sonining ratsional son deb faraz

qilishimizning noto'g'ri ekanligini ko'rsatadi. Shuning uchun e – irratsional son bo'ladi.

2. Sinus funksiya uchun Makloren formulasi.

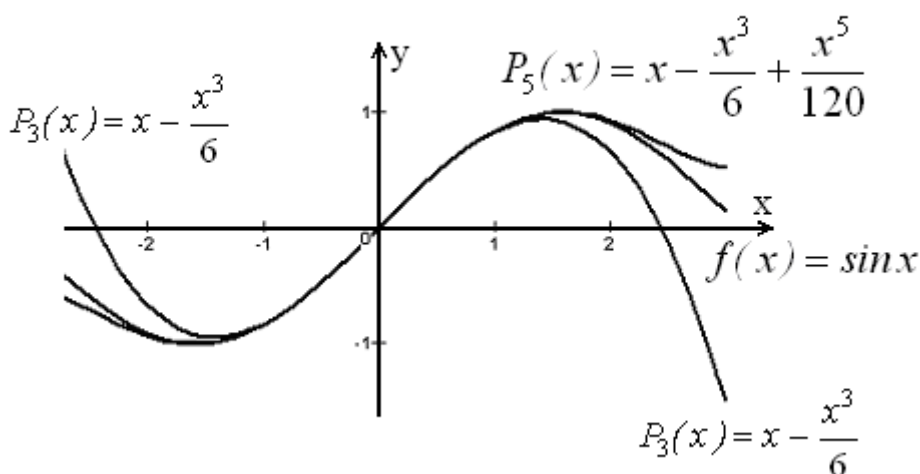
$f(x)=\sin x$ funksiyaning istalgan tartibli hosilasi mavjud va n -tartibli hosila uchun quyidagi formula o'rinli edi (I.8-§): $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$. $x=0$ da $f(0)=0$ va

$$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases} 0, & \text{agar } n=2k, \\ (-1)^k, & \text{agar } n=2k+1 \end{cases}$$

Shuning uchun (3.10) formulaga ko'ra

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \sin(\theta x + (k+1)\pi), \quad 0 < \theta < 1 \quad (4.5)$$

ko'rinishdagi yoyilmaga ega bo'lamiz.



24-rasm

24-rasmda $f(x)=\sin x$, $P_3(x)$, $P_5(x)$ funksiyalarning grafiklari keltirilgan.

3. Kosinus funksiya uchun Makloren formulasi.

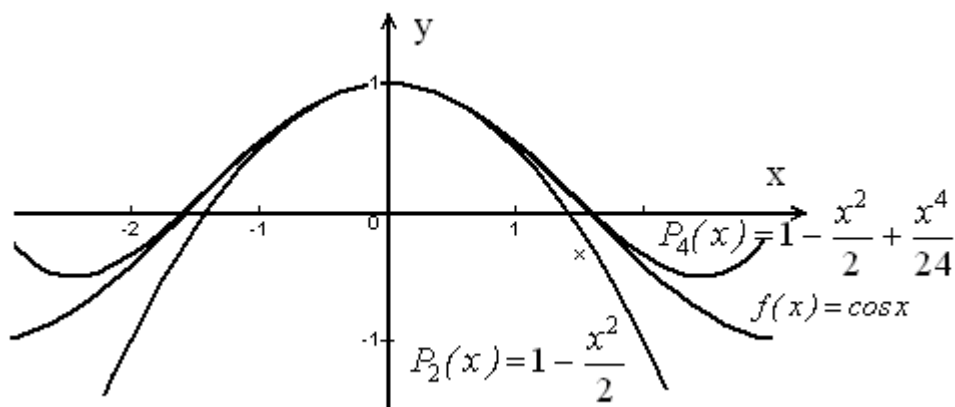
Ma'lumki, $f(x)=\cos x$ funksiyaning n -tartibli hosilasi uchun

$$f^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{n\pi}{2}) \text{ formulaga egamiz (I.8-§).}$$

$$x=0 \text{ da } f(0)=1 \text{ va } f^{(n)}(0)=\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases} 0, & \text{agar } n=2k+1, \\ (-1)^k, & \text{agar } n=2k \end{cases}$$

Demak, $\cos x$ funksiya uchun quyidagi formula o'rinli:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} + \frac{x^{2k+2}}{(2k+1)!} \cos(\theta x + k\pi + \frac{\pi}{2}), \quad 0 < \theta < 1 \quad (4.6)$$



25-rasm

25-rasmda $f(x)=\cos x$, $P_2(x)$, $P_4(x)$ funksiyalarning grafiklari keltirilgan.

4. $f(x)=(1+x)^\mu$ ($\mu \in \mathbb{R}$) funksiya uchun Makloren formulasi. Bu funksiya $(-1;1)$ intervalda aniqlangan va cheksiz marta differensiallanuvchi. Uni Makloren formulasiga yoyish uchun $f(x)=(1+x)^\mu$ funksiya ketma-ket hosilalar olamiz:

$$f'(x) = \mu(1+x)^{\mu-1}, \quad f''(x) = \mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2},$$

$$f'''(x) = \mu(\mu-1)(\mu-2)(1+x)^{\mu-3}, \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}. \quad (4.7)$$

Ravshanki, $f(0)=1$, $f^{(n)}(0)=\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)$. Shuning uchun $f(x)=(1+x)^\mu$ funksiyaning Makloren formulasi quyidagicha yoziladi:

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{n!} x^n + \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n)}{(n+1)!} (1+\theta x)^{\mu-n-1} x^{n+1} \quad (4.8)$$

$0 < \theta < 1$.

5. $f(x)=\ln(1+x)$ funksiya uchun Makloren formulasi.

Bu funksiyaning $(-1;\infty)$ intervalda aniqlangan va istalgan tartibli hosilasi mavjud. Haqiqatan ham, $f'(x) = (\ln(1+x))' = (1+x)^{-1}$ funksiyasiga (4.7) formulani qo'llab, unda $\mu=-1$ deb n ni $n-1$ bilan almashtirsak,

$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ formulani hosil qilamiz. Ravshanki, $f(0)=0$, $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ Shuni e'tiborga olib, berilgan funksiyaning Makloren formulasini yozamiz:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (4.9)$$

Yuqorida keltirilgan asosiy elementar funksiyalarning Makloren formulalari boshqa funksiyalarni Teylor formulasiga yoyishda foydalaniladi. Shunga doir misollar ko'ramiz.

1-misol. Ushbu $f(x)=e^{-3x}$ funksiya uchun Makloren formulasini yozing.

Yechish. Bu funksiyaning Makloren formulasini yozish uchun $f(0)$, $f'(0)$, ..., $f^{(n)}(0)$ larni topib, (3.10) formuladan foydalanish mumkin edi. Lekin $f(x)=e^x$

funksiyaning yoyilmasidan foydalanish ham mumkin. Buning uchun (4.1) formuladagi x ni $-3x$ ga almashtiramiz, natijada

$$e^{-3x} = 1 - \frac{3x}{1!} + \frac{9x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{3^n x^n}{n!} + \frac{(-3x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-3\theta x}, \quad 0 < \theta < 1,$$

formulaga ega bo'lamiz.

2-misol. Ushbu $f(x) = \ln x$ funksiyani $x_0 = 1$ nuqta atrofida Teylor formulasini yozing.

Yechish. Berilgan funksiyani Teylor formulasiga yoyish uchun $f(x) = \ln(1+x)$ funksiya uchun olingan (4.9) asosiy yoyilmadan foydalanamiz. Unda x ni $x-1$ ga almashtiramiz, natijada $\ln x = \ln((x-1)+1)$ va

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)} \cdot \frac{(x-1)^{n+1}}{(1+\theta(x-1))^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu formula $x-1 > -1$ bo'lganda, ya'ni $x > 0$ larda o'rinli.

6. Teylor formulasi yordamida taqribiy hisoblash

Makloren formulasi Lagranj ko'rinishdagi qoldiq hadini baholash masalasini qaraylik.

Faraz qilaylik, shunday o'zgarmas M son mavjud bo'lsinki, argument x ning $x_0 = 0$ nuqta atrofidagi barcha qiymatlarida hamda n ning barcha qiymatlarida $|f^{(n)}(x)| \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. U holda

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq M \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Argument x ning tayin qiymatida $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ tenglik

o'rinli, demak n ning yyetarlicha katta qiymatlarida $R_n(x)$ yyetarlicha kichik bo'lar ekan.

Shunday qilib, $x_0 = 0$ nuqta atrofida $f(x)$ funksiyani

$$f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$$

ko'phad bilan almashtirish mumkin. Natijada funksiyaning x nuqtadagi qiymati uchun

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$$

taqribiy formula kelib chiqadi. Bu formula yordamida bajarilgan taqribiy hisoblashdagi xatolik $|R_n(x)|$ ga teng bo'ladi.

1-misol. $e^{0,1}$ ni 0,001 aniqlikda hisoblang.

Yechish. e^x funksiyaning Makloren formulasidan foydalanamiz. (4.1) formulada $x = 0,01$ deb olsak, u holda

$$e^{0,1} \approx 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{0,01}{2!} + \dots + \frac{(0,1)^n}{n!},$$

masala shartiga ko'ra xatolik 0,001 dan katta bo'lmasligi kerak, demak

$R_n(x) = \frac{0,1^{n+1}}{(n+1)!} e^{0,1\theta} < 0,001$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan birinchi n ni topish yyyetarli. $e^{0,1\theta} < 2$ ekanligini e'tiborga olsak, so'ngi tengsizlikni quyidagicha yozib olish mumkin:

$$\frac{2}{10^{n+1}(n+1)!} < 0,001.$$

Endi $n=1, 2, 3, \dots$ qiymatlarni so'ngi tengsizlikka qo'yib tekshiramiz va bu tengsizlik $n=3$ dan boshlab bajarilishini topamiz. Shunday qilib, 0,001 aniqlikda

$$e^{0,1} \approx 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{0,01}{2!} + \frac{0,001}{3!} = 1,055.$$

Xususiyl holda, $n=1$ bo'lganda

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ taqribiy hisoblash formulasi $R_2(x) = \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot (x-x_0)^2$, $x_0 < \xi < x$ aniqlikda o'rinli bo'ladi.

2-misol. Differensial yordamida radiusi $r=1,01$ bo'lgan doira yuzini toping. Hisoblash xatoligini baholang.

Yechish. Doira yuzi $S = \pi r^2$ ga teng. Bunda $r_0=1$, $\Delta r=0,01$ deb olamiz va $S=S(r)$ funksiya orttirmasini uning differensial bilan almashtiramiz:

$$S(r) \approx S(r_0) + dS(r_0) = S(r_0) + S'(r_0)\Delta r.$$

Natijada

$$S(1,01) \approx S(1) + dS(1) = S(1) + S'(1)0,01 = \pi \cdot 1^2 + 2\pi \cdot 0,01 = 1,02\pi \text{ hosil bo'ladi.}$$

Bunda hisoblash xatoligi

$$R_2(r) = \frac{S''(\xi)}{2!} \cdot (r-r_0)^2, \quad r_0 < \xi < r \text{ dan katta emas. } S''(r) = 2\pi \text{ va } r \text{ ga bog'liq emas, shu}$$

sababli $R_2(r) = \frac{2\pi}{2!} \cdot 0,01^2 = 0,0001\pi$. Demak, hisoblash xatoligi 0,000314 dan katta emas.

3-misol. Ushbu $f(x) = e^{x^2-x}$ funksiyaning $x=0,03$ nuqtadagi qiymatini differensial yordamida hisoblang. Xatolikni baholang.

Yechish. Taqribiy hisoblash formulasi $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ da $x_0=0$, $x=0,03$ qiymatlarni qo'ysak, $f(0,03) \approx f(0) + f'(0)0,03$ bo'lib, xatolik

$$R_2 = \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot x^2 = \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot 0,03^2, \quad 0 < \xi < 0,03 \text{ bo'ladi.}$$

Berilgan funksiya hosilalarini va nuqtadagi qiymatlarini hisoblamiz:

$$f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x}, \text{ bundan } f'(0) = -1, \quad f''(x) = 2e^{x^2-x} + (2x-1)^2 e^{x^2-x} = e^{x^2-x}(4x^2 - 4x + 3), \text{ bundan } f''(\xi) < 3. \text{ Olingan natijalardan foydalanib, } f(0,03) \approx 1 + (-1) \cdot 0,03 = 0,97 \text{ va } R_2 < \frac{3}{2!} \cdot 0,03^2 = 0,0017 \text{ ekanligini topamiz.}$$

Taylor formulasi funksiyalarni ekstremumga tekshirishda, qatorlar nazariyasida, integrallarni hisoblashlarda ham keng tatbiqqa ega.

Savollar

1. $f(x)$ funksiyaning Teylor ko'phadi nima? U qanday tuziladi?
2. Ko'phad funksiya uchun Teylor ko'phadi qanday bo'ladi?
3. $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$ funksiyalar uchun Peano, Koshi ko'rinishdagi qoldiq hadli Makloren formulalarini yozing.
4. Juft, toq funksiyalar uchun Makloren formulasi qanday xususiyatga ega?
5. $(1+x)^n$ ($n \in \mathbb{N}$) funksiya uchun Makloren formulasini yozing, uni Nyuton binomi bilan solishtiring.
6. Teylor formulasi yordamida taqribiy hisoblashda xatolik qanday baholanadi?

Misollar

1. $(1+x)^{1/3}$ funksiya uchun Peano qoldiq hadli Makloren formulasini yozing.
2. $\sin(2x-1)$ funksiya uchun Lagranj qoldiq hadli Makloren formulasini yozing.
3. $y=e^x$ funksiyaning $x_0=1$ nuqta atrofidagi Teylor formulasini yozing.
4. $e^{1,01}$ ni 10^{-3} aniqlikda hisoblang.
5. $\sqrt{10}$ ni 10^{-3} aniqlikda hisoblang.

IV BOB. Hosila yordamida funktsiyani tekshirish

1-§. Hosila yordamida funktsiyani monotonlikka tekshirish

1. Funktsiyaning o'zgarmaslik sharti

1-teorema. $f(x)$ funktsiya (a,b) da differentsiallanuvchi bo'lsin. Shu intervalda $f(x)$ funktsiya o'zgarmas bo'lishi uchun $f'(x)=0$ bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. Zarurligi ravshan. Chunki funktsiya o'zgarmas bo'lsa, barcha nuqtalarda $f'(x)=0$ bo'ladi.

Yetarliligi. Shartga ko'ra $f(x)$ funktsiya (a,b) intervalda differentsiallanuvchi, ya'ni $\forall x \in (a;b)$ uchun chekli $f'(x)$ hosila mavjud va $f'(x)=0$. Endi $x_1 < x_2$ bo'lgan $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ nuqtalarni olaylik. Qaralayotgan $f(x)$ funktsiya $[x_1; x_2]$ kesmada Lagranj teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Demak, $(x_1; x_2)$ intervalga tegishli shunday s nuqta topilib,

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1) \quad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Teorema shartiga ko'ra $\forall x \in (a;b)$ uchun $f'(x)=0$, bundan $f'(c)=0$, va (1) tenglikdan $f(x_2)-f(x_1)=0$ ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, $f(x)$ funktsiyaning $(a;b)$ intervalning istalgan ikkita nuqtasidagi qiymatlarining o'zaro teng. Demak, funktsiya o'zgarmas bo'ladi.

Bundan integral hisobda muhim rol o'ynaydigan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funktsiyalar (a,b) da chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lib, shu intervalda $f'(x)=g'(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ bilan $g(x)$ funktsiyalar bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi:

$$f(x)=g(x)+C, \quad C=const.$$

Haqiqatan ham, shartga ko'ra $(f(x)-g(x))'=C'=0$. Bundan 1-teoremaga asosan $f(x)-g(x)=C$, ya'ni $f(x)=g(x)+C$ tenglik o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Misol. Funktsiyaning o'zgarmaslik shartidan foydalanib

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \text{ formulaning o'rinli ekanligini isbotlang.}$$

Yechish. Quyidagi funktsiyani qaraymiz: $f(x)=\sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x$, bu funktsiya $(-\infty; +\infty)$ da aniqlangan, differentsiallanuvchi va hosilasi aynan nolga teng: $f'(x)=2\sin x \cos x - \sin 2x = 0$. Funktsiyaning o'zgarmaslik shartiga ko'ra

$$\sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x = C$$

o'rinli. C ni aniqlash uchun x argumentga qiymat beramiz, masalan $x=0$ bo'lsin. U holda $C=\frac{1}{2}$ va

$$\sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} \text{ yoki } \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \text{ bo'ladi.}$$

2. Funktsiyaning o'sishi va kamayishi.

Biz bu erda funktsiya hosilasi yordamida funktsiyaning monotonligini aniqlash mumkinligini ko'rsatamiz.

2-teorema. Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda aniqlangan, uzluksiz va differensiallanuvchi bo'lsin. Bu funksiya $(a;b)$ intervalda kamaymaydigan (o'smaydigan) bo'lishi uchun $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) tengsizlikning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. Kamaymaydigan funksiya holini qaraymiz.

Zaruriyligi. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda kamaymaydigan bo'lsin. U holda $\forall x \in (a;b)$ va $\Delta x > 0$ uchun $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan esa $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ bo'lishi ravshan. Teorema shartiga ko'ra $f(x)$ differensiallanuvchi, demak $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning $\Delta x \rightarrow 0$ da chekli limiti mavjud, tengsizlikda limitga o'tish haqidagi

teoremaga ko'ra, bu limit nomanfiy bo'ladi, ya'ni $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \geq 0$.

Yetarliligi. $\forall x \in (a;b)$ uchun $f'(x) \geq 0$ bo'lsin. Endi $x_1 < x_2$ bo'lgan $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ nuqtalarni olaylik. Qaralayotgan $f(x)$ funksiya $[x_1; x_2]$ kesmada Lagranj teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Demak, $(x_1; x_2)$ intervalga tegishli shunday c nuqta topilib,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \quad (2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Teorema shartiga $f'(x) \geq 0$, bundan $f'(c) \geq 0$, va (2) tenglikdan $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, ya'ni $f(x_2) \geq f(x_1)$ ekanligi kelib chiqadi. Bu esa funksiyaning $(a;b)$ intervalda kamaymaydigan funksiyaligini ko'rsatadi.

O'smaydigan funksiya holi ham yuqoridagi kabi isbotlanadi.

Endi funksiyaning qat'iy monoton bo'lishining yetarli shartini isbotlaymiz.

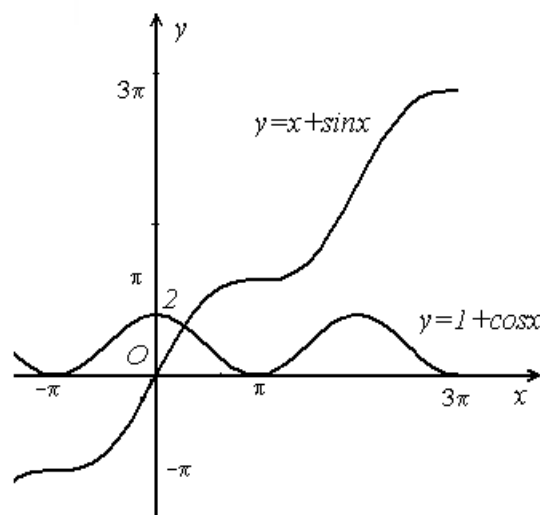
3-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi va $\forall x \in (a;b)$ uchun $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda qat'iy o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

Isboti. Aytaylik $x_1, x_2 \in (a;b)$ va $x_1 < x_2$ bo'lsin. Ravshanki, $[x_1; x_2]$ kesmada $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Bu teoremaga binoan shunday $c \in (x_1; x_2)$ mavjudki

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglik va $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$) ekanligidan $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$) bo'lishi kelib chiqadi. Bu $f(x)$ funksiyaning qat'iy o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishini ifodalaydi.

Ushbu $y = x^3$ funksiya $(-1; 1)$ intervalda qat'iy o'suvchi, lekin uning hosilasi $x = 0$ nuqtada nolga teng bo'ladi.



26-rasm

Shunga o'xshash $f(x)=x+\cos x$ funksiya ham aniqlanish sohasida qat'iy o'suvchi, ammo uning hosilasi $f'(x)=1-\sin x$ cheksiz ko'p nuqtalarda ($x=\frac{\pi}{2}+2n\pi, n \in \mathbb{Z}$) nolga teng bo'ladi. (26-rasm)

Bu misollar yuqoridagi teoremaning shartlari funksiyaning qat'iy o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishi uchun faqat yetarli shart ekanligini ko'rsatadi.

1-misol. Ushbu $f(x)=2x^2-\ln x$ funksiyaning monotonlik oraliqlarini toping.

Yechish. Funksiya $(0;+\infty)$ oraliqda aniqlangan. Uning hosilasi $f'(x)=4x-1/x$ ga teng. Yuqoridagi yetarli shartga ko'ra, agar $4x-1/x>0$ bo'lsa, ya'ni $x>1/2$ bo'lsa, o'suvchi; agar $4x-1/x<0$ bo'lsa, ya'ni $x<1/2$ bo'lsa funksiya kamayuvchi bo'ladi. Shunday qilib, funksiya $0<x<1/2$ oraliqda kamayuvchi, $1/2<x<+\infty$ oraliqda o'suvchi bo'ladi.

2-misol. Ushbu $f(x)=\frac{2x^3-5x^2+14x-6}{2x^2}$ funksiyaning monotonlik oraliqlarini toping.

Yechish. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ dan iborat. Funksiyaning hosilasini topamiz:

$$f'(x)=\frac{x^3-7x+6}{x^3}=\frac{(x+3)(x-1)(x-2)}{x^3}, \text{ bundan}$$

$[-\infty;-3]\cup(0;1]\cup[2;+\infty)$ to'plamda $f'(x)\geq 0$, $[-3;0)\cup[1;2]$ da esa $f'(x)\leq 0$ bo'lishini aniqlash qiyin emas.

Demak, berilgan $f(x)$ funksiya $[-\infty;-3]\cup(0;1]\cup[2;+\infty)$ da o'suvchi va $[-3;0)\cup(1;2]$ da esa kamayuvchi bo'ladi.

3-misol. Agar $0<x\leq 1$ bo'lsa, $x-x^3/3<\arctg x<x-x^3/6$ qo'sh tengsizlik o'rinli bo'lishini isbotlang.

Yechish. Berilgan tengsizlik ning o'ng qismi $\arctg x<x-x^3/6$ tengsizlikni isbotlaymiz. Chap qismi shunga o'xshash isbotlanadi.

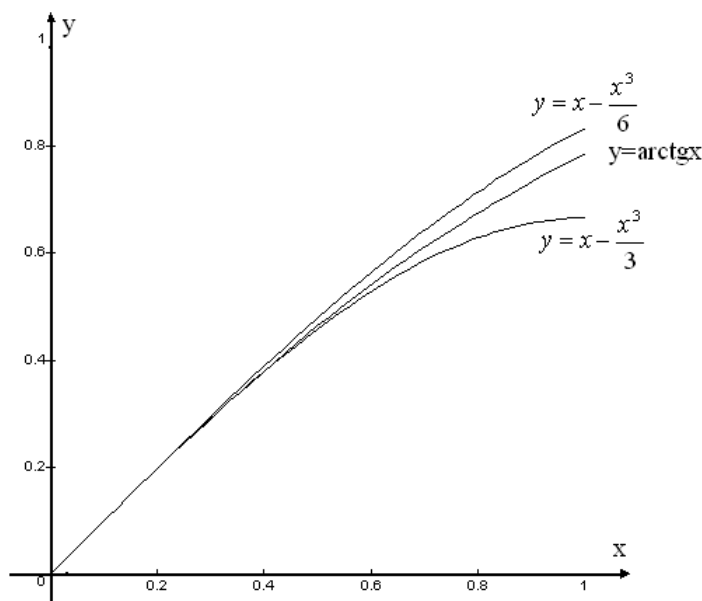
$f(x)=\arctg x-x+x^3/6$ funksiyaning qaraymiz, uning hosilasi

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2(x^2-1)}{2(1+x^2)} \text{ ga}$$

teng.

$f(x)=\arctg x-x+x^3/6$ funksiya sonlar o'qida aniqlanagan va uzluksiz,

demak u $[0;1]$ kesmada ham uzluksiz, $(0;1)$ intervalda $f'(x)<0$. Bundan esa $f(x)$ funksiya $[0;1]$ kesmada kamayuvchi bo'lib, $0<x\leq 1$ shartni qanoatlantiruvchi x lar uchun $f(x)<f(0)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. So'ngi tengsizlikni $f(0)=0$ ni e'tiborga olib, quyidagicha yozib olamiz: $\arctg x-x+x^3/6<0$ bundan $\arctg x<x-x^3/6$.



27-rasm

Bu qo'shtengsizlikda qatnashgan funksiya grafiklari 27-rasmda keltirilgan.

3. Funksiyaning nuqtada monotonlik sharti.

Biz shu paytgacha funksiyaning o'sishi va kamayishi tushunchalarini biror oraliqqa nisbatan kiritdik va o'rgandik. Ba'zi hollarda bu tushunchalarni nuqtaga nisbatan qarash foydadan holi emas.

Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan va $x_0 \in (a,b)$ bo'lsin.

Ta'rif. Agar x_0 nuqtaning shunday $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ atrofi topilib, $x < x_0$ bo'lganda $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$), $x > x_0$ bo'lganda esa $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$) bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'suvchi (kamayuvchi) deyiladi.

Endi x_0 nuqtada monotonlikning yetarli shartini keltiramiz.

4-teorema. $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a,b)$ nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsin. Agar $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$) bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya shu nuqtada o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra chekli $f'(x_0)$ mavjud va u noldan katta (kichik) bo'lgani uchun ushbu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad (< 0)$$

tengsizlik o'rinli. Limitga ega bo'lgan funksiyaning xossalaridan x_0 nuqtaning shunday $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ atrofi topilib, bu atrofda

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad (< 0)$$

tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. Demak, $x < x_0$ bo'lganda $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) tengsizlik, $x > x_0$ bo'lganda esa $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$) tengsizlik ham o'rinli. Bu $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishini ifodalaydi. Teorema isbot bo'ldi.

Funksiya hosilasi nolga teng bo'ladigan nuqtalarda funksiya o'sishi ham, kamayishi ham mumkin. Masalan, $y = x^5$ funksiya hosilasi $x=0$ nuqtada nolga teng, lekin funksiya shu nuqtada o'suvchi; $y = -x^5$ funksiya hosilasi ham $x=0$ nuqtada nolga teng, lekin bu funksiya $x=0$ nuqtada kamayuvchi ekanligini ko'rish qiyin emas.

Endi biror x_0 nuqtada o'suvchi bo'lgan funksiyaning shu nuqtaning atrofida o'suvchi bo'lishi shart emasligini ko'rsatuvchi misol keltiramiz.

Ushbu $f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{2}{x}, & \text{agar } x \neq 0, \\ 0, & \text{agar } x = 0 \end{cases}$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiya

barcha nuqtalarda hosilaga ega. Haqiqatan ham, $x \neq 0$ lar uchun

$$f'(x) = 1 + 2x \sin \frac{2}{x} - 2 \cos \frac{2}{x}, \quad x \neq 0 \text{ uchun esa}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 \sin \frac{2}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x \sin \frac{2}{x} \right) = 1 > 0 \text{ bo'ladi.}$$

Demak, 4-teoremaga asosan berilgan funksiya $x=0$ nuqtada o'suvchi bo'ladi.

Endi quyidagi

$$x_n = \frac{1}{\pi n}, \quad x'_n = \frac{2}{\pi + 2\pi n}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

nuqtalarda hosilaning qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f'\left(\frac{1}{\pi n}\right) = 1 + \frac{2 \sin \pi n}{\pi n} - 2 \cos 2\pi n = -1,$$

$$f'\left(\frac{2}{\pi + 2\pi n}\right) = 1 + \frac{4}{\pi + 2\pi n} \sin(\pi + 2\pi n) - 2 \cos(\pi + 2\pi n) = 1 - 2(-1) = 3$$

Demak berilgan funksiyaning hosilasi $\delta > 0$ soni qanday bo'lsin n ning yetarlicha katta qiymatlarida $(-\delta; \delta)$ atrofida ham musbat, ham manfiy qiymatlarni qabul qiladi. Bundan $f(x)$ funksiyaning o'zi $x=0$ nuqtada o'suvchi bo'lgani bilan bu nuqtaning $\forall(-\delta; \delta)$ atrofida hosilaga ega, lekin shu atrofda monoton emasligi kelib chiqadi.

$$\text{Yuqorida biz } f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{2}{x}, & \text{agar } x \neq 0, \\ 0, & \text{agar } x = 0 \end{cases} \quad \text{funksiya hosilasi}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x \sin \frac{2}{x} - 2 \cos \frac{2}{x}, & \text{agar } x \neq 0, \\ 1, & \text{agar } x = 0 \end{cases} \quad \text{ekanligini ko'rdik.}$$

Shu hosilani uzluksizlikka tekshiraylik. Agar $x \neq 0$ bo'lsa, $f'(x)$ funksiyaning uzluksizligi ravshan. Agar $x=0$ bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ mavjud emas, demak hosila $x=0$ nuqtada uzilishga ega.

O'quvchilarga quyidagi teoremani isbotlashni taklif qilamiz:

Teorema. Agar x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya hosilasi mavjud, uzluksiz va $f'(x_0) > 0$ bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning shunday $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ atrofi mavjud bo'lib, bunda $f(x)$ funksiya o'suvchi bo'ladi.

Savollar

1. Kesmada uzluksiz funksiyaning doimiylik shartini ayting. Uning fizik ma'nosi nimadan iborat?
2. Funksiyaning kesmada qat'iy o'suvchi bo'lishi shartini ayting.
3. Funksiyaning kesmada qat'iy kamayuvchi bo'lishi shartini ayting.
4. $[a; b]$ kesmada qat'iy monoton funksiya hosilasi shu kesmaning chekli sondagi nuqtalarida nolga teng bo'lishi mumkinmi?

Misollar

1. Ayniyatni isbotlang: $\arccos \sqrt{1-x^2} = \begin{cases} \arcsin x, & 0 \leq x \leq 1, \\ -\arcsin x, & -1 \leq x < 0. \end{cases}$
2. Ushbu a) $y = x + \cos x$; b) $y = x^3 + 4x - 7$ funksiylarning aniqlanish sohasida o'suvchi ekanligini isbotlang.
3. Quyidagi funksiylarning monotonlik oraliqlarini toping:

a) $y=2x^3-15x^2+36x-7$; b) $y=x^2-\ln x$; c) $y=x^4-2x^2+5$.

2-§. Birinchi tartibli hosila yordamida funksiyaning ekstremumga tekshirish

1. Funksiyaning ekstremumlari.

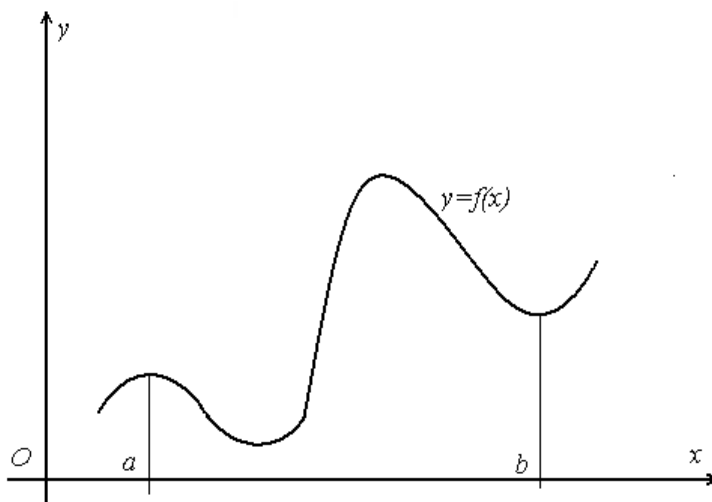
Aytaylik $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan va $x_0 \in (a,b)$ bo'lsin.

1-ta'rif. Agar x_0 nuqtaning shunday $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ atrofi mavjud bo'lib, shu atrofdan olingan ixtiyoriy x uchun $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) tenglik o'rinli bo'lsa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning maksimum (minimum) nuqtasi, $f(x_0)$ esa funksiyaning maksimumi (minimumi) deb ataladi.

2-ta'rif. Agar x_0 nuqtaning shunday atrofi $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ mavjud bo'lib, shu atrofdan olingan ixtiyoriy $x \neq x_0$ uchun $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada qat'iy maksimumga (minimumga) ega deyiladi.

Funksiyaning maksimum va minimum nuqtalari funksiyaning ekstremum nuqtalari, maksimum va minimum qiymatlari funksiyaning ekstremumlari deb ataladi.

Shunday qilib, agar $f(x_0)$ maksimum (minimum) bo'lsa, u holda $f(x_0)$ funksiyaning x_0 nuqtaning kichik atrofida qabul qiladigan qiymatlarning eng



28-rasm

kattasi (eng kichigi) bo'ladi, ya'ni funksiya ekstremumi lokal xarakterga ega. Bundan funksiya ekstremumi u aniqlangan sohada eng katta yoki eng kichik qiymati bo'lishi shart emasligi kelib chiqadi.

Shuningdek, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda bir qancha maksimum va minimumlarga ega bo'lishi, maksimum qiymati uning ba'zi bir minimum qiymatidan kichik bo'lishi ham mumkin. Masalan grafigi 28-rasmda ko'rsatilgan $y=f(x)$ funksiya uchun $x=a$ nuqtada lokal maksimum, $x=b$ nuqtada lokal minimum mavjud bo'lib, $f(a) < f(b)$ tengsizlik o'rinli.

2. Ekstremumning zaruriy sharti.

Funksiya hosilalari yordamida uning ekstremum nuqtalarini topish osonlashadi.

Avval ekstremumning zaruriy shartini ifodalovchi teoremani keltiramiz.

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, shu nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, u holda bu nuqtada $f(x)$ funksiyaning hosilasi nolga teng yoki mavjud emas.

Isboti. Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'lsin. U holda x_0 nuqtaning shunday $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ atrofi mavjud bo'lib, bu atrofda olingan $\forall x$ uchun $f(x_0) > f(x)$ bo'ladi. Agar $x > x_0$ bo'lsa, u holda

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

tengsizlik, agar $x < x_0$ bo'lsa, u holda

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi ravshan.

Bu tengsizliklar chap tomonidagi ifodalarning $x \rightarrow x_0$ da limiti mavjud bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0 + 0) \leq 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0 - 0) \geq 0 \text{ bo'ladi.}$$

Agar funksiyaning chap $f'(x_0 - 0)$ va o'ng $f'(x_0 + 0)$ hosilalari nolga teng bo'lsa, u holda funksiya hosilasi $f'(x_0)$ mavjud va nolga teng bo'ladi.

Agar $f'(x_0 - 0)$ va $f'(x_0 + 0)$ lar noldan farqli bo'lsa, ravshanki $f'(x_0 + 0) < f'(x_0 - 0)$ bo'lib, $f'(x_0)$ mavjud bo'lmaydi.

Funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'lgan hol ham yuqoridagi kabi isbotlanadi. Teorema isbot bo'ldi.

1-misol. Ma'lumki, $f(x) = |x|$ funksiyaning $x=0$ da hosilasi mavjud emas. Bu funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega (I bob, 2-§. 2-rasmga qarang).

2-misol. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ bo'lsin.

$$f'(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = -\infty$$

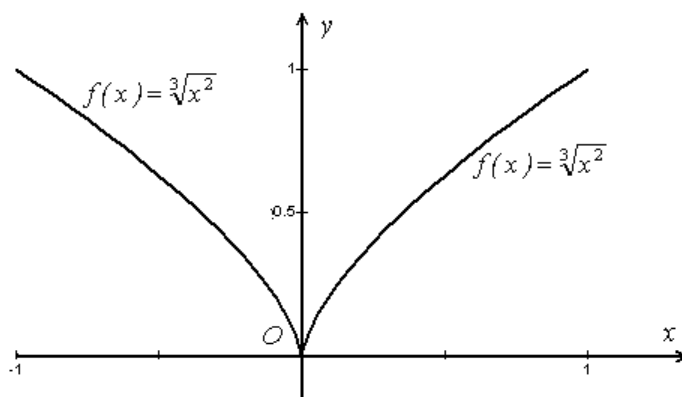
$$f'(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty \text{ bo'lgani uchun } x=0 \text{ nuqtada funksiyaning ham hosilasi}$$

mavjud emas. Ammo bu funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega bo'lishi ravshandir. (29- rasm)

Ta'rif. Funksiya hosilasini nolga aylantiradigan nuqtalar yoki hosila mavjud bo'lmaydigan nuqtalar funksiyaning kritik nuqtalari deb ataladi. Funksiya hosilasi nolga teng bo'lgan nuqtalar statsionar nuqtalar deb ataladi.

Har qanday kritik nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lavermaydi.

Masalan, $f(x) = (x-1)^3$, $f'(x) = 3(x-1)^2$, $f'(1) = 0$ bo'lib, $x_0 = 1$ kritik nuqta. Lekin $x_0 = 1$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida $f(1) = 0$ eng kichik, yoki eng katta qiymat bo'la



29-rasm

olmaydi. Chunki har bir atrofda noldan kichik va noldan katta qiymatlar istalgancha bor.

Demak, $x=1$ nuqtada ekstremum yo'q.

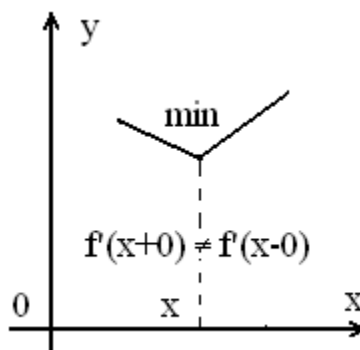
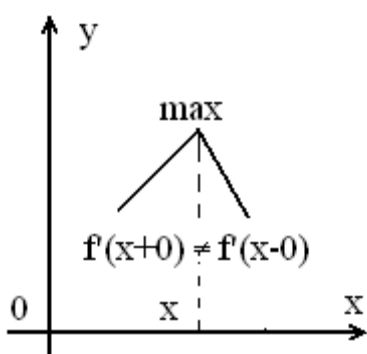
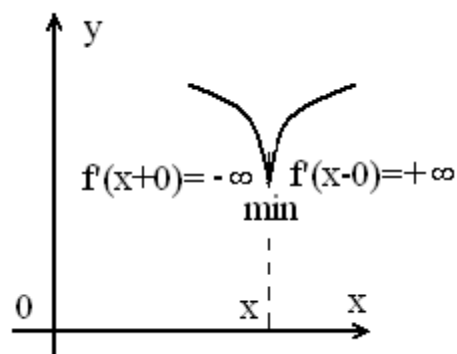
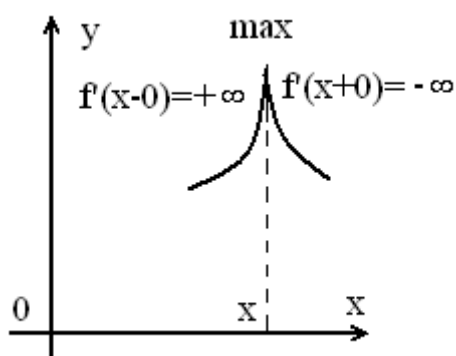
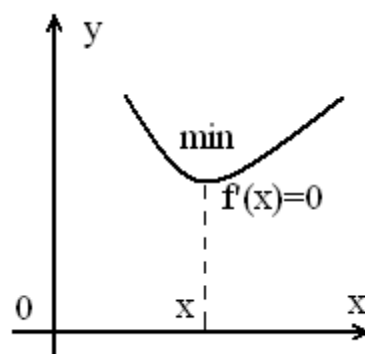
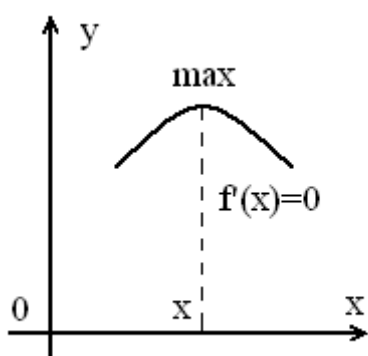
Misol. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada cheksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda bu nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'la olmasligini ko'rsating.

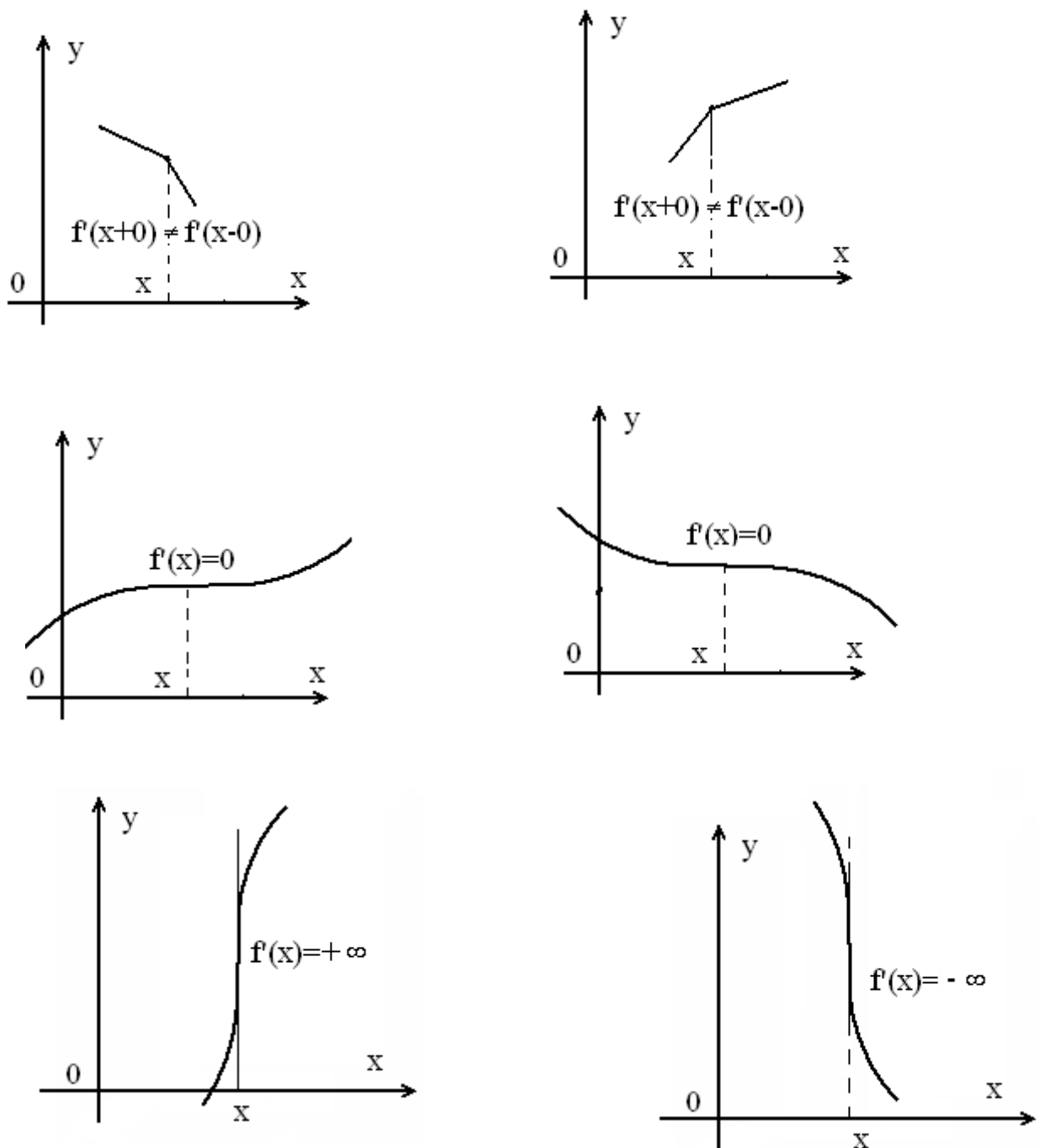
Yechish. Faraz qilaylik $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ bo'lsin. U holda

$\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ dan olingan ixtiyoriy $x \neq x_0$ lar uchun $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \frac{1}{\varepsilon}$ tengsizlik bajariladi. Bundan esa $x > x_0$ da $f(x) > f(x_0)$,

$x < x_0$ da $f(x) < f(x_0)$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada ekstremumi yo'q. $f'(x_0) = -\infty$ bo'lgan hol ham yuqoridagi kabi isbotlanadi.

Quyida funksiya grafigining kritik nuqta atrofidagi holatlari tasvirlangan (30-rasm).





30-rasm

3. Ekstremum mavjud bo'lishining yetarli shartlari.

2-teorema. Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz va x_0 nuqta funksiyaning kritik nuqtasi bo'lsin.

a) Agar $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$ uchun $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$ uchun $f'(x) < 0$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishida o'z ishorasini «+» dan «-» ga o'zgartirsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'ladi.

b) Agar $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$ uchun $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$ uchun $f'(x) > 0$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda o'z ishorasini «-» dan «+» ga o'zgartirsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'ladi.

c) Agar $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda o'z ishorasini o'zgartirmasa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lmaydi.

Isboti. a) Holni qaraymiz. Bu holda $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$ uchun $f'(x) > 0$ bo'lishidan $f(x)$ funksiyaning $(x_0 - \delta; x_0)$ da qat'iy o'suvchiligi kelib chiqadi. So'ngra shartga ko'ra $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lgani sababli

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \quad (2.1)$$

tenglik o'rinli. Demak, $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$ uchun

$$f(x) < f(x_0) \quad (2.2)$$

bo'ladi. $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$ uchun $f'(x) < 0$ bo'lishidan $f(x)$ funksiyaning $(x_0; x_0 + \delta)$ da qat'iy kamayuvchiligi kelib chiqadi. Demak, (2.1) tenglikni e'tiborga olsak, $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$ uchun yana (2.2) tengsizlik bajariladi. Bundan $\forall x \neq x_0$ va $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ uchun $f(x) < f(x_0)$ bo'ladi, ya'ni $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega.

b) Bu holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishishi (a) holga o'xshash isbotlanadi.

$f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda o'z ishorasini o'zgartirmaydigan (c) holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ atrofida qat'iy o'suvchi yoki qat'iy kamayuvchi bo'ladi. Demak, x_0 nuqtada ekstremum yo'q.

Shunday qilib ekstremumga sinalayotgan nuqtani o'tishda funksiya hosilasi ishorasining o'zgarishi ekstremumga erishishning faqat yetarli sharti bo'lib, lekin zaruriy sharti bo'la olmaydi.

2-eslatma. Yuqoridagi mulohazalarda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi muhim. Masalan, ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x^4, & \text{agar } x \neq 0, \\ 1, & \text{agar } x = 0 \end{cases} \quad \text{funksiyani qaraylik. Bu funksiya uchun } f'(x) = 4x^3$$

bo'lib, hosila $x=0$ nuqtadan o'tishda o'z ishorasini «-» dan «+» ga o'zgartirsa ham, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega emas.

3-eslatma. x_0 nuqtaning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tganda hosila ishorasini o'zgartirmasa ham bu nuqta ekstremum nuqtasi bo'lishi mumkin.

$$\text{Masalan, } f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 1, \\ 2-x, & x > 1 \end{cases} \quad \text{funksiya uchun } x=1 \text{ ekstremum}$$

(minimum) nuqta bo'ladi. Haqiqatdan, $x=1$ ning $(0;2)$ atrofidagi barcha nuqtalar uchun $f(x) \geq f(1) = -1$ tengsizlik o'rini bo'ladi. Shu bilan birga $x < 1$ va $x > 1$ nuqtalar uchun $f'(x) = -1 < 0$, ya'ni hosila ishorasini o'zgartirmaydi.

2-teoremadan funksiyaning ekstremumga tekshirish uchun 1-qoidani keltirib chiqaramiz.

1-qoida. $f(x)$ funksiyaning ekstremumlarini topish uchun

1) $f(x)$ funksiyani $f'(x)$ hosilasini topib, $f'(x)=0$ tenglamani yechish kerak. So'ngra $f'(x)$ mavjud bo'lmagan nuqtalarni topib, kritik nuqtalar to'plamini hosil qilish kerak.

2) har bir kritik nuqtadan chapda va o'ngda hosilaning ishorasini aniqlash kerak.

3) agar hosila ishorasini «+» dan «-» ga («-» dan «+» ga) o'zgartirsa, u holda bu kritik nuqtada $f(x)$ funksiya maksimumga (minimumga) ega bo'ladi. Agar hosila ishorasi o'zgarmasa, ekstremum mavjud bo'lmaydi.

Misol. $f(x) = (x+4)\sqrt[3]{(x-1)^2}$ funksiyani ekstremumini toping.

Yechish. Bu funksiya $(-\infty; +\infty)$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz. Uning hosilasini topamiz: $f'(x) = \frac{5(x+1)}{3\sqrt[3]{x-1}}$.

Ravshanki, hosila $x=-1$ nuqtada nolga aylanadi, $x=1$ nuqtada esa chekli hosila mavjud emas.

Endi hosilani ishorasini aniqlaymiz. Buning uchun $(-\infty; +\infty)$ oraliqni 31-rasmda ko'rsatilgandek oraliqlarga ajratamiz va hosil bo'lgan har bir oraliqda hosilaning ishorasini aniqlaymiz.



31-rasm

Bu chizmadan qoidaga ko'ra berilgan funksiyani $x=-1$ nuqtada maksimum qiymat $f(-1) = 3\sqrt[3]{4}$ ga va $x=1$ nuqtada minimum qiymat $f(x)=0$ ga ega bo'lishini ko'rish mumkin.

3-§. Yuqori tartibli hosilalar yordamida funktsiyani ekstremumga tekshirish.

1. Ikkinchi tartibli hosila yordamida ekstremumga tekshirish

Teorema. Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarga ega va $f'(x_0)=0$ bo'lsin. U holda agar $f''(x_0)<0$ bo'lsa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyani maksimum nuqtasi, agar $f''(x_0)>0$ bo'lsa, minimum nuqtasi bo'ladi.

Isboti. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarga ega va $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$ bo'lsin. Demak, x_0 kritik nuqtada $f'(x)$ kamayuvchi, ya'ni $\forall x \in (x_0-\delta; x_0)$ lar uchun $f'(x) > f'(x_0)=0$ va $\forall x \in (x_0; x_0+\delta)$ uchun $0=f'(x_0) > f'(x)$ bo'ladi. Bu esa x_0 nuqtadan o'tishda hosila o'z ishorasini «+» dan «-» ga o'zgartirishini, demak, x_0 maksimum nuqta ekanligini bildiradi.

$f''(x_0)>0$ bo'lgan holda x_0 ning minimum nuqta bo'lishi shunga o'xshash isbotlanadi.

Isbotlangan teorema asoslanib, ikkinchi tartibli hosila yordamida funktsiyani ekstremumga tekshirishning quyidagi qoidasini keltiramiz.

2-qoida. $f(x)$ funksiyani ekstremumga tekshirish uchun

1) $f'(x)=0$ tenglamaning barcha yechimlarini topamiz;

2) har bir statsionar nuqtada (ya'ni hosilani nolga aylantiradigan nuqtada) $f'(x_0)$ ni hisoblaymiz. Agar $f'(x_0) < 0$ bo'lsa, x_0 maksimum nuqtasi, $f'(x_0) > 0$ bo'lsa, x_0 minimum nuqtasi bo'ladi.

3) ekstremum nuqtalar qiymatini $y=f(x)$ qo'yib, $f(x)$ ning ekstremum qiymatlarini topamiz.

Umuman aytganda, bu qoidaning qo'llanish doirasi torroq masalan, u chekli birinchi tartibli hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarga qo'llanila olmasligi o'z-o'zidan ravshan. Ikkinchi tartibli hosila nolga aylangan yoki mavjud bo'lmagan nuqtada ham qoida aniq natija bermaydi.

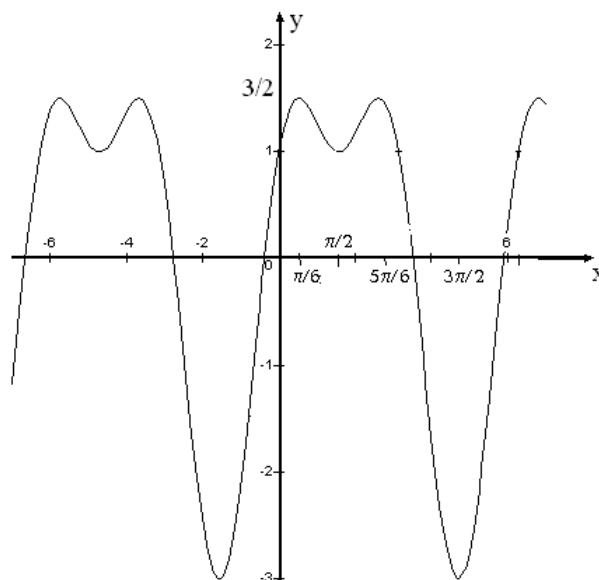
Misol. Ikkinchi tartibli hosila yordamida $y=2\sin x + \cos 2x$ funksiya ekstremumlarini aniqlang.

Yechish. Funksiya davriy bo'lganligi sababli $[0; 2\pi]$ kesma bilan cheklanishimiz mumkin. Funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz:

$$y' = 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x(1 - 2\sin x);$$

$$y'' = -2\sin x - 4\cos 2x.$$

Ushbu $2\cos x(1 - 2\sin x) = 0$ tenglamadan funksiyaning $[0; 2\pi]$



32-rasm

kesmaga tegishli bo'lgan kritik nuqtalarini topamiz: $x_1 = \pi/6$; $x_2 = \pi/2$; $x_3 = 5\pi/6$; $x_4 = 3\pi/2$. Endi har bir kritik nuqtada ikkinchi tartibli hosila ishorasini aniqlaymiz va tegishli xulosa chiqaramiz:

$$y''(\pi/6) = -3 < 0, \text{ demak } x_1 = \pi/6 \text{ nuqtada } y(\pi/6) = 3/2 \text{ maksimum mavjud.}$$

$$y''(\pi/2) = 2 > 0, \text{ demak } x_2 = \pi/2 \text{ nuqtada } y(\pi/2) = 1 \text{ minimum mavjud.}$$

$$y''(5\pi/6) = -3 < 0, \text{ demak } x_3 = 5\pi/6 \text{ nuqtada } y(5\pi/6) = 3/2 \text{ maksimum mavjud.}$$

$$y''(3\pi/2) = 6 > 0, \text{ demak } x_4 = 3\pi/2 \text{ nuqtada } y(3\pi/2) = -3 \text{ minimum mavjud.}$$

Bu funksiyaning $(-2\pi; 2\pi)$ intervaldagi grafigi 32-rasmدا keltirilgan.

2. Teylor formulasi yordamida ekstremumga tekshirish

Teorema. Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ atrofida $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ ($n \geq 2$) uzluksiz hosilalarga ega va $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$ bo'lsin.

U holda

1) Agar n juft va $f^{(n)}(x_0) < 0$ bo'lsa, funksiya x_0 nuqtada lokal maksimumga ega bo'ladi;

2) Agar n juft va $f^{(n)}(x_0) > 0$ bo'lsa, funksiya x_0 nuqtada lokal minimumga ega bo'ladi;

3) Agar n toq bo'lsa, funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lmaydi.

Isboti. $f(x)$ funksiya uchun Lagranj ko‘rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasini yozamiz:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots \\ + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-x_0)^n, \text{ bu erda } \xi \in (x_0, x).$$

Teorema shartiga ko‘ra $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, shu sababli

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-x_0)^n, \text{ yoki}$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-x_0)^n \quad (3.1)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Yana teorema shartiga ko‘ra $f^{(n)}(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz. Shuning uchun uzluksiz funksiyaning lokal xossalriga ko‘ra x_0 nuqtaning shunday $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ atrofi topilib, bunda $f^{(n)}(x)$ funksiyaning ishorasi $f^{(n)}(x_0)$ ning ishorasi bilan bir hil bo‘ladi. Aytaylik $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ bo‘lsin. U holda $\xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ bo‘lishi ravshan. Endi quyidagi ikki holni qaraymiz.

1-hol. Faraz qilaylik n toq son bo‘lsin. U holda $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ atrofda (3.1) tenglikning o‘ng tomonidagi $f^{(n)}(\xi)$ ko‘paytuvchining ishorasi $f^{(n)}(x_0)$ ning ishorasi bilan bir hil bo‘ladi, ikkinchi ko‘paytuvchi esa $x > x_0$ da $(x-x_0)^n > 0$, $x < x_0$ da $(x-x_0)^n < 0$ bo‘ladi, ya‘ni $(x-x_0)^n$ ifoda x_0 nuqta atrofida ishorasini o‘zgartiradi. Bundan esa (3.1) tenglikning chap tomoni, ya‘ni $f(x) - f(x_0)$ ayirma ham x_0 nuqta atrofida ishorasini o‘zgartirishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, n toq son bo‘lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo‘lmaydi.

2-hol. Endi n juft son bo‘lsin. U holda (3.1) tenglikning o‘ng tomoni ishorasini o‘zgartirmaydi, uning ishorasi $f^{(n)}(x_0)$ ning ishorasi bilan bir hil bo‘ladi. Bundan agar $f^{(n)}(x_0) < 0$ bo‘lsa, u holda $f(x) - f(x_0) < 0$, ya‘ni $f(x) < f(x_0)$, demak, funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo‘ladi. Agarda $f^{(n)}(x_0) > 0$ bo‘lsa, u holda $f(x) - f(x_0) > 0$, ya‘ni $f(x) > f(x_0)$, demak, funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

Misol. Ushbu $y = x^5 - 5x^4 - 5$ funksiyaning ekstremumlari topilsin.

Yechish. Funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz. Uning uchun funksiya hosilasini topamiz: $y' = 5x^4 - 20x^3$. Kritik nuqtalar faqat statsionar nuqtalardan iborat, shuning uchun $5x^4 - 20x^3 = 0$ tenglamani yechamiz. Uning ildizlari $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ bo‘ladi.

Ikkinchi tartibli hosilani topamiz: $f''(x) = 20x^3 - 60x^2$.

$f''(4) > 0$ bo‘lgani uchun, $x = 4$ nuqtada funksiya minimum qiymat qabul qiladi: $f(4) = -261$. $f''(0) = 0$ bo‘lgani uchun uchinchi tartibli hosilani hisoblaymiz: $f'''(x) = 60x^2 - 120x$, $f'''(0) = 0$, to‘rtinchi tartibli hosilani hisoblaymiz: $f^{(4)}(x) = 120x - 120$, $f^{(4)}(0) = -120 < 0$ va $n = 4$ juft bo‘lgani uchun 3-teoremaga ko‘ra $x = 0$ nuqtada funksiya maksimumga ega: $f(0) = -5$.

4-§. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya X sohada aniqlangan bo'lsin. Bu funksiyaning qiymatlar to'plami $E(f)=\{f(x): x \in X\}$ ni qaraymiz.

Agar $E(f)$ to'plam chegaralangan bo'lsa, u holda uning aniq yuqori chegarasi mavjud, uni $M=\sup_{x \in X} \{f(x)\}$ deb belgilaymiz. Agar $M \in E(f)$ bo'lsa, u holda M soni $f(x)$ funksiyaning eng katta qiymati deb ataladi va $M=\max_{x \in X} \{f(x)\}$ kabi belgilanadi. Xuddi shunga o'xshash $E(f)$ to'plamning aniq quyi chegarasi mavjud, uni $m=\inf_{x \in X} \{f(x)\}$ deb belgilaymiz. Agar $m \in E(f)$ bo'lsa, u holda m soni $f(x)$ funksiyaning eng kichik qiymati deb ataladi $m=\min_{x \in X} \{f(x)\}$ kabi belgilanadi.

Endi $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiyaning qaraymiz. Bu holda Veyershtassning ikkinchi teoremasiga ko'ra funksiyaning $[a;b]$ da eng katta va eng kichik qiymatlari mavjud bo'ladi. Ravshanki, bu holda quyidagi qoida o'rinli bo'ladi.

Qoida. $[a,b]$ da funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun bu kesmaga tegishli barcha kritik nuqtalarni topib ulardagi qiymatlari hisoblanadi. So'ngra bu qiymatlar bilan $f(a)$ va $f(b)$ lar taqqoslanadi. Bu qiymatlar ichida eng kattasi $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi eng katta qiymati, eng kichigi esa $f(x)$ funksiyaning eng kichik qiymati bo'ladi.

Misol. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ funksiyaning $[\frac{1}{100}; 100]$ kesmada eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish. Funksiya hosilasini topamiz: $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$. Uni nolga tenglab, ya'ni $\frac{x^2 - 1}{x^2} = 0$ tenglamani qarab $x = -1$ va $x = 1$ ekanligini topamiz. Bulardan $x = -1$ nuqta $[\frac{1}{100}; 100]$ kesmaga tegishli emas va bu kesmada hosila mavjud bo'lmagan nuqta yo'q. Faqat bitta $x = 1$ statsionar nuqta $[\frac{1}{100}; 100]$ kesmaga tegishli. Berilgan funksiyaning $x = \frac{1}{100}$; $x = 1$; $x = 100$ nuqtalaridagi qiymatlarini hisoblaymiz. $f(1/100) = 100,01$; $f(1) = 2$; $f(100) = 100,01$. Bu qiymatlarning eng kattasi 100, 01; eng kichigi 2.

Demak, berilgan funksiyaning $[\frac{1}{100}; 100]$ dagi eng katta qiymati 100,01, eng kichik qiymati esa 2 dir, ya'ni $\max_{[0,01;100]} \{f(x)\} = 100,01$; $\min_{[0,01;100]} \{f(x)\} = 2$.

Savollar

1. Funksiyaning ekstremumi nima?
2. Funksiyaning ekstremum nuqtasi va ekstremum qiymati deganda nimani tushunasiz?
3. Ekstremumning zaruriy sharti nimadan iborat?
4. Ekstremumning yetarli sharti haqidagi teoremani ayting.
5. Birinchi tartibli hosila yordamida ekstremum qanday izlanadi?
6. Ikkinchi tartibli hosila yordamida ekstremum qanday izlanadi?
7. Yuqori tartibli hosila yordamida ekstremum qanday izlanadi?
8. Kesmada uzluksiz funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari qanday izlanadi?
9. Qanday holda kesmada berilgan funksiyaning minimumi uning shu kesmadagi eng kichik qiymati bo'ladi deb ta'kidlash mumkin?
10. Qanday holda kesmada berilgan funksiyaning maksimumi uning shu kesmadagi eng katta qiymati bo'ladi deb ta'kidlash mumkin?

Misollar.

1. Quyidagi funksiyalarni ekstremumga tekshiring.
 $a) y=x^3-6x$; $b) y=(x-2)^2(x-3)^3$; $c) y=x/(x^2+1)$; $d) y=\sin 2x-x$;
 $e) y=x^2e^{-x}$; $f) y=\sin x+\cos x$; $g) y=\ln(x^2+2x-3)$; $h) y=\cos^4 x+\sin^4 x$.
2. Berilgan funksiyaning ko'rsatilgan kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.
 $a) y=x^3/(x^2-2x-1), [4;6]$; $b) y=\ln x/x, [1;4]$; $c) y=e^{-x}\cdot x^3, [-1;4]$.
3. Berilgan aylanaga ichki chizilgan teng yonli uchburchaklar ichida teng tomonli uchburchak eng katta perimetriga ega ekanligini ko'rsating.
4. $M(1,2)$ nuqta berilgan. Bu nuqtadan shunday to'g'ri chiziq o'tkazingki, u birinchi kvadrantda a) eng kichik yuzli uchburchak; v) eng kichik uzunlikli kesma ajratsin.

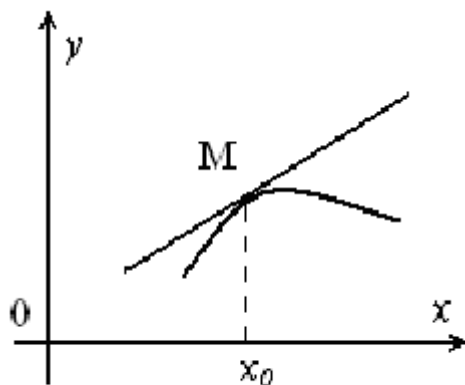
5-§. Egri chiziqning qavariqligi va botiqligi. Egri chiziqning burilish nuqtasi.

1. Egri chiziqning qavariqligi va botiqligi.

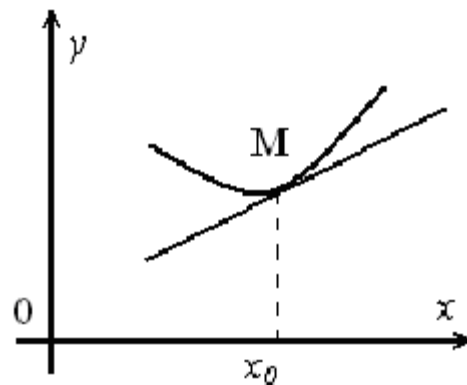
Aytaylik $f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega, ya'ni funksiya grafigining $M(x_0, f(x_0))$ nuqtasidan novertikal urinma o'tkazish mumkin bo'lsin.

Ta'rif. Agar $x=x_0$ nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lib, $y=f(x)$ egri chiziqning bu atrofdagi nuqtalarga mos bo'lgan bo'lagi shu egri chiziqqa $M(x_0, f(x_0))$ nuqtasidan o'tkazilgan urinmadan pastda (yuqorida) joylashsa, u holda $f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada qavariq (botiq) deyiladi.

Agar egri chiziq biror intervalning barcha nuqtalarida qavariq (botiq) bo'lsa, u holda bu chiziq shu intervalda qavariq (botiq) deyiladi. 33-rasmda qavariq va 34-rasmda botiq egri chiziqlar chizilgan.

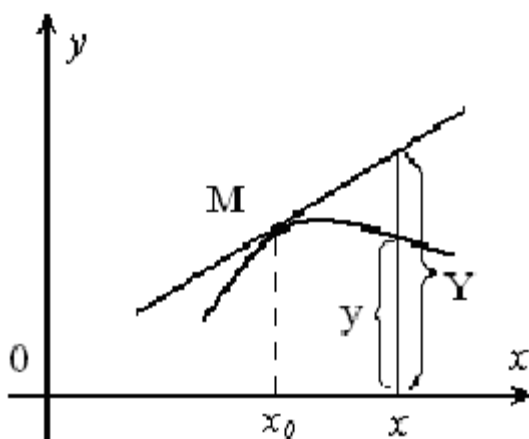


33-rasm

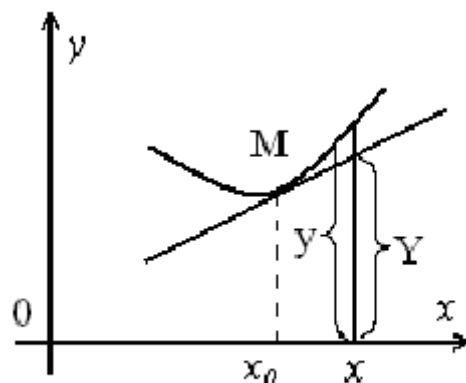


34-rasm

Egri chiziq nuqtasining ordinatasini y bilan, shu egri chiziqqa $M(x_0, f(x_0))$ nuqtasida o'tkazilgan urinmaning x ga mos ordinatasini Y bilan belgilaylik. Ravshanki, agar x_0 nuqtaning biror atrofidan olingan barcha x lar uchun $y - Y \leq 0$ ($y - Y \geq 0$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda egri chiziq $x = x_0$ nuqtada qavariq (botiq) bo'ladi. (35-,36-rasmlar)



35-rasm



36-rasm

1-teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya X oraliqda aniqlangan va $x_0 \in X$ nuqtada ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo'lsin. Agar $f''(x_0) > 0$ bo'lsa, u holda funksiya grafigi x_0 nuqtada botiq; agar $f''(x_0) < 0$ bo'lsa, u holda funksiya grafigi x_0 nuqtada qavariq bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik $f''(x_0) > 0$ bo'lsin. Quyidagicha yordamchi funksiya kiritamiz: $F(x) = y - Y$, ya'ni $F(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Ravshanki $F(x_0) = 0$, $F'(x) = f'(x) - f'(x_0)$, $F''(x) = f''(x)$ bo'ladi. Bundan $F'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$ va $F''(x_0) = f''(x_0) > 0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, (ekstremum mavjudligining yetarli shartiga ko'ra) x_0 nuqta $F(x)$ funksiyaning minimum nuqtasi bo'ladi, ya'ni x_0 nuqtaning biror atrofida $F(x) \geq F(x_0) = 0$ bo'ladi. $F(x) = y - Y$ bo'lganligidan $y \geq Y$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu esa x_0 nuqtaning aytilgan atrofida funksiya grafigi urinmadan yuqorida joylashishini, ya'ni funksiya grafigi x_0 nuqtada botiq bo'ladi. Teoremaning ikkinchi qismi shunga o'xshash isbotlanadi.

Agar biror intervalda $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) bo'lsa, u holda $y=f(x)$ egri chiziq shu intervalda botiq (qavariq) bo'ladi.

Misol. Ushbu $y=x^5$ funksiya grafigining botiqlik, qavariqlik oraliqlarini aniqlang.

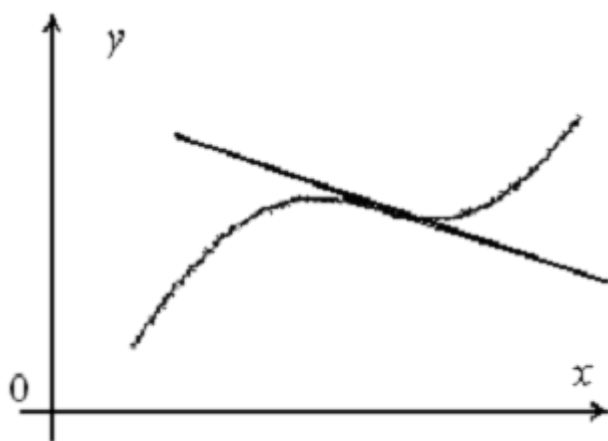
Yechish. Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topamiz: $y''=20x^3$. Bundan, agar $x>0$ bo'lsa, $y''>0$, agar $x<0$ bo'lsa $y''<0$ bo'ladi. Demak, $(-\infty;0)$ oraliqda egri chiziq qavariq, $(0;+\infty)$ oraliqda esa botiq bo'ladi.

2. Egri chiziqning burilish nuqtasi.

Endi egri chiziqning burilish nuqtasi tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif. Agar x_0 nuqtaning shunday $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ atrofi topilib, $f(x)$ funksiya $(x_0-\delta; x_0)$ oraliqda botiq (qavariq), $(x_0; x_0+\delta)$ oraliqda esa qavariq (botiq) bo'lsa, u holda x_0 nuqta $y=f(x)$ egri chiziqning burilish nuqtasi deyiladi.

Agar burilish nuqtasida urinma mavjud bo'lsa, u egri chiziqni kesib o'tadi. (37-rasm)



37-rasm

2-teorema. Aytaylik $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Agar $x=x_0$ nuqta funksiyaning grafigining burilish nuqtasi bo'lsa, u holda shu nuqtada funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi mavjud va nolga teng yoki mavjud bo'lmaydi.

Isbot. Faraz qilaylik x_0 nuqta $f(x)$ ning burilish nuqtasi bo'lsin. Teskarisini faraz qilamiz: $f''(x_0)$ mavjud va $f''(x_0) \neq 0$. U holda $f''(x_0) < 0$ yoki $f''(x_0) > 0$ bo'ladi.

$f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$) bo'lgan holda 1-teoremaga binoan x_0 nuqtaning biror $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ atrofi topilib, bunda $f(x)$ funksiya qavariq (botiq) bo'ladi. Bu x_0 ning burilish nuqta bo'lishiga zid. Demak, burilish nuqtada $f''(x_0)$ nolga teng bo'ladi yoki mavjud bo'lmaydi.

$f''(x_0)=0$ bo'lishi yoki $f''(x)$ ning mavjud bo'lmasligi burilish nuqtasi mavjudligining faqat zaruriy sharti bo'lib, yetarli shart bo'la olmaydi. Masalan, $y=x^4$ funksiya uchun $y'=4x^3$, $y''=12x^2$ va $y''(0)=0$ bo'ladi. Lekin, $x=0$ burilish nuqtasi emas.

Endi burilish nuqtasi mavjudligining yetarli shartini tayinlovchi teoremani keltiramiz.

3-teorema. Aytaylik $f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada differensiallanuvchi va x_0 nuqtaning shunday $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ atrofi topilib, $(x_0-\delta; x_0)$ va $(x_0; x_0+\delta)$ intervallarda $f'(x)$ mavjud, hamda har bir intervalda $f'(x)$ ishorasi o'zgarmas bo'lsin. Agar x_0 nuqtaning chap va o'ng tomonlarida $f'(x)$ har xil ishorali bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning burilish nuqtasi bo'ladi; agar $f'(x)$ bir xil ishorali bo'lsa, u holda x_0 nuqtada burilish bo'lmaydi.

Isboti. Haqiqatan ham, $x_0-\delta < x < x_0$ bo'lganda $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) bo'lsa, $x_0 < x < x_0+\delta$ bo'lganda esa $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) bo'lsa, 1-teoremaga ko'ra x_0 dan chapda $f(x)$ funksiya qavariq (botiq), x_0 dan o'ngda esa botiq (qavariq) bo'ladi. Demak, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning burilish nuqtasi bo'ladi.

Agar $(x_0-\delta; x_0)$ va $(x_0; x_0+\delta)$ intervallarda $f'(x)$ bir xil ishorali, masalan $f'(x) < 0$ bo'lsa, u holda bu intervallarda $f(x)$ funksiya qavariq bo'lib, burilish bo'lmaydi.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaning burilish nuqtasini aniqlash uchun $f'(x)=0$ tenglamani yechamiz hamda $f'(x)$ mavjud bo'lmagan nuqtalarni topamiz. Hosil qilingan har bir x_0 nuqtadan chapda va o'ngda $f'(x)$ ning ishorasini tekshiramiz.

1-misol. Ushbu $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$ funksiyaning burilish nuqtasini toping.

Yechish. Funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty; +\infty)$. Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz: $f'(x) = \frac{5}{3} \sqrt[3]{x^2}$, $f''(x) = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Ikkinchi tartibli hosila $x=0$ nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda mavjud. Bu nuqta atrofida 3-teorema shartlarini tekshiramiz. Agar $x < 0$ bo'lsa $f'(x) < 0$; $x > 0$ bo'lsa $f'(x) > 0$ bo'ladi. Demak, grafikning $(0; f(0))$ nuqtasi burilish nuqtasi bo'ladi.

2-misol. $y = \frac{a}{x} \ln \frac{x}{a}$ ($a > 0$), $0 < x < \infty$, funksiyaning burilish nuqtasini toping.

Yechish. Bu funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $y'' = \frac{2a}{x^3} (\ln \frac{x}{a} - \frac{3}{2})$ ga teng.

Agar $\ln \frac{x}{a} - \frac{3}{2} = 0$ bo'lsa, u holda $f'(x) = 0$ bo'ladi. Demak, $x = ae^{\frac{3}{2}}$ bo'lganda $y'' = 0$. Bu nuqtadan chapda va o'ngda y'' ning ishorasini tekshiramiz: $0 < x < ae^{\frac{3}{2}}$ bo'lganda $y'' < 0$, $x > ae^{\frac{3}{2}}$ bo'lganda $y'' > 0$ bo'ladi.

Demak, grafikning $(ae^{\frac{3}{2}}; \frac{3}{2} \cdot e^{-\frac{3}{2}})$ nuqtasi burilish nuqtasi bo'ladi.

3-misol. Quyidagi funksiylarning qavariqlik, botiqlik va burilish nuqtalarini toping:

$$a) y = x^4 + x^3 - 18x^2 + 24x - 15; \quad b) y = x + x^{5/3}$$

Yechish. a) funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz: $y' = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 24$, $y'' = 12x^2 + 6x - 36 = 12(x^2 + x/2 - 3)$.

Ushbu $y''=0$ tenglamani yechib, $x_1=-2$, $x_2=1,5$ ekanligini topamiz. Bundan $(-\infty;-2)$ va $(1,5; \infty)$ oraliqlarda $y''>0$, demak bu oraliqlarda grafik botiq bo'ladi; $(-2;1,5)$ oraliqda $y''<0$, demak bu oraliqda grafik qavariq bo'ladi. $x_1=-2$ va $x_2=1,5$ nuqtalardan o'tishda ikkinchi tartibli hosila ishorasini o'zgartiradi. Shu sababli $(-2;-127)$ va $(1,5; -11,0625)$ nuqtalar burilish nuqtalari bo'ladi.

b) funksiyaning hosilalarini topamiz: $y'=1+\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$,

$y''=\frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$ ($x\neq 0$). $x=0$ bo'lganda ikkinchi tartibli hosila mavjud emas. $x<0$ bo'lganda $y''<0$, demak funksiya grafigi qavariq, $x>0$ bo'lganda $y''>0$, demak grafik botiq bo'ladi. Ikkinchi tartibli hosila $x=0$ nuqtadan o'tganda ishorasini o'zgartiradi, shu sababli $(0;0)$ nuqta burilish nuqtasi bo'ladi.

Savollar

1. Qavariq funksiyaning grafigi uning urinmasiga nisbatan qanday joylashgan?
2. Botiq funksiyaning grafigi uning urinmasiga nisbatan qanday joylashgan?
3. Funksiyaning kesmada botiq bo'lishining yetarli sharti nimadan iborat?
4. Funksiyaning kesmada qavariq bo'lishining yetarli sharti nimadan iborat?
5. Egri chiziqning burilish nuqtasi nima?
6. Burilish nuqta bo'lishining zaruriy sharti nimadan iborat?
7. Burilish nuqta bo'lishining yetarli sharti nimadan iborat?
8. Berilgan funksiyaning burilish nuqtasini topish qoidasini ayting.

Misollar.

1. Berilgan funksiyalarni qavariqlikka tekshiring, burilish nuqtalarini toping.
a) $y=x^4-x^2$; b) $y=\ln(x^2-1)$; c) $y=2+(x-4)^{1/3}$; d) $y=x\cdot e^{-x}$.
2. Parametr a ning qanday qiymatlarida $y=x^4+ax^3+1,5x^2+3$ funksiya grafigi barcha haqiqiy sonlar o'qida botiq bo'ladi?
3. Har qanday darajasi 1 dan katta bo'lgan toq darajali ko'phadning grafigi kamida bitta burilish nuqtasiga ega ekanligini isbotlang.
4. Agar berilgan nuqta atrofida funksiya uzluksiz, birinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, shu nuqta atrofida uning grafigini chizing:
a) $x=3, y=2, y'=-2, y''<0$; b) $x=-1; y=1, y'=1, y''<0$;
c) $x=1, y=0, y'=0, y''>0$; d) $x=2, y=2, y'=2, y''>0$.

6-§. Asimptotalar

Funksiyani cheksizlikda, ya'ni $x\rightarrow +\infty$ va $x\rightarrow -\infty$ da, yoki uning ikkinchi tur uzilish nuqtasi atrofida o'rganish ko'p hollarda funksiya grafigi nuqtalari bilan biror to'g'ri chiziqning nuqtalari orasidagi masofa yetarlicha kichik bo'lishini ko'rsatadi. Bunday to'g'ri chiziq grafikning asimptotasi deyiladi. (-rasm)

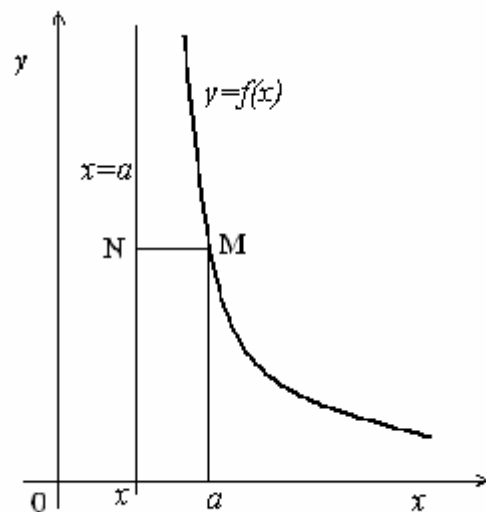
Ta'rif. Agar $y=f(x)$ egri chiziqda olingan o'zgaruvchi nuqta koordinatalar boshidan cheksiz uzoqlashganda shu nuqtadan biror to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa nolga intilsa, u holda bu to'g'ri chiziq egri chiziqning asimptotasi deyiladi.

Asimptotalar vertikal (ordinatalar o'qiga parallel) va og'ma (ordinatalar o'qiga parallel emas) bo'lib ikkiga ajraladi. Og'ma asimptotalar ichida abssissalar o'qiga parallel bo'lganlari ham mavjud bo'lib, ular gorizontal asimptota deyiladi.

1. Vertikal asimptotalar

Faraz qilaylik a nuqtadagi bir tomonli limitlarning kamida biri cheksizga teng bo'lsin. U holda $y=f(x)$ egri chiziqdagi $M(x,y)$ nuqta $x \rightarrow a$ da koordinatalar boshidan cheksiz uzoqlashadi, shu nuqtadan $x=a$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa $MN=|x-a|$ nolga intiladi. Demak, ta'rifga ko'ra $x=a$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ egri chiziqning (funksiya grafigining) vertikal asimptotasi bo'ladi.

Ravshanki, haqiqiy sonlar to'plamida uzluksiz bo'lgan funksiyalar uchun vertikal asimptota mavjud emas. Vertikal asimptota faqat ikkinchi tur uzilish nuqtalarida bo'lishi mumkin.



38-rasm

Misol. Ushbu funksiyaning $f(x)=\frac{x^2+9x}{x^2-4}$

vertikal asimptotalarini toping.

Yechish. Funksiyaning aniqlanish sohasi, ravshanki $x^2-4=0$ tenglama ildizlaridan boshqa barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat. Bu nuqtalarda funksiya ikkinchi tur uzilishga ega.

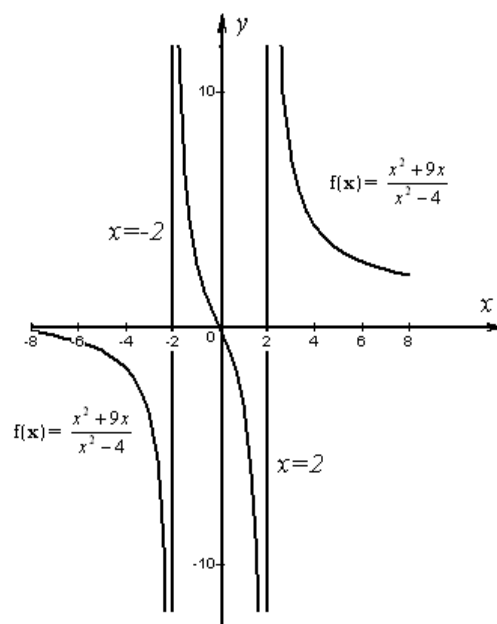
Haqiqatan ham

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2+9x}{x^2-4} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2+9x}{x^2-4} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^2+9x}{x^2-4} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^2+9x}{x^2-4} = +\infty, \text{ demak } x=-2 \text{ va}$$

$x=2$ to'g'ri chiziqlar vertikal asimptota bo'ladi. (39-rasm)



39-rasm

2. Og'ma asimptota.

Og'ma asimptota tenglamasini $y=kx+b$ ko'rinishda izlaymiz. Bir xil abssissali egri chiziq ordinatasi va asimptota ordinatasi orasidagi masofa $x \rightarrow +\infty$ yoki $x \rightarrow -\infty$ da nolga intilishini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik, M va N absissasi x ga teng bo'lgan egri chiziqdagi va asimptotadagi nuqtalar, (40-rasm) MP esa M nuqtadan asimptotagacha bo'lgan masofa, α ($\alpha \neq \pi/2$) asimptotaning Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi bo'lsin. U holda $\triangle MNP$ uchburchakdan $MP=MN\cos\alpha$, bundan esa

$$MN=MP/\cos\alpha$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu

tenglikdan, agar MP nolga intilsa,

u holda MN ham nolga intilishi, va aksincha, agar MN nolga intilsa, u holda MP nolga intilishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, agar $x \rightarrow +\infty$ yoki $x \rightarrow -\infty$ da $f(x)-kx-b$ ayirma nolga intilsa, u holda $y=kx+b$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining asimptotasi bo'lar ekan.

Bundan $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)-kx-b)=0$ shart $y=kx+b$ to'g'ri chiziqning $y=f(x)$ funksiya grafigining og'ma asimptotasi bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shart ekanligi kelib chiqadi.

Xususan, $y=b$ gorizontaal asimptota bo'lishi uchun $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)-b)=0$, ya'ni $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=b$ shartning bajarilishi zarur va yetarli.

Amalda og'ma asimptotalarni topish uchun quyidagi teoremdan foydalaniladi.

Teorema. $y=f(x)$ funksiya grafigi $y=kx+b$ og'ma asimptotaga ega bo'lishi uchun

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{va} \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

chekli limitlarning mavjud bo'lishi zarur va yetarli.

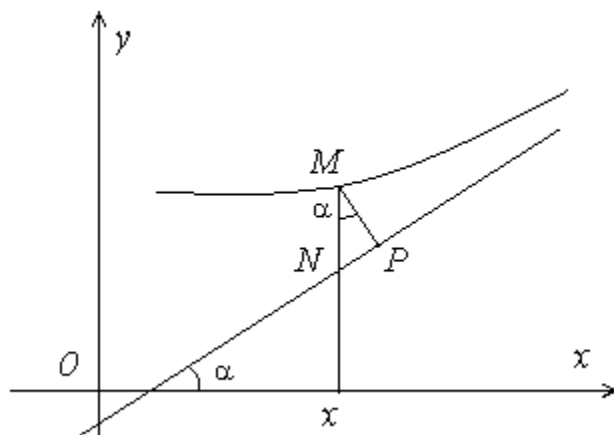
Isboti. Zaruriyligi. $y=kx+b$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining $x \rightarrow \infty$ dagi asimptotasi bo'lsin, ya'ni $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)-kx-b)=0$. U holda $f(x)-kx-b=\alpha(x)$ tenglik o'rinli, bu erda $\alpha(x)$ $x \rightarrow \infty$ da cheksiz kichik funksiya. So'ngi tenglikni quyidagicha yozib olish mumkin: $f(x)=kx+b+\alpha(x)$. Demak,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right) = k, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (b + \alpha(x)) = b$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

$$\text{Yetarliligi. Aytaylik } k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{va} \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

chekli limitlar mavjud bo'lsin. So'ngi $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)-kx)=b$ tenglikni quyidagicha yozib olish mumkin: $f(x)-kx=b+\beta(x)$, bu erda $\beta(x)$ $x \rightarrow \infty$ da cheksiz kichik funksiya.



40-rasm

Demak, $f(x)-kx-b=\beta(x)$, ya'ni $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)-kx-b)=0$. Bu esa $y=kx+b$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining $x \rightarrow \infty$ dagi asimptotasi ekanligini bildiradi.

Misol. Ushbu $f(x) = x \ln(e + \frac{1}{x})$ funksiyaning asimptotalarini toping.

Yechish. Avval bu funksiyaning aniqlanish sohasini topamiz. Buning uchun $e + \frac{1}{x} > 0$ tengsizlikni yechib, $D(y) = (-\infty; -\frac{1}{e}) \cup (0; \infty)$ ni hosil qilamiz.

Endi chegaraviy nuqtalardagi funksiya holatini aniqlaymiz.

$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{e}-0} x \ln(e + \frac{1}{x}) = -\infty$, $x \rightarrow 0+$ dagi limitni hisoblashda Lopital qoidasidan

$$\text{foydalanamiz: } \lim_{x \rightarrow +0} x \ln(e + \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(e + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{e + \frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Bulardan ko'rinadiki, berilgan egri chiziqning $x = -\frac{1}{e}$ vertikal asimptotasi mavjud.

Endi og'ma asimptotalar mavjudligini tekshiramiz.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(e + \frac{1}{x}) = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(e + \frac{1}{x}) - 1) =$$

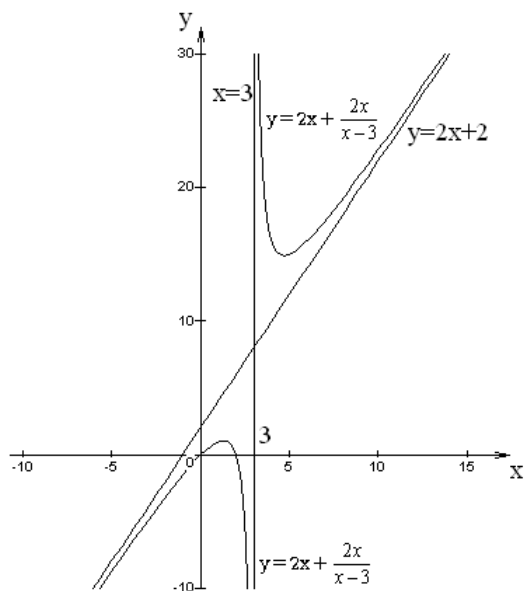
$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e + \frac{1}{x}) - 1}{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e + \frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Demak, grafikning $y = x + \frac{1}{e}$ og'ma asimptotasi mavjud.

Misol. Asimptotalarni toping.

$$a) y = 2x + \frac{2x}{x-3}; \quad b) y = xe^{1/x}$$

$$\text{Yechish. a) } x=3 \text{ da } f(x) = 2x + \frac{2x}{x-3}$$



41-rasm

funksiya ikkinchi tur uzilishga ega va $\lim_{x \rightarrow 3 \pm 0} (2x + \frac{2x}{x-3}) = \pm \infty$ bo'lganligi sababli, $x=3$ vertikal asimptota bo'ladi.

Og‘ma asimptotalarni izlaymiz:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 + \frac{2}{x-3}\right) = 2; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y -$$

$$kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2x + \frac{2x}{x-3} - 2x\right) = 2. \quad \text{Demak,}$$

$y = 2x + 2$ og‘ma asimptota bo‘ladi. (41-rasm)

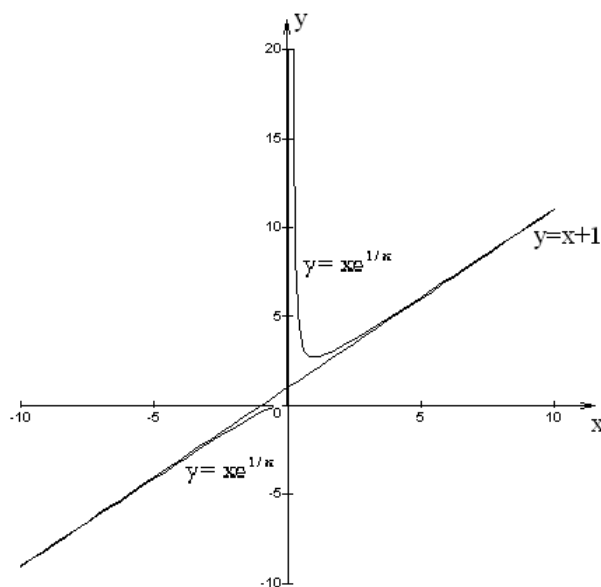
b) $y = xe^{1/x}$ funksiyani aniqlanish sohasi $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ to‘plamdan iborat. $x=0$ nuqtada funksiyani chap va o‘ng limitlarini hisoblaymiz.

$$\lim_{x \rightarrow -0} xe^{1/x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +0} xe^{1/x} = (1/x = t \text{ belgilash}$$

kiritamiz, u holda $x \rightarrow +0$ da $t \rightarrow +\infty$

$$\text{bo‘ladi}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty.) \quad \text{Demak, } x=0$$

to‘g‘ri chiziq vertikal asimptota bo‘ladi.



42-rasm

Endi og‘ma asimptotalarni izlaymiz: $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1,$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (xe^{1/x} - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = |1/x = z, x \rightarrow \pm\infty, z \rightarrow 0| =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1, \text{ shunday qilib } y = x + 1 \text{ og‘ma asimptota ekan. (42-rasm)}$$

7-§. Funksiyani to‘la tekshirish va grafigini yasash

Funksiyaning xossalarni tekshirish va uning grafigini yasashda quyidagilarni bajarish maqsadga muvofiq:

1) Funksiyaning aniqlanish sohasi va uzilish nuqtalari topiladi; funksiyani chegaraviy nuqtalaridagi qiymatlari (yoki unga mos limitlari) hisoblanadi.

2) Funksiyaning toq-juftligi, davriyligi tekshiriladi.

3) Funksiyaning nollari va ishora turg‘unlik oraliqlari aniqlanadi.

4) Asimptotalar topiladi.

5) Funksiya ekstremumga tekshiriladi, uning monotonlik oraliqlari aniqlaniladi.

6) Funksiya grafigining burilish nuqtalari, qavariqlik va botiqlik oraliqlari topiladi.

Misollar

1. $y = x(x^2 - 1)$ funksiyani tekshiring va grafigini chizing.

Yechish. 1) aniqlanish sohasi - haqiqiy sonlar to‘plami. Uzilish nuqtalari yo‘q. Funksiyaning chegaraviy qiymatlari: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x^2 - 1) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x(x^2 - 1) = -\infty;$

2) funksiya davriy emas, toq funksiya

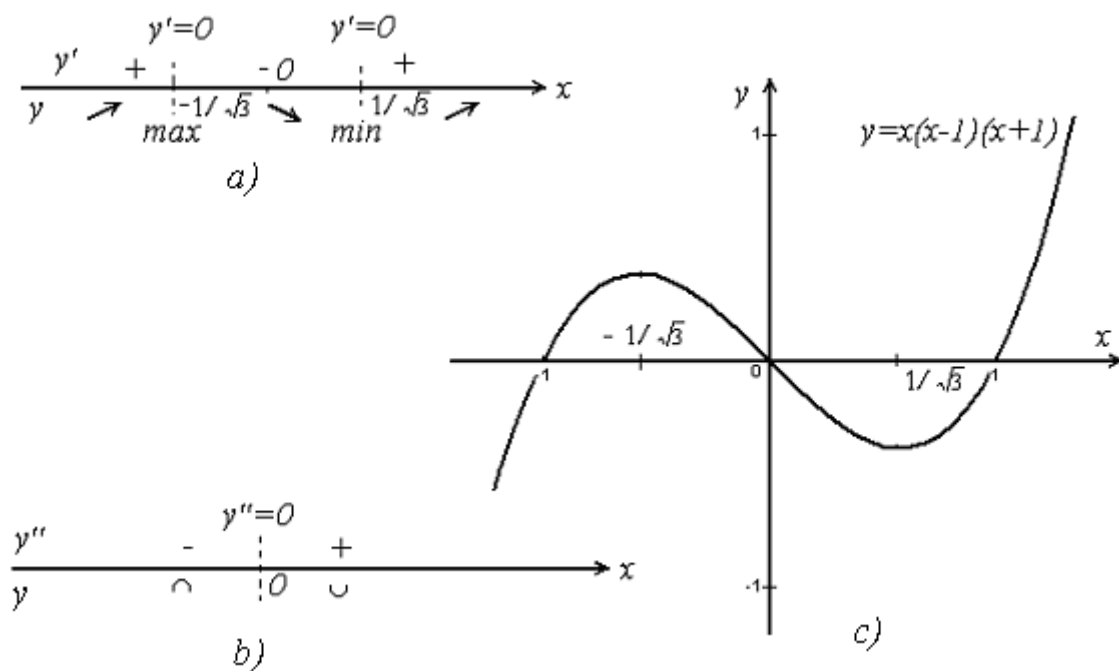
3) funksiyaning uchta noli bor: $x=0$; $x=-1$; $x=1$. Ushbu $x(x^2-1)>0$ tengsizlikni yechamiz, uning yechimi $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ to'plamdan iborat. Demak, funksiya $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ to'plamda musbat va $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ to'plamda manfiy qiymatlar qabul qiladi.

4) og'ma asimptotaning burchak koeffitsientini topamiz: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2-1) = \infty$. Demak, og'ma asimptota mavjud emas. Vertikal asimptotalar ham mavjud emas (chunki, uzilish nuqtalari yo'q).

5) Funksiya hosilasini topamiz: $y'=3x^2-1$. Hosilani nolga tenglashtirib statsionar nuqtalarini topamiz: $y'=0$ yoki $3x^2-1=0$, bundan $x=-1/\sqrt{3}$, $x=1/\sqrt{3}$. Ushbu (43-a-rasm) sxemani chizamiz, va intervallar metodidan foydalanib funksiya hosilasining ishoralarini aniqlaymiz. Bundan funksiya $(-\infty, -1/\sqrt{3})$ va $(1/\sqrt{3}, +\infty)$ intervallarda monoton o'suvchi, $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ intervalda monoton kamayuvchi; $x=-1/\sqrt{3}$ nuqtada maksimumga, $x=1/\sqrt{3}$ nuqtada minimumga ega ekanligi kelib chiqadi. Ekstremum nuqtalarida funksiya qiymatlarini hisoblaymiz: agar $x_{\max}=-1/\sqrt{3}$ bo'lsa, u holda $y_{\max}=2/(3\sqrt{3})$; agar $x_{\min}=1/\sqrt{3}$ bo'lsa, u holda $y_{\min}=-2/(3\sqrt{3})$ bo'ladi.

6) Ikkinchi tartibli hosilani topamiz: $y''=6x$. Ikkinchi tartibli hosilani nolga tenglashtirib $y''=6x=0$, $x=0$ ekanligini topamiz. Sxemani (43-b-rasm) chizamiz va hosil bo'lgan intervallarda ikkinchi tartibli hosila ishoralarini aniqlaymiz. Bundan $x=0$ nuqtada burilish mavjud, $(-\infty;0)$ da funksiya grafigi qavariq, $(0;+\infty)$ da botiq ekanligini topamiz. Burilish nuqtasi ordinatasini topamiz: $u(0)=0$.

Funksiya grafigi 43-c-rasmda keltirilgan.



43-rasm

2. $y = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$ funksiyani tekshiring va grafigini chizing.

Yechish. 1) Aniqlanish sohasi – $[0,4]$ kesma. Funksiyaning chegaraviy qiymatlarini topamiz: agar $x=0$ bo'lsa, u holda $u=2$; agar $x=4$ bo'lsa, $u=2$. Funksiyaning uzilish nuqtalari yo'q.

2) Funksiya toq ham, juft ham emas, davriy ham emas.

3) funksiyaning nollari yo'q,

4) Og'ma asimptotalari yo'q, chunki aniqlanish sohasi kesmadan iborat.

5) Hosilasini topamiz:

$$y' = \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{4-x}}.$$

Hosilani nolga tenglashtirib, kritik (statsionar) nuqtani topamiz: $x=2$.

44-rasmdagi sxemani chizamiz. Bundan funksiya $(0,2)$ intervalda o'suvchi, $(2,4)$ intervalda kamayuvchi, $x=2$ nuqtada funksiya maksimumga erishishi kelib chiqadi. Maksimum nuqtasining ordinatasi $y_{\max} = 2\sqrt{2}$.

6) Ikkinchi tartibli hosilani topamiz:

$$y'' = -\frac{1}{4} \cdot \frac{(4-x)^{3/2} + x^{3/2}}{x^{3/2}(4-x)^{3/2}}. \quad (0,4) \text{ intervalda}$$

ikkinchi tartibli hosila manfiy, demak bu intervalda funksiya grafigi qavariq bo'ladi.

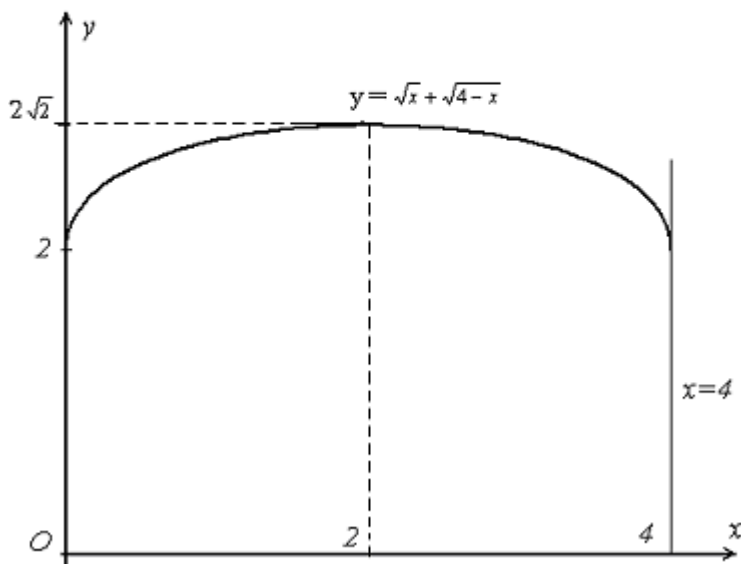
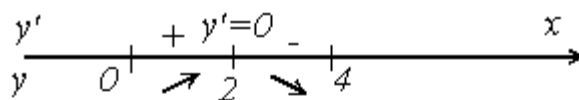
Funksiya grafigi 44-rasmda chizilgan. Shuni aytib o'tish kerakki, $\lim_{x \rightarrow 0+} y = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow 4-0} y = -\infty$ bo'lganligi sababli, funksiya grafigi $(0,2)$ nuqtada ordinatalar o'qiga, $(4,2)$ nuqtada $x=4$ to'g'ri chiziqqa urinadi.

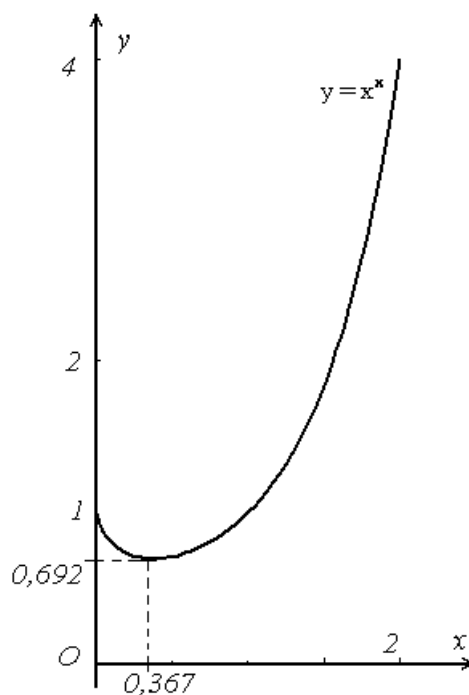
3. $y = x^x$. funksiyani tekshiring va grafigini chizing.

Yechish. Avval funksiyani quyidagicha yozib olamiz: $y = x^x = e^{x \ln x}$.

1) funksiyaning aniqlanish sohasi



44-rasm



45-rasm

barcha musbat sonlar to'plami. Chegaraviy qiymatlari: $\lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \ln x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln x} = +\infty$.

Uzilish nuqtalari yo'q.

2) Funksiya juft ham, toq ham, davriy ham emas.

3) Funksiyaning nollari mavjud emas.

4) Og'ma asimptotasini izlaymiz: $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln x}}{x} = +\infty$, demak og'ma

asimptota yo'q.

5) Hosilasini topamiz: $y' = x^x(\ln x + 1)$. $y' = 0$ tenglamadan $x = e^{-1} \approx 0,367$. funksiya $(0, 1/e)$ intervalda kamayuvchi, $(1/e, +\infty)$ intervalda o'suvchi bo'ladi. $x = e^{-1}$ nuqtada funksiya minimumga ega, uning ordinatasi $y_{\min} = 0,692$.

6) Ikkinchi tartibli hosilani topamiz: $y'' = x^x((\ln x + 1)^2 + 1/x)$. Ikkinchi tartibli hosila $(0, +\infty)$ intervalda musbat, demak funksiya bu intervalda botiq.

Funksiyaning $x=0$ nuqta atrofida tekshiramiz.

$\lim_{x \rightarrow 0+} y' = \lim_{x \rightarrow 0+} x^x(\ln x + 1) = -\infty$, bundan funksiya grafigi $(0, 1)$ nuqtada ordinatalar o'qiga urinishi kelib chiqadi.

Funksiya grafigi 45-rasmda berilgan.

4. $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$ funksiyaning to'la tekshiring va grafigini chizing.

Yechish. 1) Funksiya $x^2 - 1 > 0$, ya'ni $(-\infty; -1)$ va $(1; +\infty)$ oraliqlarda aniqlangan va uzluksiz. Funksiyaning chegaraviy qiymatlarini izlaymiz:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} (x + \ln(x^2 - 1)) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x + \ln(x^2 - 1)) = -\infty.$$

Demak, funksiya grafigi ikkita $x = -1$ va $x = 1$ vertikal asimptotalarga ega.

2) funksiya toq ham, juft ham, davriy ham emas.

3) funksiya $(-\infty, -1)$ intervalda manfiy, $(1, +\infty)$ intervalda yagona noli mavjud, uni topish uchun taqribiy hisoblash metodlaridan foydalaniladi, natijada $x_0 \approx 1,15$ ekanligini aniqlashimiz mumkin. Demak, funksiya $(1; 1,15)$ intervalda manfiy, $(1,15, +\infty)$ oraliqda musbat.

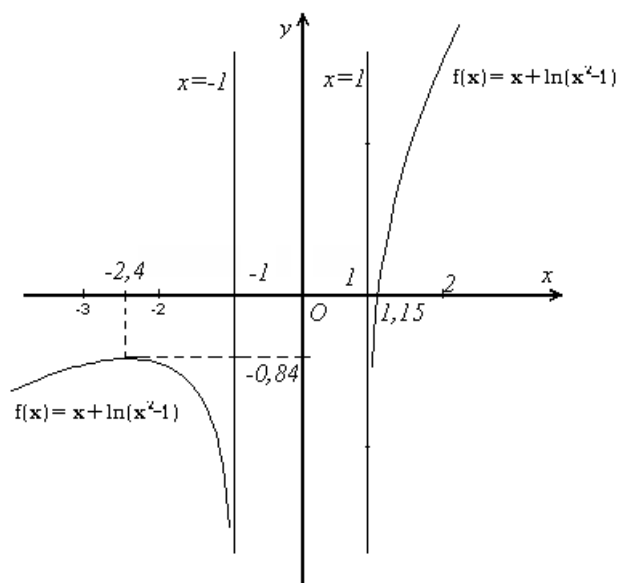
4) Og'ma asimptotalarini izlaymiz:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln(x^2 - 1) = +\infty,$$

demak og'ma asimptota mavjud emas.

5) Funksiya hosilasi $y' = 1 + 2x/(x^2 - 1)$ funksiyaning aniqlanish sohasida mavjud, shu sababli uning kritik nuqtalari faqat statsionar nuqtalardan iborat bo'ladi. Bunda $y' = 0$ tenglama yechimlari $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ va $x_2 = -1 + \sqrt{2}$ bo'lib, $x_2 = -1 + \sqrt{2}$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli emas.



46-rasm

Shunday qilib, yagona kritik nuqta mavjud va $(-\infty; -1)$ oraliqqa tegishli. $(1; +\infty)$ oraliqda $y' > 0$ va funksiya o'suvchi bo'ladi. $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ nuqtada maksimum mavjud. Uning ordinatasi $f(-1 - \sqrt{2}) = -1 - \sqrt{2} + \ln(2 + 2\sqrt{2}) \approx -0,84$ ga teng.

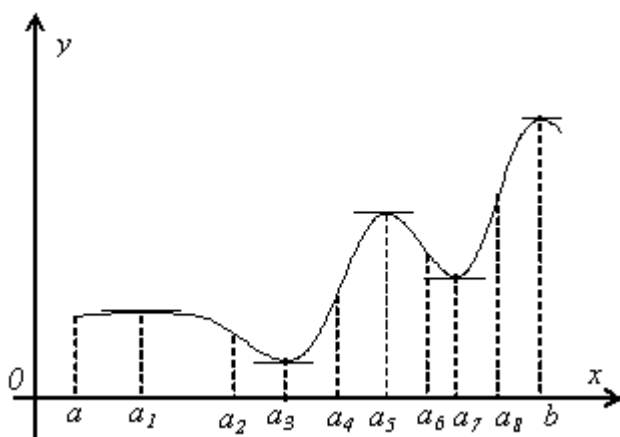
6) Ikkinchi tartibli hosilani topamiz: $y'' = -\frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$. Bundan $y'' < 0$, demak grafik qavariq. Funksiya grafigi 46-rasmda berilgan.

Savollar

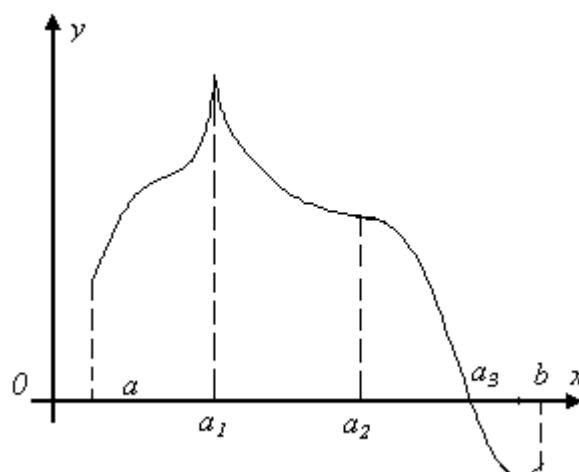
1. Asimptota qanday aniqlanadi? Uning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
2. Og'ma asimptotani ta'riflang. Gorizontaal asimptota nima?
3. Intervalda uzluksiz bo'lgan funksiyaning vertikal asimptotasi bo'lishi mumkinmi? $\cos x$ va ctgx funksiyalarni $(0; \pi)$ intervalda qarang.
4. Funksiyani to'la tekshirish uchun nima ishlar bajariladi?

Misollar

1. Quyidagi funksiyalarning barcha asimptotalarini toping:
 - 1) $y = x^2/(x+4)$;
 - 2) $y = 2x + \operatorname{arctgx}$;
 - 3) $y = \ln \sin x$;
 - 4) $y = \cos x/x$;
 - 5) $y = x^3/(x+1)^2$;
 - 6) $y = 3^x/(x^2+1)$.
2. Funksiyalarni tekshiring va grafigini chizing.
 - a) $y = (x-2)^2(x+3)$;
 - b) $y = x/(x^2-1)$;
 - c) $y = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}$;
 - d) $y = (x-4)\sqrt{x}$;
 - e) $y = \sin x + \sin 2x$;
 - f) $y = xe^{-x}$;
3. Funksiya grafigiga ko'ra (47, 48-rasmlar) hosilaning grafigini sxematik ravishda chizing.

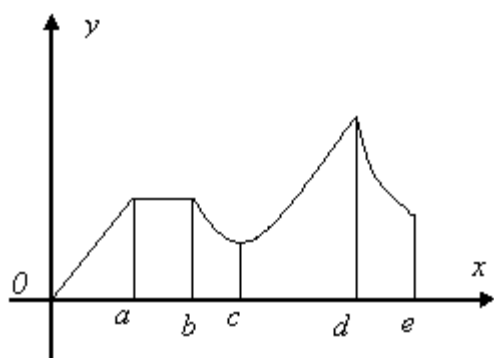


47-rasm

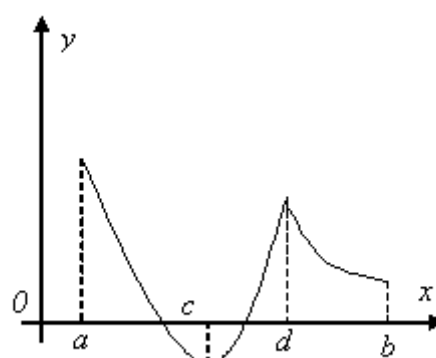


48-rasm

4. Hosilasining grafigiga (49, 50-rasmlar) ko'ra funksiya grafigini sxematik ravishda tiklang.



49-rasm



50-rasm

Adabiyotlar

1. Azlarov. T., Mansurov. X., Matematik analiz. T.: «O‘zbekiston». 1 t: 1994, 2 t . 1995
2. Toshmetov O‘. Matematik analiz. Matematik analizga kirish. T., TDPU. 2005y.
3. Hikmatov A.G‘., Turdiyev T. «Matematik analiz», T.1-qism.1990y.
4. Sa’dullayev A. va boshqalar. Matematik analiz kursi misol va masalalar to‘plami. T., «O‘zbekiston». 1-q. 1993., 2-q. 1995.
5. Vavilov V.V. i dr. Zadachi po matematike. Nachala analiza. M.Nauka.,1990.- 608s.