

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
ANDIJON DAVLAT UNIVERSITET

Q'olyozma huquqida

UDK 517.927

“TASDIQLAYMAN”

Bo'lim boshlig'i

N. I. Asqarov

“HIMOYAGA QO'YILDI”

Kafedra mudiri

T. T. Ibaydullayev

“ ” 2018 yil

“ ” 2018 yil

« INVOLYUTSIYA QATNASHGAN SPEKTRAL MASALALARNI

YECHISH » mavzusidagi

MAGISTRLIK DISSERTATSIYASI

5A130101 Matematika (“Matematik analiz”) mutaxassisligi

Magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan

DISSERTATSIYA

Bajardi: Sodiqova Gulabxon Abdumalik qizi

Ilmiy rahbar: G'.M. Mo'minov
fizika-matematika fanlari doktori

ANDIJON-2018

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI**

Fakultet Fizika-matematika
Kafedra Matematika

Magistratura talabasi
Ilmiy rahbar

SodiqovaG.
Mo'minov G'.M.

O'quv yili 2016-2018

Mutaxassisligi

Matematik analiz

**Involutsion xossasiga ega bo'lgan spectral masalalar mavzusidagi
magistrlik dissertatsiyasiga**

ANNOTATSIYA

Mavzuning dolzarbligi: Funktsional differensial tenglamalarning involutsiyali differensial tenglamalar (IDT) ini o'rganish 1940 yilda L.Zilberstein tomonidan

$f'(x) = f(1/x)$ tenglamani yechishdan boshlangan. Agar har bir x funksiya f o'zining aniqlanish sohasida $f(f(x)) = x$ tenglikni qanoatlantirsa f funksiyaga involutsiya deyiladi. Involutsiyaning butun $R = (-\infty, +\infty)$ son o'qida aniqlanganligi va asosan uzluksizlik, kamayuvchi va yagona qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lishi matematik analizda ko'plab tadbirlarga ega.boshlang'ich shartlar bilan berilgan IDTlarni o'rganish asosan $f(x) = -x$ involutsiya uchun bajarilgan. Magistrlik dissertatsiyasida IDTlar $f(x) = 1-x$ involutsiya uchun bajarilganligi bajarilgan ishning dolzarbligini ko'rsatadi.

Ishning maqsadi va vazifalari: $f(x) = 1-x$ involutsiyalii xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalaning umumiy yechimini topish.

Tadqiqot ob'ekti va predmeti: oddiy va xususiy xosilali differensial tenglamalar.

Tadqiqot uslubiyati va uslublari: matematik analiz, differensial tenglamalar nazariyasi,

Tadqiqot natijalarining ilmiy jihatdan yangilik darajasi:

$f(x)=1-x$ involyutsiyali birinchi va ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli oddiy differensial tenglamalarning umumiy yechimi topildi va shu involyutsiyali xususiy hosilali differensial tenglamaning umumiy yechimi Fur'ye usuli orqali qurildi.

Ishning amaliy ahamiyati va tadbiqu: Dissertatsiya ishida olingan tadqiqot natijalar ilmiy-nazariy ahamiyatga ega bo'lib, differensial tenglamalar nazariyasi, optimal boshqaruv va differensial o'yinlar sohalariga tadbiqu etish mumkin.

Magistrlik ishining tuzilishi va tarkibi: Ish ikki o'zbek va ingliz tillarida yozilgan magistrlik dissertatsiyasining qisqacha annotatsiyasi, mundarija, dissertatsiya mavzusining asoslanishi va dolzarbligi, tadqiqot ob'yekti va predmeti, tadqiqot maqsadi va vazifalari, tadqiqot natijalarining amaliy va nazariy ahamiyati, qo'llanilgan usullar, mavzu bo'yicha qisqacha adabiyotlar tafsifini o'z ichiga olgan kirish qismidan, uchta bobga ajranilgan asosiy qismdan, xulosa hamda foydalanilgan adabiyotlar keltirilgan

Ilmiy rahbar:

Mo'minov G'.M.

Magistratura talabasi:

Sodiqova G.

**THE MINISTRY OF HIGHER AND SAECONDARY EDUCATIONAL
SYSTEM OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN**

ANDIJAN STATE UNIVERSITY

Faculty: physics-mathematical **The author of rearch work:** SodiqovaG.

Department: mathematical **Supervisor:** Mo'minov G'.M.

Academic year: 2016-2018 **Specialty:** Differential equations

THE ANNOTATION OF MASTER DISSERTATION ABOUT

“ SPEKTRAL PROBLEMS WITH INVOLYUTION”

The subject: Partial differential equations with involution.

The intensity of the theme: The study of functional differential equations with involution (DEI) can be trased back to the solution of the equation $f'(x) = f(1/x)$ by Silberstein in 1940. Briefly speaking , an involution is just a function f that satisfies $f(f(x)) = x$ for every x in its domain of definition. For most application in analysis, the involution is defined on an of $R = (-\infty, +\infty)$ and in the majority of cases, it is continuous, which implies it is decreasing and has a unique fixed point. The study of problems with DEI has been mainly focused on those cases with initial conditions , with an extensive research in the case of the reflection $f(x) = -x$. In the masters research DEI with reflection $f(x) = 1 - x$. It reveals the intensity of the masters dissertation.

The duty and aim of master work: to find solution of problem for the partial equation of the second order with $f(x) = 1 - x$ involution.

Object and Subjects of inquiry: ordinary and partial differential equation

The methodology and methods of research: methods of mathematical analysis, the theories of differential equations.

The newness of degree research results according to scientific: have been solved the homogenous linear first and second order ordinary differential equations with involution $f(x)=1-x$ and by used the Fourye method is constructing general solution of partial differential equation with involution.

Importance and practice of the work: The results can be used in theory of differential equations, mathematical control theory and differential games.

The structure and composition of the work of master degree: the work has been written both in Uzbek and in English. There is brevity annotation contents used methods bibliography according to the theme the intensity and importance of the theme the aim and duty of research results in the entrance part of the work. There are also 3 aspects, separated main part conclusion and bibliography in it.

Supervisor:

Mo'minov G'. M.

The author of rearch work:

Sodiqova G.

M u n d a r i j a

K i r i s h

7-11

I Bob. Dastlabki zaruriy ma'lumotlar

1.1-§. O'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamalar nazariyasidan asosiy ma'lumotlar.....	12-25
1.2-§. Involyutsiya va uning asosiy xossalari	25-33
I bob bo'yicha xulosa.....	33-34

II Bob. Involyutsiyali differensial tenglamalar

2.1-§. Involyutsiyali oddiy differensial tenglamalar. Misollar.....	35-42
2.2-§. Involyutsiyali oddiy differensial tenglamalar yechimining mavjudligi haqidagi asosiy teoremlar.....	42-56
2.3-§. Involyutsiyali qatnashgan differensial tenglamalar sistemas.....	57-59
II bob bo'yicha xulosa.....	59-60

III Bob. Involyutsiya qatnashgan spektral masalalar

3.1-§. Spektral analizdan asosiy ma'lumotlar.....	60-64
3.2-§. Involyutsiya qatnashgan chegaraviy masalalardan namunalar.....	65-68

III bob bo'yicha xulosa

X u l o s a

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.

K I R I S H

Ma'lumki, vatanimiz istiqloq g'alabasidan so'ng shahdam odimlar bilan olg'a bormoqda, ilm-fan va texnikaning zamonaviy sohalari rivojlanmoqda va bu rivojlanish ilm ahli oldiga ko'plab zamonaviy muammolarni hal etishni ko'ndalang qilib qo'ymoqda. Ushbu fikrimizni birinchi prezidentimiz Islom Abduganiyevich Karimovning «O'zbekiston XXI asr bo'sag'asida: havfsizlikka tahdid, barqarorlik shartlari va taraqqiyot kafolatlari» nomli kitoblarida keltirilgan. Quyidagi so'zlardan ham bilib olsak bo'ladi:

«Respublikamizda quyidagi yo'nalishlar bo'yicha jahon darajasidagi ilmiy maktablar yaratilgan bo'lib, ularda tadqiqotlar muvoffaqiyotli olib borilmoqda. Jumladan, matematika, ehtimollar nazariyasi, tabiiy va ijtimoiy jarayonlarni matematik modellash, informatika va hisoblash texnikasi sohasidagi tadqiqotlar.

Matematika fanining ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, differensial tenglamalar va matematik fizika, funksional tahlil sohasidagi yutuqlari respublikadan ancha uzoqda ham mashxur».

Dissertatsiya mavzusining asoslanishi va uning dolzarbligi: Ma'lumki hayot harakatdan iborat, shuning uchun harakat bilan bog'liq bo'lgan masalalarni o'rganish va hal qilish katta ahamiyatga ega. Bundan tashqari ko'plab murakkab jarayonlarning matematik modellari differensial tenglamalar bilan ifodalanadi. Yuqorida keltirilgan fikrlar mavzuning dolzarbligini ko'rsatadi.

Dastavval agar $\alpha(\alpha(x))=x$ bo'lsa, u holda $\alpha(x)$ involyutsoya bo'lishini eslatamiz. Masalan $\alpha(x)=\sqrt[m]{1-x^m}$ $m \in N$, $\alpha(x)=\frac{ax+b}{cx-a}$ funksiya va uning xususiy hollari bo'lgan $\alpha(x)=1-x$, $\alpha(x)=\frac{1}{x}$, $\alpha(x)=\frac{x}{x-1}$, $\alpha(x)=\frac{x+1}{x-1}$ funksiyalar involyutsiyalarga misol bo'la oladi. Shuning uchun birinchi darajali involyutsiyaga ega bo'lgan birinchi tartibli oddiy diferensial tenglamalarni umumiy ko'rinishda $y'(x)=y(\alpha(x))$ kabi ifodalashimiz mumkin.

Involyutsiya ishtirok etgan differensial tenglamalar haqida dastlabki ilmiy tadqiqotlar sifatida L.Zilberstein [4], I.Ya. Viner [5], J.Wiener [6] maqolalarini keltirish mumkin.

Xususiy hosilali differensial tenglamalar sohasida involyutsiya qatnashgan turli ko'rinishdagi masalalar [3] adabiyotlardan o'rin olgan. Bu masalalarni yechishning asosiy usuli o'zgaruvchilarni ajratishning Fur'ye usuli bo'lib, bu usulni qo'llash jarayonida involyutsia qatnashgan spectral masalalar yuzaga keladi. Hosil qilingan yechimning analitik ko'rinishi Fur'ye qatori ko'rinishida bo'lib, bu qatorni tekis yaqinlashishini tekshirish talab qilinadi.

Hozirga kelib involyutsiyaga ega bo'lgan oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalarning turli ko'rinishdagi masalalar o'rganilayotgan sohalaridan biri bo'lib, bu sohaning rivojlantirish borasida A.A.Andreyev, M.Sh.Burlutskaya, A.P.Khromov, C.P.Gupta, W.Watkins, O.Piao, O'Rigan, A.M.Sarsenbi, Moxtar Kirane A.A.Ko'pjassarova, A.Cabada, A.F.Toje kabi ko'plab jahon matematiklarining tadqiqotlari yorqin misol bo'ladi.

Tadqiqot obyekti va predmeti: Differensial tenglamalar, involyutsiyaga ega bo'lgan oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalar.

Tadqiqot maqsadi va vazifalari: Invol'yutsiyaga ega bo'lgan xususiy hosilali differensial tenglamaga oid chegaraviy masalani tadqiq qilish bilan masala yechimining mavjudligi ko'rsatiladi va yechim quriladi.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi:

- Involyutsiya xossasiga ega bo'lgan ko'plab birinchi va ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarni yechishga oid misollar keltirildi;
- Involyutsiya xossasiga ega bo'lgan bir jinsli bo'lmagan ikkinchi tartibli tenglama yechimini qurish amalga oshirildi;

- Involyutsiyaga ega bo'lgan issiqlik tarqalish tenglamasi yechimini topish masalasi Fur'ye usulini qo'llash bilan involyutsiyaga ega bo'lgan oddiy differensial tenglamalar uchun Shturm-Liuvill xos qiymatlari masalasi orqali ifodalandi va masala yechimi qurildi.

Tadqiqotning asosiy masalalari va farazlari: Ushbu dissertatsiya ishida quyidagi masalalar ko'riladi:

- tadqiqot uchun zarur tushunchalarni keltirish;
- Involyutsiyaga ega bo'lgan oddiy differensial tenglamalar yechimini topish;
- Involyutsiyaga ega bo'lgan xususiy xosilali tenglamalar uchun xos qiymat va xos funksiyalarni qurish;
- Involyutsiyaga ega bo'lgan xususiy xosilali tenglamalar yechimini qurish.

Tadqiqot mavzusi bo'yicha adabiyotlar sharhi (tahlili): Ko'plab tadqiqotlarda $f(t) = -t$ involyutsiyaga ega bo'lgan oddiy differensial tenglamalar uchun tadqiqotlar olib borilgan. Biz tadqiqotlarimizda $f(t) = 1 - t$ involyutsiya ega bo'lgan xususiy hosilali differensial tenglama uchun chegaraviy yechimini qurish amalga oshirildi.

Tadqiqotda qo'llanilgan uslub(metodika)ning tavsifi: Ushbu dissertatsiyada differensial tenglamalar, chiziqli algebra, haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasining usullari qo'llanilgan.

Tadqiqot natijalarining nazariy va amaliy ahamiyati: Dissertatsiya ishida olingan natijalar ilmiy-nazariy ahamiyatga ega bo'lib, tadqiqot natijalaridan oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasi, spektral analiz va matematik modellarni tadqiq etishda foydalanish mumkin

Dissertatsiya tuzilmasining tavsifi: Magistrlik dissertatsiyasi quyidagi tarkibiy qisimlardan iborat: Titul varaq'i, Anotatsiya, Mundarija, Kirish, Asosiy qism, Xulosa va Foydalanilgan adabiyotlar ro'yhatidan iborat.

Involyutsiyaga ega bo'lgan funksional differensial tenglamalar (IDT) ni o'rganish 1940 yilda Zilberstin ([1] ga qarang) tomonidan $f'(x) = f(1/x)$

tenglamani yechishdan boshlangan. Qisqacha aytilganda o'zining aniqlanish sohasidan olingan har bir x uchun $f(f(x)) = x$ tenglikni qanoatlantiruvchi f funksiyaga involyutsiya deyiladi. Matematik analizda $R = (-\infty, +\infty)$ da uzluksiz, kamayuvchi va yagona qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan asosiy holler qaraladi. IDTlarni o'rganish Zilberstein maqolasidan boshlangan bo'lsada hozirda ko'plab ilmiy tadqiqotlar $f(x) = -x$ involyutsia uchun bajarilmoqda.

Dissertatsiyada xususiy hosilali IDT ustida olib borilgan tadqiqotlarimiz asosini $f(x) = 1 - x$ IDT tashkil qiladi. $f(x) = 1 - x$ involyutsiyaga ega bo'lgan xususiy hosilali IDT uchun qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechish uchun Fur'ye usulining qo'llanilishi $f(x) = 1 - x$ involyutsiyali IDT bilan ifodalangan spektral masalalarga olib keladi.

Birinchi bobda kelgusi tadqiqotlar uchun foydalaniladigan oddiy differensial tenglamalar nazariyasidan zaruriy ma'lumotlar, involyutsiya va uning ba'zi xossalari, involyutsiyali xususiy hosilali differensial tenglamalarda o'zgaruvchilarni ajratishning Fur'ye usuli bayon qilingan.

Ikkinchi bobda oddiy IDT va ularga oid misollar yechish, oddiy IDT uchun boshlang'ich masala yechimining mavjudligi haqidagi asosiy teoremlar, xususiy hosilali IDT lar uchun Fur'ye usuli taxlil qilingan.

Uchinchi bobda spektral analizdan zaruriy ma'lumotlar, va ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarda o'zgaruvchilarni ajratish yordamida hosil bo'lgan involyutsiyali spektral masalalar o'rganilgan va qaralayotgan chegaraviy masalaning yechimlarini qurish bayon etilgan.

Shuningdek xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati keltirilgan.

Dissertatsiyaning birinchi bobi tayanch tushunchalardan tashkil topgan bo'lib, involyutsiya tushunchasini o'rganish uchun boshlang'ich ma'lumotlar: differensial tenglamalar nazariyasidan o'zgarmasni variatsiyalash usuli, Eyler va Lagranj tenglamalari hamda involyutsiya va uning eng sodda xossalari bayon qilingan.

Dissertatsiyaning ikkinchi bobida invoyutsiya xossasini o'rganish uchun, oddiy differensial tenglamalar nazariyasidan ma'lumotlar, oddiy differensial tenglamalar involyutsiyasi chiziqli differensial tenglamalar invoyutsiyasi, chiziqli differensial tenglamalar sistemasining involyutsiyasi keltirilgan va ularga doir bir qancha misollarni ishlab umumiy yechimlari keltirib chiqarilgan.

Dissertatsiyaning uchinchi bobida taqdim etilayotgan ishning asosiy qismini tashkil qilgan bo'lib, bunda involyutsiya xossasiga ega bo'lgan xususiy hosilali eng sodda giperbolik tenglama uchun aralash masala qaralgan hamda masalaning klassik yechimi keltirilgan.

Shuningdek xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati keltirilgan.

ASOSIY QISM

I BOB DASTLABKI ZARURIY MA'LUMOTLAR

I Bob. Asosiy tushunchalar

Involutsiya xossasiga ega bo'lgan oddiy differensial tenglamalarni yechish jarayonida almashtirishlardan so'ng Eyler yoki Lagranj tenglamalari hosil bo'ladi. O'z navbatida bu tenglamalar almashtirishlar yordamida o'zgaras koefitsiyentli chiziqli tenglamalarga olib o'tilishi va yechilishi mumkin. Shuning uchun bu bobda asosiy tushunchalar qatorida o'zgaras koefitsiyentli chiziqli differensial tenglamalar uchun Eyler va Lagranj tenglamalarini ko'rib chiqamiz.

1.1-§. O'zgaras koefitsiyentli chiziqli differensial tenglamalar nazariyasidan asosiy ma'lumotlar.

Biz n – tartibli o'zgaras koefitsiyentli chiziqli

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = F(t) \quad (1)$$

differensial tenglamani qaraymiz, bu yerda $a_1, a_2, \dots, a_n$ – o'zgaras kompleks sonlar, $f(t)$ qandaydir oraliqda berilgan t o'zgaruvchining kompleks funksiyasi.

(1) tenglamaning chap qismi n –*tartibli chiziqli differensial operator* deyiladi va

$L[y]$ kabi belgilanadi. (1) tenglamaning o'zi esa

$$L[y] = f(t) \quad (2)$$

ko'rinishda yoziladi.

Dastlab n – tartibli bir jinsli o'zgaras koefitsiyentli tenglamani qaraymiz.

Bir jinsli tenglamalar. Har bir

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y$$

operatorga yoki bir jinsli

$$L[y]=0 \quad (3)$$

tenglamaga (3) tenglamaning yoki $L[y]$ operatorning xarakteristik ko'phadi deb nomlangan

$$D(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\dots+a_0 \quad (4)$$

ko'phadni mos qo'yamiz.

1-lemma. Ixtiyoriy n marta uzluksiz differensiallanuvchi $f(t)$ funksiya uchun quyidagi:

$$L[e^{\lambda t} f(t)]=e^{\lambda t} \left(D(\lambda) f + \frac{D'(\lambda)}{1!} f' + \dots + \frac{D^{(n)}(\lambda)}{n!} f^{(n)} \right) \quad (5)$$

formula o'rinli.

Isboti. $L[y]=y^{(k)}, (0 \leq k \leq n)$ bo'lsin, u holda $D(p)=p^k$ bo'lib, agar $l > k$ bo'lganda $D^{(l)}(\lambda)=0$ bo'lgani uchun

$$\begin{aligned} L[e^{\lambda t} f(t)] &= \frac{d^k}{dt^k} (e^{\lambda t} f(t)) = \sum_{l=0}^k C_k^l \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} (e^{\lambda t}) \cdot f^{(l)}(t) = \sum_{l=0}^k \frac{k(k-1)\dots(k-l+1)}{l!} \lambda^{k-l} e^{\lambda t} f^{(l)}(t) = \\ &= e^{\lambda t} \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\lambda^l} (\lambda^k) \cdot f^{(l)}(t) = e^{\lambda t} \sum_{l=0}^k \frac{D^{(l)}(\lambda)}{l!} f^{(l)}(t) = e^{\lambda t} \sum_{l=0}^n \frac{D^{(l)}(\lambda)}{l!} f^{(l)}(t) \end{aligned}$$

Biz bu yerda ikki funksiya ko'payitmasining k – tartibli hosilasini hisoblashda Leybnits formulasidan foydalandik.

Demak (5) formula $L[y]=y^{(k)}$ xususiy hol uchun isbotlandi. (5) formulaning umumiy holda to'g'riligi $L[y]$ operatorning $L[y]=y^{(k)}, (0 \leq k \leq n)$ ko'rinishdagi operatorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat ekanligidan kelib chiqadi.

Lemma isbotlandi.

2-lemma. λ – soni $D(p)$ xarakteristik ko'phadning k karrali ildizi bo'lsa, u holda $y_1 = e^{\lambda t}, y_2 = te^{\lambda t}, \dots, y_k = t^{k-1}e^{\lambda t}$ funksiyalar bir jinsli (3) tenglamaning yechimlari bo'ladi.

Isboti. λ – soni $D(p)$ xarakteristik ko'phadning k karrali ildizi bo'lgani uchun

$$D(\lambda) = D'(\lambda) = \dots = D^{(k-1)}(\lambda) = 0, D^{(k)}(\lambda) \neq 0$$

(5) formulani $y_j = t^j e^{\lambda t}$ ($0 \leq j \leq k-1$) funksiyalarga tadbiq qilib,

$$L[y_{j+1}] = L[e^{\lambda t} t^j] = e^{\lambda t} \left(\frac{D^{(k)}(\lambda)}{k!} \frac{d^k}{dt^k}(t^j) + \dots + \frac{D^{(n)}(\lambda)}{n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^j) \right) = 0$$

chunki $l > j$ bo'lganda $\frac{d^l}{dt^l}(t^j) = 0$. Lemma isbotlandi.

3-lemma. $r = 0, 1, 2, \dots, k-1$ uchun $L[t^r e^{\lambda t}] \Big|_{t=0} = 0$ bo'lsin. U holda λ soni xarakteristik ko'phadning karraligi k dan kichik bo'lmagan ildizi bo'ladi.

Isboti. 1-lemmaga ko'ra

$$L[t^r e^{\lambda t}] \Big|_{t=0} = e^{\lambda t} \left(D(\lambda) t^r + \frac{D'(\lambda)}{1!} \frac{d(t^r)}{dt} + \dots + \frac{D^{(r)}(\lambda)}{r!} \frac{d^r(t^r)}{dt^r} \right) \Big|_{t=0}$$

chunki $k > r$ bo'lganda $\frac{d^k}{dt^k}(t^r) = 0$. Bundan tashqari $k < r$ bo'lganda

$\frac{d^k}{dt^k}(t^r) \Big|_{t=0} = 0$. Shuning uchun

$$L[t^r e^{\lambda t}] \Big|_{t=0} = e^{\lambda t} \frac{D^{(r)}(\lambda)}{r!} r(r-1)\dots 1 \Big|_{t=0} = D^{(r)} = 0 \quad (r = 0, 1, \dots, k-1)$$

Demak, λ xarakteristik ko'phadning k dan kichik bo'lmagan ildizi bo'ladi.

Lemma isbotlandi.

xarakteristik ko'phad mos keladi.

$j = 1, 2, \dots, k_1$ bo'lsin, u holda (8) munosabatni

$$L[t^r e^{\lambda_1 t}] \Big|_{t=0} = 0 \quad (j=1, \dots, k_1)$$

yoki

$$L[t^r e^{\lambda_1 t}] \Big|_{t=0} = 0 \quad (r = 0, 1, \dots, k_1 - 1; r = j - 1)$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin.

3-lemmaga ko'ra λ_1 soni $D_1(p)$ xarakteristik ko'phadning karraligi k_1 dan kichik bo'lmagan ildizi bo'ladi. Xuddi shu kabi $j = k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2$ ko'rinishda tanlab λ_2 soni $D_1(p)$ xarakteristik ko'phadning karraligi k_2 dan kichik bo'lmagan ildizi bo'lishini va hakoza λ_m soni $D_1(p)$ xarakteristik ko'phadning karraligi k_m dan kichik bo'lmagan ildizi bo'lishini isbotlashimiz mumkin. Shuning uchun har bir ildizni karraligi bilan hisoblab $D_1(p)$ xarakteristik ko'phadning ildizlari soni $k_1 + \dots + k_m = n$ ga teng bo'ladi degan xulosaga kelamiz. Ammo bu mumkin emas, chunki $D_1(p)$ xarakteristik ko'phadning darajasi $n - 1$ dan ortmaydi. Hosil bo'lgan ziddiyat lemmani isbotlaydi.

O'zgarmasni variatsiyalash usuli. Bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalarning xususiy yechimlarini topish ko'p hollarda o'zgarmasni variatsiyalash usuli bilan amalga oshiriladi. Biz ikkinchi tartibli tenglama va matritsa ko'rinishida berilgan tenglamalar sistemasi uchun ko'rib o'tamiz.

Dastlab ikkinchi tartibli

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \quad (1)$$

tenglamani qaraymiz. Aytaylik $y_1(x), y_2(x)$ funksiyalar (1) tenglamaga mos bir jinsli qismi bo'lgan

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (2)$$

tenglamaning yechimlari bo'lsin. (1) tenglamaning xususiy yechimini

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \quad (3)$$

ko'rinishda izlaymiz, bu yerda $C_1(x), C_2(x)$ noma'lum funksiyalar.

$$y'(x) = [C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x)] + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$$

$C_1(x), C_2(x)$ noma'lum funksiyalarni shunday tanlaymizki kvadrat qavs ichida joylashgan funksiya nolga teng bo'lsin, ya'ni

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \quad (4)$$

bo'lsin. U holda

$$y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) \quad (5)$$

(3) va (5) ni (1) tenglamaga qo'yilsa va guruhlanga

$$C_1(x)[y_1''(x) + a(x)y_1'(x) + b(x)y_1(x)] + C_2(x)[y_2''(x) + a(x)y_2'(x) + b(x)y_2(x)] + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x)$$

tenglikni va bundan $y_1(x), y_2(x)$ funksiyalar (2) tenglamaning yechimi ekanligidan

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \quad (6)$$

tenglikni hosil qilamiz. Natijada $C_1(x), C_2(x)$ noma'lum funksiyalarni aniqlash uchun (4) va (6) dan iborat bo'lgan

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases} \quad (7)$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. (7) sistemani Kramer qoidasi bo'yicha

$$C_1'(x) = -\frac{f(x)y_2(x)}{\omega(x)}, \quad C_2'(x) = \frac{f(x)y_1(x)}{\omega(x)} \quad (8)$$

munosabatlarni hosil qilamiz, bu yerda

$$\omega(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \quad (9)$$

(8) tengliklarni $[x_0, x]$ kesmada integrallash va hosil bo'lgan $C_1(x)$, $C_2(x)$ noma'lum funksiyalarning ifodalarini (3) tenglikka qo'yib (1) tenglamaning

$$y(x) = \int_{x_0}^x \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} \cdot \frac{f(t)}{\omega(t)} dt \quad (10)$$

xususiy yechimini hosil qilamiz.

Misol. $y'' + \mu^2 y = g(x)$ tenglamaning $y(0, \mu) = 0$, $y'(0, \mu) = \mu$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topamiz.

Yechilishi. Berilgan tenglamaning mos bir jinsli qismi: $y'' + \mu^2 y = 0$ bo'lib, uning umumiy yechimi $y_1(x) = \cos \mu x$, $y_2(x) = \sin \mu x$ ildizlarga va bizda $f(x) = g(x)$ bo'lgani uchun (10) formulaga ko'ra berilgan tenglamaning xususiy yechimi

$$y(x) = \int_0^x \begin{vmatrix} \cos \mu t & \sin \mu t \\ \cos \mu x & \sin \mu x \end{vmatrix} \cdot \frac{g(t)}{\omega(t)} dt = \frac{1}{\mu} \int_0^x \sin \mu(x-t) g(t) dt$$

ko'rinishga ega bo'ladi, chunki

$$\omega = \begin{vmatrix} \cos \mu x & \sin \mu x \\ -\mu \sin \mu x & \mu \cos \mu x \end{vmatrix} = \mu$$

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi mos bir jinsli qismining umumiy yechimi bilan bu tenglama xususiy yechimlari yig'indisiga teng bo'lgani uchun, u

$$y(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x + \frac{1}{\mu} \int_0^x \sin \mu(x-t) g(t) dt$$

ko'rinishga ega. $y(0, \mu) = 0$, $y'(0, \mu) = \mu$ boshlang'ich shartlarga ko'ra $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ ekanligini aniqlaymiz.

Javob. $y(x) = \sin \mu x + \frac{1}{\mu} \int_0^x \sin \mu(x-t) g(t) dt$

Endi sistema uchun umumiyroq bo'lgan holni qaraymiz:

$$X' = A(t)X + f(t), \quad X(0) = x_0 \quad (11)$$

sistemaning umumiy yechimini topamiz. (11) sistema yechimini $X(t) = \Phi(t)c(t)$ ko'rinishda izlaymiz, bu yerda $\Phi(t)$ bilan $X' = A(t)X$ sistemaning $\Phi(0) = E$ shartni qanoatlantiruvchi fundamental matritsasi belgilangan. U holda

$$X'(t) = \Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t)$$

bo'lib, (1) ga ko'ra

$$\Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t) = A(t)X + f(t),$$

yoki

$$c'(t) = \Phi^{-1}(t)f(t)$$

Bundan

$$c(t) = \int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

bo'lgani uchun berilgan sistemaning xususiy yechimi

$$x(t) = \Phi(t)c(t) = \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

va umumiy yechimi esa

$$X(t) = \Phi(t)c + \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

ko'rinishga ega bo'ladi. $X(0) = x_0$, $\Phi(0) = E$ boshlang'ich shartga ko'ra izlanayotgan yechim

$$X(t) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

dan iborat.

Eyler va Lagranj tenglamalari. Differensial tenglamalar orasida oddiy almashtirishlar vositasida o'zgarmas ko'effitsiyentli tenglamalarga o'tuvchi o'zgaruvchi ko'effitsiyentli tenglamalar ham uchraydi.

$$a_0 t^n \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 t^{n-1} \frac{dy^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} t \frac{dy}{dt} + a_n y = 0 \quad (12)$$

ko'rinishdagi tenglamaga Eyler tenglamasi deyiladi, bu yerda $a_0, a_1, \dots, a_n$ o'zgarmas sonlar. Agar (12) tenglamada t ni e^x bilan almashtirsak tenglamaning ko'rinishi o'zgarmaydi. Demak, (12) tenglamada x erkli o'zgaruvchini

$$x = \ln t, \quad t = e^x \quad (13)$$

almashtirish bilan kiritsak, u holda x ni $x + C$ bilan almashtirishda tenglama o'zgarmaydi, ya'ni hosil bo'lgan yangi tenglama x ni oshkor ko'rinishda saqlamaydi. Erkli o'zgaruvchini almashtirishda tenglama chiziqli tenglamaga o'tmaganligi uchun, biz o'zgarmas ko'effitsiyentli chiziqli tenglamaga ega bo'lamiz.

Bu tasdiqni hisoblashlar vositasida bevosita tekshirishimiz mumkin. Biz y funksiyaning t bo'yicha hosilalarini (13) formula bo'yicha x bo'yicha hosilalari orqali ketma ket ifodalaymiz:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = e^{-x} \frac{dy}{dx};$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = e^{-x} \frac{d}{dx} \left(e^{-x} \frac{dy}{dx} \right) = e^{-2x} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \right);$$

$$\frac{d^3 y}{dt^3} = e^{-x} \frac{d}{dx} \left[e^{-2x} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \right) \right] = e^{-3x} \left(\frac{d^3 y}{dx^3} - 3x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} \right);$$

Biz ko'ramizki, t bo'yicha olingan birinchi, ikkinchi va uchinchi tartibli hosilalarni qatnashgan ifodalar mos ravishda e^{-x} , e^{-2x} va e^{-3x} ko'paytuvchilarga ega. Faraz qilaylik t bo'yicha olingan k – tartibli hosila

$$\frac{d^k y}{dt^k} = e^{-kx} \left(\frac{d^k y}{dx^k} + \alpha_1 \frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}} + \dots + \alpha_{k-1} \frac{dy}{dx} \right)$$

ko'rinishga ega bo'lsin, bu yerda $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ – o'zgarmas sonlar. U holda t bo'yicha olingan $(k+1)$ – tartibli hosila

$$\frac{d^{k+1} y}{dt^{k+1}} = e^{-x} \frac{d}{dx} \left(\frac{d^k y}{dt^k} \right) = e^{-(k+1)x} \left(\frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} + (\alpha_1 - k) \frac{d^k y}{dx^k} + \dots - k \alpha_{k-1} \frac{dy}{dx} \right)$$

ko'rinishga ega bo'ladi va yana qavs oldida $e^{-(k+1)x}$ ko'paytuvchi, qavslar ichida esa x bo'yicha birinchi tartibli hosiladan boshlab $(k+1)$ – tartibli hosilagacha ifodalarning chiziqli kombinatsiyalari joylashgan. Demak ko'rsatilgan xossa ixtiyoriy k natural soni uchun isbotlandi. Biz hisoblangan hosilalarni (1) tenglamaga qo'ysak, har bir k uchun $\frac{d^k y}{dt^k}$ ifodani $a_k t^k = a_k e^{kx}$ ko'paytirishlozim bo'ladi va shu bilan birga x ni o'zida saqllovchi ko'rsatkichli ko'paytuvchilar qisqaradi hamda o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli tenglama hosil bo'ladi.

1-misol. Ushbu

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3t \frac{dy}{dt} + y = 0$$

tenglamani qaraymiz. $t = e^x$ almashtirish bizga

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

tenglamani beradi. Bu tenglamaning xarakteristik tenglamasi: $k^2 + 2k + 1 = 0$ bir xil

$k_1 = k_2 = -1$ ildizga ega bo'lgani uchun x o'zgaruvchi bo'yicha umumiy yechim

$$y = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$$

ko'rinishga ega. Kiritilgan almashtirishga ko'ra t o'zgaruvchi bo'yicha umumiy yechim

$$y = \frac{1}{t}(C_1 + C_2 \ln t)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Biz almashtirilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasi karrali ildizlarga ega bo'lmagan holda $e^{kx} = (e^x)^k$ xususiy yechimga ega bo'ladi va demak dastlabki tenglamada bu yechim t^k ko'rinishga ega bo'ladi. Shuning uchun bevosita xususiy yechimni bu ko'rinishda izlash va uni (12) tenglamaga qo'yish mumkin. Agar

$$t^m \frac{d^m (t^k)}{dt^m} = k(k-1) \dots (k-m+1) t^k, \quad m \leq k$$

ekanligini e'tiborga olib bu ko'rinishdagi ifodalar (12) tenglamaga qo'yilsa va hosil bo'lgan tenglik x^k ga qisqartirilsa k ni aniqlash uchun n – darajali

$$k(k-1) \dots (k-n+1) + a_1 k(k-1) \dots (k-n+2) + \dots +$$

$$+ a_{n-2} k(k-1) + a_{n-1} k + a_n = 0 \quad (14)$$

algebraik tenglamani hosil qilamiz. Avvalgi mulohazalardan (14) tenglama x o'zgaruvchi bo'yicha topilgan xarakteristik tenglama bilan ustma ust tushadi. (14) tenglamaning har bir k oddiy ildiziga (12) tenglamaning t^k xususiy yechimi, (14) tenglamaning ikki karrali k ildiziga (1) tenglamaning t^k va $t^k \ln t$ xususiy yechimlari mos keladi va hakoza. $k = \alpha \pm i\beta$ qo'shma kompleks ildiziga $t^{i\beta} = e^{i\beta \ln t}$ tenglikka binoan (12) tenglamaning ikkita $y = t^\alpha \cos(\beta \ln t)$ va $y = t^\alpha \sin(\beta \ln t)$ xususiy yechimlari mos keladi.

2-misol. Ushbu

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3t \frac{dy}{dt} + 5y = 0$$

tenglamani qaraymiz. Bu tenglamaning xususiy yechimini $y = t^k$ ko'rinishda izlaymiz va berilgan tenglamadan

$$k(k-1) + 3k + 5 = 0$$

yoki

$$k^2 + 2k + 5 = 0$$

xarakteristik tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama $k = -1 \pm 2i$ qo'shma kompleks ildizlarga ega bo'lgani uchun berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = \frac{1}{t} [C_1 \cos(2 \ln t) + C_2 \sin(2 \ln t)]$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Differensial tenglamalar orasida oddiy almashtirishlar vositasida o'zgarvas koeffisiyentli tenglamalarga o'tuvchi o'zgaruvchi koeffisiyentli tenglamalar orasida Lagranj tenglamasi deb nomlangan

$$(at+b)^n \frac{d^n y}{dt^n} + a_1(at+b)^{n-1} \frac{dy^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(at+b) \frac{dy}{dt} + a_n y = 0 \quad (15)$$

ko'rinishdagi tenglamalar ham uchraydi bu yerda $a_0, a_1, \dots, a_n$ o'zgarmas sonlar.

(15) Lagrang tenglamasida x erkli o'zgaruvchini

$$x = \ln(at+b), \quad at+b = e^x$$

(16)

tengliklar yordamida almashtirilsa o'zgarmas ko'effitsiyentli chiziqli tenglama hosil bo'ladi.

Bir jinsli bo'lmagan Eyler tenglamasining o'ng tomoni $P(t)$ ko'phadning chekli sondagi arifmetik amallardan tashkil topgan $\sum e^{\alpha t} P(t)$ ifodasidan iborat bo'lsa, u holda almashtirish natijasida hosil bo'lgan o'zgarmas ko'effitsiyentli bir jinsli tenglamaning o'ng tomoni $\sum t^\alpha P(\ln t)$ ko'rinishga o'tsa bunda ham xususiy yechimlarni topish bilan integrallashni amalga oshirilishi mumkinligini eslatamiz.

Endi Eyler va Lagrang tenglamalarini yechishga oid misollardan namunalar keltiramiz.

3-misol. Quyidagi tenglamani yeching.

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2} R = 0$$

Yechilishi. Berilgan tenglamaning xususiy yechimini $R = r^k$ ko'rinishda izlaymiz. Natijada

$$k^2 + k - n(n+1) = 0,$$

xarakteristik tenglama tenglamani hosil qilamiz. Uning ildizlari

$$k_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4n(n+1)+1}}{2}, \quad k_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4n(n+1)+1}}{2}$$

bo'lgani uchun tenglamaning umumiy yechimi

$$R = \frac{1}{\sqrt{r}} [C_1 r^\alpha + C_2 r^{-\alpha}] , \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{4n(n+1)+1}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

1.2-§. Involutsiya va uning asosiy xossalari

Biz bu bo'limda involutsiya tushunchasi va uning ba'zi xossalarini keltiramiz.

1-ta'rif. Agar G sohada aniqlangan $f(t)$ funksiya uchun

$$f(f(t))=t, \text{ ya'ni } f(t)=f^{-1}(t) \quad (1)$$

tenglik bajarilsa, u holda $f(t)$ funksiyaga involutsiya deyiladi.

Boshqacha aytilganda funksiya o'ziga teskari bo'lgan funksiya bilan ustma-ust tushsa bunday funksiyaga involutsiya deyiladi.

Involutsiya uchun eng sodda misollar sifatida

$$f(t)=-t, f(t)=c-t, f(t)=\frac{1}{t} (t \neq 0), f(t)=\sqrt[3]{1-t^3}, f(t)=\frac{at+b}{ct-a} \left(t \neq \frac{a}{c} \right)$$

funksiyalarni keltirishimiz mumkin.

Shu bilan birga bir qator murakkabroq ko'rinishga ega bo'lgan involutsiyaga oid quyidagi misollarni keltiramiz.

1-misol ([]). Ixtiyoriy $a > 0$ soni uchun $R = (-\infty, +\infty)$ son to'g'ri chizig'ida

$$f(t) = \begin{cases} -at, & \text{agart} \geq 0 \text{ bo'lsa,} \\ -\frac{t}{a}, & \text{agart} \leq 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

2-misol ([]). Ixtiyoriy $k > 0$ soni uchun $R_+ = (0, +\infty)$ son to'g'ri chizig'ida

$$f(t) = \begin{cases} t^{-k}, & \text{agar } 0 < t \leq 1 \text{ bo'lsa,} \\ t^{\frac{1}{k}}, & \text{agart} \geq 1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Biz $f: G \rightarrow G$ funksiyalar uchun quyidagi funksiyalar iteratsiyasini tuzamiz:

$$f_1(t) = f(t), f_2(t) = f(f_1(t)), \dots, f_m(t) = f(f_{m-1}(t)), \dots$$

Agar tuzilgan iteratsiyada

$$f_i(t) = t, i = 1, 2, \dots, m; f_i(t) \neq t, i = m+1, m+2, \dots$$

munosabat bajarilsa $f(t)$ funksiyaga m - tartibli involyutsiya deyiladi.

Bevosita hisoblashlar bilan quyidagi lemmalarni isbotlashimiz mumkin:

1-lemma. Agar $ab + c^2 = 0$ bo'lsa, u holda $f(t) = \frac{a}{bt+c}$ kasr chiziqli funksiya uchinchi tartibli involyutsiya tashkil qiladi.

2-lemma. Agar $a = d, 3a^2 + bc = 0$ tengliklar bajarilsa, u holda $f(t) = \frac{at+b}{ct+d}$ kasr chiziqli funksiya uchinchi tartibli involyutsiya tashkil qiladi.

Masalan,

$$f(t) = \frac{1}{1-t}, f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4t}, f(t) = \frac{t+3}{1-t}, f(t) = \frac{2t-3}{4t+2}, f(t) = \frac{1}{3-9t}$$

funksiyalar uchinchi tartibli involyutsiyalar tashkil qilishini tekshirish qiyin emas.

3-misol (I I). $\varepsilon = \exp \frac{2\pi i}{n}$ soni uchun $f(z) = \varepsilon z$ funksiya kompleks sohada n - tartibli involyutsiya tashkil qiladi.

4-misol (I I). $C = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup \dots \cup (m-1, m) \cup (m, +\infty)$ to'plamda

$$f(t) = \begin{cases} t, \text{ agar } t \in (-\infty, 0) \cup (m, +\infty) \text{ bo'lsa,} \\ t+1, \text{ agar } t \in (0, 1) \cup (1, 2) \cup \dots \cup (m-2, m-1) \text{ bo'lsa,} \\ t-(m-1), \text{ agar } t \in (m-1, m) \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya m - tartibli involyutsiya tashkil qiladi.

2-ta'rif. Agar yaqiqiy t o'zgaruvchining yaqiqiy $f(t) \neq t$ funksiyasi barcha t lar uchun (I) tenglikni qanoatlantirsa, u holda bu funksiyaga qat'iy involyutsiya deyiladi.

Barcha qat'iy involyutsiyalar to'plamini I bilan belgilaymiz. Har bir $f \in I$ ning grafigi (t, x) tekislikda $x=t$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik. Teskarisi, agar Γ bilan (t, x) tekislikning $x=t$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'lgan,

har bir t absissali nuqtaga yagona x ordinatani mos qo'yuvchi barcha oddiy nuqtalar to'plamini belgilaymiz. U holda Γ to'plam I to'plam funksiyalaridan biriga teng bo'lishi [] da ko'rsatilgan.

Aytaylik $g(t, x)$ funksiya haqiqiy sonlarning barcha tartiblangan juftliklar to'plamida aniqlangan bo'lsin va $g(t, x) = 0$ tenglikni qanoatlantirsin. U holda $g(x, t) = 0$ bo'ladi. Xususiyl holda bu tenglik simmetrik $g(t, x) = g(x, t)$ tenglikni qanoatlantiruvchi $g(t, x)$ funksiya uchun bajarilishi ayon.

Agar har bir t uchun $g(t, x) = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi haqiqiy oddiy $x = f(t)$ nuqta mos kelsa, u holda $f \in I$ bo'ladi. Masalan ,

$$g(t, x) = t + x - c$$

bo'lsa, u holda

$$f(t) = c - t$$

bo'ladi.

Agar biz

$$g(t, x) = t^2 + x^2 - c$$

funksiyani olsak, u holda

$$f(t) = \sqrt{c - t^2}$$

bo'ladi.

Har bir uzluksiz $f \in I$ funksiya qagt'iy kamayuvchi bolishi [] da ko'rsatilgan.

Demak,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\infty \quad (2)$$

Involutsiya ko'plab xossalarga ega. Biz quyida involutsiyaning bir qator sodda xossalarini bayon qilamiz.

1-xossa. Har bir $f(t)$ involutsia G to'plada bir qiymatlidir.

Isboti. Haqiqatdan ham, $t_1, t_2 \in G$ va $t_1 \neq t_2$ bo'lsin. Agar $f(t_1) = f(t_2)$ deb faraz qilsak, u holda

$$f(f(t_1)) = f(f(t_2))$$

Involutsiyaning (1) ta'rifiga ko'ra bu tenglik $t_1 = t_2$ tenglikni beradi. Bu esa yuqoridagi farazimizga zid.

2-xossa. Agar $f(t)$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ son to'g'ri chizig'ida qo'zg'almas p nuqtaga ega bo'lgan involutsiya bo'lsa, u holda har bir

$$g(t) = f(t + p) - p$$

funksiya qo'zgalmas $t = 0$ nuqtaga ega bo'lgan involutsiya bo'ladi.

Teskarisi agar

$$f(t) = g(t - p) + p$$

funksiya qo'zg'almas p nuqtaga ega bo'lgan involutsiya bo'lsa, u holda $t = 0$ nuqta $g(t)$ funksiyaning qo'zg'almas nuqtasi bo'ladi.

Isboti. Haqiqatdan ham, $f(t)$ funksiya $R = (-\infty, +\infty)$ son to'g'ri chizig'ida qo'zg'almas p nuqtaga ega bo'lgan involutsiya bo'lsa, u holda $f(f(t)) = t$ va $f(p) = p$ bo'lgani uchun yar bir t uchun

$$g(g(t)) = g(f(t + p) - p) = f(f(t + p) - p + p) - p = f(f(t + p)) - p = t + p - p = t$$

Bundan tashqari $g(0) = f(p) - p = p - p = 0$.

3-xossa. Agar $f(t)$ funksiya $R = (-\infty, +\infty)$ son to'g'ri chizig'ida uzluksiz involutsiya bo'lsa, u holda $f(t)$ kamayuvchi funksiya bo'ladi.

Isboti. $f(t)$ bir qiymatli funksiya bo'lgani uchun qat'iy monotondir. $f(t)$ qat'iy involutsiya bo'lgani uchun $f(t) \neq 0$, va shuning uchun $f(t_0) \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi $t = t_0$ nuqta mavjud. Teskaridan faraz qilamiz, ya'ni $f(t)$ o'suvchi funksiya bo'lsin. U holda

agar $f(t_0) > t_0$ bo'lsa, u holda $f(f(t_0)) > f(t_0)$, ya'ni $t_0 > f(t_0)$ ziddiyat hosil bo'ladi, agar $f(t_0) < t_0$ bo'lsa, u holda $f(f(t_0)) < f(t_0)$, ya'ni $t_0 < f(t_0)$ ziddiyat hosil bo'ladi.

Demak farazimiz xato, $f(t)$ kamayuvchi funksiya ekan.

4-xossa. Agar $f(t)$ funksiya $R = (-\infty, +\infty)$ son to'g'ri chizig'ida uzluksiz involyutsiya bo'lsa, u holda $f(t)$ funksiya yagona qo'zg'almas nuqtaga ega.

Isboti. $g(t) = f(t) - t$ funksiyaning qaraymiz. Bu funksiya $R = (-\infty, +\infty)$ son to'g'ri chizig'ida uzluksiz va kamayuvchi funksiyadir. Natijada

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = -\infty$$

Demak, shunday $p \in (-\infty, +\infty)$ nuqta mavjudki, bu nuqtada $g(p) = f(p) - p = 0$, ya'ni $f(p) = p$. Bundan $t = p$ nuqta $f(t)$ funksiyaning qo'zg'almas nuqtasidir.

5-xossa. Agar $f(t)$ involyutsiya $(-\infty, +\infty)$ son to'g'ri chizig'ida uzluksiz toq funksiya bo'lsa, u holda $f(t) = -t$.

Isboti. Faraz qilaylik $f(t)$ toq funksiya bo'lsin. U holda $f(-t) = -f(t)$ va bu tenglikdan $t = 0$ bo'lganda $f(0) = 0$ tenglikni hosil qilamiz. Demak, $t = 0$ nuqta $f(t)$ funksiyaning yagona qo'zg'almas nuqtasi ekan. Faraz qilaylik $f(t) \neq -t$ bo'lsin. Agar $f(t) > -t$ bo'lsa $f(t)$ funksiya $R = (-\infty, +\infty)$ son to'g'ri chizig'ida uzluksiz va kamayuvchi funksiya bo'lgani uchun $f(f(t)) < f(-t)$. Shuning uchun $t < -f(t)$, yoki $f(t) < -t$. Bu esa $f(t) > -t$ bo'lsin deb qabul qilgan farazimizga zid.

Xuddi shuningdek agar $f(t) < -t$ bo'lsa $f(t)$ uzluksiz kamayuvchi funksiya bo'lgani uchun $f(f(t)) > f(-t)$. Bundan $t > -f(t)$, yoki $f(t) > -t$. Bu esa $f(t) < -t$ bo'lsin deb qabul qilgan farazimizga zid. Demak, $f(t) > -t$ va $f(t) < -t$ holatlar o'rinli bo'lmagani uchun faqat bitta $f(t) = -t$ holat o'rinli.

6-xossa. Agar $(-\infty, +\infty)$ son to'g'ri chizig'ida qo'zg'almas p nuqtaga ega bo'lgan har bir $f(t)$ involyutsiya

$$f(t) = f_0(t - p) + p$$

(3) ko'rinishga ega, bunda

$$f_0(t) = \begin{cases} g(t), & \text{agar } t > 0 \text{ bo'lsa,} \\ g^{-1}(t), & \text{agar } t < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Bu yerda $g(t)$ son to'g'ri chizig'ida uzluksiz funksiya bo'lib, $t > 0$ uchun $g(0) = 0, g(t) < 0$ shartlarni qanoatlantiradi va $t > 0$ bo'lganda $g(t)$ kamayuvchi funksiya hamda $g^{-1}(t)$ unga teskari funksiya.

Teskarisi, (3) tenglikni qanoatlantiruvchi har bir uzluksiz $f(t)$ involyutsiya haqiqiy son to'g'ri chizig'ida qo'zg'almas p nuqtaga ega.

Isboti. Agar $f(t)$ qo'zg'almas p nuqtaga ega bo'lgan qat'iy involyutsiya bo'lsa, u holda 2-xossaga ko'ra $f_0(0) = 0$ va $f_0(f_0(t)) = t$ tengliklar bajariladi, shu bilan birga $f_0^{-1}(t) = f_0(t)$ va $f(t)$ funksiya (3) ko'rinishda yozilishi mumkin. Teskarisi, faraz qilaylik $g(t)$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ son to'g'ri chizig'ida uzluksiz, $t > 0$ uchun $g(0) = 0, g(t) < 0$ va $t > 0$ bo'lganda kamayuvchi funksiya bo'lsin. $t \geq 0$ bo'lganda $g(t) \leq 0$ bo'lgani uchun biz $f_0(f_0(t)) = g^{-1}(g(t)) = t$ tenglikga ega bo'lamiz.

$t < 0$ bo'lganda $u = g^{-1}(t)$ belgilash kiritsak, u holda $g(u) = t < 0$ bo'lib, bu $g^{-1}(t) = u > 0$ tenglikni beradi. Demak, $t < 0$ uchun $f_0(f_0(t)) = g^{-1}(g(t)) = t$.

Involyutsiyaning yuqorida keltirilgan xossalardan tashqari ko'plab xossalari bilan [2,5,6] adabiyotlarda keltirilgan.

Kuchli involyutsiyalar to'plamini Y bilan belgilasak, u holda har bir $f(x) \in Y$ funksiyaning grafigi $y = x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik joylasgan bo'ladi. Agar G bilan Oxy tekislikning $y = x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik joylashgan funksiyalar to'plami bo'lib, bunda har bir x element uchun bu to'plamning x absissaga ega bo'lgan yagona nuqtasi mos kelsa, u holda G to'plam Y to'plamdagi birorta $f(x)$ involyutiv akslantirishning grafigi bo'ladi.

Kuchli invoyutiv akslantirish bo'ladigan $f(x)$ akslantirishni quyidagi tartibda hosil qilishimiz mumkin. Faraz qilaylik haqiqiy o'zgaruvchili $g(x, y)$ funksiya barcha tartiblangan (x, y) haqiqiy nuqtalar to'plamida aniqlangan bo'lib, $g(x, y) = 0$ tenglikdan $g(y, x) = 0$ tenglik kelib chiqsin. Ma'lumki, xususiy holda $g(x, y) = g(y, x)$ tenglik bajarilsa, odatda $g(x, y)$ funksiya simmetrik funksiya deyiladi. Agar har bir x uchun $g(x, y) = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi $y = f(x)$ funksiya mos kelsa, u holda $y = f(x) \in Y$ bo'ladi. misollar keltiramiz:

1. $g(x, y) = x + y - C$ bo'lsin. U holda $g(x, y) = 0$ tenglikdan $g(y, x) = 0$ tenglik kelib chiqqanligi uchun $y = f(x) = x - C$ bo'ladi;

2. $g(x, y) = x^3 + y^3 - C$ bo'lsin. U holda $g(x, y) = 0$ tenglikdan $g(y, x) = 0$ tenglik kelib chiqqanligi uchun $y = f(x) = \sqrt[3]{x - C}$ bo'ladi. Yuqorida bayon etilganlardan tashqari $f(x) \in Y, f(x) \equiv x$ munisabatlarni qanoatlantiruvchi involyutiv funksiyalarning to'plamining elementlari monoton kamayuvchi funksiyalardir, ya'ni (2) munosabatlar o'rinli. Endi quyidagi tasdiqlarni keltiramiz.

1-teorema. $f(x) \equiv x$ munosabatni qanoatlantiruvchi har bir uzliksiz $f(x) -$ kuchli involyutsiya yagona qo'zg'almas nuqtaga ega.

Isboti. $\varphi(x) = f(x) - x$ kuchli involyutsiya xossasiga ega bo'lgan uzluksiz monoton funksiya bo'lgani uchun uning grafigi $y = x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik joylashgandir, ya'ni bu funksiya (19) munosabatni qanoatlantiradi. Ma'lumki, (19) tenglik yagona $x = x_0$ nuqta uchun o'rinli bo'lgani uchun $f(x_0) - x_0 = 0$, ya'ni $f(x_0) = x_0$. Teorema isbotlandi.

Demak, $f(x) -$ kuchli involyutsiya bo'lsa, u holda u yagona qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lishini ko'rib o'tdik. Endi involyutsiyaning turlarini ko'rib chiqamiz. Buning uchun $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ kasr chiziqli almashtirishni qaraymiz.

Kasr chiziqli almashtirish proyektiv tekislikning har bir M nuqtasini uning M' nuqtasiga o'tkazsin, ya'ni $M(x_0)$ va $M'(x'_0)$ nuqtalari uchun

$$f(M) = M', f(M') = M$$

tengliklar bajarilsin va shu bilan birgalikda $x_0 \neq x'_0$ bo'lsin. Aytilganlarga ko'ra koordinatalar bo'yicha

$$x'_0 = \frac{\alpha x_0 + \beta}{\gamma x_0 + \delta}, \quad x_0 = \frac{\alpha x'_0 + \beta}{\gamma x'_0 + \delta}$$

tengliklarni yozamiz. O'z navbatida bu tengliklardan

$$\begin{cases} \gamma x_0 x'_0 + \delta x'_0 - \alpha x_0 - \beta = 0, \\ \gamma x_0 x'_0 + \delta x_0 - \alpha x'_0 - \beta = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Sistemaning birinchi tenglamasidan ikkinchi tenglamasini hadlab ayirib

$$\delta(x'_0 - x_0) + \alpha(x'_0 - x_0) = 0, \quad \text{yoki} \quad (\delta + \alpha)(x'_0 - x_0) = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Ammo $x_0 \neq x'_0$ bo'lgani uchun $\delta = -\alpha$ bo'ladi.

Demak, $f(x)$ kuchli involyutiv akslantirish bo'lganligi uchun, u

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha}$$

ko'rinishda bo'lishi lozim. Endi bu invoyutsiyaning qo'zg'almas nuqtalarini topamiz.

$f(x) = x$ tenglik bajarilishi uchun

$$\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha} = x,$$

ya'ni

$$\gamma x^2 - 2\alpha x - \beta = 0$$

tenglik o'rinli bo'lishi kerak.

$$\Delta = \alpha^2 + \beta\gamma$$

belgilash kiritamiz. U holda quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) agar $\Delta > 0$ bo'lsa, u holda qaralayotgan involyutsiya ikkita haqiqiy qo'zg'almas nuqtalarga ega bo'ladi va bu involyutsiya giperbolik involyutsiya deyiladi;

b) agar $\Delta = 0$ bo'lsa, u holda qaralayotgan involyutsiya yagona haqiqiy qo'zg'almas nuqtaga ega bo'ladi va bu involyutsiya parabolik involyutsiya deyiladi;

c) agar $\Delta < 0$ bo'lsa, u holda qaralayotgan involyutsiya haqiqiy qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lmaydi va bu involyutsiya elliptik involyutsiya deyiladi.

Bu mulohazalardan f – kuchli involyutsiya bo'lishi uchun u parabolik involyutsiya bo'lishi lozim. Demak, quyidagi tasdiq o'rinli.

2-teorema. Agar

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha}$$

akslantirishda $\alpha^2 + \beta\gamma = 0$ bo'lsa, u holda bu akslantirish kuchli involyutsiya bo'ladi.

I bob bo'yicha xulosa:

Bubobda involyutsiya tushunchasini bayon etish uchun o'zgarmas koeffisienli chiziqli differensial tenglamalar, o'zgarmasni varaiatsiyalash usuli, Eyler va Lagranj tenglamalari va unga doir misollar yechilishi bilan keltirilgan. Shu bilan birga involyutsiya tushunchasiga ta'rif berilgan va involyutsiyaga oid bir nechta

teoremlar isbotlari bilan keltirilgan. Kuchli involyutsiya bo'lish shartlari, kasr chiziqli involyutsiya va uning turlari haqida bayon qilingan.

II BOB INVOLYUTSIYALI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

Kechikkan argumentli oddiy differensial tenglamalarning umumiy xossalarini o'rganish bilan bir qatorda tekshirishning sodda ko'rinishdagi usullarini qo'llash imkoniyatini beruvchi tenglamalarning ayrim sinflaridan biri involyutsiya qatnashgan differensial tenglamalar sinfidir. Invol'yutsiali oddiy differensial tenglamalarni yechishga bag'ishlangan dastlabki tadqiqotlar L.Zilberstein [1], I.Ja. Viner [2], va J.Wiener [3] maqolalaridir.

2.1-§. Invol'yutsiyali oddiy differensial tenglamalar

Biz bu bo'limda involyutsiya qatnashgan oddiy differensial tenglamalarning ayrim ko'rinishlari va ularni yechish usullarini bayon qilamiz.

1940 yilda L.Zilberstein [1]

$$x'(t) = x\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \in R^+ \quad (1)$$

tenglamaning umumiy yechimini topish masalasini tadqiq. Bu tenglamani yechish uchun [1] da (1) tenglamaning umumiy yechimini

$$x(t) = t^k + mt^n \quad (2)$$

ko'rinishda izlash bilan natijaga erishilgan bo'lsa, [2] maqolada (1) tenglamani bevosita differensiallash yordamida Eylerning oddiy differensial tenglamasiga keltirish bilan umumiy yechim hosil qilingan. Biz bu usullada erishilgan natijalarni to'la keltiramiz.

1-usul (L.Zilberstein [1]). (1) tenglamaning yechimini (2) ko'rinishda izlaymiz, bu yerda k, m va n ixtiyoriy o'zgarmas sonlar. (2) ga ko'ra (1) tenglama

$$t^k (kt^{n+k-1} - m) + t^n (mnt^{n+k-1} - 1) = 0$$

ko'rinishni oladi. Bundan

$$n + k - 1 = 0, \quad k = m = \frac{1}{n},$$

yoki

$$n^2 - n + 1 = 0$$

kvadrat tenglama ko'rinishiga keladi. Kvadrat tenglamaning ildizlari

$$n_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad n_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

sonlar bo'lgani uchun

$$k_1 = m_1 = \frac{1}{n_1} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad k_2 = m_2 = \frac{1}{n_2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Shuning uchun (2) ga ko'ra (1) tenglamaning yechimlarini

$$x_1(t) = t^{k_1} + m_1 t^{n_1} = \sqrt{t} \cdot \left[t^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) t^{i\frac{\sqrt{3}}{2}} \right],$$

$$x_2(t) = t^{k_2} + m_2 t^{n_2} = \sqrt{t} \cdot \left[t^{i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) t^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}} \right]$$

ko'rinishda ifodalashimiz mumkin.

$$t^{i\frac{\sqrt{3}}{2}} = e^{\ln t^{i\frac{\sqrt{3}}{2}}} = e^{i\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t} = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) + i \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) \text{ va } \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}$$

munosabatlarga ko'ra

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \\ &= \sqrt{t} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) - i \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) + \left(\cos\frac{\pi}{3} - i \sin\frac{\pi}{3} \right) \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) + i \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) \right) \right] = \\ &= \sqrt{t} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) - i \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t - \frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t - \frac{\pi}{3}\right) \right] = \\ &= 2\sqrt{t} \left(\cos\frac{\pi}{6} - i \sin\frac{\pi}{6} \right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t - \frac{\pi}{6}\right) = C\sqrt{t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

Demak, (1) tenglamaning umumiy yechimi

$$x(t) = C\sqrt{t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t - \frac{\pi}{6}\right) \quad (3)$$

ko'rinishga ega.

Endi (1) tenglamani yechish uchun I.Ja.Viner [2] tomonidan taklif etilgan

usulni keltiramiz.

2-usul (I.Ja.Viner [2]). (1) tenglamada argumentni $t \rightarrow \frac{1}{t}$ almashtirish bilan

$$x'\left(\frac{1}{t}\right) = x(t), \quad t \in R^+ \quad (4)$$

tenglikni va (1) tenglamani differensiallash bilan (4) tenglikni e'tiborga olgan holda

$$t^2 x''(t) + x(t) = 0 \quad (5)$$

Eyler tenglamasini hosil qilamiz. (5) tenglamaga mos xarakteristik

$\lambda(\lambda - 1) + 1 = 0$ tenglamaning ildizlari $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$ bo'lgani uchun (5) ning

umumiy yechimi

$$x(t) = t^{\frac{1}{2}} \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) \right] \quad (6)$$

ko'rinishga ega. Bu ifodani (1) tenglamaga qo'yib o'zgarmas sonlar orasidagi

$C_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} C_1$ tenglikni hosil qilamiz. Shuning uchun (1) tenglamaning umumiy

yechimini

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 t^{\frac{1}{2}} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) \right] = \\ &= \frac{2C_1}{\sqrt{3}} \sqrt{t} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) \right] = \\ &= C \sqrt{t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t + \frac{\pi}{3}\right) = C \sqrt{t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

ko'rinishda ifodalaymiz. Demak,

$$x(t) = C \sqrt{t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t - \frac{\pi}{6}\right)$$

Endi quyidagi teoremani keltiramiz.

Teorema(Wiener J. [3]). $n \in R$ soni uchun

$$t^n x'(t) = x\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \in R^+ \quad (7)$$

tenglamani umumiy yechimi

$$x(t) = \begin{cases} ct, & \text{есму } n = -1, \\ ct^{-1}(1 - 2 \ln t), & \text{есму } n = 3, \\ c(t^{\lambda_1} + \lambda_1 t^{\lambda_2}), & \text{есму, } n < -1 \text{ му бо } n > 3, \\ ct^{\frac{1}{2}} \left[\cos(\alpha \ln t) + \sqrt{\frac{n+1}{3-n}} \sin(\alpha \ln t) \right], & \text{есму } -1 < n < 3 \end{cases}$$

ko'rinishga ega, bu yerda $\alpha = \frac{\sqrt{(n+1)(3-n)}}{2}$.

Isboti. (7) tenglamada $t \rightarrow \frac{1}{t}$ almashtirish bajarib

$$x'\left(\frac{1}{t}\right) = t^n x(t), \quad t \in R^+ \quad (8)$$

tenglamani hosil qilamiz. (7) tenglamani differensiallab (8) ga ko'ra bir qator sodda hisoblashlardan so'ng

$$t^2 x''(t) + nx'(t) + x(t) = 0 \quad (9)$$

Eyler tenglamasini hosil qilamiz. Bu tenglama uchun

$$\lambda(\lambda - 1) + n\lambda + 1 = 0 \quad (10)$$

xarakteristik tenglama

$$\lambda_{1,2} = \frac{1-n}{2} \pm i \frac{\sqrt{(n+1)(3-n)}}{2} = \frac{1-n}{2} \pm i\alpha, \quad \alpha = \frac{\sqrt{(n+1)(3-n)}}{2}. \quad (11)$$

Ildizlarga ega. Quyidagi hollarni qaraymiz:

a) $n = -1$ bo'lsin. U holda $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ uchun (9) tenglamaning umumiy yechimi

$$x(t) = t(C_1 + C_2 \ln t)$$

funksiyadan iborat. bu funksiyaning (7) tenglamaga qo'yib $C_2 = 0$ ekanligini

aniqlaymiz. Shuning uchun qaralayotgan holda (8) tenglamaning umumiy yechimi

$$x(t) = ct \quad (12)$$

ko'rinishga ega.

b) Endi $n = 3$ bo'lsin. Bu holda (10) xarakteristik tenglamaning ildizlari

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ bo'lib, (9) tenglamaning umumiy yechimi

$$x(t) = t^{-1}(C_1 - C_2 \ln t)$$

ko'rinishga ega. Bu funksiyani (7) tenglamaga qo'yib $C_2 = 2C_1$ ekanligini

aniqlaymiz. Shuning uchun bu holda (7) tenglamaning umumiy yechimi

$$x(t) = ct^{-1}(1 - 2 \ln t) \quad (13)$$

ko'rinishga ega.

c) Endi $n < -1$ yoki $n > 3$ bo'lsin. U holda (10) xarakteristik tenglamaning λ_1 va λ_2 ildizlari haqiqiy bo'lib (9) tenglamaning umumiy yechimi

$$x(t) = C_1 t^{\lambda_1} + C_2 t^{\lambda_2}$$

ko'rinishga ega. Bu funksiyani (7) tenglamaga qo'yib

$$C_2 = \frac{\lambda_1 t^{\lambda_1} - t^{\lambda_2}}{t^{\lambda_1} - \lambda_2 t^{\lambda_2}} C_1 = \frac{\lambda_1 (t^{\lambda_1} - \lambda_2 t^{\lambda_2})}{t^{\lambda_1} - \lambda_2 t^{\lambda_2}} C_1 = \lambda_1 C_1$$

munosabatni hosil qilamiz. Shuning uchun bu holda (7) tenglamaning umumiy yechimi

$$x(t) = c(t^{\lambda_1} - \lambda_1 t^{\lambda_2}) \quad (14)$$

ko'rinishga ega.

d) Endi $-1 < n < 3$ bo'lsin. Bu (10) xarakteristik tenglamaning λ_1 va λ_2 ildizlari kompleks qo'shma

$$\lambda_{1,2} = \frac{1-n}{2} \pm i \frac{\sqrt{(n+1)(3-n)}}{2} = \frac{1-n}{2} \pm i\alpha, \quad \alpha = \frac{\sqrt{(n+1)(3-n)}}{2}$$

sonlar bo'lgani uchun (9) tenglamaning umumiy yechimi

$$x(t) = t^{\frac{1-n}{2}} [C_1 \cos(\alpha \ln t) + C_2 \sin(\alpha \ln t)]$$

ko'rinishga ega. Bu funksiyani (7) tenglamaga qo'yib C_1, C_2 o'zgarmas sonlar

orasiidagi $C_2 = \sqrt{\frac{n+1}{3-n}} C_1$ munosabatni hosil qilamiz. Shuning uchun (7) tenglamaning umumiy yechimi

$$x(t) = Ct^{\frac{1}{2}} \left[\cos(\alpha \ln t) + \sqrt{\frac{n+1}{3-n}} \sin(\alpha \ln t) \right] \quad (15)$$

ko'rinishga ega bo'lishini aniqlaymiz. Teorema isbotlandi.

e) J.Wienerning (8):

$$t^n f(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$$

tenglamasini quyidagi ko'rinishda umumlashtirilishi bo'lgan

$$t^n f^{(m)}(t) = f^{(m-1)}\left(\frac{1}{t}\right), \quad m \in N, t \in R_+ \quad (14)$$

tenglamani qaraymiz. (14) tenglamani

$$f^{(m)}\left(\frac{1}{t}\right) = t^n f^{(m-1)}(t)$$

tenglikni e'tiborga olgan holda differensiallab, bir qator sodda almashtirishlar bajarib

$$t^n f^{(m+1)}(t) + nt^{n-1} f^{(m)}(t) + t^{n-2} f^{(m-1)}(t) = 0$$

tenglamani va bundan $f^{(m-1)}(t) = g(t)$ belgilash bilan

$$t^2 g''(t) + ntg(t) + g(t) = 0 \quad (15)$$

Eyler tenglamasini hosil qilamiz. Bu esa yuqorida ko'rib o'tilgan tenglama (9) tenglamaning o'zidir. Keyin kiritilgan belgilashimizga ko'ra $f^{(m-1)}(t) = g(t)$ dan izlanayotgan $f(t)$ funksiya topiladi.

Misol. Ushbu

$$y''(t) = y'\left(\frac{1}{t}\right) \quad (16)$$

tenglamaning umumiy yechimini topaylik.

(16) tenglamada $t \rightarrow \frac{1}{t}$ в уравнение (16) получим, что

$$y''\left(\frac{1}{t}\right) = y'(t), \quad t \in R^+ \quad (17)$$

Дифференцируя уравнения (16) с учетом (17) имеем

$$t^2 y'''(t) + y'(t) = 0$$

С умножением на t это уравнение сводится к уравнению Эйлера

$$t^3 y'''(t) + ty'(t) = 0 \quad (18)$$

Характеристическая уравнения (18) $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda = 0$ имеет корни

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

то общее решения (18) можно представить в виде

$$y(t) = C_1 + t^{\frac{3}{2}} \left[C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) + C_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) \right] \quad (19)$$

(16) tenglamaning yechimini (19) ko'rinishda izlaymiz. U holda o'zgaras

sonlar orasidagi $C_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}C_2$ va $C_3 = \sqrt{3}C_2$ munosabatlarni aniqlaymiz.

$C_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}C_2$ bo'lganda (16) tenglamaning umumiy yechimi

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 + C_2 t \sqrt{t} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) \right] = \\ &= C_1 + \frac{2}{\sqrt{3}} C_2 t \sqrt{t} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) = A + B t \sqrt{t} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right), \end{aligned}$$

$C_3 = \sqrt{3}C_2$ bo'lganda esa

$$\begin{aligned}
y(t) &= C_1 + C_2 t \sqrt{t} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) \right] = \\
&= C_1 + 2C_2 t \sqrt{t} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) = C + Dt \sqrt{t} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right)
\end{aligned}$$

Demak, (16) tenglamaning yechimlari

$$y(x) = A + Bt \sqrt{t} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) \quad \text{va} \quad y(x) = C + Dt \sqrt{t} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right)$$

Funksiyalar bo'lishi mumkin, bu yerda A, B, C va D ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

Tekshirish ikkinchi funksiya (16) tenglamani qanoatlantirmasligini ko'rsatadi

Shuning uchun (16) tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = A + Bt \sqrt{t} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right)$$

2.2-§. Involyutsiyali oddiy differensial tenglamalar yechimining

mavjudligi haqidagi asosiy teoremlar

a. Chiziqli bo'lmagan tenglamalar uchun asosiy teoremlar

Ta'rif. Agar $f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t)$ involyutsiyalar bo'lsa, u holda

$$F\left(t, x\left(f_1(t), \dots, x\left(f_k(t), \dots, x^{(n)}\left(f_1(t), \dots, x^{(k)}\left(f_k(t)\right)\right)\right)\right)\right) = 0$$

involyutsiyali differensial tenglama deyiladi.

Biz chiziqli bo'lmagan tenglamalar uchun boshlang'ich shartlar bo'yicha ba'zi teoremlarni keltiramiz.

1- teorema. Agar

$$x'(t) = F(t, x(t), x(f(t))) \tag{1}$$

tenglama quyidagi:

1) $f(t)$ funksiya uzluksiz differensiallanuvchi va qo'zg'almas t_0 nuqtaga ega bo'lgan qat'iy involyutsiya quyidagi:

2) F funksiya argumentlarning butun fazosida aniqlangan va uzluksiz differensiallanuvchi;

3) berilgan tenglama $x(f(t))$ ga nisbatan bir qiymatli

$$x(f(t)) = G(t, x(t), x'(t)) \quad (2)$$

yechimga ega;

shartlarni qanoatlantirsin. U holda

$$x''(t) = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x(t)} x'(t) + \frac{\partial F}{\partial x(f(t))} f'(t) F(f(t), x(f(t)), x(t)) \quad (3)$$

oddiy differensial tenglama (bu yerda $x(f(t))$ (2) ifoda bilan berilgan)

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = F(t_0, x_0, x_0) \quad (3a)$$

boshlang'ich shart bo'yicha (1) tenglamaning

$$x(t_0) = x_0 \quad (4)$$

boshlang'ich shart bo'yicha yechimi bo'ladi.

Isboti. (1) tenglamani differensiallash bilan (9) tenglamani hosil qilamiz.

Haqiqatdan ham

$$x''(t) = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x(t)} x'(t) + \frac{\partial F}{\partial x(f(t))} f'(t) F(f(t), x(f(t)), x(t)) \cdot f'(t)$$

Ammo (1) tenglama va $f(f(t)) = t$ munosabatdan

$$x'(f(t)) = F(f(t), x(f(t)), x(t))$$

tenglik kelib chiqadi. (3a) ikkinchi boshlang'ich sharti (1) tenglamadan (3) ga ko'ra $f(t_0) = t_0$ ekanligini e'tiborga olsak hosil bo'ladi. Tenglama t ni va $x(t)$ o'zida saqlamagan holda involyutsiyaning rolini aniq ko'rish mumkin. Bu holda

$$x'(f(t)) = F(x(t)).$$

2-teorema. [I.Ja Viner]. Aytaylik

$$x'(t) = F(x(f(t))) \quad (5)$$

tenglamada $f(t)$ funksiya uzluksiz differensiallanuvchi qo'zg'almas t_0 nuqtaga ega bo'lgan qat'iy involyutsiya va F funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda uzluksiz differensiallanuvchi qat'iy monoton funksiya bo'lsin.

U holda

$$\begin{aligned}x''(t) &= F'(x(f(t)))F(x(t))f'(t), \\x(f(t)) &= F^{-1}(x'(t))\end{aligned}$$

tenglamaning

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = F(x_0)$$

boshlang'ich shartlar bo'yicha yechimi (5) tenglamaning $x(t_0) = x_0$ boshlang'ich shart bo'yicha yechimidan iborat.

Natija. Agar $f(t) = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t - a}$, $\alpha^2 + \beta\gamma > 0$ ko'rinishdagi involyutsiya bo'lsa, u holda $(-\infty, \alpha/\gamma)$ yoki $(\alpha/\gamma, +\infty)$ oraliqlarning har birida 2- va 3- teoremlar o'z kuchini saqlaydi.

Eslatma. Agar $t_0 > t$ bo'lsa, u holda (1) va (5) tenglamalar **retarded-запаздывающий-kechikkan** argumentli va $t_0 < t$ bo'lsa **advanced-опережающий- oldinga o'tgan** argumentli tenglamalar deyiladi.

[16] maqolada $x(t)$ funksiya uchun

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = x(f(t)) \quad (6)$$

tenglama qaralgan va quyidagi teorema isbotlangan.

3-teorema [16]. Quyidagi shartlar bajarilsin:

1) f funksia ochiq G to'plamni G to'plamga akslantirsin, bu yerda G to'plam haqiqiy sonlar to'plamining qism to'plami;

2) Har bir $t \in G$ va eng kichik m natural soni uchun f funksiyaning

$$f_1(t) = f(t), \dots, f_k(t) = f(f_{k-1}(t)), \dots, f_m(t) = t$$

iteratsiyasi bajarilsin;

3) f funksiya har bir $t \in G$ uchun $m - n$ tartibgacha hosilalarga ega bo'lib, yar

bir $t \in G$ uchun $f'(t) \neq 0$;

4) $F(t, u_1, u_2, \dots, u_{n+1})$ funksiya argumentlari bo'yicha $mn-1$ marta uzluksiz

differentiallanuvchi va $u_r \in R$ ($r = 1, \dots, n+1$) hamda $\frac{\partial F}{\partial u_{n+1}} \neq 0$;

5) Noma'lum x funksiya G to'plamda mn tartibgacha barcha hosilalarga ega.

U holda shunday mn tartibli oddiy differensial tenglama mavjudri, (6)

tenglamaning har bir yechimi bir vaqtning o'zida bu tenglamaning yechimi bo'ladi.

Endi quyidagi funksional tenglamani qaqraymiz[17].

$$F(f_1(t), x(f_1(t)), \dots, x^{(k_1)}(f_1(t)), \dots, x(f_n(t)), \dots, x^{(k_n)}(f_n(t))) = 0, \quad (7)$$

bu yerda x noma'lum funksiya va quyidagi shartlar bajariladi:

b. Chiziqli tenglamalar. I.Ya.Viner teoremlari.

Biz endi

$$Lx(t) \equiv \sum_{k=0}^n a_k(t)x^{(k)}(t) = x(f(t)) + \varphi(t) \quad (1)$$

ko'rinishdagi differensial tenglama

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, x''(t_0) = x_2, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_n \quad (2)$$

boshlang'ich shartlar bilan berilgan bo'lsin. Bu yerda $f(t)$ involyutsiyali funksiya.

1-teorema. Aytaylik (1) tenglamaning $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ koefitsiyentlari, qo'zg'almas t_0 nuqtaga ega bo'lgan kuchli involyutsiya hosil qiluvchi $f(t)$ funksiya hamda $\varphi(t)$ funksiyalar $C^n(-\infty, +\infty)$ funksiyalar sinfiga tegishli. Agar

$$M = \frac{1}{f'(t)} \cdot \frac{d}{dt}$$

(3)

ko'rinishdagi operator bo'lsa, u holda

$$\sum_{k=0}^n a_k(f(t))M^k Ly(t) - y(t) = \sum_{k=0}^n a_k(f(t))M^k \varphi(t) - \varphi(f(t)) \quad (4)$$

chiziqli oddiy differensial tenglamaning

$$M^k Lx(t) \Big|_{t=t_0} = x_k + M^k \varphi(t) \Big|_{t=t_0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (5)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi (1) tenglamaning (2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi bilan bir xil bo'ladi.

Isboti. (1) differensial tenglamani n marta ketma ket differensiallash yo'li bilan uning ko'rinishini o'zgartiramiz.

$$Lx(t) \equiv a_n(t)x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x + a_0(t)$$

bo'lgani uchun (9) tenglamani

$$Lx(t) = x(f(t)) + \varphi(t)$$

ko'rinishda yozamiz. Bu tenglikni

$$x(f(t)) = Lx(t) - \varphi(t) \equiv M^0 Lx(t) - M^0 \varphi(t)$$

ko'rinishda yozamiz. Bu tenglamani har ikkala qismini t bo'yicha differensiallab,

$$x'(f(t)) \cdot f'(t) = \frac{d}{dt} M^0 Lx(t) - \frac{d}{dt} M^0 \varphi(t),$$

yoki (3) operatorning aniqlanishiga ko'ra

$$x'(f(t)) = \frac{1}{f'(t)} \cdot \frac{d}{dt} M^0 Lx(t) - \frac{1}{f'(t)} \cdot \frac{d}{dt} M^0 \varphi(t) = M^1 Lx(t) - M^1 \varphi(t)$$

tenglikka kelamiz. (3) munosabatni eltiborga olgan holda yana differensiallashni davom ettiramiz:

$$x''(f(t)) \cdot f'(t) = \frac{d}{dt} M^1 Lx(t) - \frac{d}{dt} M^1 \varphi(t)$$

va bundan

$$x''(f(t)) = \frac{1}{f'(t)} \cdot \frac{d}{dt} M^1 Lx(t) - \frac{1}{f'(t)} \cdot \frac{d}{dt} M^1 \varphi(t) = M^2 Lx(t) - M^2 \varphi(t)$$

tenglikni yozamiz. Bu jarayonni davom ettirib,

$$x^{(n)}(f(t)) = \frac{1}{f'(t)} \cdot \frac{d}{dt} M^{n-1} Lx(t) - \frac{1}{f'(t)} \cdot \frac{d}{dt} M^{n-1} \varphi(t) = M^n Lx(t) - M^n \varphi(t)$$

tenglikka kelamiz. Hosil qilingan tengliklar mos ravishda

$$a_0(f(t)), a_1(f(t)), \dots, a_n(f(t))$$

ifodalarga ko'paytirilib qo'shilsa

$$\sum_{k=0}^n a_k (f(t)) x^k (f(t)) = \sum_{k=0}^n a_k (f(t)) M^k Lx(t) - \sum_{k=0}^n a_k (f(t)) M^k \varphi(t) \quad (6)$$

tenglilik hosil bo'ladi. Ammo (1) tenglamada $f(f(t))=t$ ekanligi e'tiborga olinsa, u holda (1) va (6) tenglamalardan (4) tenglama hosil bo'ladi.

Boshlang'ich shartlarni esa differensiallash yo'li bilan yuqorida keltirilgan ifodalardan hosil qilishimiz mumkin.

Haqiqatdan ham, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ uchun

$$x^{(k)}(f(t)) = M^k Lx(t) - M^k \varphi(t) \text{ va } y^{(k-1)}(f(t_0)) = y^{(k-1)}(t_0) = x_k \text{ ekanligidan}$$

$$M^k Lx(t) \Big|_{t=t_0} = x_k + M^k \varphi(t) \Big|_{t=t_0}$$

englik hosil bo'ladi. Teorema isbotlandi.

2-teorema. Ushbu

$$y^{(n)} = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad (7)$$

tenglama kvadraturalarda integrallanadi va

$$x^a (\ln x)^m \sin(b \ln x), x^a (\ln x)^m \cos(b \ln x) \quad (8)$$

Ko'rinishdagi fundamental yechimlarga ega bo'ladi. Bu yerda a va b haqiqiy sonlar, m – nomanfiy butun son.

Isboti. (7) tenglama n marta differensiallash bilan

$$\sum_{k=n+1}^{2n} b_k^{(n)} x^k y^{(k)}(x) = y(x) \quad (9)$$

Eyler tenglamasiga olib kelinadi. $n=1$ bo'lsa

$$y'(x) = y\left(\frac{1}{x}\right)$$

Zilbershteyn tenglamasi ikkinchi tartibli

$$x^2 y''(x) + y(x) = 0$$

tenglamaga o'tadi. Faraz qilaylik teorema n uchun o'rinli bo'lsin va bu teoremaning $n+1$ uchun o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. (3) formula bo'yicha (7) tenglama uchun

$$M = -x^2 \cdot \frac{d}{dx} \quad (10)$$

differensial operatorni kiritamiz. (6) va (9) ga ko'ra

$$M^n y^{(n)}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} b_k^{(n)} x^k y^{(k)}(x),$$

$$M^n y^{(n+1)}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} b_k^{(n)} x^k y^{(k+1)}(x)$$

U holda

$$M^{n+1} y^{(n+1)}(x) = -x^2 \frac{d}{dx} \sum_{k=n+1}^{2n} b_k^{(n)} x^k y^{(k+1)}(x) =$$

$$- \sum_{k=n+1}^{2n} k b_k^{(n)} x^{k+1} y^{(k+1)}(x) - \sum_{k=n+1}^{2n} b_k^{(n)} x^{k+2} y^{(k+2)}(x)$$

Demak,

$$y^{(n+1)} = y\left(\frac{1}{x}\right)$$

tenglama $n+1$ marta differensiallash bilan Eylerning

$$M^{n+1} y^{(n+1)}(x) = y(x)$$

tenglamasiga keltirildi.

Shu bilan birga

$$y^{(n)} = y\left(\frac{1}{x}\right) \text{ va } y^{(n+1)} = y\left(\frac{1}{x}\right)$$

tenglamalarga mos keluvchi

$$\sum_{k=n+1}^{2n} b_k^{(n)} x^k y^{(k)}(x) = y(x) \quad \text{va} \quad \sum_{k=n+1}^{2n+2} b_k^{(n+1)} x^k y^{(k)}(x) = y(x)$$

Eyler tenglamalarining koeffitsiyentlarini bog'lovchi

$$\begin{aligned} b_k^{(n+1)} &= -(k-1)b_{k-1}^{(n)} - b_{k-2}^{(n)}, \quad n+2 \leq k \leq 2n+2, \\ b_n^{(n)} &= 0, \quad b_{2n+1}^{(n)} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

recurrent formulalar hosil qilindi.

Differensial tenglamalar kursidan ma'lumki Eyler tenglamasi (8) ko'rinishga ega bo'lgan fundamental yechimlar sistemasiga ega, bu yerda $a+bi$ – xarakteristik tenglama ildizi va m – nomanfiy butun son bu ildiz karraligidan kichik bo'lgan son. Teorema isbotlandi.

Misol. Bir jinsli bo'lmagan

$$y'(x) = y\left(\frac{1}{x}\right) + \varphi(x), \quad 0 < x < \infty, \quad \varphi(x) \in C^1(0, \infty)$$

$$y(1) = y_0$$

tenglamani tekshiring.

Bu tenglama oddiy differensial tenglama uchun

$$\begin{aligned} x^2 y''(x) + y(x) &= x^2 \varphi'(x) - \varphi\left(\frac{1}{x}\right), \\ y(1) &= y_0, \quad y'(1) = y_0 + \varphi(1) \end{aligned}$$

ko'rinishdagi boshlang'ich masalaga keladi. Bu masalaning yechimi

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 \sqrt{x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{y_0}{2} + \varphi(1)\right) \sqrt{x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \\ &+ \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3}} \int_1^x z^{-\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln \frac{x}{z}\right) \left[z^2 \varphi'(z) - \varphi\left(\frac{1}{z}\right) \right] dz \end{aligned}$$

ko'rinishga ega.

3-teorema. Ushbu

$$y'(x) = \alpha x^\beta y\left(\frac{1}{x}\right), \quad 0 < x < +\infty, \quad y(1) = y_0 \quad (12)$$

ko'rinishdagi tenglamani integrallash mumkin.

Isboti. Berilgan tenglamani x bo'yicha differensiallash natijasida

$$y''(x) = \alpha \beta x^{\beta-1} y\left(\frac{1}{x}\right) - \alpha^2 x^{-2} y(x) \quad (13)$$

tenglama hosil bo'ladi. Berilgan (12) tenglamadan

$$y\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\alpha} x^{-\beta} y'(x)$$

bo'lgani uchun bu tenglamani bir qator murakkab bo'lmagan hisoblar yordamida

$$x^2 y''(x) - \beta x y'(x) + \alpha^2 y(x) = 0 \quad (14)$$

Eyler tenglamasi ko'rinishida ifodalashimiz mumkin.

(14) tenglamada $x = e^t$, $y(x) = g(t)$ almashtirish kiritamiz. U holda

$$y(x) = y(e^t) = g(t)$$

bo'lgani uchun

$$y\left(\frac{1}{x}\right) = y(e^{-t}) = g(-t)$$

bo'ladi va bundan tashqari $t = \ln x$ ekanligi e'tiborga olinsa

$$y'(x) = g'(t) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} g'(t),$$
$$y''(x) = -\frac{1}{x^2} g'(t) + \frac{1}{x^2} g''(t)$$

tengliklar hosil bo'ladi. Bu tengliklarga ko'ra (14) tenglama

$$g''(t) - (\beta - 1)g'(t) + \alpha^2 g(t) = 0 \quad (15)$$

ko'rinishni oladi.

Endi $y(1) = y_0$ boshlang'ich shart e'tiborga olinsa, u holda $x = e^t, x_0 = 1$ bo'lgani uchun $t = 0$ bo'lganda $g(0) = y(1) = y_0$ va

$$y'(x) = \alpha x^\beta y\left(\frac{1}{x}\right)$$

berilgan tenglamadan $y'(1) = \alpha y_0$ bo'lgani uchun $g'(t) = xy'(x)$ tenglikdan $g'(0) = y'(1) = \alpha y_0$ ekanligini ko'ramiz.

Demak, (15) tenglamani

$$g(0) = y_0, \quad g'(0) = \alpha y_0 \quad (16)$$

boshlang'ich shartlar bo'yicha integrallash mumkin. Teorema isbotlandi.

Isbotlangan teoremada hosil bo'lgan (18) differensial tenglamani integrallaylik.

1-misol. Ushbu

$$g''(t) - (\beta - 1)g'(t) + \alpha^2 g(t) = 0 \quad (15)$$

tenglamani

$$g(0) = y_0, \quad g'(0) = \alpha y_0 \quad (16)$$

boshlang'ich shartlar bo'yicha yeching.

Yechilishi. Xarakteristik tenglama

$$k^2 - (\beta - 1)k + \alpha^2 = 0$$

ko'rinishdagi kvadrat tenglama bo'lib, uning diskriminanti

$$\Delta = (\beta - 1)^2 - 4\alpha^2$$

Quyidagi holler bo'lishi mumkin:

1-hol. $\Delta > 0$ bo'lsa, u holda xarakteristik tenglama ikkita haqiqiy

$$k_1 = \frac{1}{2}(\beta + 1 - \sqrt{\Delta}), \quad k_2 = \frac{1}{2}(\beta + 1 + \sqrt{\Delta})$$

ildizlarga ega. Bu holda (15) tenglamaning umumiy yechimi

$$g(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}$$

bo'lgani uchun

$$g'(t) = C_1 k_1 e^{k_1 t} + C_2 k_2 e^{k_2 t}$$

bo'lib, (16) chegaraviy shartlarga asosan

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = y_0, \\ k_1 C_1 + k_2 C_2 = \alpha y_0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yozamiz. Bu sistemani yechib, noma'lum

$$C_1 = \frac{\alpha - k_1}{k_2 - k_1} y_0, \quad C_2 = \frac{\alpha - k_2}{k_2 - k_1} y_0$$

koeffitsiyentlarni aniqlaymiz. Demak,

$$g(t) = \frac{y_0}{k_2 - k_1} [(\alpha - k_1)e^{k_1 t} - (\alpha - k_2)e^{k_2 t}]$$

(15),(16) masalaning yechimi bo'ladi. Endi $x = e^t$, $y(x) = g(t)$ belgilashlarni va

$$k_1 = \frac{1}{2}(\beta + 1 - \sqrt{\Delta}), \quad k_2 = \frac{1}{2}(\beta + 1 + \sqrt{\Delta})$$

ekanligi e'tiborga olinsa, u holda (12) masalaning yechimi

$$y(x) = \frac{y_0}{\sqrt{\Delta}} \left[(\alpha - k_1)x^{k_1} - (\alpha - k_2)x^{k_2} \right],$$

yoki to'laroq holda

$$y(x) = \frac{y_0 x^{\frac{\beta+1}{2}}}{2\sqrt{(\beta+1)^2 - 4\alpha^2}} \left[\left(\beta + 1 - 2\alpha + \sqrt{(\beta+1)^2 - 4\alpha^2} \right) x^{\frac{\sqrt{(\beta+1)^2 - 4\alpha^2}}{2}} + \right. \\ \left. + \left(2\alpha + \beta + 1 - \sqrt{(\beta+1)^2 - 4\alpha^2} \right) x^{-\frac{\sqrt{(\beta+1)^2 - 4\alpha^2}}{2}} \right]$$

ko'rinishda ega bo'ladi.

2-hol. $\Delta = 0$ bo'lsa, u holda xarakteristik tenglama ikkita teng haqiqiy

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{2}(\beta + 1)$$

ildizlarga ega bo'lgani uchun (15) tenglamaning umumiy yechimi

$$g(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\frac{\beta+1}{2}t}$$

bo'lgani uchun va

$$g'(t) = \left[\frac{(C_1 + C_2 t)(\beta + 1)}{2} + C_2 \right] e^{\frac{\beta+1}{2}t}$$

bo'lib, (16) chegaraviy shartlaega asosan

$$\begin{cases} C_1 = y_0, \\ C_2 + C_1 \cdot \frac{\beta+1}{2} = \alpha y_0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yozamiz. Bu sistemani yechib, noma'lum

$$C_1 = y_0, \quad C_2 = \frac{\alpha - \beta - 1}{2} y_0$$

koeffitsiyentlarni aniqlaymiz. Demak,

$$g(t) = \frac{y_0}{2} [2 + (2\alpha - \beta - 1)t] e^{\frac{\beta+1}{2}t}$$

(15),(16) masalaning yechimi bo'ladi. Endi $x = e^t$, $y(x) = g(t)$ belgilashlarni va ekanligi e'tiborga olinsa, u holda (12) masalaning yechimi

$$y(x) = \frac{y_0 x^{\frac{\beta+1}{2}}}{2} [2 + (2\alpha - \beta - 1)\ln|x|]$$

ko'rinishda ega bo'ladi.

3-hol. $\Delta < 0$ bo'lsa, u holda xarakteristik tenglama ikkita lompleks

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} (\beta + 1 \pm i\sqrt{4\alpha^2 - (\beta + 1)})$$

ildizlarga ega. Bu holda (15) tenglamaning umumiy yechimi

$$g(t) = e^{\frac{\beta+1}{2}t} \left[C_1 \cos \frac{t\sqrt{4\alpha^2 - (\beta + 1)}}{2} + C_2 \sin \frac{t\sqrt{4\alpha^2 - (\beta + 1)}}{2} \right]$$

bo'lgani uchun $g(0) = y_0$, $g'(0) = \alpha y_0$ boshlang'ich shartlar e'tiborga olinsa, u holda

$$\begin{aligned} g'(t) = & e^{\frac{\beta+1}{2}t} \cdot \frac{\beta+1}{2} \left[C_1 \cos \frac{t\sqrt{4\alpha^2 - (\beta + 1)}}{2} + C_2 \sin \frac{t\sqrt{4\alpha^2 - (\beta + 1)}}{2} \right] + \\ & + e^{\frac{\beta+1}{2}t} \left[-C_1 \sin \frac{t\sqrt{4\alpha^2 - (\beta + 1)}}{2} + C_2 \cos \frac{t\sqrt{4\alpha^2 - (\beta + 1)}}{2} \right] \cdot \frac{\sqrt{4\alpha^2 - (\beta + 1)}}{2} \end{aligned}$$

bo'lib, (16) chegaraviy shartlaega asosan

$$\begin{cases} C_1 = y_0, \\ \frac{\beta+1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)}}{2}C_2 = \alpha y_0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yozamiz. Bu sistemani yechib, noma'lum

$$C_1 = y_0, \quad C_2 = \frac{2\alpha - \beta - 1}{\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)}} y_0$$

koeffisiyentlarni aniqlaymiz. Demak, (15),(16) masalaning yechimi

$$g(t) = \frac{y_0 \sqrt{x^{\beta+1}}}{\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)}} \left[\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)} \cos \frac{t\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)}}{2} + \right. \\ \left. + (2\alpha^2 - \beta - 1) \sin \frac{t\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)}}{2} \right]$$

bo'ladi. Endi $x = e^t$, $y(x) = g(t)$ belgilashlarni e'tiborga olinsa, u holda

(12) masalaning yechimi

$$y(x) = \frac{y_0 \sqrt{x^{\beta+1}}}{\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)}} \left[\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)} \cos \frac{\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)} \ln|x|}{2} + \right. \\ \left. + (2\alpha^2 - \beta - 1) \sin \frac{\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)} \ln|x|}{2} \right]$$

ko'rinishda ega bo'ladi.

2.3-§. Chiziqli differensial tenglamalar sistemasining involutsiyasi.

Biz endi involutsiya xossasiga ega bo'lgan chiziqli tenglamalar sistemasini ko'rib chiqamiz. Quyidagi tasdiq o'rinli.

Teorema. Agar $y - n$ o'lchamli vector, A va $B - n \times n$ o'lchamli matritsalar bo'lsa, u holda

$$y'(x) = Ay(x) + By(c - x) \quad (20)$$

sistemaning

$$y(c/2) = y_0$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi

$$y''(x) = (A - BAB^{-1})y'(x) + (BA^2B^{-1} - B^2)y(x) \quad (21)$$

sistemaning

$$y(c/2) = y_0, \quad y'(c/2) = (A + B)y_0$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimidan iborat.

Isboti. Berilgan sistemani x bo'yicha differensiallab,

$$y''(x) = Ay'(x) - By'(c - x)$$

tenglamani hosil qilamiz. (20) tenglamada $x \rightarrow c - x$ almashtirish bajarsak,

$$y(c - x) = Ay(c - x) + By(x) \quad (22)$$

tenglikni hosil qilamiz. (22) ni (21) ga qo'yib

$$y''(x) = Ay'(x) - BAy(c - x) - B^2y(x) \quad (23)$$

tenglamani hosil qilamiz. Ammo (12) tenglamadan

$$y(c-x) = B^{-1}(y'(x) - Ay(x)) = B^{-1}y'(x) - B^{-1}Ay(x)$$

bo'lgani uchun (23) bir qator sodda hisoblashlardan keyin (21) ko'rinishni oladi.

Ikkinchi tomondan $y(c/2) = y_0$ bo'lgani uchun $y'(c/2) = (A+B)y_0$ tenglik kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Xususiyl holda A va B kommutativ matritsalar bo'lsa, ya'ni $AB = BA$ bo'lsa, u holda $A = BAB^{-1}$, $B^{-1}A = AB^{-1}$ bo'lib,

$$A = BAB^{-1} = A - A = O, \quad BA^2B^{-1} = BA \cdot AB^{-1} = BAB^{-1}A = A^2$$

bo'lgani uchun isbotlangan teoremdan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar $y-n$ o'lchamli vector, A va $B-n \times n$ o'lchamli kommutativ matritsalar bo'lsa, u holda

$$y''(x) = (A^2 - B^2)y(x)$$

sistemaning

$$y(c/2) = y_0, \quad y'(c/2) = (A+B)y_0$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi (20):

$$y'(x) = Ay(x) + By(c-x)$$

sistemaning

$$y(c/2) = y_0$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi Koshi masalasining yechimidan iborat.

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + 2y_2(x) + 5y_1(4-x) + 2y_2(4-x), \\ y_2'(x) = 3y_1(x) + y_2(x) + 3y_1(4-x) + 5y_2(4-x) \end{cases}$$

sistemaning

$$y(2) = y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi

$$\begin{cases} z_1'' + 24z_1 + 16z_2 = 0, \\ z_2'' + 24z_1 + 24z_2 = 0 \end{cases}$$

sistemaning

$$z(2) = y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad z'(2) = \begin{pmatrix} 20 \\ 24 \end{pmatrix}$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimidan iborat ekanligi yuqorida keltirilgan natijadan kelib chiqadi, chunki keltirilgan misolda

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

kommutativ matritsalar va

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -24 & 16 \\ -24 & -24 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

ekanligini e'tiborga olishimiz kifoya.

I bob bo'yicha xulosa:

Bubobda involyutsiya tushunchasini bayon etish uchun o'zgarmas ko'effisienli chiziqli differensial tenglamalar, o'zgarmasni varaiatsiyalash usuli, Eyler va Lagranj tenglamalari va unga doir misollar yechilishi bilan keltirilgan. Shu bilan birga involyutsiya tushunchasiga ta'rif berilgan va involyutsiyaga oid bir nechta

teoremlar isbotlari bilan keltirilgan. Kuchli involyutsiya bo'lish shartlari, kasr chiziqli involyutsiya va uning turlari haqida bayon qilingan.

III Bob. Involyutsiya qatnashgan spektral masalalar

3.1-§. Spektral analizdan asosiy ma'lumotlar

Involyutsiya qatnashgan xususiy hosilali birinchi tartibli differensial tenglamalar uchun turli mazmunda qo'yilgan masalalar [1-3] maqolalardan o'rin olgan bo'lib, asosiy usul sifatida o'zgaruvchilarni ajratishning Fur'ye usuli qo'llanilishi qaralayotgan tenglama vaqt bo'yicha oddiy differensial tenglamani, holati bo'yicha involyutsiyali tenglamaga olib keladi. Shu davrgacha e'lon qilingan maqolalarning ko'p qismi $\xi = -x$ involyutsiyaga bag'ishlangan. Ammo 2010 yildan boshlab, [] adabiyotlarda A.P.Khromov va uning o'quvchilari tomonidan $\xi = 1-x$ involyutsiya qatnashgan xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun turli ko'rinishdagi masalalar ustida tadqiqotlar olib borilmoqda.

Biz bu bo'limda quyidagi masala bilan shug'ullanamiz: berilgan

$$D = \{(x, t): 0 \leq x \leq 1, 0 < t < \infty\}$$

parabolik tipdagi ikkinchi tartibli xususiy involyutsiya qatnashgan

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial^2 w(\xi, t)}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=1-x} + \alpha \frac{\partial w^2(x, t)}{\partial x^2} \quad (1)$$

tenglamaning $C^{2,1}(D) \cap C'(\bar{D})$ funksiyalar sinfidan

$$w(x, 0) = \varphi(x), \quad \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi(1) = 0 \quad (2)$$

$$w(0, t) = w(1, t) = 0, \quad (3)$$

$$w'(0) = w'(1, t) = 0 \quad (4)$$

ko'rinishdagi boshlang'ich va chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasini qaraymiz.

O'zgaruvchilarni ajratishning Fur'ye usuli bo'yicha (1)-(4) masalaning $w(x, t)$ yechimini

$$w(x, t) = u(x) \cdot T(t)$$

korinishda izlaymiz. U holda (1) tenglamadan

$$u(x) \cdot T'(t) = -u''(1-x) \cdot T(t) + \alpha u''(x) \cdot T(t),$$

yoki

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{-u''(1-x) + \alpha u''(x)}{u(x)} = -\lambda$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0 \quad \text{va} \quad -u''(1-x) + \alpha u''(x) = -\lambda u(x)$$

tenglamalarga ega bo'lamiz. Birinchi tenglamaning umumiy yechimi

$$T(t) = Ce^{-\lambda t}$$

ko'rinishga ega. Ikkinchi tenglama (3),(4) chegaraviy shartlarga ko'ra

$$-u''(1-x) - \alpha u''(x) = \lambda u(x), \quad (5)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (6)$$

va

$$-u''(1-x) - \alpha u''(x) = \lambda u(x), \quad (5)$$

$$u'(0) = u'(1) = 0 \quad (7)$$

chegaraviy masalalar hosil bo'ladi.

Dastlab (5),(6) spektral masalaqning yechimini topamiz. (5),(6) spectral masaladaq argumentlar bo'yicha $x \rightarrow 1-x$ almashtirish bajarib

$$-u''(1-x) - \alpha u''(x) = \lambda u(x), \quad (8)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

spektral masalaga ega bo'lamiz.

1-теорема. Ushbu

$$u(x) = \tilde{A} \cos \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}} \left(\frac{1}{2} - x \right) + \tilde{B} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}} \left(\frac{1}{2} - x \right) \quad (9)$$

funksiya (5) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Isboti. (5) va (8) tenglamalarni hadlab qo'shib va hadlab ayirib quyidagi:

$$\begin{aligned} -(\alpha+1)[u''(x)+u''(1-x)] &= \lambda[u(x)+u(1-x)], \\ -(\alpha-1)[u''(x)-u''(1-x)] &= \lambda[u(x)-u(1-x)] \end{aligned}$$

tenglamalarni hosil qilamiz. Bu tenglamalarni

$$\begin{aligned} [u(x)+u(1-x)]'' + \frac{\lambda}{\alpha+1}[u(x)+u(1-x)] &= 0, \\ [u(x)-u(1-x)]'' + \frac{\lambda}{\alpha-1}[u(x)-u(1-x)] &= 0 \end{aligned}$$

ko'rinishda yozib integrallash bilan

$$\begin{aligned} u(x)+u(1-x) &= 2A \cos \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}}x + 2B \sin \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}}x, \\ u(x)-u(1-x) &= 2C \cos \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}}x + 2D \sin \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}}x \end{aligned} \quad (10)$$

tengliklarni hosil qilamiz. bu tengliklarda argumentlar ustida $x \rightarrow 1-x$ almashtirish bajarilsa

$$\begin{aligned} u(x)+u(1-x) &= 2A \cos \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}}(1-x) + 2B \sin \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}}(1-x), \\ u(1-x)-u(x) &= 2C \cos \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}}(1-x) + 2D \sin \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}}(1-x) \end{aligned} \quad (11)$$

tenglamalarni hosil qilamiz. (10) va (11) tenglamalarni taqqoslab

$$\begin{aligned} A \left(\cos \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}}x - \cos \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}}(1-x) \right) + B \left(\sin \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}}x - \sin \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}}(1-x) \right) &= 0, \\ C \left(\cos \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}}x + \cos \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}}(1-x) \right) + D \left(\sin \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}}x + \sin \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}}(1-x) \right) &= 0 \end{aligned}$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bu tengliklarni trigonometrik funksiyalarni qo'shish formulalaridan foydalanib

$$\begin{aligned} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}} \left(\frac{1}{2} - x \right) \left(B \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}} - A \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}} \right) &= 0, \\ \cos \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}} \left(\frac{1}{2} - x \right) \left(C \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}} + D \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin. Bu tengliklar ixtiyoriy $x \in (0,1)$ uchun o'rinli bo'lganidan

$$B = A \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}}}{\cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}}}, \quad D = -C \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}}}{\sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}}}$$

Shuning uchun (11) ga ko'ra

$$u(x) + u(1-x) = 2A \cos \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}} x + 2A \frac{\sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}}}{\cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}}} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}} x = \frac{2A}{\cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}}} \cos \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}} \left(\frac{1}{2} - x \right)$$

$$u(x) - u(1-x) = 2C \cos \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}} x - 2C \frac{\cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}}}{\sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}}} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}} x = \frac{2C}{\sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}}} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}} \left(\frac{1}{2} - x \right)$$

Hosil bo'lgan tengliklarni qo'shib, (5) tenglamaning umumiy yechimi

$$u(x) = \frac{A}{\cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}}} \cos \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}} \left(\frac{1}{2} - x \right) + \frac{C}{\sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}}} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}} \left(\frac{1}{2} - x \right),$$

ko'rinishga, yoki $\tilde{A} = \frac{A}{\cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}}}$, $\tilde{B} = \frac{C}{\sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}}}$ belgilashlar kiritib (9) tenglikka

ega bo'lamiz, bu yerda $\tilde{A}, \tilde{B}$ – ixtiyoriy o'zgarmas sonlar. Bevosita tekshirish bilan (9) funksiya (5) tenglamani qanoatlantirishini ko'ramiz. Teorema isbotlandi.

2-teorema. (5),(6) spectral masalaning xos qiymatlari va xos funksiyalari

$$\lambda_{1,k} = 4(\alpha-1)k^2\pi^2, u_{1k}(x) = \cos \left(\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} k\pi \right) \sin[(2x-1)k\pi] \quad k=1,2,..$$

$$\lambda_{2,k} = (\alpha+1)(2m+1)^2\pi^2, u_{2,k} = \cos \left[(2x-1) \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi \right], k=0,1,2,..$$

ko'rinishga ega.

Isboti. (6): $u(0)=0, u(1)=0$ chegaraviy shartlarga ko'ra umumiy yechimning (9) formulasidan

$$\begin{aligned}\tilde{A} \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}} + \tilde{B} \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}} &= 0 \\ \tilde{A} \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}} - \tilde{B} \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}} &= 0\end{aligned}$$

tengliklarni yozamiz. Bu tengliklar birgalikda bo'lishi uchun

$$\sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}} \cdot \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}} = 0$$

tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Bundan

$$\sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha-1}} = 0 \text{ yoki } \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha+1}} = 0$$

bo'lgani uchun (5), (6) masalaning xos qiymatlari

$$\lambda_{1,k} = 4(\alpha-1)k^2\pi^2, \quad k = 1, 2, \dots \text{ va } \lambda_{2,k} = (\alpha+1)(2m+1)^2\pi^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

ko'rinishga ega. Endi (5),(6) masalaning xos funksiyalarini topamiz.

$$\tilde{B}_k = \tilde{A}_k \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_k}{\alpha+1}}}{\sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_k}{\alpha-1}}} \text{ bo'lgani uchun (9) tenglikdan}$$

$$u_k(x) = \tilde{A}_k \cos \sqrt{\frac{\lambda_k}{\alpha+1}} \left(\frac{1}{2} - x \right) + \tilde{A}_k \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_k}{\alpha+1}}}{\sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_k}{\alpha-1}}} \cdot \sin \sqrt{\frac{\lambda_k}{\alpha-1}} \left(\frac{1}{2} - x \right),$$

tenglikni, yoki $\tilde{A}_k$ ixtiyoriy bo'lgani uchun xos funksiyani

$$u_k(x) = \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_k}{\alpha-1}} \cdot \cos \sqrt{\frac{\lambda_k}{\alpha+1}} \left(\frac{1}{2} - x \right) + \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_k}{\alpha+1}} \cdot \sin \sqrt{\frac{\lambda_k}{\alpha-1}} \left(\frac{1}{2} - x \right)$$

formula bo'yicha hisoblash yetarli. Shuning uchun

$$\begin{aligned}u_{1k}(x) &= \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_{1k}}{\alpha-1}} \cdot \cos \sqrt{\frac{\lambda_{1k}}{\alpha+1}} \left(\frac{1}{2} - x \right) + \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_{1k}}{\alpha+1}} \cdot \sin \sqrt{\frac{\lambda_{1k}}{\alpha-1}} \left(\frac{1}{2} - x \right) = \\ &= \cos \left(\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} k\pi \right) \cdot \sin 2\pi k \left(\frac{1}{2} - x \right) = \cos \left(\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} k\pi \right) \sin [(2x-1)k\pi]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{2k}(x) &= \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_{2k}}{\alpha-1}} \cdot \cos \sqrt{\frac{\lambda_{2k}}{\alpha+1}} \left(\frac{1}{2} - x \right) + \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_{2k}}{\alpha+1}} \cdot \sin \sqrt{\frac{\lambda_{2k}}{\alpha-1}} \left(\frac{1}{2} - x \right) = \\
&= \sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \pi \sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} \right] \cdot \cos \left[(2x-1) \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi \right]
\end{aligned}$$

Teorema isbotlandi.

3.2-§. Involyutsiya qatnashgan chegaraviy masalalardan namunalar.

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$w_t(t, x) = aw_{tt}(t, x) + bw(c-t, x) \quad (1)$$

со смешанными краевыми условиями

$$w(t, 0) = 0, w(t, l) = 0, w(0, x) = \varphi(x) \quad (2)$$

Решение задачи (1)-(2) будем искать методом разделения переменных

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t) \quad (3)$$

получим задачу Штурма-Лиувилля

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, X(0) = X(l) = 0 \quad (4)$$

и задачу Коши с инволюцией

$$T'_n(t) + \lambda^2 a T_n(t) + \lambda^2 b T_n(c-t) = 0, T_n\left(\frac{c}{2}\right) = C_n, \quad (5)$$

где C_n коэффициенты Фурье при разложения функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по собственным функциям задачи (4), а $t_0 = \frac{c}{2}$ неподвижная точка инволюции $f(t) = c - t$. Решения задачи (4) известно:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Для решения задачи Коши (5) сведем ее к обыкновенному дифференциальному уравнению. Для этой цели из уравнения

$$T'_n(t) + \lambda^2 a T_n(t) + \lambda^2 b T_n(c - t) = 0 \quad (7)$$

последовательно находим

$$T_n(c - t) = -\frac{1}{\lambda^2 b} T'_n(t) - \frac{a}{b} T_n(t), \quad (8)$$

$$T'_n(c - t) = -\frac{1}{\lambda^2 b} T''_n(t) - \frac{a}{b} T'_n(t) \quad (9)$$

Теперь заменив t на $c - t$ в уравнение (7) находим, что

$$T'_n(c - t) + \lambda^2 a T_n(c - t) + \lambda^2 b T_n(t) = 0 \quad (10)$$

Подставляя (8) и (9) в уравнение (10) получим

$$T''_n(t) + \lambda^4 (b^2 - a^2) T_n(t) = 0 \quad (11)$$

Так как соответствующее характеристическое уравнения для (11) имеет корни $k_{1,2} = \pm \lambda^2 \sqrt{|b^2 - a^2|}$, то общее решения уравнения (11) имеет вид

$$T_n(t) = C_1 \cos \lambda \sqrt{a^2 - b^2} t + C_2 \sin \lambda \sqrt{a^2 - b^2} t + \\ + C_3 \cos \lambda \sqrt{a^2 + b^2} t + C_4 \sin \lambda \sqrt{a^2 + b^2} t \quad (12)$$

Решение уравнение (7) будем искать в виде (12). Тогда нетрудно убедиться, что общим решением уравнения (7) является функция

$$T_n(t) = A \sin \lambda \sqrt{a^2 - b^2} \left(\frac{c}{2} - t \right) + B \cos \lambda \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{c}{2} - t \right) \quad (13)$$

С учетом начальных условий получим

$$T_n(t) = A_n \cos \lambda \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{c}{2} - t \right) - \frac{1}{\lambda \sqrt{a^2 - b^2}} B_n \sin \lambda \sqrt{a^2 - b^2} \left(\frac{c}{2} - t \right) \quad (14)$$

2. Теперь рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$w_{tt}(t, x) = a^2 w_{tt}(t, x) + b^2 w(c - t, x) \quad (1)$$

со смешанными краевыми условиями

$$w(t, 0) = 0, w(t, l) = 0, w(0, x) = \varphi(x), w_t(0, x) = \psi(x) \quad (2)$$

Решение задачи (1)-(2) будем искать методом разделения переменных

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t) \quad (3)$$

получим задачу Штурма-Лиувилля

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, X(0) = X(l) = 0 \quad (4)$$

и задачу Коши с инволюцией

$$T_n''(t) + \lambda^2 a^2 T_n(t) + \lambda^2 b^2 T_n(c - t) = 0, T_n\left(\frac{c}{2}\right) = A_n, T_n'\left(\frac{c}{2}\right) = B_n, \quad (5)$$

где A_n и B_n коэффициенты Фурье при разложения функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд

Фурье по собственным функциям задачи (4), а $t_0 = \frac{c}{2}$ неподвижная точка

инволюции $f(t) = c - t$. Решение задачи (4) известно:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x, n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Чтобы получить решения задачи Коши (5) сведем ее к обыкновенному дифференциальному уравнению. Для этой цели из уравнения

$$T_n''(t) + \lambda^2 a^2 T_n(t) + \lambda^2 b^2 T_n(c-t) = 0 \quad (7)$$

последовательно находим

$$T_n(c-t) = -\frac{1}{\lambda^2 b^2} T_n''(t) - \frac{a^2}{b^2} T_n'(t), \quad (8)$$

$$T_n''(c-t) = -\frac{1}{\lambda^2 b^2} T_n^{(4)}(t) - \frac{a^2}{b^2} T_n'(t) \quad (9)$$

Теперь заменив t на $c-t$ в уравнение (7) находим, что

$$T_n''(c-t) + \lambda^2 a^2 T_n(c-t) + \lambda^2 b^2 T_n(t) = 0 \quad (10)$$

Подставляя (8) и (9) в уравнение (10) получим уравнения без инволюцией

$$T^{(4)}(t) + 2\lambda^2 a^2 T_n''(t) + \lambda^4 (a^4 - b^4) T_n(t) = 0 \quad (11)$$

Так как соответствующее характеристическое для уравнения (11) имеет корни $k_{1,2} = \pm i\sqrt{a^2 - b^2}$, $k_{3,4} = \pm i\sqrt{a^2 + b^2}$, то общее решения уравнения (11)

имеет вид

$$T_n(t) = C_1 \cos \lambda \sqrt{a^2 - b^2} t + C_2 \sin \lambda \sqrt{a^2 - b^2} t + \\ + C_3 \cos \lambda \sqrt{a^2 + b^2} t + C_4 \sin \lambda \sqrt{a^2 + b^2} t \quad (12)$$

Решение уравнение (7) будем искать в виде (12). Тогда нетрудно убедиться, что общее решения уравнения (7) можно представить в виде

$$T_n(t) = A \sin \lambda \sqrt{a^2 - b^2} \left(\frac{c}{2} - t \right) + B \cos \lambda \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{c}{2} - t \right) \quad (13)$$

С учетом начальных условий получим

$$T_n(t) = A_n \cos \lambda \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{c}{2} - t \right) - \frac{1}{\lambda \sqrt{a^2 - b^2}} B_n \sin \lambda \sqrt{a^2 - b^2} \left(\frac{c}{2} - t \right) \quad (14)$$

Согласно (3) общее решения смешанной краевой задачи (1),(2) в силу (6),(13) можно представит в виде

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \lambda \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{c}{2} - t \right) - \frac{1}{\lambda \sqrt{a^2 - b^2}} B_n \sin \lambda \sqrt{a^2 - b^2} \left(\frac{c}{2} - t \right) \right] \sin \frac{n\pi}{l} x$$

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

- 1.Andreev A.A., Analogs Classical Boundary Value Problems for a Second Order Differential Equation with Deviating Argument // *Differential Equations*, Vol, 40, No.8,2004, pp. 1192-1194
- 2.Андреев А.А., Шиндяпин И.П. О корректности граничных задач для одного дифференциального уравнения в частных производных с отклоняющимся аргументом // *аналитические методы в теории дифференциальных уравнений* Куйбишев. Куйбишев гос. Ун-та, 1987, С. 51-53
- 3.Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. О классическом решении смешанной задачи для уравнения первого порядка с инволюцией. // *Вестник Воронежского университета. Серия Физика Математика* 2010 № 2, с.26-33
4. Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Классическом решении методом Фурье смешанных задач при минимальные требованиях на исходные данные. // *Изв. Саратов. Ун-та. Математика. Механика. Инфаорматика*. 2014. Т. 14 вып. 2, с. 171-198.
- 5.Винер И.А., Дифференциальные уравнения с инволюцией. // *Дифференциальные уравнения* 1969, № 5, с. 1131-1137.
- 6.M.Sh.Burlutskaya and A.P.Khromov , "Classical solution of a mixed problem with involution." , *Doklady Mathematics*, vol. 82,pp.865-868,2010.
- 7.Mokhtar Kirame, Nasser Al-Salti Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation, *Journal of Nonlinear Science and Applications*10(2012), 1-9.
8. Линьков А.В. Обоснование метода Фурье для краевых задач с инволютивным отклонением. *Вестник Сам.ГУ*,1999, №2-(12), С.60-66.

