

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

Қўл ёзма ҳуқуқида

УДК 517.923

Акбарова (Хурсанова) Севарахон Хусанбой қизи

«Гойн тенгламасининг ечими ва унинг хоссалари»

5А 130101-математика (дифференциал тенгламалар) мутахассислиги
бўйича магистр академик даражасини олиш учун

МАГИСТЛИК
ДИССЕРТАЦИЯСИ

Илмий раҳбар:

физика-математика
фанлари номзоди
К.Т. Каримов

Фарғона – 2017

М У Н Д А Р И Ж А

	Кириш.....	3
I БОБ.	Математик физиканинг махсус функциялари.....	11
1.	Биринчи тур Эйлер интегралли (бета-функция).....	11
2.	Иккинчи тур Эйлер интегралли (гамма-функция).....	15
3.	Гаусснинг гипергеометрик функцияси.....	18
4.	Икки аргументли гипергеометрик функциялар.....	26
5.	Похгаммер символи.....	30
	I боб бўйича хулоса.....	32
II БОБ.	Гойн тенгламалари синфи ва унинг ечимлари.....	33
1.	Фукс ва регуляр махсус нуқталар.....	33
2.	Умумлашган Риман схемаси.....	35
3.	Гойн тенгламаси ва унинг ечими.....	40
4.	Гойннинг конфлюэнт тенгламалари.....	44
	II боб бўйича хулоса.....	47
III БОБ.	Гойн ва Гойннинг конфлюэнт тенгламалари хусусий ечимлари.....	48
1.	Гойн тенгламаси ечимини гипергеометрик функциялар қатори кўринишида топиш.....	48
2.	Гойннинг конфлюэнт тенгламасининг ечимини топиш.....	56
3.	Гойн синфига тегишли тенгламалар учун хос қиймат ҳақидаги масалалар.....	61
.	III боб бўйича хулоса.....	68
	Хулоса.....	69
	Фойдаланилган адабиётлар рўйхати.....	71

КИРИШ

Республикамизда туб ўзгаришлар, сиёсий ва ижтимоий-иқтисодий ҳаётнинг барча томонларини изчил ислоҳ қилиш ва либераллаштириш, жамиятимизни демократик янгилаш ва модернизациялаш жараёнлари жадал ривожланиб бормоқда. Бунда кучли фуқаролик жамиятини шакллантириш йўлида белгилаб олинган ва изчил амалга оширилаётган улкан вазифалар замин яратмоқда.

Ўзбекистон Республикасининг Биринчи Президенти И.А.Каримов Олий Мажлиснинг XIV сессиясида сўзлаган нутқида кадрлар тайёрлашнинг аҳамиятига изоҳ бериб шундай деган эди: «Биз олдимизга қандай вазифа қўймайлик, қандай муаммони ечиш зарурияти туғилмасин, гап охир оқибат, барибир кадрларга бориб қадалаверади. Муболағасиз айтиш мумкинки, бизнинг келажагимиз, мамлакатимиз келажаги, ўрнимизга ким келишига ёки бошқачароқ қилиб айтганда, қандай кадрлар тайёрлашимизга боғлиқ. ...Мамлакатимиз келажаги учун Олий Мажлиснинг IX сессиясида қабул қилинган «Кадрлар тайёрлаш миллий дастури»нинг [1] амалга оширилиши жуда ҳам муҳим аҳамиятга эга.

...Юқори малакали педагог кадрлар тайёрлаш ва қайта тайёрлашга алоҳида эътибор бериш лозим. Кадрлар тайёрлашнинг сифати, эркин фикрловчи шахс - фуқарони камол топтиришига, эртага синф хоналар ва аудиторияларда кимлар дарс ва сабоқ беришига боғлиқ».

Дарҳақиқат, баркамол инсон шахсининг шаклланиши бевосита узлуксиз таълим жараёнида амалга ошади. Шундай экан, ҳар жабҳада муваффақиятга эришишда, жумладан, юқори малакали кадрлар тайёрлашда Кадрлар тайёрлаш миллий дастурининг ўрни ва аҳамияти бекиёсдир.

Кадрлар тайёрлаш миллий дастури ва “Таълим тўғрисидаги” қонунларда [2] олий таълимнинг асосий мақсади бозор иқтисодиёти шароитида мустақил ишлашга қодир, рақобатбардош, юқори малакали мутахассислар тайёрлашдан иборат. Бу мақсадга эришиш учун, шунингдек

Республикаимиз Президенти Шавкат Миромонович Мирзиёев ўзларининг чиқишларида, вилоятларга қилиган сафарларидаги қилинган нутқларида ва Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академияси академиклари билан бўлган учрашувларда таъкидлангани каби “Фундаментал фанларни ривожлантирмасдан туриб, илмий тадқиқот ишлари билан амалиётни ва ишлаб чиқаришнинг интеграциясини таъминламасдан туриб, иқтисодий ривожлантириш анча қийин иш эканлигини” айтиб ўтдилар. Илмий - техникавий салоҳиятидан кенг фойдаланган ҳолда, юксак технология ва фан ютуқларига асосланган ишлаб чиқариш соҳалари - автомобилсозлик, самолётсозлик, микробиология, электротехника ва электроника саноатларини, телекоммуникация ва замонавий ахборот технология воситаларини тез суръатларда ривожлантириш учун сабоқ олаётган ҳар бир шахс ўзи ўрганган таълим мазмунини чуқур англаши, қаерда ва қандай тадбиқ қилишни билиши, ҳаётда эса ўзи амалиётга тадбиқ қила олиши керак. Ана шу нуқтаи назардан қараганда олий ўқув юртининг ҳар бир битирувчиси ўзи эгаллаётган мутахассислик бўйича малака ва кўникмалари даражасини кўрсатиб берувчи битирув малакавий иши, жумладан магистрлар диссертация иши бажаришлари мақсадга мувофиқдир.

Мазкур диссертация, замонавий математика фанининг энг долзарб йуналишига бағишланган. Унинг долзарблигини қуйидагича изоҳлаш мумкин.

Мавзунинг долзарблиги. Мазкур диссертацион иш Гойн тенгламалари синфига таалуқли тенгламалар ва уларнинг ечимларини топишнинг махсус усуллари ҳақида ёзилган. Иккинчи тартибли Гойн синфига мансуб чизикли оддий дифференциал тенгламалар тўртта махсус нуқтага эга бўлган Фукс шартини қаноатлантирувчи тенгламалар ҳисобланади. Гойн тенгламасини биринчи бўлиб, К.Гойн тадқиқ қилган. Орадан 100 йил ўтиб А.Зеегер, А.Рондо ва В.Лайлар томонидан бу соҳага ва унинг ривожига бағишланган конференция ташкиллаштиришди. Бу ерда

Гойннинг конфлюэнт тенгламасига кўпроқ эътибор қаратилган бўлиб, барча деталлар муҳим бўлган мақолаларда ўз аксини топган. Натижада Гойн тенгламасига бағишланган биринчи китоб дунё юзини кўрди.

Гойн тенгламаси тўртта махсус нуқтага, яъни $z = 0, 1, a$ ва ∞ га эга. Унинг кўриниши қуйидагича

$$u'' + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\varepsilon}{z-a} \right) u' + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-a)} u = 0$$

бўлиб, бу ерда u z – номаълум функция, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ва ε ўзгармас сонлар, улар Фукс шаритини қаноатлантиради, яъни $1 + \alpha + \beta = \gamma + \delta + \varepsilon$.

Гаусснинг гипергеометрик тенгламаси эса учта махсус нуқтага эга: 0, 1 ва ∞ . Бундан кўринадик, Гойн тенгламаси Гаусс гипергеометрик тенгламасининг умумлашмасидан иборат экан. Гойн тенгламаси тўртта махсус нуқта орқали Фукс синфига мансуб иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама бўлиши билан бирга, бошқа бунга ўхшаш тўртта махсус нуқтага эга бўлган иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларни умумлаштиради ёки уларни Гойн тенгламасига келтириш мумкин бўлади. Ҳозирги даврга келиб, Гойн тенгламасини ўрганишга қизиқиш ортиб бормокда. Шу кунга қадар Гойн тенгламасининг махсус нуқталар атрофида умумий ечими ошкор кўринишда ҳали топилмаган. Айрим муаллифлар томонидан, Гойн тенгламасининг хусусий ечимини топишда, ечимни махсус функцияларнинг ёйилмасидан иборат қатор кўринишида излаш методикаси ишлаб чиқилган ва керакли натижалар қўлга киритилган. Жумладан, Н.Свартгольм, А.Эрдейи, Д.Шмидт, Р.С.Сохониян, Д.Ю.Меликджанян, А.М.Ишханян ва ҳ.к.ларнинг ишларини мисол қилиб келтириш мумкин.

Аммо, Гойн тенгламасининг аниқ ошкор ечимини топишда математик физиканинг махсус функциясидан фойдаланиб, жумладан гипергеометрик функциянинг ёйилмасидан тузилган қатор кўринишида излаб топиш жуда кам учрайди. Бу ечимларни топишнинг бир усули шундан иборатки, маълум ва номаълум параметрларни алмаштириш

ёрдамида қаралаётган мураккаб тенгламага нисбатан соддароқ тенглама билан алмаштириш ҳамда соддароқ тенгламанинг ечимини топиб, сўнгра ундан фойдаланиб мураккаб тенгламанинг ечимини топиш. Бу ёндашув Майер томонидан Гойн тенгламасини полиномиал (квадратик, кубик ва ҳ.к.) алмаштиришлар ёрдамида гипергеометрик тенгламага келтириш масаласи муваффақиятли амалга оширилди.

Кўплаб систематик усуллар Гойн тенгламаси ечимини гипергеометрик функцияларнинг қатори ёйилмаси кўринишида кидиришни тақозо қилган. Бундай ёйилмаларни биринчи бўлиб Свартгольм ва Эрдейининг ишларида учратиш мумкин. Кейинчалик бу техника Гойн тенгламаси ва унинг бузилган тенгламаси учун кўплаб муаллифлар томонидан қўлланила бошланди. Гипергеометрик функцияларнинг ёйилмаси шаклида Гойн тенгламасининг ечимини топиш масаласи кам сонли ишларда учратиш мумкин.

Ушбу магистрлик диссертациясида Гойн ва унинг конфлюэнт формадаги тенгламаларининг ечимини Гаусснинг гипергеометрик функцияси қатори кўринишида топиш масалаларини ўрганишни ўз олдига мақсад қилиб қўйган. Бу ёйилмалар аниқ ошкор ечимни махсус функцияларнинг параметрларини танлаш ҳисобига турли специфик ечимларни ҳосил қилиш имокиятини яратади. Бу ечимларни ҳосил қилишда махсус кетма-кетликлардан фойдаланилади ёки бошқача қилиб айтиладиган бўлса, махсус алгоритмлардан фойдаланилади. Бу шундан далолат берадики, бу мавзуни компьютерли математикага тадбиқ қилиб, ечимни компьютерда қайта ишлаш (matematika, Maple ва ҳ.к дастурларда) имконияти ҳосил бўлади.

Мавзунинг ўрганилганлик даражаси. Гойн тенгламасини ўрганишда кўплаб махсус функцияларнинг хоссаларини ўрганишга тўғри келади. Шу мақсадда ушбу диссертацияда биринчи ва иккинчи тур Эйлер интеграллари, Гаусснинг гипергеометрик функцияси хоссалари, икки аргументли гипергеометрик функциялар, похгаммер символи, фукс ва

регуляр махсус нукталар ва умумлашган Риман схемаси каби математик аппаратларни ўрганишга тўғри келади. Булар ёрдамида Гойн ва Гойннинг конфлюэнт тенгламалари ечимлари топилиши ва хоссалари ўрганилиши мумкин.

Тадқиқотнинг мақсади. Диссертацияда кўзда тутилган асосий мақсад Гойн ва Гойннинг конфлюэнт тенгламасининг ечимини гипергеометрик функциялар ёйилмасидан иборат қатор кўринишида топишдан иборат. Сўнгра Гойн синфига мансуб тенглама учун хос қиймат ҳақидаги масалани тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифаси. Гойн ва Гойннинг конфлюэнт тенгламасининг ечимини гипергеометрик функциялар ёйилмасидан иборат қатор кўринишида топиш ва бу тенгламалар синфига мансуб тенглама учун хос қиймат ҳақидаги масалани тадқиқ қилиш ҳамда қатор кўринишида топилган ечимнинг яқинлашувчи эканлигини исботлаш.

Илмий янгилиги. Диссертациянинг биринчи ва иккинчи боби ёрдамчи характерга эга. Учинчи бобда олинган илмий натижаларнинг барчаси янги. Гойн ва ундан конфлюэнция жараёнида ҳосил бўлган тенгламаларнинг хусусий ечимини, хоссалари маълум бўлган гипергеометрик функциялар орқали топиш масаласи ечилди. Бу тенгламаларнинг бири учун хос қиймат ҳақидаги янги масала ўрганилди.

Тадқиқот усуллари. Қўйилган мақсадга эришиш учун математик физиканинг махсус функциялари бўлмиш бета ва гамма функциялар, Гаусснинг гипергеометрик функцияси, икки аргументли гипергеометрик функциялар, Похгаммер симболи, Фукс ва регуляр махсус нукталар назарияси ва умумлашган Риман схемаси каби математик аппаратлардан кенг фойдаланилган.

Илмий натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти. Диссертацияда олинган илмий натижалар асосан назарий аҳамиятга эга. Лекин улардан иккинчи тартибли тўртта махсус нуктага эга бўлган оддий дифференциал тенгламаларнинг ҳамда махсус функцияларнинг кейинги

ривожии учун фойдаланиш мумкин. Бундан ташқари бакалавриятнинг “математика” ва “математика ўқитиш методикаси” йўналиши талабалари учун махсус курс сифатида ўқитишда фойдаланиш мумкин.

Тадқиқотнинг муҳокамаси. Олинган илмий натижалар Фарғона давлат университети, физика-математика факультети, математик анализ ва дифференциал тенгламалар кафедраси қошида ташкиллаштирилган «Дифференциал тенгламалар ва унга турдош математик соҳаларнинг долзарб муаммолари» илмий семинарида маъруза қилинган. Диссертациянинг маълум бир қисми 2016 йил 17 майда Андижон давлат университетида бўлиб ўтган “Математиканинг долзарб муаммолари” мавзусидаги Республика илмий-амалий конференциясида маъруза қилинган бўлса, бир қисми Тшкент шаҳридаги Турин политехника университетида ташкиллаштирилган “динамик системаларнинг долзарб муаммолари ва уларнинг тадбиқлари” номли хорижий мамлакатлар олимлари иштирокида Республика илмий конференциясида маъруза қилинган. Диссертация мавзуси бўйича 3 та илмий мақола эълон қилинган [19], [20], [21].

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат бўлиб, боблар параграфларга бўлинган. Диссертация 73 бетдан иборат.

Диссертациянинг мазмуни. Диссертациянинг кириш қисмида тадқиқот мавзусининг долзарблиги ва унинг ўрганилганлик даражаси батафсил баён қилиниб, тадқиқотнинг мақсад ва вазифалари кўрсатиб ўтилган. Бундан ташқари олинган натижаларнинг илмий янгилиги ҳамда тадқиқот усуллари ҳақида ҳам маълумот берилиб, илмий натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти, уларнинг апробацияси ҳамда диссертациянинг тузилиши ва ҳажми баён қилинган.

Биринчи бобда математик физиканинг махсус функциялари ҳақида маълумотлар келтирилган. Бу бода Эйлернинг биринчи ва иккинчи тур интеграллари ёки Эйлернинг бета ва гамма функциялари деб аталувчи

функциянинг хоссалари ўрганилган. Бундан кейинги параграфда Гаусснинг гипергеометрик тенгламасининг махсус нуқталар атрофидаги умумий ечими ва бу ечимни берувчи функциянинг хоссалари ўрганилиб чиқилган. Кейинги параграфда икки аргументли гипергеометрик функцияларнинг таърифлари, дифференциал тенгламалари, Гаусснинг гипергеометрик функцияси ва Бессел функциялари орқали ёйилмалари, интеграл кўринишлари, параметрларнинг хусусий қийматларидаги кўриниши ҳақида маълумотлар келтирилган. Бобнинг охириги параграфида Похгаммер символининг таърифи ва у билан боғлиқ формулалар келтирилган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида Фукс ва регуляр махсус нуқталар ҳақида тушунча бериб ўтилган. Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида умумлашган Риман схемаси (Риманнинг P -символи) ҳақида маълумотлар келтирилган. Бу схема фукс ва фукс бўлмаган тенгламалар учун қўлланилиши айтиб ўтилган бўлиб, унда қуйидагилар мавжуд:

- махсус нуқталарнинг s – ранги;
- махсус нуқталарнинг ҳолати;
- Фробениуснинг характеристик кўрсаткичи;
- нормал ва субнормал ечимлар учун Томенинг характеристик кўрсаткичи.

Юқоридаги тушунчалардан махсус нуқталарнинг s – ранги ва Фробениуснинг характеристик кўрсаткичига тўхталиб ўтилган.

Иккинчи бобнинг учунчи параграфида Гойн тенгламаси ва унинг ечими ҳақида маълумотлар келтирилган. Иккинчи тартибли Гойн синфига мансуб чизиқли оддий дифференциал тенгламалар тўртта махсус нуқтага эга бўлган фукс шартини қаноатлантирувчи тенгламалар ҳисобланиши мавзуда тушунтириб берилган. Иккинчи бобнинг тўртинчи параграфи Гойннинг конфлюэнт тенгламалари деб номланган бўлиб, унда Гойннинг

конфлюэнт тенгламалари ҳақида маълумотлар келтирилган. Бу мавзуда кучли ва кучсиз конфлюэнциялар ҳақида тўхталиб ўтилган.

Диссертациянинг учунчи боби Гойн ва Гойннинг конфлюэнт тенгламалари хусусий ечимлари деб номланган бўлиб, унда Гойн тенгламаси ечимини гипергеометрик функциялар қатори кўринишида топиш, Гойннинг конфлюэнт тенгламасининг ечимини гипергеометрик функциялар қатори кўринишида топиш ва Гойн синфига тегишли тенгламалар учун хос қиймат ҳақидаги масала каби мавзулар ёритилган.

Масалаларни тадқиқ қилиш жараёнида математик физиканинг махсус функциялари бўлмиш бета ва гамма функциялар, Гаусснинг гипергеометрик функцияси, икки аргументли гипергеометрик функциялар, Похгаммер символи, Фукс ва регуляр махсус нуқталар назарияси ва умумлашган Риман схемаси каби математик аппаратлардан кенг фойдаланилган.

І БОБ

МАТЕМАТИК ФИЗИКАНИНГ МАХСУС ФУНКЦИЯЛАРИ

1.1-§. Биринчи тур Эйлер интегралы (бета-функция)

Бета-функция ушбу

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \quad (1.1)$$

тенглик билан аниқланади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл *Эйлернинг биринчи тур интегралы* дейилади. Кўрсатиш қийин эмаски, $a > 0$ ва $b > 0$ бўлганда (1.1) интеграл яқинлашувчи, агар a ва b параметрларнинг биттаси нолга тенг ёки нолдан кичик бўлса ҳам узоқлашувчи бўлади. Агар (1.1) интегралда $x = 1 - t$ алмаштириш бажарсак,

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{a-1} dt = B(b, a)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Демак, бета-функция ўзининг a ва b аргументларига нисбатан симметрик функция экан. Энди (1.1) интегрални бўлаклаб интеграллаймиз. Бўлаклаб интеграллаш амалларини

$$u = 1 - x^{b-1}, \quad du = -(b-1) x^{b-2} dx,$$

$$dv = x^{a-1} dx, \quad v = x^a / a$$

бажариб,

$$x^a = x^{a-1} - x^{a-1} (1-x)$$

айниятни эътиборга олсак, $b > 1$ бўлганда

$$\begin{aligned}
B_{a,b} &= \left[\frac{(1-x)^{b-1} x^a}{a} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^a}{a} (b-1) (1-x)^{b-2} dx = \\
&= \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-2} dx - \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \\
&= \frac{b-1}{a} B_{a,b-1} - \frac{b-1}{a} B_{a,b} .
\end{aligned}$$

Бундан

$$B_{a,b} = \frac{b-1}{a+b-1} B_{a,b-1} . \quad (1.2)$$

Бета-функция a ва b га нисбатан симметрик бўлгани учун, $a > 1$ бўлганда

$$B_{a,b} = \frac{a-1}{a+b-1} B_{a-1,b} . \quad (1.3)$$

(1.2) ва (1.3) формулаларга асосан

$$a-1 B_{a-1,b} = b-1 B_{a,b-1} .$$

Агар

$$a-1 = p, \quad b-1 = q$$

десак, у ҳолда

$$B_{p,q+1} = \frac{q}{p} B_{p+1,q}$$

бўлади.

Агар b параметр бутун сонга тенг бўлса, яъни $b=n$ бўлса, $B(a,n)$ функцияга (1.2) формулани кетма-кет қўллаш натижасида

$$B_{a,n} = \frac{n-1}{a+n-1} \frac{n-2}{a+n-2} \frac{n-3}{a+n-3} \dots \frac{1}{a+1} B_{a,1}$$

тенгликка эга бўламиз. Аммо

$$B_{a,1} = \int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a}$$

бўлгани учун

$$B_{a,n} = B_{n,a} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n-1}{a \cdot a+1 \cdot a+2 \dots a+n-1}.$$

Агарда a параметр ҳам бутун сонга тенг бўлса, яъни $a = m$ бўлса, (1.3) формулани кетма-кет қўллаш натижасида қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} B_{m,n} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n-1}{m+1 \cdot m+2 \dots m+n-1} \cdot B_{m,1} = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n-1}{m+1 \cdot m+2 \dots m+n-1} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m-1} \dots \frac{1}{2} B_{1,1}, \end{aligned}$$

бундан, $B_{1,1} = 1$ бўлгани учун

$$B_{m,n} = B_{n,m} = \frac{(n-1)! (m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Энди (1.1) формулада $a = b$ десак,

$$B_{a,a} = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{a-1} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \right]^{a-1} dx$$

ёки

$$B_{a,a} = 2 \int_0^{1/2} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \right]^{a-1} dx$$

бўлади.

Охирги интегралда $\frac{1}{2} - x = \frac{\sqrt{t}}{2}$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда

$$B(a,a) = \frac{1}{2^{2a-1}} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{a-1} dt$$

ёки

$$B(a,a) = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right).$$

(1.1) интегралда

$$x = \frac{y}{1+y} \quad \text{ёки} \quad y = \frac{x}{1-x}$$

алмаштиришни бажарсак, бета-функция қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$B(a,b) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y^{a+b}} dy.$$

Бу формулада $0 < a < 1$ ҳисоблаб, $b = 1 - a$ десак,

$$B(a, 1-a) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y} dy$$

бўлади.

Ҳосил қилинган интеграл математик анализда Эйлер исми билан боғланган интеграл бўлиб, унинг қиймати $\frac{\pi}{\sin \pi a}$ га тенгдир. Шундай қилиб,

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Агар хусусий ҳолда, $a = 1 - a = \frac{1}{2}$ десак,

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$$

ҳосил бўлади.

Амалиётда бета функциядан ташқари тўлиқ бўлмаган бета функция ҳам ишлатилади.

Тўлиқ бўлмаган бета функция куйидаги интеграл билан аниқланадиган ифодага айтилади:

$$B_x(p, q) = \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad \operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0, 0 \leq x \leq 1. \quad (1.4)$$

1.2-§. Иккинчи тур Эйлер интегралли (гамма-функция)

Гамма функция куйидаги

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad (1.5)$$

интеграл билан аниқланади ва бу интеграл *иккинчи тур Эйлер интегралли* деб аталади.

Бу интеграл $a > 0$ да яқинлашувчи, $a \leq 0$ да эса узоқлашувчидир.

Бўлак-лаб интеграллаш натижасида ушбунни

$$a \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} A^a e^{-A} + \int_0^{+\infty} x^a e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^a e^{-x} dx,$$

яъни

$$\Gamma(a+1) = a \Gamma(a) \quad (1.6)$$

рекуррент формулани ҳосил қиламиз.

Бу формулани кетма-кет қўллаб, куйидагига эга бўламиз:

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2) \dots (a+1) a \Gamma(a).$$

Агар бунда $a=1$ десак ва

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 \quad (1.7)$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (1.8)$$

келиб чиқади. $n=0$ бўлганда (1.8) формула

$$0! = \Gamma(1) = 1$$

кўринишга эга бўлади.

Шу пайтгача гамма-функцияда $a > 0$ деб ҳисобладик ва унинг қиймати сифатида (1.5) интегралнинг қийматини олдик. Гамма-функциянинг (1.6) хоссаси уни a нинг манфий қийматларида ҳам аниқлашга ёрдам беради.

Энг аввало $a > 0$ да $\Gamma(a) > 0$ ва $\Gamma(1) = 1$ бўлганлиги учун (1.6) дан

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \Gamma(a+1) = +\infty, \quad \lim_{a \rightarrow +0} \Gamma(a) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{\Gamma(a+1)}{a} = +\infty$$

эканлиги келиб чиқади.

Агар $-1 < a < 0$ бўлса, (1.6) нинг ўнг томони $\Gamma(a+1)$ мавжуд бўлиб, ундан келиб чиқувчи

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a} \quad (1.9)$$

нисбат ҳам маънога эга бўлади. Шунинг учун таъриф сифатида (1.9) тенгликнинг ўнг томонидаги нисбатнинг қийматини гамма-функциянинг $a \in -1, 0$ бўлгандаги қиймати сифатида қабул қиламиз.

У ҳолда (1.9) дан келиб чиқадики,

$$\lim_{a \rightarrow -0} \Gamma(a) = -\infty, \quad \lim_{a \rightarrow -1+0} \Gamma(a) = -\infty. \quad (1.10)$$

Агар $-2 < a < -1$ бўлса, (1.10) нинг ўнг томони маънога эга бўлади ва шунинг учун унинг қийматини $\Gamma(a)$ функциянинг $a \in -2, -1$ бўлгандаги қиймати сифатида қабул қиламиз.

(1.10) тенгликларни эътиборга олсак, (1.9) дан келиб чиқадики,

$$\lim_{a \rightarrow -1-0} \Gamma a = -\infty, \quad \lim_{a \rightarrow -2+0} \Gamma a = -\infty.$$

Худди шу каби, жараённи давом эттириб, (1.9) тенглик ёрдамида гамма-функцияни $\forall a \in -n, -n+1$ ораликда аниқлаймиз, бу ерда $n \in \mathbb{N}$. Бунда

$$\lim_{a \rightarrow -n+0} \Gamma a = \pm\infty, \quad \lim_{a \rightarrow -n-0} \Gamma a = \mp\infty$$

бўлиб, n жуфт бўлганда юқори ишорали, тоқ сон бўлганда эса қуйи ишорали тенгликлар ўринли бўлади.

Фараз қилайлик, $a \in -n, -n+1$ бўлсин, у ҳолда $a+n > 0$. Шунинг учун $\Gamma a+n$ (1.5) таъриф маъносида мавжуд. Унга (1.6) формулани n марта кетма-кет қўллаб,

$$\Gamma a+n = n-1+a \ n-2+a \ \dots \ 1+a \ a \Gamma a$$

тенгликка эга бўламиз. Бу ердан эса

$$\Gamma a = \frac{\Gamma a+n}{a \ a+1 \ \dots \ a+n-2 \ a+n-1} \quad (1.11)$$

тенглик келиб чиқади.

Демак, ихтиёрий бутун бўлмаган манфий сон учун Γa нинг қийматини (1.11) тенглик бўйича ҳисоблаш мумкин экан.

Амалиётда гамма функциядан ташқари яна тўлиқ бўлмаган гамма функциялар ҳам ишлатилади.

Қўшимча тўлиқ бўлмаган гамма функция қуйидаги

$$\Gamma \nu, x = \int_x^{\infty} t^{\nu-1} e^{-t} dt$$

интеграл билан аниқланса, тўлиқ бўлмаган гамма функциянинг ўзи эса қуйидагича аниқланади:

$$\gamma_{\nu, x} = \Gamma_{\nu} - \Gamma_{\nu, x} = \int_0^x t^{\nu-1} e^{-t} dt.$$

1.3-§. Гауссинг гипергеометрик функцияси

Ушбу

$$x(1-x)y'' + [c - a + b + 1 - x]y' - aby = 0 \quad (1.12)$$

гипергеометрик тенглама ёки Гаусс тенгламаси деб аталувчи тенгламани текширамыз. Бу ерда a, b, c - учта ихтиёрий параметр бўлиб, ҳақиқий ёки комплекс қийматларни қабул қилади. Булардан икkitаси: a ва b тенгламада симметрик иштирок этади.

$x=0$ ва $x=1$ бўлганда тенгламанинг тартиби бузилиб, биринчи тартибли тенглама ҳосил бўлади, $x=\infty$ да эса (1.12) тенглама умуман маъносини йўқотади. Шунинг учун бу нуқталар махсус нуқталар ҳисобланади.

(1.12) тенгламанинг ечимини $x=0$ махсус нуқта атрофидаги ечимини

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \quad (1.13)$$

даражали қатор кўринишида излаймиз. Бундан

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n x^{n-1}$$

ёки

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_{n+1} x^n,$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) A_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) A_{n+2} x^n.$$

Бу ҳосилаларнинг қийматини ва у ни (1.12) тенгламага кўямиз. У ҳолда

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^{n+1} A_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} [c - a + b + 1 - x](n+1) A_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} ab A_n x^n = 0.$$

Номалум $A_1, \dots, A_n, \dots$ ўзгармасларни топиш учун аниқмас коэффициентлар усулидан фойдаланамиз, бунга асосан x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни нолга тенглаш керак. x^k олдидаги умумий коэффициентларни нолга тенглаб, ушбу

$$- (k-1) k A_k + k (k+1) A_{k+1} - k (a+b+1) A_k + c (k+1) A_{k+1} - ab A_k = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан

$$A_{k+1} = \frac{k+a}{(k+1)} \frac{k+b}{c+k} A_k$$

рекуррент формулага эга бўламиз.

Бу ерда $A_0 = 1$ ва $c \neq 0, -1, -2, \dots, -n, \dots$ деб ҳисоблаймиз. (1.12) гипергеометрик тенгламанинг биринчи хусусий ечими y_1 ни $F(a, b, c, x)$ орқали белгилаб, A_n коэффициентларнинг топилган қийматларини (1.13) қаторга қўямиз. У ҳолда

$$y_1 = F(a, b, c; x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{c} \frac{b}{n} \frac{1}{n} x^n \quad (1.14)$$

бўлади.

Бу ерда

$$a_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a (a+1) \dots (a+n-1),$$

хусусий ҳолда, $(a)_0 = 1$ ва $\forall n \in N$ учун $1_n = n!$.

(1.14) қатор *гипергеометрик қатор*, бу қаторнинг йиғиндиси бўлган $F(a, b, c; x)$ функция эса *гипергеометрик функция* дейилади.

Даламбер принципага асосан,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a+n}{n+1} \frac{b+n}{c+n} x \right| = |x|.$$

Демак, (1.14) қатор $|x| < 1$ да абсолют яқинлашувчи, $|x| > 1$ да узоқлашувчи бўлади. Исботсиз эслатиб ўтамизки, $x = 1$ бўлганда, агар $c - a - b > 0$ бўлса, (1.14) қатор абсолют яқинлашувчи, агар $c - a - b \leq 0$ бўлса, узоқлашувчи, $x = -1$ бўлганда эса, агар $c - a - b > 0$ бўлса, абсолют яқинлашувчи, агар $-1 < c - a - b \leq 0$ бўлса, шартли яқинлашувчи, агар $c - a - b \leq -1$ бўлса узоқлашувчи бўлади.

Агар (1.14) формулада $b = c$ бўлса,

$$a_n = (-1)^n (-a) (-a-1) \dots (-a-n+1) = (-1)^n \binom{-a}{n} n!$$

тенгликка асосан

$$F(a, b, b; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{-a}{n} x^n = (1-x)^{-a}$$

биномиал қатор ҳосил бўлади.

Агарда $a = 1, b = c$ бўлса, (1.14) формула ушбу

$$F(1, b, b; x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

кўринишга эга бўлади, яъни $a = 1, b = c$ бўлган ҳолда гипергеометрик қатор геометрик прогрессияга айланади, шунинг учун ҳам у гипергеометрик қатор деб аталган.

(1.12) тенгламанинг иккинчи хусусий, умуман айтганда, (1.14) га чизиқли боғлиқ бўлмаган ечимини топиш учун (1.12) тенгламада

$$y = x^\rho \eta$$

алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда (1.12) тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$x(1-x)\eta'' + [c+2\rho - a+b+1+2\rho x]\eta' -$$

$$-\left[ab + \rho a + b + \rho - \frac{\rho}{x} \frac{\rho + c - 1}{x}\right] \eta = 0$$

Бу тенглама (1.12) тенглама типига тегишли бўлиши учун $\rho = 1 - c$ (ёки $\rho = 0$, албатта бу ҳол бизни қизиқтирмайди) бўлиши керак. У ҳолда

$$x^{1-c} \eta'' + (2-c - [(a-c+1) + (b-c+1) + 1]) x^{-c} \eta' - (a-c+1)(b-c+1) \eta = 0$$

тенгламага эга бўламиз. Шундай қилиб, $\rho = 1 - c$ бўлганда $y = x^\rho \eta$ алмаштириш (1.12) тенгламани худди шу кўринишдаги тенгламага ўтказди, бунда фақат a, b, c ларни мос равишда

$$a - c + 1, b - c + 1, 2 - c$$

ларга алмаштириш зарур. Демак, берилган (1.12) тенглама y_1 га чизиқли боғлиқ бўлмаган

$$y_2 = x^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; x)$$

ечимга эга бўлади. Шу билан бирга, y_2

$$2 - c \neq 0, -1, -2, \dots, -n, \dots$$

бўлгандагина маънога эга бўлади. Шундай қилиб, (1.12) тенгламанинг умумий ечимини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$y = C_1 F(a, b, c; x) + C_2 x^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; x),$$

бу ерда C_1 ва C_2 - ихтиёрий ўзгармаслар.

Агар гипергеометрик функцияга симметрик бўлиб кирган a ва b параметрлардан биттаси манфий бутун сон $-n$ га тенг бўлса, (1.14) гипергеометрик қатор узилиб қолади ва у n -даражали кўпхадга айланади.

Агарда $a = -n_1, b = -n_2$ бўлиб, бунда $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ бўлса, у ҳолда гипергеометрик қатор кўпхадга айланиб, унинг даражаси n_1, n_2 сонларнинг кичигига тенг бўлади.

(1.12) тенгламанинг $x = 1$ махсус нукта атрофидаги ечимларини топиш учун $t = 1 - x$ алмаштириш қиламиз. Натижада (1.12) тенгламадан

яна ўзига ўхшаш тенглама ҳосил бўлиб, янги тенглама $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = a + b - c + 1$ параметрларга эга бўлади. Буни эътиборга олиб, (1.12) тенгламанинг $x = 1$ махсус нукта атрофидаги чизиқли боғлиқ бўлмаган ечимларини ёзиш мумкин:

$$y_3 = F(a, b, a + b - c + 1; 1 - x),$$

$$y_4 = (1 - x)^{c-a-b} F(c - a, c - b, c + 1 - a - b; 1 - x),$$

бу ерда $c - a - b \notin \mathbb{Z}$ ва $|1 - x| < 1$.

Агар (1.12) тенгламада $t = x^{-1}$, $\omega = t^{-a} y$ алмаштириш бажарсак, ω t функцияга нисбатан, параметрлари $a_1 = a$, $b_1 = 1 + a - c$, $c_1 = 1 + a - b$, бўлган тенгламага эга бўламиз. Бунда (1.12) тенгламанинг $x = \infty$ махсус нуктаси янги тенгламанинг $t = 0$ махсус нуктасига алмашади. Буларни эътиборга олиб, (1.12) тенгламанинг $x = \infty$ махсус нуктаси атрофидаги чизиқли боғлиқ бўлмаган иккита ечимларини топамиз:

$$y_5 = x^{-a} F\left(a, 1 + a - c, 1 + a - b; \frac{1}{x}\right),$$

$$y_6 = x^{-b} F\left(b, 1 + b - c, 1 + b - a; \frac{1}{x}\right),$$

бу ерда $a - b \notin \mathbb{Z}$ ва $|x| > 1$.

Шундай қилиб, (1.12) тенгламанинг параметрлари $c, c - a - b, a - b \notin \mathbb{Z}$ шартларни қаноатлантирганда унинг олти асосий ечимлари гипер-геометрик функция орқали ёзилишини топдик.

(1.14) қаторни ҳадлаб дифференциаллаш натижасида дарҳол ушбу

$$\frac{d}{dx} F(a, b, c; x) = \frac{ab}{c} F(a + 1, b + 1, c + 1; x)$$

формулани ҳосил қиламиз.

(1.14) қаторни аввал x^a , x^b ёки x^{c-1} га кўпайтириб, сўнггра ҳадлаб дифференциалласак, қуйидаги формулалар келиб чиқади:

$$\frac{d}{dx} \left[x^a F(a, b, c; x) \right] = ax^{a-1} F(a + 1, b, c; x),$$

$$\frac{d}{dx} \left[x^b F(a, b, c; x) \right] = b x^{b-1} F(a, b+1, c; x),$$

$$\frac{d}{dx} \left[x^{c-1} F(a, b, c; x) \right] = (c-1) x^{c-2} F(a, b, c-1; x).$$

Худди шу каби қуйидаги тенгликлар ҳам ўринли:

$$1. \frac{d^n}{dx^n} F(a, b, c; x) = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} F(a+n, b+n, c+n; x)$$

$$2. \frac{d^n}{dx^n} [x^{a+n-1} F(a, b, c; x)] = (a)_n x^{a-1} F(a+n, b, c; x)$$

$$3. \frac{d^n}{dx^n} [x^{c-1} F(a, b, c; x)] = (c-n)_n x^{c-n-1} F(a, b, c-n; x)$$

$$4. \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{a+n-1} F(a, b, c; x)] = \\ = (-1)^n \frac{(a)_n (c-b)_n}{(c)_n} (1-x)^{a-1} F(a+n, b, c+n; x)$$

$$5. \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{a+b-c} F(a, b, c; x)] = \\ = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n} (1-x)^{a+b-c-n} F(a, b, c+n; x)$$

$$6. \frac{d^n}{dx^n} [x^{c-1} (1-x)^{b-c+n} F(a, b, c; x)] = \\ = (c-n)_n x^{c-n-1} (1-x)^{b-c} F(a-n, b; c-n; x)$$

$$7. \frac{d^n}{dx^n} [x^{c-1} (1-x)^{a+b-c} F(a, b, c; x)] = \\ = (c-n)_n x^{c-n-1} (1-x)^{a+b-c-n} F(a-n, b-n, c-n; x)$$

$$8. \frac{d^n}{dx^n} [x^{c-a+n-1} (1-x)^{a+b-c} F(a, b, c; x)] = \\ = (c-a)_n x^{c-a-1} (1-x)^{a+b-c-n} F(a-n, b, c; x).$$

Бу тенгликлар тўғрилигига, масалан, математик индукция методи билан ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Одатда ушбу олтига $F(a \pm 1, b, c; x)$, $F(a, b \pm 1, c; x)$, $F(a, b, c \pm 1; x)$ функциялар $F(a, b, c; x)$ функцияга қўшни функциялар дейилади. $F(a, b, c; x)$ ва ихтиёрий унга қўшни икки функциялар орасида коэффициентлари x га боғлиқ чизиқли функция бўлган чизиқли комбинация мавжуд. Бундай комбинациялар 15 та бўлиб, уларни Гаусс топган.

(1.14) қаторни

$$a_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

тенгликни эътиборга олиб, ушбу

$$\begin{aligned} F(a, b, c; x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+n) \Gamma(b+n)}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c+n) n!} x^n = \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \left[\frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(c)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n) n!} x^n \right] = \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n) n!} x^n \end{aligned}$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Бундан $B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ формулага асосан (бета функция)

$$B(b+n, c-b) = \frac{\Gamma(b+n) \Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)}$$

бўлганлиги сабабли, аввалги тенглик

$$F(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{n!} x^n B(b+n, c-b)$$

кўринишда ёзилади ёки бета-функцияга асосан

$$F(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{n!} x^n \int_0^1 t^{n+b-1} (1-t)^{c-b-1} dt$$

Бу ердаги интеграл n нинг барча қийматларида яқинлашувчи бўлгани учун

$$b > 0, \quad c - b > 0 \quad \text{ёки} \quad c > b > 0 \quad (1.15)$$

шартларнинг бажарилиши зарурдир.

Аввалги тенгликни ушбу

$$\begin{aligned} F_{a,b,c;x} &= \frac{\Gamma c}{\Gamma b \Gamma c-b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma a+n}{n! \Gamma a} \int_0^1 t^{n+b-1} (1-t)^{c-b-1} x^n dt = \\ &= \frac{\Gamma c}{\Gamma b \Gamma c-b} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x t^n \right] dt \end{aligned}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Интеграл остидаги йиғинди $1 - xt^{-a}$ функциянинг чексиз қаторга ёйلمасидан иборат бўлгани учун

$$F_{a,b,c;x} = \frac{\Gamma c}{\Gamma b \Gamma c-b} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} dt$$

формулага эга бўламиз. Бу эса гипергеометрик функциянинг интеграл кўринишидир.

(1.15) шартларни битта $c - a - b > 0$ шарт билан алмаштириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, агар $a < 0$ бўлса, $-a > 0$ бўлади ва бу тенгсизликнинг (1.15) тенгсизликни иккинчиси билан қўшиб, $a - b - c > 0$ тенгсизликни ҳосил қиламиз; агарда $a > 0$ бўлса, бу тенгсизликдан, (1.15) тенгсизликларнинг иккинчисидан кучлироқ бўлган $c - b > a$ тенгсизликка эга бўламиз.

Гаусснинг гипергеометрик функцияси ва қаторини параметрлар сони бўйича умумлаштирувчи ушбу функция(қатор)лар

$${}_mF_n(a_1, a_2, \dots, a_m; c_1, c_2, \dots, c_n, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_1 \cdot \dots \cdot a_m}{c_1 \cdot \dots \cdot c_n} \cdot \frac{x^k}{k!}$$

Умулашган гипергеометрик функция (қатор)лар деб аталади, бу ерда $a_j, b_s \neq 0, -1, -2, \dots, \quad j = \overline{1, m}, \quad s = \overline{1, n}$. бу белгилашларга асосан

$F_{a,b,c;x} = {}_2F_1(a,b,c;x)$ бўлади.

1.4-§. Икки аргументли гипергеометрик функциялар

Бундай функциялар ва қаторлар назарияси жуда кенг ва чуқур ўрганилган бўлиб, биз бу ерда улардан олтитаси ҳақида баъзи маълумотларни келтирамиз.

А) Таърифлари.

$$\begin{aligned}
 F_1 \alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{m+n} \beta_m \beta'_n}{\gamma_{m+n} m!n!} x^m y^n, \\
 F_2 \alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{m+n} \beta_m \beta'_n}{\gamma_m \gamma'_n m!n!} x^m y^n, \\
 F_3 \alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma; x, y &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m \alpha'_n \beta_m \beta'_n}{\gamma_{m+n} m!n!} x^m y^n, \quad (1.16) \\
 H_2 \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon; x, y &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{m-n} \beta_m \gamma_n \delta_n}{\varepsilon_m m!n!} x^m y^n, \\
 \Xi_2 \alpha, \beta, \gamma; x, y &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m \beta_m}{\gamma_{m+n} m!n!} x^m y^n, \quad |x| < 1, \\
 H_3 \alpha, \beta, \delta, e; x, y &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{m-n} \beta_m}{\delta_m m!n!} x^m y^n, \quad |x| < 1.
 \end{aligned}$$

Булардан дастлабки тўрттаси Горн функциялари, охирги икkitаси эса бузилган гипергеометрик функция (қатор) лар дейилади. Ξ_2 – гумберт функцияси деб ҳам аталади.

Бу қаторларнинг яқинлашиш соҳаси қуйидагича:

$$F_1, F_3 - x, y : 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 ;$$

$$F_2 - x, y : 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 - x ;$$

$$H_2 - x, y : 0 \leq x < 1, 0 \leq y \leq 1/2 \cup x, y : 0 \leq x < 1, 0 \leq y \leq 1 - x/2 ;$$

$$\Xi_2, H_3 - x, y : -1 < x < 1, -\infty < y < +\infty .$$

В) Дифференциал тенгламалари

$$\left. \begin{aligned} x \frac{1-x}{y} r + y \frac{1-x}{1-y} s + \left[\gamma - \alpha + \beta + 1 \frac{x}{y} \right] p - \beta y q - \alpha \beta z &= 0, \\ y \frac{1-y}{1-y} t + x \frac{1-y}{1-y} s + \left[\gamma - \alpha + \beta' + 1 \frac{y}{y} \right] q - \beta' x p - \alpha \beta' z &= 0 \end{aligned} \right\} F_1$$

$$\left. \begin{aligned} x \frac{1-x}{y} r - x y s + \left[\gamma - \alpha + \beta + 1 \frac{x}{y} \right] p - \beta y q - \alpha \beta z &= 0, \\ y \frac{1-y}{1-y} t - x y s + \left[\gamma' - \alpha + \beta' + 1 \frac{y}{y} \right] q - \beta' x p - \alpha \beta' z &= 0; \end{aligned} \right\} F_2$$

$$\left. \begin{aligned} x \frac{1-x}{y} r - y s + \left[\gamma - \alpha + \beta + 1 \frac{x}{y} \right] p - \alpha \beta z &= 0, \\ y \frac{1-y}{1-y} t + x s + \left[\gamma - \alpha' + \beta' + 1 \frac{y}{y} \right] q - \alpha' \beta' z &= 0; \end{aligned} \right\} F_3$$

$$\left. \begin{aligned} x \frac{x-1}{y} r - x y s + \left[\alpha + \beta + 1 \frac{x-\varepsilon}{y} \right] p - \beta y q + \alpha \beta z &= 0, \\ y \frac{y+1}{y+1} t - x s + \left[1 - \alpha + \gamma + \delta + 1 \frac{y}{y} \right] q + \gamma \delta z &= 0; \end{aligned} \right\} H_2$$

$$\left. \begin{aligned} x \frac{1-x}{y} r + x y s + \left[\delta - \alpha + \beta + 1 \frac{x}{y} \right] p + \beta y q - \alpha \beta z &= 0, \\ y t - x s + 1 - \alpha \quad q + z &= 0. \end{aligned} \right\} H_3$$

Бу ерда $p = z_x$, $q = z_y$, $r = z_{xx}$, $s = z_{xy}$, $t = z_{yy}$.

С) $F(a, b, c; x)$ ва J_ν x функциялар бўйича ёйилмалари.

$$F_1 \alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m \beta_m}{\gamma_m m!} x^m F(\alpha + m, \beta', \gamma + m; y =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n \beta'_n}{\gamma_n n!} y^n F(\alpha + n, \beta, \gamma + n; x ;$$

$$F_2 \alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m \beta_m}{\gamma_m m!} x^m F(\alpha + m, \beta', \gamma'; y =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n \beta'_n}{\gamma'_n n!} y^n F(\alpha + n, \beta, \gamma; x ;$$

$$F_3 \alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma; x, y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m \beta_m}{\gamma_m m!} x^m F(\alpha', \beta', \gamma + m; y =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha'_n \beta'_n}{\gamma_n n!} y^n F(\alpha, \beta, \gamma + n; x ; \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned}
H_2 \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon; x, y &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m}{\varepsilon_m} \frac{\beta_m}{m!} x^m F_{\gamma, \delta, 1-\alpha-m; -y} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1^n}{1-\alpha_n} \frac{\gamma_n}{n!} \delta_n y^n F_{\alpha-n, \beta, \varepsilon; x}; \\
\Xi_2 \alpha, \beta, \gamma; x, y &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m}{\gamma_m} \frac{\beta_m}{m!} x^m \bar{J}_{\gamma+m-1} 2i\sqrt{y} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{\gamma_n n!} F_{\alpha, \beta, \gamma+n; x}; \\
H_3 \alpha, \beta, \delta; x, y &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m}{\delta_m} \frac{\beta_m}{m!} x^m \bar{J}_{-\alpha-m} 2\sqrt{y} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1^n}{1-\alpha_n} \cdot \frac{y^n}{n!} F_{\alpha-n, \beta, \delta; x}.
\end{aligned}$$

D) Интеграл кўринишлари.

$$F_1 \alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y = \frac{\Gamma \gamma}{\Gamma \alpha \Gamma \gamma - \alpha} \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1}}{(1-ux)^{\beta} (1-uy)^{\beta'}} du,$$

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \gamma - \alpha > 0;$$

$$F_2 \alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y = \frac{\Gamma \gamma \Gamma \gamma'}{\Gamma \beta \Gamma \beta' \Gamma \gamma - \beta \Gamma \gamma' - \beta'} \times$$

$$\times \int_0^1 \int_0^1 u^{\beta-1} v^{\beta'-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-v)^{\gamma'-\beta'-1} (1-ux-vy)^{-\alpha} du dv,$$

$$\operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \beta' > 0, \operatorname{Re} \gamma - \beta > 0, \operatorname{Re} \gamma' - \beta' > 0;$$

$$F_3 \quad \alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma; x, y = \frac{\Gamma \quad \gamma}{\Gamma \quad \beta \quad \Gamma \quad \beta' \quad \Gamma \quad \gamma - \beta - \beta'} \times$$

$$\times \int_0^1 \int_0^{1-v} u^{\beta-1} v^{\beta'-1} (1-u-v)^{\gamma-\beta-\beta'-1} (1-ux)^{-\alpha} (1-vy)^{-\alpha'} du dv,$$

$$\operatorname{Re} \beta > 0, \quad \operatorname{Re} \beta' > 0, \quad \operatorname{Re} \gamma - \beta - \beta' > 0;$$

$$H_2 \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon; x, y = \frac{\Gamma \quad \varepsilon}{\Gamma \quad \beta \quad \Gamma \quad \varepsilon - \beta} \times$$

$$\int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\varepsilon-\beta-1} (1-xu)^{-\alpha} F[\gamma, \delta, 1-\alpha; y \quad xu-1] du,$$

$$\operatorname{Re} \varepsilon > \operatorname{Re} \beta > 0;$$

$$\Xi_2 \quad \alpha, \beta, \gamma; x, y = \frac{\Gamma \quad \gamma}{\Gamma \quad \alpha \quad \Gamma \quad \gamma - \alpha} \times$$

$$\times \int_0^1 v^{\alpha-1} (1-v)^{\gamma-\alpha-1} (1-vx)^{-\beta} \bar{I}_{\gamma-\alpha-1} \left[2\sqrt{y(1-v)} \right] dv,$$

$$\operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha > 0;$$

$$H_3 \quad \alpha, \beta, \delta; x, y = \frac{\Gamma \quad \delta}{\Gamma \quad \beta \quad \Gamma \quad \delta - \beta} \times$$

$$\times \int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\delta-\beta-1} (1-ux)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha} \left[2\sqrt{y(1-ux)} \right] du,$$

$$\operatorname{Re} \delta > \operatorname{Re} \beta > 0.$$

E) Параметрларнинг хусусий қийматларидаги кўриниши.

$$F_1 \alpha, \beta, \beta', \beta + \beta'; x, y = 1 - y^{-\alpha} F\left(\alpha, \beta, \beta + \beta'; \frac{x-y}{1-y}\right);$$

$$F_2 \alpha, \beta, \beta', \beta, \gamma'; x, y = 1 - x^{-\alpha} F\left(\alpha, \beta', \gamma'; \frac{y}{1-x}\right);$$

$$F_2 \alpha, \beta, \beta', \alpha, \alpha; x, y = 1 - x^{-\beta} 1 - y^{-\beta'} F\left(\beta, \beta', \alpha; \frac{xy}{1-x} \frac{1}{1-y}\right);$$

$$F_3 \alpha, \gamma - \alpha, \beta, \gamma - \beta, \gamma; x, y = 1 - y^{\alpha + \beta - \gamma} F \alpha, \beta, \gamma; x + y - xy ;$$

$$H_2 \alpha, \beta, \gamma, \delta, \beta; x, y = 1 - x^{-\alpha} F[\gamma, \delta, 1 - \alpha; y \ x - 1];$$

$$H_3 \alpha, \beta, \beta; x, y = 1 - x^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha} \left[2\sqrt{y} \sqrt{1-x} \right];$$

1.5-§. Похгаммер символи

Похгаммер символи қуйидаги тенглик билан аниқланувчи муносабатга айтилади:

$$a_k = a \ a + 1 \ ... \ a + k - 1 = \frac{\Gamma \ a + k}{\Gamma \ a} = -1^k \frac{\Gamma \ 1 - a}{\Gamma \ 1 - a - k}$$

бу ерда $a \neq 1, 2, \dots, k$; $k = 1, 2, \dots$, $\Gamma \dots$ – 1.2 параграфда ўрганилган гамма функция.

Похгаммер символи учун қуйидаги формулалар ўринли:

$$a_0 = 1, \quad a_{-k} = \frac{\Gamma(a-k)}{\Gamma(a)} = \frac{-1^k}{1-a_k},$$

$$n_k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}, \quad 1_k = k!,$$

$$1/2_k = 2^{-2k} \frac{(2k)!}{k!}, \quad 3/2_k = 2^{-2k} \frac{(2k+1)!}{k!},$$

$$a_{n+k} = a_n a_{+n}_k, \quad a_{n-k} = \frac{-1^k a_n}{1-a_{-n}_k},$$

$$a_{nk} = \left(\frac{a}{n}\right)_k \left(\frac{a+1}{n}\right)_k \dots \left(\frac{a+n-1}{n}\right)_k n^{nk}, \quad a_{2k} = \left(\frac{a}{2}\right)_k \left(\frac{a+1}{2}\right)_k 2^{2k},$$

$$a+mk_{nk} = \frac{a_{mk+nk}}{a_{mk}}, \quad a+k_k = \frac{a_{2k}}{a_k}, \quad a+m_k = \frac{a_k a_{+k}_m}{a_m},$$

$$a-k_k = -1^k 1-a_k, \quad a-m_k = \frac{1-a_m a_k}{1-a_{-k}_m},$$

$$a+k_{n-k} = \frac{a_n}{a_k}, \quad a+mk_{n-lk} = \frac{a_n a_{+n}_{mk-lk}}{a_{mk}},$$

$$a-mk_{n-lk} = \frac{-1^{lk} a_n 1-a_{mk}}{1-a_{-n}_{lk+mk}}, \quad a-k_{n-k} = \frac{-1^k a_n 1-a_k}{1-a_{-n}_{2k}}.$$

I боб бўйича хулосалар

Ушбу бобда математик физиканинг махсус функцияларидан айримларини келтиришни қарор қилдик. Бу махсус функцияларнинг хоссаларини ўрганиб кейинги боблардаги масалаларга тадбиқини кўриб чиқамиз. Шу сабабли бу бобда Эйлернинг биринчи ва иккинчи тур интеграллари ёки бета ва гамма функциялар номи билан машхур бўлган функциянинг хоссалари ўрганилди. Бундан кейинги параграфда Гаусснинг гипергеометрик тенгламасининг махсус нуқталар атрофидаги умумий ечими ва бу ечимни берувчи функциянинг хоссалари ўрганилиб чиқилди. Бу функциянинг интеграл кўринишлари ҳақида батафсил маълумот берилди. Бундан ташқари икки аргументли гипергеометрик функцияларнинг таърифлари, дифференциал тенгламалари, Гаусснинг гипергеометрик функцияси ва бessel функциялари орқали ёйилмалари, интеграл кўринишлари, параметрларнинг хусусий қийматларидаги кўриниши ҳақида маълумотлар келтирилган. Бобнинг охирги параграфида Похгаммер символининг таърифи ва u билан боғлиқ формулалар келтирилган.

II БОБ

ГОЙН ТЕНГЛАМАЛАРИ СИНФИ ВА УНИНГ ЕЧИМЛАРИ

2.1-§. Фукс ва регуляр махсус нуқталар

Қуйидаги тенгламани қарайлик:

$$L_z y z = P_0 z y'' z + P_1 z y' z + P_2 z y z = 0, \quad z \in C, \quad (2.1)$$

бу ерда $P_0 z$, $P_1 z$ ва $P_2 z$ лар z комплекс текисликдаги полиномиал коэффициентлар. (2.1) даги штрих эса z бўйича ҳосилани билдиради. Фараз қилинади (2.1) даги полиномлар z га боғлиқ умумий кўпайтиувчига эга бўлмасин.

(2.1) тенглама иккита чизикли боғлиқ бўлмаган ечимга эга. (2.1) тенгламанинг умумий ечимини бу иккала ечимнинг чизикли комбинациясидан ҳосил қилиш мумкин бўлади.

(2.1) тенглама учун Коши масаласини қўядиган бўлсак, яъни (2.1) тенгламанинг $y z_0 = y_0$, $y' z_0 = y'_0$ шартларни қаноатлантирадиган ечимини топиш талаб қилинган бўлса ва бу масала ечимга эга бўладиган бўлса, у ҳолда $z_0 \in C$ нуқта (2.1) тенгламанинг оддий нуқтаси дейилади. $z = \infty$ нуқтадаги муаммони ўрганишда $z = 1/\xi$ алмаштириш ёрдамида $\xi = 0$ нуқтадаги муаммони ўрганишга келтириш мумкин бўлади. Бу ерда савол туғилиши мумкин. $\xi = 0$ нуқта оддий нуқта бўладими ёки йўқ, берилган z нуқтани қандай атаймиз? Оддий нуқта атрофида (2.1) тенгламанинг ҳамма хусусий ечимлари голоморф функция бўлади [7].

Муҳим фактга тўхталиб ўтамиз. (2.1) тенглама учун қўйилган Коши масаласини бу тенгламанинг махсус нуқтасида ечиш мумкин бўлмайди. (2.1) тенгламанинг махсус (сингуляр) нуқтаси бу $P_0 z$ полиномнинг ноллари ва $z = \infty$ ҳисобланади. Мисол учун Бессел тенгламаси

$$z^2 y'' + zy' + (z^2 - \nu^2) y = 0 \quad (2.2)$$

иккита махсус нуктага эга, жумладан $z=0$ ва $z=\infty$. Бошқа нукталар эса (2.2) тенгламанинг оддий нукталари ҳисобланади.

$z = z^*$ нуктада $f(z)$ функция махсусликка эга бўлсин. $f(z)$ функция z^* нуктада чекли тартибли функция дейилади, агар шунақанги $\rho \in \mathbb{R}$ мавжуд бўлсаки, у учун

$$\lim_{z \rightarrow z^*} f(z) (z - z^*)^\rho = 0$$

ўринли бўлса. $z^* = \infty$ бўлганда юқоридаги шарт

$$\lim_{z \rightarrow z^*} f(z) z^{-\rho} = 0$$

га алмашади.

Юқоридаги фикрларга мисоллар келтирамиз. $z^3 \ln z$, $z^{7/3} e^z$ функциялар $z=0$ да чекли тартибли функциялар ҳисобланади. $\sin 1/z$, $z^3 \exp 1/z^2$ функция эса $z=0$ да чекли тартибли бўлмаган функциялар ҳисобланади. $z^{7/3} e^z$ функция $z=\infty$ да чекли тартибли функция бўла олмайди.

Агар (2.1) тенгламанинг иккита чизиқли боғлиқ бўлмаган хусусий ечимлари $z = z^*$ махсус нуктасида чекли тартибли бўлса, у ҳолда бу нукта (2.1) тенгламанинг регуляар махсус нуктаси, акс ҳолда эса иррегуляар махсус нуктаси бўлади.

Мисол сифатида $z=0$ нукта (2.2) тенгламанинг регуляар махсус нуктаси бўлиши ва $z=\infty$ нукта эса (2.2) тенгламанинг иррегуляар махсус нуктаси лигини кўрсатиш мумкин.

Махсус нукталарнинг бу классификациясида бевосита тенглама ечими хоссаларига асосан келтириб чиқарилган. Агар $P(z) = P_1(z) / P_0(z)$ функция $z = z^*$ махсус нуктада бирдан ошиб кетмайдиган тартибда

полюсга эга бўлса, $Q(z) = P_2(z) / P_0(z)$ функция эса иккидан ошиб кетмайдиган тартибда полюсга эга бўлса, у ҳолда бу нуқта фукс махсус нуқтаси бўлади.

Тенгламанинг махсус нуқтаси чексизликда фукс махсус нуқта бўлади, агар

$$P(z) = O(z^{-1}), \quad Q(z) = O(z^{-2})$$

бўлса.

(2.2) тенглама учун $z = 0$ махсус нуқта фукс махсус нуқта ҳисобланади, шу вақтда $z = \infty$ нуқта эса бундай ҳисобланмайди.

Теорема. (2.1) тенгламанинг махсус нуқтаси регуляр махсус нуқта бўлади, агар у фақат ва фақат у фукс махсус нуқтаси бўлса.

Бу теорема (2.1) тенгламанинг махсус нуқталари учун “регуляр махсус нуқта” ва “фукс махсус нуқта” тушунчаларининг эквивалентлигини кўрсатади.

(2.1) тенглама фукс тенгламаси дейилади, агар унинг барча махсус нуқталари регуляр (фукс) махсус нуқталар бўлса.

Мисол учун, Эйлер тенгламасида, яъни

$$z^2 y'' - (a + b - 1) z y' + aby = 0$$

тенгламада $z = 0$, $z = \infty$ регуляр махсус нуқталар ҳисобланади. Шунинг учун бу тенглама фукс тенгламаси бўлади. (2.2) тенглама эса фукс бўлмаган тенглама ҳисобланади.

2.2-§. Умумлашган Риман схемаси

Бу параграфда умумлашган Риман схемаси (Риманнинг Р-символи) билан танишамиз. Бу схема фукс ва фукс бўлмаган тенгламалар учун қўлланилади. Схема қуйидагилардан иборат:

- махсус нуқталарнинг s – ранги;
- махсус нуқталарнинг ҳолати;
- Фробениуснинг характеристик кўрсаткичи;
- нормал ва субнормал ечимлар учун Томенинг характеристик кўрсаткичи.

Юқоридаги тушунчалардан махсус нуқталарнинг s – ранги ва Фробениуснинг характеристик кўрсаткичига тўхталиб ўтамиз.

А) махсус нуқталарнинг s – ранги.

(2.1) тенгламанинг ҳар бир махсус нуқтаси (регуляр ёки иррегуляр) унинг s – ранги орқали характерланади.

Тенгламанинг s – ранги R_{z_j} , z_j чекли иррегуляр махсус нуқталар $P_0(z)$, $P_1(z)$, $P_2(z)$ полиномларнинг $z = z_j$ бўлганда (2.1) тенгламадаги ҳолатини аниқлайди, жумладан

$$R_{z_j} = \max \left(K_1(z_j), \frac{K_2(z_j)}{2} \right),$$

бу ерда $K_1(z_j) = \frac{P_0(z)}{P_1(z)}$ функциянинг z_j нуқтадаги қаррали ноллари,

$K_2(z_j)$ – шу нуқтада $\frac{P_0(z)}{P_2(z)}$ функциянинг ноллари тартиби.

Агар иррегуляр махсус нуқта чексизликда бўлса, унинг s – ранги $R = \infty$ қуйидагича аниқланади:

$$R_{\infty} = \max \left(K_1_{\infty}, \frac{K_2_{\infty}}{2} \right),$$

бу ерда $K_1_{\infty} = k_1 - k_0 + 2$, $K_2_{\infty} = k_2 - k_0 + 4$, k_0, k_1, k_2 – лар полиномларнинг даражалари.

Регуляр ва иррегуляр махсус нуқталарнинг таърифига асосан, махсус нуқталарнинг s – ранги бутун ёки ярим бутун сонлар бўлади. Регуляр махсус нуқталарнинг s – ранги элементар ёки бундай бўлмаган тақдирда ҳам бирга тенг.

(2.2) Бессел тенгламаси махсус нуқтасининг чексизликдаги s – ранги $R_{\infty} = 2$ га тенг. Шу билан бир каторда қуйидаги тенгламанинг ҳам чексизликдаги s – рангини кўриб чиқайлик.

$$y'' z - z + \lambda y z = 0,$$

бу тенгламанинг чексизликдаги s – ранги $R_{\infty} = 5/2$ га тенг.

Б) Фробениуснинг характеристик кўрсаткичи.

(2.1) тенгламанинг ихтиёрий z_j чекли регуляр махсус нуқтасидаги қуйидаги характеристик ёки иккинчи тартибли алгебраик тенгламани тузишимиз мумкин:

$$\rho^2 - \rho - 1 + p_j \rho + q_j = 0, \quad (2.3)$$

бу ерда

$$p_j = \frac{P_1(z)}{P_0(z)} \Big|_{z=z_j}, \quad q_j = \frac{P_2(z)}{P_0(z)} \Big|_{z=z_j}.$$

(2.3) характеристик тенгламанинг $\rho_m(z_j)$, $m=1,2$ илдизлари z_j нуқтадаги характеристик кўрсаткичлар ёки Фробениус кўрсаткичлари деб аталади.

Риманнинг стандарт схемаси фақат фукс тенгламалар учун қўлланилади. Бу жадвал тенгламанинг локал характеристикаларини, жумладан, махсус нуқталар ҳолатини ва уларнинг характеристик кўрсаткичларини аниқлайди. Бу тенгламанинг хоссаларини ўргатади ва бошқа турли эквивалент формаларга акслантиришни бажариш учун муҳим механизм сифатида хизмат қилади.

Учта регуляр махсус нуқталарга эга Риман тенгламасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y'' z + \sum_{j=1}^3 \frac{1 - \rho_1 z_j - \rho_2 z_j}{z - z_j} y' z + \left[\prod_{j=1}^3 z - z_j \right]^{-1} \sum_{j=1}^3 \rho_1 z_j \rho_2 z_j \frac{\prod_{i \neq j} z_j - z_i}{z - z_j} y z = 0. \quad (2.4)$$

Бу тенгламага мос Риман схемаси қуйидагича ёзилади:

$$\left(\begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \\ \rho_1 z_1 & \rho_1 z_2 & \rho_1 z_3 \\ \rho_2 z_1 & \rho_2 z_2 & \rho_2 z_3 \end{array} ; z \right), \quad (2.5)$$

бу жадвалнинг биринчи сатрида z_j , $j=1,2,3$ махсус нуқталарнинг ҳолати кўрастилган, кейинги иккита сатрда эса $\rho_m z_j$, $m=1,2$; $j=1,2,3$ Фробениус кўрсаткичлари келтирилган. (2.5) схема (2.4) тенгламани тўла акс эттиради, шу мазмундаки бу тенгламани схема бўйича ростлаш мумкин бўлади. Аммо, агар тенгламада кўплаб махсус нуқталар мавжуд бўлса, бу схема ўринли бўлмаслиги мумкин.

Риман тенгламаси фукс синфига мансуб тенглама ҳисобланади, унинг характеристик кўрсаткичлари Фукс шартини қаноатлантиради. Бу шуни аниқлатадики, (2.4) ёки (2.5) да бир бирига боғлиқ бўлмаган параметрлар сони 8 га тенг.

Эркин ўзгарувчини Мёбиус алмаштириши ёрдамида алмаштирсак, яъни

$$M : z \rightarrow x, \quad x = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

у ҳолда (2.5) нинг биринчи сатри мос равишда қуйидагига алмашади:

$$\left(\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \rho_1 z_1 & \rho_1 z_2 & \rho_1 z_3 \\ \rho_2 z_1 & \rho_2 z_2 & \rho_2 z_3 \end{array} ; x \right),$$

бу ерда

$$x_1 = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d}, \quad x_2 = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d}, \quad x_3 = \frac{az_3 + b}{cz_3 + d}.$$

Умумлашган Риман схемаси – бу шундай жадвалки, унинг ҳар бир устуни тенгламанинг махсус нуқталари ҳисобланади, биринчи сатрда махсус нуқталардаги s – ранг келтирилган, иккинчи сатрда махсус нуқталарнинг ҳолати келтирилган, бошқа старлар эса махсус нуқталардаги характеристик кўрсаткичлар келтирилган.

Мисолларда кўрсатамиз. (2.4) Риман тенгламасининг умумлашган Риман схемаси қуйидагича ёзилади, яъни (2.5) жадвал қуйидаги жадвалга алмашиб қолади:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \rho_1 z_1 & \rho_1 z_2 & \rho_1 z_3 \\ \rho_2 z_1 & \rho_2 z_2 & \rho_2 z_3 \end{array} ; z \right).$$

Айталик, (2.4) тенгламанинг иккита махсус нуқтаси устма-уст тушсин. Натижада z_1 регуляр махсус нуқта билан, s – ранги $R z_j = 2$ га

тенг бўлган z_2 иррегуляр махсус нуқтали тенгламага келинади. Бу тенгламанинг умулалашган Риман схемаси куйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ z_1 & z_2 \\ \rho_1 z_1 & \alpha_{10} z_2 \\ \rho_2 z_1 & \alpha_{20} z_2 \\ & \alpha_{11} z_2 \\ & \alpha_{21} z_2 \end{array} ; z \right).$$

2.3-§. Гойн тенгламаси ва унинг ечими

Иккинчи тартибли Гойн синфига мансуб чизиқли оддий дифференциал тенгламалар тўртта махсус нуқтага эга бўлган Фукс шартини қаноатлантирувчи тенгламалар ҳисобланади. Гойн тенгламасини биринчи бўлиб, К.Гойн [12] тадқиқ қилган. Орадан 100 йил ўтиб А.Зеегер, А.Рондо ва В.Лайлар томонидан бу соҳага ва унинг ривожига бағишланган конференция ташкиллаштиришди [8]. Бу ерда Гойннинг конфлюэнт тенгламасига кўпроқ эътибор қаратилган бўлиб, барча деталлар бўйича [9], [10] мақолаларда ўз аксини топган. Натижада Гойн тенгламасига бағишланган биринчи китоб дунё юзини кўрди [13].

Гойн тенгламасининг умумий формуласи 12 та комплекс параметр билан берилади, буларнинг тўрттаси махсус нуқталарни аниқлайди, еттитаси эса махсус нуқталарнинг характеристик кўрсаткичлари ҳисобланади. Характеристик кўрсаткичлар Фукс теоремаси билан боғланган ҳисобланади. Битта параметр эса нолокал ҳисобланади, уни аксессуар деб аташ қабул қилинган. Мёбиус алмаштириши ёрдамида $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_4 = \infty$ махсус нуқталардаги ҳолатини ифодалаш мумкин. Бу

ҳолда тенгламани урта характеристик кўрсаткичлари 0 га тенг бўлган формани ҳосил қилишимиз мумкин. У ҳолда тенглама параметрлари олтига тенг бўлади.

Гойн тенгламасининг стандарт каноник формаси қуйидагича ёзилади:

$$L_z^{1,1,1,1} a,b;c,d;t y z - \lambda y z =$$

$$= z z^{-1} z^{-t} D^2 + \left[c z^{-1} z^{-t} + dz z^{-t} + \right.$$

$$\left. + a + b + 1 - c - d z z^{-1} \right] D + abz - \lambda y z = 0, \quad (2.6)$$

бу ерда $D = d/dz$.

Бу тенгламанинг локал характеристик хоссаси умумлашган Риман схемасида қуйидагича ёзилади:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t & \infty \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 1-c & 1-d & c+d-a-b & a \end{pmatrix} ; z, \lambda$$

Ҳар бир махсус нукта атрофида (2.6) тенгламанинг локал ечимини куришимиз мумкин. (2.6) тенгламанинг стандарт ечимини

$$c \neq 0, -1, -2, \dots, \quad |z| < \min |t|, 1$$

да ўринли бўлиб, Гойн функцияси ёки Фробениус ечими дейилади. Бу қуйидаги ғоя асосида ҳосил қилинади. Ечимлардан бири қуйидаги даражали қатор кўринишида кидирилади:

$$y_1^{1,1,1,1} z = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{1,1,1,1} z^k. \quad (2.7)$$

(2.7) ни (2.6) тенгламага олиб бориб қўйилади ва керакли ҳисоб-китоблардан сўнг, $g_k^{1,1,1;1}$ коэффициентларга нисбатан учхаддан иборат рекуррент муносабат олинади:

$$\begin{aligned} & t(k+1) - k + c g_{k+1}^{1,1,1;1} - \\ & - k(k-1+c)(1+t) + dt + a + b + 1 - c - d + \lambda g_k^{1,1,1;1} + \\ & + (k-1+a)(k-1+b)g_{k-1}^{1,1,1;1} = 0, \quad g_0^{1,1,1;1} = 1. \end{aligned}$$

Натижада

$$y_1^{1,1,1;1}(z) = y_1^{1,1,1;1}(a, b, c, d; z; \lambda; z=0, z), \quad y_1^{1,1,1;1}(0) = 1$$

ни ҳосил қиламиз.

Гойн тенгламасининг бошқа ечими қуйидаги функция орқали берилади:

$$\begin{aligned} & y_2^{1,1,1;1}(a, b, c, d; t; \lambda; z=0, z) = \\ & = z^{1-c} y_1^{1,1,1;1}(a+1-c, b+1-c; 2-c, d; t; \lambda'; z=0, z), \\ & \lambda' = \lambda + a + b + 1 - c - 1 - c. \end{aligned}$$

(2.6) тенгламанинг модификацияланган шакли махсус нуқталарнинг симметрик жойлашуви билан аҳамиятли:

$$\begin{aligned} & L_z^{1,1,1;1}(a, b, c, d; t) y(z) - \lambda y(z) = \\ & = (z^2 - 1) y(z-t) D^2 + \left[c(z-1) y(z-t) + d(z+1) y(z-t) + \right. \\ & \left. + (a+b+1-c-d)(z^2-1) \right] D + abz - \lambda y(z) = 0. \end{aligned}$$

(2.6) тенгламани характерлайдиган a, b, c, d, t, λ параметрларни учта гуруҳга ажратиш мумкин:

1) локал (ўлчовсиз) a, b, c, d параметрлар махсус нуқталарда Фробениус ечимининг характеристик кўрсаткичини аниқлайди;

2) скейлинг t параметр, махсус нуқталардан бирининг ҳолатини аниқлайди;

3) акцессор λ параметр. Одатда у спектрал параметр сифатида рол ўйнайди.

Агар (2.6) тенгламада $c = d = c + d - a - b = 1/2$ бўлса, бу тенглама учта элементар махсус нуқталарга, яъни $z = 0$, $z = 1$ ва $z = t$ ларга эга бўлади ва Ламе тенгламаси [14] номи билан машҳур тенгламани ифодалайди.

Энди Гойн тенгламасининг ечими билан танишиб чиқамиз. Муҳим физик тадбиққа эга иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли оддий дифференциал тенгламаларнинг ечимини бир қанча типларга ажратиш мумкин. Булар

- полиномиал ечим,
- хос функциялар,
- Флоке ечими,
- локал ечим (Фробениус ва Томе ечими),
- ўлчов назарияси масаласи ечими ва ҳ.к.

Биз бу ерда Гойн тенгламаси ечими билан яқиндан танишиб чиқамиз. Биринчи бўлиб, регуляр махсус нуқталарда локал ечимларни кўриб чиқамиз. Демак, тўртта махсус нуқтага эга бўлган тенгламанинг ҳар бир махсус нуқтада иккитадан Фробениус ечими мавжуд бўладиган бўлса, бу тенгламанинг 8 та ечими мавжуд бўлади. Агар қуйидаги

$$y \, z = z - z_j^{\rho_2 \, z_j} \, u \, z \quad (2.8)$$

алмаштириш бажарсак, тенглама ўзининг каноник шаклини ўзгартирмайди, бу ерда z_j – ихтиёрий регуляр махсус нукта, $\rho_2 z_j$ эса z_j махсус нуктага мос келувчи нол бўлмаган характеристик кўрсаткич. Бу шуни англатадики (2.8) алмаштириш ёрдамида тенгламани 24 та ечимини куришимиз мумкин бўлади.

2.4-§. Гойннинг конфлюэнт тенгламалари

Кенг масштабда “конфлюэнция” сўзи (2.1) тенгламада иккита махсус нукталарнинг устма-уст тушуши маъносини англатади. Бу ўзгаришда махсус нукталарнинг s – ранги ўзгаради, яъни олдинги тенгламанинг махсус нукталарининг s – рангига нисбатан каттароқ бўлади.

Агар тенгламанинг озод параметрлари сони конфлюэнция жараёнидан кейин биттагача камайиб қолса, бунга кучли конфлюэнция деб аталади. Агар тенгламанинг озод параметрлари сони конфлюэнция жараёнида биттадан кўп бўлган миқдорда камайиб қолса, бунга кучсиз конфлюэнция деб аталади.

Гойн синфининг конфлюэнция тенгламалари ичида биринчи бўлиб қуйидагини келтириш мумкин бўлади:

$$L_z^{1,1;2} a; c, d; t y z + \lambda y z =$$

$$= z z - 1 D^2 + [-t z z - 1 + c z - 1 + dz] D + -taz + \lambda y z = 0. \quad (2.9)$$

Бу тенглама конфлюэнция жараёнидан кейин (2.6) тенгламадан иккита $z = t$ ва $z = \infty$ махсус нукталарнинг устма-уст тушушидан пайдо бўлган.

Конфлюэнция жараёнидан кейин тенгламадаги параметрлар сони биттага камайиб қолади. Демак жараён кучли конфлюэнция ҳисобланади.

(2.9) тенгламага мос Риманнинг умумлашган схемаси қуйидагича бўлади:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a & ;z \\ 1-c & 1-d & c+d-a & ;\lambda \\ & & 0 \\ & & t \end{pmatrix}.$$

Гойннинг конфлюэнт тенгламалари кўплаб ҳолатларда ўрганилган. Мисол учун [5] адабиётда берилгани каби, агар махсус нуқталар $z = \pm 1$ нуқталарга мос келса, у ҳолда бу тенглама умумлашган сфероидал тенгламаси деб аталади:

$$\frac{d}{dz} z^2 - 1 \frac{d}{dt} v t + \left[-t^2 z^2 - 1 + 2taz - v - \frac{m^2 + s^2 + 2msz}{z^2 - 1} \right] v z = 0. \quad (2.10)$$

Бу кўринишни таъминлаш учун (2.6) тенгламада $z \rightarrow 2z - 1$ алмаштириш бажаришга тўғри келади. Физик нуқтаи назардан қарайдиган бўлсак, бу тенглама Шредингер тенгламаси ҳисобланади. Агар (2.10) тенгламада $s = 0$ бўлса, у ҳолда бу тенглама кулон сфероидал тенгламаси [5] бўлиб қолади.

$$\frac{d}{dz} z^2 - 1 \frac{d}{dt} v t + \left[-t^2 z^2 - 1 + 2taz - v - \frac{m^2}{z^2 - 1} \right] v z = 0. \quad (2.11)$$

Агар (2.11) тенгламада $a = 0$ бўлса, у ҳолда бу тенглама сфероидал тенглама бўлиб қолади:

$$\frac{d}{dz} z^2 - 1 \frac{d}{dt} v t + \left[-t^2 z^2 - 1 - v - \frac{m^2}{z^2 - 1} \right] v z = 0. \quad (2.12)$$

(2.12) тенгламада $m = 1/2$ бўлса, у ҳолда бу тенглама Матъе тенгламасининг алгебраик формасига келиб қолинади:

$$\frac{d}{dz} z^2 - 1 \frac{d}{dt} v t + \left[-t^2 z^2 - 1 - v - \frac{1}{4 z^2 - 1} \right] v z = 0. \quad (2.13)$$

Агар (2.6) Гойн тенгласида $z=0$ ва $z=t$ махсус нуқталар устмасу тушса, конфлюэнт тенгламани бузилган Гойн тенгламаси [18] деб аташ мумкин. Бу тенглама қуйидагича ёзилади:

$$z^2 z - 1 D^2 + \left[cz z - 1 + dz^2 + \right. \\ \left. + a + b + 1 - c - d z z - 1 \right] D + abz - \lambda y z = 0. \quad (2.14)$$

Агар (2.14) тенгламада a ёки b лардан бири нолга тенг бўлса, у ҳолда бу тенглама Гауссинг гипергеометрик тенгламаси деб аталувчи тенглама билан устмасу-уст тушади.

II боб бўйича хулоса

Бу бобнинг биринчи параграфида Фукс ва регуляр махсус нуқталар ҳақида тушунча бериб ўтилган. Регуляр ва иррегуляр махсус нуқталар, фукс махсус нуқталари мисоллар орқали тушунтирилиб берилган. Бу бобнинг иккинчи параграфида умумлашган Риман схемаси (Риманнинг P -символи) ҳақида маълумотлар келтирилган. Бу схема фукс ва фукс бўлмаган тенгламалар учун қўлланилиши айтиб ўтилган бўлиб, унда қуйидагилар мавжуд:

- махсус нуқталарнинг s – ранги;
- махсус нуқталарнинг ҳолати;
- Фробениуснинг характеристик кўрсаткичи;
- нормал ва субнормал ечимлар учун Томенинг характеристик кўрсаткичи.

Юқоридаги тушунчалардан махсус нуқталарнинг s – ранги ва Фробениуснинг характеристик кўрсаткичига тўхталиб ўтилган.

Иккинчи бобнинг учунчи параграфида Гойн тенгламаси ва унинг ечими ҳақида маълумотлар келтирилган. Иккинчи тартибли Гойн синфига мансуб чизиқли оддий дифференциал тенгламалар тўртта махсус нуқтага эга бўлган фукс шартини қаноатлантирувчи тенгламалар ҳисобланиши мавзуда тушунтириб берилган. Иккинчи бобнинг тўртинчи параграфи Гойннинг конфлюэнт тенгламалари деб номланган бўлиб, унда Гойннинг конфлюэнт тенгламалари ҳақида маълумотлар келтирилган. Бу мавзуда кучли ва кучсиз конфлюэнциялар ҳақида тўхталиб ўтилган.

III БОБ

ГОЙН ВА ГОЙННИНГ КОНФЛЮЕНТ ТЕНГЛАМАЛАРИ ХУСУСИЙ ЕЧИМЛАРИ

3.1-§. Гойн тенгламаси ечимини гипергеометрик функциялар қатори кўринишида топиш

Тўртта махсус нуктага, яъни $z = 0, 1, a$ ва ∞ га эга бўлган иккинчи тартибли чизиқли оддий дифференциал тенгламани Гойн тенгламаси дейилиши ҳақида олдинги бобларда танишдик. Унинг кўринишини бошқача шаклда ёзишимиз мумкин:

$$u'' + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\varepsilon}{z-a} \right) u' + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-a)} u = 0. \quad (3.1)$$

Бу ерда u z –номаълум функция, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ва ε ўзгармас сонлар бўлиб, улар Фукс шаритини қаноатлантиради, яъни $1 + \alpha + \beta = \gamma + \delta + \varepsilon$.

Гойн тенгламаси тўртта махсус нуктага эга, булар $0, 1, a$ ва ∞ . Гаусснинг гипергеометрик тенгламаси [3] эса учта махсус нуктага эга: $0, 1$ ва ∞ . Бундан кўринадик, (3.1) тенглама Гаусс гипергеометрик тенгламасининг умумлашмасидан иборат экан. (3.1) тенглама тўртта махсус нукта орқали Фукс синфига мансуб иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама бўлиши билан бирга, бошқа бунга ўхшаш тўртта махсус нуктага эга бўлган иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларни умумлаштиради ёки уларни Гойн тенгламасига келтириш мумкин бўлади. Ҳозирги даврга келиб, (3.1) тенгламани ўрганишга қизиқиш ортиб бормокда. Шу кунга қадар (3.1) тенгламанинг махсус нуқталар атрофида умумий ечими ошкор кўринишда ҳали топилмаган. Айрим муаллифлар томонидан, (3.1) тенгламанинг хусусий ечимини топишда, ечимни махсус функциялардан иборат қатор кўринишида излаш методикаси ишлаб чиқилган ва керакли натижалар қўлга киритилган. Жумладан, Н.Свартгольм[16], А.Эрдейи[11], Д.Шмидт[15], Р.С.Сохониян,

Д.Ю.Меликджанян, А.М.Ишханян[17] ва ҳ.к.ларнинг ишларини мисол қилиб келтириш мумкин. Гойн тенгламаси ҳақида тўлиқроқ маълумотни [6] ишдан олиш мумкин.

Аммо, Гойн тенгламасининг аниқ ошкор ечимини топишда математик физиканинг махсус функциясидан фойдаланиб, жумладан гипергеометрик функциядан тузилган қатор кўринишида излаб топиш жуда кам учрайди. Бу ечимларни топишнинг бир усули шундан иборатки, маълум ва номаълум параметрларни алмаштириш ёрдамида қаралаётган мураккаб тенгламага нисбатан соддароқ тенглама билан алмаштириш ҳамда соддароқ тенгламанинг ечимини топиб, сўнгра ундан фойдаланиб мураккаб тенгламанинг ечимини топиш. Бу ёндашув Майер томонидан Гойн тенгламасини полиномиал (квадратик, кубик ва ҳ.к.) алмаштиришлар ёрдамида гипергеометрик тенгламага келтириш масаласи муваффақиятли амалга оширилди.

Кўплаб систематик усуллар Гойн тенгламаси ечимини гипергеометрик функцияларнинг қатори ёйилмаси кўринишида қидиришни тақозо қилган. Бундай ёйилмаларни биринчи бўлиб Свартгольм ва Эрдейининг ишларида учратиш мумкин. Кейинчалик бу техника (3.1) Гойн тенгламаси ва унинг бузилган тенгламаси учун кўплаб муаллифлар томонидан қўлланила бошланди. Гипергеометрик функцияларнинг ёйилмаси шаклида Гойн тенгламасининг ечимини топиш масаласи кам сонли ишларда учратиш мумкин.

Ушбу магистрлик диссертациясида Гойн ва унинг конфлюэнт формадаги тенгламаларининг ечимини Гаусснинг гипергеометрик функцияси қатори кўринишида топиш масалаларини кўриб чиқамиз. Бу ёйилмалар аниқ ошкор ечимни махсус функцияларнинг параметрларини танлаш ҳисобига турли специфик ечимларни ҳосил қилиш имокиятини яратади. Бу ечимларни ҳосил қилишда махсус кетма-кетликлардан фойдаланилади ёки бошқача қилиб айтиладиган бўлса, махсус алгоритмлардан фойдаланилади. Бу шундан далолат берадики, бу мавзунини

компьютерли математикага татбиқ қилиб, ечимни компьютерда қайта ишлаш (matematika, Maple ва ҳ.к дастурларда) имконияти ҳосил бўлади.

Энди (3.1) тенгламанинг хусусий ечимларидан бирини гипергеометрик функцияларнинг қатори кўринишида излаб топиш масаласи билан шуғулланамиз. Бунинг учун (3.1) Гойн тенгламасининг ечимини қуйидаги қатор кўринишида излаймиз

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n F(\alpha; \beta; \gamma_0 - n; z), \quad (3.2)$$

бу ерда $F(\alpha; \beta; \gamma_0 - n; z)$ Гауссинг гипергеометрик тенгламаси бўлиб, у қуйидаги тенгламани қаноатлантиради:

$$u_n'' + \left(\frac{\gamma_0 - n}{z} + \frac{\delta + \varepsilon + \gamma - \gamma_0 + n}{z - 1} \right) u_n' + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)} u_n = 0. \quad (3.3)$$

(3.2) функцияни (3.1) тенгламага олиб бориб қўямиз ва (3.3) ни ҳисобга олиб, сўнгра бир қанча ҳибоб-китоблардан сўнг қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$\sum_n a_n \left[\left(\frac{\gamma - \gamma_0 + n}{z} - \frac{\varepsilon + \gamma - \gamma_0 + n}{z - 1} + \frac{\varepsilon}{z - a} \right) u_n' + \frac{\alpha\beta a - q}{z(z-1)(z-a)} u_n \right] = 0 \quad (3.4)$$

ёки

$$\sum_n a_n (a-1)(\varepsilon + \gamma - \gamma_0 + n)z - a(\gamma - \gamma_0 + n) u_n' + (\alpha\beta a - q)u_n = 0 \quad (3.5)$$

тенгламага эга бўламиз.

Гипергеометрик функциялар учун ўринли бўлган қуйидаги формулалардан

$$z \cdot \frac{dF(\alpha, \beta; \gamma; z)}{dz} = (\gamma - 1)[F(\alpha; \beta; \gamma - 1; z) - F(\alpha; \beta; \gamma; z)], \quad (3.6)$$

$$(z-1) \cdot \frac{dF(\alpha; \beta; \gamma; z)}{dz} = -(\alpha + \beta - \gamma) \cdot F(\alpha; \beta; \gamma; z) + \left(\alpha + \beta - \gamma - \frac{\alpha\beta}{\gamma} \right) \cdot F(\alpha; \beta; \gamma + 1; z) \quad (3.7)$$

фойдаланиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$z \cdot u'_n = \gamma_{n+1}[u_{n+1} - u_n], \quad (3.8)$$

$$(z-1) \cdot u'_n = -\delta_{n-1}u_n + \left(\delta_{n-1} - \frac{\alpha\beta}{\gamma_n} \right) u_{n-1}, \quad (3.9)$$

бу ерда $\gamma_n = \gamma_0 - n$ ва $\delta_n = \delta + \varepsilon + \gamma - \gamma_0 + n$. Буларга асосан (3.5) тенгламани, қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n [(a-1)(\varepsilon + \gamma - \gamma_0 + n)(\gamma_n - 1)[u_{n+1} - u_n] + a(\gamma - \gamma_0 + n) \left((\delta_n - 1)u_n - \left(\delta_{n-1} - \frac{\alpha\beta}{\gamma_n} \right) u_{n+1} \right) + (\alpha\beta a - q)u_n] = 0. \quad (3.10)$$

(3.10) дан (3.2) ёйилманинг коэффициентлари учун учта ҳаддан иборат рекуррент муносабатларга эга бўламиз

$$R_n a_n + Q_n a_{n-1} + P_n a_{n-2} = 0, \quad (3.11)$$

бу ерда

$$R_n = -a(\gamma - \gamma_0 + n) \left(\delta + \varepsilon + \gamma - \gamma_0 + n - 1 - \frac{\alpha\beta}{\gamma_0 - n} \right), \quad (3.12)$$

$$Q_n = -(a-1)(\varepsilon + \gamma - \gamma_0 + n - 1)(\gamma_0 - n) + a(\gamma - \gamma_0 + n - 1)(\delta + \varepsilon + \gamma - \gamma_0 + n - 2) + (\alpha\beta a - q), \quad (3.13)$$

$$P_n = (a-1)(\varepsilon + \gamma - \gamma_0 + n - 2)(\gamma_0 - n + 1). \quad (3.14)$$

Ваниҳоят, a_0 ихтиёрий ўзгармас бўлиши учун қатордаги манфий индексли ҳадларни нол деймиз, яъни $a_{-2} = a_{-1} = 0$. У ҳолда $R_0 = 0$ ўринли бўлади ва (3.12) тенгламадан

$$\gamma_0 = \gamma \text{ ёки } \alpha \text{ ёки } \beta \quad (3.15)$$

бўлганда учта ёйилмага эга бўламиз.

Шундай қилиб биз Гойн тенгламаси ечимини $F(\alpha; \beta; \gamma_0 - n; z)$ гипергеометрик функцияси бўйича учта кўринишини ҳосил қилдик, бу ерда γ_0 ўрнига γ, α ёки β лардан бирини қўйиш мумкин. Ҳар эҳтимолга қарши шуни таъкидлаб ўтишимиз керакки, γ, α, β параметрлар бараварига

бутун сон бўлмаса, бу ҳосил қилинган ёйилмалардан бирини Гойн тенгламасининг ихтиёрий параметрлари тўплами учун ишлатиш мумкин бўлади. Юқоридан қўлланилган функция Савртгольм, Эрдейи ва Шмидтлар одинроқ ишлатилган функциядан фарқ қилади. Уларнинг ишларида гипергеометрик функциянинг $F(\lambda + n; \mu - n; \gamma; z)$ кўринишидан фойдаланишган. Бу ёйилма Калнин ва Миллерлар ишлатган Якоби полиномларидан, яъни у $F(\lambda + n; \mu - n; \nu + 2n; z)$ гипергеометрик функция орқали ифодаланадиган ёйилмадан фарқ қилади.

Бу ерда биз шунақанги ҳолни кўрамизки, ҳосил қилинган ёйилма чегараланган ечимни ҳосил қилсин. Бу ҳол (3.2) ёйилманинг ихтиёрий кетма-кет келадиган иккита ҳади нолга тенг бўлганда ҳосил бўлади. Айтайлик a_n охирги нол бўлмаган коэффициент: $a_n \neq 0$, $a_{n+1} = 0$ ва $a_{n+2} = 0$ ихтиёрий $n = N \geq 0$ учун ўринли. Бу Гойн тенгламаси параметрлари учун иккита шарт қўйилишига олиб келинади. Биринчидан, $n = N + 2$ учун ёзилган (3.11) тенгламадан $P_{N+2} = 0$ ни ҳосил қиламиз, бундан келиб чиқадики,

$$\varepsilon, \varepsilon + \gamma - \alpha \text{ ёки } \varepsilon + \gamma - \beta = -N. \quad (3.16)$$

ўринлилиги, биринчи, иккинчи ва учунчи ёйилмалар учун мос ҳолда бажарилади, бу ерда $(N = 0, 1, 2, \dots)$.

Иккинчи шартни чексиз каср кўринишида ёзиш анча қулай ҳисобланади

$$Q_1 - \frac{R_1 P_2}{Q_2 - \frac{R_2 P_3}{Q_3 - \frac{R_3 P_4}{Q_4 - \dots}}} = 0 \quad (3.17)$$

(3.16) ни (3.17) га олиб келиб қўйиб, касрни q параметр учун $N+1$ тартибли полиномиал тенгламага айлантиради. Хулоса қилиб шуни айтиш мумкинки, (3.2) ёйилма мавжуд бўлиши учун ихтиёрий берилган N учун $N+1$ ҳол мавжуд бўлади. У ҳолда Гойн тенгламасининг ечими ўзида

гипергеометрик функцияларнинг $N+1$ та чизиқли комбинациясига эга бўлади.

$\gamma_0 = \gamma$ бўлганда ёйилмадаги гипергеометрик функциянинг кўриниши $u_n = F(\alpha; \beta; \gamma - n; z)$ бўлади. Бу кўринишдаги ечимни чекли йиғиндилар учун Крастер ва унинг жамоаси томонидан топилган. Шундай қилиб, (3.2) чексиз ёйилма Крастернинг тўғридан тўғри умумлаштирилган ғояси ҳисобланади.

(3.11)-(3.17) лардан фойдаланиб, чекли йиғиндиларда ечимни қийинчиликсиз ёзиш мумкин бўлади. Қуйида буларнинг дастлабки учта ҳолини ёзиб кўрсатамиз:

$$\varepsilon = 0, \text{ (тривиал ҳолат)} \quad (3.18)$$

$$q - a\alpha\beta = 0, \quad (3.19)$$

$$u = F(\alpha, \beta; \gamma; z) \quad (3.20)$$

$$\varepsilon = -1 \quad (3.21)$$

$$(q - a\alpha\beta)^2 + [(1-a)(\gamma-1) + a(1-\delta)](q - a\alpha\beta) - a(1-a)\alpha\beta = 0, \quad (3.22)$$

$$u = F(\alpha, \beta; \gamma; z) + \frac{(\gamma-1)(q - a\alpha\beta + (1-a)(\gamma-1))}{a(\alpha\beta - (\gamma-1)(\delta-1))} \cdot F(\alpha, \beta; \gamma-1; z), \quad (3.23)$$

$$\varepsilon = -2, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} & x^3 + [3\gamma + a(-3\gamma - 3\delta + 8) - 4]x^2 + \\ & + 2[2 - 3\gamma + \gamma^2 - 2a(\alpha\beta + (\gamma-1)(\gamma + \delta - 3)) + \\ & + a^2(2\alpha\beta + (\gamma + \delta - 3)(\gamma + \delta - 2))]x - \\ & - 4a(a-1)\alpha\beta[-\gamma + a(\gamma + \delta - 2) + 1] = 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$u = F(\alpha, \beta; \gamma; z) + a_1 \cdot F(\alpha, \beta; \gamma-1; z) + a_2 \cdot F(\alpha, \beta; \gamma-2; z), \quad (3.26)$$

бу ерда, $x = q - a\alpha\beta$, $a_1 = -Q_1 / R_1$, $a_2 = -(Q_2 a_1 + P_2) / R_2$.

Бу топилган ечимга чизиқли боғлиқ бўлмаган иккинчи ечимнинг кўриниши, қуйидаги ёйилма орқали берилади

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot F(\alpha, \beta; \gamma_0 - n; 1 - z), \quad (3.27)$$

бу ерда γ_0 қиймат

$$\gamma_0 = \delta, \quad (3.28)$$

билан аниқланади, a_n коэффициентлар эса (3.11)-(3.14) рекуррент формулалар орқали аниқланади, фақат бу ерда параметрлар қуйидагича аниқланади: $\gamma \leftrightarrow \delta$, $\gamma_0 \rightarrow \delta$, $a \rightarrow 1 - a$, $q \rightarrow -q + \alpha\beta$. Бу ерда шуни кўриш мумкинки, биринчидан агар ўзгарувчиларда $z = 1 - x$ алмаштириш бажарсак, (3.1) кўринишдаги Гойн тенгламасининг кўринишини қуйидаги кўринишга акслантиради

$$u'' + \left(\frac{\delta}{x} + \frac{\gamma}{x-1} + \frac{\varepsilon}{x-(1-a)} \right) u' + \frac{\alpha\beta x - (-q + \alpha\beta)}{x(x-1)(x-(1-a))} u = 0. \quad (3.29)$$

Бундан шуни айтиш мумкинки, юқорида ёзилган (3.2) ёйилма бу тенглама учун ҳам ишлатилиши мумкин ва (3.27) (3.28) билан биргаликда айнан кидирилаётган ёйилма бўлади.

(3.2) ва (3.27) ёйилмалар ўзида (3.1) Гойн тенгламасининг параметрлари тўпламига нисбатан чекли йиғиндилар иккита боғлиқ бўлмаган ечимларни ҳосил қилади.

Чекли йиғинди орқали берилган ечимга $\gamma_0 = \alpha$ ёки β бўлишлигининг аҳамияти йўқ, чунки (3.1) тенглама α ва β ларга нисбатан симметрик. Бу ҳолда гипергеометрик функциянинг кўриниши қуйидагича бўлади: $u_0 = F(\alpha, \beta; \alpha - n; z)$ [ёки $F(\alpha, \beta; \beta - n; z)$]. Бу функцияларни буларга қараганда соддароқ бўлган функциялар билан алмаштириш мумкин бўлади. Масалан, бу функцияларни параметрларнинг тайин қийматлари ёрдамида Якоби полиномлари билан алмаштириш мумкин.

Қуйидаги формулага асосан

$$F(\alpha, \beta; \alpha - n; z) = (1 - z)^{-\beta - n} \cdot F(-n, -\beta + \alpha - n; \alpha - n; z) \quad (3.30)$$

чекли йиғиндини охирида z нинг даражаси бўйича полиномга ва $(1-z)^{1-\delta}$ кўринишдаги ифода билан тасвирласа бўлади. Дастлабки иккита ечимни ёзамиз:

$$\varepsilon + \gamma - \alpha = 0 \quad (\Leftrightarrow \beta = \delta - 1), \quad (3.31)$$

$$q - a\gamma(\delta - 1) = 0, \quad u = (1-z)^{1-\delta}, \quad (3.32)$$

$$\varepsilon + \gamma - \alpha = -1 \quad (\Leftrightarrow \beta = \delta - 2), \quad (3.33)$$

$$q^2 + [\gamma - a(\delta - 2 + \gamma(2\gamma - 3)) + \varepsilon] \times \\ \times q - a\gamma(\delta - 2)[(1 + \gamma + \varepsilon) - a(1 + \gamma)(\delta - 1)] = 0, \quad (3.34)$$

$$u = (1-z)^{1-\delta} \left(1 - \frac{2 + \gamma - \delta + \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} z + \frac{1 - a(\alpha\beta + \varepsilon - \delta\varepsilon)}{(1-a)(\gamma + \varepsilon)} (1-z) \right). \quad (3.35)$$

Ваниҳоят охирида шуни таъкидлаймизки, $u = (1-z)^{1-\delta} v(z)$ алмаштириш $v(z)$ га нисбатан Гойн тенгламасига келтирилади, фақат бу ерда параметрлар қуйидагича аниқланади: $\gamma_1 = \gamma$, $\delta_1 = 2 - \delta$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\alpha_1\beta_1 = \alpha\beta - (\delta - 1)(\gamma + \varepsilon)$ ва $q_1 = q - a\gamma(\delta - 1)$. Демак, $\varepsilon + \gamma - \alpha = -N$ (ва $\varepsilon + \gamma - \beta = -N$) ҳоли v га нисбатан полиномиал ечимларнинг бир қанча ҳолини кўриб чиқиш мумкин бўлади: (3.31)-(3.32) ҳоли мос ҳолда v га нисбатан тривиал ечимларни ҳосил қилади, агар $\alpha_1\beta_1 = 0$ ва $q_1 = 0$ бўлса.

Демак, биз Гойн умумий тенгламасининг ечимини Гаусснинг гипергеометрик функцияси бўйича янги тип ёйилмасини кўриб чиқдик. Агар γ, α, β параметрлардан бири бутун сон бўлмаса, у ҳолда Гойн тенгламасининг ечимини қуйидаги кўринишда қидириш мумкин бўлар экан

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot F(\alpha, \beta; \gamma_0 - n; z). \quad (3.36)$$

бу ерда $\gamma_0 = \gamma, \alpha, \beta$ бўлиши мумкин. Бу ёйилма учта ҳолда чегараланган ечимни таъминлайди: ε , $\varepsilon + \gamma - \alpha$, $\varepsilon + \gamma - \beta = -N$, $N = 0, 1, 2, 3, \dots$ Ҳар бир ҳолда умумий Гойн тенгламасининг ечими чегараланган бўлади.

Умуман айтганда, q параметрнинг $N+1$ танланишида $N+1$ тартибли полиномиал тенгламани аниқлайди. Айниқса тривиал бўлмаган ҳол бутун манфий $\varepsilon (\varepsilon = -N)$ да аниқланади, у ҳолда ечим $N+1$ та гипергеометрик функцияни ўзида мужассамлаштиради. Сўнгра ихтиёрий мусбат $\varepsilon = +N \geq 2$ учун $u = (z-a)^{1-\varepsilon} v(z)$ алмаштириш бажарадиган бўлсак, у ҳолда манфий бўлмаган $\varepsilon_1 = 2 - \varepsilon \leq 0$ учун Гойн тенгламасига келади:

$$v'' + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{2-\varepsilon}{z-a} \right) v' + \frac{(\alpha\beta - (\varepsilon-1)(\gamma+\delta))z - (q - \gamma(\varepsilon-1))}{z(z-1)(z-a)} v = 0. \quad (3.37)$$

Хулосада шуни айтиш мумкинки, аналогик ёйилмаларни нафақат Гойн тенгламаси, балки бузилган Гойн тенгламалари учун ҳам қўллаш мумкин. Ёки бўлмасам, Гойн ва бузилган Гойн тенгламаларининг ечимини қидиришда Гаусснинг гипергеометрик функцияси бўйича ёйилмасидан эмас, балки, бузилган гипергеометрик функцияларнинг ёйилмасидан ёки тўлиқ бўлмаган Бета ва Гамма функцияларнинг ёйилмаларидан фойдаланиш мумкин бўлади[*]. Мисол учун $F(\alpha, \gamma_0 - n; z)$ кўринишидаги Куммернинг гипергеометрик функциясини тадбиқ қилиш мумкин.

3.2-§. Гойннинг конфлюэнт тенгламасининг ечимини топиш

Бу параграфда ҳам Гойннинг конфлюэнт тенгламаларидан бирининг ечимини гипергеометрик функцияларнинг ёйилмасидан иборат қатор кўринишида қидириш билан шуғулланамиз. Ҳозирги параграфда қаралаётган тенглама Гойннинг конфлюэнт тенгламаси ҳисобланиб, бузилган Гойн тенгламаси деб ҳам аталади.

Биз маълумки, Гаусснинг гипергеометрик тенгламаси учта махсус нуктага эга, булар $0, 1, \infty$ нукталардир. Агар бу тенгламага яна бир махсус t нукта қўшиладиган бўлса, бундай тенгламани олдинги параграфда ўрганилган Гойн тенгламасига келтириш мумкин бўлади:

$$u''_{\xi} + \left(\frac{a_3}{\xi} + \frac{a_4}{\xi-1} + \frac{a_5}{\xi-t} \right) u'_{\xi} + \frac{a_1 a_2 \xi - q}{\xi \xi - 1 \xi - t} u_{\xi} = 0.$$

Агар охирги тенгламада $t \rightarrow 0$ бўлганда лимитга ўтадиган бўлсак, у ҳолда охирги Гойн тенгламасини қуйидагича ёзиш мумкин бўлади:

$$u''_{\xi} + \left[\frac{a_3 + a_5}{\xi} + \frac{a_4}{\xi-1} \right] u'_{\xi} + \frac{a_1 a_2 \xi - q}{\xi^2 \xi - 1} u_{\xi} = 0, \quad 0 < \xi < 1,$$

ёки

$$\xi(1-\xi) u''_{\xi} + [a_3 + a_5 - a_3 + a_4 + a_5 \xi] u'_{\xi} - \left(a_1 a_2 + \frac{q}{\xi} \right) u_{\xi} = 0, \quad (3.38)$$

бу ерда (3.38) тенгламанинг параметрлари Фукс шартини қаноатлантиради, яъни $a_3 + a_4 + a_5 = 1 + a_1 + a_2$, $q = \text{const.}$ (3.38) тенглама Гойннинг бузилган тенгламаси деб аталади. Бошқача қилиб айтганда, 2.4 параграфда таъкидланганлиги каби бу тенгламани конфлюэнтция жараёнида (3.1) тенгламадан ҳосил қилинган тенглама деб ҳам аташ мумкин бўлади.

Модомики (3.38) тенглама ўзида битта қўшимча регуляр махсус нуқтага эга экан, бу тенгламани Гаусснинг гипергеометрик тенгламасининг умумлашмаси деб ҳам аташ мумкин бўлади. Бу параграфда биз (3.38) тенгламанинг ечимини гипергеометрик функцияларнинг ёйилмасидан иборат қатор кўринишида қидиришни кўрсатмоқчимиз.

(3.38) тенгламанинг ечимини қуйидаги

$$u_{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k u_k_{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k F(a_1, a_2; a_3 + a_5 + k; \xi), \quad (3.39)$$

кўринишда қидирамиз, бу ерда A_k ҳозирча номаълум коэффициентлар, $F(a_1, a_2; a_3 + a_5 + k; \xi)$ эса гипергеометрик функция [3] бўлиб, у қуйидаги тенгламани қаноатлантиради

$$\xi(1-\xi) u_k''_{\xi} + [a_3 + a_5 + k - 1 + a_1 + a_2 \xi] u_k'_{\xi} - a_1 a_2 u_k_{\xi} = 0. \quad (3.40)$$

(3.39) ни (3.38) тенгламага олиб бориб қўямиз ва қуйидагига эга бўламиз:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \xi^{1-\xi} u_k'' \xi + \left[a_3 + a_5 - a_3 + a_4 + a_5 \xi \right] u_k' \xi - \left(a_1 a_2 + \frac{q}{\xi} \right) u_k \xi \right\} = 0.$$

Охирги ифодани Фукс шартидан, яъни $a_3 + a_4 + a_5 = 1 + a_1 + a_2$ фойдаланиб, қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \left\{ \xi^{1-\xi} u_k'' + \left[a_3 + a_5 + k - 1 + a_1 + a_2 \xi \right] u_k' - a_1 a_2 u_k - k u_k' \xi - \frac{q}{\xi} u_k \right\} = 0. \quad (3.41)$$

(3.41) ни (3.40) ни инобатга олиб ёзадиган бўлсак, у қуйидагига тенг бўлади:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \left[-k \xi u_k' \xi - q u_k \xi \right] = 0. \quad (3.42)$$

Гипергеометрик функция учун қуйидаги

$$z \frac{dF(b_1, b_2; b_3; z)}{dz} = b_3 - 1 \left[F(b_1, b_2; b_3 - 1; z) - F(b_1, b_2; b_3; z) \right],$$

муносабатдан фойдаланадиган бўлсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\xi u_k' \xi = a_3 + a_5 + k - 1 \left[u_{k-1} \xi - u_k \xi \right].$$

Охирги муносабатни инобатга оладиган бўлсак, (3.42) ни бевосита қуйидагича ёзишимиз мумкин бўлади:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \left[-k a_3 + a_5 + k - 1 u_{k-1} \xi + k a_3 + a_5 + k - 1 - q u_k \xi \right] = 0. \quad (3.43)$$

(3.43) ни ҳадма-ҳад ёзамиз:

$$\begin{aligned} & A_0 - q u_0 \xi + \\ & + A_1 \left[-a_3 + a_5 u_0 \xi + a_3 + a_5 - q u_1 \xi \right] + \\ & + A_2 \left[-2 a_3 + a_5 + 1 u_1 \xi + 2 a_3 + a_5 + 1 - q u_2 \xi \right] + \\ & + A_3 \left[-3 a_3 + a_5 + 2 u_2 \xi + 3 a_3 + a_5 + 2 - q u_3 \xi \right] + \\ & + \dots + A_k \left[-k a_3 + a_5 + k - 1 u_{k-1} \xi + k a_3 + a_5 + k - 1 - q u_k \xi \right] + \dots \end{aligned}$$

Ҳосил қилинган чексиз кетма-кетликни $u \xi$ функциянинг k индекси бўйича гуруҳлаймиз:

$$\begin{aligned}
 & -qA_0 - a_3 + a_5 A_1 u_0 \xi + \\
 & + a_3 + a_5 - q A_1 - 2 a_3 + a_5 + 1 A_2 u_1 \xi + \\
 & + [2 a_3 + a_5 + 1 - q] A_2 - 3 a_3 + a_5 + 2 A_3 u_2 \xi + \\
 & + \dots + \\
 & + [k-1 a_3 + a_5 + k-2 - q] A_{k-1} - k a_3 + a_5 + k-1 A_k u_k \xi + \dots .
 \end{aligned}$$

Охирги ифодада $u_k \xi$ лар олдидаги коэффициентларни нолга тенглаштирамиз ва натижада (3.39) нинг коэффициентларини аниқловчи иккиҳадли рекуррент муносабатни ҳосил қиламиз:

$$A_0 = 1, A_{k+1} = \frac{k a_3 + a_5 + k-1 - q}{k+1 a_3 + a_5 + k} A_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ёки A_k нинг қийматини топамиз:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 1, \\
 A_1 &= \frac{-q}{a_3 + a_5} A_0 = -\frac{q}{a_3 + a_5}, \\
 A_2 &= \frac{a_3 + a_5 - q}{2 a_3 + a_5 + 1} A_1 = \frac{-q [a_3 + a_5 - q]}{2 a_3 + a_5 + 1 a_3 + a_5}, \\
 A_3 &= \frac{-q [a_3 + a_5 - q] [2 a_3 + a_5 + 1 - q]}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 + a_5 a_3 + a_5 + 1 a_3 + a_5 + 2}, \\
 A_4 &= \frac{-q [a_3 + a_5 - q] [2 a_3 + a_5 + 1 - q] [3 a_3 + a_5 + 2 - q]}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 + a_5 a_3 + a_5 + 1 a_3 + a_5 + 2 a_3 + a_5 + 3}, \\
 & \dots, \\
 A_k &= \frac{-q [a_3 + a_5 - q] [2 a_3 + a_5 + 1 - q] \dots [k-1 a_3 + a_5 + k-2 - q]}{k! a_3 + a_5 k}, \dots
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

бу ердаги a_k – биринчи бобнинг бешинчи параграфида ўрганилган Похгаммер символи. Касрнинг суратини Похгаммер символи орқали ифодалашимиз учун қуйидагича иш юритмиз.

$k-1=x$ деб белгилаш киритиб, қуйидаги

$$x \cdot a_3 + a_5 + x - 1 - q = x \cdot x + a_3 + a_5 - 1 - q = x^2 + a_3 + a_5 - 1 \cdot x - q$$

учхадга келтирилади. Бу учхаддан эса қуйидаги тўла квадратни ҳосил қиламиз ва кўпайтувчиларга ажратиб ёзамиз:

$$\left(\frac{a_3 + a_5 - 3}{2} + k + \sqrt{q + \frac{a_3 + a_5 - 1}{4}} \right) \left(\frac{a_3 + a_5 - 3}{2} + k - \sqrt{q + \frac{a_3 + a_5 - 1}{4}} \right).$$

Бу ифодани ҳам Похгаммер символи ёрдамида тасвирлаб, (3.44) га олиб бориб қўямиз, натижада бизда A_k коэффициентнинг Похгаммер символи орқали ёзилган ифодаси пайдо бўлади:

$$A_k = \frac{\left(\frac{a_3 + a_5 - 1}{2} + \sqrt{q + \left(\frac{a_3 + a_5 - 1}{2} \right)^2} \right)_k \left(\frac{a_3 + a_5 - 1}{2} - \sqrt{q + \left(\frac{a_3 + a_5 - 1}{2} \right)^2} \right)_k}{k! \cdot a_3 + a_5}_k.$$

Бу ифодани (3.39) га олиб бориб қўйиб, (3.38) тенгламанинг ечимини ҳосил қиламиз:

$$u_{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_3 + a_5 - 1}{2} + \sqrt{q + \left(\frac{a_3 + a_5 - 1}{2} \right)^2} \right)_k \left(\frac{a_3 + a_5 - 1}{2} - \sqrt{q + \left(\frac{a_3 + a_5 - 1}{2} \right)^2} \right)_k}{k! \cdot a_3 + a_5}_k \times$$

$$\times F_{a_1, a_2; a_3 + a_5 + k; \xi}.$$

Шундай қилиб, биз (3.38) тенгламанинг ечими ёйилмасини $F_{a_1, a_2; a_3 + a_5 + k; \xi}$ кўринишдаги гипергеометрик функциянинг катори кўринишида қурдик. Бу ёйилма бошқа муаллифлар томонидан топилган

ёйилмалардан фарқ қилади. Айрим ёйилмалар ҳақида 3.1 параграфда маълумот берилган.

3.3-§. Гойн синфига тегишли тенгламалар учун хос қиймат ҳақидаги масалалар

Бу параграфда Гойннинг конфлюэнция жараёнида ҳосил бўлган

$$\xi^{1-\xi} u'' - \xi + [c - 1 + a + b\xi] u' - \left(\lambda + \frac{q}{\xi} \right) u = 0, \quad 0 < \xi < 1 \quad (3.45)$$

тенгламаси учун хос қиймат ҳақидаги масалани ўрганиб чиқамиз. Бу ерда a, b, c, q лар берилган сонлар, λ – ҳозирча номаълум сонли параметр.

Масала. λ параметрнинг шунақанги қийматини топиш керакки, (3.45) тенгламани ва қуйидаги

$$|u(0)| < \infty, \quad u(1) = 0 \quad (3.46)$$

шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган $u \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$ функция мавжуд бўлсин.

Бу хос қиймат ҳақидаги масала ҳисобланиб, топиладиган λ параметрнинг қийматлари хос қийматлар, унга мос ҳолда топиладиган u функциянинг қийматлари эса хос функциялар деб юритилади.

(3.45) тенгламанинг ечимини қуйидаги

$$u(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k u_k(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k F\left(\frac{a+b+\sigma}{2}, \frac{a+b-\sigma}{2}; c+k; \xi\right), \quad (3.47)$$

кўринишда қидирамиз, бу ерда $\sigma = \sqrt{a+b+2+4\lambda} > 0$, A_k ҳозирча

номаълум коэффициентлар, $F\left(\frac{a+b+\sigma}{2}, \frac{a+b-\sigma}{2}; c+k; \xi\right)$ эса

гипергеометрик функция [3] бўлиб, у қуйидаги тенгламани қаноатлантиради

$$\xi^{1-\xi} u_k'' \xi + [c+k-1+a+b\xi] u_k' \xi - \lambda u_k \xi = 0. \quad (3.48)$$

(3.47) ни (3.45) тенгламага олиб бориб қўямиз ва қуйидагига эга бўламиз:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \xi^{1-\xi} u_k'' \xi + [c-1+a+b\xi] u_k' \xi - \left(\lambda + \frac{q}{\xi} \right) u_k \xi \right\} = 0.$$

Охирги ифодани бошқача кўринишда ёзиб оламиз:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \left\{ \xi^{1-\xi} u_k'' + [c+k-1+a+b\xi] u_k' - \lambda u_k - k u_k' \xi - \frac{q}{\xi} u_k \right\} = 0. \quad (3.49)$$

(3.49) ни (3.48) ни инобатга олиб ёзадиган бўлсак, у қуйидагига тенг бўлади:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k [-k\xi u_k' \xi - q u_k \xi] = 0. \quad (3.50)$$

Гипергеометрик функция учун қуйидаги

$$z \frac{dF(b_1, b_2; b_3; z)}{dz} = b_3 - 1 [F(b_1, b_2; b_3 - 1; z) - F(b_1, b_2; b_3; z)],$$

муносабатдан фойдаланадиган бўлсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\xi u_k' \xi = c + k - 1 [u_{k-1} \xi - u_k \xi].$$

Охирги муносабатни инобатга оладиган бўлсак, (3.50) ни бевосита қуйидагича ёзишимиз мумкин бўлади:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k [-k c + k - 1 u_{k-1} \xi + [k c + k - 1 - q] u_k \xi] = 0. \quad (3.51)$$

(3.51) ни ҳадма-ҳад ёзамиз:

$$\begin{aligned} & A_0 [-q u_0 \xi + A_1 [-c u_0 \xi + c - q u_1 \xi] + \\ & + A_2 [-2 c + 1 u_1 \xi + [2 c + 1 - q] u_2 \xi + \end{aligned}$$

$$+A_3 -3 c+2 u_2 \xi +[3 c+2 -q]u_3 \xi +$$

$$+...+A_k -k c+k-1 u_{k-1} \xi +[k c+k-1 -q]u_k \xi +... .$$

Ҳосил қилинган чексиз кетма-кетликни $u \xi$ функциянинг k индекси бўйича гуруҳлаймиз:

$$-qA_0 -cA_1 u_0 \xi + c-q A_1 -2 c+1 A_2 u_1 \xi +$$

$$+ [2 c+1 -q]A_2 -3 c+2 A_3 u_2 \xi +$$

$$+...+$$

$$+ [k-1 c+k-2 -q]A_{k-1} -k c+k-1 A_k u_k \xi +... .$$

Охирги ифодада $u_k \xi$ лар олдидаги коэффициентларни нолга тенглаштирамиз ва натижада (3.47) нинг коэффициентларини аниқловчи иккиҳадли рекуррент муносабатни ҳосил қиламиз:

$$A_0=1, A_{k+1}=\frac{k c+k-1 -q}{k+1 c+k}A_k, k=0,1,2,...$$

ёки A_k нинг қийматини топамиз:

$$A_0=1, A_1=\frac{-q}{c}A_0=-\frac{q}{c}, A_2=\frac{c-q}{2 c+1}A_1=\frac{-q c-q}{2 c+1 c},$$

$$A_3=\frac{-q c-q [2 c+1 -q]}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c c+1 c+2}, A_4=\frac{-q c-q [2 c+1 -q][3 c+2 -q]}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c c+1 c+2 c+3},$$

$$, ...,$$

$$A_k=\frac{\left(\left[c-1 / 2\right]+\sqrt{q+\left[c-1 / 2\right]^2}\right)_k\left(\left[c-1 / 2\right]-\sqrt{q+\left[c-1 / 2\right]^2}\right)_k}{k! c_k} .(3.52)$$

(3.52)ни (3.47) га олиб бориб қўйиб, (3.45) тенгламанинг хусусий ечимларидан бирини ҳосил қиламиз:

$$u \xi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\left[c-1 / 2\right]+\sqrt{q+\left[c-1 / 2\right]^2}\right)_k\left(\left[c-1 / 2\right]-\sqrt{q+\left[c-1 / 2\right]^2}\right)_k}{k! c_k} \times$$

$${}_2F_1\left(\frac{a+b+\sigma}{2}, \frac{a+b-\sigma}{2}; c+k; \xi\right). \quad (3.53)$$

(3.53) ни (3.46) шартнинг биринчисига бўйсундирамиз ва гипергеометрик функция учун ${}_2F_1(a, b; c; 0) = 1$ формуладан фойдаланадиган бўлсак, қуйидаги сонли қаторга эга бўламиз:

$$u_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\left[c-1/2\right] + \sqrt{q + \left[c-1/2\right]^2}\right)_k \left(\left[c-1/2\right] - \sqrt{q + \left[c-1/2\right]^2}\right)_k}{k! c_k}.$$

Бу сонли қаторнинг яқинлашишини Рабее аломатидан [4] фойдаланиб исботлаймиз:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \left\{ \frac{\left(\left[c-1/2\right] + \sqrt{q + \left[c-1/2\right]^2}\right)_k \left(\left[c-1/2\right] - \sqrt{q + \left[c-1/2\right]^2}\right)_k}{k! c_k} \times \right. \\ \left. \times \frac{k+1! c_{k+1}}{\left(\left[c-1/2\right] + \sqrt{q + \left[c-1/2\right]^2}\right)_{k+1} \left(\left[c-1/2\right] - \sqrt{q + \left[c-1/2\right]^2}\right)_{k+1}} - 1 \right\} = 2.$$

Бундан кўринадикки текширилаётган сонли қатор яқинлашувчи, демак, (3.46) шартнинг биринчиси бажарилади.

Энди (3.53) қаторни (3.46) шартнинг иккинчисига бўйсундирамиз, яъни

$$u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\left[c-1/2\right] + \sqrt{q + \left[c-1/2\right]^2}\right)_k \left(\left[c-1/2\right] - \sqrt{q + \left[c-1/2\right]^2}\right)_k}{k! c_k} \times$$

$${}_2F_1\left(\frac{a+b+\sigma}{2}, \frac{a+b-\sigma}{2}; c+k; 1\right) = 0.$$

Бу ерда гипергеометрик функция учун ўринли бўлган

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}, \quad c-a-b > 0$$

формуладан фойдаланамиз. Натижада бизда куйидаги ифода пайдо бўлади:

$$u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\left[c-1/2 \right] + \sqrt{q + \left[c-1/2 \right]^2} \right)_k \left(\left[c-1/2 \right] - \sqrt{q + \left[c-1/2 \right]^2} \right)_k}{k! c_k} \times \\ \times \frac{\Gamma(c+k) \Gamma(c+k-a-b)}{\Gamma\left(c+k - \frac{a+b+\sigma}{2}\right) \Gamma\left(c+k - \frac{a+b-\sigma}{2}\right)} = 0.$$

Ҳосил бўлган касрнинг сурат ва махражини $\Gamma\left[1 - \left(c+k - \frac{a+b+\sigma}{2}\right)\right]$ га кўпайтирамиз ва гамма функция учун ўринли бўлган $\Gamma(a) \Gamma(1-a) = [\pi / \sin a\pi]$ фойдаланиб, куйидагига эга бўламиз:

$$u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\left[c-1/2 \right] + \sqrt{q + \left[c-1/2 \right]^2} \right)_k \left(\left[c-1/2 \right] - \sqrt{q + \left[c-1/2 \right]^2} \right)_k}{k! c_k} \times \\ \times \frac{\Gamma(c+k) \Gamma(c+k-a-b) \sin\left(\frac{2c+2k-a-b-\sigma}{2}\pi\right)}{\pi \Gamma^{-1}\left[1 - \left(c+k - \frac{a+b+\sigma}{2}\right)\right] \Gamma\left(c+k - \frac{a+b-\sigma}{2}\right)} = 0.$$

Бу тенглик, мисол учун $\sin\left(\frac{2c+2k-a-b-\sigma}{2}\pi\right) = 0$ бўлганда ўринли бўлади. Натижада бу ердан σ ёки λ ни аниқлаш мумкин бўлади. Тригонометрик тенгламани ечиб

$$\sigma_n = 2n + 2c + 2k - a - b, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

эканлигини топамиз. Бу тенгликдан фойдаланиб, қўйилган масаланинг

$$\lambda_n = \frac{1}{4} \left[\sigma_n^2 - a + b^2 \right]$$

хос қийматларини топамиз. Бу хос қийматларга мос келувчи хос функциялар қуйидагича аниқланади:

$$u_n \xi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\left[c-1/2 \right] + \sqrt{q + \left[c-1/2 \right]^2} \right)_k \left(\left[c-1/2 \right] - \sqrt{q + \left[c-1/2 \right]^2} \right)_k}{k! c_k} \times \\ \times F \left(\frac{a+b+\sigma_n}{2}, \frac{a+b-\sigma_n}{2}; c+k; \xi \right). \quad (3.54)$$

Шундай қилиб биз қўйилган $\{(3.45), (3.46)\}$ масаланинг хос қийматлари ва уларга мос келувчи хос функцияларини топдик.

(3.54) билан аниқланган қаторни яқинлашувчилигини исботлаймиз. Бунинг учун гипергеометрик функцияни чексиз қатор кўринишида тасвирлаб оламиз, яъни

$$u_n \xi = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\left[c-1/2 \right] + \sqrt{q + \left[c-1/2 \right]^2} \right)_k \left(\left[c-1/2 \right] - \sqrt{q + \left[c-1/2 \right]^2} \right)_k}{k! c_k} \times \\ \times \frac{a+b+\sigma_n/2_j}{j! c+k!} \frac{a+b-\sigma_n/2_j}{j!} \xi^j.$$

Охирги ифодадан Даламбер принципага асосан, қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |\xi|.$$

Демак, принципга асосан $|\xi| < 1$ бўлганда қатор абсолют яқинлашувчи. Бизнинг ҳолда $0 \leq \xi \leq 1$ эканлигидан, $\xi = 0$ да чегараланганлиги ҳамда $\xi = 1$ да нолга тенглигидан, берилган (3.54) қатор абсолют яқинлашувчи эканлигини айтиш мумкин.

(3.54) хос функцияларни биринчи бобнинг тўртинчи параграфида ўрганилган икки аргументли гипергеометрик функциялар орқали ёзишимиз ҳам мумкин бўлади. Масалан, (1.16) ва (1.17) формулаларга асосан (3.54) ни қуйидагича ёзамиз:

$$u_n \xi = F_3 \left(\frac{c-1}{2} + \sqrt{q + \left(\frac{c-1}{2} \right)^2}, \frac{a+b+\sigma_n}{2}, \frac{c-1}{2} - \sqrt{q + \left(\frac{c-1}{2} \right)^2}, \frac{a+b-\sigma_n}{2}, c; 1; \xi \right).$$

Бу формуладан ҳам F_3 функциянинг хоссаларидан фойдаланган ҳолда қаторнинг яқинлашувчи эканлигини исботлаш мумкин.

III боб бўйича хулоса

Ушбу боб Гойн ва Гойннинг конфлюэнт тенгламалари хусусий ечимлари деб номланган бўлиб, унда Гойн тенгламаси ечимини гипергеометрик функциялар қатори кўринишида топиш, Гойннинг конфлюэнт тенгламасининг ечимини гипергеометрик функциялар қатори кўринишида топиш ва Гойн синфига тегишли тенгламалар учун хос қиймат ҳақидаги масала каби мавзулар ёритилган.

Масалаларни тадқиқ қилиш жараёнида математик физиканинг махсус функциялари бўлмиш бета ва гамма функциялар, Гаусснинг гипергеометрик функцияси, икки аргументли гипергеометрик функциялар, Похгаммер символи, Фукс ва регуляр махсус нуқталар назарияси ва умумлашган Риман схемаси каби математик аппаратлардан кенг фойдаланилган.

Хулоса

Мазкур магистрлик диссертацияси Гойн тенгламасининг ечими ва унинг хоссалари мавзусига бағишланган бўлиб, унинг биринчи бобида математик физиканинг махсус функцияларидан айримлари келтирилган. Бу махсус функцияларнинг хоссаларини ўрганиб кейинги боблардаги масалаларга тадбиқини кўриб чиқилган. Шу сабабли бу бобда Эйлернинг биринчи ва иккинчи тур интеграллари ёки бета ва гамма функциялар номи билан машҳур бўлган функциянинг хоссалари ўрганилган. Бундан кейинги параграфда Гаусснинг гипергеометрик тенгламасининг махсус нуқталар атрофидаги умумий ечими ва бу ечимни берувчи функциянинг хоссалари ўрганилиб чиқилган. Бу функциянинг интеграл кўринишлари ҳақида батафсил маълумот берилган. Бундан ташқари икки аргументли гипергеометрик функцияларнинг таърифлари, дифференциал тенгламалари, Гаусснинг гипергеометрик функцияси ва Бессел функциялари орқали ёйилмалари, интеграл кўринишлари, параметрларнинг хусусий қийматларидаги кўриниши ҳақида маълумотлар келтирилган. Бобнинг охирги параграфида Похгаммер символининг таърифи ва у билан боғлиқ формулалар келтирилган.

Ишнинг иккинчи бобининг биринчи параграфида Фукс ва регуляр махсус нуқталар ҳақида тушунча бериб ўтилган. Регуляр ва иррегуляр махсус нуқталар, фукс махсус нуқталари мисоллар орқали тушунтирилиб берилган. Бу бобнинг иккинчи параграфида умумлашган Риман схемаси (Риманнинг Р-символи) ҳақида маълумотлар келтирилган. Бу схема фукс ва фукс бўлмаган тенгламалар учун қўлланилиши айтиб ўтилган бўлиб, унда қуйидагилар мавжуд:

- махсус нуқталарнинг s – ранги;
- махсус нуқталарнинг ҳолати;
- Фробениуснинг характеристик кўрсаткичи;

- нормал ва субнормал ечимлар учун Томенинг характеристик кўрсаткичи.

Юқоридаги тушунчалардан махсус нуқталарнинг s – ранги ва Фробениуснинг характеристик кўрсаткичига тўхталиб ўтилган.

Иккинчи бобнинг учунчи параграфида Гойн тенгламаси ва унинг ечими ҳақида маълумотлар келтирилган. Иккинчи тартибли Гойн синфига мансуб чизикли оддий дифференциал тенгламалар тўртта махсус нуқтага эга бўлган фукс шартини қаноатлантирувчи тенгламалар ҳисобланиши мавзуда тушунтириб берилган. Иккинчи бобнинг тўртинчи параграфи Гойннинг конфлюэнт тенгламалари деб номланган бўлиб, унда Гойннинг конфлюэнт тенгламалари ҳақида маълумотлар келтирилган. Бу мавзуда кучли ва кучсиз конфлюэнциялар ҳақида тўхталиб ўтилган.

Диссертациянинг учунчи боби Гойн ва Гойннинг конфлюэнт тенгламалари хусусий ечимлари деб номланган бўлиб, унда Гойн тенгламаси ечимини гипергеометрик функциялар қатори кўринишида топиш, Гойннинг конфлюэнт тенгламасининг ечимини гипергеометрик функциялар қатори кўринишида топиш ва Гойн синфига тегишли тенгламалар учун хос қиймат ҳақидаги масала каби мавзулар ёритилган.

Масалаларни тадқиқ қилиш жараёнида математик физиканинг махсус функциялари бўлмиш бета ва гамма функциялар, Гаусснинг гипергеометрик функцияси, икки аргументли гипергеометрик функциялар, Похгаммер символи, Фукс ва регуляр махсус нуқталар назарияси ва умумлашган Риман схемаси каби математик аппаратлардан кенг фойдаланилган.

Фойдаланилган адабиётлар:

Норматив ҳуқуқий ҳужжатлар

1. Ўзбекистон Республикасининг Қонуни. “Кадрлар тайёрлаш миллий дастури”. Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлисининг Ахборотномаси. 9-сон, 225-модда, Т.: 1997 й.

2. Ўзбекистон Республикасининг Қонуни. “Таълим тўғрисида”. Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлисининг Ахборотномаси, 9-сон, 225-модда, Т.: 1997 й.

Дарслик ва ўқув қўлланмалар

3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра. - М.: Наука, 1973. – 296 с.

4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. т.2. – 810 с., т.3. – 662 с.

5. Комаров И. В., Пономарев Л. И., Славянов С. Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука, 1976.

6. Славянов С., Лай В. Специальные функции: Единая теория, основанная на анализе особенностей. Санк-Петербург. 2002. – 312 с.

Илмий журналдаги мақолалар

7. Bieberbach L. Theoric der gewöhnlichen Differential gleichungen. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1965. (2nd ed.)

8. Centennial Workshop on Heun’s Equation – Theory and Applications. Sept. 3-8, 1989/Eds.:A.Seeger and W.Lay. Max-Planck-Institut fur Metallforschung, Institut fur Physik. Stuttgart

9. Decarreau A., Dumont-Lepage M.C., Maroni P., Robert A., Ronveaux A.//Ann.Soc.Sc.de Bruxelle.1978.Vol.92. P. 53-78.

10. Decarreau A., Maroni P., Robert A.//Ann.Soc.Sc. de Bruxelle. 1978.Vol.92.P. 151-189.

11. Erdelyi A., Duke Math. J. 9, 48 (1942). Erdelyi A., Q. J. Math. (Oxford) 15, 62 (1944).
12. Heun K.//Math. Ann. 1889. Vol.33.S.161-179.
13. Heun's Differential Equations//Ed.: Ronveaux. Oxford; New York; Tokiyo: Oxford University Press, 1995.
14. Lamé G. Lecons sur les fonction inverses des transcewndantes et les surfaces isothermes. Paris, 1857.
15. Schmidt D., J. Reine Angew. Math. 309, 127 (1979).
16. Svartholm N., Math. Ann. 116, 413 (1939).
17. Сохонян Р.С., Меликджанян Д.Ю., Ишханян А.М. Новые решения общего уравнения Гойна в виде рядов по гипергеометрическим функциям. Известия НАН Армении, Физика, т.40, 6, с 391-396.
18. Уринов А.К., Каримов К.Т. Об одном методе нахождения общего решения вырожденного уравнения Гойна. Материалы научной конференции “Современные методы математической физики и их приложения” Ташкент. 15-17 апреля 2015 г. –С. 298-300.
19. Каримов К.Т., Хурсанова С.Х. Решение уравнения Гойна в виде рядов по гипергеометрическим функциям. Материалы республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы математики». 17 мая 2016 г. –С. 148-150.
20. Хурсанова С.Х. Об уравнении Гойна. Материалы республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы математики». 17 мая 2016 г. –С. 201-204.
21. Хурсанова С.Х. Гойн тенгламаси ечимини топишнинг бир усули хақида. Материалы республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Актуальные проблемы динамических систем и их приложений». 1-3 мая 2017 г. –С. 91-92.

Интернет сайтлари

22. <http://lex.uz> (Ўзбекистон Республикаси қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси)/
23. <http://www.ziynet.uz> (Ўзбекистон Республикаси ахборот таълим портали).
24. <http://www.elsevier.com/locate/aml> (Applied Mathematics Letters илмий журнали сайти).
25. <http://www.exponenta.ru> (Математик ўқув сайти).
26. <http://www.elibrary.ru> (Электрон кутубхона).