ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА
МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

Қўлёзма ҳуқуқида

УДК 517.956.6.

Тоштемиров Баҳодиржон Ҳаётжон ўғли

Параболо-гиперболик типдаги юкланган тенгламалар учун чегаравий масалалар

5А 130101 – математика (дифференциал тенгламалар) мутахассислиги
бўйича магистр академик даражасини олиш учун

МАГИСТРЛИК ДИССЕРТАЦИЯСИ

Илмий раҳбар: физика - математика
фанлари доктори,
профессор А.Қ.Ўринов

Фарғона - 2017

МУНДАРИЖА

Кириш

Ўзбекистон Республикасининг биринчи Президенти И.А.Каримов Олий Мажлиснинг XIV сессиясида сўзлаган нутқида кадрлар тайёрлашнинг аҳамиятига изоҳ бериб шундай деган эди:

“Биз олдимизга қандай вазифа қўймайлик, қандай муаммони ечиш зарурияти туғилмасин, гап охир оқибат, барибир кадрларга бориб қадалаверади”. Муболағасиз айтиш мумкинки, бизнинг келажагимиз, мамлакатимиз калажаги, ўрнимизга ким келишига ёки бошқачарок қилиб айтганда, қандай кадрлар тайёрлашимизга боғлиқ.

Юқори малакали педагог кадрлар тайёрлаш ва қайта тайёрлашга алоҳида эътибор бериш лозим. Кадрлар тайёрлашнинг сифати, эркин фикрловчи шахс - фуқорони камол топтиришга, эртага синф хоналар ва аудиторияларда кимлар дарс ва сабоқ беришига боғлиқ[1].

Дарҳақиқат, баркамол инсон шахсининг шаклланиши бевосита узлуксиз таълим жараёнида амалга ошади. Шундай экан, ҳар жабҳада муваффақиятга эришиш, жумладан юқори малакали кадрлар тайёрлашда Миллий дастурнинг ўрни ва аҳамияти беқиёсдир.

Юқоридаги фикрларга эътибор қаратадиган бўлсак, мамлакатимизнинг ривожланган давлатлар қаторидан ўз ўрнини эгаллашига эришишнинг асосий омилларидан бири юқори малакали кадрлар тайёрлашдир.

1997 йил 29 август Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлисида «Таълим тўғрисида» ги қонуннинг ва «Кадрлар тайёрлаш Миллий дастури»нинг қабул қилиниши муқаддас заминимизда яшаётган ҳар бир инсон ва унинг бахту-саодати, фарзандини фазлу-камолини кўриш учун улкан имкониятлар яратишга асос бўлди. Мамлакатимизда

---

[1] I.A. Karimov. Biz o’z kelajagimizni o’z qo’limiz bilan quramiz. Toshkent.”O’zbekiston”. 1999-yil. 381-bet.

таълим тизимидаги олиб борилаётганислоҳотларнинг мазмуни ва амалга ошириш муддатлари ушбу қонунда ўз аксини топган.

«Кадрлар тайёрлаш Миллий дастури»да таъкидланганидек, «Кадрлар тайёрлаш тизими ва мазмунини мамлакатнинг ижтимоий ва иқтисодий тараққиёти истиқболларидан, жамият эҳтиёжларидан, фан, маданият, техника ва технологиянинг замонавий ютуқларидан келиб чиққан ҳолда қайта қуриш лозим». “Кадрлар тайёрлаш Миллий дастури” нинг ҳаётга татбиқ этилиши туфайли узлуксиз таълим тизими мунтазам янгиланиб ва такомиллашиб, таълим муассасаларининг замонавий моддий-техник ва ўқув базасини шакллантириш ва мустаҳкамлаш, таълим-тарбия жараёнига янги стандартлар, илғор педагогик ва ахборот технологияларини жорий этиш борасида кенг кўламли ишлар амалга оширилаётир.

Кадрлар тайёрлаш Миллий дастурида олий таълимнинг асосий мақсади, бозор иқтисодиёти шароитида мустақил ишлашга қодир, рақобатбардош, юқори малакали мутахассислар тайёрлашдан иборат. Бу мақсадга эришиш учун, шунингдек Республикамиз биринчи Президенти айтгани каби «мамлакатимизнинг бой илмий - техникавий салоҳиятидан кенг фойдаланган ҳолда, юксак технология ва фан ютуқларига асосланган ишлаб чиқариш соҳалари - автомобилсозлик, самолётсозлик, микробиология, электротехника ва электроника саноатларини, телекоммуникация ва замонавий ахборот технология воситаларини тез суръатларда ривожлантириш» учун сабоқ олаётган ҳар бир шахс ўзи ўрганган таълим мазмунини чуқур англаши, қаерда ва қандай татбиқ қилишни билиши, ҳаётда эса ўзи амалиётга татбиқ қила олиши керак.

Биринчи Президентимиз Ислом Каримов “Ўзбекистон мустақилликка эришиш остонасида” китобларида ушбу фикрларни келтириб ўтганлар: “Олимларимиз анъанавий йўналишлар билан бир қаторда сўнгги даврда радиация ва гелиоматериалшунослиги, физика ва квант электроникаси, лазер техникаси, нурланиш касаллигига йўлиққанларни даволашда қўлланиладиган дори-дармонларни яратиш, иншоотларнинг зилзилабардошлиги, ўсимлик моддалари кимёси соҳалари ва бошқа соҳаларда катта обрў қозондилар.

Олимларимиз ижодкорлик билан, аниқ мақсадни кўзлаб ишлаётганликларига оид бошқа мисолларни ҳам айтиб ўтиш мумкин бўлур эди, албатта. Аммо бугунги реал воқелик хотиржам бўлиб қолиш учун асос бермайди. Хўш, бугун биз илм-фандан нималарни кутяпмиз, бизнинг фикримизча, унинг куч-ғайратларини қайси йўналишларда жамлаш керак бўлади?

Рўйирост айтадиган бўлсак, Республиканинг фундаментал фани ҳали фан-техника тараққиётининг қудратли двигателига айланишига анча бор, бу фан ишлаб чиқаришда инқилобий ўзгаришлар ясайдиган ечимларни амалга оширгани йўқ. Шуни таъкидлаш жоизки, жорий этилган ечимларнинг ярми қўлланмалар ва тавсияларни, фақат учдан бир қисми эса янги технологияларни ташкил қилади.

Ривожланган мамлакатларнинг тажрибаси фан учун ҳеч нарсани аямаётган мамлакат гуллаб-яшнаётганлигини ва бундай давлат ҳамма яхши нарсаларни – одамларнинг куч-ғайратларини ҳам, моддий-техника ресурсларини ҳам ўзида жамлаётганлигини яққол кўрсатмоқда.

Фанни малакали кадрлар билан таъминлаш, ходимларнинг профессионал билимдонлиги даражасини ошириш, уларнинг қобилиятларини рўёбга чиқариш учун барча шароитларни яратиш илмий жараённи жадаллаштиришнинг асосий омилидир.

Яна шуни ҳам айтиш керакки, фан соҳасида республика ҳозир ўзини ўзи таъминлай олмайди ва бундай бўлиши мумкин ҳам эмас. Фақат бошқа минтақаларнинг, бошқа мамлакатларнинг олимлари билан ўзаро наф келтирадиган хилма-хил алоқалар ҳозирги талаблар даражасида бўлишга имкон беради.

Фан соҳасидаги кадрларни жадал кўпайтириш ва ёшартириш учун, Ўзбекистон интеллектуал имкониятларини кескин даражада ошириш учун республика раҳбарияти ҳозир зарур маблағларни, жумладан, валюта маблағларини ажратишга, тегишли ташкилий масалаларни ҳал қилишга тайёр[1].

Биринчи Президентимиз “Юксак маънавият – енгилмас куч” асарида таъкидлаганидек, “Ватанимизнинг келажаги, халқимизнинг эртанги куни, мамлакатимизнинг жаҳон ҳамжамиятидаги обрў–эътибори, авваламбор, фарзандларимизнинг униб–ўсиб, улғайиб, қандай инсон бўлиб ҳаётга кириб боришига боғлиқдир. Биз бундай ҳақиқатни ҳеч қачон унутмаслигимиз керак” [2].

Ўзбекистон мустақилликка эришган кундан бошлаб ўтган қисқа вақт ичида ўзбек халқи сиёсий – ижтимоий, иқтисодий ва маданий соҳаларда катта ютуқларга эришди. Ўз тарихига янгича тафаккур асосида ёндашиш, улуғ аждодлар қолдирган бой маданий, маьнавий меросни ўрганиш шарафига муяссар бўлди, миллий ғурури қайта тикланди. Республикада илм-фан, жумладан, математика фани тараққиёт босқичига кўтарилмоқда. Ўтмишдаги риёзиёт (математика) даҳоларининг шуҳратини тиклаш, уларнинг ғояларини халқ ҳаётига татбиқ этишдек улуғ ишлар амалга оширилмоқда.

Маълумки, олий таълимни икки босқичли қилиб ташкил этилганлиги, яъни бакалавриат ва магистратура босқичларидан иборатлиги олий малакали мутахассислар тайёрлаш сифатини кўтаришга хизмат қилмоқда. Ҳақиқатдан ҳам, бакалавриатда маълум йўналиш бўйича у ёки бу касбни эгаллаш учун зарур бўлган фундаментал фанлар пухта ўрганилса, магистратурада шу йўналишга мос бирон бир мутахассисликни эгаллаш учун зарур бўлган фанларни чуқур ўзлаштириб, бу фанлар ривожининг хозирги замон даражасигача ўрганиш имкони мавжуддир. Мана шу нуқтаи назардан қараганда, магистратурани тугатаётган ҳар бир мутахассис ўз йўналишидаги асосий фанлари бўйича замонавий билимларга эга бўлиши ва шу соҳа бўйича илмий тадқиқот олиб бориш қобилиятига эга бўлиши зарур.

Юқоридагиларга асосан хулоса қилиб айтиш мумкинки, мазкур магистирлик диссертацияси ҳам ана шу вазифани бажаришдаги бир уриниш бўлиб, унда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг энг замонавий бир тармоғи бўйича олиб борилган тадқиқотлар баён қилинган.

Мавзунинг долзарблиги.

Маълумки, дифференциал тенгламалар назарияси математиканинг узоқ тарихга эга бўлган бўлимларидан биридир. Бу назариянинг бошланиши “функциянинг бошланғичи” тушунчаси киритилишига тўғри келади десак нотўғри бўлмайди. Чунки функциянинг бошланғичларини топиш масаласи, энг содда оддий дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топиш масаласига эквивалентдир.

Ўтган давр мобайнида дифференциал тенгламалар назарияси ҳам амалий ва ҳам назарий жиҳатдан турли йуналишлар бўйича жадал ривожланди. Жумладан, икки ўзгарувчили иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар дастлаб эллиптик, гиперболик ва параболик типга бўлиб ўрганилган бўлса, кейинчалик бундай тенгламалар текис ва бузиладиган тенгламаларга ажратиб ўрганилди.

Сўнгги йилларда, оптимал текшириш масалалари устидаги жадал изланишлар, ер остида сувлар сизиши ва тупроқ намлигини аниқлаш, ғовак муҳитларда газлар ва нефт ҳаракатини олдиндан аниқлаш, шунингдек узоқ муддатли илмий башоратлар қилиш масалалари “Юкланган тенгламалар” деб номланувчи янги тенгламалар синфини ўрганишни тақозо этмоқда. Бу каби тенгламаларни биринчи марта қўлланилиши Н. Н. Назаров ва Н. Н. Кочинларнинг илмий ишларида кузатилган. Лекин улар “юкланган тенглама” атамасини ишлатишмаган.

Биринчи марта бу атамани А. М. Нахушев илмий ишларида фойдаланган. У юкланган тенгламанинг умумий тарифини ва турли хил юкланган тенгламаларнинг классификациясини, ҳусусан, юкланганган дифференциал тенгламалар, юкланганган интегро-дифференциал тенгламалар, юкланганган интеграл тенгламалар, юкланганган функционал тенгламалар ва хоказолар, ҳамда бу тенгламаларнинг кўпсонли тадбиқларини келтириб ўтган[3].

А. М. Нахушев, М. Х. Шхануков, А. Б. Бородин, В. М. Казиев, А. Х. Аттаев, В. А. Элеев, Д. М. Курьязов, М. И. Рамазанов ва бир қатор бошқа олимлар томонидан иккинчи тартибли ҳусусий ҳосилали юкланган дифференциал тенгламалар ўрганилган.

Бундан ташқари гиперболик, параболо-гиперболик, эллиптико гиперболик типидаги юкланган тенгламалар учун чегаравий масалалар қўйилган бўлиб, лекин барчи масалалар ҳали тўлақонли ўрганилмаган.

Бошқа томондан эса бундай тенгламалар учун чегаравий масалаларни ўрганиш биология, механика, физика ва техниканинг турли масалаларига жуда кўп татбиқ қилинади. Бундай жараёнлар қаторига турли биологик муаммоларни, тупроқ намлигини, плазма муаммоларини ҳамда лазер тарқалиши каби жараёнларнинг математик моделлаштиришни киритиш мумкин. Шунингдек, юкланган тенгламалар учун чегаравий масалаларнинг амалий тадбиқлари очиқ, ошкора кўриниб турган бир пайтда бундай тенгламаларни ўрганиш долзарб масала эканини кўрсатади.

Юқорида келтирилган фикрлардан мазкур мавзу ҳам назарий ва ҳам амалий аҳамиятга эга бўлган долзарб йўналиш деган хулоса келиб чиқади.

Бундан ташқари ҳар йили турли давлатларда бузиладиган ва аралаш типдаги юкланган тенгламалар учун чегаравий масалалар ҳамда анализ ва информатиканинг турдош муаммолари мавзусида ўтказилаётган халқаро конференция ва симпозиумлар ҳам танланган тадқиқот мавзусининг долзарблиги ҳақида гувоҳлик беради.

Тадқиқотнинг мақсади. Диссертацияда кўзда тутилган асосий мақсад параболо-гиперболик типдаги юкланган тенгламалар учун чегаравий масалаларнинг бир қийматли ечилишини ўрганиш.

Тадқиқотнинг вазифаси.

Диссертацияда қуйидаги вазифаларни ечиш кўзда тутилган асосий мақсад параболо-гиперболик типдаги юкланган тенгламалар учун Трикоми масаласининг ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини исботлаш.

Илмий янгилиги.

Диссертацияда олинган илмий натижаларнинг барчаси янги. Унда бош қисмида модел ва спектрал параметрли оператор қатнашган юкланган тенгламалар учун Трикоми масаласи ўрганилган.

Тадқиқот усуллари.

Қўйилган масалалар ечимининг мавжудлигини исботлашда интеграл тенгламалар назариясидан фойдаланилган, ечимнинг ягоналигини исботлашга экстремум принципи ва интеграл энергия усуллари қўлланилган.

Илмий натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти.

Диссертацияда олинган илмий натижалар асосан назарий аҳамиятга эга. Лекин улар юкланган дифференциал тенгламалар назариясини янада ривожлантиришда ва бакалавриатнинг «математика» йўналиши талабалари учун махсус курсларни ўқитишда фойдаланилиши мумкин.

Тадқиқотнинг апробацияси.

Олинган илмий натижалар «Дифференциал тенгламалар ва унга турдош математик сохаларнинг долзарб муаммолари» номли илмий семинарида, 2016-йил Фарғона давлат университетида ўтказилган “Илм заковатим сенга, она ватан” номли илмий амалий анжуманда, “ФарДУ. Илмий хабарлар” илмий журналининг 2016-йил сентабр ва декабр сонларида ва Андижон шаҳрида 2016-йил ўтказилган “Математика ва унинг долзарб муаммолари” номли Республика миқёсидаги илмий амалий конференцияда, шунингдек муҳокама қилинган. Диссертация мавзуси бўйича 2 та илмий мақолалар ва 4 тезислар эълон қилинган.

Диссертациянинг тузилиши ва хажми.

Диссертация кириш, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат бўлиб, боблар параграфларга бўлинган. Диссертация 82 бетдан иборат.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ МАЗМУНИ

Диссертациянинг кириш қисмида тадқиқот мавзусининг долзарблиги ва унинг ўрганилганлик даражаси батафсил баён қилиниб, тадқиқотнинг мақсад ва вазифалари кўрсатиб ўтилган. Бундан ташқари олинган натижаларнинг илмий янгилиги ҳамда тадқиқот усуллари ҳақида ҳам маълумот берилиб, илмий натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти, уларнинг апробацияси ҳамда диссертациянинг тузилиши ва хажми баён қилинган.

I бобда ёрдамчи тушунчалар ва масалалар келтирилган бўлиб, у тўртта параграфдан иборат. Биринчи параграфда бир жинсли бўлмаган тор тебраниш тенгламаси учун Дарбу ва Коши-Гурса масалаларининг ечимлари Риман усули билан топилган. Иккинчи параграфда телеграф тенгламаси учун Риман функциясини қуриш масаласи кўрилган бўлиб, у интеграл тенгламага келтирилиб, кетма-кет яқинлашиш усули билан қурилган. Учинчи параграфда эса телеграф тенгламаси учун Дарбу ва Коши-Гурса масалалари Риман усули билан ечилган. Тўртинчи параграфда параболик типдаги модел тенглама учун биринчи чегаравий масаланинг ечими ҳақида маълумотлар келтирилган.

Биринчи параграфда қуйидаги масалалар ўрганилган:

I Дарбу масаласи. $u_{xx}-u_{yy}=f\ \ x,y$ *тенгламанинг* $C(\overline{\Omega}_2)\cap C^2(\Omega_2)$ *синфга тегишли ва*

$$u(x,-x)=\psi(x),\ \ 0\le x\le 1/2;\quad u(x,0)=\tau(x),\quad 0\le x\le 1$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\tau(x)$, $\psi(x)$ *- берилган узлуксиз функциялар бўлиб,* $\psi(0)=\tau(0)$ *тенгликни қаноатлантиради,* $\Omega_2=\{(x,y): x\in(0,1),\ -x<y<x-1\}$.

I Коши – Гурса масаласи. $u_{xx}-u_{yy}=f\ \ x,y$ *тенгламанинг* $C(\overline{\Omega}_2)\cap C^1(\Omega_2\cup OA)\cap C^2(\Omega_2)$ *синфга тегишли ва*

$$u(x,-x)=\psi(x),\quad 0\le x\le 1/2;\quad u_y(x,0)=\nu(x),\ 0<x<1$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\psi(x)$, $\nu(x)$ *- берилган узлуксиз функциялар.*

II Дарбу масаласи. $u_{xx}-u_{yy}=f\ \ x,y$ тенгламанинг $C(\overline{\Omega}_2)\cap C^2(\Omega_2)$ синфга тегишли ва

$$u(x,x-1)=\psi(x),\ \ (1/2)\le x\le 1;\quad u(x,0)=\tau(x),\quad 0\le x\le 1$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\tau(x)$, $\psi(x)$ - берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $\psi(1)=\tau(1)$ тенгликни қаноатлантиради.

II Коши – Гурса масаласи. $u_{xx}-u_{yy}=f\ \ x,y$ *тенгламанинг* $C(\overline{\Omega}_2)\cap C^1(\Omega_2\cup OA)\cap C^2(\Omega_2)$ *синфга тегишли ва*

$$u(x,x-1)=\psi(x),\ \ (1/2)\le x\le 1;\quad u_y(x,0)=\nu(x),\ 0<x<1$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\psi(x)$, $\nu(x)$ *- берилган узлуксиз функциялар.*

Шуни таъкидлаб ўтамизки, бир жинсли бўлмаган тор тебраниш тенгламаси учун баён қилинган Дарбу ва Коши-Гурса масалалари муаллиф томонидан [15]да ўрганилган.

Иккинчи параграфда телеграф тенгламаси учун Риман функцияси қурилган.

Учинчи параграфда ушбу масалалар ўрганилган:

Дарбу масаласи (D_1 масала) $L_\lambda u \equiv u_{xx} - u_{yy} + \lambda u = f(x,y)$ *тенгламанинг қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи* $u(x,y)$ *ечими топилсин:*

$$u(x,y) \in C(\bar{\Omega}_2) \cap C^2(\Omega_2),$$

$$u(x,-x) = \psi(x), \quad 0 \le x \le (1/2),$$

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

бу ерда $\tau(x)$, $\psi(x)$-берилган етарлича узлуксиз функциялар бўлиб, $\tau(0) = \psi(0)$ келишув шарти бажарилади.

Коши-Гурса масаласи (D_2 масала). $L_\lambda u \equiv u_{xx} - u_{yy} + \lambda u = f(x,y)$ *тенгламанинг қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи* $u(x,y)$ *ечими топилсин:*

$$u(x,y) \in C(\bar{\Omega}_2) \cap C^2(\Omega_2);$$

$$u(x,-x) = \psi(x), \quad 0 \le x \le (1/2);$$

$$\lim_{y \to \infty} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = u_y(x,0) = \nu(x), \quad 0 < x < 1,$$

бу ерда $\tau(x)$, $\psi(x)$-берилган етарлича узлуксиз функциялар.

Тўртинчи параграфда эса $\Omega_1 = \{(x,t): 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ соҳада параболик типдаги тенглама учун биринчи чегаравий масала ўрганилган:

Биринчи чегаравий масала. $u_{xx} - u_t = -f(x,t)$ *тенгламанинг* $\overline{\Omega}_1$ *да аниқланган, узлуксиз ва*

$$u(x,0)=\tau(x),\quad 0\le x\le l;$$

$$u(0,t)=\varphi_0(t),\quad 0\le t\le T;$$

$$u(l,t)=\varphi_1(t),\quad 0\le t\le T$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечими топилсин, бу ерда $\tau(x),\varphi_0(t),\varphi_1(t), f\left(x,t\right)$ - берилган узлуксиз функциялар бўлиб $\tau(0)=\varphi_0(0),\quad \tau(l)=\varphi_1(0)$ - келишув шартларини қаноатлантиради; $l,T>0$.

Иккинчи боб иккита параграфдан иборат бўлиб, у бош қисми модел параболо-гиперболик оператор қатнашган юкланган бир нечта тенгламалар учун Трикоми масалаларини қўйиш ва ўрганишга бағишланган.

Биринчи параграфда, $x+y=0$ характеристикада чегаравий шарт берилган ҳолда Трикоми масаласи бир нечта параболо-гиперболик тенгламалар учун тадқиқ этилган.

Трикоми масаласи. *Шундай* $u\left(x,y\right)\in\bigcap\limits_{i=1}^{2}\left[C\left(\overline{\Omega}_i\right)\cap C_{x,y}^{2,i}\left(\Omega_i\right)\right]$ *функция топилсинки, у* Ω_1 *ва* Ω_2 *соҳаларда* $Lu=0$ *тенгламани, унинг чегарасида*

$$u\left(0,y\right)=\varphi_0\left(y\right),\quad u\left(1,y\right)=\varphi_1\left(y\right),\quad 0\le y\le 1;$$

$$u\left(x,-x\right)=\psi\left(x\right),\quad 0\le x\le\left(1/2\right)\qquad (*)$$

чегаравий шартларни, $OA=\left\{\left(x,0\right):0<x<1\right\}$ *тип ўзгариш чизиғида эса қуйидаги*

$$\lim_{y\to+0}u\left(x,y\right)=\lim_{y\to-0}u\left(x,y\right),\quad 0\le x\le 1$$

$$\lim_{y\to+0}u_y\left(x,y\right)=\lim_{y\to-0}u_y\left(x,y\right),\quad 0<x<1$$

улаш шартларни қаноатлантирсин, бу ерда $\varphi_0\left(x\right),\,\varphi_1\left(x\right),\,\psi\left(x\right)-$берилган узлуксиз функциялар бўлиб,

$\varphi_0(0)=\psi(0)$ келишув шарти бажарилади.

Бу ерда Lu операторнинг кўриниши қуйидагича бўлган ҳоллар учун Трикоми масаласи ўрганилган:

$$Lu\equiv\begin{cases} L_1u\equiv u_{xx}-u_y-\lambda_1 u(x,0), & (x,y)\in\Omega_1, \\ L_2u\equiv u_{xx}-u_{yy}-\lambda_2 u(x-y,0), & (x,y)\in\Omega_2; \end{cases}$$

$$Lu\equiv\begin{cases} L_1u\equiv u_{xx}-u_y-\lambda_1 u(x,0), & (x,y)\in\Omega_1, \\ L_2u\equiv u_{xx}-u_{yy}-\lambda_2 u(x+y,0), & (x,y)\in\Omega_2; \end{cases}$$

$$Lu\equiv\begin{cases} L_1u\equiv u_{xx}-u_y-\lambda_1 u(x,0), & (x,y)\in\Omega_1, \\ L_2u\equiv u_{xx}-u_{yy}-\lambda_2 u_z(x-y,z)\big|_{z=0}, & (x,y)\in\Omega_2; \end{cases}$$

$$Lu\equiv\begin{cases} L_1u\equiv u_{xx}-u_y-\lambda_1 u(x,0), & (x,y)\in\Omega_1, \\ L_2u\equiv u_{xx}-u_{yy}-\lambda_2 u_z(x+y,z)\big|_{z=0}, & (x,y)\in\Omega_2, \end{cases}$$

бу ерда λ_1, λ_2-берилган ҳақиқий сонлар.

Иккинчи параграфда ҳам худди шу тенгламалар учун чегаравий шарт иккинчи $x-y=1$ характеристикада берилган ҳол учун Трикоми масаласи ўрганилган. Бунда юқоридаги (*) шарт ўрнига

$$u(x,x-1)=\psi(x),\ (1/2)\le x\le 1$$

шарт олиниб Трикоми масаласи тадқиқ этилган.

Қуйилган масалалар ечимининг ягоналигини исботлаш учун интеграл энергия ва экстремум прицыпи усулларидан фойдаланилган бўлиб, масалалар ечимининг мавжудлиги эса интеграл тенгламалар усули орқали исботланган.

Учинчи боб ҳам икки параграфдан иборат бўлиб, у бош қисмида спектрал параметрли параболо-гиперболик оператор қатнашган юкланган тенгламалар учун Трикоми масаласини ўрганишга бағишланган.

Биринчи параграфда

$$0 = Lu \equiv \begin{cases} L_1 u \equiv u_{xx} - u_y + \lambda u - k_1 u(x,0), & (x,y) \in \Omega_1, \\ L_2 u \equiv u_{xx} - u_{yy} + \lambda u - k_2 u(x+y,0), & (x,y) \in \Omega_2 \end{cases}$$

тенглама учун ушбу масала ўрганилган:

3.1-масала. *Шундай* $u(x,y) \in \bigcap_{i=1}^{2} \left[C(\overline{\Omega}_i) \cap C_{x,y}^{2,i}(\Omega_i) \right]$ *функция топилсинки, у* Ω_1 *ва* Ω_2 *соҳаларда* $Lu = 0$ *тенгламани, унинг чегарасида*

$$u(0,y) = \varphi_0(y), \quad u(1,y) = \varphi_1(y), \quad 0 \le y \le 1;$$

$$u(x,-x) = \psi(x), \quad 0 \le x \le (1/2)$$

чегаравий шартларни, ОА тип ўзгариш чизиғида эса қуйидаги

$$\lim_{y \to +0} u(x,y) = \lim_{y \to -0} u(x,y), \quad 0 \le x \le 1$$

$$\lim_{y \to +0} u_y(x,y) = \lim_{y \to -0} u_y(x,y), \quad 0 < x < 1$$

улаш шартларни қаноатлантирсин, бу ерда $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \psi(x) -$берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $\varphi_0(0) = \psi(0)$ келишув шарти бажарилади.

Иккинчи параграфда эса (3.1)-масаладаги шартлар билан

$$0 = Eu \equiv \begin{cases} E_1 u \equiv u_{xx} - u_y + \lambda u - k_1 u_y(x,0), & (x,y) \in \Omega_1, \\ E_2 u \equiv u_{xx} - u_{yy} + \lambda u - k_2 u_y(x+y,0), & (x,y) \in \Omega_2 \end{cases}$$

тенглама учун Трикоми масаласи ўрганилган.

I БОБ

ЁРДАМЧИ ТУШУНЧАЛАР ВА МАЪЛУМОТЛАР

1.1-§. Бир жинсли бўлмаган тор тебраниш тенгламаси учун Дарбу ва Коши-Гурса масалаларини Риман усули билан ечиш

Қуйида гиперболик типдаги тенгламаларнинг энг содда вакили бўлган

$$u_{xx}-u_{yy}=f\ \ x,y \tag{1.1}$$

тенглама учун Дарбу ва Коши – Гурса масалалари ечимини аниқловчи формулаларни Риман усули билан топамиз, бу ерда $f\left(x,y\right)$-берилган узлуксиз функция.

Ω_2 орқали (1.1) тенгламанинг $OC: x+y=0$, $AC: x-y=1$ характеристикалари ва $OA=\{(x,y): y=0, 0<x<1\}$ кесма билан чегараланган соҳани белгилайлик.

I Дарбу масаласи. (1.1) *тенгламанинг* $C(\overline{\Omega}_2)\cap C^2(\Omega_2)$ *синфга тегишли ва*

$$u(x,-x)=\psi(x),\ \ 0\le x\le 1/2;\quad u(x,0)=\tau(x),\quad 0\le x\le 1 \tag{1.2}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\tau(x)$, $\psi(x)$ - берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $\psi(0)=\tau(0)$ тенгликни қаноатлантиради.

I Коши – Гурса масаласи. (1.1) *тенгламанинг* $C(\overline{\Omega}_2)\cap C^1(\Omega_2\cup OA)\cap C^2(\Omega_2)$ *синфга тегишли ва*

$$u(x,-x)=\psi(x),\ \ 0\le x\le 1/2;\quad u_y(x,0)=\nu(x),\ 0<x<1 \tag{1.3}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\psi(x)$, $\nu(x)$ - берилган узлуксиз функциялар.

Бу масалаларни Риман усули билан ечиш учун $\xi=x+y$, $\eta=x-y$ формулалар орқали характеристик координаталарга ўтамиз. Бунда Ω_2 соҳа $\Delta\equiv\{(\xi,\eta):\ 0<\xi<\eta<1\}$ соҳага, (1.1) тенглама

$$\upsilon_{\xi\eta} = \Phi\ \ \xi,\eta \qquad (1.1')$$

тенгламага, (1.2) ва (1.3) чегаравий шартлар мос равишда

$$\upsilon(0,\eta) = \psi_1(\eta), \quad 0 \le \eta \le 1; \;\; \upsilon(\xi,\xi) = \tau(\xi), \;\; 0 \le \xi \le 1, \qquad (1.2')$$

$$\upsilon(0,\eta) = \psi_1(\eta), \;\; 0 \le \eta \le 1; \quad (\upsilon_\xi - \upsilon_\eta)_{\eta=\xi} = \nu(\xi), \quad 0 < \xi < 1, \qquad (1.3')$$

шартларга алмашади, бу ерда

$$\upsilon(\xi,\eta) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right), \quad \Phi\left(\xi,\eta\right) = \frac{1}{4} f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right),$$

$$\psi_1(\eta) = \psi\left(\frac{\eta}{2}\right), \; 0 \le \eta \le 1.$$

Маьлумки [4], $\{(1.1'),(1.2')\}$ ва $\{(1.1'),(1.3')\}$ масалаларнинг Риман – Адамар функциялари мос равишда қуйидаги кўринишга эга:

$$\omega\ \ \xi,\eta;\xi_0,\eta_0\ \ = \begin{cases} 1, & \text{агар } \eta > \xi_0 \ \text{ бўлса}, \\ 0, & \text{агар } \ \eta < \xi_0 \ \text{ бўлса}, \end{cases}$$

$$W\ \ \xi,\eta;\ \xi_0,\eta_0\ \ = \begin{cases} 1, & \text{агар } \quad \eta > \xi_0 \ \text{ бўлса}, \\ 2, & \text{агар } \quad \eta < \xi_0 \ \text{ бўлса}. \end{cases}$$

$\omega(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ функция, яъни $\{(1.1'),(1.2')\}$ масаланинг Риман – Адамар функцияси ҳамда, қуйидаги шартларни қаноатлантиради.

1) (ξ,η) ва (ξ_0,η_0) аргументлар бўйича Δ соҳада $(1.1')$ тенгламани қаноатлантиради;

2) $\omega_\xi(\xi,\eta_0;\xi_0,\eta_0) = 0, \;\; 0 < \xi < \xi_0; \qquad \omega_\eta(\xi_0,\eta;\xi_0,\eta_0) = 0, \;\; \xi_0 < \eta < \eta_0;$

3) $\omega(\xi,\xi;\xi_0,\eta_0) = 0, \; 0 \le \xi \le \xi_0;$

4) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}\left[\omega_\xi\ \ \xi,\xi_0+\varepsilon;\xi_0,\eta_0\ \ - \omega_\xi\ \ \xi,\xi_0-\varepsilon;\xi_0,\eta_0\ \ \right] = 0, \;\; \varepsilon > 0.$

$W\ \ \xi,\eta;\xi_0,\eta_0$ функция, яъни $\{(1.1'),(1.3')\}$ масаланинг Риман – Адамар функцияси қуйидаги шартларни қаноатлантиради.

1) (ξ,η) ва ξ_0,η_0 аргументлар бўйича Δ соҳада $(1.1')$ тенгламани қаноатлантиради;

2) $W_\xi\ \ \xi,\eta_0;\xi_0,\eta_0\ \ = 0, \;\; 0 < \xi < \xi_0; \;\; W_\eta\ \ \xi_0,\eta;\xi_0,\eta_0\ \ = 0, \;\; \xi_0 < \eta < \eta_0;$

3) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} W_\xi - W_\eta \Big|_{\eta=\xi+\varepsilon} = 0,\ 0<\xi<\xi_0;$

4) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Big[W_\xi\ \ \xi,\xi_0+\varepsilon;\xi_0,\eta_0\ \ - W_\xi\ \ \xi,\xi_0-\varepsilon;\xi_0,\eta_0\ \ \Big]=0,\ \varepsilon>0.$

Энди $\{(1.1'),(1.2')\}$ ва $\{(1.1'),(1.3')\}$ масалалар ечимларини топишга ўтамиз.

Фараз қилайлик, $\{(1.1'),(1.2')\}$ $[\{(1.1'),(1.3')\}]$ масаланинг ечими мавжуд ва $v\ \ \xi,\eta$ бўлсин. Риман – Адамар функцияси эса $\theta\ \ \xi,\eta;\xi_0,\eta_0$ бўлсин. У ҳолда Δ соҳада $\theta v_{\xi\eta} - v\theta_{\xi\eta} \equiv \Phi\ \ \xi,\ \eta\ \ \theta$ айният ўринли бўлади. Бу айниятни баъзи шакл алмаштиришлардан сўнг

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\theta\frac{\partial v}{\partial\eta} - v\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\theta\frac{\partial v}{\partial\xi} - v\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right) = 2\Phi\ \ \xi,\eta\ \ \theta, \qquad \xi,\eta\ \in\Delta \tag{1.4}$$

кўринишда ёзиб олиш мумкин.

Δ соҳадан ихтиёрий $M_0\ \ \xi_0,\eta_0$ нуқта олайлик ва $\eta=\eta_0$, $\xi=0$, $\eta=\xi_0+\varepsilon$, $\xi=\xi_0-2\varepsilon$ характеристикалар билан чегараланган соҳани Δ_1 билан, $\eta=\xi_0-\varepsilon$, $\xi=0$, $\eta-\xi=\varepsilon$ харктеристикалар билан чегараланган соҳани эса Δ_2 билан белгилайлик, бу ерда ε - етарли кичик мусбат сон. (1.4) тенгликни Δ_1 ва Δ_2 соҳалар бўйича интеграллаб, сўнгра Грин формуласини қўлласак,

$$\int\limits_{\partial\Delta_1}\Big[\ \ \theta v_\xi - v\theta_\xi\ \ d\xi + \ \ v\theta_\eta - \theta v_\eta\ \ d\eta\Big] = -2\iint\limits_{\Delta_1}\Phi\ \ \xi,\eta\ \ \Theta d\xi d\eta,$$

$$\int\limits_{\partial\Delta_2}\Big[\ \ \theta v_\xi - v\theta_\xi\ \ d\xi + \ \ v\theta_\eta - \theta v_\eta\ \ d\eta\Big] = -2\iint\limits_{\Delta_2}\Phi\ \ \xi,\eta\ \ \Theta d\xi d\eta$$

тенгликларга эга бўламиз. Бу ердаги интегралларни Δ_1 ва Δ_2 соҳалар чегаралари бўлакларининг тенгламаларини эътиборга олган ҳолда ҳисоблаб, ҳосил бўлган тенгликларни ҳадлаб қўшгандан сўнг $\varepsilon\to 0$ да лимитга ўтамиз. Натижада қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$v\ \ \xi_0,\eta_0\ \ \theta\ \ \xi_0,\eta_0;\xi_0,\eta_0\ \ - v\ \ 0,\eta_0\ \ \theta\ \ 0,\eta_0;\xi_0,\eta_0\ \ -$$

$$-\int_0^{\xi_0} \upsilon\;\xi,\eta_0\;\theta_\xi\;\xi,\eta_0;\xi_0,\eta_0\;d\xi-\int_{\xi_0}^{\eta_0} \upsilon\;\xi_0,\eta\;\theta_\eta\;\xi_0,\eta;\xi_0,\eta_0\;d\eta+$$

$$+\int_0^{\eta_0} \upsilon\;0,\eta\;\theta_\eta\;0,\eta;\xi_0,\eta_0\;d\eta+\frac{1}{2}\upsilon(0,0)\lim_{\varepsilon\to 0}\theta\;0,\varepsilon;\xi_0,\eta_0\;+$$

$$+\upsilon\;0,\xi_0\;\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\theta(0,\xi_0+\varepsilon;\xi_0,\eta_0)-\theta\;0,\xi_0-\varepsilon;\xi_0,\eta_0\;\right]-$$

$$-\upsilon\;\xi_0,\xi_0\;\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\theta\;\xi_0,\xi_0+\varepsilon;\xi_0,\eta_0\;-\frac{1}{2}\theta\;\xi_0,\xi_0,-\varepsilon;\xi_0,\eta_0\;\right]+$$

$$+\int_0^{\xi_0} \upsilon\;\xi,\xi_0\;\;\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\theta_\xi\;\xi,\xi_0+\varepsilon;\xi_0,\eta_0\;-\theta_\xi\;\xi,\xi_0-\varepsilon;\xi_0,\eta_0\;\right]d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\xi_0}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\theta\;\xi,\xi,+\varepsilon;\xi_0,\eta_0\;\;\upsilon_\xi-\upsilon_\eta\;\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}\right]d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\xi_0}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\upsilon\;\xi,\xi,+\varepsilon\;\;\theta_\eta-\theta_\xi\;\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}\right]d\xi=\iint_{\Delta_1\cup\Delta_2}\Phi\;\xi,\eta\;\Theta d\xi d\eta. \qquad (1.5)$$

Агар $\upsilon\;\xi,\eta$ ва $\theta\;\xi,\eta;\xi_0,\eta_0$ - мос равишда $\{(1.1'),(1.2')\}$ масаланинг ечими ва Риман – Адамар функцияси бўлса, у ҳолда $\theta\;\xi,\eta;\xi_0,\eta_0\;=\omega\;\xi,\eta;\xi_0,\eta_0$ бўлиб, бу функциясининг кўриниши ва 1) – 4) шартларга асосан, (1.5) тенгликдан

$$\upsilon\;\xi_0,\eta_0\;=\upsilon\;\xi_0,\xi_0\;+\upsilon\;0,\eta_0\;-\upsilon\;0,\xi_0\;+\iint_{\Delta_1}\Phi\;\xi,\eta\;\omega d\xi d\eta$$

келиб чиқади. Бу ерда $(1.2')$ чегаравий шартларни эътиборга олиб,

$$\xi_0=x_0+y_0,\;\;\eta_0=x_0-y_0, \qquad u\;\xi_0,\eta_0\;=u\left(\frac{\xi_0+\eta_0}{2},\frac{\eta_0-\xi_0}{2}\right) \qquad (1.6)$$

тенгликлар бўйича x_0,y_0 ўзгарувчиларга ва $u\;x_0,y_0$ функцияга қайтсак, Дарбу масаласи ечимини аниқловчи

$$u\;x_0,y_0\;=\tau\;x_0+y_0\;+\psi\left(\frac{x_0-y_0}{2}\right)-\psi\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{x_0+y_0} d\xi \int\limits_{x_0+y_0}^{x_0-y_0} f\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)d\eta \qquad (1.7)$$

формулага эга бўламиз.

Агар $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, $\psi(x)\in C\ 0,1/2\ \cap C^2\ 0,1/2$, $f\left(\xi,\eta\right)\in C\left(\overline{\Omega}_2\right)$ бўлса, (1.7) формула билан аниқловчи $u(x_0,y_0)$ функция $C(\overline{\Omega}_2)\cap C^2(\Omega_2)$ синфга тегишли бўлади ва Ω_2 соҳада (1.1) тенгламани қаноатлантиради.

Агар $\upsilon(\xi,\eta)$ ва $\theta(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$- мос равишда $\{(1.1'),(1.3')\}$ масаланинг ечими ва Риман – Адамар функцияси бўлса, у холда $\theta(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=W(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ бўлиб, бу функциясининг кўриниши ва 1) – 4) шартларига асосан, (1.5) тенгликдан

$$\upsilon(\xi_0,\eta_0)=\upsilon(0,\eta_0)+\upsilon(0,\xi_0)-\upsilon(0,0)+\int\limits_{0}^{\xi_0}\nu(t)dt+\int\limits_{0}^{\xi_0}d\xi\int\limits_{\xi}^{\eta_0}\Phi\ \xi,\eta\ \omega d\eta$$

келиб чиқади. Бу ерда (1.3') чегаравий шартларни эътиборга олиб, (1.6) тенгликлар билан (x_0,y_0) ўзгарувчиларга ва $u(x_0,y_0)$ функцияга қайтсак, Коши – Гурса масаласи ечимини аниқловчи

$$u(x_0,y_0)=\psi\left(\frac{x_0-y_0}{2}\right)+\psi\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right)-\psi(0)+\int\limits_{0}^{x_0+y_0}\nu(t)dt+$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{x_0+y_0}d\xi\int\limits_{x_0+y_0}^{x_0-y_0}f\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)d\eta+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x_0+y_0}d\xi\int\limits_{\xi}^{x_0+y_0}f\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)d\eta \qquad (1.8)$$

формулага эга бўламиз.

Агар $\nu(x)\in C^1(0,1)$, $\psi(x)\in C^1[0,1/2]\cap C^2(0,1/2)$, $f\left(\xi,\eta\right)\in C\left(\overline{\Omega}_2\right)$ бўлса, (1.8) формула билан аниқланувчи $u(x_0,y_0)$ функция $C\ \overline{\Omega}_2\ \cap C^1(\Omega_2\cup OA)\cap C^2(\Omega_2)$ синфга тегишли бўлади ва (1.1) тенгламани қаноатлантиради.

Қуйидаги масалалар ҳам юқоридаги усул билан ўрганилади:

II Дарбу масаласи. (1.1) *тенгламанинг* $C(\overline{\Omega_2})\cap C^2(\Omega_2)$ *синфга тегишли ва*

$$u(x,x-1)=\psi(x),\ \ (1/2)\le x\le 1;\quad u(x,0)=\tau(x),\quad 0\le x\le 1 \qquad (1.9)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\tau(x)$, $\psi(x)$ - берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $\psi(1)=\tau(1)$ тенгликни қаноатлантиради.

II Коши – Гурса масаласи. (1.1) *тенгламанинг* $C(\overline{\Omega_2})\cap C^1(\Omega_2\cup OA)\cap C^2(\Omega_2)$ *синфга тегишли ва*

$$u(x,x-1)=\psi(x),\ \ (1/2)\le x\le 1;\qquad u_y(x,0)=\nu(x),\ 0<x<1 \qquad (1.10)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\psi(x)$, $\nu(x)$ - берилган узлуксиз функциялар.

Бу масалаларни ҳам Риман усули билан ечиш учун худди юқоридагидек $\xi=x+y$, $\eta=x-y$ формулалар орқали характеристик координаталарга ўтамиз. Бунда Ω_2 соҳа $\Delta\equiv\{(\xi,\eta):\ 0<\xi<\eta<1\}$ соҳага, (1.1) тенглама $(1.1')$ тенгламага, (1.9) ва (1.10) чегаравий шартлар мос равишда

$$\upsilon(\xi,1)=\psi\left(\frac{1+\xi}{2}\right),\ \ 0\le\eta\le 1;\qquad \upsilon(\xi,\xi)=\tau(\xi),\ \ 0\le\xi\le 1, \qquad (1.9')$$

$$\upsilon(\xi,1)=\psi\left(\frac{1+\xi}{2}\right),\ 0\le\eta\le 1;\quad (\upsilon_\xi-\upsilon_\eta)_{\eta=\xi}=\nu(\xi),\quad 0<\xi<1, \qquad (1.10')$$

шартларга алмашади, бу ерда ҳам

$$\upsilon(\xi,\eta)=u\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right),\qquad \Phi(\xi,\eta)=\frac{1}{4}f\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right).$$

Кўрсатиш қийин эмаски, $\{(1.1'),(1.9')\}$ ва $\{(1.1'),(1.10')\}$ масалаларнинг Риман – Адамар функциялари мос равишда қуйидаги кўринишга эга:

$$\tilde{\omega}\ \ \xi,\eta;\xi_0,\eta_0\ =\begin{cases}0, & агар\ \xi>\eta_0\ бўлса,\\ 1, & агар\ \ \xi<\eta_0\ бўлса,\end{cases}$$

$$\tilde{W}\ \ \xi,\eta;\ \xi_0,\eta_0\ =\begin{cases}2, \ \text{агар} \quad \xi>\eta_0 \quad \text{бўлса},\\ 1, \ \text{агар} \quad \xi<\eta_0 \quad \text{бўлса}.\end{cases}$$

$\tilde{\omega}(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ функция, яъни $\{(1.1'),(1.9')\}$ масаланинг Риман – Адамар функцияси қуйидаги шартларни қаноатлантиради.

5) (ξ,η) ва (ξ_0,η_0) аргументлар бўйича Δ соҳада $(1.1')$ тенгламанинг регуляр ечими;

6) $\tilde{\omega}_\xi(\xi,\eta_0;\xi_0,\eta_0)=0,\ \ 0<\xi<\xi_0;\qquad \tilde{\omega}_\eta(\xi_0,\eta;\xi_0,\eta_0)=0,\ \ \xi_0<\eta<\eta_0;$

7) $\tilde{\omega}(\eta,\eta;\xi_0,\eta_0)=0,\ 0\le\xi\le\xi_0;$

8) $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\left[\tilde{\omega}_\eta\ \ \eta_0+\varepsilon,\eta;\xi_0,\eta_0\ -\tilde{\omega}_\eta\ \ \eta_0-\varepsilon,\eta;\xi_0,\eta_0\ \right]=0,\ \ \varepsilon>0.$

$\tilde{W}\ \ \xi,\eta;\xi_0,\eta_0$ функция, яъни $\{(1.1'),(1.10')\}$ масаланинг Риман – Адамар функцияси қуйидаги шартларни қаноатлантиради.

9) (ξ,η) ва ξ_0,η_0 аргументлар бўйича Δ соҳада $(1.1')$ тенгламанинг регуляр ечими;

10) $\tilde{W}_\xi\ \ \xi,\eta_0;\xi_0,\eta_0\ =0,\ 0<\xi<\xi_0;\ \ \tilde{W}_\eta\ \ \xi_0,\eta;\xi_0,\eta_0\ =0,\ \ \xi_0<\eta<\eta_0;$

11) $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\ \tilde{W}_\xi-\tilde{W}_\eta\ \Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}=0,\ 0<\xi<\xi_0;$

12) $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\left[\tilde{W}_\eta\ \ \eta_0+\varepsilon,\eta;\xi_0,\eta_0\ -\tilde{W}_\eta\ \ \eta_0-\varepsilon,\eta;\xi_0,\eta_0\ \right]=0,\ \varepsilon>0.$

Фараз қилайлик, $\{(1.1'),(1.9')\}$ $[\{(1.1'),(1.10')\}]$ масаланинг ечими мавжуд ва $\upsilon\ \ \xi,\eta$ бўлсин. Риман – Адамар функцияси эса $\theta\ \ \xi,\eta;\xi_0,\eta_0$ бўлсин. У ҳолда Δ соҳада $\theta\upsilon_{\xi\eta}-\upsilon\theta_{\xi\eta}\equiv\Phi\ \ \xi,\,\eta\ \ \theta$ айният ўринли бўлади. Бу айниятни баъзи шакл алмаштиришлардан сўнг (1.4) кўринишда ёзиб олиш мумкин.

Δ соҳадан ихтиёрий $M_0\ \ \xi_0,\eta_0$ нуқта олайлик ва $\eta=1,\ \ \xi=\xi_0,$ $\eta=\eta_0+2\varepsilon,\ \ \xi=\eta_0-\varepsilon$ характеристикалар билан чегараланган соҳани Δ_3 билан, $\eta=\xi+\varepsilon,\ \xi=\eta_0+\varepsilon,\ \eta=1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган соҳани эса Δ_4 билан белгилайлик, бу ерда ε - етарли кичик мусбат сон. (1.4) тенгликни Δ_3 ва Δ_4 соҳалар бўйича интеграллаб, сўнгра Грин формуласини қўлласак,

$$\int\limits_{\partial\Delta_3}\left[\;\theta\upsilon_\xi-\upsilon\theta_\xi\;\;d\xi+\;\;\upsilon\theta_\eta-\theta\upsilon_\eta\;\;d\eta\right]=-2\iint\limits_{\Delta_3}\Phi\;\;\xi,\eta\;\;\theta d\xi d\eta,$$

$$\int\limits_{\partial\Delta_4}\left[\;\theta\upsilon_\xi-\upsilon\theta_\xi\;\;d\xi+\;\;\upsilon\theta_\eta-\theta\upsilon_\eta\;\;d\eta\right]=-2\iint\limits_{\Delta_4}\Phi\;\;\xi,\eta\;\;\theta d\xi d\eta$$

тенгликларга эга бўламиз. Бу ердаги интегралларни Δ_3 ва Δ_4 соҳалар чегаралари бўлакларининг тенгламаларини эътиборга олган ҳолда ҳисоблаб, ҳосил бўлган тенгликларни ҳадлаб қўшгандан сўнг $\varepsilon\to 0$ да лимитга ўтамиз. Натижада қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$\begin{gathered}
\theta(\xi_0,\eta_0;\xi_0,\eta_0)\upsilon(\xi_0,\eta_0)-\theta(\xi_0,1;\xi_0,\eta_0)\upsilon(\xi_0,1)+\\
+\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0}\upsilon\;\;\xi,\eta_0\;\;\theta_\xi\;\;\xi,\eta_0;\xi_0,\eta_0\;\;d\xi+\int\limits_{\eta_0}^{1}\upsilon\;\;\xi_0,\eta\;\;\theta_\eta\;\;\xi_0,\eta;\xi_0,\eta_0\;\;d\eta-\\
-\int\limits_{\xi_0}^{1}\upsilon\;\;\xi,1\;\;\theta_\xi\;\;\xi,1;\xi_0,\eta_0\;\;d\xi+\frac{1}{2}\upsilon(1,1)\lim_{\varepsilon\to0}\theta\;\;1-\varepsilon,1;\xi_0,\eta_0\;\;-\\
-\upsilon\;\;\eta_0,1\;\;\lim_{\varepsilon\to0}\left[\theta(\eta_0+\varepsilon,1;\xi_0,\eta_0)-\theta\;\;\eta_0-\varepsilon,1;\xi_0,\eta_0\;\;\right]-\\
-\upsilon\;\;\eta_0,\eta_0\;\;\lim_{\varepsilon\to0}\left[\theta\;\;\eta_0-\varepsilon,\eta_0+2\varepsilon;\xi_0,\eta_0\;\;-\frac{1}{2}\theta\;\;\eta_0+\varepsilon,\eta_0+2\varepsilon;\xi_0,\eta_0\;\;\right]+\\
+\int\limits_{\eta_0}^{1}\upsilon\;\;\eta_0,\eta\;\;\lim_{\varepsilon\to0}\left[\theta_\eta\;\;\eta_0+\varepsilon,\eta;\xi_0,\eta_0\;\;-\theta_\eta\;\;\eta_0-\varepsilon,\eta;\xi_0,\eta_0\;\;\right]\;d\eta-\\
-\frac{1}{2}\int\limits_{\eta_0}^{1}\lim_{\varepsilon\to0}\left[\theta\;\;\eta-\varepsilon,\eta;\xi_0,\eta_0\;\;\;\upsilon_\xi-\upsilon_\eta\;\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}\right]\;d\eta-\\
-\frac{1}{2}\int\limits_{\eta_0}^{1}\lim_{\varepsilon\to0}\left[\upsilon\;\;\eta-\varepsilon,\eta\;\;\;\theta_\eta-\theta_\xi\;\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}\right]\;d\xi=\iint\limits_{\Delta_3\cup\Delta_4}\Phi\;\;\xi,\eta\;\;\theta d\xi d\eta.
\end{gathered}\tag{1.11}$$

Агар $\upsilon\;\;\xi,\eta$ ва $\theta\;\;\xi,\eta;\xi_0,\eta_0$ - мос равишда $\{(1.1'),(9')\}$ масаланинг ечими ва Риман – Адамар функцияси бўлса, у ҳолда

$\theta\ \xi,\eta;\xi_0,\eta_0\ =\tilde{\omega}\ \xi,\eta;\xi_0,\eta_0$ бўлиб, бу функциясининг кўриниши ва 5) — 8) ҳоссаларга асосан, (1.11) тенгликдан

$$\upsilon\ \xi_0,\eta_0\ =\upsilon\ \eta_0,\eta_0\ +\upsilon\ \xi_0,1\ -\upsilon\ \eta_0,1\ +\iint\limits_{\Delta_1\cup\Delta_2}\Phi\ \xi,\eta\ \tilde{\omega}d\xi d\eta$$

келиб чиқади. Бу ерда (1.9') чегаравий шартларни эътиборга олиб, (1.6) тенгликлар бўйича x_0,y_0 ўзгарувчиларга ва $u\ x_0,y_0$ функцияга қайтсак, II Дарбу масаласининг ечимини аниқловчи

$$u(x,y)=\tau(x-y)+\psi\left(\frac{1+x+y}{2}\right)-\psi\left(\frac{1+x-y}{2}\right)+\frac{1}{4}\int\limits_{x-y}^{1}d\eta\int\limits_{x+y}^{x-y}f\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)d\xi$$

(1.12)

формулага эга бўламиз.

Агар $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, $\psi(x)\in C\ 0,1/2\ \cap C^2\ 0,1/2$, $f(\xi,\eta)\in C(\bar{\Omega}_2)$ бўлса, (1.12) формула билан аниқланувчи $u(x_0,y_0)$ функция $C(\bar{\Omega}_2)\cap C^2(\Omega_2)$ синфга тегишли бўлади ва Ω_2 соҳада (1.1) тенгламани қаноатлантиради.

Агар $\upsilon(\xi,\eta)$ ва $\theta(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$- мос равишда $\{(1.1'),(10')\}$ масаланинг ечими ва Риман – Адамар функцияси бўлса, у холда $\theta(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\tilde{W}(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ бўлиб, бу функциясининг кўриниши ва 9) – 12) ҳоссаларига асосан, (1.11) тенгликдан

$$\upsilon(\xi_0,\eta_0)=\upsilon(\eta_0,1)+\upsilon(\xi_0,1)-\upsilon(1,1)+\int\limits_{\eta_0}^{1}\nu(t)dt+\iint\limits_{\Delta_3\cup\Delta_4}\Phi\ \xi,\eta\ \tilde{W}d\xi d\eta$$

келиб чиқади. Бу ерда (1.10') чегаравий шартларни эътиборга олиб, (1.6) тенгликлар билан (x_0,y_0) ўзгарувчиларга ва $u(x_0,y_0)$ функцияга қайтсак, II Коши – Гурса масаласи ечимини аниқловчи

$$u(x,y)=\psi\left(\frac{1+x+y}{2}\right)+\psi\left(\frac{1+x-y}{2}\right)-\psi(1)+\int\limits_{x-y}^{1}\nu(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_{x-y}^{1} d\eta \int\limits_{x+y}^{x-y} f\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{1} d\eta \int\limits_{x-y}^{\eta} f\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)d\xi \qquad (1.13)$$

формулага эга бўламиз.

Агар $\nu(x)\in C^1(0,1)\cap L\ 0,1$, $\psi(x)\in C^1[0,1/2]\cap C^2(0,1/2)$, $f\left(\xi,\eta\right)\in C\left(\bar{\Omega}\right)$ бўлса, (1.13) формула билан аниқланувчи $u(x_0,y_0)$ функция $C\ \bar{\Omega}\ \cap C^1(\Omega\cup OA)\cap C^2(\Omega)$ синфга тегишли бўлади ва (1.1) тенгламани қаноатлантиради.

1.2-§. Телеграф тенгламаси учун Риман функциясини қуриш

Ушбу

$$L_\lambda u\equiv u_{xx}-u_{yy}+\lambda u=0 \qquad (1.14)$$

кўринишдаги тенглама *Телеграф тенгламаси* деб аталади. (1.14) тенглама ўтказгичдан электр оқими кучи I, кучланиши V қаноатлантирувчи тенгламанинг каноник кўринишидир. Шунинг учун бу тенглама “Телеграф тенгламаси” номи билан юритилади[5].

Гиперболик типдаги тенгламаларни ўрганишда Риман функцияси муҳим аҳамиятга эга. Маълумки Риман функцияси

$$W_{\xi\eta}+a\left(\xi,\eta\right)W_\xi+b\left(\xi,\eta\right)W_\eta+c\left(\xi,\eta\right)W=0 \qquad (1.15)$$

тенглама учун қуйидагича таърифланади:

$$V_{\xi\eta}-\left(aV\right)_\xi-\left(bV\right)_\eta+\left(cV\right)=0 \qquad (1.16)$$

тенгламанинг

$$V\Big|_{\xi=\xi_0}=e^{\int\limits_{\eta_0}^{\eta}a(\xi_0,z)dz}, \qquad V\Big|_{\eta=\eta_0}=e^{\int\limits_{\xi_0}^{\xi}b(z,\eta_0)dz} \qquad (1.17)$$

шартларни қаноатлантирувчи $V\left(\xi,\eta\right)$ ечими (1.15) тенгламанинг Риман функцияси дейилади. Бу ерда $\left(\xi_0,\eta_0\right)$ текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлиб, Риман функцияси бу аргументларга ҳам боғлиқ бўлади. Шунинг учун уни одатда $V=R\left(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0\right)$ каби белгиланади.

Телеграф тенгламаси учун Риман функциясини топайлик. Бунинг учун $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ алмаштириш бажариб, (1.14) Телеграф тенгламасини

$$L'_\lambda W \equiv W_{\xi\eta} + \frac{1}{4}\lambda W = 0 \tag{1.14'}$$

кўринишга келтирамиз; бу ерда $W(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)$.

(1.14') ва (1.15) тенгламаларни таққослаб ва Риман функцияси таърифини этиборга олиб қуйидаги хулосага келамиз:

(1.14') тенглама учун Риман функцияси

$$V_{\xi\eta} + \frac{1}{4}\lambda V = 0 \tag{1.18}$$

тенгламанинг

$$V\big|_{\xi=\xi_0} = 1, \qquad V\big|_{\eta=\eta_0} = 1 \tag{1.19}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимидан иборат. Уни топиш мақсадида (1.18) тенгламада ξ ни t билан, η ни эса z билан алмаштирамиз ва уни t бўйича $[\xi_0, \xi]$, z бўйича эса $[\eta_0, \eta]$ оралиқда интеграллаймиз:

$$V(\xi,\eta) - V(\xi,\eta_0) - \int_{\eta_0}^{\eta} V_z(\xi_0, z)dz + \frac{1}{4}\lambda\int_{\xi_0}^{\xi} dt \int_{\eta}^{\eta} V(t,z)dz = 0$$

Бу ердан (1.19) ни ҳисобга олиб, $V(\xi,\eta)$ га нисбатан қуйидаги интеграл тенгламани ҳосил қиламиз:

$$V(\xi,\eta) + \frac{1}{4}\lambda\int_{\xi_0}^{\xi} dt \int_{\eta}^{\eta} V(t,z)dz = 1 \tag{1.20}$$

(1.20) Волтерра типидаги тенглама бўлгани учун ягона ечимга эга. Уни кетма-кет яқинлашиш усули билан ечамиз.

Нолинчи яқинлашиш сифатида $V_0 = 0$ ни олиб, кейинги яқинлашишларни

$$V_k = 1 - \frac{1}{4}\lambda\int_{\xi_0}^{\xi} dt \int_{\eta}^{\eta} V(t,z)dz, \; k = 1,2,....$$

формула бўйича топамиз:

$$V_0 = 0, \quad V_1 = 1,$$

$$V_2 = 1 - \frac{\lambda}{4}(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0),$$

$$V_3 = 1 - \frac{\lambda}{4}(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0) + \frac{1}{(2)!}\left[\frac{\lambda}{4}(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)\right]^2,$$

- -

Бу жараённи давом эттириб, $\forall n \in N$ учун

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left[\frac{\lambda}{4}(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)\right]$$

тенглик ўринли эканлигини топамиз.

Бу ердан $n \to \infty$ лимитга ўтиб ва

$$J_0[x] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left[\frac{x}{2}\right]^{2k}$$

тенгликни эътиборга олиб,

$$V = \lim_{n \to \infty} V_n = J_0\left[\sqrt{\lambda(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}\right]$$

ни топамиз.

Демак, (1.14) тенглама учун Риман функцияси

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = J_0\left[\sqrt{\lambda(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}\right]$$

кўринишда бўлар экан.

Бу функция ҳақиқатан ҳам (1.18) ва (1.19) шартларни қаноатлантиришига бевосита текшириб кўриш йўли билан ишонч ҳосил қилиш мумкин. $J_0\left[\sqrt{\lambda(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}\right]$ функция (ξ, η) ва (ξ_0, η_0) жуфтликларга нисбатан симметрик бўлгани учун у (ξ_0, η_0) бўйича ҳам (1.14') тенгламани қаноатлантиради. x, y ўзгарувчиларга қайтиб ва $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ белгилашларни эътиборга олиб (1.14) тенглама учун Риман функциясини топамиз:

$$R(x,y;x_0,y_0)=J_0\left[\sqrt{\lambda}\sqrt{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}\right].$$

1.3-§. Телеграф тенгламаси учун Дарбу ва Коши-Гурса масалаларини Риман усули билан ечиш

Ω_2 соҳа орқали (1.14) тенгламанинг $AC:\ \xi\equiv x+y=0$ ва $BC:\ \eta\equiv x-y=1$ ҳарактеристикалари ҳамда $AB=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ y=0\}$ кесма билан чегараланган соҳани белгилаган эдик.

Ω_2 соҳада бир жинсли бўлмаган ушбу

$$L_\lambda u\equiv u_{xx}-u_{yy}+\lambda u=f(x,y) \tag{1.21}$$

телеграф тенгламаси учун Дарбу ва Коши-Гурса масаласини қараймиз, бу ерда λ - ҳақиқий ёки соф мавҳум сон, $f(x,y)$ - берилган узлуксиз функция.

Дарбу масаласи (D_1 масала). *Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи* $u(x,y)$ *функция топилсин:*

$$\Omega_2 \text{ соҳада } u(x,y)\in C(\bar{\Omega}_2)\cap C^2(\Omega_2),\quad L_\lambda u\equiv f \tag{1.22}$$

$$u(x,-x)=\psi(x),\quad 0\le x\le(1/2) \tag{1.23}$$

$$u(x,0)=\tau(x),\quad 0\le x\le 1 \tag{1.24}$$

бу ерда $\tau(x)$, $\psi(x)$-берилган етарлича узлуксиз функциялар бўлиб, $\tau(0)=\psi(0)$ келишув шарти бажарилади.

Коши-Гурса масаласи (D_2 масала). *Шундай* $u(x,y)$ *функция топилсинки, (1.22), (1.23) шартларни ва*

$$\lim_{y\to\infty}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=u_y(x,0)=\nu(x),\quad 0<x<1 \tag{1.25}$$

шартни қаноатлантирсин, бу ерда $\tau(x)$, $\psi(x)$-берилган етарлича узлуксиз функциялар.

xOy текислигида $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ ҳарактеристик координаталарга ўтамиз. У ҳолда (1.21) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$L_0 V \equiv V_{\xi\eta} + \frac{\lambda}{4} V = g\,, \tag{1.26}$$

бу ерда $V(\xi,\eta) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)$, $g(\xi,\eta) = \frac{1}{4} f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)$,

Ω_2 соҳа ушбу $\Delta = \{(\xi,\eta): 0 < \xi < \eta < 1\}$ соҳага аксланади. Бундан D_1 ва D_2 масалалар эса мос равишда қуйидаги масалаларга аксланади:

D_1' **масала.** *Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи* $V(\xi,\eta)$ *функция топилсин:*

$$V(\xi,\eta) \in C(\Delta) \cap C^1(\Delta),\ V_{\xi\eta} \in C(\Delta), \quad L_0 V = g\,, \tag{1.27}$$

$$V(0,\eta) = \psi\left(\frac{\eta}{2}\right) = \psi_1(\eta), \quad 0 \le \eta \le 1, \tag{1.28}$$

$$V(\xi,\xi) = \tau(\xi),\ 0 \le \xi \le 1. \tag{1.29}$$

D_2' **масала.** ***(1.27), (1.28)*** *шартларни ва қуйидаги шартни қаноатлантирувчи* $V(\xi,\eta)$ *функция топилсин*:

$$\lim_{\eta \to \xi} \left(V_\xi - V_\eta\right) = \lim_{y \to 0} u_y(x,y) = \nu(\xi),\ 0 < \xi < 1. \tag{1.30}$$

D_1' ва D_2' масалаларни ечиш учун Риман-Адамар усулини қўллаймиз. D_1' масаланинг Риман-Адамар функцияси қуйидаги кўринишда:

$$A(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = \begin{cases} A_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), & \eta > \xi_0, \\ A_2(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) - R(\eta,\xi;\xi_0,\eta_0), & \eta < \xi_0, \end{cases}$$

бу ерда $(\xi_0,\eta_0) \in \Delta$, $R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$- $L_0 V = 0$ тенгламанинг Риман функцияси ва у

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = J_0\left[\sqrt{\lambda(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}\right] \tag{1.31}$$

кўринишда аниқланади, бунда $J_0(x)$- Бессель функцияси.

$A(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ функция қуйидаги хоссаларга эга:

1. $A(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ функция (ξ,η) аргументлари бўйича қўшма $L^*V \equiv L_0V = 0$ тенгламани, (ξ_0,η_0) бўйича эса $L_0V = 0$ тенгламани қаноатлантиради;

2. a) $\eta = \eta_0$ *бўлганда* $A_{1\xi}(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = 0$,

   б) $\xi = \xi_0$ *бўлганда* $A_{1\eta}(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = 0$,

   c) $\xi = \xi_0$ *ва* $\eta = \eta_0$ *бўлганда* $A_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = 0$;

3. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0}\left[A_{1\xi}(\xi,\xi_0+\varepsilon;\xi_0,\eta_0) - A_{2\xi}(\xi,\xi_0-\varepsilon;\xi_0,\eta_0)\right] = 0,\ \xi \in [0,\xi_0]$;

4. $\eta = \xi$ *бўлганда* $A_2(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = 0$.

D_2' масаланинг Риман-Адамар функцияси

$$B(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = \begin{cases} B_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), & \eta > \xi_0, \\ B_2(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) + R(\eta,\xi;\xi_0,\eta_0), & \eta < \xi_0 \end{cases}$$

кўринишда бўлиб, у $A(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ функциянинг 1)-3) шартларини ва

5. $\eta = \xi$ *бўлганда* $B_{2\eta}(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) - B_{2\xi}(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = 0$.

Δ соҳада ушбу

$$2\left[\theta L_0(V) - VL^*(\theta)\right] = \left(\theta V_\eta - V\theta_\eta\right)_\xi + \left(\theta V_\xi - V\theta_\eta\right)_\eta = 2\theta g. \qquad (1.32)$$

айният ўринли, θ - Риман-Адамар функцияси.

Δ соҳадан ихтиёрий $M_0\ \xi_0,\eta_0$ нуқта олайлик ва қуйидаги қисм соҳаларни қарайлик:

$$\Delta_1 = \left\{(\xi,\eta):\ \delta < \xi < \xi_0 - 2\varepsilon,\ \xi_0 + \varepsilon < \eta < \eta_0\right\},$$

$$\Delta_2 = \left\{(\xi,\eta):\ \delta < \xi < \xi_0 - 2\varepsilon,\ \xi + \varepsilon < \eta < \xi_0 - \varepsilon\right\}.$$

Бу ерда $\delta, \varepsilon -$ етарли кичик мусбат сон. (1.32) тенгликни Δ_1 ва Δ_2 соҳалар бўйича интеграллаб, сўнгра Грин формуласини қўлласак,

$$\int\limits_{\partial\ \Delta_1\cup\Delta_2} V\theta_\xi - \theta V_\xi \ \ d\xi + \ \theta V_\eta - V\theta_\eta \ \ d\eta = \iint\limits_{\Delta_1\cup\Delta_2} 2V \ \ \xi,\eta \ \ \theta d\xi d\eta \qquad (1.33)$$

тенгликка эга бўламиз. (1.33) тенгликнинг чап қисми эгри чизиқли интеграл бўлиб у еттита $i_k,\ k=\overline{1,7}$ аниқ интеграллар йиғиндисидан иборат бўлади. Бу интегралларни $\theta = A(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ деб ҳисоблаймиз:

$$i_1 = \int\limits_{\varepsilon}^{\xi_0-\varepsilon} \left(VA_{2\eta} - A_2V_\eta\right)\Big|_{\xi=\delta} d\eta = V(\delta,\varepsilon)A_2(\delta,\varepsilon;\xi_0,\eta_0) -$$

$$-V(\delta,\xi_0-\varepsilon)A_2(\delta,\xi_0-\varepsilon;\xi_0,\eta_0) + 2\int\limits_{\varepsilon}^{\xi_0-\varepsilon} V(\delta,\eta)A_{2\eta}(\delta,\eta;\xi_0,\eta_0)d\eta,$$

$$i_2 = \int\limits_{\delta}^{\xi_0-2\varepsilon} \left[V\left(A_{2\xi} - A_{2\eta}\right) - A_2\left(V_\xi - V_\eta\right)\right]\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon} d\xi,$$

$$i_3 = -\int\limits_{\delta}^{\xi_0-2\varepsilon} \left(VA_{2\xi} - A_2V_\xi\right)\Big|_{\eta=\xi_0-\varepsilon} d\xi = -V(\delta,\xi_0-\varepsilon)A_2(\delta,\xi_0-\varepsilon;\xi_0,\eta_0) +$$

$$+V(\xi_0-2\varepsilon,\xi_0-\varepsilon)A_2(\xi_0-2\varepsilon,\xi_0-\varepsilon;\xi_0,\eta_0) -$$

$$-2\int\limits_{0}^{\xi_0-2\varepsilon} V(\xi,\xi_0-\varepsilon)A_{2\xi}(\xi,\xi_0-\varepsilon;\xi_0,\eta_0)d\xi,$$

$$i_4 = \int\limits_{\delta}^{\xi_0-2\varepsilon} \left(VA_{1\xi} - A_1V_\xi\right)\Big|_{\eta=\xi_0+\varepsilon} d\xi = V(\delta,\xi_0+\varepsilon)A_1(\delta,\xi_0+\varepsilon;\xi_0,\eta_0) -$$

$$-V(\xi_0-2\varepsilon,\xi_0+\varepsilon)A_1(\xi_0-2\varepsilon,\xi_0+\varepsilon;\xi_0,\eta_0) +$$

$$+2\int\limits_{\delta}^{\xi_0-2\varepsilon} V(\xi,\xi_0+\varepsilon)A_1(\xi,\xi_0+\varepsilon;\xi_0,\eta_0)d\xi,$$

$$i_5 = \int\limits_{\xi_0+\varepsilon}^{\eta_0} \left(A_1V_\eta - VA_{1\eta}\right)\Big|_{\xi=\xi_0-2\varepsilon} d\eta = V(\xi_0-2\varepsilon,\eta_0)A_1(\xi_0-2\varepsilon,\eta_0;\xi_0,\eta) -$$

$$-V(\xi_0-2\varepsilon,\xi_0+\varepsilon)A_1(\xi_0-2\varepsilon,\xi_0+\varepsilon;\xi_0,\eta_0) - 2\int\limits_{\xi_0+\varepsilon}^{\eta_0} VA_1\Big|_{\xi=\xi_0-2\varepsilon} d\eta,$$

$$i_6=\int\limits_{\delta}^{\xi_0-2\varepsilon}\left(A_1V_\xi-VA_{1\xi}\right)\Big|_{\eta=\eta_0}d\xi=V\left(\xi_0-2\varepsilon,\eta_0\right)A_1\left(\xi_0-2\varepsilon,\eta_0;\xi_0,\eta_0\right)-$$

$$-V\left(\delta,\eta_0\right)A_1\left(\delta,\eta_0;\xi_0,\eta_0\right)-2\int\limits_{0}^{\xi_0-2\varepsilon}V\left(\xi,\eta_0\right)A_{1\xi}\left(\xi,\eta_0;\xi_0,\eta_0\right)d\xi\,,$$

$$i_7=\int\limits_{\xi_0+\varepsilon}^{\eta_0}\left(VA_{1\eta}-A_1V_\eta\right)\Big|_{\xi=\delta}d\eta=V\left(\delta,\xi_0+\varepsilon\right)A_1\left(\delta,\xi_0+\varepsilon;\xi_0,\eta_0\right)-$$

$$-V\left(\delta,\eta_0\right)A_1\left(\delta,\eta_0;\xi_0,\eta_0\right)+2\int\limits_{\xi_0+\varepsilon}^{\eta_0}V\left(\delta,\eta\right)A_{1\eta}\left(\delta,\eta;\xi_0,\eta_0\right)d\eta\,.$$

Бу $i_k,\ k=\overline{1,7}$ интегралларни ҳисоблаб, (1.33) тенгликка қўйиб, $V\left(\xi,\eta\right)$ функцияга нисбатан

$$\lim_{\eta\to\xi}\left[V_\xi\left(\xi,\eta\right)-V_\eta\left(\xi,\eta\right)\right]$$

лимитни ҳисобга олиб, $\varepsilon\to 0,\ \delta\to 0$ да лимитни ҳисоблаймиз. Бунда $A\left(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0\right)$ Риман Адамар функциясининг 2)-4) хоссаларини ва (1.28), (1.29) шартларни эътиборга олсак D_1 масала ечимини ифодаловчи қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$V\left(\xi_0,\eta_0\right)=\tau\left(\xi_0\right)+\psi_1\left(\eta_0\right)-\psi_1\left(\xi_0\right)+$$

$$+\frac{\lambda\left(\xi_0-\eta_0\right)}{2}\int\limits_0^{\xi_0}\tau\left(\xi\right)\bar{J}_1\left[\sqrt{\lambda\left(\xi-\xi_0\right)\left(\eta-\eta_0\right)}\right]d\xi-$$

$$-\frac{\lambda\xi_0}{2}\int\limits_0^{\eta_0}\psi_1\left(\eta\right)\bar{J}_1\left[\sqrt{\lambda\left(\eta_0-\eta\right)\xi_0}\right]d\eta+\frac{\lambda\eta_0}{2}\int\limits_0^{\xi_0}\psi_1\left(\eta\right)\bar{J}_1\left[\sqrt{\lambda\left(\xi_0-\eta\right)\eta_0}\right]d\eta+$$

$$+\int\limits_0^{\xi_0}d\xi\int\limits_{\xi}^{\eta_0}J_0\left[\sqrt{\lambda\left(\xi-\xi_0\right)\left(\eta-\eta_0\right)}\right]gd\eta-\int\limits_0^{\xi_0}d\xi\int\limits_{\xi}^{\xi_0}J_0\left[\sqrt{\lambda\left(\eta-\xi_0\right)\left(\xi-\eta_0\right)}\right]gd\eta\,.\quad(1.34)$$

Ҳудди шу каби (1.33) тенгликдаги $i_k,\ k=\overline{1,7}$ интегралларни $\theta=B\left(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0\right)$ деб ҳисоблаб, D_2 масаланинг шартларидан ва Риман-Адамар функциясининг хоссаларидан фойдаланиб, D_2 масала ечимини топамиз:

$$V(\xi_0,\eta_0)=\int_0^{\xi_0}\nu(\xi)J_0\left[\sqrt{\lambda(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}\right]d\xi+\psi_1(\xi_0)+$$

$$+\psi_1(\eta_0)-\psi_1(0)J_0\left[\sqrt{\lambda\xi_0\eta_0}\right]-\int_0^{\eta_0}\psi_1(\eta)B_\eta(0,\eta;\xi_0,\eta_0)d\eta+$$

$$+\int_0^{\xi_0}d\xi\int_\xi^{\eta_0}B(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)g(\xi,\eta)d\eta$$

ёки

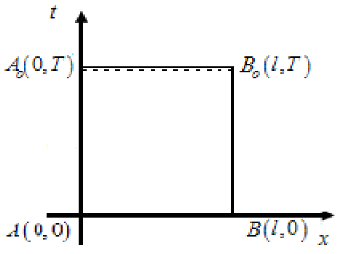
$$V(\xi_0,\eta_0)=\int_0^{\xi_0}\nu(\xi)J_0\left[\sqrt{\lambda(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}\right]d\xi+$$

$$+\int_0^{\eta_0}\psi_1'(\eta)B(0,\eta;\xi_0,\eta_0)d\eta+\int_0^{\xi_0}d\xi\int_\xi^{\eta_0}B(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)g(\xi,\eta)d\eta\,. \tag{1.35}$$

$\xi_0=x+y$, $\eta_0=x-y$ белгилашлардан фойдаланиб (1.34) ва (1.35) ечимларни x, y ўзгарувчиларга боғлиқ кўринишда ҳам ёзиш мумкин.

1.4-§. Биринчи чегаравий масаланинг ечими

Параболик типдаги модел тенглама учун тўртбурчакда биринчи чегаравий масала



2-чизма.

Ω_1 орқали $\{(x,t):0<x<l,0<t\le T\}$ тўртбурчакни белгилайлик, бу ерда $l=const>0$, $T=const>0$ (2-чизма). Ω_1 соҳада

$$u_{xx}-u_t=-f(x,t) \tag{1.36}$$

тенглама учун **биринчи чегаравий масала** қуйидагича баён қилинади: (1.36) *тенгламанинг* $\overline{\Omega}_1$ *да аниқланган, узлуксиз ва*

$$u(x,0)=\tau(x),\quad 0\le x\le l\,; \tag{1.37}$$

$$u(0,t)=\varphi_0(t),\quad 0\le t\le T\,; \tag{1.38}$$

$$u(l,t)=\varphi_1(t), \quad 0\le t\le T \tag{1.39}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечими топилсин, бу ерда $\tau(x),\varphi_0(t),\varphi_1(t), f\left(x,t\right)$ - берилган узлуксиз функциялар бўлиб $\tau(0)=\varphi_0(0)$, $\tau(l)=\varphi_1(0)$ - келишув шартларини қаноатлантиради.

Масала ечимининг ягоналиги. Қуйидаги теорема ўринли:

1.1-теорема. *Агар биринчи чегаравий масаланинг ечими мавжуд бўлса, у ягонадир.*

Исбот. Фараз қилайлик масала $u_1(x,t)$ ва $u_2(x,t)$ ечимларга эга бўлсин. У ҳолда $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ функция $\overline{\Omega}_1$ да аниқланган ва узлуклсиз бўлиб,

$$u_{xx}-u_t=0 \tag{1.40}$$

бир жинсли тенгламани ва

$$u\left(x,0\right)=0,\ \ 0\le x\le l;\ u(0,t)=0,\ \ 0\le t\le T;\ \ \ u(l,t)=0,\ \ 0\le t\le T \tag{1.41}$$

чегаравий шартларни қаноатлантиради. Фараз қилайлик, $u(x,t)\not\equiv 0$, $(x,t)\in\overline{\Omega}_1$ бўлсин. У ҳолда $\sup\limits_{\overline{\Omega}_1}\left|u(x,t)\right|=\left|u(x_0,t_0)\right|>0$, $(x_0,t_0)\in\overline{\Omega}_1$ бўлади. [8] даги 1.3-теоремага асосан $(x_0,t_0)\in AB\cup\overline{AA_0}\cup\overline{BB_0}$. Бу эса (1.41) тенгликларга зиддир. Ҳосил бўлган қарама қаршилик фаразимиз нотўғри эканлигини кўрсатади. Демак, $\forall\,(x,t)\in\overline{\Omega}_1$, учун $u(x,t)\equiv 0$, яъни $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$ тенглик ўринли. 1.1-теорема исботланди.

Масала ечимининг мавжудлиги. Буни Грин функциялар усули билан ҳал қиламиз.

Агар икки жуфт аргументли $G_1\left(x,t;\xi,\eta\right)$ функция

$$G_1\left(x,t;\xi,\eta\right)=E\left(x,t;\xi,\eta\right)-g_1\left(x,t;\xi,\eta\right)$$

кўринишга эга бўлиб, бу ердаги $g\left(x,t;\xi,\eta\right)$ функция қуйидаги шартларни қаноатлантирса, $G_1\left(x,t;\xi,\eta\right)$ ни (1.40) тенглама учун биринчи чегаравий масаланинг Грин функцияси деб аталади.

1. $g_1(x,t;\xi,\eta)\in C\left(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1\right)$, $g_x(x,t;\xi,\eta)$ *ҳосила эса* $\left\{(x,t):0\le x\le l, 0<t\le\eta<T\right\}$ *соҳада мавжуд ва узлуксиз бўлиб,* $\overline{AA_0}$, $\overline{BB_0}$ *да интегралланувчи;*

2. x,y *ўзгарувчилар бўйича (1.40) тенгламани,* ξ,η *ўзгарувчилар бўйича эса унга қўшма бўлган* $v_{\xi\xi}+v_\eta=0$ *тенгламани қаноатлантиради;*

3. $g_1(x,t;0,\eta)=E(x,t;0,\eta)$*;* $g_1(x,t;l,\eta)=E(x,t;l,\eta)$, $\lim\limits_{\eta\to t} g_1(x,t;\xi,\eta)=0$ *чегаравий шартларни қаноатлантиради.*

Ўрганилаётган масалага мос Грин функцияси А.Зоммерфельд томонидан 1950-йилда қурилган бўлиб [3], у қуйидаги кўринишга эга:

$$G_1(x,t;\xi,\eta)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi-2nl)^2}{4(t-\eta)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi-2nl)^2}{4(t-\eta)}\right]\right\},\quad t>\eta.$$

$G_1(x,t;\xi,\eta)$-Грин функциясини

$$G_1(x,t;\xi,\eta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[E(x,t;\xi+2nl,\eta)-E(x,t;-\xi+2nl,\eta)\right]=$$

$$=E(x,t;\xi,\eta)+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'E(x,t;\xi+2nl,\eta)-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E(x,t;-\xi+2nl,\eta)\qquad(1.42)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин, бу ерда $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}{}'$ белги, йиғиндини n нинг нолдан бошқа барча бутун қийматлари бўйича олинишини билдиради. Бунда

$$E(x,t;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\eta)}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}\right],\quad t>\eta.\qquad(1.42^*)$$

Демак, бу ерда

$$g_1(x,t;\xi,\eta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E(x,t;-\xi+2nl,\eta)-\sum_{n=1}^{+\infty}\left[E(x,t;\xi+2nl,\eta)+E(x,t;\xi-2nl,\eta)\right].$$

Бу Грин функцияси қуйидаги хоссаларга эга.

1°. $(x,t)\neq(\xi,\eta)$ *бўлганда* x,t *ўзгарувчилар бўйича (1.40) тенгламани қаноатлантиради, яъни*

$$G_{1xx}-G_{1t}=0,\ (x,t)\neq(\xi,\eta).$$

Исбот. $(x,t)\neq(\xi,\eta)$ бўлганда бевосита ҳисоблаш қуйидагини беради:

$$G_{1t}=-\frac{1}{2(t-\eta)}G_1+\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\eta)}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\left[\frac{x-\xi-2nl}{2(t-\eta)}\right]^2\exp\left[\frac{(x-\xi-2nl)^2}{4(t-\eta)}\right]-\left[\frac{x+\xi-2nl}{2(t-\eta)}\right]^2\exp\left[-\frac{(x+\xi-2nl)^2}{4(t-\eta)}\right]\right\},$$

$$G_x=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\eta)}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{-\frac{x-\xi-2nl}{2(t-\eta)}\exp\left[-\frac{(x-\xi-2nl)^2}{4(t-\eta)}\right]+\frac{x+\xi-2nl}{2(t-\eta)}\exp\left[-\frac{(x+\xi-2nl)^2}{4(t-\eta)}\right]\right\},$$

$$G_{1xx}=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\eta)}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{-\frac{1}{2(t-\eta)}\exp\left[-\frac{(x-\xi-2nl)^2}{4(t-\eta)}\right]+\frac{1}{2(t-\eta)}\exp\left[-\frac{(x+\xi-2nl)^2}{4(t-\eta)}\right]+\right.$$

$$\left.+\left[-\frac{x-\xi-2nl}{2(t-\eta)}\right]^2\exp\left[-\frac{(x-\xi-2nl)^2}{4(t-\eta)}\right]-\left[\frac{x-\xi-2nl}{2(t-\eta)}\right]^2\exp\left[-\frac{(x+\xi-2nl)^2}{4(t-\eta)}\right]\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2(t-\eta)}G_1+\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\eta)}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\left[\frac{x-\xi-2nl}{2(t-\eta)}\right]^2\exp\left[-\frac{(x-\xi-2nl)^2}{4(t-\eta)}\right]-\left[\frac{x+\xi-2nl}{2(t-\eta)}\right]^2\exp\left[-\frac{(x+\xi-2nl)^2}{4(t-\eta)}\right]\right\}.$$

Булардан дарҳол $G_{1xx}-G_{1t}=0$ тенглик келиб чиқади.

2°. $(\xi,\eta)\neq(x,t)$ *бўлганда* ξ,η *ўзгарувчилар бўйича (1.40) тенгламага қўшма тенгламани қаноатлантиради, яъни*

$$G_{1\xi\xi}+G_{1\eta}=0,\ (\xi,\eta)\neq(x,t). \qquad (1.36')$$

Бу хосса 1° хосса каби исботланади.

3°. $G_1(x,t;0,\eta)=0$, $G_1(x,t;l,\eta)=0$;

Бу тенгликларнинг биринчиси $G(x,t;\xi,\eta)$ функциянинг формуласидан бирданига келиб чиқади, иккинчиси эса

$$G_1(x,t;l,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\eta)}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-(2n+1)l)^2}{4(t-\eta)}\right]-\exp\left[-\frac{(x-(2n-1)l)^2}{4(t-\eta)}\right]\right\}=0$$

тенгликка асосан ўринлидир.

4°. *$\xi\neq x\in(0,l)$ бўлса, $\lim\limits_{\eta\to t}G_1(x,t;\xi,\eta)=0$ тенглик ўринли бўлади.*

Исбот. $\xi\neq x\in(0,l)$, $t-\eta=\varepsilon\to 0$ деб фараз қилайлик. У ҳолда

$$\lim_{\eta\to t}G_1(x,t;\xi,\eta)=\lim_{\varepsilon\to 0}G_1(x,t;\xi,t-\varepsilon)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi-2nl)^2}{4\varepsilon}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi-2nl)^2}{4\varepsilon}\right]\right\}.$$

Қуйдаги белгилашларни киритайлик:

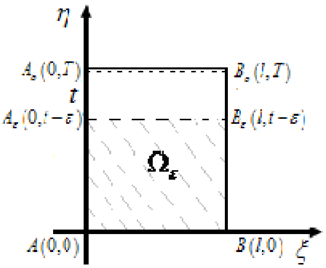
$$\left(\frac{x-\xi-2nl}{2}\right)^2=h_1>0,\left(\frac{x+\xi-2nl}{2}\right)^2=h_2>0.$$

У ҳолда Лопитал теоремасига асосан

$$\lim_{\eta\to t}G_1(x,t;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1/\sqrt{\varepsilon}}{e^{h_1/\varepsilon}}-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1/\sqrt{\varepsilon}}{e^{h_2/\varepsilon}}-\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(-1/2)\varepsilon^{-3/2}}{e^{h_1/\varepsilon}\left(-h_1/\varepsilon^2\right)}-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(-1/2)\varepsilon^{-3/2}}{e^{h_2/\varepsilon}\left(-h_2/\varepsilon^2\right)}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{2h_1}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{e^{h_1/\varepsilon}}\right]-\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{2h_2}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{e^{h_2/\varepsilon}}\right]\right\}=0.$$



3-чизма.

Энди $G_1(x,t;\xi,\eta)$ функция ёрдамида **б**иринчи чегаравий масала ечимини топишга ўтамиз. Фараз қилайлик $u(x,t)$ функция масаланинг ечими бўлсин. (1.36) тенгламада x, t ўзгарувчиларни ξ, η га алмаштириб, сўнгра $G_1(x,t;\xi,\eta)$ функцияга, $(1.36')$ тенгламани эса $u(\xi,\eta)$ функцияга кўпайтириб, ҳосил бўлган тенгламаларни ҳадлаб айирамиз:

$$G_1\left(u_{\xi\xi}-u_\eta\right)-u\left(G_{1\xi\xi}+G_{1\eta}\right)\equiv -f(\xi,\eta)G_1(x,t;\xi,\eta), \qquad (x,t)\neq(\xi,\eta).$$

Бу айниятни

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(G_1u_\xi-uG_{1\xi}\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(G_1u\right)=-f(\xi,\eta)G_1(x,t;\xi,\eta), \quad (x,t)\neq(\xi,\eta)$$

кўринишда ёзиб ва $(x,t)\in\Omega\cup A_0B_0$ деб фараз қилиб $\Omega_\varepsilon=\{(\xi,\eta);\, 0\le\xi\le l;\, 0\le\eta\le t-\varepsilon\}$ соҳа (3-чизма) бўйича интеграллаймиз, бу ерда ε - етарли кичик мусбат сон:

$$\iint\limits_{\Omega_\varepsilon}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(G_1u_\xi-uG_{1\xi}\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(G_1u\right)\right\}d\xi d\eta=-\iint\limits_{\Omega_\varepsilon}f(\xi,\eta)G_1(x,t;\xi,\eta)d\xi d\eta$$

Чап томондаги интегралга Грин формуласини қўлласак,

$$\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon}G_1ud\xi+\left(G_1u_\xi-uG_{1\xi}\right)d\eta=\iint\limits_{\Omega_\varepsilon}f(\xi,\eta)G_1(x,t;\xi,\eta)d\xi d\eta \tag{1.43}$$

тengликка эга бўламиз, бу ерда $\partial\Omega_\varepsilon=AB\cup BB_\varepsilon\cup B_\varepsilon A_\varepsilon\cup A_\varepsilon A.$

$\partial\Omega_\varepsilon$ нинг ҳар бир бўлаги бўйича (1.43) интегрални ҳисоблаймиз.

1) AB да $\eta=0, \quad d\eta=0; \quad u(x,t)=\tau(x), \quad 0\le\xi\le l$ бўлгани учун

$$\int\limits_{AB}G_1ud\xi-\left(G_1u_\xi-uG_{1\xi}\right)d\eta=\int\limits_0^l G_1(x,t;\xi,0)u(\xi,0)d\xi=\int\limits_0^l\tau(\xi)G_1(x,t;\xi,0)d\xi.$$

2) $A_\varepsilon A$ да $\xi=0, \quad d\xi=0;\ u=\varphi_0(t),\ G_1\equiv0, \ \ 0\le\eta\le t-\varepsilon$ бўлгани учун

$$\int\limits_{A_\varepsilon A} G_1 u d\xi + \left(G_1 u_\xi - uG_{1\xi}\right) d\eta = -\int\limits_{A_\varepsilon A} uG_{1\xi} d\eta = \int\limits_0^{t-\varepsilon} u(0,\eta) G_{1\xi}(x,t;0,\eta) d\eta =$$

$$= \int\limits_0^{t-\varepsilon} \varphi_0(\eta) G_{1\xi}(x,t;0,\eta) d\eta.$$

3) BB_ε да $\xi = l, \quad d\xi = 0;\ u = \varphi_1(t),\ G_1 \equiv 0,\ \ 0 \le \eta \le t-\varepsilon$ бўлгани учун

$$\int\limits_{BB_\varepsilon} G_1 u d\xi + \left(G_1 u_\xi - uG_{1\xi}\right) d\eta = \int\limits_{BB_\varepsilon} uG_{1\xi} d\eta = -\int\limits_0^{t-\varepsilon} u(l,\eta) G_{1\xi}(x,t;l,\eta) d\eta =$$

$$= -\int\limits_0^{t-\varepsilon} \varphi_1(\eta) G_{1\xi}(x,t;l,\eta) d\eta.$$

4) $B_\varepsilon A_\varepsilon$ да $\eta = t-\varepsilon, \quad d\eta = 0, \quad 0 \le \xi \le l$ бўлгани учун

$$\int\limits_{B_\varepsilon A_\varepsilon} G_1 u d\xi + \left(G_1 u_\xi - uG_{1\xi}\right) d\eta = \int\limits_{B_\varepsilon A_\varepsilon} G_1 u d\xi = \int\limits_l^0 u(\xi,t-\varepsilon) G_{1\xi}(x,t;\xi,t-\varepsilon) d\xi =$$

$$= -\int\limits_0^l u(\xi,t-\varepsilon) G_1(x,t;\xi,t-\varepsilon) d\xi.$$

1), 2), 3) ва 4) бандларда топилганларни (1.43) тенгликка қўямиз:

$$\int\limits_0^l \tau(\xi) G_1(x,t;\xi,0) d\xi + \int\limits_0^{t-\varepsilon} \varphi_0(\eta) G_{1\xi}(x,t;0,\eta) d\eta -$$

$$-\int\limits_0^{t-\varepsilon} \varphi_1(\eta) G_{1\xi}(x,t;l,\eta) d\eta - \int\limits_0^l u(\xi,t-\varepsilon) G_1(x,t;\xi,t-\varepsilon) d\xi =$$

$$= -\iint\limits_{\Omega_3} f(\xi,\eta) G_1(x,t;\xi,\eta) d\xi d\eta. \qquad (1.43')$$

Қуйидаги лимитни ҳисоблайлик:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^l u(\xi,t-\varepsilon) G_1(x,t;\xi,t-\varepsilon) d\xi =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^l u(\xi,t-\varepsilon) \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\left(\frac{x-\xi-2nl}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\right] - \exp\left[-\left(\frac{x+\xi-2nl}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\right] \right\} d\xi =$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^l u(\xi,t-\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\left\{\exp\left[-\left(\frac{x-\xi}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\right]-\exp\left[-\left(\frac{x+\xi}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}^{/}\left[\exp\left[-\left(\frac{x-\xi-2nl}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\right]-\exp\left[-\left(\frac{x+\xi-2nl}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\right]\right]\right\}d\xi=I_1-I_2,$$

бу ерда $\sum{}^{/}$ белги –йиғинди $n\neq 0$ қийматлар бўйича олинишини билдиради.

$$I_1=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^l u(\xi,t-\varepsilon)\varepsilon^{-1/2}\exp\left[-\left(\frac{x-\xi}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\right]d\xi,$$

$$I_2=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^l u(\xi,t-\varepsilon)\ \varepsilon^{-1/2}\left\{\exp\left[-\left(\frac{x+\xi}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\right]-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}^{/}\left[\exp\left[-\left(\frac{x-\xi-2nl}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\right]-\exp\left[-\left(\frac{x+\xi-2nl}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\right]\right]\right\}d\xi.$$

4°- хоссани исботлашдаги усул билан кўрсатиш мумкинки, $I_2=0$.

I_1 ифодани қарайлик. Интеграл ўзгарувчисини $\alpha=(x-\xi)/2\sqrt{\varepsilon}$, яъни $\xi=x-2\alpha\sqrt{\varepsilon}$ тенглик орқали алмаштирамиз. Унда $x\in(0,l)$ эканлигини эътиборга олсак,

$$I_1=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x/2\sqrt{\varepsilon}}^{(x-l)/2\sqrt{\varepsilon}}u\left(x-2\alpha\sqrt{\varepsilon},t-\varepsilon\right)\varepsilon^{-1/2}e^{-\alpha^2}\left(-2\sqrt{\varepsilon}\right)d\alpha=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{(x-l)/2\sqrt{\varepsilon}}^{x/2\sqrt{\varepsilon}}u\left(x-2\alpha\sqrt{\varepsilon},t-\varepsilon\right)e^{-\alpha^2}d\alpha=\frac{1}{\sqrt{\pi}}u(x,t)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha=u(x,t)$$

тенгликка эга бўламиз.

Юқоридагилардан келиб чиқадики,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^l u(\xi,t-\varepsilon)G_1(x,t;\,\xi,t-\varepsilon\,)d\xi=u(x,t). \tag{1.44}$$

Энди (1.43) тенгликда $\varepsilon\to 0$ да лимитга ўтиб, (1.44) тенгликни эътиборга олсак, 1-чегаравий масаланинг ечими учун

$$u(x,t)=\int_0^l \tau(\xi)G_1(x,t;\xi,0)d\xi+\int_0^t \varphi_0(\eta)G_{1\xi}(x,t;0,\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^t \varphi_1(\eta)G_{1\xi}(x,t;l,\eta)d\eta+\int_0^t d\eta\int_0^l f(\xi,\eta)G_1(x,t;\xi,\eta)d\xi, \qquad (x,t)\in\Omega\cup A_0B_0 \tag{1.45}$$

формулага эга бўламиз.

1.2-теорема. *Агар* $\tau(x)\in C[0,l]$, $\varphi_0(t),\varphi_1(t)\in C[0,T]$, $\tau(0)=\tau(l)=\varphi_0(0)=\varphi_1(l)=0$, $g(x,t)\in C(\bar{\Omega})$ *бўлса, (1.45) формула билан аниқданган* $u(x,t)$ *функция биринчи чегаравий масаланинг ечими бўлади.*

Исбот. (1.45) тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчини алоҳида ўрганамиз. Дастлаб ушбу функцияни қарайлик:

$$u_1(x,t)=\int_0^l \tau(\xi)G_1(x,t;\xi,0)d\xi.$$

Грин функциясининг 1° хоссасига асосан

$$u_{1xx}-u_{1t}=\int_0^l \tau(\xi)\left(G_{1xx}-G_{1t}\right)d\xi=0, \ \forall(x,t)\in\Omega\cup A_0B_0,$$

яъни $u_1(x,t)$ - (1.40) бир жинсли тенгламани қаноатлантиради.

Грин функциясининг тузилишига асосан

$$\lim_{t\to+0}u_1(x,t)=\lim_{t\to+0}\int_0^l \tau(\xi)E(x,t;\xi,0)d\xi+$$

$$+\lim_{t\to+0}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E(x,t;-\xi+2nl,0)-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E(x,t;\xi+2nl,0)\right\}.$$

Бу ердан $E(x,t;\xi,\eta)$ функциянинг 3-4 хоссаларини эътиборга олиб,

$$\lim_{t\to+0}u_1(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\tau(0), \ \textit{агар } x=0 \ \textit{бўлса};\\ \tau(x), \ \textit{агар } x\in(0,l) \ \textit{бўлса};\\ \frac{1}{2}\tau(l), \ \textit{агар } x=l \ \textit{бўлса},\end{cases}$$

тенгликларга эга бўламиз.

Бундан келиб чиқадики, агар $\tau(0)=\tau(l)=0$ бўлса, $\lim\limits_{t\to+0} u_1(x,t)=\tau(x)$, $x\in[0,l]$ тенглик ўринли бўлади.

Агар $t>0$ деб, $E(x,t;\xi,\eta)$ ва $G_1(x,t;\xi,\eta)$ функцияларнинг тузилишини эътиборга олсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{x\to+0} u_1(x,t)=\lim_{x\to+0}\int\limits_0^l \tau(\xi)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[E(x,t;\xi+2nl,0)-E(x,t;-\xi+2nl,0)\right]d\xi=$$

$$=\int\limits_0^l \tau(\xi)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[E(0,t;\xi+2nl,0)-E(0,t;-\xi+2nl,0)\right]d\xi=0.$$

Худди шу каби кўрсатиш мумкинки, $\lim\limits_{x\to l-0} u_1(x,t)=0, \quad t>0$.

Энди қуйидаги функцияни ўрганайлик:

$$u_2(x,t)=\int\limits_0^t \varphi_0(\eta)G_{1\xi}(x,t;0,\eta)d\eta.$$

Агар $(x,t)\in\Omega\cup ED$ бўлса, $(x,t)\neq(0,\eta)$ бўлади. Унда Грин функциясининг 4^0 – ва 1^0 – хоссасини эътиборга олсак,

$$u_{2xx}-u_{2t}=-\lim_{\eta\to t}\varphi_0(\eta)G_{1\xi}(x,t;0,\eta)+\int\limits_0^t \varphi_0(\eta)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(G_{2xx}-G_{2t}\right)d\eta=0$$

тенгликка эга бўламиз, демак, $u_2(x,t)$ - (1.40) тенгламанинг ечими экан.

Грин функциясининг тузилишига асосан, қуйидаги тенглик ўринли:

$$u_2(x,t)=\int\limits_0^t \varphi_0(\eta)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{x-2nl}{t-\eta}E(x,t;2nl,\eta)d\eta=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \varphi_0(\eta)\frac{x}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\eta)}\right]d\eta+ \tag{1.46}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \varphi_0(\eta)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{x-2nl}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(x-2nl)^2}{4(t-\eta)}\right]d\eta.$$

Агар $t>0$ бўлса, бу тенгликдан

$$\lim_{x\to+0} u_2(x,t)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \varphi_0(\eta)\frac{x}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\eta)}\right]d\eta-$$

$$-\frac{l}{\pi}\int_0^t \varphi_0(\eta)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{n}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left[-\frac{n^2l^2}{t-\eta}\right]d\eta\,.$$

Бу ердаги иккинчи қўшилувчи нолга тенг. Буни эътиборга олиб ва биринчи интегралда $\eta = t - x^2/4\alpha^2$, $\alpha > 0$ алмаштириш бажариб,

$$\lim_{x\to+0} u_2(x,t) = \lim_{x\to+0}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x/2\sqrt{t}}^{+\infty}\varphi_0\left(t-\frac{x^2}{4d^2}\right)e^{-\alpha^2}d\alpha$$

тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликдан $t > 0$ бўлганлиги учун

$$\lim_{x\to+0} u_2(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\varphi_0(t)\,d\alpha = \varphi_0(t)\,,\qquad t>0 \qquad (1.47)$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Лапитал қоидасидан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, агар $x\in(0,l)$ бўлса, $\forall\eta(<t)$ ва $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ учун

$$\left|\frac{x-2nl}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(x-2n^2l)^2}{4(t-\eta)}\right]\right| < +\infty$$

тенгсизлик ўринли, $\eta \to t$ да эса бу ифода нолга интилади.

Буни эътиборга олиб, (1.46) тенгликда $t\to+0$ да лимитга ўтсак,

$$\lim_{t\to+0} u_2(x,t) = 0\,,\qquad x\in(0,l) \qquad (1.48)$$

тенгликка эга бўламиз.

Юқоридаги каби усулда кўрсатиш мумкинки,

$$u_3(x,t) = -\int_0^t \varphi_1(\eta)G_{1\xi}(x,t;l,\eta)d\eta$$

функция (1.36) га мос бир жинсли тенгламани қаноатлантиради ва $\varphi_1(l) = 0$ бўлса,

$$\lim_{x\to l-0} u_3(x,t) = \varphi_1(t)\,,\quad t\in[0,T];\qquad \lim_{t\to+0} u_3(x,t) = 0\,,\quad x\in[0,l]$$

тенгликлар ўринли бўлади.

Ва ниҳоят қуйидаги функцияни ўрганамиз:

$$u_4(x,t) = \int_0^t d\eta\int_0^l f(\xi,\eta)G_1(x,t;\xi,\eta)d\xi\,.$$

$(x,t)\in\Omega\cup ED$ бўлсин. Унда

$$u_{4xx}-u_{4t}=$$

$$=-\lim_{\eta\to t}\int_0^l f(\xi,\eta)G_1(x,t;\xi,\eta)d\xi+\int_0^t d\eta\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial t}\right)\int_0^l f(\xi,\eta)G_1(x,t;\xi,\eta)d\xi\,.$$

Грин функциясининг 1^0 – хоссасига асосан иккинчи қўшилувчи нолга тенг. Буни ва (1.42) тенгликни эътиборга олсак,

$$u_{4xx}-u_{4t}=-\lim_{\eta\to t}\int_0^l f(\xi,\eta)E(x,t;\xi,\eta)d\xi-$$

$$-\lim_{\eta\to t}\int_0^l f(\xi,\eta)\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E(x,t;-\xi+2nl,\eta)-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E(x,t;\xi+2nl,\eta)\right]d\xi\,.$$

Бу тенгликдан $E(x,t;\xi,\eta)$ функциянинг 1^0- 3^0 – хоссаларига асосан

$$u_{4xx}-u_{4t}=-f(x,t)\,,\qquad (x,t)\in\Omega\cup A_0B_0$$

тенглик келиб чиқади.

$t>0$ бўлсин. У ҳолда (1.42) ва (1.42*) тенгликларга асосан

$$\lim_{x\to+0}u_4(x,t)=\int_0^t d\eta\int_0^l f(\xi,\eta)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[E(0,t;-\xi+2nl,0)-E(0,t;\xi+2nl,0)\right]d\xi=0$$

тенглик келиб чиқади. Худди шу каби $\lim\limits_{x\to l-0}u_4(x,t)=0\,,\quad t>0$.

Аниқки, $\int_0^l f(\xi,\eta)G_1(x,t;\xi,\eta)d\xi$ функция $t\in(0,T)$, $x\in(0,l)$ да узлуксиздир. Шунинг учун

$$\lim_{t\to+0}u_4(x,t)=\lim_{t\to+0}\int_0^t d\eta\int_0^l f(\xi,\eta)G_1(x,t;\xi,\eta)d\xi=0\,.$$

Юқоридагилардан $u(x,t)=\sum\limits_{j=1}^{4}u_j(x,t)$ функция 1-чегаравий масаланинг барча шартларини қаноатлантириши келиб чиқади. 1.2- теорема исботланди.

II БОБ

БОШ ҚИСМИДА МОДЕЛ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИК ОПЕРАТОР ҚАТНАШГАН ЮКЛАНГАН ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ТРИКОМИ МАСАЛАСИ

2.1-§. $x+y=0$ характеристикада чегаравий шарт берилган ҳол учун Трикоми масаласи

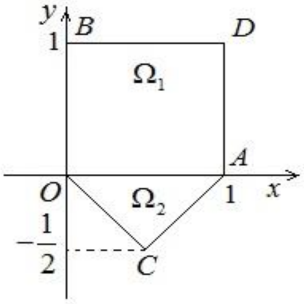
$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup OA$ соҳада ушбу

$$0=Lu\equiv\begin{cases}L_1u\equiv u_{xx}-u_y-\lambda_1u(x,0), & (x,y)\in\Omega_1,\\ L_2u\equiv u_{xx}-u_{yy}-\lambda_2u(x-y,0), & (x,y)\in\Omega_2\end{cases}$$

параболо-гиперболик тенгламани қарайлик, бу ерда λ_1 ва λ_2-берилган ҳақиқий сонлар, $OA=\{(x,y):\, y=0, 0<x<1\}$ - $Lu=0$ тенгламанинг тип ўзгариш чизиғи,

$\Omega_1=\{(x,y):\, 0<x<1,\, 0<y\le 1\}$,

$\Omega_2=\{(x,y):\, -y<x<y+1, (-1/2)<y<0\}$.



$Lu=0$ тенглама учун Трикоми масаласини ўрганамиз.

2.1-масала. *Шундай* $u(x,y)\in\bigcap\limits_{i=1}^{2}\left[C(\bar\Omega_i)\cap C_{x,y}^{2,i}(\Omega_i)\right]$ *функция топилсинки, у* Ω_1 *ва* Ω_2 *соҳаларда* $Lu=0$ *тенгламани, унинг чегарасида*

$$u(0,y)=\varphi_0(y),\quad u(1,y)=\varphi_1(y),\qquad 0\le y\le 1; \tag{2.1}$$

$$u(x,-x)=\psi(x),\quad 0\le x\le(1/2) \tag{2.2}$$

чегаравий шартларни, OA *тип ўзгариш чизиғида эса қуйидаги*

$$\lim_{y\to+0}u(x,y)=\lim_{y\to-0}u(x,y),\quad 0\le x\le 1 \tag{2.3}$$

$$\lim_{y\to+0}u_y(x,y)=\lim_{y\to-0}u_y(x,y),\quad 0<x<1 \tag{2.4}$$

улаш шартларни қаноатлантирсин, бу ерда $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \psi(x)$ – берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $\varphi_0(0)=\psi(0)$ келишув шарти бажарилади.

Математик адабиётларда бу масала Трикоми масаласи деб аталади[6].

Қўйилган масаланинг бир қийматли ечилишини исботлаймиз. Фараз қилайлик, 2.1-масаланинг $u(x,y)$ ечими мавжуд бўлсин. (2.3) ва (2.4) шартларни ҳисобга олиб, қуйидаги белгилашлар ва фаразларни қабул қиламиз:

$$u(x,0)=\tau(x), \qquad x\in[0,1]; \qquad \tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1); \tag{2.5}$$

$$u_y(x,0)=\nu(x), \qquad x\in(0,1); \qquad \nu(x)\in C^1(0,1)\cap L[0,1]. \tag{2.6}$$

Бу белгилашларни эътиборга олсак, Ω_2 соҳада $L_2u=0$ тенгламанинг (2.2) ва (2.6) шартларни қаноатлантирувчи ечими биринчи бобда қўлланилган Риман усули билан топилади ва (1.8) формуладан фойдаланиб, бу ечим қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$u(x,y)=\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)+\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)-\psi(0)+\int_0^{x+y}\nu(t)dt+$$

$$+\lambda_2\frac{x+y}{4}\int_{x+y}^{x-y}\tau(\eta)d\eta+\frac{\lambda_2}{2}\int_0^{x+y}d\xi\int_\xi^{x+y}\tau(\eta)d\eta. \tag{2.7}$$

(2.7) функцияда $y=0$ деб ва (2.5) белгилашни эътиборга олиб, ҳосил бўлган тенгликни дифференциаллаймиз. Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$\tau'(x)=\psi'(x/2)+\nu(x)+(\lambda_2x/2)\tau(x), \quad x\in(0,1). \tag{2.8}$$

$L_1u=0$ тенгламада ва (2.1) шартларда $y\to+0$ да лимитга ўтиб, (2.5) ва (2.6) белгилашларни ҳисобга олсак, қуйидаги муносабатларга келамиз:

$$\tau''(x)-\nu(x)=\lambda_1\tau(x), \qquad x\in(0,1); \tag{2.9}$$

$$\tau(0)=\varphi_0(0),\ \tau(1)=\varphi_1(0). \tag{2.10}$$

(2.9) тенгликдан (2.8) тенгликни ҳадлаб айириб, $\tau(x)$ функцияга нисбатан

$$\tau''(x)-\tau'(x)+\left[(\lambda_2x/2)-\lambda_1\right]\tau(x)=-\psi'(x/2),\ x\in(0,1) \tag{2.11}$$

дифференциал тенгламага эга бўламиз.

Демак, 2.1-масала ечимга эга бўлиш маъносида {(2.10),(2.11))} масалага эквивалент экан. Шунинг учун бу масалани ўрганамиз.

2.1-теорема. *Агар* $\lambda_1 \geq 0, \left(\lambda_2/2\right) \leq \lambda_1$ *тенгсизликлар бажарилса, {(2.10),(2.11))} масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди*.

Исбот. Тескаридан фараз қилайлик, {(2.10),(2.11))} масаланинг ечими мавжуд ва улар $\tau_1\left(x\right)$ ва $\tau_2\left(x\right)$ бўлсин. У ҳолда уларнинг айирмаси $\tau\left(x\right)=\tau_1\left(x\right)-\tau_2\left(x\right)$ қуйидаги бир жинсли масалани қаноатлантиради:

$$\tau''(x)-\tau'(x)+\left[(\lambda_2 x/2)-\lambda_1\right]\tau\left(x\right)=0,\ \ x\in\left(0,1\right);\quad \tau\left(0\right)=0,\ \tau\left(1\right)=0. \quad (2.12)$$

Фараз қилайлик, (2.12) масала тривиалмас $\tau\left(x\right)\not\equiv 0,\ x\in\left[0,1\right]$ ечимга эга бўлсин. У ҳолда Вейерштрасс теоремасига асосан $\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|\tau\left(x\right)\right|=\left|\tau\left(x_0\right)\right|=M>0,\ \ x\in[0,1]$ тенглик ўринли. $\tau\left(0\right)=0,\ \tau\left(1\right)=0$ бўлганлиги учун $x_0\in\left(0,1\right)$ бўлади. У ҳолда x_0 нуқтада $\tau\left(x\right)$ функция мусбат максимумга ёки манфий минимумга эришади. Агар $\tau\left(x_0\right)$ мусбат максимум (ёки манфий минимум) бўлса, $\tau''\left(x_0\right)\leq 0(\geq 0),\ \ \tau'\left(x_0\right)=0$ бўлиб, 2.1-теорема шартларидан келиб чиқувчи $\lambda_1>0,\left(\lambda_2/2\right)\leq\lambda_1$ ёки $\lambda_1=0,\lambda_2<0$ тенгсизликлар ўринли бўлиб,

$$\left\{\tau''(x)-\tau'(x)+\left[(\lambda_2 x/2)-\lambda_1\right]\tau\left(x\right)\right\}\Big|_{x=x_0}<0\ (>0)$$

тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. Бу эса (2.12) шартларнинг биринчисига зид. Демак, $\tau\left(x\right)\not\equiv 0,\ x\in\left[0,1\right]$ деган фаразимиз нотўғри экан. Унда $\tau\left(x\right)\equiv 0,\ x\in\left[0,1\right]$. Бу тенглик $\lambda_1=\lambda_2=0$ бўлганда (2.12) дан бирданига келиб чиқади 2.1-теорема исботланди.

Энди {(2.10),(2.11))} масала ечимининг мавжудлигини кўрсатамиз. Шу мақсадда {(2.10),(2.11))} масалада $z\left(x\right)=\tau\left(x\right)-\varphi_0\left(0\right)-\left[\varphi_1\left(0\right)-\varphi_0\left(0\right)\right]x$ алмаштириш қиламиз. Натижада

$$z''=f\left(x\right),\ \ x\in\left(0,1\right);\qquad z\left(0\right)=0,\ \ z\left(1\right)=0 \qquad (2.13)$$

масалага келамиз, бунда $f(x)=\tau'(x)+\left[\lambda_1-(\lambda_2 x/2)\right]\tau(x)-\psi'(x/2)$.

Бу масаланинг Грин функцияси мавжуд ва у

$$G(x,s)=\begin{cases}(s-1)x, & x\le s;\\ (x-1)s, & s\le x\end{cases}$$

кўринишга эга[7]. Унда Гильберт теоремасига асосан (2.13) масаланинг ечими

$$z(x)=\int_0^1 G(x,s)f(s)ds,\ x\in[0,1] \qquad (2.14)$$

кўринишда аниқланади[7]. Бу тенгликка $z(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг ифодаларини қўйиб, сўнгра $\tau'(x)$ иштирок этган интегрални бўлаклаб,

$$\tau(x)-\int_0^1 K_1(x,s)\tau(s)ds=f_1(x),\quad x\in[0,1] \qquad (2.15)$$

кўринишдаги тенгликка келамиз, бунда

$$K_1(x,s)=\begin{cases}x\left[(2\lambda_1+\lambda_2)s-\lambda_2 s^2-2\lambda_1-2\right]/2, & x\le s;\\ (x-1)\left[2\lambda_1 s-\lambda_2 s^2-2\right]/2, & s\le x,\end{cases}$$

$$f_1(x)=\left[\varphi_1(0)-\varphi_0(0)\right]x+\varphi_0(0)-(x-1)\int_0^x s\psi'(s/2)ds-x\int_x^1(s-1)\psi'(s/2)ds.$$

(2.15)- $\tau(x)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб, у ечимга эга бўлиш маъносида {(2.10),(2.11)} масалага эквивалентдир. Шунинг учун унинг ечимининг мавжудлиги {(2.10),(2.11)} масаланинг ечимининг ягоналигидан келиб чиқади. Яъни,

$$\tau(x)-\int_0^1 K_1(x,s)\tau(s)ds=0,\ x\in[0,1] \qquad (2.15')$$

бир жинсли интеграл тенглама (2.12) бир жинсли масалага эквивалент бўлади. (2.12) масала фақат тривиал ечимга эга бўлганлиги учун $(2.15')$ бир жинсли интеграл тенглама ҳам фақат тривиал ечимга эга. У ҳолда Фредгольм альтернативасига асосан (2.15) тенгламанинг ечими мавжуд ва ягона.

Агар $\psi(x)$ функция қуйидаги шартларни бажарса

$$\psi(x)\in C[0,1/2]\cap C^2(0,1/2),\quad \psi'(x)\in L[0,1/2], \tag{2.16}$$

у ҳолда $f_1(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$ бўлиб, (2.15) тенгламанинг ечими $\tau(x)$ функция ҳам шу синфга қарашли бўлади. (2.15) интеграл тенгламадан топилган $\tau(x)$ функцияни (2.8) ёки (2.9) тенгликка қўйиб, $\nu(x)$ функцияни топамиз. Шундан сўнг қўйилган 2.1-масаланинг ечими Ω_2 соҳада (2.7) формула билан, Ω_1 соҳада эса $u_{xx}-u_y=\lambda_1\tau(x)$ тенгламанинг (2.1) ва

$$u(x,0)=\tau(x),\quad 0\le x\le 1 \tag{2.5'}$$

шартларни қаноатлантирувчи, яъни биринчи чегаравий масаланинг ечимининг сифатида аниқланади:

$$u(x,t)=\int_0^1\tau(\xi)G_1(x,t;\xi,0)d\xi+\int_0^t\varphi_0(\eta)G_{1\xi}(x,t;0,\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^t\varphi_1(\eta)G_{1\xi}(x,t;1,\eta)d\eta+\lambda_1\int_0^t d\eta\int_0^1\tau(\xi)G_1(x,t;\xi,\eta)d\xi\,.$$

Энди Ω соҳада ушбу

$$0=Mu\equiv\begin{cases}M_1u\equiv u_{xx}-u_y-\lambda_1u(x,0)\,, & (x,y)\in\Omega_1,\\ M_2u\equiv u_{xx}-u_{yy}-\lambda_2u(x+y,0)\,, & (x,y)\in\Omega_2\end{cases}$$

параболо-гиперболик тенглама учун Трикоми масаласини ўрганамиз.

2.2-масала. *Шундай* $u(x,y)\in\bigcap_{i=1}^{2}\left[C(\bar\Omega_i)\cap C^{2,i}_{x,y}(\Omega_i)\right]$ *функция топилсинки, у* Ω_1 *ва* Ω_2 *соҳаларда* $Mu=0$ *тенгламани, унинг чегарасида* (2.1) *ва* (2.2) *чегаравий шартларни, ОА тип ўзгариш чизиғида эса* (2.3) *ва* (2.4) *улаш шартларни қаноатлантирсин.*

Қўйилган 2.2-масаланинг $u(x,y)$ ечими мавжуд бўлсин. (2.3) ва (2.4) шартларни ҳисобга олиб, (2.5) ва (2.6) белгилашларни ва фаразларни қабул қиламиз. Бу белгилашларни ҳисобга олсак, Ω_2 соҳада $M_2u=0$ тенгламанинг (2.2) ва (2.6) шартларни қаноатлантирувчи ечими биринчи бобда аниқланган

(1.8) формуладан фойдаланиб топилади ва бу ечим ушбу кўринишда ёзилади:

$$u(x,y)=\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)+\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)-\psi(0)+\int_0^{x+y}\left[\nu(\xi)+\frac{\lambda_2}{2}(x-\xi)\tau(\xi)\right]d\xi. \quad (2.17)$$

(2.17) функцияда $y=0$ деб ва (2.5) белгилашни эътиборга олиб, ҳосил бўлган тенгликни дифференциаллаймиз. Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$\tau'(x)=\psi'\left(\frac{x}{2}\right)+\nu(x)+\frac{\lambda_2}{2}\int_0^x\tau(\xi)d\xi, \quad x\in(0,1). \quad (2.18)$$

$M_1u=0$ тенгламада ва (2.1) шартларда $y\to+0$ лимитга ўтиб, (2.5) ва (2.6) белгилашларни ҳисобга олсак, (2.9) ва (2.10) муносабатларга келамиз.

(2.9) тенгликдан (2.18) тенгликни айириб,

$$\tau''(x)-\tau'(x)-\lambda_1\tau(x)+\frac{\lambda_2}{2}\int_0^x\tau(\xi)d\xi=-\psi'\left(\frac{x}{2}\right), \quad x\in(0,1) \quad (2.19)$$

кўринишдаги интегро-дифференциал тенгламага эга бўламиз.

Демак, 2.2-масала ечимга эга бўлиш маъносида {(2.10),(2.19)} масалага эквивалент экан.

2.2-теорема. *Агар* $\lambda_2\geq 0, \lambda_1\leq(\lambda_2/2)$ *тенгсизлик бажарилса,* {(2.10),(2.19)} *масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. {(2.10),(2.19)} масала $\tau_1(x)$ ва $\tau_2(x)$ ечимларга эга бўлсин. У ҳолда $\tau(x)=\tau_1(x)-\tau_2(x)$ функция ушбу бир жинсли масалани қаноатлантиради:

$$\tau''(x)-\tau'(x)-\lambda_1\tau(x)+\frac{\lambda_2}{2}\int_0^x\tau(\xi)d\xi=0, \; x\in(0,1); \quad \tau(0)=\tau(1)=0. \quad (2.20)$$

Фараз қилайлик (2.20) масала тривиалмас $\tau(x)\neq 0, \; x\in[0,1]$ ечимга эга бўлсин. У ҳолда Вейерштрасс теоремасига асосан $\sup\limits_{x\in[0,1]}|\tau(x)|=|\tau(x_0)|=M>0, \; x_0\in[0,1]$ тенглик ўринли. $\tau(0)=\tau(1)=0$ бўлганлиги учун $x_0\in(0,1)$ бўлади. Фараз қилайлик, $\tau(x)$ функция $x_0\in(0,1)$

нуқтада мусбат максимум (манфий минимум) га эришсин. У ҳолда $\tau''(x)\big|_{x=x_0} \le 0(\ge 0)$, $\tau'(x_0)=0$ бўлиб, теорема шартларидан келиб чиқувчи $\{\lambda_2 \ge 0, \lambda_1 < (\lambda_2/2)\}$ ёки $\{\lambda_2 > 0, \lambda_1 \le (\lambda_2/2)\}$ тенгсизликлар бажарилса

$$\left\{\tau''(x)-\tau'(x)+\left(\frac{\lambda_2 x}{2}-\lambda_1\right)\tau(x)-\frac{\lambda_2}{2}\int\limits_0^x[\tau(x)-\tau(\xi)]d\xi\right\}\Bigg|_{x=x_0} < 0\,(>0)$$

тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. Бу - (2.20) нинг биринчи тенглигига зид. Демак, фаразимиз нотўғри, яъни $\tau(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$. Бу тенглик $\lambda_1=\lambda_2=0$ бўлганда (2.20) масаладан бирданига келиб чиқади. Демак, $\tau_1(x)=\tau_2(x)$, $x\in[0,1]$. 2.2-теорема исботланди.

Энди {(2.10),(2.19)} масала ечимининг мавжудлигини кўрсатишга ўтамиз. Бунинг учун (2.19) тенгламани $\tau''(x)=p(x)$, $x\in(0,1)$ кўринишда ёзиб оламиз, бу ерда

$$p(x)=\tau'(x)+\lambda_1\tau(x)-\frac{\lambda_2}{2}\int\limits_0^x\tau(\xi)d\xi-\psi'\left(\frac{x}{2}\right).$$

Бу тенгламада $p(x)$ функцияни вақтинча маълум деб ҳисобласак, унинг (2.10) шартларни қаноатлантирувчи ечими

$$\tau(x)=\int\limits_0^1 G(x,s)\,f_2(s)ds+\left[\varphi_1(0)-\varphi_0(0)\right]x+\varphi_0(0) \qquad (2.21)$$

кўринишда аниқланади[7], бу ерда $G(x,s)$ — Грин функцияси.

(2.21) тенгликка $G(x,s)$ ва $p(x)$ функцияларнинг ифодаларини қўйиб, сўнгра $\tau'(x)$ иштирок етган интегрални бўлаклаб, $\tau(x)$ функцияга нисбатан

$$\tau(x)-\int\limits_0^1 K_2(x,s)\tau(s)ds=f_2(x),\ x\in[0,1] \qquad (2.22)$$

кўринишдаги интеграл тенгламага эга бўламиз, бу ерда

$$K_2(x,s)=\begin{cases}\left[\lambda s^2+(2\lambda_2-4\lambda_1)s+\lambda_2-4\lambda_1-4\right]x/4, & x\le s;\\ \left[\lambda_2 s^2-\lambda_2 x+4\lambda_1 s-4\right](x-1)/4, & s\le x,\end{cases}$$

$$f_3(x)=(1-x)\int_0^x s\psi'(s/2)ds-x\int_x^1(s-1)\psi'(s/2)ds+\left[\varphi_1(0)-\varphi_0(0)\right]x+\varphi_0(0).$$

(2.22) - иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб, у ечимга эга бўлиш маъносида {(2.10),(2.19)} масалага эквивалент. Шунинг учун унинг ечимининг мавжудлиги {(2.10),(2.19)} масала ечимининг ягоналигидан келиб чиқади. Бу интеграл тенгламани ечиб, $\tau(x)$ функцияни топамиз ва уни (2.9) ёки (2.18) тенликка қўйиб $\nu(x)$ функцияни топамиз. Шундан сўнг қўйилган масаланинг ечими Ω_2 соҳада (2.17) формула билан, Ω_1 соҳада эса $u_{xx}-u_y=\lambda_1\tau(x)$ тенглама учун биринчи чегаравий масаланинг ечими сифатида аниқланади[8].

$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup OA$ соҳада ушбу

$$0=Nu\equiv\begin{cases}N_1u\equiv u_{xx}-u_y-\lambda_1u_z(x,z)\big|_{z=0}, & (x,y)\in\Omega_1,\\ N_2u\equiv u_{xx}-u_{yy}-\lambda_2u_z(x+y,z)\big|_{z=0}, & (x,y)\in\Omega_2\end{cases}$$

2.3-масала. *Шундай* $u(x,y)\in\bigcap_{i=1}^{2}\left[C(\bar{\Omega}_i)\cap C_{x,y}^{2,i}(\Omega_i)\right]$ *функция топилсинки, у* Ω_1 *ва* Ω_2 *соҳаларда* $Mu=0$ *тенгламани, унинг чегарасида* (2.1) *ва* (2.2) *чегаравий шартларни,* OA *тип ўзгариш чизиғида эса* (2.3) *ва* (2.4) *улаш шартларни қаноатлантирсин.*

Қўйилган 2.2-масаланинг $u(x,y)$ ечими мавжуд бўлсин. (2.3) ва (2.4) шартларни ҳисобга олиб, (2.5) ва (2.6) белгилашларни ва фаразларни қабул қиламиз. Бу белгилашларни ҳисобга олсак, Ω_2 соҳада $M_2u=0$ тенгламанинг (2.2) ва (2.5) шартларни қаноатлантирувчи ечими биринчи бобда қўлланилган Риман усули билан топилади ва (1.7) формуладан фойдаланган ҳолда бу ечим ушбу кўринишда ёзилади:

$$u(x,y)=\tau(x+y)+\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)-\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)-\frac{y}{2}\lambda_2\int_0^{x+y}\nu(\xi)d\xi \qquad (2.22)$$

кўринишда ёзилади.

(2.22) функцияни y бўйича дифференциаллаймиз, сўнгра $y=0$ деб ва (2.6) белгилашни эътиборга олиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\nu(x)=\tau'(x)-\psi'\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{\lambda_2}{2}\int_0^x \nu(\xi)d\xi, \quad x\in(0,1). \qquad (2.23)$$

Энди $N_1u=0$ тенгламада ва (1) шартларда $y\to+0$ лимитга ўтиб, (2.5) ва (2.6) белгилашларни ҳисобга олсак, (2.10) ва қуйидаги муносабатга келамиз:

$$\tau''(x)-(1+\lambda_1)\nu(x)=0, \quad x\in(0,1); \qquad (2.24)$$

Демак, 2.3-масала ечимга эга бўлиш маъносида {(2.23),(2.9),(2.10)} масалага эквивалент экан.

2.3-теорема. *Агар* $\{\lambda_1<-1,\ \lambda_2>0\}$, $\{\lambda_1=-1, \forall\lambda_2\in R\}$ *ва* $\{\lambda_2=0,\ \forall\lambda_1\in R\}$ *шартлар группасидан бири бажарилса,* {(2.23),(2.24),(2.10)} *масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Бунинг учун {(2.23),(2.24),(2.10)} масалага мос бир жинсли масала, яъни

$$\tau''(x)-(1+\lambda_1)\nu(x)=0, \quad x\in(0,1); \quad \tau(0)=\tau(1)=0; \qquad (2.25)$$

$$\nu(x)=\tau'(x)-\frac{\lambda_2}{2}\int_0^x \nu(\xi)d\xi \qquad (2.26)$$

шартлардан ташкил топган масала фақат тривиал ечимга эга эканлигини кўрсатиш етарли.

Шу мақсадда (2.25) даги биринчи тенгликни $\tau(x)$ фунцияга кўпайтириб, натижани x ўзгарувчи бўйича $[0,1]$ оралиқда интеграллаймиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликдаги $\tau''(x)$ иштирок этган интегрални бўлаклаб ва $\tau(0)=\tau(1)=0$ тенгликларни ҳисобга олиб,

$$\int_0^1 \left[\tau'(x)\right]^2 dx+(1+\lambda_1)\int_0^1 \tau(x)\nu(x)dx=0 \qquad (2.27)$$

тенгликка эга бўламиз.

Энди (2.26) тенгликни $\int_0^x \nu(\xi)d\xi$ функцияга кўпайириб, натижани x ўзгарувчи бўйича $[0,1]$ ораликда интеграллаймиз:

$$\int_0^1 \nu(x)dx\int_0^x \nu(\xi)d\xi = \int_0^1 \tau'(x)dx\int_0^x \nu(\xi)d\xi - \frac{1}{2}\lambda_2\int_0^1 \left(\int_0^x \nu(\xi)d\xi\right)^2 dx.$$

Бу тенгликлардан $\tau(0)=\tau(1)=0$ шартлар ва

$$\int_0^1 \nu(x)dx\int_0^x \nu(\xi)d\xi = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \nu(\xi)d\xi\right]^2, \qquad \int_0^1 \tau'(x)dx\int_0^x \nu(\xi)d\xi = -\int_0^1 \tau(x)\nu(x)dx$$

тенгикларга асосан қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$\int_0^1 \nu(x)\nu(x)dx = -\frac{1}{2}\left[\int_0^1 \nu(\xi)d\xi\right]^2 - \frac{1}{2}\lambda_2\int_0^1\left[\int_0^x \nu(\xi)d\xi\right]^2 dx. \qquad (2.28)$$

(2.27) ва (2.28) тенгликларга кўра, ушбу тенглик ўринли:

$$\int_0^1 \left[\tau'(x)\right]^2 dx - (1+\lambda_1)\frac{1}{2}\left[\int_0^1 \nu(\xi)d\xi\right]^2 - (1+\lambda_1)\frac{\lambda_2}{2}\int_0^1\left[\int_0^x \nu(\xi)d\xi\right]^2 dx = 0. \quad (2.29)$$

2.3-теореманинг $\{\lambda_1 < -1, \lambda_2 > 0\}$ ёки $\{\lambda_1 = -1, \forall\lambda_2 \in R\}$ шартлар группаси бажариладиган бўлса, (2.29) тенгликдан $\tau'(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$ эканлиги келиб чиқади. Унда $\tau(0)=\tau(1)=0$ шартларга кўра $\tau(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$ бўлади. Агар $\lambda_2 = 0$ бўлса, (2.26) дан $\nu(x)=\tau'(x)$ тенглик келиб чиқади. Буни ва $\lambda_2 = 0$ ни эътиборга олсак (2.29) тенглик $\int_0^1 \left[\tau'(x)\right]^2 dx = 0$ кўринишни олиб, ундан яна $\tau'(x)\equiv 0$, $x\in(0,1)$, яъни $\tau(x)\equiv const, x\in[0,1]$ тенглик келиб чиқади. Унда $\tau(0)=\tau(1)=0$ шартларга кўра $\tau(x)\equiv 0, x\in[0,1]$. 2.3-теорема исботланди.

Энди {(2.23),(2.24),(2.10)} масала ечимининг мавжудлигини кўрсатишга ўтамиз.

Агар $f_0(x)=\tau'(x)-\psi'(x/2)$ ни вақтинча маълум деб қарасак, (2.23) тенглик $\nu(x)$ функцияга нисбатан иккинчи тур Вольтерра интеграл тенгламаси бўлиб, унинг ечими қуйидаги кўринишда аниқланади:

$$\nu(x)=f_0(x)-\frac{\lambda_2}{2}\int_0^x e^{\lambda_2(t-x)/2}f_0(t)dt. \tag{2.30}$$

$\nu(x)$ функциянинг (2.30) тенгликдаги ифодасини (2.24) тенгликка қўйиб ва баъзи ҳисоблашларни бажариб, $\tau(x)$ номаълум функцияга нисбатан

$$\tau''(x)-(1+\lambda_1)\left[\tau'(x)-\frac{\lambda_2}{2}\tau(x)+\frac{1}{4}\lambda_2^2\int_0^x\tau(t)e^{\lambda_2(t-x)/2}dt\right]=g(x),\ \ x\in(0,1) \tag{2.31}$$

кўринишдаги интегро-дифференциал тенгламага эга бўламиз, бу ерда

$$g(x)=(1+\lambda_1)\left[\psi'\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\lambda_2\psi(0)e^{-\lambda_2x/2}-\frac{\lambda_2^2}{2}\int_0^x e^{\lambda_2(t-x)/2}\psi\left(\frac{t}{2}\right)dt\right].$$

(2.31) тенгламани $\tau''(x)=f(x),\ \ x\in(0,1)$ кўринишда ёзиб оламиз, бу ерда

$$f(x)=(1+\lambda_1)\left[\tau'(x)-\frac{\lambda_2}{2}\tau(x)+\frac{1}{4}\lambda_2^2\int_0^x\tau(t)e^{\lambda_2(t-x)/2}dt\right]+g(x),\ \ x\in(0,1).$$

Бу тенгламада $f(x)$ функцияни вақтинча маълум деб ҳисобласак, унинг (2.10) шартларни қаноатлантирувчи ечими

$$\tau(x)=\int_0^1 G(x,s)f(s)ds+\left[\varphi_1(0)-\varphi_0(0)\right]x+\varphi_0(0) \tag{2.32}$$

кўринишда аниқланади[7], бу ерда $G(x,s)$— Грин функцияси:

$$G(x,s)=\begin{cases}(s-1)x, & x\le s;\\ (x-1)s, & s\le x.\end{cases}$$

(2.32) тенгликка $G(x,s)$ ва $f(x)$ функцияларнинг ифодаларини қўйиб, сўнгра $\tau'(x)$ иштирок етган интегрални бўлаклаб, $\tau(x)$ функцияга нисбатан

$$\tau(x)-(1+\lambda_1)\int_0^1 K_3(x,s)\tau(s)ds=f_3(x),\ \ x\in[0,1] \tag{2.33}$$

кўринишдаги интеграл тенгламага келамиз, бу ерда

$$K_3(x,s)=\begin{cases}-xe^{-\frac{\lambda_2}{2}(s-1)}, & x\le s;\\ -xe^{-\frac{\lambda_2}{2}(s-1)}+e^{\frac{\lambda_2}{2}(s-x)}, & s\le x,\end{cases}$$

$$f_3(x)=(x-1)\int_0^x sg(s)ds+x\int_x^1(s-1)g(s)ds+\left[\varphi_1(0)-\varphi_0(0)\right]x+\varphi_0(0).$$

(2.33) - иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб, у {(2.23),(2.24),(2.10)} масалага эквивалент. Шунинг учун унинг ечимининг мавжудлиги {(2.23),(2.24),(2.10)} масала ечимининг ягоналигидан келиб чиқади. Бу интеграл тенгламадан $\tau(x)$ функцияни топилгандан сўнг, уни (2.30) га қўйиб $\nu(x)$ функцияни топамиз. Шундан сўнг қўйилган 2.3-масаланинг ечими Ω_2 соҳада (2.22) формула билан, Ω_1 соҳада эса $u_{xx}-u_y=\lambda_1\nu(x)$ тенглама учун биринчи чегаравий масаланинг ечими сифатида аниқланади[8].

Энди Ω соҳада ушбу

$$0=Eu\equiv\begin{cases}E_1u\equiv u_{xx}-u_y-\lambda_1u_z(x,z)\big|_{z=0}, & (x,y)\in\Omega_1,\\ E_2u\equiv u_{xx}-u_{yy}-\lambda_2u_z(x-y,z)\big|_{z=0}, & (x,y)\in\Omega_2\end{cases}$$

параболо-гиперболик тенглама учун Трикоми масаласини ўрганамиз.

2.4-масала. *Шундай* $u(x,y)\in\bigcap_{i=1}^{2}\left[C(\overline{\Omega}_i)\cap C_{x,y}^{2,i}(\Omega_i)\right]$ *функция топилсинки, у* Ω_1 *ва* Ω_2 *соҳаларда* $Eu=0$ *тенгламани, унинг чегарасида* (2.1) *ва* (2.2) *чегаравий шартларни, ОА тип ўзгариш чизиғида эса* (2.3) *ва* (2.4) *улаш шартларини қаноатлантирсин.*

Қўйилган 2.4-масаланинг $u(x,y)$ ечими мавжуд бўлсин. (2.3) ва (2.4) шартларни ҳисобга олиб, (2.5) ва (2.6) белгилашларни ва фаразларни қабул қиламиз. Бу белгилашларни эътиборга олсак, Ω_2 соҳада $E_2u=0$ тенгламанинг (2.2) ва (2.5) шартларни қаноатлантирувчи ечими юқорида келтирилган Риман усули билан топилади ва (1.7) формула ёрдамида бу ечим ушбу кўринишда ёзилади:

$$u(x,y)=\tau(x+y)+\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)-\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{x+y}{4}\lambda_2\int\limits_{x+y}^{x-y}\nu(\eta)d\eta. \qquad (2.34)$$

(2.34) функцияни y ўзгарувчи бўйича дифференциаллаймиз, сўнгра $y=0$ деб ва (2.6) белгилашни эътиборга олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$(\lambda_2 x+2)\nu(x)=2\tau'(x)-2\psi'(x/2), \quad x\in(0,1). \qquad (2.35)$$

$E_1 u=0$ тенгламада ва (2.1) шартларда $y\to+0$ да лимитга ўтиб, (2.5) ва (2.6) белгилашларни ҳисобга олсак, (2.24) ва (2.10) муносабатларга келамиз. (2.35) ва (2.24) тенгликлардан $\tau(x)$ функцияга нисбатан қуйидаги дифференциал тенгламага эга бўламиз:

$$(\lambda_2 x+2)\tau''(x)-2(1+\lambda_1)\tau'(x)=-2(1+\lambda_1)\psi'(x/2), \; x\in(0,1). \qquad (2.36)$$

Демак, 2-масала {(2.10),(2.36)} масалага эквивалент экан.

2.4-теорема. *Агар* $\forall\lambda_1\in R, \lambda_2>-2$ *бўлса,* {(2.10),(2.36)} *масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Тескаридан фараз қилайлик, {(2.10),(2.36)} масаланинг ечими мавжуд ва улар $\tau_1(x)$ ва $\tau_2(x)$ бўлсин. У ҳолда уларнинг айирмаси $\tau(x)=\tau_1(x)-\tau_2(x)$ қуйидаги бир жинсли масалани қаноатлантиради:

$$(\lambda_2 x+2)\tau''(x)-2(1+\lambda_1)\tau'(x)=0, \; x\in(0,1); \quad \tau(0)=\tau(1)=0. \qquad (2.37)$$

(2.37) даги тенгламани $\tau(x)$ га кўпайтириб, натижани x ўзгарувчи бўйича $[0,1]$ оралиқда интеграллаймиз:

$$\int\limits_0^1\left[(\lambda_2 x+2)\tau(x)\tau''(x)\right]dx-2(1+\lambda_1)\int\limits_0^1\tau(x)\tau'(x)=0.$$

Биринчи интегрални бўлаклаб ва $\tau(0)=\tau(1)=0$ шартларни ҳисобга олиб,

$$\int\limits_0^1(\lambda_2 x+2)\left[\tau'(x)\right]^2 dx+(2+2\lambda_1+\lambda_2)\int\limits_0^1\tau(x)\tau'(x)dx=0$$

тенгликка эга бўламиз. Иккинчи интегрални ҳисобласак, охирги тенглик

$$\int\limits_0^1(\lambda_2 x+2)\left[\tau'(x)\right]^2 dx=0$$

кўринишни олади. 2.4-теорема шартига асосан $\lambda_2 x+2>0$. Унда охирги тенгликдан $\tau'(x)=0$ тенглик, яъни $\tau(x)=const$, $x\in[0,1]$ тенглик келиб чиқади. Буни ва $\tau(0)=\tau(1)=0$ шартларни эътиборга олсак, $\tau(x)\equiv 0$, яъни $\tau_1(x)=\tau_2(x)$, $x\in[0,1]$ эканлигини топамиз. 2.4-теорема исботланди.

Энди {(2.10),(2.36)} масала ечимининг мавжудлигини кўрсатишга ўтамиз. Бу ерда ҳам $f(x)=2(1+\lambda_1)\left[\tau'(x)-\psi'(x/2)\right]/(\lambda_2 x+2)$ белгилаш киритиб, 2.3-масаладаги каби, {(2.10),(2.36)} масаланинг ечими учун ҳам (2.32) кўринишидаги тенглик ўринли эканини топамиз.

Сўнгра (2.32) тенгликка $G(x,s)$ ва $f(x)$ функцияларнинг бу масаладаги ифодаларини қўйиб ва $\tau'(x)$ иштирок этган интегрални бўлаклаб,

$$\tau(x)+\int_0^1 K_4(x,s)\tau(s)ds=f_4(x),\ x\in[0,1] \tag{2.38}$$

тенгликка келамиз, бу ерда

$$K_4(x,s)=\begin{cases}4(x-1)(1+\lambda_1)(\lambda_2 s+2)^{-2}, & s\le x;\\ 2x(1+\lambda_1)(2+\lambda_2)(\lambda_2 s+2)^{-2}, & x\le s,\end{cases}$$

$$f_4(x)=2(1+\lambda_1)\left[(1-x)\int_0^x \frac{s}{\lambda_2 s+2}\psi'\left(\frac{s}{2}\right)ds-x\int_x^1 \frac{s-1}{\lambda_2 s+2}\psi'\left(\frac{s}{2}\right)ds\right]+$$

$$+\left[\varphi_1(0)-\varphi_0(0)\right]x+\varphi_0(0).$$

(2.38) - $\tau(x)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб, у {(2.10),(2.36)} масалага эквивалентдир. Шунинг учун унинг ечимининг мавжудлиги {(2.10),(2.36)} масала ечимининг ягоналигидан, яъни 2.4- теоремадан келиб чиқади.

(2.38) интеграл тенгламадан $\tau(x)$ функция топилгандан сўнг, уни (2.35) тенгликка қўйиб, $\nu(x)$ функцияни топамиз. Агар $\psi(x)\in C^1[0,1/2]\cap C^2(0,1/2)$, $\psi''(x)\in L[0,1/2]$ шартлар бажарилса,

$\tau(x)\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1)$, $\nu(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$ бўлади. Шундан сўнг қўйилган 2.4-масаланинг ечими Ω_2 соҳада (2.34) формула билан, Ω_1 соҳада эса $u_{xx}-u_y=\lambda_1\nu(x)$ тенглама учун биринчи чегаравий масаланинг ечими сифатида аниқланади[8].

2.2-§. $x-y=1$ характеристикада чегаравий шарт берилган ҳол учун Трикоми масаласи

Аввалги 2.1-§ да ўрганилган масалаларда бир неча юкланган параболо-гиперболик тенгламалар $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup OA$ соҳада қаралиб, $x+y=0$ ҳарактеристикасида чегаравий шарт берилган ҳол учун Трикоми масаласи тадқиқ этилган.

Ушбу 2.2-§ юқоридаги масалаларнинг давоми ҳисобланиб, бунда хам Ω соҳада юқоридаги масалалар қаралиб, $x-y=1$ ҳарактеристикада чегаравий шарт берилган ҳол учун Трикоми масаласи ўрганилган.

2.5-масала. *Шундай* $u(x,y)\in\bigcap_{i=1}^{2}\left[C(\bar{\Omega}_i)\cap C_{x,y}^{2,i}(\Omega_i)\right]$ *функция топилсинки, у* $\Omega\setminus OA$ *соҳада*

$$0=Lu\equiv\begin{cases}L_1u\equiv u_{xx}-u_y-\lambda_1u(x,0), & (x,y)\in\Omega_1;\\ L_2u\equiv u_{xx}-u_{yy}-\lambda_2u(x-y,0), & (x,y)\in\Omega_2\end{cases}$$

тенгламани, унинг чегарасида (2.1) *ва*

$$u(x,x-1)=\psi(x),\ (1/2)\le x\le 1 \tag{2.39}$$

чегаравий шартларни, OA тип ўзгариш чизиғида эса (2.3) *ва* (2.4) *улаш шартларни қаноатлантирсин,* бу ерда $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\psi(x)-$берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $\varphi_1(0)=\psi(1)$ келишув шарти бажарилади.

Қўйилган масаланинг бир қийматли ечилишини исботлаймиз. Фараз қилайлик, 2.5-масаланинг $u(x,y)$ ечими мавжуд бўлсин. (2.3) ва (2.4) шартларни ҳисобга олиб, (2.5) ва (2.6) белгилашлар ва фаразларни қабул қиламиз.

Бу белгилашларни эътиборга олсак, Ω_2 соҳада $L_2u=0$ тенгламанинг (2.39) ва (2.6) шартларни қаноатлантирувчи ечими (1.13) формуладан фойдалансак, қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$u(x,y)=\psi\left(\frac{1+x+y}{2}\right)+\psi\left(\frac{1+x-y}{2}\right)-\psi(1)+$$

$$+\int_{x-y}^{1}\nu(\xi)d\xi+\frac{\lambda_2}{2}\int_{x-y}^{1}(\eta-x)\tau(\eta)d\eta. \qquad (2.40)$$

(2.40) функцияда $y=0$ деб лимитга ўтиб, x бўйича дифференциаллаcак, қуйидаги муносабатга келамиз:

$$\tau'(x)=\psi'\left(\frac{1+x}{2}\right)-\nu(x)-\frac{\lambda_2}{2}\int_{x}^{1}\tau(\eta)d\eta \qquad (2.41)$$

Энди $L_1u=0$ тенгламада ва (2.1) шартларда $y\to+0$ лимитга ўтиб, (2.5) ва (2.6) белгилашларни ҳисобга олсак, (2.10) ва қуйидаги муносабатга келамиз:

$$\tau''(x)-\nu(x)-\lambda_1\tau(x)=0,\quad x\in(0,1); \qquad (2.42)$$

(2.41) ва (2.42) тенгликларни $\tau(x)$ функцияга нисбатан қуйидаги интегро-дифференциал тенгламага келтириш мумкин:

$$\tau''(x)+\tau'(x)-\lambda_1\tau(x)+\frac{\lambda_2}{2}\int_{x}^{1}\tau(\eta)d\eta=\psi'\left(\frac{1+x}{2}\right),\ x\in(0,1) \qquad (2.43)$$

{(2.10),(2.43)} масала ечимга эга бўлиш маъносида қўйилган 2.5-масалага эквивалентдир.

2.5-теорема. *Агар* $\lambda_2>0,\ (\lambda_2/2)\le\lambda_1$ *ёки* $\lambda_2\ge0,\ (\lambda_2/2)<\lambda_1$ *тенгсизликлар бажарилса,* {(2.10),(2.43)} *масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Тескаридан фараз қилайлик, {(2.10),(2.43)} масаланинг ечими мавжуд ва улар $\tau_1(x)$ ва $\tau_2(x)$ бўлсин. У ҳолда уларнинг айирмаси $\tau(x)=\tau_1(x)-\tau_2(x)$ қуйидаги бир жинсли масалани қаноатлантиради:

$$\tau''(x)+\tau'(x)-\lambda_1\tau(x)+\frac{\lambda_2}{2}\int_x^1\tau(\eta)d\eta=0,\ x\in(0,1);\quad \tau(0)=0,\ \tau(1)=0. \qquad (2.44)$$

Фараз қилайлик, (2.44) масала тривиалмас $\tau(x)\not\equiv 0,\ x\in[0,1]$ ечимга эга бўлсин. У ҳолда Вейерштрасс теоремасига асосан $\sup\limits_{x\in[0,1]}|\tau(x)|=|\tau(x_0)|=M>0,\ x_0\in[0,1]$ тенглик ўринли. $\tau(0)=0,\ \tau(1)=0$ бўлганлиги учун $x_0\in(0,1)$ бўлади. У ҳолда x_0 нуқтада $\tau(x)$ функция мусбат максимумга ёки манфий минимумга эришади. Агар $\tau(x_0)$ мусбат максимум (ёки манфий минимум) бўлса, $\tau''(x_0)\le 0(\ge 0),\ \ \tau'(x_0)=0$ бўлиб, 2.5-теорема шартларига асосан

$$\left\{\tau''(x)+\tau'(x)+\left[\left(\lambda_2(1-x)/2\right)-\lambda_1\right]\tau(x)-\frac{\lambda_2}{2}\int_x^1\left[\tau(x)-\tau(\eta)\right]d\eta\right\}\Bigg|_{x=x_0}<0\ (>0)$$

тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. Бу эса (2.44) шартларнинг биринчисига зиддир. Демак, $\tau(x)\not\equiv 0,\ x\in[0,1]$ деган фаразимиз нотўғри экан. Унда $\tau(x)\equiv 0$, яъни $\tau_1(x)=\tau_2(x),\ \ x\in[0,1]$. Бу тенглик $\lambda_1=\lambda_2=0$ бўлганда (2.44) тенгликлардан бирданига келиб чиқади 2.5-теорема исботланди.

Энди {(2.10),(2.43)} масала ечимининг мавжудлигини кўрсатишга ўтамиз. Бунинг учун (2.43) тенгламани $\tau''(x)=q(x),\ \ x\in(0,1)$ кўринишда ёзиб оламиз, бу ерда

$$q(x)=-\tau'(x)+\lambda_1\tau(x)-\frac{\lambda_2}{2}\int_x^1\tau(\eta)d\eta+\psi'\left(\frac{1+x}{2}\right).$$

Бу тенгламада $q(x)$ функцияни вақтинча маълум деб ҳисобласак, унинг (2.10) шартларни қаноатлантирувчи ечими

$$\tau(x)=\int_0^1 G(x,s)q(s)ds+\left[\varphi_1(0)-\varphi_0(0)\right]x+\varphi_0(0) \qquad (2.45)$$

кўринишда аниқланади[7], бу ерда $G(x,s)$— Грин функцияси:

(2.45) тенгликка $G(x,s)$ ва $f(x)$ функцияларнинг ифодаларини қўйиб, сўнгра $\tau'(x)$ иштирок етган интегрални бўлаклаб, $\tau(x)$ функцияга нисбатан

$$\tau(x)-\int_0^1 K_5(x,s)\tau(s)ds= f_5(x), \quad x\in[0,1] \qquad (2.46)$$

интеграл тенгламага келтирилади. Бунда

$$K_5(x,s)=\begin{cases}(x-1)\left[\lambda_1 s+1-\left(\lambda_2 s^2\right)/4\right], & s\le x\\ -\dfrac{x}{4}\left[\lambda_2 x-(4\lambda_1+2\lambda_2)s+\lambda_2 s^2+4\lambda_1-4\right], & x\le s\end{cases}$$

$$f_5(x)=\int_0^x s(x-1)\psi'\left(\frac{1+x}{2}\right)ds+\int_x^1 x(s-1)\psi'\left(\frac{1+x}{2}\right)ds+\varphi_0(0)+\left[\varphi_1(0)-\varphi_0(0)\right]x.$$

(2.46)- иккинчи тур Фредголмь интеграл тенгламаси бўлиб, {(2.10),(2.43)} масалага эквивалент. Шунинг учун унинг ечимининг мавжудлиги {(2.10),(2.43)} масала ечимининг ягоналигидан, яъни 2.5-теоремадан келиб чиқади.

(2.46) интеграл тенгламадан $\tau(x)$ функция топилгандан сўнг, уни (2.42) тенгликка қўйиб, $\nu(x)$ функцияни топамиз. Агар $\psi(x)\in C^1[1/2,1]\cap C^2(1/2,1)$, $\psi'(x)\in L[\,1/2,1]$ шартлар бажарилса, $\tau(x)\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1)$, $\nu(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$ бўлади. Шундан сўнг қўйилган 2.4-масаланинг ечими Ω_2 соҳада (2.40) формула билан, Ω_1 соҳада эса $u_{xx}-u_y=\lambda_1\nu(x)$ тенглама учун биринчи чегаравий масаланинг ечими сифатида аниқланади[8].

Энди Ω соҳада ушбу

$$0=Mu\equiv\begin{cases}M_1u\equiv u_{xx}-u_y-\lambda_1 u(x,0), & (x,y)\in\Omega_1,\\ M_2u\equiv u_{xx}-u_{yy}-\lambda_2 u(x+y,0), & (x,y)\in\Omega_2\end{cases}$$

параболо-гиперболик тенглама учун Трикоми масаласини ўрганамиз.

2.6-масала. *Шундай* $u(x,y)\in\bigcap_{i=1}^{2}\left[C\left(\bar{\Omega}_i\right)\cap C_{x,y}^{2,i}\left(\Omega_i\right)\right]$ *функция топилсинки, у* $\Omega\setminus OA$ *соҳада*

$$0=Mu\equiv\begin{cases}M_1u\equiv u_{xx}-u_y-\lambda_1u(x,0), & (x,y)\in\Omega_1,\\ M_2u\equiv u_{xx}-u_{yy}-\lambda_2u(x+y,0), & (x,y)\in\Omega_2\end{cases}$$

тенгламани, унинг чегарасида (2.1) ва (2.2) *чегаравий шартларни, ОА тип ўзгариш чизиғида эса* (2.3) *ва* (2.4) *улаш шартларни қаноатлантирсин.*

Қўйилган 2.6-масаланинг $u(x,y)$ ечими мавжуд бўлсин. (2.3) ва (2.4) шартларни ҳисобга олиб, (2.5), (2.6) белгилашларни ва фаразларни қабул қиламиз. Бу белгилашларни ҳисобга олсак, Ω_2 соҳада $M_2u=0$ тенгламанинг (2.2) ва (2.6) шартларни қаноатлантирувчи ечими (1.13) формулага асосан ушбу кўринишда ёзилади:

$$u(x,y)=\psi\left(\frac{1+x-y}{2}\right)+\psi\left(\frac{1+x+y}{2}\right)-\psi(1)+\int_{x-y}^{1}\nu(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{\lambda_2}{4}(1-x+y)\int_{x+y}^{x-y}\tau(\xi)d\xi+\frac{\lambda_2}{2}\int_{x-y}^{1}d\eta\int_{x-y}^{\eta}\tau(\xi)d\xi. \qquad (2.47)$$

(2.47) функцияда $y=0$ деб, (2.5) белгилашни ҳисобга олиб, ҳосил бўлган тенгликни x ўзгарувчи бўйича дифференциаллаймиз:

$$\tau'(x)=\psi'\left(\frac{1+x}{2}\right)-\nu(x)-\frac{\lambda_2}{2}(1-x)\tau(x) \qquad (2.48)$$

Энди $M_1u=0$ тенгламада ва (2.1) шартларда $y\to+0$ лимитга ўтиб, (2.5) ва (2.6) белгилашларни ҳисобга олсак, (2.10) ва (2.42) муносабатларга келамиз.

(2.42) ва (2.48) тенгликлардан $\tau(x)$ функцияга нисбатан қуйидаги дифференциал тенгламага эга бўламиз:

$$\tau''(x)+\tau'(x)+\left[\left((1-x)\lambda_2/2\right)-\lambda_1\right]\tau(x)=\psi'\left(\frac{1+x}{2}\right),\ x\in(0,1). \qquad (2.49)$$

{(2.10),(2.49)} масала ечимга эга бўлиш маъносида қўйилган 2.6-масалага эквивалентдир.

2.6-теорема. *Агар* $\lambda_1 \geq (\lambda_2/2)$ *тенгсизлик бажарилса,* {(2.10),(2.49)} *масаланинг ечими биттадан ортиқ бўлмайди.*

Исбот. Теоремани исбот қилиш учун қуйидаги бир жинсли масала фақат тривиал ечимга эга эканини кўрсатиш кифоя:

$$\left.\begin{array}{l}\tau''(x)+\tau'(x)+\left[\left((1-x)\lambda_2/2\right)-\lambda_1\right]\tau(x)=0,\ \ x\in(0,1);\\ \tau(0)=0,\ \ \tau(1)=0.\end{array}\right\} \qquad (2.50)$$

Фараз қилайлик, (2.50) масала тривиалмас $\tau(x)\not\equiv 0$, $x\in[0,1]$ ечимга эга бўлсин. У ҳолда Вейерштрасс теоремасига асосан $\sup\limits_{x\in[0,1]}|\tau(x)|=|\tau(x_0)|=M>0,\ \ x\in[0,1]$ тенглик ўринли. $\tau(0)=0,\ \tau(1)=0$ бўлганлиги учун $x_0\in(0,1)$ бўлади. У ҳолда x_0 нуқтада $\tau(x)$ функция мусбат максимумга ёки манфий минимумга эришади. Агар $\tau(x_0)$ мусбат максимум (ёки манфий минимум) бўлса, $\tau''(x_0)\leq 0(\geq 0)$, $\tau'(x_0)=0$ бўлиб, 2.6-теорема шартларига асосан

$$\left\{\tau''(x)+\tau'(x)+\left[\left(\lambda_2(1-x)/2\right)-\lambda_1\right]\tau(x)\right\}\Big|_{x=x_0}<0\ (>0)$$

тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. Бу эса (2.50) шартларнинг биринчисига зиддир. Демак, $\tau(x)\neq 0$, $x\in[0,1]$ деган фаразимиз нотўғри экан. Унда $\tau(x)\equiv 0$, яъни $\tau_2(x)=\tau_1(x)$, $x\in[0,1]$. Бу тенглик $\lambda_1=\lambda_2=0$ бўлганда (2.50) тенгликлардан бирданига келиб чиқади 2.6-теорема исботланди.

{(2.10),(2.49)} масала ечимининг мавжудлигини кўрсатишда юқорида қўллаган усулдан фойдаланамиз. Бунинг учун (2.49) тенгламани $\tau''(x)=q_1(x),\ \ x\in(0,1)$ кўринишда ёзиб оламиз, бу ерда

$$q_1(x)=-\tau'(x)-\left[\left((1-x)\lambda_2/2\right)-\lambda_1\right]\tau(x)+\psi'\left(\frac{1+x}{2}\right),\ \ x\in(0,1).$$

Бу тенгламада $q_1(x)$ функцияни вақтинча маълум деб ҳисобласак, унинг (2.10) шартларни қаноатлантирувчи ечими

$$\tau(x)=\int_0^1 G(x,s)q_1(s)ds+\left[\varphi_1(0)-\varphi_0(0)\right]x+\varphi_0(0) \qquad (2.51)$$

кўринишда аниқланади[7], бу ерда $G(x,s)$— Грин функцияси.

(2.51) тенгликка $G(x,s)$ ва $q_1(x)$ функцияларнинг ифодаларини қўйиб, сўнгра $\tau'(x)$ иштирок етган интегрални бўлаклаб, $\tau(x)$ функцияга нисбатан

$$\tau(x)-\int_0^1 K_6(x,s)\tau(s)ds=f_6(x), \quad x\in[0,1] \qquad (2.52)$$

интеграл тенгламага келтирилади. Бунда

$$K_6(x,s)=\begin{cases}(x-1)\left[\left(\lambda_2 s^2+(2\lambda_1-\lambda_2)s+2\right)/2\right], & s\le x;\\ x\left[\lambda_2 s^2+2(\lambda_1-\lambda_2)s+\lambda_2-2\lambda_1+2\right]/2, & x\le s,\end{cases}$$

$$f_6(x)=\int_0^x s(x-1)\psi'\left(\frac{1+x}{2}\right)ds+\int_x^1 x(s-1)\psi'\left(\frac{1+x}{2}\right)ds+\varphi_0(0)+\left[\varphi_1(0)-\varphi_0(0)\right]x.$$

(2.52)- иккинчи тур Фредголмь интеграл тенгламаси бўлиб, ечимга эга бўлиш маносида {(2.10),(2.49)} масалага эквивалент. Унинг ечимининг ягоналиги ва мавжудлиги 2-теоремадан келиб чиқади.

(2.52) интеграл тенгламадан $\tau(x)$ функция топилгандан сўнг, уни (2.48) тенгликка қўйиб, $\nu(x)$ функцияни топамиз. Агар $\psi(x)\in C^1[1/2,1]\cap C^2(1/2,1)$, $\psi'(x)\in L[\,1/2,1]$ шартлар бажарилса, $\tau(x)\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1)$, $\nu(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$ бўлади. Шундан сўнг қўйилган 2.6-масаланинг ечими Ω_2 соҳада (2.47) формула билан, Ω_1 соҳада эса $u_{xx}-u_y=\lambda_1\tau(x)$ тенглама учун биринчи чегаравий масаланинг ечими сифатида аниқланади[8].

II боб бўйича хулоса.

Бу бобда асосан юкланган параболо-гиперболик типдаги бир неча тенгламалар учун Трикоми масаласи ўрганилган. Умумий жиҳатдан бу масалаларнинг қўйилиши бир ҳил бўлиб, тенгламанинг юкланганлик қисми ўзгаради. Шунга мос ҳолда қўйилган масала олиб келинадиган оддий дифференциал тенгламалар ҳам турлича кўринишда бўлади. Қўйилган масалаларнинг ечимларининг ягоналиги асосан экстремум принципи ва энергия интеграли усуллари билан текширилган. Ечимнинг мавжудлиги эса интеграл тенгламалар усули билан исботланган.

Бундан ташқари Трикоми масаласини гиперболик соҳада ўрганишда, $x+y=0$ ва $x-y=1$ характеристикаларда шартлар берилади, масаланинг қўйилиши бир хил бўлишига қарамасдан, ечимнинг яагоналик теоремалари шартлари турлича бўлади. Бундан эса юқоридаги характеристикалар юкланган тенгламалар учун Трикоми масаласини ўрганишда тенг кучли эмас эканлиги келиб чиқади.

III БОБ

БОШ ҚИСМИДА СПЕКТРАЛ ПАРАМЕТРЛИ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИК ОПЕРАТОР ҚАТНАШГАН ЮКЛАНГАН ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ТРИКОМИ МАСАЛАСИ

3.1-§. Биринчи масала

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup OA$ соҳада ушбу параболо-гиперболик

$$0 = Lu \equiv \begin{cases} L_1 u \equiv u_{xx} - u_y + \lambda u - k_1 u(x,0), & (x,y) \in \Omega_1, \\ L_2 u \equiv u_{xx} - u_{yy} + \lambda u - k_2 u(x+y,0), & (x,y) \in \Omega_2 \end{cases}$$

тенгламани қараймиз, бу ерда $\lambda,\, k_1,\, k_2 \in \mathbb{R}$, $OA = \{(x,y): y = 0, 0 < x < 1\}$,

$$\Omega_1 = \{(x,y):\ 0 < x < 1,\ 0 < y \le 1\}, \quad \Omega_2 = \{(x,y):\ -y < x < y+1,\ (-1/2) < y < 0\}.$$

3.1-масала. *Шундай* $u(x,y) \in \bigcap_{i=1}^{2} \left[C(\overline{\Omega}_i) \cap C_{x,y}^{2,i}(\Omega_i) \right]$ *функция топилсинки, у* Ω_1 *ва* Ω_2 *соҳаларда* $Lu = 0$ *тенгламани, унинг чегарасида*

$$u(0,y) = \varphi_0(y), \quad u(1,y) = \varphi_1(y), \qquad 0 \le y \le 1; \tag{3.1}$$

$$u(x,-x) = \psi(x), \quad 0 \le x \le (1/2) \tag{3.2}$$

чегаравий шартларни, OA *тип ўзгариш чизиғида эса қуйидаги*

$$\lim_{y \to +0} u(x,y) = \lim_{y \to -0} u(x,y), \quad 0 \le x \le 1 \tag{3.3}$$

$$\lim_{y \to +0} u_y(x,y) = \lim_{y \to -0} u_y(x,y), \quad 0 < x < 1 \tag{3.4}$$

улаш шартларни қаноатлантирсин, бу ерда $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \psi(x)$ −берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $\varphi_0(0) = \psi(0)$ келишув шарти бажарилади.

Қўйилган масаланинг бир қийматли ечилишини исботлаймиз. Фараз қилайлик, 3.1-масаланинг $u(x,y)$ ечими мавжуд бўлсин. (3.3) ва (3.4) шартларни ҳисобга олиб, қуйидаги белгилашлар ва фаразларни қабул қиламиз:

$$u(x,0)=\tau(x), \qquad x\in[0,1]; \qquad \tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1); \tag{3.5}$$

$$u_y(x,0)=\nu(x), \qquad x\in(0,1); \qquad \nu(x)\in C^1(0,1)\cap L[0,1]. \tag{3.6}$$

Бу белгилашларни эътиборга олсак, Ω_2 соҳада $L_2u=0$ тенгламанинг (3.2) ва (3.5) шартларни қаноатлантирувчи ечими биринчи бобда қўлланилган Риман усули билан топилади ва бу ечим қуйидаги кўринишда ёзилади[10]:

$$u(x,y)=\tau(\xi_0)+\psi\left(\frac{\eta_0}{2}\right)-\psi\left(\frac{\xi_0}{2}\right)+\frac{\lambda(\xi_0-\eta_0)}{2}\int\limits_0^{\xi_0}\tau(\xi)J_1\left[\sqrt{\lambda(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}\right]d\xi-$$

$$-\frac{\lambda\xi_0}{2}\int\limits_0^{\eta_0}\psi(\eta/2)\frac{J_1\left[\sqrt{\lambda(\eta_0-\eta)\xi_0}\right]}{\sqrt{\lambda(\eta_0-\eta)\xi_0}}d\eta+\frac{\lambda\eta_0}{2}\int\limits_0^{\xi_0}\psi(\eta/2)\frac{J_1\left[\sqrt{\lambda(\xi_0-\eta)\eta_0}\right]}{\sqrt{\lambda(\xi_0-\eta)\eta_0}}d\eta+$$

$$+\frac{k_2}{4}\int\limits_0^{\xi_0}\tau(\xi)d\xi\int\limits_{\xi}^{\eta_0}J_0\left[\sqrt{\lambda(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}\right]d\eta-$$

$$-\frac{k_2}{4}\int\limits_0^{\xi_0}\tau(\xi)d\xi\int\limits_{\xi}^{\xi_0}J_0\left[\sqrt{\lambda(\eta-\xi_0)(\xi-\eta_0)}\right]d\eta, \tag{3.7}$$

бу ерда $\xi_0=x+y, \;\; \eta_0=x-y$.

(3.7) функцияни y бўйича дифферециаллаб, (3.6) белгилашни эътиборга олиб, $y=0$ да лимитга ўтамиз ва қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{y\to y}u(x,y)=\nu(x)=\tau'(x)+\lambda\int\limits_0^x\tau(\xi)\frac{J_1\left[\sqrt{\lambda}(x-\xi)\right]}{\sqrt{\lambda}(x-\xi)}d\xi-$$

$$-\psi'\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^x\eta\psi'(\eta/2)\frac{J_1\left[\sqrt{\lambda x(x-\eta)}\right]}{\sqrt{\lambda x(x-\eta)}}d\eta-$$

$$-\frac{\lambda k_2}{4}\int\limits_0^x\tau(\xi)d\xi\int\limits_{\xi}^x(\xi-\eta)\frac{J_1\left[\sqrt{\lambda(x-\xi)(x-\eta)}\right]}{\sqrt{\lambda(x-\xi)(x-\eta)}}d\eta-\frac{k_2}{2}\int\limits_0^x\tau(\xi)d\xi. \tag{3.8}$$

(3.8) Ω_2 соҳадан олинган асосий функционал муносабатдир. Бу формулада қатнашган ушбу интегрални ҳисоблаймиз:

$$\frac{\lambda}{2}\int\limits_{\xi}^{x}(\xi-\eta)\frac{J_1\left[\sqrt{\lambda(x-\xi)(x-\eta)}\right]}{\sqrt{\lambda(x-\xi)(x-\eta)}}d\eta=$$

$$=\frac{\lambda}{2}\int\limits_{\xi}^{x}(\xi-\eta)\bar{J}_1\left[\sqrt{\lambda(x-\xi)(x-\eta)}\right]d\eta=2\bar{J}_1\left[\sqrt{\lambda}(x-\xi)\right]-1. \qquad (3.8^*)$$

Энди $L_1u=0$ тенгламада ва (3.1) шартларда $y\to+0$ да лимитга ўтиб, (3.5) ва (3.6) белгилашларни ҳисобга олсак, қуйидаги муносабатларга келамиз:

$$\tau''(x)+(\lambda-k_1)\tau(x)=\nu(x),\ \ x\in(0,1); \qquad (3.9)$$

$$\tau(0)=\varphi_0(0),\ \tau(1)=\varphi_1(0) \qquad (3.10)$$

$\nu(x)$ функциянинг (3.9) ифодасини (3.8) тенгликка қўйиб, (3.8*) тенгликни ҳисобга олсак, натижада ушбу интегро-дифференциал тенгламага эга бўламиз:

$$\tau''(x)-\tau'(x)+(\lambda-k_1)\tau(x)+(k_2-\lambda)\int\limits_{0}^{x}\tau(\xi)\frac{J_1\left[\sqrt{\lambda}(x-\xi)\right]}{\sqrt{\lambda}(x-\xi)}d\xi=$$

$$=\frac{\lambda}{2}\int\limits_{0}^{x}\eta\psi'(\eta/2)\frac{J_1\left[\sqrt{\lambda x(x-\eta)}\right]}{\sqrt{\lambda x(x-\eta)}}d\eta-\psi'\left(\frac{x}{2}\right), \qquad (3.11)$$

{(3.10), (3.11)} масала ечимга эга бўлиш маъносида қўйилган масалага эквивалент. Шунинг учун {(3.10), (3.11)} масалани тадқиқ этамиз.

3.1-теорема. *Агар* $k_2\le\lambda\le k_1$ *тенгсизлик бажарилса,* {(3.10), (3.11)} *масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Тескаридан фараз қилайлик, {(3.10), (3.11)} масала $\tau_1(x)$ ва $\tau_2(x)$ ечимларга эга бўлсин. У ҳолда уларнинг айирмасидан тузилган $\tau(x)=\tau_1(x)-\tau_2(x)$ функция қуйидаги бир жинсли масалани қаноатлантиради:

$$\begin{cases} \tau''(x)-\tau'(x)+(\lambda-k_1)\tau(x)+(k_2-\lambda)\int\limits_0^x \tau(\xi)\dfrac{J_1\left[\sqrt{\lambda}(x-\xi)\right]}{\sqrt{\lambda}(x-\xi)}d\xi=0,\ x\in(0,1) \\ \tau(0)=0, \quad \tau(1)=0 \end{cases}$$

(3.12)

Фараз қилайлик, (3.12) масала $\tau(x)\not\equiv 0$ ечимга эга бўлсин. (3.12) масаладаги тенгламани $\tau(x)$ га кўпайтириб, x ўзгарувчи бўйича $[0,1]$ оралиқда интеграллаймиз:

$$\int\limits_0^1 \tau''(x)\tau(x)dx-\int\limits_0^1 \tau'(x)\tau(x)dx+(\lambda-k_1)\int\limits_0^1 \left[\tau(x)\right]^2 dx+$$

$$+(k_2-\lambda)\int\limits_0^1 \tau(x)dx\int\limits_0^x \tau(\xi)\frac{J_1\left[\sqrt{\lambda}(x-\xi)\right]}{\sqrt{\lambda}(x-\xi)}d\xi=0.$$

Бундан эса қуйидаги муносабатни оламиз:

$$-\int\limits_0^1 \left[\tau'(x)\right]^2 dx+(\lambda-k_1)\int\limits_0^1 \left[\tau(x)\right]^2 dx+(k_2-\lambda)I^*=0, \tag{3.13}$$

бу ерда $I^*=\int\limits_0^1 \tau(x)dx\int\limits_0^x \tau(x)J_1\left[\sqrt{\lambda}(x-\xi)\right]d\xi$.

Ушбу интегрални ўрнамиз. Бессел функцияси учун формула ўринли:

$$J_p[z]=\frac{(z/2)^p}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(p+\dfrac{1}{2}\right)}\int\limits_0^1 \left(1-t^2\right)^{1/2}\cos\left(\sqrt{\lambda}\,t(x-\xi)\right)dt, \qquad p>-\frac{1}{2}.$$

Бу формуладан фойдаланиб I^* интегрални ёзамиз:

$$I^*=\int\limits_0^1 \tau(x)dx\int\limits_0^x \tau(x)\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(\sqrt{\lambda}\,t(x-\xi)\right)dt\right\}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}dt\int\limits_0^1 \tau(x)dx\int\limits_0^x \tau(\xi)\cos\left(\sqrt{\lambda}\,t(x-\xi)\right)d\xi.$$

Бу ифодани икки бурчак айирмасининг косинуси формуласидан ва

$$\tau(x)\int_0^x \tau(\xi)d\xi = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \tau(\xi)d\xi\right]^2$$

тенгликдан фойдаланиб,

$$I^* = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} dt \int_0^1 \tau(x)dx \left\{\int_0^x \tau(\xi)\cos\left(\sqrt{\lambda}\,t\xi\right)\cos\left(\sqrt{\lambda}\,xt\right)dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^x \tau(\xi)\sin\left(\sqrt{\lambda}\,t\xi\right)\sin\left(\sqrt{\lambda}\,xt\right)dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} dt \left\{\left[\int_0^1 \tau(\xi)\cos\left(\sqrt{\lambda}\,t\xi\right)d\xi\right]^2 + \left[\int_0^1 \tau(\xi)\sin\left(\sqrt{\lambda}\,t\xi\right)d\xi\right]^2\right\}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Демак $I^* \geq 0$.

Агар теорема шарти бажарилса, (3.13) тенгликдан $\tau'(x) = 0$ ёки $\tau(x) = const$ экани келиб чиқади. Чегаравий шартлар $\tau(0) = \tau(1) = 0$ бўлгани учун $\tau(x) \equiv 0$ бўлади. Бундан эса $\tau_1(x) \equiv \tau_2(x)$. 3.1-теорема исбот бўлди.

Энди {(3.10), (3.11)} масаланинг ечимининг мавжудлигини кўрсатишга ўтамиз. Бунинг учун (3.11) тенгламани

$$\tau''(x) = g_1(x), \quad x \in (0,1) \tag{3.14}$$

кўринишда ёзиб оламиз, бу ерда

$$g_1(x) = \tau'(x) + (k_1 - \lambda)\tau(x) + (\lambda - k_2)\int_0^x \tau(\xi)\bar{J}_1\left[\sqrt{\lambda}(x-\xi)\right]d\xi +$$

$$+ \frac{\lambda}{2}\int_0^x \eta\psi'(\eta/2)\bar{J}_1\left[\sqrt{\lambda}(x-\xi)\right]d\eta - \psi'(x/2).$$

(3.14) тенгламада $g_1(x)$ функцияни вақтинча маълум деб ҳисобласак, унинг (3.10) шартларни қаноатлантирувчи ечими

$$\tau(x) = \int_0^1 G(x,s)g_1(s)ds + \left[\varphi_1(0) - \varphi_0(0)\right]x + \varphi_0(0) \tag{3.15}$$

кўринишда аниқланади. Бу ерда $G(x,s)$ - Грин функцияси:

$$G(x,s)=\begin{cases}(s-1)x, & x\le s;\\ (x-1)s, & s\le x.\end{cases}$$

(3.15) тенгликка $G(x,s)$ ва $g_1(x)$ функцияларнинг қийматларини қўямиз:

$$\tau(x)=\int_0^x (x-1)s\Big\{\tau'(s)+(k_1-\lambda)\tau(s)+(\lambda-k_2)\int_0^s \tau(\xi)\bar{J}_1\Big[\sqrt{\lambda}(s-\xi)\Big]d\xi+$$

$$\left.+\frac{\lambda}{2}\int_0^s \eta\psi'(\eta/2)\bar{J}_1\Big[\sqrt{\lambda s(s-\eta)}\Big]d\eta-\psi'(s/2)\right\}ds+\int_x^1 x(s-1)\Big\{\tau'(s)+(k_1-\lambda)\tau(s)+$$

$$+(\lambda-k_2)\int_0^s \tau(\xi)\bar{J}_1\Big[\sqrt{\lambda}(s-\xi)\Big]d\xi+$$

$$\left.+\frac{\lambda}{2}\int_0^s \eta\psi'(\eta/2)\bar{J}_1\Big[\sqrt{\lambda s(s-\eta)}\Big]d\eta-\psi'(s/2)\right\}ds+\big[\varphi_1(0)-\varphi_0(0)\big]x+\varphi_0(0).$$

Бу интеграллардаги $\tau'(s)$ иштирок этган ҳадларни бўлаклаб интеграллаб, такрорий интегралларда интеграллаш тартибини ўзгартириб, баъзи ҳисоблашлардан сўнг, ушбу интеграл тенгламага эга бўламиз:

$$\tau(x)-\int_0^1 K_1(x,s)\tau(s)ds=f_1(x),\quad x\in[0,1], \tag{3.16}$$

бунда $$f_1(x)=\int_0^1 G(x,s)\left[\frac{\lambda}{2}\int_0^s \eta\psi\left(\frac{\eta}{2}\right)\bar{J}_1\Big[\sqrt{\lambda s(s-\eta)}\Big]d\eta-\psi'\left(\frac{s}{2}\right)\right]ds+$$

$$+\varphi_0(0)+x\big[\varphi_1(0)-\varphi_0(0)\big],$$

$$K(x,s)=\begin{cases}(x-1)\big((k_1-\lambda)s-1\big)+(\lambda-k_2)(x-1)\displaystyle\int_s^x \xi\bar{J}_1\Big[\sqrt{\lambda}(\xi-s)\Big]d\xi+ & \\ \qquad +x(\lambda-k_2)\displaystyle\int_s^1(\xi-1)\bar{J}_1\Big[\sqrt{\lambda}(\xi-s)\Big]d\xi, & x>s,\\ x(k_1-\lambda)\big((s-1)-1\big)+x(\lambda-k_2)\displaystyle\int_s^1(\xi-1)\bar{J}_1\Big[\sqrt{\lambda}(\xi-s)\Big]d\xi, & x<s.\end{cases}$$

(3.16)-иккинчи тур Фредголмь интеграл тенгламаси бўлиб, {(3.10),(3.11)} масалага эквивалент. Унинг ечимининг мавжуд ва ягоналиги,

$\{(3.10),(3.11)\}$ масаланинг ечимининг ягоналигидан, яъни 3.1-теоремадан келиб чикади.

(3.16) интеграл тенгламадан $\tau(x)$ функцияни топиб, уни (3.8) ёки (3.9) тенгликлардан биронтасига қўйиб, $\nu(x)$ функцияни топамиз. Агар $\psi(x)\in C^1[0,1/2]\cap C^2(0,1/2)$, $\psi'(x)\in L[\,0,1/2]$ шартлар бажарилса, $\tau(x)\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1)$, $\nu(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$ бўлади. Шундан сўнг қўйилган 3.1-масаланинг ечими Ω_2 соҳада (3.7) формула билан аниқланади.

Ω_1 соҳада эса $u_{xx}-u_y+\lambda u=k_1\tau(x)$ тенглама учун (3.1) ва

$$u(x,0)=\tau(x),\quad x\in[0,1]$$

шартлар билан қўйилган 1-чегаравий масаланинг ечими сифатида топилади.

Оҳирги масалани ечиш учун $u(x,y)=e^{\lambda y}w(x,y)$ алмаштириш қиламиз. Натижада $w(x,y)$ функцияга нисбатан

$$w_{xx}-w_y=k_1\tau(x),\;\;(x,y)\in\Omega_1;$$

$$w(0,y)=e^{-\lambda y}\varphi_0(y),\;\;w(1,y)=e^{-\lambda y}\varphi_1(y),\;\;0\le y\le 1;$$

$$w(x,0)=\tau(x),\;0\le x\le 1$$

масалага, яъни (1.36) тенглама учун 1-чегаравий масалага эга бўламиз. (1.45) формуладан, $u(x,y)=e^{\lambda y}w(x,y)$ тенгликка асосан Трикоми масаласининг ечими Ω_1 соҳада куйидагича топилади:

$$u(x,t)=\int_0^1 e^{\lambda y}\tau(\xi)G_1(x,t;\xi,0)d\xi+\int_0^t e^{\lambda(y-\eta)}\varphi_0(\eta)G_{1\xi}(\,x,t;\,0,\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^t e^{\lambda(y-\eta)}\varphi_1(\eta)G_{1\xi}(x,t;1,\eta)d\eta+k_1e^{\lambda y}\int_0^t d\eta\int_0^1\tau(\xi)G_1(x,t;\xi,\eta)d\xi\,.$$

3.2-§. Иккинчи масала

Энди $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup OA$ соҳада ушбу параболо-гиперболик

$$0 = Eu \equiv \begin{cases} E_1 u \equiv u_{xx} - u_y + \lambda u - k_1 u_y(x,0), & (x,y) \in \Omega_1, \\ E_2 u \equiv u_{xx} - u_{yy} + \lambda u - k_2 u_y(x+y,0), & (x,y) \in \Omega_2 \end{cases}$$

тенгламани қараймиз, бу ерда $\lambda, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$,

$$\Omega_1 = \{(x,y):\ 0 < x < 1,\ 0 < y \le 1\}, \qquad \Omega_2 = \{(x,y):\ -y < x < y+1,\ (-1/2) < y < 0\},$$

$OA = \{(x,y): y = 0, 0 < x < 1\}$ - $Eu = 0$ тенгламанинг тип ўзгариш чизиғи.

3.2-масала. *Шундай* $u(x,y) \in \bigcap_{i=1}^{2} \left[C(\bar{\Omega}_i) \cap C^{2,i}_{x,y}(\Omega_i) \right]$ *функция топилсинки, у* Ω_1 *ва* Ω_2 *соҳаларда* $Eu = 0$ *тенгламани, унинг чегарасида* (3.1) ва (3.2) *чегаравий шартларни, OA тип ўзгариш чизиғида эса қуйидаги* (3.3) *ва* (3.4) *улаш шартларни қаноатлантирсин*, бу ерда $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \psi(x)$ −берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $\varphi_0(0) = \psi(0)$ келишув шарти бажарилади.

Қўйилган масаланинг бир қийматли ечилишини исботлаймиз. Фараз қилайлик, 3.2-масаланинг $u(x,y)$ ечими мавжуд бўлсин. (3.3) ва (3.4) шартларни ҳисобга олиб, (3.5) ва (3.6) белгилашлар ва фаразларни қабул қиламиз.

Бу белгилашларни эътиборга олсак, Ω_2 соҳада $E_2 u = 0$ тенгламанинг (3.2) ва (3.5) шартларни қаноатлантирувчи ечими, биринчи бобда қўлланилган Риман усули билан топилади ва бу ечим (1.34) формуладан фойдаланган ҳолда қуйидаги кўринишда ёзилади[10]:

$$u(x,y) = \int_0^{x+y} \nu(\xi) J_0\left[\sqrt{\lambda(\xi - x - y)(\xi - x + y)}\right] d\xi +$$

$$+ \int_0^{x-y} \psi'(\eta/2) J_0\left[\sqrt{\lambda(x+y)(x-y-\eta)}\right] d\eta + \int_0^{x-y} \psi'(\eta/2) J_0\left[\sqrt{\lambda(x-y)(x+y-\eta)}\right] d\eta +$$

$$+\frac{k_2}{4}\int_0^{x+y}\nu(\xi)d\xi\int_{\xi}^{x-y}J_0\left[\sqrt{\lambda(\xi-x-y)(\eta-x+y)}\right]d\eta+$$

$$+\frac{k_2}{4}\int_0^{x+y}\nu(\xi)d\xi\int_{\xi}^{x-y}J_0\left[\sqrt{\lambda(\eta-x-y)(\xi-x+y)}\right]d\eta \qquad (3.17)$$

(3.17) функцияда $y=0$ деб ва (3.5) белгилашни эътиборга олиб, ҳосил бўлган тенгликни дифференциаллаб қуйидагига эга бўламиз:

$$\tau(x)=\int_0^x\left\{J_0\left[\sqrt{\lambda}(x-\xi)\right]+k_2(x-\xi)J_1\left[\sqrt{\lambda}(x-\xi)\right]\right\}\nu(\xi)d\xi+$$

$$+2\int_0^x\psi'(\eta/2)J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-\eta)}\right]d\eta. \qquad (3.18)$$

$E_1u=0$ тенгламада ва (3.1) шартларда $y\to+0$ да лимитга ўтиб, (3.5) ва (3.6) белгилашларни ҳисобга олсак, (3.10) ва қуйидаги муносабатга келамиз:

$$\tau''(x)-\lambda\tau(x)=(1+k_1)\nu(x),\ x\in(0,1); \qquad (3.19)$$

$\nu(x)$ функцияни вақтинча маълум деб ҳисобласак, {(3.10), (3.19)} масаланинг ечими қуйидагича ёзиш мумкин бўлади:

$$\tau(x)=(1+k_1)\int_0^1G(x,s)\nu(s)ds+\int_0^1G(x,s)\left\{\left[\varphi_1(0)-\varphi_0(0)\right]s+\varphi_0(0)\right\}ds+$$

$$+\left[\varphi_1(0)-\varphi_0(0)\right]x+\varphi_0(0), \qquad (3.20)$$

бу ерда $G(x,s)$- {(3.10), (3.19)} масалага мос бир жинсли масаланинг Грин функцияси бўлиб, у $\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\neq0$ бўлганда ушбу кўринишда:

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}(s-1)\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}, & s\geq x;\\[2mm] \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}(x-1)\sin\sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}, & s\leq x,\end{cases}$$

$\lambda=0$ бўлганда эса қуйидагича аниқланади[7]:

$$G(x,s)=\begin{cases}(s-1)x, & x\leq s;\\ (x-1)s, & s\leq x.\end{cases}$$

$\tau(x)$ нинг (3.20) ифодасини (3.18) тенгликка қўйиб, x бўйича дифференциаллаб, баъзи ҳисоблашлардан сўнг $\nu(x)$ функцияга нисбатан Фредголмь типидаги иккинчи тур интеграл тенгламага келамиз:

$$\nu(x)-\int_0^1 K_2(x,\xi)\nu(\xi)d\xi=f_2(x),\quad x\in[0,1],\qquad (3.21)$$

бунда

$$K_2(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1+k_1}{\sin\sqrt{\lambda}}\cos\sqrt{\lambda}x\sin\sqrt{\lambda}(\xi-1), & x<\xi;\\ \dfrac{1+k_1}{\sin\sqrt{\lambda}}\cos\sqrt{\lambda}(x-1)\sin\sqrt{\lambda}\xi+\sqrt{\lambda}J_1\left[\sqrt{\lambda}(x-\xi)\right]- & \\ -k_2\bar{J}_1\left[\sqrt{\lambda}(x-\xi)\right]+k_2J_2\left[\sqrt{\lambda}(x-\xi)\right], & \xi<x,\end{cases}$$

$$f_2(x)=2\psi'(x)+2\int_0^x\psi(\eta/2)\frac{\lambda(\eta-2x)}{2}\bar{J}_1\left[\sqrt{\lambda x(x-\eta)}\right]d\eta-$$

$$-\int_0^1 G_x(x,\xi)\left[\lambda\xi(\varphi_1(0)-\varphi_0(0))+\lambda\varphi_0(0)\right]d\xi-\varphi_1(0)-\varphi_0(0).$$

3.2-теорема. *Агар* $\lambda,\ k_1$ *ва* k_2 *параметрлар учун* $\int_0^1 K_2(x,\xi)d\xi<1$ *тенгсизлик бажарилса, қўйилган масаланинг ечими мавжуд ва ягона бўлади.*

Агар теорема шартлари бажарилса, (3.21) интеграл тенгламадан $\nu(x)$ функция топилади. Уни (3.20) тенгликка қўйиб $\tau(x)$ функцияни топамиз. Агар $\psi(x)\in C^1[0,1/2]\cap C^2(0,1/2)$, $\psi'(x)\in L[\,0,1/2]$ шартлар бажарилса, $\tau(x)\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1)$, $\nu(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$ бўлади. Шундан сўнг қўйилган 3.1-масаланинг ечими Ω_2 соҳада (3.17) формула билан аниқланади.

Ω_1 соҳада эса $u_{xx}-u_y+\lambda u=k_1\nu(x)$ тенглама учун (3.1) ва

$$u(x,0)=\tau(x),\quad x\in[0,1]$$

шартлар билан қўйилган 1-чегаравий масаланинг ечими сифатида топилади[8].

Оҳирги масалани ечиш учун $u(x,y)=e^{\lambda y}w(x,y)$ алмаштириш қиламиз. Натижада $w(x,y)$ функцияга нисбатан

$$w_{xx}-w_y=k_1\nu(x),\ \ (x,y)\in\Omega_1;$$

$$w(0,y)=e^{-\lambda y}\varphi_0(y),\ \ w(1,y)=e^{-\lambda y}\varphi_1(y),\ \ 0\le y\le 1;$$

$$w(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le 1$$

масалага, яъни (1.36) тенглама учун 1-чегаравий масалага эга бўламиз. (1.45) формуладан, $u(x,y)=e^{\lambda y}w(x,y)$ тенгликка асосан Трикоми масаласининг ечими Ω_1 соҳада қуйидагича топилади:

$$u(x,t)=\int_0^1 e^{\lambda y}\tau(\xi)G_1(x,t;\xi,0)d\xi+\int_0^t e^{\lambda(y-\eta)}\varphi_0(\eta)G_{1\xi}(\ x,t;\ 0,\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^t e^{\lambda(y-\eta)}\varphi_1(\eta)G_{1\xi}(x,t;1,\eta)d\eta+k_1e^{\lambda y}\int_0^t d\eta\int_0^1\nu(\xi)G_1(x,t;\xi,\eta)d\xi\,.$$

III боб бўйича хулоса.

Ушбу бобда спектрал параметрли оператор қатнашган $Lu=0$ параболо-гиперболик тенглама учун Трикоми масаласи тадқиқ этилган бўлиб, бунда Lu оператор

$$Lu \equiv \begin{cases} L_1 u \equiv u_{xx} - u_y + \lambda u - k_1 u(x,0), & (x,y) \in \Omega_1, \\ L_2 u \equiv u_{xx} - u_{yy} + \lambda u - k_2 u(x+y,0), & (x,y) \in \Omega_2 \end{cases}$$

ва

$$Lu \equiv \begin{cases} L_1 u \equiv u_{xx} - u_y + \lambda u - k_1 u_y(x,0), & (x,y) \in \Omega_1, \\ L_2 u \equiv u_{xx} - u_{yy} + \lambda u - k_2 u_y(x+y,0), & (x,y) \in \Omega_2 \end{cases}$$

кўринишга эга.

Бу масалаларда асосан қўйилган масаланинг ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ўрганилган бўлиб, қўшилган λ параметр ҳисобига яна қандай шартлар бажарилиши зарурлиги кўриб чиқилган. Яъни қўйилган масаланинг ечимининг ягоналик ва мавжудлик шартлари қандай ўзгаришларга учраши тадқиқ этилган.

Масаланинг ечимининг ягоналиги энергия интеграли усули ва интеграл тенгламалар усули орқали, ечимнинг мавжудлиги эса интеграл тенгламалар усулидан фойдаланиб исботланган.

ХУЛОСА

Магистрлик диссертацияси кириш, уч боб ва адабиётлар рўйхатидан иборат бўлиб, параболо-гиперболик типдаги юкланган дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни баён қилиш ва ўрганишга бағишланган.

Диссертациянинг кириш қисмида мавзуга оид асосий маълумотлар келтирилган. Унинг биринчи боби ёрдамчи характерга эга бўлиб, диссертатция мавзусини очиб беришда зарур бўладиган формулалар ва маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг иккинчи бобида бош қисмида модел параболо-гиперболик оператор қатнашган юкланган бир нечта тенгламалар учун Трикоми масаласи баён қилинган бўлса, учинчи боби бош қисмида спектрал параметрли параболо-гиперболик оператор қатнашган тенгламалар учун Трикоми масаласини ўрганишга бағишланган.

Ўрганилган масалаларнинг бир қийматли ечилиши исботланган. Бунда масалалар ечимининг ягоналиги экстремум принципи ва энергия интеграллари усули билан исботланган. Ечимнинг мавжудлигини кўрсатишда интеграл тенгламалар назариясидан фойдаланилган.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

I. Ўзбекистон Республикаси биринчи Президенти И.А.Каримов асарлари

1. Ислом Каримов. Ўзбекистон мустақилликка эришиш остонасида. – Тошкент: Ўзбекистон, 2011.
2. Ислом Каримов. Юксак маънавият – енгилмас куч. –Тошкент: Маънавият, 2008.

II. Асосий адабиётлар

3. Нагруженные уравнения и их применения / А. М. Нахушев; Науч.-исслед. ин-т прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН. – М.: Наука, 2012. - 232 с.
4. Gellerstedt S. Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second orde de tipe mixte. Thesis, Uppsala, 1935.
5. Ўринов А. К. Телеграф тенгламаси учун чегаравий масалалар. –Тошкент: “Университет” нашриёти, 1996 й.—47 с.
6. Джураев. Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. –Тошкент: Фан, 1979.-238с.
7. Ўринов. А. Қ. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. -Тошкент: MUMTOZ SO’Z, 2014.-164 б.
8. Ўринов. А. Қ. Параболик типдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. -Тошкент: MUMTOZ SO’Z, 2015.-196 б.
9. Салоҳиддинов М.С. Математик физика тенгламалари. – Тошкент: Ўзбекистон, 2002, 448 б.
10. К. Б. Сабитов, Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегралных уравнений. I, Дифференц. Уравнения, 1990, том 26, номер 6, 1023-1032.
11. Ўринов А. Қ. Маҳмудова Д. Қ. Тор тебраниш тенгламаси учун Дарбу ва Коши-Гурса масалаларини Риман усули билан ечиш//Математика фани ва уни ўқитишнинг долзарб муаммолари. -Андижон. 2011.-5-8 бетлар.

12. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar. – T.: Yangiyul polygraph service, 2007, 256 b.

III. Қўшимча адабиётлар.

13. A. V. Tarasenko, On some problems for a loaded parabolic-hyperbolic equation, Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser., 2013, Issue 6(107), 201-204.
14. K. U. Khubiev, A maximum principle for a loaded hyperbolic-parabolic equation, Vladikavkaz. Mat. Zh., 2016, Volume 18, Number 4, 80-85

IV. Даврий нашрлар, статистик тўпламлар ва ҳисоботлар

15. А. Қ. Ўринов., Б. Ҳ. Тоштемиров. Бир жинсли бўлмаган тор тебраниш тенгламаси учун Дарбу ва Коши-Гурса масалаларини Риман усули билан ечиш // «ИЛМ-ЗАКОВАТИМИЗ– СЕНГА, ОНА ВАТАН!» номли Республика ёш олим ва иқтидорли талабаларнинг илмий-амалий анжумани материаллари тўплами. –Фарғона-2016 йил. – 6-10 б.
16. А. Қ. Ўринов., Б. Ҳ. Тоштемиров. Юкламали параболо-гиперболик тенглама учун Трикоми масаласи // “Математиканинг долзарб муаммолари” номли илмий-амалий конференция материаллари тўплами. Андижон-2016. 106-107 бетлар.
17. Ўринов А. К., Тоштемиров Б. Ҳ. Юкланган параболо-гиперболик тенгламалар учун Трикоми масаласи. I. //ФарДУ. Илмий хабарлар, 2016, №3. 5-10 бетлар.
18. Ўринов А. К., Тоштемиров Б. Ҳ. Юкланган параболо-гиперболик тенгламалар учун Трикоми масаласи. II. //ФарДУ. Илмий хабарлар, 2016, №3. 5-10 бетлар.
19. Б. Ҳ. Тоштемиров. Юкланган параболо-гиперболик тенгламалар учун Трикоми масаласи // “Алгебра, амалий математика ва ахборот

технологиялари масалалари” номли Республика илмий-амалий конференцияси материаллари. Наманган-2016.

Интернет сайтлари

20. www.ziyonet.uz (http://library.ziyonet.uz/uzc/book/9652)
21. www.ziyonet.uz (http://referat.arxiv.uz/index.php?do=files&op=download&fileid=46345)
22. www.mathnet.ru/eng/agreement
23. www.twirpx.com/file/1764944/