ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
МАГИСТРАТУРА БЎЛИМИ

Математика (Дифференциал тенгламалар)
мутахассислиги магистранти А.О. Маманазаровнинг

СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТЛИ АРАЛАШ ПАРАБОЛИК ВА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИК ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

МАВЗУСИДАГИ МАГИСТРЛИК
ДИССЕРТАЦИЯСИ

**Илмий раҳбар: физика-математика фанлари
доктори, профессор А.К.Уринов**

Фарғона – 2016

РЕЖА:

I БОБ. АРАЛАШ ПАРАБОЛИК ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

II БОБ. ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИК ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

I БОБ
АРАЛАШ ПАРАБОЛИК ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

1.1-§. Биринчи тур тенглама учун полосада Жевре масаласи

D орқали $t=0$ ва $t=T$ тўғри чизиқлар орасидаги полосани белгилайлик, бу ерда $T=const>0$. Бу соҳада ушбу

$$0=L^{(k)}u\equiv\begin{cases} L_1^{(k)}u\equiv u_{xx}+\dfrac{k_1}{x}u_x-u_t, & (x,t)\in D_1;\\ L_2^{(k)}u\equiv u_{xx}+\dfrac{k_2}{x}u_x+u_t, & (x,t)\in D_2\end{cases}$$

тенгламани қараймиз, бу ерда k_1,$k_2\in(0,1)$–берилган сонлар.

$L_1^{(k)}u=0$ ва $L_2^{(k)}u=0$ – мос равишда D_1 ва D_2 соҳаларда тўғри ва тескари параболик тенгламалар бўлиб, уларнинг вақт йўналишлари коллениар, яъни $x=0$ тўғри чизиққа параллелдир. Шунинг учун $L^{(k)}u=0$ тенглама D соҳада биринчи тур аралаш параболик тенгламадир.

Маълумки, $L^{(0)}u=0$ тенглама учун Жевре масаласи D_1 ва D_2 соҳалар тўғри тўртбурчак бўлганда биринчи бўлиб [22,7] ишларда баён қилинган ва ўрганилган. $L^{(0)}u=0$ тенглама учун D соҳада Жевре масаласи [17,18] ишларда ўрганилган. Бу ерда биз $L^{(k)}u=0$ тенглама учун Жевре масаласини ўрганамиз.

1.1-масала. *D соҳанинг ёпигида аниқланган ва узлуксиз шундай $u(x,t)$ функция топилсинки, у D_1 ва D_2 соҳаларда мос равишда $L_1^{(k)}u=0$ ва $L_2^{(k)}u=0$ тенгламаларнинг регуляр ечими бўлиб, ушбу улаш шартини*

$$\lim_{x\to-0}(-x)^{k_2}u_x(x,t)=\lim_{x\to+0}x^{k_1}u_x(x,t),\quad 0<t<T \qquad (1.1)$$

ва қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирсин:

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\qquad 0\le x<+\infty; \qquad (1.2)$$

$$u(x,T)=\varphi_2(x), \qquad -\infty<x\le 0; \tag{1.3}$$

$$\lim_{|x|\to+\infty} u\,(x,t)=0, \qquad t\in[0,T]\,, \tag{1.4}$$

бу ерда $\varphi_1\,(x)$ *ва* $\varphi_2\,(-x)$ *- берилган функциялар бўлиб,* $[0,+\infty)$ *оралиқда узлуксиз ва* $\varphi_1\,(0)=\varphi_2\,(0)=0,$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_1\,(x)=0,$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi_2\,(x)=0$ *тенгликлар бажарилади.*

Қўйилган масала ечимининг мавжудлигини ва ягоналигини исботлаймиз. Фараз қилайлик, $u(x,t)$ – 1.1-масаланинг ечими бўлсин. Масала шартларига асосланиб,

$$u(-0,t)=u(+0,t)=\tau(t), \quad 0\le t\le T\,; \tag{1.5}$$

$$\lim_{x\to-0}(-x)^{k_2}u_x\,(x,t)=\lim_{x\to+0}x^{k_1}\,u_x(x,t)=\nu(t),\ 0<t<T \tag{1.6}$$

белгилашларни киритамиз.

Маълумки, $L_1^{(k)}u=0$ тенгламанинг D_1 соҳанинг ёпиғида аниқланган, узлуксиз ҳамда (1.2), $\lim\limits_{x\to+\infty}u\,(x,t)=0,\ 0\le t\le T$ ва $\lim\limits_{x\to+0}x^{k_1}\,u_x\,(x,t)=\nu(t),\ 0<t<T$ шартларни қаноатлантирувчи ечими қуйидаги формула билан аниқланади [10]:

$$u(x,t)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\xi^{k_1}(x\xi)^{(1-k_1)/2}}{2t}I_{(k_1-1)/2}\left(\frac{x\xi}{2t}\right)e^{-(x^2+\xi^2)/4t}\varphi_1(\xi)d\xi-$$

$$-2^{-k_1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_1}{2}\right)\int\limits_0^t\nu(\eta)(t-\eta)^{-(1+k_1)/2}e^{-x^2/4(t-\eta)}d\eta, \tag{1.7}$$

бу ерда $I_\alpha(z)$ – мавҳум аргументли Бессел функцияси [2,16]:

$$I_\alpha(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{2j+\alpha}}{j!\Gamma(j+\alpha+1)},$$

$\Gamma(z)$–Эйлернинг гамма-функцияси [1,16].

(1.7) формулада x ни нолга интилтириб, (1.5) белгилашни ҳисобга олсак, натижада

$$\tau(t)=-2^{-k_1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_1}{2}\right)\int\limits_0^t\nu(\eta)(t-\eta)^{-(1+k_1)/2}d\eta+$$

$$+\Phi_1(t),\qquad 0\leq t\leq T \tag{1.8}$$

муносабатга эга бўламиз, бу ерда

$$\Phi_1(t)=2^{-k_1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_1}{2}\right)\int\limits_0^{+\infty}\xi^{k_1}t^{-(1+k_1)/2}e^{-\xi^2/4t}\varphi_1(\xi)d\xi.$$

D_2 соҳада ва $L_2^{(k)}u=0$ тенгламада $t=T-t_0$, $x=-x_0$ алмаштириш бажариб ва (1.7) формуладан фойдаланиб, ишонч ҳосил қилиш мумкинки, $L_2^{(k)}u=0$ тенгламанинг D_2 соҳанинг ёпиғида аниқланган, узлуксиз ҳамда (1.3), $\lim\limits_{x\to-\infty}u\left(x,t\right)=0, 0\leq t\leq T$ ва $\lim\limits_{x\to-0}\left(-x\right)^{k_2}u_x\left(x,t\right)=\nu\left(t\right), 0<t<T$ шартларни қаноатлантирувчи ечими

$$u\left(x,t\right)=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\left(-\xi\right)^{k_2}\left(x\xi\right)^{(1-k_2)/2}}{2\left(T-t\right)}\times$$

$$\times I_{(k_2-1)/2}\left[\frac{x\xi}{2\left(T-t\right)}\right]e^{-(x^2+\xi^2)/4(T-t)}\varphi_2\left(\xi\right)d\xi+$$

$$+2^{-k_2}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_2}{2}\right)\int\limits_t^T\nu\left(\eta\right)\,\left(\eta-t\right)^{-(1+k_2)/2}e^{-x^2/4(\eta-t)}d\eta \tag{1.9}$$

формула билан аниқланади.

Бу формулада x ни нолга интилтириб ва (1.5) белгилашни эътиборга олиб, (1.8) тенгликка ўхшаш бўлган ушбу

$$\tau\left(t\right)=2^{-k_2}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_2}{2}\right)\int\limits_{t}^{T}\nu\left(\eta\right)\left(\eta-t\right)^{-(1+k_2)/2}d\eta+$$

$$+\Phi_2\left(t\right),\ 0\leq t\leq T \tag{1.10}$$

тенгликни топамиз, бу ерда

$$\Phi_2\left(t\right)=2^{-k_2}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_2}{2}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{0}\left(-\xi\right)^{k_2}(T-t)^{-(1+k_2)/2}e^{-\xi^2/4(T-t)}\varphi_2\left(\xi\right)d\xi.$$

(1.8) ва (1.10) тенгликлардан $\tau\left(t\right)$ номаълум функцияни чиқариб, $\nu\left(t\right)$ номаълум функцияга нисбатан

$$2^{-k_1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_1}{2}\right)\int\limits_{0}^{t}\nu(\eta)(t-\eta)^{-(1+k_1)/2}d\eta+$$

$$+2^{-k_2}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_2}{2}\right)\int\limits_{t}^{T}\nu\left(\eta\right)\left(\eta-t\right)^{-(1+k_2)/2}d\eta=$$

$$=\ \Phi_1\left(t\right)-\Phi_2\left(t\right),\qquad 0\leq t\leq T \tag{1.11}$$

интеграл тенгламага эга бўламиз.

Демак, 1.1-масала (ечимга эга бўлиш маъносида) (1.11) интеграл тенгламага эквивалент экан, яъни, агар (1.11) тенгламадан $\nu\left(t\right)$ функция бир қийматли топилса, 1.1-масаланинг ечими D_1 ва D_2 соҳаларда мос равишда (1.7) ва (1.9) формулалар билан аниқланади. Шунинг учун бундан буён (1.11) интеграл тенгламани ечиш билан шуғулланамиз.

Аввал (1.11) интеграл тенглама ечимининг ягона эканлигини исботлаймиз. Шу мақсадда унга мос бир жинсли тенгламани, яъни қуйидаги тенгламани қараймиз:

$$2^{-k_1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_1}{2}\right)\int\limits_0^t \nu(\eta)(t-\eta)^{-(1+k_1)/2}d\eta+2^{-k_2}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_2}{2}\right)\times$$

$$\times\int\limits_t^T \nu\left(\eta\right)\left(\eta-t\right)^{-(1+k_2)/2}d\eta=0,\quad t\in[0,T]. \qquad (1.12)$$

(1.12) тенгламада t ни z билан алмаштириб, сўнгра $\nu\left(z\right)$ функцияга кўпайтириб, ҳосил бўлган ифодани z ўзгарувчи бўйича $[0,T]$ оралиқда интеграллаймиз:

$$2^{-k_1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_1}{2}\right)\int\limits_0^T \nu\left(z\right)dz\int\limits_0^z \nu(\eta)(z-\eta)^{-(1+k_1)/2}d\eta+$$

$$+2^{-k_2}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_2}{2}\right)\int\limits_0^T \nu\left(z\right)dz\int\limits_z^T \nu\left(\eta\right)\left(\eta-z\right)^{-(1+k_2)/2}d\eta=0.$$

Бу тенгликда $(z-\eta)^{-(1+k_1)/2}$ ва $(\eta-z)^{-(1+k_2)/2}$ ифодаларни

$$|z-\eta|^{-\gamma}=\Gamma^{-1}\left(\gamma\right)\cos^{-1}\frac{\gamma\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty}\xi^{\gamma-1}\cos\left(|z-\eta|\,\xi\right)d\xi,\quad \gamma\in(0,1)$$

формула [1,16] орқали алмаштириб, баъзи амалларни бажаргандан сўнг, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\frac{1}{2^{k_1+1}\Gamma^2[(1+k_1)/2]\cos\left[\pi(1+k_1)/2\right]}\int\limits_0^{+\infty}\xi^{(k_1-1)/2}\times$$

$$\times\left[\left(\int\limits_0^T \nu\left(\eta\right)\cos(\eta\xi)d\eta\right)^2+\left(\int\limits_0^T \nu\left(\eta\right)\sin(\eta\xi)d\eta\right)^2\right]d\xi+$$

$$+\frac{1}{2^{k_2+1}\Gamma^2[(1+k_2)/2]\cos\left[\pi(1+k_2)/2\right]}\int\limits_0^{+\infty}\xi^{(k_2-1)/2}\times$$

$$\times\left[\left(\int\limits_0^T \nu\left(\eta\right)\cos(\eta\xi)d\eta\right)^2+\left(\int\limits_0^T \nu\left(\eta\right)\sin(\eta\xi)d\eta\right)^2\right]d\xi=0.$$

Бундан эса $\forall\xi\in(0,+\infty)$ учун

$$\int\limits_0^T \nu\left(\eta\right)\cos(\eta\xi)\,d\eta=0,\qquad \int\limits_0^T \nu\left(\eta\right)\sin(\eta\xi)\,d\eta=0 \qquad (*)$$

эканлиги келиб чиқади. Хусусан, $\xi=(\pi n/T)\,,\, n\in N$ сонлар учун ҳам $(*)$ тенгликлар ўринли бўлади. У ҳолда, агар $\nu\left(t\right)\in L_2\left[0,T\right]$ деб фараз қилсак, бу функциянинг Фурье коэффициентлари [21] нолга тенг бўлади. Демак, $\nu\left(t\right)\equiv 0,\ t\in[0,T]$, яъни бир жинсли (1.12) интеграл тенглама $L_2\left[0,T\right]$ синфда фақат тривиал ечимга эга экан. Бундан қуйидаги теорема келиб чиқади:

Теорема. *Агар (1.11) тенглама* $L_2\left[0,T\right]$ *синфда ечимга эга бўлса, у ягонадир.*

Энди (1.11) интеграл тенглама ечимининг мавжудлигини кўрсатишга ўтамиз. Шу мақсадда бу тенгламани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\alpha D_{0t}^{(k_1-1)/2}\nu\left(t\right)+\beta D_{tT}^{(k_2-1)/2}\nu\left(t\right)=\Phi_1(t)-\Phi_2\left(t\right),0\leq t\leq T,\ (1.13)$$

бу ерда D_{0t}^{γ} ва D_{tT}^{γ} лар қуйидагича аниқланиб

$$D_{0t}^{\gamma}f\left(t\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma\left(-\gamma\right)}\int\limits_{0}^{t}\left(t-z\right)^{-\gamma-1}f\left(t\right)dt, & \gamma<0,\\ f\left(t\right), & \gamma=0,\\ \dfrac{d}{dt}D_{0t}^{\gamma-1}f\left(t\right), & \gamma\in(0,1);\end{cases}$$

$$D_{tT}^{\gamma}f\left(t\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma\left(-\gamma\right)}\int\limits_{t}^{T}\left(t-z\right)^{-\gamma-1}f\left(t\right)dt, & \gamma<0,\\ f\left(t\right), & \gamma=0,\\ -\dfrac{d}{dt}D_{tT}^{\gamma-1}f\left(t\right), & \gamma\in(0,1),\end{cases}$$

$\gamma<0$ бўлганда Риман-Лиувилл маъносида каср тартибли интегрални, $\gamma>0$ бўлганда эса Лиувилл маъносидаги каср тартибли ҳосилани [11,15] ифодалайди;

$$\alpha=2^{-k_1}\Gamma\left[\left(1-k_1\right)/2\right]/\Gamma\left[\left(1+k_1\right)/2\right],$$

$$\beta=2^{-k_2}\Gamma\left[\left(1-k_2\right)/2\right]/\Gamma\left[\left(1+k_2\right)/2\right].$$

(1.13) тенгламани ўрганишда қуйидаги икки ҳолни қараймиз.

1) $k_1=k_2>0$ бўлсин. У ҳолда (1.13) тенгликка $D_{0t}^{(1-k_1)/2}$ каср тартибли дифференциал операторни татбиқ қилиб ва

$$D_{0t}^{\gamma}D_{0t}^{-\gamma}\nu(t)=\nu(t), \quad 0<\gamma<1;$$

$$D_{0t}^{\gamma}D_{tT}^{-\gamma}\nu(t)=\nu(t)\cos\gamma\pi+\frac{\sin\gamma\pi}{\pi}\int\limits_{0}^{T}\left(\frac{\eta}{t}\right)^{\gamma}\frac{\nu(\eta)}{t-\eta}d\eta, \ \ 0<\gamma<1$$

тенгликларни эътиборга олиб [15,16], $\nu\left(t\right)$ номаълум функцияга нисбатан қуйидаги кўринишдаги

$$\nu\left(t\right)+\frac{1}{\pi}tg\left(\frac{1-k_1}{4}\pi\right)\int\limits_0^T\left(\frac{\eta}{t}\right)^{(1-k_1)/2}\frac{\nu\left(\eta\right)}{\eta-t}d\eta=$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\cos^{-2}\left[\pi(1-k_1)/4\right]D_{0t}^{(1-k_1)/2}\left[\Phi_1\left(t\right)-\Phi_2\left(t\right)\right],\quad 0<t<T$$

интеграл тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламада

$$t^{(1-k_1)/2}\,\nu\left(t\right)=\rho\left(t\right),$$

$$\frac{1}{2\alpha}\cos^{-2}\left[\pi(1-k_1)/4\right]t^{(1-k_1)/2}D_{0t}^{(1-k_1)/2}\left[\Phi_1\left(t\right)-\Phi_2\left(t\right)\right]=\Phi_0(t)$$

белгилашлар киритсак, у Коши типидаги [9,11] ушбу

$$\rho\left(t\right)+\frac{1}{\pi}tg\left(\frac{1-k_1}{4}\pi\right)\int\limits_0^T\frac{\rho\left(\eta\right)}{\eta-t}d\eta=\Phi_{10}\left(t\right),\quad 0<t<T\qquad(1.14)$$

сингуляр интеграл тенгламага келади.

(1.14) интеграл тенгламанинг ўнг томонини ўрганайлик.Каср тартибли ҳосила таърифига кўра

$$\Phi_0\left(t\right)=\delta t^{(1-k_1)/2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\left(t-\eta\right)^{-(1-k_1)/2}\left[\Phi_1\left(\eta\right)-\Phi_2\left(\eta\right)\right]d\eta=$$

$$=\delta\left\{\Phi_1\left(0\right)-\Phi_2\left(0\right)+t^{(1-k_1)/2}\int\limits_0^t\frac{\left[\Phi'_1\left(\eta\right)-\Phi'_2\left(\eta\right)\right]}{\left(t-\eta\right)^{(1-k_1)/2}}d\eta\right\},\quad(1.15)$$

бу ерда $\delta=\left\{2\alpha\cos^2\left[\pi\left(1-k_1\right)/4\right]\Gamma\left[\left(1+k_1\right)/2\right]\right\}^{-1}$.

$\Phi_1\left(t\right)$ функцияни қарайлик. Бевосита ҳисоблаш кўрсатадики,

$$\Phi'_1\left(t\right)=-t^{-(3+k_1)/2}2^{-k_1}\Gamma^{-1}\left(\frac{k_1-1}{2}\right)\int\limits_0^{+\infty}\varphi_1\left(\xi\right)\xi^{k_1}e^{-\xi^2/4t}d\xi+$$

$$+t^{-(5+k_1)/2}2^{-2-k_1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_1}{2}\right)\int\limits_0^{+\infty}\varphi_1(\xi)\,\xi^{k_1+2}e^{-\xi^2/4t}d\xi.$$

$\Phi_1(t)$ ва $\Phi'_1(t)$ функциялар таркибидаги интегралларда $\xi=2s\sqrt{t}$ алмаштириш қиламиз:

$$\Phi_1(t)=2\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_1}{2}\right)\int\limits_0^{+\infty}\varphi_1\left(2\sqrt{t}s\right)s^{k_1}e^{-s^2}ds,$$

$$\Phi'_1(t)=-t^{-1}\Gamma^{-1}\left(\frac{k_1-1}{2}\right)\int\limits_0^{+\infty}\varphi_1\left(2\sqrt{t}s\right)s^{k_1}e^{-s^2}ds+$$

$$+t^{-1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_1}{2}\right)\int\limits_0^{+\infty}\varphi_1\left(2\sqrt{t}s\right)s^{k_1+2}e^{-s^2}ds.$$

$\varphi_1(0)=0$ бўлганлиги учун $\varphi_1(t)$ функцияни $\varphi_1(t)=t^{\varepsilon}\tilde{\varphi}_1(t)$ кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $\varepsilon=const>0$, $\tilde{\varphi}_1(t)\in C[0,+\infty)$ ва $|\tilde{\varphi}_1(t)|<+\infty$. $\varphi_1(t)$ нинг бу ифодасини $\Phi_1(t)$ ва $\Phi'_1(t)$ функцияларнинг охирги ифодаларига қўйиб,$\Phi_1(t)=t^{\varepsilon/2}O(1)$, яъни $\Phi_1(0)=0$ ва $\Phi'_1(t)=t^{(\varepsilon/2)-1}\omega_1(t)$ эканлигини топамиз, бу ерда $\omega_1(t)\in C[0,T]$.

$\varphi_2(0)=0$ шартга асосланиб, юқорида қўлланган усул билан кўрсатиш мумкинки,

$$|\Phi_2(0)|<+\infty,\quad \Phi'_2(t)=(T-t)^{(\varepsilon/2)-1}\omega_2(t),\quad \omega_2(t)\in C[0,T].$$

Энди $\Phi'_1(t)$ ва $\Phi'_2(t)$ функциялар учун топилган ифодаларни (1.15) тенгликка қўямиз ва ҳосил бўлган интегралларда $\eta=ts$ алмаштириш бажарамиз:

$$\Phi_0(t)=\delta\left[\Phi_1(0)-\Phi_2(0)\right]+$$

$$+\delta t^{(1-k_1)/2}\int\limits_0^t (t-\eta)^{(k_1-1)/2}\eta^{(\varepsilon/2)-1}\omega_1(\eta)\,d\eta-$$

$$-\delta t^{(1-k_1)/2}\int\limits_0^t (t-\eta)^{(k_1-1)/2}(T-\eta)^{(\varepsilon/2)-1}\omega_2(\eta)\,d\eta=$$

$$=\delta\left[\Phi_1(0)-\Phi_2(0)\right]+\delta t^{\varepsilon/2}\int\limits_0^1 s^{(\varepsilon/2)-1}(1-s)^{(k_1-1)/2}\omega_1(ts)\,ds-$$

$$-tT^{(\varepsilon/2)-1}\int\limits_0^1 (1-s)^{(k_1-1/2)}\left(1-\frac{t}{T}s\right)^{(\varepsilon/2)-1}\omega_2(ts)\,ds. \qquad (1.16)$$

Бу тенгликдаги биринчи ва иккинчи қўшилувчилар чегараланган ва узлуксиз функциялардир. Охирги интегралга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани [20] қўллаб, сўнгра Гаусс гипергеометрик функциясининг

$$\int\limits_0^1 z^{a-1}(1-z)^{c-a-1}(1-xz)^{-b}dz=$$

$$=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}F(a,b,c;x) \qquad (1.17)$$

интеграл кўринишидан [1,16] фойдаланиб,

$$\int\limits_0^1 (1-s)^{(k_1-1)/2}\left(1-\frac{t}{T}s\right)^{(\varepsilon/2)-1}\omega_2(ts)\,ds=$$

$$=\omega_2(ts_1)\int\limits_0^1 (1-s)^{(k_1-1)/2}\left(1-\frac{t}{T}s\right)^{(\varepsilon/2)-1}ds=$$

$$= \frac{2}{k_1+1}\omega_2\left(ts_1\right)F\left[1, 1-(\varepsilon/2), (k_1+3)/2; t/T\right]$$

тенгликка эга бўламиз, бу ерда $s_1 = const \in [0,1]$.

Бу ердан Гаусс функциясига

$$F\left(a,b,c;x\right) = (1-x)^{c-a-b}F\left(c-a,c-b,c;x\right) \tag{1.18}$$

автотрансформация формуласини [1,16] қўллаб,

$$\int\limits_0^1 (1-s)^{(k_1-1)/2}\left(1-\frac{t}{T}s\right)^{(\varepsilon/2)-1}\omega_2\left(ts\right)ds = [2/(k_1+1)]\omega_2\left(ts_1\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{t}{T}\right)^{(k_1+\varepsilon-1)/2}F\left[(k_1+1)/2, \left(k_1+1+\varepsilon\right)/2, (k_1+3)/2; t/T\right] =$$

$$= (T-t)^{(k_1+\varepsilon-1)/2}O\left(1\right)$$

эканлигини топамиз. Буни эътиборга олсак, (1.16) тенгликдан $\Phi_0\left(t\right) = (T-t)^{(k_1+\varepsilon-1)/2}O\left(1\right)$ тенглик келиб чиқади.

(1.14) сингуляр интеграл тенглама ўнг томонининг хоссаларини эътиборга олиб, унинг ечимини $h\left(0\right)$ синфдан, яъни $t = 0$ да чегараланган ва $t = T$ да чегараланмаган функциялар синфидан қидирамиз. Бу синфда тенгламанинг индекси нолга тенг. Шунинг учун $h\left(0\right)$ синфда унинг ечими мавжуд ва ягона бўлиб, бу ечим

$$\rho\left(t\right) = \cos^2\left(\frac{1-k_1}{4}\pi\right)\Phi_0\left(t\right) -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sin\left(\frac{1-k_1}{2}\pi\right)\int\limits_0^T\left[\frac{t\left(T-\eta\right)}{\left(T-t\right)\eta}\right]^{(1-k_1)/4}\frac{\Phi_0\left(\eta\right)d\eta}{\eta-t} \tag{1.19}$$

формула билан аниқланади [9,12].

$\rho\left(t\right)=t^{(1-k_1)/2}\,\nu\left(t\right)$ тенгликни эътиборга олсак, $\nu\left(t\right)$ функция (1.19) тенгликдан бир қийматли топилади:

$$\nu\left(t\right)=t^{(k_1-1)/2}\left\{\cos^2\left(\frac{1-k_1}{4}\pi\right)\Phi_0\left(t\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi}\sin\left(\frac{1-k_1}{2}\pi\right)\int\limits_0^T\left[\frac{t\left(T-\eta\right)}{\left(T-t\right)\eta}\right]^{(1-k_1)/4}\frac{\Phi_0\left(\eta\right)d\eta}{\eta-t}\right\}.$$

$\Phi_0(t)$ функция ва сингуляр интеграллар хоссаларига асосан охирги тенглик билан аниқланган $\nu(t)$ функция $C\left(0,T\right)\cap L_2\left[0,T\right]$ синфга қарашли бўлади. 1.1-масала $k_1=k_2$ ҳол учун ҳал бўлди.

2) $k_1>k_2$ бўлсин. Бу ҳолда (1.13) тенгламага $D_{0t}^{(1-k_1)/2}$ каср тартибли дифференциал операторни татбиқ қилиб ва $D_{0t}^{\gamma}D_{0t}^{-\gamma}f\left(t\right)=f\left(t\right),\forall\gamma\in\left(0,1\right)$ тенгликни эътиборга олиб,

$$\nu\left(t\right)+\left(\beta/\alpha\right)D_{0t}^{(1-k_1)/2}D_{tT}^{(k_2-1)/2}\nu\left(t\right)=\Phi_3\left(t\right),\quad t\in\left(0,T\right)\qquad(1.20)$$

тенгламага эга бўламиз, бу ерда

$$\Phi_3\left(t\right)=\alpha^{-1}D_{0t}^{(1-k_1)/2}\left[\Phi_1\left(t\right)-\Phi_2\left(t\right)\right].$$

(1.20) тенгламанинг чап томонидаги иккинчи ҳадни соддалаштирамиз. $D_{0t}^{(1-k_1)/2}$ ва $D_{tT}^{(k_2-1)/2}$ операторларнинг ёйилмасига асосан

$$J=D_{0t}^{(1-k_1)}D_{tT}^{(k_2-1)/2}=$$

$$=c_1\frac{d}{dt}\int\limits_o^t\left(t-s\right)^{\frac{k_1-1}{2}}ds\int\limits_s^T\left(\eta-s\right)^{-\frac{1+k_2}{2}}\nu\left(\eta\right)d\eta,$$

бу ерда $c_1=\Gamma^{-1}\left[(1-k_2)/2\right]\Gamma^{-1}\left[(1+k_1)/2\right]$.

Такрорий интегралда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз:

$$J=c_1\frac{d}{dt}\left\{\int\limits_0^t\nu\left(\eta\right)d\eta\int\limits_0^\eta\left(t-s\right)^{(k_1-1)/2}(\eta-s)^{-(k_2+1)/2}ds+\right.$$

$$+\int\limits_{t}^{T}\nu\left(\eta\right)d\eta\int\limits_{0}^{t}\left(t-s\right)^{(k_1-1)/2}(\eta-s)^{-(k_2+1)/2}ds\Bigg\}.$$

Биринчи ички интегралда $s=\eta z$, иккинчи ички интегралда эса $s=\eta t$ алмаштириш қиламиз:

$$J=c_1\frac{d}{dt}\left\{\int\limits_{0}^{t}\nu\left(\eta\right)\left[t^{(k_1-1)/2}\eta^{(1-k_2)/2}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{0}^{1}\left(1-z\right)^{-(1+k_2)/2}\left(1-\frac{\eta}{t}z\right)^{(k_1-1)/2}dz\right]d\eta+$$

$$+\int\limits_{t}^{T}\nu\left(\eta\right)\left[t^{(k_1+1)/2}\eta^{-(1+k_2)/2}\times\right.$$

$$\left.\left.\times\int\limits_{0}^{1}\left(1-z\right)^{(k_1-1)/2}\left(1-\frac{t}{\eta}z\right)^{-(1+k_2)/2}dz\right]d\eta\right\}.$$

Бу ердаги ички интегралларга Гausснинг гипергеометрик функцияси учун ўринли бўлган (1.17) формулани қўллаймиз:

$$J=c_1\frac{d}{dt}\left\{\frac{2}{1-k_2}\int\limits_{0}^{t}\nu\left(\eta\right)\eta^{(1-k_2)/2}t^{(k_1-1)/2}\times\right.$$

$$\times F\left[\left(1-k_1\right)/2,1,\left(3-k_2\right)/2;\eta/t\right]d\eta+$$

$$+\frac{2}{k_1+1}\int\limits_{t}^{T}\nu\left(\eta\right)\eta^{-(k_2+1)/2}t^{(k_1+1)/2}\times$$

$$\left.\times F\left[\left(1+k_2\right)/2,1,\left(k_1+3\right)/2;t/\eta\right]d\eta\right\}. \qquad (1.21)$$

(1.21) тенгликда дифференциаллаш амалини

$$\frac{d}{dx}\left[x^{a}F\left(a,b,c;x\right)\right]=ax^{a-1}F\left(a+1,b,c;x\right),$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{c-1}F\left(a,b,c;x\right)\right]=\left(c-1\right)x^{c-2}F\left(a,b,c-1;x\right)$$

формулалар [1,16] ёрдамида амалга ошириб, сўнгра интеграл ташқарисидаги ифодаларга

$$F\left(a,b,c;1\right)=\frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(c-a-b\right)}{\Gamma\left(c-a\right)\Gamma\left(c-b\right)},\;c-a-b>0$$

формулани [1,16] қўллаб,

$$J=-c_1\int\limits_0^t\nu\left(\eta\right)\eta^{(1-k_2)/2}t^{(k_1-3)/2}F\left(\frac{3-k_1}{2},1,\frac{3-k_2}{2};\frac{\eta}{t}\right)d\eta+$$

$$+c_1\int\limits_t^T\nu\left(\eta\right)\eta^{-(1+k_2)/2}t^{(k_1-1)/2}F\left(\frac{1+k_2}{2},1,\frac{1+k_1}{2};\frac{t}{\eta}\right)d\eta$$

тенгликка эга бўламиз. Бу ердаги Гаусс функцияларига (1.18) автотрансформация формуласини қўллаб, J нинг қуйидаги кўринишини топамиз:

$$J=\int\limits_0^t\nu\left(\eta\right)K_1\left(t,\eta\right)d\eta+\int\limits_t^T\nu\left(\eta\right)K_2\left(t,\eta\right)d\eta,$$

бу ерда

$$K_1\left(t,\eta\right)=c_1\left(\frac{\eta}{t}\right)^{(1-k_2)/2}\left(t-\eta\right)^{-1+(k_1-k_2)/2}\times$$

$$\times F\left(\frac{k_1-k_2}{2},\frac{1-k_2}{2},\frac{3-k_2}{2};\frac{\eta}{t}\right),$$

$$K_2(t,\eta)=c_1\left(\frac{\eta}{t}\right)^{(1-k_1)/2}(\eta-t)^{-1+(k_1-k_2)/2}\times$$
$$\times F\left(\frac{k_1-k_2}{2},\frac{k_1-1}{2},\frac{1+k_1}{2};\frac{t}{\eta}\right).$$

J нинг бу ифодасини (1.20) тенгликка қўйсак, $\nu(t)$ номаълум функцияга нисбатан қуйидаги кўринишдаги интеграл тенгламага келамиз:

$$\nu(t)+\int\limits_0^T K(t,\eta)\,\nu(\eta)\,d\eta=\Phi_3(t)\quad 0<t<T,$$

бу ерда

$$K(t,\eta)=\begin{cases}-(\beta/\alpha)\,K_1(t,\eta)\,, t>\eta;\\ -(\beta/\alpha)\,K_2(t,\eta)\,, t<\eta.\end{cases}$$

Бу тенгламада $\rho(t)=t^{(1-k_1)/2}\nu(t)$, $\Phi_4(t)=t^{(1-k_1)/2}\Phi_3(t)$ белгилашлар киритсак, $\rho(t)$ функцияга нисбатан ушбу иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламасига эга бўламиз:

$$\rho(t)+\int\limits_0^T K_0(t,\eta)\,\rho(\eta)\,d\eta=\Phi_4(t)\,,\qquad 0<t<T, \tag{1.22}$$

бу ерда

$$K_0(t,\eta)=\begin{cases}K_3(t,\eta)\,, t>\eta;\\ K_4(t,\eta)\,, t<\eta,\end{cases}$$

$$K_3(t,\eta)=-(\beta/\alpha)\,\Gamma^{-1}\left[(1+k_1)/2\right]\Gamma^{-1}\left[(1-k_2)/2\right](\eta/t)^{(k_1-k_2)/2}\times$$
$$\times(t-\eta)^{-1+(k_1-k_2)/2}F\left(\frac{k_1-k_2}{2},\frac{1-k_2}{2},\frac{3-k_2}{2};\frac{\eta}{t}\right),$$

$$K_4(t,\eta)=(\beta/\alpha)\,\Gamma^{-1}\left[(1+k_1)/2\right]\Gamma^{-1}\left[(1-k_2)/2\right]\times$$
$$\times(\eta-t)^{-1+(k_1-k_2)/2}F\left(\frac{k_1-k_2}{2},\frac{k_1-1}{2},\frac{k_1+1}{2};\frac{t}{\eta}\right).$$

$k_1 > k_2$ эканлигини эътиборга олиб ва $F\left(a,b,c;x\right)$ функциянинг хоссалридан фойдаланиб, ишонч ҳосил қилиш қийин эмаски, $K_0\left(t,\eta\right)=\left|t-\eta\right|^{-1+(k_1-k_2)/2}O\left(1\right)$, қолаверса, $\varphi_1\left(0\right)=\varphi_2\left(0\right)=0$ тенгликлардан фойдаланиб, юқоридагидек исботлаш мумкинки, $\Phi_4\left(t\right)\in C\left[0,T\right)$, $\Phi_4\left(t\right)=\left(T-t\right)^{(\varepsilon+k_1-1)/2}O\left(1\right).$

(1.22) интеграл тенглама (1.11) [(1.13)] интеграл тенгламадан келтириб чиқарилганлиги ва унга мос (1.12) бир жинсли тенглама фақат тривиал ечимга эга эканлиги учун, (1.22) интеграл тенгламага мос бир жинсли интеграл тенглама ҳам фақат тривиал ечимга эга бўлади. У ҳолда Фредгольм альтернативасига [12] кўра (1.22) бир жинслимас интеграл тенгламанинг ечими мавжуд ва ягона бўлади.

$\rho(t)$ функция (1.22) тенгламадан топилгандан сўнг, $\nu(t)$ функция $\rho(t)=t^{(1-k_1)/2}\nu(t)$ тенгликдан бир қийматли топилади ва бу функция $C(0,T)\cap L_2[0,T]$ синфга тегишли бўлади.

Шу билан 1.1- масала тўла ҳал бўлди.

1.2-§. Иккинчи тур тенглама учун ярим полосада нолокал масала

$Q=\{(x,t):-l\le x,\,0<t<T\}$ ярим полосада қуйидаги

$$0=\tilde{L}u\equiv\begin{cases}L_1^{(k)}u\equiv u_{xx}+\dfrac{k}{x}u_x-u_t, & (x,t)\in Q_1=Q\cap\left(x>0\right),\\ L_2u\equiv u_{tt}+u_x, & (x,t)\in Q_2=Q\cap\left(x<0\right)\end{cases}$$

тенгламани қарайлик, бу ерда $T,\ l,\ k\in R$ бўлиб, $T>0,\ l>0,\ k\in(-1,1).$

$L_1^{(k)}u=0$ ва $L_2u=0$ тенгламалар мос равишда Q_1 ва Q_2 соҳаларда параболик типга тегишли бўлиб, уларнинг вақт йўналишлари перпендикулярдир. Шунинг учун $\tilde{L}u=0$ тенглама Q соҳада иккинчи тур аралаш параболик тенгламадир. $\tilde{L}u=0$ тенглама учун Q соҳада ушбу масалани ўрганамиз.

1.2-масала. *Q соҳанинг ёпигида аниқланган ва узлуксиз шундай $u\left(x,t\right)$ функция топилсинки, у Q_1 ва Q_2 соҳаларда мос ра-*

вишда $L_1^{(k)}u = 0$ *ва* $L_2u = 0$ *тенгламаларнинг регуляр ечими бўлиб, ушбу улаш шартини*

$$\lim_{x\to -0} u_x(x,t) = \lim_{x\to +0} x^k u_x(x,t), \qquad 0 < t < T \tag{1.23}$$

ҳамда (1.2) ва қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирсин:

$$u(x,T) = u(x,h) + \varphi_2(x), \qquad -l \le x \le 0; \tag{1.24}$$

$$u_t(x,0) = \varphi_3(x), \qquad -l \le x \le 0; \tag{1.25}$$

$$\lim_{x\to +\infty} u(x,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{1.26}$$

бу ерда $\varphi_j(x)$*,* $j = \overline{1,3}$*–ўзининг аниқланиш соҳасида узлуксиз бўлган берилган функциялар бўлиб,* $\varphi_1(0) = 0$*,* $\lim\limits_{x\to +\infty} \varphi_1(x) = 0$*;* h*–берилган ҳақиқий сон бўлиб,* $h \in [0,T)$*.*

Агар $h = 0$ бўлса, (1.24)- даврийлик шарти, $h \in (0,T)$ бўлганда эса Бицадзе-Самарский шарти бўлади.

Масала ечимининг мавжудлигини ва ягоналигини ўрганамиз. Фараз қилайлик, $u(x,t)$-қўйилган масаланинг ечими бўлсин. Масала шартларига асосланиб, (1.5) ва

$$\lim_{x\to +0} x^k u_x(x,t) = \nu(t), \quad 0 < t < T \tag{1.27}$$

белгилашларни қабул қилайлик.

Маълумки, $L_1^{(k)}u = 0$ тенгламанинг Q_1 соҳанинг ёпиғида аниқланган ва узлуксиз ҳамда (1.2), (1.26) ва (1.27) шартларни қаноатлантирувчи ечими қуйидаги кўринишда аниқланади [10]:

$$u(x,t) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\xi^k (x\xi)^{(1-k)/2}}{2t} I_{(k-1)/2}\left(\frac{x\xi}{2t}\right) e^{-(x^2+\xi^2)/4t} \varphi_1(\xi)\, d\xi -$$

$$-2^{-k}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right) \int\limits_0^t \nu(\eta)(t-\eta)^{-(1+k)/2} e^{-x^2/4(t-\eta)} d\eta. \tag{1.28}$$

(1.28) формулада $x \to +0$ да лимитга ўтиб ва (1.5) белгилашни эътиборга олиб, номаълум $\tau(t)$ ва $\nu(t)$ функциялар орасидаги қуйидаги функционал муносабатга эга бўламиз:

$$\tau(t) = \Phi_5(t) - 2^{-k}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)\int\limits_0^t \nu(\eta)(t-\eta)^{-(1+k)/2}d\eta, \qquad (*)$$

бу ерда

$$\Phi_5(t) = 2^{-k}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)t^{-(1+k)/2}\int\limits_0^{+\infty}\xi^k e^{-\xi^2/(4t)}\varphi_1(\xi)\,d\xi.$$

Агар $\tau(t)$ функцияни вақтинча маълум функция деб ҳисобласак, охирги тенглик -$\nu(t)$ номаълум функцияга нисбатан Абел интеграл тенгламаси бўлади. $\tau(0) = \varphi_1(0) = 0$ тенгликдан фойдаланиб, худди $\Phi_1(t)$ функция каби кўрсатиш мумкинки, $\Phi_5(0) = 0$. Демак, $(*)$– Абел интеграл тенгламаси учун ечилиш шарти бажарилади. У ҳолда, бундай тенгламанинг ечим формуласидан [12] фойдалансак, $\nu(t)$ функция қуйидаги кўринишда бир қийматли топилади:

$$\nu(t) = 2^k\Gamma^{-1}\left(\frac{1-k}{2}\right)\frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-\eta)^{\frac{k-1}{2}}\left[\Phi_5(\eta) - \tau(\eta)\right]d\eta. \qquad (1.29)$$

Энди масала шартларини ва (1.5), (1.27) белгилашларни эътиборга олиб, $L_2 u = 0$ тенглама ва (1.2), (1.24) шартларда x ни нолга интилтирамиз:

$$\tau''(t) + \lim_{x\to -0} u_x(x,t) = 0, \qquad 0 < t < T; \qquad (1.30)$$

$$\tau(0) = 0, \qquad \tau(T) = \tau(h) + \varphi_2(0). \qquad (1.31)$$

(1.23) улаш шартини, (1.27) белгилашни ва (1.29) тенгликни эътиборга олсак, (1.30) тенгликдан

$$\tau''\left(t\right)-2^{k}\Gamma^{-1}\left(\frac{1-k}{2}\right)\frac{d}{dt}\int\limits_{0}^{t}\left(t-\eta\right)^{(k-1)/2}\tau\left(\eta\right)d\eta=$$

$$=\Phi_{6}\left(t\right),\qquad 0<t<T \tag{1.32}$$

тенгламага эга бўламиз, бу ерда

$$\Phi_{6}\left(t\right)=-2^{k}\Gamma^{-1}\left(\frac{1-k}{2}\right)\frac{d}{dt}\int\limits_{0}^{t}\left(t-\eta\right)^{(k-1)/2}\Phi_{5}\left(\eta\right)d\eta.$$

Агар (1.32) тенгламанинг (1.31) шартларни қаноатлантирувчи $\tau\left(t\right)$ ечимини топсак, $\nu\left(t\right)$ функция (1.29) формула билан топилади. Унда қўйилган масаланинг ечими Q_1 соҳада (1.28) формула билан аниқланади. Шунинг учун $\{(1.31),(1.32)\}$ масалани ечиш билан шуғулланамиз.

Шу мақсадда (1.32) формулада t ни z билан алмаштириб, z бўйича $[0,t]$ оралиқда кетма-кет икки марта интеграллаймиз. Натижада, $\tau'\left(0\right)=C$ белгилаш киритиб ва $\tau\left(0\right)=0$ эканлигини эътиборга олиб, $\tau(t)$ номаълум функцияга нисбатан ушбу

$$\tau\left(t\right)-\frac{2^{k+1}}{k+1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1-k}{2}\right)\int\limits_{0}^{t}\tau\left(\eta\right)\left(t-\eta\right)^{(1+k)/2}d\eta=$$

$$=Ct+\int\limits_{0}^{t}\Phi_{6}\left(\eta\right)\left(t-\eta\right)d\eta,\quad 0\leq t\leq T \tag{1.33}$$

интеграл тенгламага эга бўламиз.

(1.33)- иккинчи тур Вольтерра интеграл тенгламаси бўлиб, унинг ягона ечими ушбу формула билан аниқланади [14]:

$$\tau\left(t\right)=\frac{d}{dt}\int\limits_{0}^{t}E_{(k+3)/2,1}\left[\lambda(t-\eta)^{\frac{k+3}{2}}\right]\left[C\eta+\Phi_{7}\left(\eta\right)\right]d\eta, \qquad (1.34)$$

бу ерда $E_{\alpha,\beta}\left(z\right)$-Миттаг-Леффлер функцияси [14];

$$\lambda=2^{k}\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1-k}{2}\right),\quad \Phi_{7}\left(t\right)=\int\limits_{0}^{t}\Phi_{6}\left(\eta\right)\left(t-\eta\right)d\eta.$$

(1.34) формулада дифференциаллаш амалини бажариб, сўнгра

$$\frac{d}{dt}E_{(k+3)/2,1}\left[\lambda(t-\eta)^{(k+3)/2}\right]=-\frac{d}{d\eta}E_{(k+3)/2,1}\left[\lambda(t-\eta)^{(k+3)/2}\right]$$

формуладан фойдаланиб ва бўлаклаб интеграллаш қоидасини қўллаб ҳамда

$$\Phi_{7}\left(0\right)=0,\quad E_{(k+3)/2,1}\left(0\right)=1,$$

$$\int\limits_{0}^{t}E_{(k+3)/2,1}\left[\lambda(t-\eta)^{(k+3)/2}\right]d\eta=tE_{(k+3)/2,2}\left[\lambda t^{(k+3)/2}\right]$$

тенгликларни эътиборга олиб, $\tau\left(t\right)$ ни қуйидагича топамиз:

$$\tau\left(t\right)=CtE_{(k+3)/2,2}\left[\lambda t^{(k+3)/2}\right]+$$

$$+\int\limits_{0}^{t}E_{(k+3)/2,1}\left[\lambda(t-\eta)^{(k+3)/2}\right]\Phi'_{7}\left(\eta\right)d\eta,\ 0\leq t\leq T. \qquad (1.35)$$

Бу функцияни текширамиз. $\Phi_{6}\left(t\right)$ ва $\Phi_{7}\left(t\right)$ функциялар кўринишидан фойдаланиб, кўрсатиш мумкинки,

$$\Phi'_{7}\left(t\right)=-2^{-k}\Gamma^{-1}\left(\frac{1-k}{2}\right)\int\limits_{0}^{t}(t-\eta)^{(1-k)/2}\Phi_{5}\left(\eta\right)d\eta.$$

$\Phi_5(t)$ функция $\Phi_1(t)$ функцияга ўхшаш бўлгани учун, $\Phi_5(t) = t^{\varepsilon/2}O(1)$, бу ерда $\varepsilon > 0$. Буни эътиборга олсак, $\Phi'_7(t)$ функциянинг охирги кўринишидан $\Phi'_7(t) = t^{(\varepsilon+k+1)/2}O(1)$ эканлиги келиб чиқади. У ҳолда, (1.35) тенгликдан осонгина келиб чиқадики, $\tau(t) \in C^1[0,T] \cap C^2(0,T)$ бўлади.

(1.35) формула ёрдамида $\tau(T)$ ва $\tau(l)$ ларни ҳисоблаб, сўнгра уларни (1.31) шартга қўйиб, C номаълумни бир қийматли аниқлаймиз:

$$C = \varphi_2(0)M + M\int\limits_0^l E_{(k+3)/2,1}\left[\lambda(l-\eta)^{(k+3)/2}\right]\Phi'_7(\eta)\,d\eta -$$

$$- M\int\limits_0^T E_{(k+3)/2,1}\left[\lambda(T-\eta)^{(k+3)/2}\right]\Phi'_7(\eta)\,d\eta,$$

бу ерда

$$M = \left\{TE_{(k+3)/2,2}\left[\lambda T^{(k+3)/2}\right] - lE_{(k+3)/2,2}\left[\lambda l^{(k+3)/2}\right]\right\}^{-1} \neq 0.$$

C номаълумнинг топилган бу қийматини (1.35) тенгликка қўйсак, {(1.31),(1.32)} масаланинг ечимини бир қийматли топамиз. Шундан сўнг қўйилган масаланинг ечими Q_1 соҳада (1.28) формула билан аниқланади.

Энди қўйилган масала ечиминингQ_2 соҳада мавжудлигини ва ягоналигини исботлаймиз. Қуйидагича белгилаш киритайлик:

$$u(x,T) = \varphi(x), \quad -l \leq x \leq 0. \tag{1.36}$$

У ҳолда, қўйилган 1.2-масаланинг $u(x,t)$ ечимини Q_2 соҳада $L_2u = 0$ тенглама учун (1.25), (1.36) ва $u(0,t) = \tau(t)$, $t \in [0,T]$ шартлар билан қўйилган аралаш чегаравий масаланинг ечими сифатида

$$u(x,t) = \int\limits_0^T \tau(\eta)\,G_3(x,t;0,\eta)\,d\eta -$$

$$-\int\limits_{x}^{0}\varphi_3(\xi)\,G_3(x,t;\xi,0)\,d\xi-\int\limits_{x}^{0}\varphi(\xi)\,G_3(x,t;\xi,T)\,d\xi \qquad (1.37)$$

кўринишда ёзишимиз мумкин [4], бу ерда

$$G_3(x,t;\xi,\eta)=\left[2\sqrt{\pi(\xi-x)}\right]^{-1}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(t-\eta-4nT)^2}{4(\xi-x)}\right]+\exp\left[-\frac{(t+\eta-4nT)^2}{4(\xi-x)}\right]-\right.$$

$$\left.-\exp\left[-\frac{(t-\eta-2T-4nT)^2}{4(\xi-x)}\right]-\exp\left[-\frac{(t+\eta-2T-4nT)^2}{4(\xi-x)}\right]\right\}.$$

(1.37) формулада $t=h$ деб $u(x,h)$ ни топамиз:

$$u(x,h)=\int\limits_{0}^{T}\tau(\eta)\,G_3(x,h;0,\eta)\,d\eta-$$

$$-\int\limits_{x}^{0}\varphi_3(\xi)\,G_3(x,h;\xi,0)\,d\xi-\int\limits_{x}^{0}\varphi(\xi)\,G_{3\eta}(x,h;\xi,T)\,d\xi.$$

Буни (1.25) шартга қўйиб ва (1.36) белгилашни ҳисобга олиб,

$$\varphi(x)+\int\limits_{x}^{0}\varphi(\xi)\,G_{3\eta}(x,h;\xi,T)\,d\xi=\Phi_8(x)\,,\quad -l\le x\le 0 \quad (1.38)$$

тенглкка эга бўламиз, бу ерда

$$\Phi_8(x)=\int\limits_{0}^{T}\tau(\eta)\,G_3(x,h;0,\eta)\,d\eta-\int\limits_{x}^{0}\varphi_3(\xi)\,G_3(x,h;\xi,0)\,d\xi+\varphi_3(x)\,.$$

(1.38)- $\varphi\left(x\right)$ функцияга нисбатан иккинчи тур Вольтерра интеграл тенгламаси бўлиб, унинг ядроси $G_{3\eta}\left(x,h;\xi,T\right)$ $\left\{\left(x,t\right):-l\leq x\leq 0,0\leq t\leq T,x\neq\xi\right\}$ соҳада узлуксиз ва $\lim\limits_{\xi\to x}G_{3\eta}\left(x,;\xi,T\right)=0$, ўнг томони $\Phi_8\left(x\right)$ эса $\left[-l,0\right]$ да узлуксиз. Шунинг учун (1.38) интеграл тенгламанинг ечими $C\left[-l,0\right]$ синфда мавжуд ва ягона [12].

$\varphi\left(x\right)$ функция (1.38) интеграл тенгламадан топилгандан сўнг 1.2-масаланинг ечими Q_2 соҳада (1.37) формула билан аниқланади.

1.2-масала тўла ҳал бўлди.

1.3-§. Иккинчи тур тенглама учун ярим полосада умумий улаш шартили Трикоми масаласи

Яна 1.1-§ да баён қилинган Q ярим полосада $\tilde{L}u=0$ тенгламани қараймиз ва қуйидаги масалани ўрганамиз:

1.3-масала. *Q соҳанинг ёпигида аниқланган ва узлуксиз шундай $u\left(x,t\right)$ функция топилсинки, у Q_1 ва Q_2 соҳаларда мос равишда $L_1^{(k)}u=0$ ва $L_2u=0$ тенгламаларнинг регуляр ечими бўлиб, (1.2),(1.26) ва*

$$u\left(x,0\right)=\varphi_2\left(x\right),\quad u\left(x,T\right)=\varphi_3\left(x\right),\qquad -l\leq x\leq 0,\qquad (1.39)$$

$$\lim_{x\to-0}u_x(x,t)=a_1\left(t\right)\lim_{x\to+0}u_x(x,t)+a_2\left(t\right)D_{0t}^{\alpha}\left[b_2\left(t\right)u\left(0,t\right)\right]+$$

$$+a_3\left(t\right)D_{tT}^{\beta}\left[b_3\left(t\right)u\left(0,t\right)\right]+b_1\left(t\right),\ 0<t<T\qquad (1.40)$$

шартларни қаноатланирсин, бу ерда $a_j\left(t\right),\ b_j\left(t\right),\ \varphi_j(x)\quad (j=\overline{1,3})$–берилган функциялар бўлиб, $a_j\left(t\right)$, $b_j\left(t\right)\in C\left[0,T\right]$, $j=\overline{1,3}$, $\varphi_2\left(x\right),\ \varphi_3\left(x\right)\in C[-l,0]$ ва $a_1\left(t\right)\neq 0,\quad t\in\left[0,T\right]$; $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$ ва $\varphi_1\left(x\right)$ функция $\left[0,+\infty\right)$ оралиқда узлуксиз ва чегараланган, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_1\left(x\right)=0$; α ва β лар эса $\left(0,1\right)$ оралиққа қарашли берилган ҳақиқий сонлар; D_{0t}^{α} ва D_{tT}^{β} - каср тартибли дифференциал операторлар [15, 16].

$a_1(t) \equiv 1,\ a_2(t) \equiv a_3(t) \equiv 0,\ t \in [0,T]$ бўлганда,(1.40) улаш шартидан (1.23) улаш шарти келиб чиқади.

Қўйилган масала ечимининг мавжудлигини ва ягоналигини исботлаймиз. Фараз қилайлик, $u(x,t)$- 1.3-масаланинг ечими бўлсин. Масала шартларига асосланиб, (1.5) ва (1.27) белгилашларни киритайлик.

Масаланинг ечимини Q_1 соҳада (1.28) кўринишда қидирамиз. Бу формуладан фойдаланиб ва (1.5) белгилашни эътиборга олиб, $\tau(t)$ ва $\nu(t)$ функциялар орасидаги Q_1 соҳадан олинган (1.29) муносабатга эга бўламиз.

Энди масала шартларини ва (1.5) белгилашни ҳисобга олиб, $L_2 u = 0$ тенглама ва (1.39) шартларда x ни нолга интилтирамиз. Натижада

$$\left.\begin{array}{c} \tau''(t) + \lim\limits_{x\to -0} u_x(x,t) = 0, \qquad 0 < t < T; \\ \tau(0) = 0, \quad \tau(T) = \varphi_3(0) \end{array}\right\} \tag{1.41}$$

муносабатларга эга бўламиз.

(1.40) улаш шартини ва (1.5) , (1.27) белгилашларни ва (1.29) тенгликни эътиборга олсак, (1.41) тенгликлардан $\tau(t)$ номаълум функцияга нисбатан

$$\tau''(t) - \gamma a_1(t) D_{0t}^{(1-k)/2} \tau(t) + a_2(t) D_{0t}^{\alpha} \left[b_2(t)\tau(t)\right] +$$
$$+a_3(t)\ D_{tT}^{\beta}\left[b_3(t)\tau(t)\right] =$$
$$= -b_1(t) - \gamma a_1(t)\ D_{0t}^{(1-k)/2} \Phi_5(t), 0 < t < T \tag{1.42}$$

кўринишдаги интегро-дифференциал тенглама ва қуйидаги

$$\tau(0) = 0, \qquad \tau(T) = \varphi_3(0) \tag{1.43}$$

чегаравий шартлар келиб чиқади, бу ерда

$$\gamma = 2^k \Gamma\left[(1+k)/2\right] \Gamma^{-1}\left[(1-k)/2\right].$$

Агар (1.42) ва (1.43) муносабатлардан фойдаланиб, $\tau(t)$ функцияни бир қийматли топсак, $\nu(t)$ функция (1.29) тенгликдан топилади. Сўнгра 1.3- масаланинг ечими Q_1 соҳада (1.28) формула орқали аниқланади, Q_2 соҳада эса $L_2 u = 0$ тенглама учун биринчи чегаравий масаланинг ечими сифатида

$$u\left(x,t\right)=\int\limits_0^T\tau\left(\eta\right)G_1\left(x,t;0,\eta\right)d\eta+$$

$$+\int\limits_x^0\varphi_2\left(\xi\right)\;G_{1\eta}\left(x,t;\xi,0\right)d\xi-\int\limits_x^0\varphi_3\left(\xi\right)G_{1\eta}\left(x,t;\xi,T\right)d\xi$$

формула билан аниқланади [3,4], бу ерда

$$G_1\left(x,t;\xi,\eta\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\left(\xi-x\right)}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{\left(t-\eta-2nT\right)^2}{4\left(\xi-x\right)}\right]-\exp\left[-\frac{\left(t+\eta-2nT\right)^2}{4\left(\xi-x\right)}\right]\right\}.$$

Шунинг учун бундан буён $\{(1.42),(1.43)\}$ масалани тадқиқ қилиш билан шуғулланиб, бу масала ечимининг мавжудлигини ва ягоналигини исботлаймиз.

Аввал бир жинсли масалани қараймиз:

$$\left.\begin{array}{c}\tau''\left(t\right)-\gamma a_1\left(t\right)\;D_{0t}^{(1-k)/2}\,\tau\left(t\right)+a_2\left(t\right)D_{0t}^{\alpha}\;\left[b_2\left(t\right)\;\tau\left(t\right)\right]+\\+a_3\left(t\right)\;D_{tT}^{\beta}\;\left[b_3\left(t\right)\tau\left(t\right)\right]=0,\;\;0<t<T;\\\tau\left(0\right)=0,\;\tau\left(T\right)=0.\end{array}\right\}\qquad(1.44)$$

Лемма. *Агар* $(0,T)$ *ораликда* $a_1(t)>0$, $a_2(t)\le 0$, $a_3(t)\le 0$ *ва* $b_2(t)>0$, $b_3(t)>0$ *тенгсизликлар бажарилиб,* $b_2(t)$ *- камаймайдиган функция,* $b_3(t)$ *эса ўсмайдиган функция бўлса, (1.44) масала фақат тривиал ечимга эга бўлади.*

Исбот. Фараз қилайлик, (1.44) масала $\tau(t)\not\equiv 0$, $0\le t\le T$ ечимга эга бўлсин. У ҳолда $\sup\limits_{[0,T]}|\tau(t)|=|\tau(\xi)|\ne 0$ бўлади, бу ерда ξ – $[0,T]$ ораликдаги қандайдир сон. $\tau\left(0\right)=\tau\left(T\right)=0$ шартларга асосан $\xi\neq 0, \xi\neq T$. Демак, $\xi\in\left(0,T\right)$. Унда $\tau(t)$ функция $t=\xi$ нуқтада мусбат максимумга ёки манфий минимумга эришади. Буни ва лемма шартларини ҳамда бутун тартибли ҳосилаларнинг хоссаларини [25] ва каср тартибли дифференциал операторлар учун экстремум принципини [15,16] эътиборга олсак, $\tau(\xi)$-мусбат максимум (манфий минимум) бўлганда қуйидаги тенгсизликлар ўринли бўлади:

$$\tau''\left(\xi\right)\leq 0\left(\geqslant 0\right), \qquad \gamma a_1\left(\xi\right)D_{0t}^{(1-k)/2}\tau\left(t\right)\Big|_{t=\xi}>0\left(<0\right),$$

$$a_2\left(t\right)D_{0t}^{\alpha}\left[b_2\left(t\right)\tau\left(t\right)\right]\big|_{t=\xi}\leq 0\left(\geqslant 0\right),$$

$$a_3\left(t\right)D_{tT}^{\beta}\left[b_3\left(t\right)\tau\left(t\right)\right]\Big|_{t=\xi}\leq 0\left(\geqslant 0\right).$$

Буларга кўра

$$\tau''\left(\xi\right)-\Big\{\gamma a_1\left(t\right)D_{0t}^{(1-k)/2}\tau\left(t\right)-$$

$$-a_2\left(t\right)D_{0t}^{\alpha}\left[b_2\left(t\right)\tau\left(t\right)\right]-a_3\left(t\right)D_{tT}^{\beta}\left[b_3\left(t\right)\tau\left(t\right)\right]\Big\}\Big|_{t=\xi}<0 \quad (>0)$$

бўлади. Бу тенгсизлик (1.44) муносабатларнинг биринчисига зиддир. Биз дуч келган бу қарама-қаршилик $\tau(t)\not\equiv 0,\ 0\leq t\leq T$ деб қилган фаразимиз нотўғри эканлигини кўрсатади. Демак, (1.44) масала фақат тривиал ечимга эга. Лемма исбот бўлди.

1-теорема. *Агар лемма шартлари бажарилган бўлса,* $\{(1.42), (1.43)\}$ *масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Фараз қилайлик, $\{(1.42),(1.43)\}$ масала $\tau_1\left(t\right)$ ва $\tau_2\left(t\right)$ ечимларга эга бўлсин. У ҳолда $\tau_1\left(t\right)-\tau_2\left(t\right)=\tau\left(t\right)$ функция (1.44) масаланинг ечими бўлади. Леммада исботландики, бу масала фақат $\tau\left(t\right)\equiv 0,\ \ 0\leq t\leq T$ ечимга эга. Бундан $\tau_1\left(t\right)=\tau_2\left(t\right)$, $0\leq t\leq T$ эканлиги келиб чиқади. 1-теорема исботланди.

Энди $\{(1.42),(1.43)\}$ масала ечимининг мавжудлигини кўрсатишга ўтамиз. Қуйидаги теорема ўринли:

2-теорема. *Лемма шартлари ва* $a_j(t)\in C^1[0,T]\cap C^2(0,T)$, $j=\overline{1,3}$ *шартлар бажарилган бўлса,* $\{(1.42),(1.43)\}$ *масала ягона ечимга эга бўлади.*

Исбот. Лемма шартлари бажарилганлиги учун, агар масаланинг ечими мавжуд бўлса, у ягона. Масала ечимининг мавжудлигини исботлаш мақсадида,(1.42) тенгламани

$$\tau''(t)=\gamma a_1(t)\,D_{0t}^{(1-k)/2}\tau(t)-a_2(t)\,D_{0t}^{\alpha}\left[b_2(t)\,\tau(t)\right]-$$

$$-a_3(t)\,D_{tT}^{\beta}\left[b_3(t)\,\tau(t)\right]-b_1(t)-\gamma a_1(t)\,D_{0t}^{(1-k)/2}\Phi_5(t)\,,\qquad 0<t<T$$

кўринишда ёзиб, унинг ўнг томонини вақтинча маълум функция деб ҳисоблаймиз. У ҳолда бу тенгламанинг (1.43) шартларни қаноатлантирувчи ечими учун қуйидаги тенглик

$$\tau(t)=\int\limits_0^T H(t,\eta)\Big\{\gamma a_1(\eta)\,D_{0\eta}^{(1-k)/2}\tau(\eta)-a_2(\eta)\,D_{0\eta}^{\alpha}\left[b_2(\eta)\,\tau(\eta)\right]-$$

$$-a_3(\eta)\,D_{\eta T}^{\beta}\left[b_3(\eta)\,\tau(\eta)\right]-\gamma a_1(\eta)\,D_{0\eta}^{(1-k)/2}\,\Phi_5(\eta)-b_1(\eta)\Big\}\,d\eta+$$

$$+\varphi_3(0)\,(t/T)\,,\quad t\in[0,T]\tag{1.45}$$

ўринли бўлади [23], бу ерда $H(t,\eta)$–Грин функцияси:

$$H(t,\eta)=\begin{cases}t(\eta-T)/T, & 0\le t<\eta;\\ \eta(t-T)/T, & \eta<t\le T.\end{cases}$$

(1.45) тенгликнинг ўнг томонига каср тартибли ҳосилаларнинг ёйилмасини қўямиз ва шу ҳадлар иштирок этган интегралларни бўлаклаймиз. Сўнгра $H(t,0)=H(t,1)=0$ эканлигини эътиборга олиб,

$$\tau(t)=-\int\limits_0^T\Bigg\{\gamma_1\frac{\partial}{\partial\eta}\left[H(t,\eta)\,a_1(\eta)\right]\int\limits_0^{\eta}(\eta-z)^{(k-1)/2}\tau(z)\,dz-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[H(t,\eta)\,a_2(\eta)\right]\int\limits_0^{\eta}(\eta-z)^{-\alpha}b_2(z)\,\tau(z)\,dz-$$

$$\left.-\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[H(t,\eta)\,a_3(\eta)\right]\int\limits_{\eta}^{T}(z-\eta)^{-\beta}b_3(z)\,\tau(z)\,dz\right\}+\Phi_9(t)$$

тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$\gamma_1=\gamma/\Gamma\left[(1+k)/2\right],$$

$$\Phi_9(t)=-\int\limits_0^{T}H(t,\eta)\left[\gamma_1 a_1(\eta)\,D_{0\eta}^{(1-k)/2}\Phi_5(\eta)+b_1(\eta)\right]d\eta+\varphi_3(0)\,\frac{t}{T}.$$

Такрорий интегралларда интеграллаш тартибини ўзгартириш қоидасидан ва $H(t,\eta)$ функциянинг кўринишидан фойдаланиб,

$$\tau(t)+\int\limits_0^{T}\tau(z)\,K_5(t,z)\,dz=\Phi_9(t)\,,\quad 0\le t\le T \qquad (1.46)$$

кўринишдаги интеграл тенгламага эга бўламиз,бу ерда

$$K_5(t,z)=\gamma_1\int\limits_z^{T}(\eta-z)^{(k-1)/2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[H(t,\eta)\,a_1(\eta)\right]d\eta-$$

$$-\frac{b_2(z)}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_z^{T}(\eta-z)^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[H(t,\eta)\,a_2(\eta)\right]d\eta-$$

$$-\frac{b_3(z)}{\Gamma(1-\beta)}\int\limits_0^{z}(z-\eta)^{-\beta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[H(t,\eta)\,a_3(\eta)\right]d\eta.$$

$\Phi_9\left(t\right)$ ва $K_5\left(t,z\right)$ функцияларнинг тузилишидан ва берилган функцияларга қўйилган шартлардан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $\Phi_9\left(t\right)\in C\left[0,T\right]\cap C^2\left(0,T\right);\quad K_5\left(t,z\right)\in C[0\le t,z\le T]$; $K_{5t}\left(t,z\right)$ ва $K_{5tt}\left(t,z\right)$ функциялар эса $\left\{(t,z):\ 0\le t,z\le T\right\}$ тўғри тўртбурчакнинг $t\neq z$ нуқталарида узлуксиз, $t=z$ бўлганда эса биринчи тур сакрашга эга бўлиши мумкин.

(1.46) - номаълум $\tau\left(t\right)$ функцияга нисбатан Фредгольмнинг иккинчи тур интеграл тенгламасидир. У $\{$(1.42),(1.43)$\}$ масалага эквивалент бўлиб, (1.44) бир жинсли масалага

$$\tau\left(t\right)+\int\limits_0^T\tau\left(\eta\right)\,K_5\left(t,\eta\right)d\eta=0,\quad t\in\left[0,T\right]\qquad(1.47)$$

бир жинсли интеграл тенглама мос келади.(1.44) масала фақат тривиал ечимга эга бўлганлиги учун (1.47) бир жинсли интеграл тенглама ҳам фақат тривиал ечимга эга бўлади. У ҳолда Фредгольм альтернативасига [12] асосан, (1.46) бир жинслимас интеграл тенгламанинг ечими мавжуд ва ягона. $\Phi_9\left(t\right)$ ва $K_5\left(t,z\right)$ функцияларнинг хоссаларидан фойдаланиб, (1.46) тенгламанинг $\tau(t)$ ечими $C\left[0,T\right]\cap C^2\left(0,T\right)$ синфга қарашлилигини кўрсатиш қийин эмас. Демак, у $\{$(1.42),(1.43)$\}$ масаланинг ҳам ечими бўлади.

2-теорема исботланди.

II БОБ

ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИК ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

2.1-§. Сингуляр коэффициентли тенглама учун Трикоми масаласи

$Q = Q_1 \cup AB \cup Q_2$ соҳада

$$0 = L^{(k)}u \equiv \begin{cases} L_1^{(k)}u \equiv u_{xx} + \dfrac{k_1}{x}u_x - u_t - \lambda_1^2 u, & (x,t) \in Q_1; \\ L_2^{(k)}u \equiv u_{xx} + \dfrac{k_2}{x}u_x - u_{tt} - \lambda_2^2 u, & (x,t) \in Q_2 \end{cases}$$

кўринишдаги тенгламани қараймиз, бу ерда $Q_1 = \{(x,t) : 0 < x < +\infty,\ 0 < t \le T\}$, $AB = \{(x,t) : \ x = 0, \ 0 < t < T\}$, $Q_2 = \{ \ (x,t) : -x < t < x + T,\ (-T/2) < x < 0\}$; k_1,k_2, λ_1, λ_2 – берилган ҳақиқий сонлар бўлиб, $k_1, k_2 \in (0,1)$.

$L_1^{(k)}u = 0$ ва $L_2^{(k)}u = 0$ тенгламалар мос равишда Q_1 ва Q_2 соҳаларда параболик ва гиперболик типга тегишли. Шунинг учун $L^{(k)}u = 0$ – Q соҳада параболо-гиперболик тенглама бўлиб, унинг $x = 0$ тип ўзгариш чизиғи характеристика эмас.

$L^{(k)}u = 0$ тенглама учун Q соҳада Трикоми масаласи қуйидагича баён қилинади:

2.1-масала. *Шундай* $u(x,t) \in C\left(\bar{Q}\right) \cap C_{x,t}^{2,1}(Q_1) \cap C^2(Q_2)$ *функция топилсинки, у* Q_1 *ва* Q_2 *соҳаларда мос равишда* $L_1^{(k)}u = 0$ *ва* $L_2^{(k)}u = 0$ *тенгламаларнинг регуляр ечими бўлиб,* AB *кесмада*

$$\lim_{x \to -0} (-x)^{k_2} u_x(x,t) = \lim_{x \to +0} x^{k_1} u_x(x,t), \quad t \in (0,T) \tag{2.1}$$

улаш шартини, Q *соҳа чегарасида эса*

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \qquad 0 \le x < +\infty; \tag{2.2}$$

$$u(-t,t) = \varphi_2(t), \qquad 0 \le t \le (T/2); \tag{2.3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} u\left(x,t\right)=0, \qquad\qquad 0\le t\le T \qquad\qquad (2.4)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирсин, бу ерда $\varphi_1\left(x\right)$, $\varphi_2\left(t\right)$*- берилган узлуксиз функциялар бўлиб,* $\varphi_1\left(0\right)=\varphi_2\left(0\right)=0$ *келишув шарти бажарилади ва* $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_1\left(x\right)=0.$

Масала ечимининг мавжудлигини ва ягоналигини исботлаймиз. Фараз қилайлик, $u\left(x,t\right)$- 2.1- масаланинг ечими бўлсин. Масала шартларига асосланиб, қуйидаги белгилашларни киритайлик:

$$u\left(-0,t\right)=u\left(+0,t\right)=\tau\left(t\right), \quad t\in\left[0,T\right]; \qquad (2.5)$$

$$\lim_{x\to+0} x^{k_1}u_x\left(x,t\right)=\nu\left(t\right), \qquad t\in\left(0,T\right). \qquad (2.6)$$

Дастлаб, қўйилган масалани Q_1 соҳада тадқиқ қилайлик. $L_1^{(k)}u=0$ тенгламада, (2.2),(2.4) чегаравий шартда ва (2.6) белгилашларда $u\left(x,t\right)=e^{-\lambda_1^2t}\omega\left(x,t\right)$ алмаштириш бажарсак, $\omega\left(x,t\right)$ функцияга нисбатан

$$\begin{aligned}
&\omega_{xx}+\frac{k_1}{x}\omega_x-\omega_t=0, && \left(x,t\right)\in Q_1;\\
&\omega\left(x,0\right)=\varphi_1\left(x\right), && 0\le x<+\infty;\\
&\lim_{x\to+0} x^{k_1}\omega_x\left(x,t\right)=e^{\lambda_1^2t}\nu\left(t\right), && t\in\left(0,T\right)\\
&\lim_{x\to+\infty}\omega\left(x,t\right)=0, && t\in\left[0,T\right]
\end{aligned}$$

масалага эга бўламиз. Ҳосил қилинган бу масала ечимининг маълум формуласидан фойдаланиб ((1.28) формулага қаранг) ва $u\left(x,t\right)$ функцияга қайтиб, 2.1-масаланинг ечимини Q_1 соҳада

$$u\left(x,t\right)=[x^{(1-k_1)/2}]/(2te^{\lambda_1^2t})\times$$

$$\times\int\limits_0^{+\infty}\varphi_1\left(\xi\right)\xi^{\frac{1+k_1}{2}}e^{-(x^2+\xi^2)/4t}I_{-(1-k_1)/2}\left(\frac{x\xi}{2t}\right)d\xi-2^{-k_1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_1}{2}\right)\times$$

$$\times \int\limits_0^t e^{\lambda_1^2(\eta-t)}\nu\left(\eta\right)e^{-x^2/4(t-\eta)}(t-\eta)^{-(1+k_1)/2}d\eta \tag{2.7}$$

кўринишда ёзиш мумкин эканлигини топамиз, бу ерда $I_\alpha\left(z\right)$-мавҳум аргументли Бессел функцияси [2,16]:

$$I_\alpha(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{2j+\alpha}}{j!\Gamma(j+\alpha+1)},$$

$\Gamma\left(z\right)$-Эйлернинг гамма-функцияси [1,16].

(2.7) формулада $x\to+0$да лимитга ўтиб, (2.5) белгилашни эътиборга олган ҳолда, номаълум $\tau\left(t\right)$ ва $\nu\left(t\right)$ функциялар орасидаги Q_1 соҳадан олинган қуйидаги функционал муносабатга эга бўламиз:

$$\tau\left(t\right)=2^{-k_1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_1}{2}\right)t^{-(k_1+1)/2}\int\limits_0^{+\infty}\varphi_1\left(\xi\right)\xi^{k_1}e^{-\lambda_1^2t-\xi^2/(4t)}d\xi-$$

$$-2^{-k_1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_1}{2}\right)\int\limits_0^t e^{\lambda_1^2(\eta-t)}\nu\left(\eta\right)\left(t-\eta\right)^{-(1+k_1)/2}d\xi. \tag{2.8}$$

Энди масалани Q_2 соҳада тадқиқ қилишга ўтамиз. Бунда (2.1) шарт ва (2.6) белгилашдан келиб чиқувчи

$$\lim_{x\to-0}\left(-x\right)^{2\beta}u_x\left(x,t\right)=\nu\left(t\right) \tag{2.9}$$

тенгликдан фойдаланамиз, бу ерда $2\beta=k_2$.

$L_2^{(k)}u=0$ тенгламада ва (2.5) , (2.9) белгилашларда

$$z=-[-x/\left(1-2\beta\right)]^{1-2\beta} \tag{2.10}$$

алмаштириш бажариб, куйидаги масалага эга бўламиз:

$$(-z)^lu_{tt}-u_{zz}+\lambda_2^2(-z)^lu=0, \tag{2.11}$$

$$u(0,t)=\tau(t)\,,\quad \lim_{z\to 0}u_z=(1-2\beta)^{-2\beta}\nu(t)=\nu_1(t)\,, \tag{2.12}$$

бу ерда $l=4\beta/(1-2\beta)$.

Маълумки, агар $\tau(t)\in C[0,T]\cap C^2(0,T)$, $\nu_1(t)\in C^2(0,T)$, $[t(T-t)]^{-2\beta}\nu_1(t)\in L[0,T]$ бўлса, (2.11) тенгламанинг (2.12) шартларни қаноатлантирувчи ечими

$$u(z,t)=\gamma_1\int\limits_0^1\frac{\tau[t+\sigma(2s-1)]}{[s(1-s)]^{1-\beta}}\bar{I}_{\beta-1}\left[2\lambda_2\sigma\sqrt{s(1-s)}\right]ds+$$

$$+\gamma_2 z\int\limits_0^1\frac{\nu_1[t+\sigma(2s-1)]}{[s(1-s)]^{\beta}}\bar{I}_{-\beta}\left[2\lambda_2\sigma\sqrt{s(1-s)}\right]ds \tag{2.13}$$

кўринишда аниқланади [13], бу ерда

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)},\quad \gamma_2=\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)},\quad \sigma=\frac{2}{l+2}(-z)^{(l+2)/2}.$$

(2.12) белгилашни эътиборга олсак, (2.13) формуладан

$$u(z,t)=$$

$$=\gamma_1\int\limits_0^1\frac{\tau[t+\sigma(2s-1)]}{[s(1-s)]^{1-\beta}}\bar{I}_{\beta-1}\left[2\lambda_2\sigma\sqrt{s(1-s)}\right]ds+$$

$$+\frac{\gamma_2 z}{(1-2\beta)^{2\beta}}\int\limits_0^1\frac{\nu[t+\sigma(2s-1)]}{[s(1-s)]^{\beta}}\bar{I}_{-\beta}\left[2\lambda_2\sigma\sqrt{s(1-s)}\right]ds \tag{2.14}$$

формулага эга бўламиз.

(2.14) формулада $x=-(1-2\beta)(-z)^{1/(1-2\beta)}$ алмаштириш бажарсак, $L_2^{(k)}u=0$ тенгламанинг

$$u(0,t)=\tau(t)\,,t\in[0,T];\quad \lim_{x\to 0}(-x)^{2\beta}u_x(x,t)=\nu(t)\,,t\in(0,T)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими келиб чиқади:

$$u\left(x,t\right)=\gamma_1\int\limits_0^1\frac{\tau\left[t-x\left(2s-1\right)\right]}{\left[s\left(1-s\right)\right]^{1-\beta}}\bar{I}_{\beta-1}\left[2\lambda_2x\sqrt{s\left(1-s\right)}\right]ds-$$

$$-\left(-x\right)^{1-2\beta}\tilde{\gamma}_2\int\limits_0^1\frac{\nu\left[t-x\left(2s-1\right)\right]}{\left[s\left(1-s\right)\right]^{\beta}}\bar{I}_{-\beta}\left[2\lambda_2x\sqrt{s\left(1-s\right)}\right]ds,\quad(2.15)$$

бу ерда $\bar{\gamma}_2=\Gamma\left(1-2\beta\right)/\Gamma^2\left(1-\beta\right)$.

Энди (2.15) формула билан аниқланган ечимни (2.3) шартга бўйсундирамиз:

$$u\left(-\frac{t}{2},\frac{t}{2}\right)=\gamma_1\int\limits_0^1\frac{\tau\left(ts\right)}{\left[s\left(1-s\right)\right]^{\beta}}\bar{I}_{\beta-1}\left[\lambda_2t\sqrt{s\left(1-s\right)}\right]ds-$$

$$-\left(\frac{t}{2}\right)^{1-2\beta}\bar{\gamma}_2\int\limits_0^1\frac{\nu\left(st\right)}{\left[s\left(1-s\right)\right]^{\beta}}\bar{I}_{-\beta}\left[\lambda_2t\sqrt{s\left(1-s\right)}\right]ds=$$

$$=\varphi_2\left(t/2\right),\quad t\in\left[0,T\right].\quad(2.16)$$

(2.16) формулада $ts=z$ алмаштириш бажариш натижасида

$$\gamma_1t^{1-2\beta}\int\limits_0^t\tau\left(z\right)z^{\beta-1}\left\{\left(t-z\right)^{\beta-1}\bar{I}_{\beta-1}\left[\lambda_2\sqrt{z\left(t-z\right)}\right]\right\}dz-$$

$$-\bar{\gamma}_22^{2\beta-1}\int\limits_0^t\nu\left(z\right)z^{-\beta}\left\{\left(t-z\right)^{-\beta}\bar{I}_{-\beta}\left[\lambda_2\sqrt{z\left(t-z\right)}\right]\right\}dz=$$

$$=\varphi_2\left(t/2\right),\quad t\in\left[0,T\right]\quad(2.17)$$

тенгликка эга бўламиз.

Қуйидаги тенгликларни эътиборга олиб [13]

$$(t-z)^{\beta-1}\bar{I}_{\beta-1}\left[\lambda_2\sqrt{z\,(t-z)}\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_z^t(t-s)^{\beta-1}J_0\left[\lambda_2\sqrt{z\,(z-s)}\right]ds,$$

$$(t-z)^{-\beta}\bar{I}_{-\beta}\left[\lambda_2\sqrt{z\,(t-z)}\right]=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_z^t(t-s)^{-\beta}J_0\left[\lambda_2\sqrt{z\,(z-s)}\right]ds,$$

(2.17) тенгликни ушбу кўринишда ёзиб оламиз:

$$\gamma_1 t^{1-2\beta}\int\limits_0^t\tau\,(z)\,z^{\beta-1}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_z^t(t-s)^{\beta-1}J_0\left[\lambda_2\sqrt{z\,(z-s)}\right]ds\right\}dz-$$

$$-\bar{\gamma}_2 2^{2\beta-1}\int\limits_0^t\nu\,(z)\,z^{-\beta}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_z^t(t-s)^{-\beta}J_0\left[\lambda_2\sqrt{z\,(z-s)}\right]ds\right\}dz=$$

$$=\varphi_2\,(t/2)\,,\quad t\in[0,T]\,,\tag{2.18}$$

бу ерда $J_\alpha\,(z)$- биринчи тур Бессел функцияси [2,16]:

$$J_\alpha(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(z/2)^{2j+\alpha}}{j!\Gamma(j+\alpha+1)}.$$

(2.18) тенгликдаги ички интегралларда дастлаб, бўлаклаб интеграллаш қоидасини бажарамиз, сўнгра t бўйича дифференциаллаймиз. Натижада

$$\gamma_1 t^{1-2\beta}\int\limits_0^t\tau\,(s)\,s^{\beta-1}(t-s)^{\beta-1}ds+$$

$$+\gamma_1 t^{1-2\beta}\int\limits_0^t \tau(z)\, z^{\beta-1}\left\{\int\limits_z^t (t-s)^{\beta-1}\frac{\partial}{\partial s}J_0\left[\lambda_2\sqrt{z(z-s)}\right]ds\right\}dz-$$

$$-\bar{\gamma}_2 2^{2\beta-1}\int\limits_0^t \nu(s)\, s^{-\beta}(t-s)^{-\beta}ds-$$

$$-\bar{\gamma}_2 2^{2\beta-1}\int\limits_0^t \nu(z)\, z^{-\beta}\left\{\int\limits_z^t (t-s)^{-\beta}\frac{\partial}{\partial s}J_0\left[\lambda_2\sqrt{z(z-s)}\right]ds\right\}dz=$$

$$=\varphi_2(t/2)\,,\quad t\in[0,T]$$

тенглик ҳосил бўлади.

Бу ифодадаги каррали интегралларда Дирихле формуласидан [21] фойдаланиб, интеграллаш тартибини ўзгартирамиз:

$$\gamma_1 t^{1-2\beta}\int\limits_0^t (t-s)^{\beta-1}\times$$

$$\times\left\{\tau(s)\, s^{\beta-1}+\int\limits_0^s \tau(z)\, z^{\beta-1}\frac{\partial}{\partial s}J_0\left[\lambda_2\sqrt{z(z-s)}\right]dz\right\}ds-$$

$$-\bar{\gamma}_2 2^{2\beta-1}\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\times$$

$$\times\left\{\nu(s)\, s^{-\beta}+\int\limits_0^s \nu(z)\, z^{-\beta}\frac{\partial}{\partial s}J_0\left[\lambda_2\sqrt{z(z-s)}\right]dz\right\}ds=\varphi_2(t/2)\,.$$

Бу тенгликни ушбу

$$B_{mx}^{s,\lambda}[f(x)]=f(x)+\int\limits_m^x f(t)\left(\frac{x-m}{t-m}\right)^{1-s}\frac{\partial}{\partial x}J_0\left[\lambda\sqrt{(t-m)(t-x)}\right]dt$$

оператордан [13] фойдаланиб, қуйидагича ёзиб олиш мумкин:

$$\gamma_1 t^{1-2\beta}\int\limits_0^t (t-s)^{\beta-1} B_{0s}^{1,\lambda_2}\left[\tau(s)\,s^{\beta-1}\right]ds-$$

$$-\bar{\gamma}_2 2^{2\beta-1}\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta} B_{0s}^{1,\lambda_2}\left[\nu(s)\,s^{-\beta}\right]ds=\varphi_2(t/2)\,,\ t\in[0,T].$$

γ_1 ва $\bar{\gamma}_2$ ларнинг кўринишларини эътиборга олиб, охирги тенгликни

$$\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}t^{1-2\beta}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^t (t-s)^{\beta-1} B_{0s}^{1,\lambda_2}\left[\tau(s)\,s^{\beta-1}\right]ds-$$

$$-2^{2\beta-1}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)}\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int\limits_0^t (t-s)^{(1-\beta)-1} B_{0s}^{1,\lambda_2}\left[\nu(s)\,s^{-\beta}\right]ds=$$

$$=\varphi_2(t/2)\,,\quad t\in[0,T]$$

кўринишда ёки каср тартибли интеграл операторлар ёрдамида қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\gamma_3 D_{0t}^{-\beta}B_{0t}^{1,\lambda_2}\left[\tau(t)\,t^{\beta-1}\right]-\gamma_4 t^{2\beta-1}D_{0t}^{\beta-1}B_{0t}^{1,\lambda_2}\left[\nu(t)\,t^{-\beta}\right]=$$

$$=t^{2\beta-1}\varphi_2(t/2)\,,\quad t\in[0,T] \tag{2.19}$$

бу ерда $\gamma_3=\Gamma(2\beta)/\Gamma(\beta)$, $\gamma_4=2^{2\beta-1}\Gamma(1-2\beta)/\Gamma(1-\beta)$.

(2.19) тенгликка D_{0t}^{β} каср тартибли дифференциал операторни қўллаб, сўнгра каср тартибли операторларнинг ушбу

$$D_{0t}^{\beta}D_{0t}^{-\beta}\left[f(t)\right]=f(t)\,,\quad \beta\in(0,1)\,;$$

$$D_{0t}^{\beta}t^{2\beta-1}D_{0t}^{\beta-1}\,t^{-\beta}f(x)=t^{\beta-1}D_{0t}^{2\beta-1}t^{\beta}f(t)\,,$$

хоссаларини [13] эътиборга олиб,

$$\gamma_3 B_{0t}^{1,\lambda_2}\left[\tau(t)\, t^{\beta-1}\right] - \gamma_4 t^{\beta-1} D_{0t}^{2\beta-1}\left\{t^{\beta} B_{0t}^{1,\lambda_2}\left[\nu(t)\, t^{-\beta}\right]\right\} =$$

$$= D_{0t}^{\beta}\left[t^{2\beta-1}\varphi_2(t/2)\right], \quad t\in(0,T) \qquad (2.20)$$

тенгликка эга бўламиз.

Бу тенгликка

$$A_{mx}^{s,\lambda}[f(x)] = f(x) - \int\limits_{m}^{x} f(t)\left(\frac{t-m}{x-m}\right)^{s}\frac{\partial}{\partial x}J_0\left[\lambda\sqrt{(x-m)(x-t)}\right]dt$$

операторни [13] қўллаб ва қуйидаги

$$A_{0t}^{1,\lambda_2} B_{0t}^{1,\lambda_2}[f(t)] = f(t),$$

$$A_{mx}^{1,\lambda}\left\{|x-m|^{\beta-1} D_{mx}^{2\beta-1}|x-m|^{\beta} B_{mx}^{1,\lambda}\left[\nu(x)\,|x-m|^{-\beta}\right]\right\} =$$

$$= sign\,(x-m)\,\Gamma^{-1}(1-2\beta)\,|x-m|^{\beta-1}\times$$

$$\times\int\limits_{m}^{x}\nu(t)|x-t|^{-2\beta}\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda(x-t)\right]dt$$

тенгликларни инобатга олиб [13], $\tau(t)$ ва $\nu(t)$ номаълум функциялар орасидаги Q_2 соҳадан олинган қуйидаги функционал муносабатга эга бўламиз:

$$\tau(t) = \gamma_5\int\limits_{0}^{t}\nu(z)\,(t-z)^{-2\beta}\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda_2(t-z)\right]dz + f(t), \qquad (2.21)$$

бу ерда

$$\gamma_5 = 2^{2\beta-1}\Gamma(\beta)\,/\left[\Gamma(2\beta)\,\Gamma(1-\beta)\right],$$

$$f(t) = \gamma_3^{-1} t^{1-\beta} A_{0t}^{1,\lambda_2} D_{0t}^{\beta}\left[t^{2\beta-1}\varphi_2(t/2)\right].$$

Шундай қилиб, 2.1-масала ечимга эга бўлиш маъносида $\{(2.8),(2.21)\}$ тенгламалар системасига эквивалент келтирилди. Бу системадан $\tau(t)$ ва $\nu(t)$ функцияларни бир қийматли топсак, 2.1-масаланинг ечими Q_1 ва Q_2 соҳаларда мос равишда (2.7) ва (2.15) формулалар билан аниқланади. Шунинг учун бундан буён бу системани ечиш билан шуғулланамиз.

(2.8) ва (2.21) формулалардан $\tau(t)$ номаълум функцияни чиқариб ва

$$K_6(t,z) = \gamma_5(t-z)^{-2\beta}\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda_2(t-z)\right]+$$

$$+2^{-k_1}\Gamma^{-1}\left(\frac{k_1+1}{2}\right)e^{-\lambda_1^2(t-z)}(t-z)^{-(k_1+1)/2},$$

$$f_1(t) = e^{-\lambda_1^2 t}2^{-k_1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_1}{2}\right)t^{-(k_1+1)/2}\times$$

$$\times\int\limits_0^{+\infty}\varphi_1(\xi)\,\xi^{k_1}e^{-\xi^2/(4t)}d\xi-\gamma_3^{-1}t^{1-\beta}A_{0t}^{1,\lambda_2}D_{0t}^{\beta}\left[t^{2\beta-1}\varphi_2(t/2)\right]$$

белгилашларни киритиб

$$\int\limits_0^t \nu(z)\,K_6(t,z)\,dz = f_1(t)\,, t\in(0,T) \tag{2.22}$$

тенгликка эга бўламиз.

(2.22) -$\nu(t)$ номаълум функцияга нисбатан суст махсусликка эга бўлган биринчи тур Вольтерра интеграл тенгламасидир [12]. $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$ шартдан фойдаланиб, кўрсатиш қийин эмаски, (2.22) тенгламанинг ечимга эга бўлиш шарти, яъни $f_1(0)=0$ тенглик бажарилади.

Энди (2.22) интеграл тенгламани тадқиқ қилишга ўтамиз. Интеграл тенгламанинг ядроси $K_6(t,z)$ функцияни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$K_6(t,z)=\begin{cases}(t-z)^{-2\beta}K_7(t,z)\,, & 2\beta>(k_1+1)/2;\\ (t-z)^{-2\beta}K_8(t,z)\,, & 2\beta=(k_1+1)/2;\\ (t-z)^{-(k_1+1)/2}K_9(t,z)\,, & 2\beta\leq(k_1+1)/2,\end{cases}$$

бу ерда

$$K_7(t,z)=\gamma_5\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda_2(t-z)\right]+$$
$$+2^{-k_1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_1}{2}\right)e^{-\lambda_1^2(t-z)}(t-z)^{2\beta-(k_1+1)/2},$$
$$K_8(t,z)=\gamma_5\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda_2(t-z)\right]+$$
$$+2^{-k_1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_1}{2}\right)e^{-\lambda_1^2(t-z)},$$
$$K_9(t,z)=\gamma_5(t-z)^{[(k_1+1)/2]-2\beta}\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda_2(t-z)\right]+$$
$$+2^{-k_1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_1}{2}\right)e^{-\lambda_1^2(t-z)}.$$

Умумийликни чегараламаган ҳолда $2\beta>(k_1+1)/2$ деб фараз қилайлик. Унда (2.22) тенгламанинг ечимини топиш мақсадида, уни

$$\int\limits_0^t\frac{\nu(z)}{(t-z)^{2\beta}}\left[K_7(t,z)-K_7(t,t)\right]dz+$$
$$+K_7(t,t)\int\limits_0^t\frac{\nu(z)}{(t-z)^{2\beta}}dz=f_1(t)\,,\quad t\in(0,T)$$

кўринишда ёзиб оламиз. $K_7(t,t)=\gamma_5$ эканлигини эътиборга олсак, охирги тенгликни

$$\int\limits_0^t\frac{\nu(z)}{(t-z)^{2\beta}}dz=\gamma_5^{-1}\times$$

$$\times\left\{f_1\left(t\right)-\int\limits_0^t\frac{\nu\left(z\right)}{\left(t-z\right)^{2\beta}}\left[K_7\left(t,z\right)-\gamma_5\right]dz\right\},\quad t\in\left(0,T\right)\qquad(2.23)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(2.23) тенгликнинг ўнг томонини вақтинча маълум функция деб ҳисобласак, у $\nu\left(t\right)$ номаълум функцияга нисбатан Абель интеграл тенгламаси [12] бўлиб, унинг ягона ечими

$$\nu\left(t\right)=\gamma_6\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\left(t-s\right)^{2\beta-1}\times$$

$$\left\{f_1\left(s\right)-\int\limits_0^s\frac{\nu\left(z\right)}{\left(s-z\right)^{2\beta}}\left[K_7\left(s,z\right)-\gamma_5\right]dz\right\}ds,\quad t\in\left(0,T\right)\qquad(2.24)$$

формула билан аниқланади, бу ерда $\gamma_6=\left[\gamma_5\Gamma\left(2\beta\right)\Gamma\left(1-2\beta\right)\right]^{-1}$.

(2.24) даги такрорий интегралда интеграллаш тартибини ўзгартириб, $\nu\left(t\right)$ номаълум функцияга нисбатан қуйидаги кўринишдаги

$$\nu\left(t\right)+\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\nu\left(z\right)K_{10}\left(t,z\right)dz=f_2\left(t\right),t\in\left(0,T\right)\qquad(2.25)$$

иккинчи тур Вольтерра интеграл тенгламасига [12] эга бўламиз, бу ерда

$$K_{10}\left(t,z\right)=\gamma_6\int\limits_z^t\left(t-s\right)^{2\beta-1}\left(s-z\right)^{-2\beta}\left[K_7\left(s,z\right)-\gamma_5\right]ds,$$

$$f_2\left(t\right)=\gamma_6\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\left(t-s\right)^{2\beta-1}f_1\left(s\right)ds.$$

Агар $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ шартни ҳисобга олиб,

$$\varphi_2(t) \in C[0, T/2] \cap C^3(0, T/2),$$

$$\varphi'_2(t) = t^{-\varepsilon}\tilde{\varphi}_2(t), \varepsilon < 1, \quad \tilde{\varphi}_2(t) \in C^2[0, T/2]$$

шартлар ҳам бажарилсин деб фараз қилсак, $f_2(t) \in C[0, T] \cap C^2(0, T)$ бўлади.

$K_7(s, z)$ функциянинг кўринишини эътиборга олсак, $K_{10}(s, z)$ функция

$$K_{10}(s, z) = \int\limits_z^t (t - s)^{2\beta - 1}(s - z)^{-(k_1+1)/2}\tilde{K}_{10}(s, z)\, ds$$

кўринишда ёзилиб, бунда $\tilde{K}_{10}(s, z)$ қуйидаги хоссаларга эга бўлган маълум функция:

$$\tilde{K}_{10}(s, z) \in C^1([0, T] \times [0, T])$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\tilde{K}_{10}(s, z) = \frac{\partial^2}{\partial s^2}\tilde{K}_{10}(s, z) = (s - z)^{[(k_1+1)/2] - 2\beta} O(1).$$

Интеграллаш ўзгарувчисини $s = z + (t - z)\eta$ тенглик орқали алмаштириб, $K_{10}(t, z)$ функциянинг

$$K_{10}(t, z) =$$

$$= (t - z)^{2\beta - (k_1+1)/2}\int\limits_0^1 \eta^{(k_1+1)/2}(1 - \eta)^{2\beta - 1}\tilde{K}[z + (t - z)\eta, z]\, d\eta$$

кўринишини топамиз. Буни ва $2\beta > (k_1 + 1)/2$ тенгсизликни эътиборга олсак, (2.25) тенглама

$$\nu(t) + \int\limits_0^t \nu(t)\frac{\partial}{\partial t}K_{10}(t, z)\, dz = f_2(t), \quad t \in (0, T) \qquad (2.25')$$

кўринишда ёзилади.

$K_{10}\left(t,z\right)$ функциянинг охирги кўринишидан келиб чиқадики, $(2.25')$ интеграл тенгламанинг ядроси $\frac{\partial}{\partial t}K_{10}\left(t,z\right)$ суст махсусликка эга бўлган функциядан иборатдир.

У ҳолда, иккинчи тур Вольтерра интеграл тенгламалари назариясига кўра, $(2.25')$ интеграл тенгламанинг ечими мавжуд ва ягона бўлиб, у $C\left[0,T\right]\cap C^{2}\left(0,T\right)$ синфга тегишли бўлади.

(2.22) тенглама ечимининг мавжудлиги $2\beta=\left(k_{1}+1\right)/2$ ва $2\beta<\left(k_{1}+1\right)/2$ бўлган ҳолларда ҳам юқоридагидек исботланади.

$\nu\left(t\right)$ номаълум функция (2.22) тенгламадан топилгандан сўнг, $\tau\left(t\right)$ функция (2.21) тенглик билан аниқланади.

2.1- масала тўла ҳал этилди.

2.2-§. Сингуляр коэффициентли тенглама учун Трикоми масаласининг иккинчи варианти

Бу параграфда ҳам $L^{(k)}u=0$ тенгламани $Q=Q_{1}\cup AB\cup Q_{2}$ соҳада қараб, Трикоми масаласини қуйидаги вариантда ўрганамиз.

2.2-масала. *Шундай* $u\left(x,t\right)\in C\left(\bar{Q}\right)\cap C_{x,t}^{2,1}\left(Q_{1}\right)\cap C^{2}\left(Q_{2}\right)$ *функция топилсинки, у* Q_{1} *ва* Q_{2} *соҳаларда мос равишда* $L_{1}^{(k)}u=0$ *ва* $L_{2}^{(k)}u=0$ *тенгламаларнинг регуляр ечими бўлиб,* AB *кесмада ушбу*

$$\lim_{x\to-0}\left(-x\right)^{k_{2}}u_{x}\left(x,t\right)=\lim_{x\to+0}x^{k_{1}}u_{x}\left(x,t\right),t\in\left(0,T\right)\qquad(2.26)$$

улаш шартини, Q *соҳанинг чегарасида эса (2.2),(2.4) ва*

$$u\left(x,t\right)\big|_{x=t-T}=\varphi_{2}\left(t\right),\left(T/2\right)\leq t\leq T\qquad(2.27)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирсин, бу ерда $\varphi_{1}\left(x\right)$ *ва* $\varphi_{2}\left(t\right)$ *– берилган узлуксиз функциялар бўлиб,* $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_{1}\left(x\right)=0$, $\varphi_{1}\left(0\right)=0$ *ва* $\varphi_{2}\left(T\right)=0$ *тенгликлар бажарилади.*

Масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини, соддалик учун, $k_{1}=k_{2}=k\in\left(0,1\right)$ бўлган ҳолда исботлаймиз. Фараз қилайлик, $u\left(x,t\right)$ – қўйилган масаланинг ечими бўлсин. Масала шартларига асосланиб, (2.5) ва (2.6) белгилашларни қабул қилайлик.

Дастлаб, қўйилган масалани Q_1 соҳада тадқиқ қиламиз.

Маълумки, $L_1{}^{(k)}u=0$ тенгламанинг (2.2), (2.4) ва (2.6) шартларни қаноатлантирувчи ечими (2.7) кўринишда, яъни

$$u\left(x,t\right)=e^{-\lambda_1^2 t}\frac{x^{(1-k)/2}}{2t}\int\limits_0^{+\infty}\varphi_1\left(\xi\right)\xi^{\frac{1+k}{2}}e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4t}}I_{-\frac{1-k}{2}}\left(\frac{x\xi}{2t}\right)d\xi-$$

$$-2^{-k}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)e^{-\lambda_1^2 t}\int\limits_0^{t}e^{\lambda_1^2\eta}\nu\left(\eta\right)e^{-\frac{x^2}{4(t-\eta)}}\left(t-\eta\right)^{-\frac{1+k}{2}}d\eta \qquad (2.28)$$

кўринишда аниқланади, бу ерда $I_\alpha\left(z\right)$- мавҳум аргументли Бессел функцияси, $\Gamma\left(z\right)$-Эйлернинг гамма-функцияси.

(2.28) формулада $x\rightarrow+0$ да лимитга ўтиб, (2.5) белгилашни эътиборга олган ҳолда, номаълум $\tau\left(t\right)$ ва $\nu\left(t\right)$ функциялар орасидаги Q_1 соҳадан олинган қуйидаги функционал муносабатга эга бўламиз:

$$\tau\left(t\right)=2^{-k}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)t^{-\frac{k+1}{2}}e^{-\lambda_1^2 t}\int\limits_0^{+\infty}\varphi_1\left(\xi\right)\xi^k e^{-\xi^2/(4t)}d\xi-$$

$$-2^{-k}e^{-\lambda_1^2 t}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)\int\limits_0^{t}e^{\lambda_1^2\eta}\nu\left(\eta\right)\left(t-\eta\right)^{-\frac{1+k}{2}}d\xi. \qquad (2.29)$$

Энди Q_2 соҳада масалани тадқиқ қилишга ўтамиз. Бунда (2.26) улаш шарти ва (2.6) белгилашдан келиб чиқувчи қуйидаги тенгликдан

$$\lim_{x\rightarrow-0}\left(-x\right)^k u_x\left(x,t\right)=\nu\left(t\right),t\in\left(0,T\right) \qquad (2.30)$$

фойдаланамиз ва $\tau(t) \in C[0,T] \cap C^2(0,T)$, $\nu(t) \in C^2(0,T)$, $[t(T-t)]^{-2\beta}\nu(t) \in L[0,T]$ деб фараз қиламиз. Унда ${L_2}^{(k)}u = 0$ тенгламанинг

$$u(0,t) = \tau(t), \lim_{x\to 0}(-x)^k u_x(x,t) = \nu(t)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими (2.15) кўринишда, яъни

$$u(x,t) = \gamma_1 \int\limits_0^1 \frac{\tau[t - x(2s-1)]}{[s(1-s)]^{(2-k)/2}} \bar{I}_{(k-2)/2}\left[2\lambda_2 x\sqrt{s(1-s)}\right] ds -$$

$$-(-x)^{1-k}\bar{\gamma}_2 \int\limits_0^1 \frac{\nu[t - x(2s-1)]}{[s(1-s)]^{k/2}} \bar{I}_{-k/2}\left[2\lambda_2 x\sqrt{s(1-s)}\right] ds \quad (2.31)$$

кўринишда аниқланади, бу ерда

$$\bar{I}_\alpha(z) = \Gamma(\alpha+1)(z/2)^{-\alpha} I_\alpha(z),\ \gamma_1 = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma^2(k/2)}, \tilde{\gamma}_2 = \frac{\Gamma(1-k)}{\Gamma^2(1-k/2)}.$$

Энди (2.31) формула билан аниқланган ечимни (2.27) шартга бўйсундирамиз:

$$u\left(\frac{t-T}{2}, \frac{t+T}{2}\right) =$$

$$= \gamma_1 \int\limits_0^1 \frac{\tau[t-(t-T)s]}{[s(1-s)]^{(2-k)/2}} \bar{I}_{(k-2)/2}\left[\lambda_2 (t-T)\sqrt{s(1-s)}\right] ds -$$

$$-(-x)^{1-k}\bar{\gamma}_2 \int\limits_0^1 \frac{\nu[t-(t-T)s]}{[s(1-s)]^{k/2}} \times$$

$$\times \bar{I}_{-k/2}\left[\lambda_2 (t-T)\sqrt{s(1-s)}\right] ds = \varphi[(t+T)/2], t \in [0,T]. \quad (2.32)$$

(2.32) формулада $z=t+(T-t)s$ алмаштириш бажарсак,

$$\gamma_1(T-t)^{1-k}\int\limits_t^T \tau\left(z\right)\left(T-z\right)^{(k/2)-1}\times$$

$$\times\left\{(z-t)^{(k/2)-1}\bar{I}_{k/2-1}\left[\lambda_2\sqrt{(T-z)\left(z-t\right)}\right]\right\}dz-$$

$$-\bar{\gamma}_2 2^{k-1}\int\limits_t^T \nu\left(z\right)\left(T-z\right)^{-k/2}\times$$

$$\times\left\{(z-t)^{-k/2}\bar{I}_{-k/2}\left[\lambda_2\sqrt{(T-z)\left(t-z\right)}\right]\right\}dz=$$

$$=\varphi_2\left[(t+T)/2\right],\quad t\in[0,T] \tag{2.33}$$

тенгликка эга бўламиз.

Қуйидаги

$$(z-t)^{-s}\bar{I}_{-s}\left[\lambda_2\sqrt{(T-z)\left(z-t\right)}\right]=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_t^z (s-t)^{-s}J_0\left[\lambda_2\sqrt{(T-z)\left(s-z\right)}\right]ds,$$

тенгликни [13] эътиборга олган ҳолда, (2.33) тенгликни

$$-\gamma_1(T-t)^{1-k}\int\limits_t^T \tau\left(z\right)\left(T-z\right)^{(k/2)-1}\times$$

$$\times\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_z^t (t-s)^{\beta-1}J_0\left[\lambda_2\sqrt{z\left(z-s\right)}\right]ds\right\}dz+$$

$$+\bar{\gamma}_2 2^{k-1}\int\limits_t^T \nu\left(z\right)\left(T-z\right)^{-k/2}\times$$

$$\times\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{z}^{t}(t-s)^{-\beta}J_0\left[\lambda_2\sqrt{z\,(z-s)}\right]ds\right\}dz=$$

$$=\varphi_2\left[(t+T)/2\right],\quad t\in[0,T]\tag{2.34}$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $J_\alpha(z)$- биринчи тур Бессел функцияси.

(2.34) тенгликдаги ички интегралларга бўлаклаб интеграллаш қоидасини қўллаб, сўнгра ҳосил бўлган ифодадаги каррали интегралларда интеграллаш тартибини ўзгартириб, ушбу

$$\gamma_1(T-t)^{1-k}\int\limits_{t}^{T}(s-t)^{k/2-1}\Big\{\tau(s)\,(T-s)^{(k/2)-1}+$$

$$+\int\limits_{T}^{s}\tau(z)\,(T-z)^{k/2-1}\frac{\partial}{\partial s}J_0\left[\lambda_2\sqrt{((T-z)\,(s-z))}\right]\Bigg\}ds-$$

$$-2^{k-1}\bar{\gamma}_2\int\limits_{t}^{T}(s-t)^{-k/2}\Big\{\nu(s)\,(T-s)^{-k/2}+$$

$$+\int\limits_{T}^{s}\nu(z)\,(T-z)^{-k/2}\frac{\partial}{\partial s}J_0\left[\lambda_2\sqrt{((T-z)\,(s-z))}\right]\Bigg\}ds=$$

$$=\varphi_2\left[(t+T)/2\right],\quad t\in[0,T],\tag{2.35}$$

тенгликка эга бўламиз.

Бу тенгликни $B_{kx}^{s,\lambda}$ операторнинг кўринишидан фойдаланиб, қуйидагича ёзиб олиш мумкин:

$$\gamma_1(T-t)^{1-k}\int\limits_{t}^{T}(s-t)^{(k/2)-1}B_{Ts}^{1,\lambda_2}\left[\tau(s)\,(T-s)^{k/2-1}\right]ds-$$

$$-\bar{\gamma}_2 2^{k-1}\int\limits_t^T (t-s)^{-\beta} B_{Ts}^{1,\lambda_2}\left[\nu(s)(T-s)^{-k/2}\right]ds=$$

$$=\varphi_2\left[(t+T)/2\right],\ t\in[0,T].$$

γ_1 ва $\bar{\gamma}_2$ ларнинг кўринишларини эътиборга олиб, охирги тенгликни каср тартибли интеграл операторлар ёрдамида қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\gamma_3 D_{tT}^{-k/2} B_{Tt}^{1,\lambda_2}\left[\tau(t)(T-t)^{(k/2)-1}\right]-$$

$$-\gamma_4 (T-t)^{k-1} D_{Tt}^{(k/2)-1} B_{0t}^{1,\lambda_2}\left[\nu(t)(T-t)^{-k/2}\right]=$$

$$=(T-t)^{k-1}\varphi_2\left[(t+T)/2\right],\quad t\in[0,T],\tag{2.36}$$

бу ерда $\gamma_3=\Gamma(k)/\Gamma(k/2)$, $\gamma_4=2^{k-1}\Gamma(1-k)/\Gamma(1-k/2)$.

(2.36) тенгликка $D_{tT}^{k/2}$ каср тартибли дифференциал операторни қўллаб, сўнгра каср тарибли операторларнинг ушбу

$$D_{tT}^{\beta} D_{tT}^{-\beta}\left[f(t)\right]=f(t),\quad \beta\in(0,1);$$

$$D_{sx}^{l}|x-s|^{l+r}D_{sx}^{r}f(x)=|x-s|^{r}D_{sx}^{l+r}\left[|x-s|^{l}f(x)\right],$$

$$r<0,\quad l\in[0,1),\quad |l+r|<1$$

хоссаларини [15,16] эътиборга олиб,

$$\gamma_3 B_{Tt}^{1,\lambda_2}\left[\tau(t)(T-t)^{(k/2)-1}\right]-$$

$$-\gamma_4 (T-t)^{k/2-1} D_{tT}^{k-1}\left\{(T-t)^{k/2} B_{0t}^{1,\lambda_2}\left[\nu(t)(T-t)^{-k/2}\right]\right\}=$$

$$=D_{tT}^{k/2}\left\{(T-t)^{k-1}\varphi_2\left[(t+T)/2\right]\right\},\quad t\in(0,T)\tag{2.37}$$

тенгликка эга бўламиз.

Бу тенгликка $A_{Tt}^{1,\lambda}$ операторни қўллаб ва қуйидаги

$$A_{Tt}^{1,\lambda_2} B_{Tt}^{1,\lambda_2}\left[f(t)\right]=f(t),$$

$$A^{1,\lambda}_{mx}\left\{|x-m|^{\beta-1}D^{2\beta-1}_{mx}|x-m|^{\beta}B^{1,\lambda}_{mx}\left[\nu\left(x\right)|x-m|^{-\beta}\right]\right\}=$$
$$=sign\left(x-m\right)\Gamma^{-1}\left(1-2\beta\right)|x-m|^{\beta-1}\times$$
$$\times\int\limits_{m}^{x}\nu\left(t\right)|x-t|^{-2\beta}\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda\left(x-t\right)\right]dt$$

тенгликларни инобатга олиб [13], $\tau\left(t\right)$ ва $\nu\left(t\right)$ номаълум функциялар орасидаги Q_2 соҳадан олинган функционал муносабатга эга бўламиз:

$$\tau\left(t\right)=\gamma_5\int\limits_{t}^{T}\frac{\nu\left(z\right)}{\left(z-t\right)^{k}}\bar{J}_{-k/2}\left[\lambda_2\left(z-t\right)\right]dz+f\left(t\right),\quad t\in[0,T],\quad(2.38)$$

бу ерда

$$\gamma_5=2^{k-1}\Gamma\left(k/2\right)/\Gamma\left(k\right)\Gamma\left(1-k/2\right),$$
$$f\left(t\right)=\gamma_3^{-1}(T-t)^{1-k/2}A^{1,\lambda_2}_{tT}D^{k/2}_{tT}\left\{\left(T-t\right)^{k-1}\varphi_2\left[\left(t+T\right)/2\right]\right\}.$$

Шундай қилиб, 2.2-масала ечимга эга бўлиш маъносида $\{(2.29),(2.38)\}$ тенгламалар системасига эквивалент келтирилди. Бу системадан $\tau\left(t\right)$ ва $\nu\left(t\right)$ функцияларни бир қийматли топсак, 2.2-масаланинг ечими Q_1 ва Q_2 соҳаларда мос равишда (2.28) ва (2.31) формулалар билан аниқланади. Шунинг учун бундан буён бу системани ечиш билан шуғулланамиз.

(2.29) ва (2.38) формулалардан $\tau\left(t\right)$ ни чиқариб, $\nu\left(t\right)$ номаълум функцияга нисбатан қуйидаги

$$\gamma_5\int\limits_{t}^{T}\nu\left(z\right)\left(z-t\right)^{-2\beta}\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda_2\left(z-t\right)\right]dz+$$
$$+\gamma_6e^{-\lambda_1^2t}\int\limits_{0}^{t}e^{\lambda_1^2\eta}\nu\left(\eta\right)\left(t-\eta\right)^{-\frac{1+k}{2}}d\xi=F(t),\quad t\in[0,T]\qquad(2.39)$$

интеграл тенгламага эга бўламиз, бу ерда

$$\gamma_6 = 2^{-k}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right),$$

$$F(t) = 2^{-k}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)t^{-\frac{k+1}{2}}e^{-\lambda_1^2 t}\int\limits_0^{+\infty}\varphi_1(\xi)\,\xi^k e^{-\xi^2/(4t)}d\xi - f(t).$$

Агар (2.39) интеграл тенгламадан $\nu(t)$ функцияни бир қийматли аниқласак, $\tau(t)$ функция (2.29) формула билан аниқланади. Шунинг учун бундан буён (2.39) интеграл тенгламани ечиш билан шуғулланамиз.

Теорема. *Агар (2.39) интеграл тенглама $L_2[0,T]$ синфда ечимга эга бўлса, у ягонадир.*

Исбот. Фараз қилайлик, (2.39) интеграл тенгламанинг $L_2[0,T]$ синфда ечими мавжуд ва улар $\nu_1(t)$ ва $\nu_2(t)$ функциялардан иборат бўлсин. У ҳолда $\nu(t) = \nu_1(t) - \nu_2(t) \in L_2[0,T]$ функция қуйидаги

$$\gamma_5\int\limits_t^T \nu(\eta)(\eta - t)^{-k}\bar{J}_{-k/2}\left[\lambda_2(\eta - t)\right]d\eta +$$

$$+\gamma_6\int\limits_0^t e^{\lambda_1^2(\eta - t)}\nu(\eta)(t-\eta)^{-(1+k)/2}d\xi = 0,\ t \in [0,T] \qquad (2.40)$$

бир жинсли тенгламанинг ечими бўлади.

Теоремани исботлаш учун (2.40) тенглама $L_2[0,T]$ синфда фақат $\nu(t) \equiv 0, t \in [0,T]$ ечимга эга эканлигини исботлаш етарли.

Шу мақсадда, (2.40) формулада t ни y билан алмаштириб ва ҳосил бўлган ифодани $\nu(y)$ га кўпайтириб, сўнгра y бўйича $[0,T]$ ораликда интеграллаймиз:

$$\gamma_5\int\limits_0^T \nu(y)\,dy\int\limits_y^T \nu(\eta)(\eta - y)^{-k}\bar{J}_{-k/2}\left[\lambda_2(\eta - y)\right]d\eta +$$

$$+\gamma_6 \int\limits_0^T \nu(y)\,dy \int\limits_0^y e^{\lambda_1^2(\eta-y)} \nu(\eta)\,(y-\eta)^{-(1+k)/2} d\xi =$$

$$= 0,\ t \in [0,T]. \tag{2.41}$$

(2.41) тенгликдаги $\overline{J}_\nu(x)$ ва $|y-\eta|^{-\alpha}$ иштирок этган ҳадларни қуйидаги

$$\overline{J}_\nu(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \int\limits_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^{\nu-1/2} \cos(xt)\,dt,$$

$$|y-\eta|^{-\alpha} = \Gamma^{-1}(\alpha)\cos^{-1}\frac{\alpha\pi}{2} \int\limits_0^{+\infty} s^{\alpha-1}\cos(|\eta-y|\,s)\,ds$$

интеграл кўринишлари [2,1] орқали ифодалаб оламиз:

$$\gamma_7 \int\limits_0^T \nu(y)\,dy \int\limits_y^T \nu(\eta)\,d\eta \int\limits_0^{+\infty} s^{k-1}\cos[(\eta-y)\,s]\,ds \times$$

$$\times \int\limits_{-1}^{1} \left(1-z^2\right)^{-(1+k)/2} \cos[\lambda_2(\eta-y)\,z]\,dz +$$

$$+\gamma_8 \int\limits_0^T \nu(y)\,dy \int\limits_0^y e^{\lambda_1^2(\eta-y)} \nu(\eta) \times$$

$$\times \int\limits_0^{+\infty} s^{(k-1)/2}\cos(|\eta-y|\,s)\,ds\ d\eta = 0,\ t \in [0,T], \tag{2.42}$$

бу ерда

$$\gamma_7 = \frac{\gamma_5\Gamma(1-k/2)\,\Gamma^{-1}(k)}{\sqrt{\pi}\Gamma[(1-k)/2]\cos(\pi k/2)},$$

$$\gamma_8 = 2^{-k}\Gamma^{-2}\left(\frac{1+k}{2}\right)\cos^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\pi\right).$$

(2.42) тенгликда интеграллаш тартибини ўзгартириб, қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\gamma_7\int\limits_{-1}^{1}\left(1-z^2\right)^{-(1+k)/2}dz\int\limits_{0}^{+\infty}s^{k-1}M_1\left(z,s\right)ds+$$

$$+\gamma_8\int\limits_{0}^{+\infty}s^{(k-1)/2}M_2\left(s\right)ds=0, \tag{2.43}$$

бу ерда

$$M_1\left(z,s\right)=\int\limits_{0}^{T}\nu\left(y\right)dy\int\limits_{y}^{T}\nu\left(\eta\right)\cos\left[\left(\eta-y\right)s\right]\cos\left[\lambda_2\left(\eta-y\right)z\right]d\eta,$$

$$M_2\left(s\right)=\int\limits_{0}^{T}\nu\left(y\right)dy\int\limits_{0}^{y}\nu\left(\eta\right)e^{\lambda_1^2(\eta-y)}\cos\left[\left(\eta-y\right)s\right]d\eta.$$

Ушбу тенгликлардан фойдаланиб

$$\cos\left[\left(\eta-y\right)s\right]\cos\left[\lambda_2\left(\eta-y\right)z\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\cos\left[\left(\eta-y\right)\left(s-\lambda_2 z\right)\right]+\cos\left[\left(\eta-y\right)\left(s+\lambda_2 z\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\cos\left[\eta\left(s-\lambda_2 z\right)\right]\cos\left[y\left(s-\lambda_2 z\right)\right]+\right.$$

$$+\sin\left[\eta\left(s-\lambda_2 z\right)\right]\sin\left[y\left(s-\lambda_2 z\right)\right]+$$

$$+\cos\left[\eta\left(s+\lambda_2 z\right)\right]\cos\left[y\left(s+\lambda_2 z\right)\right]+$$

$$\left.+\sin\left[\eta\left(s+\lambda_2 z\right)\right]\sin\left[y\left(s+\lambda_2 z\right)\right]\right\},$$

$M_1\left(z,s\right)$ функцияни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$M_1\left(z,s\right)=\int\limits_0^T\nu\left(y\right)dy\int\limits_y^T\nu\left(\eta\right)\cos\left[\left(\eta-y\right)s\right]\cos\left[\left(\eta-y\right)z\right]d\eta=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^T\left\{\nu\left(y\right)\cos\left[y\left(s-\lambda_2z\right)\right]\int\limits_y^T\nu\left(\eta\right)\cos\left[\eta\left(s-\lambda_2z\right)\right]d\eta+\right.$$

$$+\nu\left(y\right)\sin\left[y\left(s-\lambda_2z\right)\right]\int\limits_y^T\nu\left(\eta\right)\sin\left[\eta\left(s-\lambda_2z\right)\right]d\eta+$$

$$+\nu\left(y\right)\cos\left[y\left(s+\lambda_2z\right)\right]\int\limits_y^T\nu\left(\eta\right)\cos\left[\eta\left(s+\lambda_2z\right)\right]d\eta+$$

$$\left.+\nu\left(y\right)\sin\left[y\left(s+\lambda_2z\right)\right]\int\limits_y^T\nu\left(\eta\right)\sin\left[\eta\left(s+\lambda_2z\right)\right]d\eta\right\}dy=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\limits_0^T\frac{d}{dy}\left(\int\limits_y^T\nu\left(\eta\right)\cos\left[\eta\left(s-\lambda_2z\right)\right]d\eta\right)^2dy-$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_0^T\frac{d}{dy}\left(\int\limits_y^T\nu\left(\eta\right)\sin\left[\eta\left(s-\lambda_2z\right)\right]d\eta\right)^2dy-$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_0^T\frac{d}{dy}\left(\int\limits_y^T\nu\left(\eta\right)\cos\left[\eta\left(s+\lambda_2z\right)\right]d\eta\right)^2dy-$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_0^T \frac{d}{dy}\left(\int\limits_y^T \nu\left(\eta\right)\sin\left[\eta\left(s+\lambda_2 z\right)\right]d\eta\right)^2 dy =$$

$$=\frac{1}{4}\left(\int\limits_0^T \nu\left(\eta\right)\cos\left[\eta\left(s-\lambda_2 z\right)\right]d\eta\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{4}\left(\int\limits_0^T \nu\left(\eta\right)\sin\left[\eta\left(s-\lambda_2 z\right)\right]d\eta\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{4}\left(\int\limits_0^T \nu\left(\eta\right)\cos\left[\eta\left(s+\lambda_2 z\right)\right]d\eta\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{4}\left(\int\limits_0^T \nu\left(\eta\right)\sin\left[\eta\left(s+\lambda_2 z\right)\right]d\eta\right)^2 .$$

Ушбу $\cos\left[\left(\eta-y\right)s\right]=\cos(\eta s)\cos(ys)+\sin(\eta s)\sin(ys)$ тенгликдан фойдаланиб, $M_2\left(s\right)$ функцияни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$M_2\left(s\right)=\int\limits_0^T \nu\left(y\right)dy\int\limits_0^y e^{\lambda_1^2(\eta-y)}\nu\left(\eta\right)\cos\left[\left(\eta-y\right)s\right]d\eta =$$

$$=\int\limits_0^T e^{-2\lambda_1^2 y}\left\{\nu\left(y\right)e^{\lambda_1^2 y}\cos(ys)\int\limits_0^y \nu\left(\eta\right)e^{\lambda_1^2\eta}\cos(\eta s)d\eta+\right.$$

$$\left.+\nu\left(y\right)e^{\lambda_1^2 y}\sin(ys)\int\limits_0^y \nu\left(\eta\right)e^{\lambda_1^2\eta}\sin(\eta s)d\eta\right\}dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^T e^{-2\lambda_1^2 y}\frac{d}{dy}\left[\left(\int\limits_0^y \nu\left(\eta\right)e^{\lambda_1^2\eta}\cos(\eta s)d\eta\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_0^y \nu\left(\eta\right)e^{\lambda_1^2\eta}\sin(\eta s)d\eta\right)^2\right]dy =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2\lambda_1^2 T}\left[\left(\int\limits_0^T \nu\left(\eta\right)e^{\lambda_1^2\eta}\cos(\eta s)d\eta\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_0^T \nu\left(\eta\right)e^{\lambda_1^2\eta}\sin(\eta s)d\eta\right)^2\right] +$$

$$+\lambda_1^2 y\int\limits_0^T e^{-2\lambda_1^2 y}\left[\left(\int\limits_0^y \nu\left(\eta\right)e^{\lambda_1^2\eta}\cos(\eta s)d\eta\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_0^y \nu\left(\eta\right)e^{\lambda_1^2\eta}\sin(\eta s)d\eta\right)^2\right]dy.$$

$M_1\left(z,s\right)$ ва $M_2\left(s\right)$ ларнинг охирги ифодаларини (2.43) га қўйиб,

$$\frac{1}{4}\gamma_7\int\limits_{-1}^1\left(1-z^2\right)^{-(1+k)/2}dz\int\limits_0^{+\infty}s^{k-1}\left\{\left(\int\limits_0^T \nu\left(\eta\right)\cos\left[\left(s+\lambda_2 z\right)\eta\right]d\eta\right)^2 + \right.$$

$$+\left(\int\limits_0^T \nu\left(\eta\right)\sin\left[\left(s+\lambda_2 z\right)\eta\right]d\eta\right)^2 +$$

$$+\left(\int\limits_0^T \nu\left(\eta\right)\cos\left[\left(s-\lambda_2 z\right)\eta\right]d\eta\right)^2+$$

$$+\left(\int\limits_0^T \nu\left(\eta\right)\sin\left[\left(s-\lambda_2 z\right)\eta\right]d\eta\right)^2+$$

$$+\frac{1}{2}\gamma_8\int\limits_0^{+\infty} s^{(k-1)/2}\left\{e^{-2\lambda_1^2 T}\left(\int\limits_0^T \nu\left(\eta\right)e^{\lambda_1^2\eta}\cos\left(\eta s\right)d\eta\right)^2+\right.$$

$$+e^{-2\lambda_1^2 T}\left(\int\limits_0^T \nu\left(\eta\right)e^{\lambda_1^2\eta}\sin\left(\eta s\right)d\eta\right)^2 ds+$$

$$+2\lambda_1^2 y\int\limits_0^T e^{-2\lambda_1^2 y}\left[\left(\int\limits_0^y \nu\left(\eta\right)e^{\lambda_1^2\eta}\cos(\eta s)d\eta\right)^2+\right.$$

$$\left.\left.+\left(\int\limits_0^y \nu\left(\eta\right)e^{\lambda_1^2\eta}\sin(\eta s)d\eta\right)^2\right]dy\right\}=0$$

тенгликка эга бўламиз.

Бу тенгликдан $\forall s\in(0,+\infty)$ учун, жумладан $s=(n\pi)/T$, $n\in N$ учун

$$\int\limits_0^T \nu\left(\eta\right)e^{\lambda_1^2\eta}\cos(\eta s)d\eta=0,\int\limits_0^T \nu\left(\eta\right)e^{\lambda_1^2\eta}\sin(\eta s)d\eta=0 \qquad (2.44)$$

тенгликларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади. Бу тенгликларга асосан, $\nu\left(\eta\right)e^{\lambda_1^2\eta}\in L_2\left[0,T\right]$ бўлгани учун бу функциянинг Фурье коэффициентлари нолга тенг бўлади [21]. Демак, $\nu\left(t\right)e^{\lambda_1^2\eta}\equiv 0$, яъни $\nu\left(t\right)\equiv 0$, $t\in\left[0,T\right]$. Унда $\nu_1\left(t\right)\equiv\nu_2\left(t\right)$, $t\in\left[0,T\right]$ тенглик ўринли бўлади.Теорема исботланди.

Энди (2.39) интеграл тенглама ечимининг мавжудлигини кўрсатишга ўтамиз. Шу мақсадда (2.39) тенгламани

$$\gamma_5\int\limits_t^T\nu\left(\eta\right)\left(\eta-t\right)^{-k}d\eta+$$

$$+\gamma_5\int\limits_t^T\nu\left(\eta\right)\left(\eta-t\right)^{-k}\left\{\bar{J}_{-k/2}\left[\lambda_2\left(\eta-t\right)\right]-1\right\}d\eta+$$

$$+\gamma_6\int\limits_0^t\nu\left(\eta\right)\left(t-\eta\right)^{-(1+k)/2}d\eta+$$

$$+\gamma_6\int\limits_0^t\nu\left(\eta\right)\left(t-\eta\right)^{-(1+k)/2}\left\{e^{\lambda_1^2(\eta-t)}-1\right\}d\eta=F\left(t\right),\quad t\in\left[0,T\right]$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Бу тенгликдаги биринчи ва учинчи интегралларни каср тартибли интеграл белгиси орқали қуйидагича ёзиб олиш мумкин:

$$\gamma_5\Gamma\left(1-k\right)D_{tT}^{k-1}\nu\left(t\right)+$$

$$+\gamma_5\int\limits_t^T\nu\left(\eta\right)\left(\eta-t\right)^{-k}\left\{\bar{J}_{-k/2}\left[\lambda_2\left(\eta-t\right)\right]-1\right\}d\eta+$$

$$+\gamma_6\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)D_{0t}^{(k-1)/2}\nu\left(t\right)+$$

$$+\gamma_6\int\limits_0^t\nu\left(\eta\right)\left(t-\eta\right)^{-(k+1)/2}\left\{e^{\lambda_1^2(\eta-t)}-1\right\}d\eta=$$

$$= F\left(t\right), \quad t \in [0, T]. \tag{2.45}$$

(2.45) тенгликка $D_{0t}^{(1-k)/2}$ каср тартибли дифференциал операторни тадбиқ этамиз. Натижада

$$D_{0t}^{\gamma} D_{0t}^{-\gamma} f\left(t\right) = f\left(t\right), \quad \gamma \in (0, 1)$$

формулани эътиборга олиб, қуйидаги тенгликка келамиз:

$$\gamma_5 \Gamma\left(1-k\right) D_{0t}^{(1-k)/2} D_{tT}^{k-1} \nu\left(t\right) +$$

$$+D_{0t}^{(1-k)/2}\left[\gamma_5 \int\limits_t^T \nu\left(\eta\right)\left(\eta - t\right)^{-k}\left\{\bar{J}_{-k/2}\left[\lambda_2\left(\eta - t\right)\right] - 1\right\} d\eta\right] +$$

$$+\gamma_6 \nu\left(t\right) + \gamma_6 D_{0t}^{(1-k)/2}\left\{\int\limits_0^t \nu\left(\eta\right)\left(t-\eta\right)^{-(k+1)/2}\left[e^{\lambda_1^2(\eta - t)} - 1\right] d\eta\right\} =$$

$$= D_{0t}^{(1-k)/2} F\left(t\right), \quad t \in [0, T]. \tag{2.46}$$

(2.46) тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи, иккинчи ва тўртинчи қўшилувчиларни мос равишда $M_3(t)$, $M_4(t)$ ва $M_5(t)$ лар билан белгилаб, уларни соддалаштирамиз.

$$M_3(t) = D_{0t}^{(1-k)/2} D_{tT}^{k-1} \nu\left(t\right) =$$

$$= \Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right) \frac{d}{dt} \int\limits_0^t (t-z)^{(k-1)/2}\left\{D_{zT}^{k-1} \nu\left(z\right)\right\} dz =$$

$$= c_1 \frac{d}{dt} \int\limits_0^t (t-z)^{(k-1)/2}\left\{\int\limits_z^T (s-z)^{-k} \nu\left(s\right) ds\right\} dz,$$

бу ерда $c_1 = \Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(1-k\right)$. Охирги тенгликдаги каррали интегралларда интеграллаш тартибини ўзгартирсак,

$$M_3(t) = c_1 \frac{d}{dt} \int\limits_0^t \nu\left(s\right) ds \int\limits_0^s (t-z)^{(k-1)/2} (s-z)^{-k} dz +$$

$$+c_1\frac{d}{dt}\int\limits_t^T \nu\left(s\right)ds\int\limits_0^t \left(t-z\right)^{(k-1)/2}\left(s-z\right)^{-k}dz$$

тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликдаги биринчи ва иккинчи ички интегралларда мос равишда $z=\eta s$ ва $z=\eta t$ алмаштиришлар бажарамиз. Натижада

$$M_3(t)=c_1\int\limits_0^t \nu\left(s\right)t^{(k-1)/2}s^{1-k}ds\int\limits_0^1 \left(1-\eta\right)^{-k}\left(1-\frac{s}{t}\eta\right)^{(k-1)/2}d\eta+$$

$$+c_1\int\limits_t^T \nu\left(s\right)t^{(k+1)/2}s^{-k}ds\int\limits_0^1 \left(1-\eta\right)^{(k-1)/2}\left(1-\frac{t}{s}\eta\right)^{-k}d\eta \qquad (2.47)$$

тенглик ҳосил бўлади.

(2.47) тенгликда c_1 нинг ифодасини ва Гаусс гипергеометрик функцияси учун ўринли бўлган қуйидаги

$$\int\limits_0^1 t^{b-1}\left(1-t\right)^{c-b-1}\left(1-xt\right)^{-a}dt=\frac{\Gamma\left(b\right)\Gamma\left(c-b\right)}{\Gamma\left(c\right)}F\left(a,b,c;x\right)$$

формулани эътиборга олсак [1,16], уни қуйидаги кўринишда ёзиб олишимиз мумкин бўлади:

$$M_3(t)=\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(2-k\right)\times$$

$$\times\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \nu\left(s\right)s^{(1-k)/2}\left(\frac{s}{t}\right)^{(1-k)/2}F\left[\left(1-k\right)/2,1,2-k;\frac{s}{t}\right]ds+$$

$$+\Gamma^{-1}\left(1-k\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{k+3}{2}\right)\times$$

$$\times \frac{d}{dt} \int\limits_{t}^{T} \nu\left(s\right) s^{(1-k)/2} \left(\frac{t}{s}\right)^{(1+k)/2} F\left[k, 1, \left(k+3\right)/2; \frac{t}{s}\right] ds.$$

Бу тенгликда

$$\frac{d}{dx}\left[x^{a} F\left(a, b, c; x\right)\right] = a x^{a-1} F\left(a+1, b, c; x\right),$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{c-1} F\left(a, b, c; x\right)\right] = \left(c-1\right) x^{c-2} F\left(a, b, c-1; x\right)$$

формулаларни [1,16] эътиборга олиб, дифференциаллаш амалини бажарамиз:

$$M_3\left(t\right) =$$

$$= \nu\left(t\right) t^{(1-k)/2} \left\{ \left[\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)\Gamma\left(2-k\right)\right]^{-1} F\left(\frac{1-k}{2}, 1, 2-k; 1\right) - \right.$$

$$\left. - \left[\Gamma\left(\frac{3+k}{2}\right)\Gamma\left(1-k\right)\right]^{-1} F\left(k, 1, \frac{k+3}{2}; 1\right)\right\} -$$

$$- \left[2\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)\Gamma\left(1-k\right)\right]^{-1} \times$$

$$\times \int\limits_{0}^{t} \nu\left(s\right) s^{1-k} t^{(k-3)/2} F\left(\frac{3-k}{2}, 1, 2-k; \frac{s}{t}\right) ds +$$

$$+ \left[\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)\Gamma\left(1-k\right)\right]^{-1} \int\limits_{t}^{T} \nu\left(s\right) s^{-k} t^{(k-1)/2} F\left(k, 1, \frac{k+1}{2}; \frac{t}{s}\right) ds.$$

Бу тенгликда биринчи қўшилувчига

$$F\left(a, b, c; 1\right) = \frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(c-a-b\right)}{\Gamma\left(c-a\right)\Gamma\left(c-b\right)}, \quad c-a-b > 0$$

формулани қўллаб [1,16], иккинчи ва учинчи қўшилувчиларга

$$F\left(a,b,c;z\right)=\left(1-z\right)^{c-a-b}F\left(c-a,c-b,c;z\right)$$

формулани қўллаб [1,16], $M_3\left(t\right)$ нинг қуйидаги кўришига эга бўламиз:

$$M_3\left(t\right)=-\left[2\Gamma\left(1-k\right)\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)\right]^{-1}\times$$

$$\times\int\limits_0^t\nu\left(s\right)\left(t-s\right)^{-(1+k)/2}\left(\frac{s}{t}\right)^{1-k}F\left(\frac{1-k}{2},1-k,2-k;\frac{s}{t}\right)ds+$$

$$+\left[\Gamma\left(1-k\right)\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)\right]^{-1}\int\limits_t^T\nu\left(s\right)\left(s-t\right)^{-(1+k)/2}\times$$

$$\times\left(\frac{s}{t}\right)^{(1-k)/2}F\left(\frac{1-k}{2},\frac{k-1}{2},\frac{k+1}{2};\frac{t}{s}\right)ds. \qquad (2.48)$$

$D_{0t}^{(1-k)/2}$ каср тартибли дифференциал операторнинг кўринишини эътиборга олиб, $M_4(t)$ ни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$M_4(t)=\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\left(t-\eta\right)^{(k-1)/2}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_\eta^T\nu\left(z\right)\left(z-\eta\right)^{-k}\left\{\bar{J}_{-k/2}\left[\lambda_2\left(z-\eta\right)\right]-1\right\}dz\right\}d\eta.$$

Каррали интегралда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз:

$$M_4(t)=\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\nu\left(z\right)dz\times$$

$$\times \int\limits_0^z (t-\eta)^{(k-1)/2}(z-\eta)^{-k}\left\{\bar{J}_{-k/2}\left[\lambda_2\left(z-\eta\right)\right]-1\right\}d\eta +$$

$$+\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)\frac{d}{dt}\int\limits_t^T \nu\left(z\right)dz\times$$

$$\times \int\limits_0^t (t-\eta)^{(k-1)/2}(z-\eta)^{-k}\left\{\bar{J}_{-k/2}\left[\lambda_2\left(z-\eta\right)\right]-1\right\}d\eta.$$

Ички интегралларда бўлаклаб интеграллаш қоидасидан фойдаланиб, сўнгра ҳосил бўлган ифодада дифференциаллаш амалини бажариб, $M_4(t)$ нинг қуйидаги ифодасига эга бўламиз:

$$M_4(t)=\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)\int\limits_0^t \nu\left(z\right)\left\{t^{(k-1)/2}z^{-k}\left[\bar{J}_{-k/2}\left(\lambda_2 z\right)-1\right]+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^z (t-\eta)^{(k-1)/2}K_{11}\left(z,\eta\right)d\eta\right\}dz-$$

$$-\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)\int\limits_t^T \nu\left(z\right)\left\{t^{(k-1)/2}z^{-k}\left[\bar{J}_{-k/2}\left(\lambda_2 z\right)-1\right]+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^t (t-\eta)^{(k-1)/2}K_{11}\left(z,\eta\right)d\eta\right\}dz,$$

бу ерда

$$K_{11}\left(z,\eta\right)=$$

$$=-\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\Gamma\left(1-k/2\right)\left(2j-k\right)\left(z-\eta\right)^{2j-k-1}}{j!\Gamma\left(1+j-k/2\right)}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)^{2j}\left|z-\eta\right|^{1-k}O\left(1\right).$$

Энди $M_5(t)$ ни соддалаширишга ўтамиз. Шу мақсадда, $D_{0t}^{(1-k)/2}$ каср тартибли дифференциал операторнинг кўринишидан фойдаланиб, уни

$$M_5(t) = \Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)\frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-\eta)^{(k-1)/2}\times$$

$$\times\left[\int\limits_0^\eta \nu\left(z\right)\left(\eta-z\right)^{-(k+1)/2}\left\{e^{\lambda_1^2(z-\eta)}-1\right\}dz\right]d\eta$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Бу тенгликдаги каррали интегралда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз. Натижада

$$M_5(t) = \Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \nu\left(z\right)dz\times$$

$$\times\int\limits_\eta^t (t-\eta)^{(k-1)/2}(\eta-z)^{-(k+1)/2}\left\{e^{\lambda_1^2(z-\eta)}-1\right\}d\eta \qquad (2.49)$$

тенгликка эга бўламиз.

Дастлаб (2.49) тенгликдаги ички интегралга бўлаклаб интеграллаш қоидасини қўллаймиз, сўнгра ҳосил бўлган ифодада дифференциаллаш амалини бажарамиз:

$$M_5(t) = \Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)\int\limits_0^t \nu\left(z\right)dz\int\limits_z^t (t-\eta)^{(k-1)/2}K_{12}\left(z,\eta\right)d\eta,$$

бу ерда

$$K_{12}\left(z,\eta\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j\lambda_1^{2j}\left[j-\left(k+1\right)/2\right]}{j!}(\eta-z)^{j-1-(k+1)/2} =$$

$$= (\eta - z)^{-(k+1)/2} O\left(1\right).$$

$M_3(t)$, $M_4(t)$ ва $M_5(t)$ ларнинг топилган ифодаларини (2.46) тенгликка қуйсак, $\nu\left(t\right)$ номаълум функцияга нисбатан

$$\nu\left(t\right) + \int\limits_0^T \nu\left(z\right) K_{13}\left(t, z\right) dz = F_1\left(t\right), \quad t \in [0, T] \tag{2.50}$$

кўринишидаги интеграл тенгламага эга бўламиз, бу ерда

$$K_{13}\left(t, z\right) = \begin{cases} K_{14}\left(t, z\right), z < t; \\ K_{15}\left(t, z\right), z > t, \end{cases}$$

$$K_{14}\left(t, z\right) = -\gamma_5 \gamma_6^{-1} 2^{-1} \Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)\left(\frac{z}{t}\right)^{1-k} (t - z)^{-(1+k)/2} \times$$

$$\times F\left[\left(1-k\right)/2, 1-k, 2-k; z/t\right] + \gamma_5 \gamma_6^{-1} \Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right) \times$$

$$\times \left\{ t^{(k-1)/2} z^{-k} \left[\bar{J}_{-k/2}\left(\lambda_2 z\right) - 1\right] + \int\limits_0^z (t - \eta)^{(k-1)/2} K_{11}\left(z, \eta\right) d\eta \right\} +$$

$$+ \Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right) \int\limits_z^t (t - \eta)^{-(k-1)/2} K_{12}\left(z, \eta\right) d\eta,$$

$$K_{15}\left(t, z\right) = \gamma_5 \gamma_6^{-1} \Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)\left(\frac{z}{t}\right)^{(1-k)/2} (z - t)^{-(1+k)/2} \times$$

$$\times F\left[\left(1-k\right)/2, \left(k-1\right)/2, \left(1+k\right)/2; t/z\right] - \gamma_5 \gamma_6^{-1} \Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right) \times$$

$$\times \left\{ t^{(k-1)/2} z^{-k} \left[\bar{J}_{-k/2}\left(\lambda_2 z\right) - 1\right] + \int\limits_0^t (t - \eta)^{(k-1)/2} K_{11}\left(z, \eta\right) d\eta \right\},$$

$$F_1\left(t\right)=2^k\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1-k}{2}\right)D_{0t}^{(1-k)/2}F\left(t\right).$$

Кўрсатиш қийин эмаски,

$$K_{13}\left(t,z\right)=\left(z/t\right)^{(1-k)/2}|t-z|^{-(k+1)/2}K_{16}\left(t,z\right),$$

бу ерда $K_{16}\left(t,z\right)\in C\left(\left[0,T\right]\times\left[0,T\right]\right)$.

Буни эътиборга олиб, (2.50) тенгламада

$$|t-z|^{-(k+1)/2}K_{16}\left(t,z\right)=K_{17}\left(t,z\right),$$

$$\nu\left(t\right)t^{(1-k)/2}=\rho\left(t\right),\quad F_1\left(t\right)t^{(1-k)/2}=F_2\left(t\right)$$

белгилаш киритсак, $\rho\left(t\right)$ функцияга нисбатан

$$\rho\left(t\right)+\int\limits_0^T\rho\left(z\right)K_{17}\left(t,z\right)dz=F_2\left(t\right),\quad t\in\left(0,T\right)\tag{2.51}$$

интеграл тенгламага эга бўламиз. (2.51) - ядроси суст махсусликка эга бўлган Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб, у (2.39) интеграл тенгламага эквивалент. Унда (2.51) га мос ушбу бир жинсли интеграл тенглама

$$\rho\left(t\right)+\int\limits_0^T\rho\left(z\right)K_{17}\left(t,z\right)dz=0,\quad t\in\left[0,T\right]\tag{2.52}$$

(2.40) бир жинсли интеграл тенгламага эквивалентдир. (2.40) интеграл тенглама фақат тривиал ечимга эга бўлгани учун (2.52) бир жинсли интеграл тенглама ҳам фақат тривиал ечимга эга бўлади.

Агар $\varphi_2\left(T\right)=0$, $\varphi_2\left(t\right)\in C\left[T/2,T\right]\cap C^3\left(T/2,T\right)$, ${\varphi'}_2\left(t\right)=\left(T-t\right)^{-\varepsilon}\tilde{\varphi}_2\left(t\right)$, $\varepsilon<1$, $\tilde{\varphi}_2\left(t\right)\in C^2\left[T/2,T\right]$ шартлар бажарилса, $F_2\left(t\right)\in C\left[0,T\right]\cap C^2\left(0,T\right)$ бўлади. У ҳолда Фредгольм алтернативасига кўра (2.50) интеграл тенгламанинг ечими мавжуд ва ягона бўлиб, бу ечим $C\left[0,T\right]\cap C^2\left(0,T\right)$ синфга тегишли бўлади.

$\rho\left(t\right)$ номаълум функция (2.51) тенгламадан топилгандан сўнг, $\nu\left(t\right)=\rho\left(t\right)t^{(k-1)/2}\in C^{2}\left(0,T\right)\cap L_{2}\left[0,T\right]$ маълум бўлади ва $\tau\left(t\right)$ функция (2.38) тенглик билан аниқланади. Шундан сўнг масаланинг ечими Q_1 ва Q_2 соҳаларда мос равишда (2.28) ва (2.31) формулалар билан аниқланади.

2.2-масала тўла ҳал этилди.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. -М .: Наука, 1965. 296 с.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя.Функции параболического цилиндра.ортогональные полиномы. -М .: Наука, 1966. 296 с.
3. Джураев Т.Д. Уравнения смешанного и смешанно-составного типов. -Ташкент: Фан,1979, 238 с.
4. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. -Ташкент: Фан, 1996, 220 с.
5. Зикиров О.С. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар. -Тошкент:Университет, 2012, 260 б.
6. Ильин А.М., Калашников А.С., Олайник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // УМН, 1962, Т.17,Вып.3. -С.3-141.
7. Керефов А.А. Об одной краевой задаче Жевре для параболического уравнения с знакопеременным разрывом первого рода у коэффициента при производной по времени // Дифференциальные уравнения.-Минск. 1974, Т.10, N1.-С.69-77.
8. Акбарова М. Х . Нелокальные краевые задачи для параболических уравнений смешанного типов. Автореферат на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. -Ташкент, 1995,17с.
9. Мусхелишвили Н.И. Сингульярные интегральные уравнения. -М.: Наука, 1968, 512 с.

10. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики.-М.:Физматлит, 2001.
11. Салоҳиддинов М.С. Математик физика тенгламалари. -Тошкент: Ўзбекистон, 2002, 448 б.
12. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar. -T: Yangiyul polygraph service, 2007, 256 b.
13. Салоҳитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром.-Ташкент: Фан, 1997, 168 с.
14. Самко С. Г., Килбас А.А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.-Минск: Наука и техника,1987, 688 с.
15. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа.-М.: Высшая школа, 1985, 304 с.
16. Уринов А.К. Махсус функциялар ва махсус операторлар. -Фарғона: Фарғона нашриёти, 2011,112 б.
17. Уринов А.К., Маманазаров А.О. Аралаш параболик тенглама учун бир чегаравий масала ҳақида // ФДУ хабарлари. 2012, N3, 44-46 бетлар.
18. Уринов А.К., Маманазаров А.О. Аралаш параболик тенглама учун бир нолокал чегаравий масала ҳақида // ФДУ хабарлари. 2014, N2, 5-10 бетлар.
19. Терсенов С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. - Новосибирск, 1985, 104 с.
20. Фихтенгольц Г.М. Математик анализ асослари. 1-том.-Тошкент: Ўқитувчи, 1970, 488 б.
21. Фихтенгольц Г.М. Математик анализ асослари. 2-том.-Тошкент: Ўқитувчи, 1972, 472 б.

22. Gevrey M. Sur les equations aux derivees partielles du type parabolique // J.Math. Appl.1913, T.9,Sec.6.-P. 305-475.
23. Уринов А.К. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар.-Тошкент: MUMTOZ SO'Z, 2014., 164 б.