O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

Qo‘l yozma huquqida

UDK 517.55

OLIMBAYEV TO‘LQIN G‘AYRAT O‘G‘LI

R SINFGA TEGISHLI CHEKSIZ TARTIBLI FUNKSIYALARNING NOZIK ANALITIKLIGI

5A130101-Matematika(matematik analiz)

Magistr akademik darajasini olish

uchun yozilgan dissertatsiya

Ilmiy rahbar: **Akademik A. Sadullayev**

Urganch-2018

MUNDARIJA

KIRISH

Mavzuning dolzarbligi. Nozik analitik funksiyalar zamonaviy matematikaning muhim tadqiqot ob’yektlaridan biridir. Ushbu sohada tadqiqot olib borayotganlar orasida B. Fuglede, S.El Marzguioui, J. Wiegerinck, A.Edigarian, D.Coman, N.Levenberg, E.Poletsky kabi matematika sohasining mashhur namoyondalarini ko‘rish mumkin.

1972-yilda A.A.Gonchar tomonidan analitik funksiyalarni tez ratsional approksimatsiya qilinishi va ularning bir qiymatli analitik davom etishi o‘rtasida uzviy bog‘liqlik mavjudligi ko‘rsatib berilgan. Keyinchalik, analitik funksiyalarning bir qiymatliligini lokal shartli ko‘p kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar uchun ham o‘rinli bo‘lishi isbotlangan. Analitik funksiyalarni ratsional funksiyalar bilan tez yaqinlashtirish mumkin bo‘lgan sinfi R (Gonchar sinfi) alohida ahamiyat kasb etgani bois, keyingi tadqiqotlarda bu sinfning xususiyatlarini o‘rganish dolzarb masalalarga aylandi. Shu sababli Gonchar sinfining nozik topologiyadagi analitik funksiyalar bilan bog‘liqligini o‘rganish masalalari yuzaga keldi.

Ushbu dissertasiya ishi R^0 sinfga tegishli cheksiz tartibli funksiyalarning nozik analitikligini o‘rganishga bag’ishlangan bo‘lib kirish, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Birinchi bob ikkita paragrafdan iborat bo`lib, ratsional approksimatsiya haqidagi klassik teoremalar, Gonchar sinfi haqida zarur ma’lumotlar hamda ularning xossalari keltirilgan.

Ikkinchi bob ikki paragrafdan iborat. Bu bobda nozik topologiyalar, nozik analitik funksiyalar va ularning xossalari o‘rganilgan.

Uchinchi bobda R^0 sinfga tegishli funksiyalarning nozik analitikligi, va ularning ba’zi muhim xossalari o`rganiladi.

Tadqiqotning maqsadi. R^0 sinfga tegishli chekli funksiyalarning nozik analitikligi, va ularning ba’zi muhim natijalar o`rganish.

Tadqiqotning vazifasi. Ratsional funksiyalar bilan tez yaqinlashtirish mumkin bo‘lgan analitik funksiyalar uchun nozik analitik davom qilish shartlarini o‘rganish.

Tadqiqotning obyekti. Nozik analitik funksiyalarning xossalari, tez ratsional aproksimatsiya.

Tadqiqotning predmeti. Analitik funksiyalar, Nozik analitik funksiyalar.

Tadqiqotning usullari. Ko‘p kompleks o‘zgaruvchining funksiyalar nazariyasi, kompleks potensiallar nazariyasi usullari.

Tadqiqotning natijalarining ilmiy jihatdan yangilik darajasi. Mazkur ishning asosiy natijalari yangi.

Tadqiqotning natijalarining amaliy ahamiyati va tatbiqi. Olingan natijalar va qo‘llanilgan usullar analitik funksiyalarni maxsusliklarini o‘rganishga tatbiq qilinadi.

Ish tuzilishi va tarkibi. Dissertatsiya ishi kirish, uchta bob, xulosa, hamda adabiyotlar ro‘yhatidan iborat. Har bir bob bo‘limlardan tuzilgan.

Bajarilgan ishning asosiy natijalari. Dissertatsiya ishida quyidagi natija olindi:

R^0 sinfga tegishli va ratsional funksiyalar bilan ma’lum yaqinlashtirilish tartibiga ega funksiyalarning butun kompleks tekislikka nozik analitik davom etishi isbotlangan.

Xulosa va takliflarning qisqacha umumlashtirilgan ifodasi. Mazkur dissertatsiya ishida ratsional funksiyalar bilan tez yaqinlashtiriluvchi analitik funksiyalarning nozik analitiklik xususiyati o‘rganilgan bo‘lib, barcha olingan natijalar nazariy ahamiyatga molik va funksiyalar nazariyasi bo‘yicha keyingi tadqiqotlarda qo‘llanilishi mumkin.

I bob. Ratsional approksimatsiyalar

1.1 Ratsional approksimatsiya haqidagi klassik teoremalar

1.1.1 - teorema. $f \in A$ va $a_1, a_2, \dots, a_n$ lar $\{z : |z| > 1\}$ to'plamdan olingan turli nuqtalar bo‘lsin. U holda

$$r(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{(z - a_1)(z - a_2)\dots(z - a_n)} \tag{1.1.1}$$

ko‘rinishdagi $r(z)$ ratsional funksiyalar uchun

$$\int_{\partial D} |f(z) - r(z)|^2 |dz|$$

integral o‘zini minimum qiymatiga faqat va faqat $r(z)$ ratsional funksiyani $0, \frac{1}{\bar{a}_1}, \dots, \frac{1}{\bar{a}_n}$ nuqtalarda interpolyatsiya qilgan holdagina erishadi.

Isbot. r^* - (1.1.1) ko‘rinishdagi interpolyatsion ratsional funksiya, u yagona aniqlangan, $f - r^*$ funksiya 1 va $\frac{1}{z - a_k}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ lar bilan ortogonal ekanini ko‘rsatamiz. Ha qiqatan ham $(f - r^*)(0) = 0$ ekanidan

$$\int_{\partial D} (f - r^*) 1 |dz| = \frac{1}{i} \int_{\partial D} (f - r^*) \frac{dz}{z} = 0$$

bo‘ladi, chunki $f - r^*$ farq $z = \frac{1}{\bar{a}_k}$ nuqtada ham nolga aylanadi. Shuning uchun

$$\int_{\partial D} |f - r|^2 |dz|$$

integral minimal qiymatga yagona r funksiyada erishadi, aniqrog‘i $r = r^*$ bo‘lganda.

Haqiqatan ham

$$\int_{\partial D} |f - r|^2 |dz| = \int_{\partial D} \left[(f - r^*) + (r^* - r)\right]\overline{\left[(f - r^*) + (r^* - r)\right]} |dz| =$$
$$= \int_{\partial D} |f - r^*|^2 |dz| + \int_{\partial D} |r^* - r|^2 |dz| + 0$$

chunki

$$r^* - r = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{z - a_k} + A_0$$

bu yerda A_k - qandaydir o‘zgarmas (*const*)

Oxirgi tenglikdan ko‘rinib turibdiki, $r^* - r$ ratsional funksiya $z = a_k$ nuqtada oddiy qutblarga ega funksiya bo‘lib $z \to \infty$ da chegaralangan. Teorema isbot bo‘ldi.

$a_k^{(n)}$ qutb nuqtalarini tanlash bilan $\{r_n\}$ ratsional funksiyalar ketma-ketligi bilan $f(z)$ funksiyaga yaqinlashishimiz mumkin ya’ni $r_n(z) \rightrightarrows f(z)$ $\left(n \to \infty, z \in \bar{D}\right)$

Umumlashgan Koshi formulasi.

1.1.2 – teorema. $K \subset C$ kompakt va $U \supset K$ - biror ochiq to‘plam bo‘lsa, u holda $U \setminus K$ da yotuvchi chekli sondagi gorizontal va vertikal orientirlangan to‘g‘ri chiziqli $g_1, g_2, \ldots, g_n$ kesmalar topilib, U da regulyar f funksiya uchun

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(x)}{x - z} dx \quad (z \in K)$$

tenglik o‘rinli. Bunda $\Gamma = g_1 \cup g_2 \cup \ldots \cup g_N$

Isbot. $d = dist\left(K, \partial U\right) > 0$ deb olamiz. Tekislikda h $\left(h\sqrt{2} < d\right)$ qadamli kvadrat to‘r quramiz. K kompakt bilan kesishuvchi barcha yopiq kvadratchalarni $Q_1, Q_2, \ldots Q_p$ orqali nomerlab chiqamiz. U holda

$$K \subset \cup Q_j \subset U$$

munosabat o‘rinli.

$z_0 \in Q_j \cap K$ desak, u holda z_0 nuqtani d atrofi to‘laligicha U da yotadi. Demak, Q_j kvadrat diametri $h\sqrt{2} < d$ ekanidan Q_j ham U ni ichida yotadi, chunki $U_d\left(z_0\right) \supset Q_j$ munosabat o‘rinli.

Endi har bir Q_j kvadrat chegarasi musbat orientirlangan bo‘lsin. Agar Q_j va Q_k kvadratlar umumiy tomonga ega bo‘lsa, bu tomonni tashlab yuboramiz Q_j kvadratlarni qolgan orientirlangan tomonlarini $g_1, g_2, \ldots, g_N$ orqali belgilaymiz. Hech bir g_j kesma K to‘plam bilan kesishmaydi. Aks holda bu kesma ikkita qo‘shni kvadratga tegishli bo‘lib qolar edi va uni biz tashlab ketgan bo‘lardik.

Shunday qilib

$$\Gamma = g_1 \cup g_2 \cup \ldots \cup g_N \subset U \setminus K$$

Endi f funksiya U da regulyar bo‘lsin, $z \in K$ biror nuqta. U holda biror j_0 uchun $z \in Q_{j_0}$ bo‘ladi. Agar $z \in \mathring{Q}_{j_0}$ bo‘lsa u holda

$$f\left(z\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial Q_{j_0}} \frac{f\left(\xi\right)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \sum_j \int\limits_{\partial Q_j} \frac{f\left(\xi\right)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f\left(\xi\right)}{\xi - z} d\xi$$

Agar $z \in \partial Q_{j_0}$ bo‘lsa bu holda ham z 2 ta qo‘shni kvadratchalarga tegishli bo‘lib qoladi, shu boisdan $z \in G$, $f(z)$ uzluksizligidan yuqoridagi formula bu holda ham saqlanadi.

Ratsional approksimatsiya haqidagi Runge teoremasi

Biror $K \subset \mathbb{C}$ kompaktda aniqlangan f funksiyani $R(z)$ ratsional funksiyalar bilan yaqinlashtirish masalasini qaraylik

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$P(z)$ va $Q(z)$ lar qisqarmaydigan ko‘phadlar.

Har qanday ratsional funksiyani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$R(z) = \sum_j P_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right) + P_0(z)$$

va bunda j indeks chekli to‘plamda o‘zgaradi, P_0, P_j - ko‘phadlar

1.1.3-teorema. (Runge, 1885). $K \subset \mathbb{C}$ kompakt to‘plam va f funksiya K da regulyar funksiya bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun qutblari K^C da joylashgan shunday R - ratsional funksiya topilib, $K^C = \mathbb{C} \setminus K$

$$\left|f(z) - R(z)\right| < \varepsilon \qquad (z \in K)$$

bo‘ladi.

Isbot. 1.1.3- teoremadan foydalanamiz va integralni Riman yig‘indilari bilan yaqinlashtiramiz. f funksiya K da regulyar ekanidan shunday $U \supset K$ atrof topilib f bu atrofda regulyar bo‘ladi. Γ kesmalar birlashmasi 1.1.2-teoremadagi kabi tanlangan bo‘lsin

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} \qquad (\xi,\ z) \in \Gamma \times K$$

funksiyani qaraymiz.

Bu funksiya $\Gamma \times K$ da uzluksiz. Demak, tekis uzluksiz ham. Shuning uchun $\forall \varepsilon' > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ musbat son topilib, $\forall x, x' \in \delta$ va $z \in K$ uchun $|x - x'| < \delta$ dan

$$\left| \frac{f(x)}{x - z} - \frac{f(x')}{x' - z} \right| < \varepsilon'$$

Γ ni Γ_j bo‘laklarga shunday ajtaramizki, bunda Γ_j bo‘laklar uzunligi δ dan kichik bo‘lsin, $x_j \in \Gamma_j$ nuqtalar tanlab olamiz, u holda

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{f(x)}{x - z} dx - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{f(x_j)}{x_j - z} dx \right| < \frac{\varepsilon'}{2\pi} |\Gamma_j| \quad (z \in K)$$

j bo‘yicha yig‘ib

$$|f(z) - R(z)| < \frac{\varepsilon'}{2\pi} |\Gamma| \quad (z \in K)$$

tengsizlikka kelamiz va bunda R - ratsional funksiya quyidagi ko‘rinishda

$$R(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_j \frac{f(x_j)}{x_j - z} \int_{\Gamma_j} dx$$

va bu ratsional funksiya $x_j \in \Gamma_j \subset K^c$ nuqtalarda oddiy qutbga ega.

$\varepsilon' = \dfrac{2\pi\varepsilon}{|\Gamma|}$ deb tanlasak, teoremaning tasdig‘iga kelamiz.

Teorema isbotidan ko‘rinadiki R ratsional funksiya

$$R(z) = \sum_j \frac{C_j}{z - x_j} \quad \text{bunda } x_j \in \Gamma$$

koʻrinishda ε ni kichiklashtirish natijasida x_j qutblar Γ da quyuqlashadi (zichlashadi) lekin K da yaqinlashmaydi.

Qutblarni almashtirish.

Bu metodning maqsadi Runge teoremasi bilan bogʻliq, bunda berilgan funksiyani R_1 ratsional funksiya bilan yaqinlashtirilgandan keyin R_1 ni oʻzini boshqa bir R_2 - qutblari boshqa nuqtalarda boʻlgan ratsional funksiya bilan yaqinlashtirish masalasi qaraladi. Buni har doim amalga oshirish mumkin emas.

Masalan, agar $K = \{z : |z| = 1\}$, $R_1(z) = \frac{1}{z}$, R_2 - faqat $z = 2$ nuqtada qutbga ega ratsional funksiya boʻlsin u holda

$$\max_{z \in K} |R_1(z) - R_2(z)| < 1$$

tengsizlik oʻrinli boʻlmaydi.

1.1.4- teorema. $M \subset \mathbb{C}$ ixtiyoriy toʻplam, γ - $\bar{M}$ bilan kesishmaydigan Jordan yoyi, z_1 va z_2 nuqtalar uning oxirlari boʻlsin. U holda har qanday P koʻphad uchun va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday Q koʻphad topilib

$$\left| P\left(\frac{1}{z - z_1}\right) - Q\left(\frac{1}{z - z_2}\right) \right| < \varepsilon \quad (z \in M) \tag{1.1.2}$$

oʻrinli.

Isbot. Farazga koʻra barcha $z \in M$ uchun $dist(\gamma, z) \geq d > 0$ $z_1 = x_0, x_1, \dots x_N = z_2$ nuqtalar γ dan olingan boʻlib

$$|x_j - x_{j+1}| < \delta \quad (j = 0,1,\dots,N-1)$$

bo‘lsin

$(z - z_1)^{-1}$ funksiya $\{z : |z - x_1| \le \delta\} \cup \{\infty\}$ to‘plamda regulyar ekanidan ixtiyoriy $\eta > 0$ va $|z - x_1| \le \delta$ uchun shunday P ko‘phad topilib

$$\left|\frac{1}{z - z_1} - P\left(\frac{1}{z - x_1}\right)\right| < \eta \qquad (z \in M)$$

bo‘ladi.

Xususan $z \in M$ da ham bajariladi. Shuning uchun P_1 ko‘phad topilib $z \in M$ da

$$\left|P\left(\frac{1}{z - z_1}\right) - P_1\left(\frac{1}{z - x_1}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{N}$$

Xuddi shunga o‘xshash P_2 ko‘phad topilib

$$\left|P_1\left(\frac{1}{z - x_1}\right) - P_2\left(\frac{1}{z - x_2}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{N} \qquad (z \in M)$$

bo‘ladi va hakoza P_N ko‘phad topilib,

$$\left|P_{N-1}\left(\frac{1}{z - x_{N-1}}\right) - P_N\left(\frac{1}{z - z_2}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{N} \qquad (z \in M)$$

ko‘rinib turibdiki $Q = P_N$ uchun (22) tengsizlik bajariladi. Teorema isbot bo‘ldi.

Endi 1.1.4- teoremani Runge teoremasidagi vaziyatga $M = K$ bo‘lganda qo‘llaymiz. Bunda

$$R(z)=\sum_j \frac{C_j}{z-x_j}$$

va $x_j \in \Gamma$, lekin 1.1.4-teoremaga asosan bu qutblarni x_j^* nuqtaga ko‘chirish mumkin agar x_j^* va x_j lar K^c ning ayni bir komponentasida bo‘lsa biror Q ko‘phad uchun

$$\left|\frac{C_j}{z-x_j}-Q_j\left(\frac{1}{z-x_j^*}\right)\right|<\varepsilon \cdot 2^{-j} \qquad (z\in K')$$

bo‘ladi. U holda

$$R^*(z)=\sum_j Q_j\left(\frac{1}{z-x_j^*}\right)$$

ratsional funksiya x_j^* nuqtalarda qutbga ega bo‘lib,

$$\left|f(z)-R^*(z)\right|<2\varepsilon \qquad (z\in K)$$

shartni qanoatlantiradi.

Yuqoridagilarga asoslanib Runge teoremasiga quyidagicha qo‘shimchalar kiritish mumkin.

1. K^c to‘plam har bir komponentasida z_j nuqtalar tanlangan bo‘lsin. U holda R - ratsional funksiyani shunday tanlash mumkinki, bunda aynan z_j nuqtalar qutb bo‘ladi.

2. K^c ni chegaralanmagan komponentasi uchun qutb sifatida $z=\infty$ nuqtani tanlash mumkin.

Bunda xususan K^c bog‘lamli bo‘lgan holda ko‘phadlar bilan yaqinlashtirish haqidagi Runge teoremasi kelib chiqadi.

1.2. Gonchar sinfi va Sadullayev kriteriyasi

Analitik funksiyalar bir qiymatli bo‘lishligining lokal sharti.

Aytaylik, (f,U), $U=\{z:|z-z_0|<\Delta\}$ f analitik funksiyaning elementi bo‘lsin. Veyershtrass ma’nosida f funksiyaning tabiiy mavjudlik sohasini Ω_f orqali belgilaymiz. Yetarlicha kichik δ, $0<\delta<\Delta$ radiusli yopiq $K=\{z:|z-z_0|\le\delta\}$ doirani tayinlaymiz. Ushbu kattalikni aniqlab olamiz

$$\rho_n=\rho_n(f,K)=\inf_{a_k,b_k}\max_{z\in K}\left|f(z)-\frac{a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\ldots b_nz^n}\right|.$$

munosabat o‘rinli bo‘lsin. Gonchar tomonidan quyidagi natija isbot qilingan.

1.2.1-teorema. *Agar*

$$\liminf_{n\to\infty}\rho_n^{1/n}=0,\qquad \rho_n=\rho_n(f,K) \tag{1.2.1}$$

bo‘lsa, u holda f o‘zining mavjudlik sohasida bir qiymatli analitik funksiya bo‘ladi.

Bu teoremadan bitta oddiy natijani kelib chiqadi. Aytaylik $F-$ faqat chekli sondagi maxsus nuqtlarga ega, barcha analitik funksiyalar sinfi bo‘lsin. Agar $(f,U)-$ $f\in F$ analitik funksiyalar elementi bo‘lsa, u holda quyidagi shartlar ekvivalent:

1) $f-$ bir qiymatli funksiya $(\Omega_f\ da)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n^{1/n}=0$

3) $\liminf\limits_{n\to\infty}\rho_n^{1/n}=0$

r_n ni ratsional yaqinlashishi bilan bir qatorda ko‘phad bilan yaqinlashish ham o‘rganiladi

$$e_n = e_n(f,K) = \inf_{a_k} \max_{z \in K} \left| f(z) - \left(a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n\right) \right|$$

Har qanday $n \geq 0$ da $e_n \geq r_n$

Yuqoridagi shartdan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\lim_{n \to \infty} \inf e_n^{1/n} = 0, \qquad e_n = e_n(f,K) \tag{1.2.2}$$

Bu shartdan ham yana f funksiya W_f da bir qiymatli ekanligi kelib chiqadi va bundan tashqari W_f ni bir bog‘lamli soha bo‘lishini isbotlash mumkin.

Ma’lumki, agar $\lim_{n \to \infty} e_n^{1/n} = 0$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda f - butun funksiya bo‘ladi. (2) shart bajarilsa, zaruriyligidan funksiya mavjudlik sohasi bir bog‘lamli ekanligini ko‘rsatadi. Masalan, f funksiya J kompleks tekislikda bitta yakkalangan maxsus nuqtaga ega bo‘lganda edi (2) shart bajarilmaydi va bu shart local shart sifatida qo‘lanilishi mumkin bo‘lmaydi. Bundan $W \supset U$ soha qanday bo‘lmasin $\overline{C}$ kengaytirilgan kompleks tekislida $W_f = W$ bilan ustma-ust tushishini ta’kidlab o‘tamiz.

Biz quyidagi standart belgilashlardan foydalanamiz. $\overline{S}$ - to‘plam yopig‘i, $\partial S - S \subset \overline{C}$ to‘plam chegarasi, $A(\Omega)\left(\Omega - \textit{ochiq to`plam}\right) -$ Ω to‘plamdagi barcha bir qiymatli va analitik (regulyar) funksiyalar sinfi. Bu belgilashni istalgan S to‘plam uchun ham saqlaymiz. ($f \in A(S)$ yozuv $\Omega = \Omega_f$ ochiq to‘plam va $\tilde{f} \in A(\Omega)$ funksiya mavjud bo‘lib, S to‘plamda f bilan ustma-ust tushishligini bildiradi. Aytaylik E - chegaralangan yopiq to‘plam bo‘lsin. E to‘plamning logarifmik (garmonik) sig‘imini $C(E)$ orqali belgilaymiz. Agar E to‘plam to‘ldiruvchisi bog‘lamli va Dirixle masalasiga nisbatan regulyar bo‘lsa E to‘plam regulyar deyiladi. bu quyidagiga ekvivalent:

$G=\overline{\mathbb{C}}\setminus E$ soha $\overline{G}\setminus\{\infty\}$ da uzluksiz $g(z)=g(z,\infty)$ Grin funksiyasiga ega. Bitti nuqtaga ega, istalgan continium qo‘shimcha bog‘lamlilik bilan regulyar to‘plam bo‘ladi. E da uzluksiz φ funksiya uchun faraz qilamiz

$$\|\varphi\|_E=\max_{z\in E}|\varphi(z)| \tag{1.2.3}$$

oddiy $C(E)$ orqali E da uzluksiz bo‘lsin barcha funksiyalar fazosini belgilaymiz r_n orqali darajasi n dan yuqori bo‘lmagan z ning ratsional funksiyalarini begilaymiz ($r_n = r_n/q_n$ bu yerda, r_n, q_n darajasi n dan yuqori bo‘lmagan z ning ko‘phadlari). Istalgan holatda ratsional funksiya tartibi unda belgilangan indeksdan oshmaydi. r ratsional funksiya uchun $r\in A(S)$ yozuv r ni barcha qutblarni S to‘plam tashqarisida yotganini bildiradi.

1.2.2-teorema. *Aytaylik E regulyar to‘plam, D - E ni o‘z ichiga oluvchi ixtiyoriy (istalgan) soha, $\Lambda\{n_k\}$ - o‘suvchi natural sonlar ketma-ketligi bo‘lsin. Aytaylik, $f\in A(D)$ va shunday $\{r_h\}_{n\in\Lambda}$ ratsional funksiyalar ketma-ketligi mavjud bo‘lib,*

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\Lambda}}\|f-r_n\|_E^{1/n}=0$$

bo‘lsin. U holda qanday $F, E\subset F\subset D$ yopiq to‘plam uchun $\{r_n^*\}_{n\in\Lambda}$ $r_n^*\in A(F)$, $n\in\Lambda$ ratsional funksiyalar ketma-ketligi mavjud bo‘lib,

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in A}}\|f-r_n^*\|_F^{1/n}=0 \tag{1.2.4}$$

bo'ladi.

Ushbu teorema isboti qiyidagi 2 ta lemmaga tayanadi.

1.2.1-lemma. *Aytaylik* E - *regulyar to'plam,* G - *ixtiyoriy soha,* E_1 - G *sohaning yopiq qism to'plami bo'lsin.* $l = l(E,G,E_1)$ *doimiy koeffitsiyent mavjudki,* $\forall r_n \in A(G)$ *ratsional funksiyalar uchun*

$$\|r_n\|_{E_1} \le l^n \cdot \|r_n\|_E .$$

tengsizlik o'rinli bo'lib, bu yerda $g(z,b)$ *orqali* $b \in \overline{C} \setminus E$ *nuqtada maxsuslikka ega,* E *ning to'ldiruvchisi uchun Grin funksiyasini belgilangan.*

Ushbu

$$\ln \frac{|r_n(z)|}{\|r_n\|_E} - \sum_k g(z,b_k)$$

funksiya, $\overline{C} \setminus E$ da subgarmonik, va bu sohaning chegarasida nomusbat(musbat emas).

Maksimum prinsipini qo'llab va Grin funksiyaning simmetriklik xossasini hisobga olib, quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$|r_n(z)| \le \|r_n\|_E \exp\left[\sum_k g(b_k,z)\right] \quad z \in \overline{C} \setminus E$$

Faraz qilamiz, $z \in G \cap E$ uchun $l(z) = 1$ va $z \in G \setminus E$ uchun $l(z) = \sup\limits_{b \in \overline{C} \setminus G} e^{g(b,z)}$ b_k ning barcha qutblari G ning tashqarisida yotadi, oldingi tengsizlikdan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|r_n(z)| \le \|r_n\|_E \, l^n(z), \quad z \in G$$

Demak; $1 \le l(z) < +\infty$ $l(z)$ - G sohada uzluksiz funksiya ekanligini ta'kidlab o'tamiz. $l = \max\limits_{z\in E_1} l(z)$ deb faraz qilib lemma tasdig'iga ega bo'lamiz.

Quyidagi lemma A. Kartanga tegishli

1.2.2-lemma. Har qanday $d > 0$ *haqiqiy son va* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *kompleks sonlar olmaylik kompleks tekislikda umumiy diametrlar yig'indisi* d *ga teng bo'lgan shunday aylanalar sistemasini topish mumkin-ki, bu aylanalar tashqarisida yotuvchi har bir* z *nuqta uchun*

$$|z-z_1|\cdot|z-z_2|\ldots|z-z_n| > \left(\frac{d}{4e}\right)^n > \left(\frac{d}{12}\right)^n$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Teorema2. *Aytaylik,* E *va* E_1 *- regulyar to'plamlar,* $\Lambda = \{n_k\}$ *- o'suvchi natural sonlar ketma-ketligi bo'lsin. Faraz qilamiz* $\{s_n\}_{n\in\Lambda}$ *va* $\{t_n\}_{n\in\Lambda}$ *ratsional funksiyalar ketma-ketligi* E *da* $f \in C(E)$ *funksiyaga tekis yaqinlashuvchi bo'lsin va*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} \|f - s_n\|_E^{\frac{1}{n}} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} \|f - t_n\|_E^{\frac{1}{n}} = 0$$

tenglik bajarilsin. Agar bu ketma-ketliklar E_1 *(mos ravishda* $f_s \in S(E_1)$ *va* $f_t \in C(E_1)$ *funksiyalarga) to'plamda ham tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda ularning limit funksiyalari* E_1 *da ustma-ust tushadi.*

$$f_s(z) \equiv f_t(z)\,,\ z \in E_1.$$

1.2.1-ta'rif. $0 \in \mathbb{C}^n$ *nuqtada analitik bo'lgan* f *funksiyani biror* $\bar{B} = \bar{B}(0,r)$, $r > 0$ *atrofda tez ratsional approksimatsiya qildirish mumkin bo'lsa, ya'ni* f *funksiyaning* $\{r_m : \deg r_m \le m\}$ *ratsional funksiyalar to'plamidan og'ishi* $\rho_m = \rho_m(f,\bar{B}) = \inf\limits_{r_m} \sup\limits_{\bar{B}} |f(z) - r_m(z)|$ *uchun ushbu*

$$\lim_{m\to\infty} \rho_m^{\frac{1}{m}}(f,\bar{B}) = 0$$

tenglik bajarilsa, u holda bu funksiya R^0 *sinfga tegishli deyiladi.*

R^0 belgilashda "0" yuqori indeks $f \in R^0$ analitik funksiya qaysi nuqtada qaralayotganligini anglatadi.

Sadullayev kriteriyasi

1.2.3–teorema. $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in \bar{U}; |z| \le 1$ *birlik doira atrofida golomorf bo'lib,*

$$V_k = \sup_{j_1,\dots,j_k} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} a_{j_1} & a_{j_1+1} & \dots & a_{j_1+k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j_k} & a_{j_k+1} & \dots & a_{j_k+k-1} \end{vmatrix} \qquad k = 1,2,\dots,$$

bo'lsin. Bu yerda $\operatorname{mod}|\cdot|$ *determinantni modulini bildiradi. U holda* f *funksiya* R^0 *sinfga tegishli bo'lishi uchun* $\lim V_k^{\frac{1}{k^2}} = 0$ *bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. $f = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ funksiya $\bar{U} = \{|z| \le 1 \subset C\}$ birlik doira atrofida golomorf bo'lsin. $q_k = \sum\limits_{j=0}^{k} c_j z^j$ - k – darajali ko'phad bo'lib $c_o = 1$ bo'lsin.

$$A_j^{(k+1)} = (a_j a_{j+1} \ldots a_{j+k}) \quad k, j = 0, 1 \ldots$$
$$C^{(k+1)} = (c_k c_{k-1} \ldots c_0)$$

larni C^{k+1} fazo vektorlari deb faraz qilamiz.

$$< a, b > = a_0 b_0 + \ldots + a_k b_k$$

bo‘lsin. U holda

$$f \cdot q_k = p_k + \sum_{j=k}^{\infty} < A_{j-k+1}^{(k+1)} C^{(k+1)} > z^{j+1}$$

Buerda p_k – biror k –darajali ko‘phad $fq_k - p_k$ ayirmani minimallashtirish maqsadida

$$h_{k+1} = \inf_{C^{(k+1)}} \sup_{j \geq 1} |< A_j^{(k+1)}, C^{(k+1)} >|$$

kattaliklarni kiritamiz. Bu h_k ketma–ketlik quyidagi xossalarga ega.

a) $h_k \geq h_{k+1}$ $k = 1, 2, \ldots$ va f funksiya faqat va faqat $h_{k+1} = 0$ bo‘lgandagina k – darajali ratsional funksiya bo‘ladi.

b) $f \in R^0 \Leftrightarrow \overline{\lim_{k \to \infty}} h_k^{\frac{1}{k}} = 0$

Aslida $f \in R^0$ bo‘lsa, shunday $r_k(z)$ ratsional funksiyalar ketma–ketligi topilib,

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} || f - r_k ||_U^{\frac{1}{k}} = 0$$

bo‘ladi.

$$r_k(z) = \frac{p_k(z)}{q_k(z)} \qquad \text{va} \qquad q_k(z) = 1 + c_1 z + \ldots + c_k z^k$$

bo‘lsin. q_k ko‘phadning nollari $\overline{U}$ birlik doiradan tashqarida ekanidan.

$$1+\sum_{j=1}^{k}|c_j|\le 2^k .$$

Natijada

$$\|q_k\|_{\overline{U}}\le 2^k \qquad \text{va} \qquad \|q_k f - p_k\|_{\overline{U}}^{\frac{1}{k}}\to 0$$

bo‘ladi. Bu yerdan $k\to\infty$ da

$$h_{k+1}^{\frac{1}{n+1}}\le \sup_{j\ge 1}|< A_j^{(k+1)},C^{(k+1)} >|^{\frac{1}{k+1}}\le \|q_n f - p_k\|_{\overline{U}}^{\frac{1}{k+1}}\to 0$$

Aksincha, agar

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, h_k^{\frac{1}{k}} = 0$$

bo‘lsa, u holda $r_k = \dfrac{p_k}{q_k}$ ketma–ketlik topilib, $|z|<\dfrac{1}{2}$ doirada

$$|q_k f - p_k|\le h_{k+1}\frac{1}{2^k} \qquad k = 1,2,\dots$$

tengsizlik bajarilib, r_k o‘lchov bo‘yicha f ga tez yaqinlashadi va $f\in R^0$ bo‘ladi.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki h_k kattaliklarni nolga yaqinligi geometrik jihatdan $A_j^{(k)}$ vektorlarga tortilgan jism C^k fazodagi yassi jismga yaqin. Boshqa tomondan bunday yaqinlikni V_k kattaliklar orqali ham xarakterlashimiz mumkin.

1.2.3-lemma. h_k va V_k kattaliklar o‘zaro quyidagicha munosabat bilan boђlangan:

$$h_{k+1}\le \frac{V_{k+1}}{V_k}\le (k+1)h_{k+1} \tag{1.2.5}$$

Isbot. V_k kattalik maksimum qiymatga $A_{j_1}^{(k)},\dots,A_{j_n}^{(k)}$ vektorlarda erishsin, ya’ni

$$V_k = \bmod \begin{vmatrix} a_{j_1} a_{j_1+1} \dots a_{j_1+k-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{j_k} a_{j_k+1} \dots a_{j_k+k-1} \end{vmatrix}$$

bo‘lsin. Ixtiyoriy fiksirlangan j lar uchun

$$V_{k+1} \geq \bmod \begin{vmatrix} a_{j_1} a_{j_1+1} \dots a_{j_1+k} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{j_k} \; a_{j_k+1} \dots a_{j_k+k} \\ a_j \; a_{j+1} \dots a_{j+k} \end{vmatrix} = | a_j \Delta_1 + a_{j+1} \Delta_2 + \dots + a_{j+k} \Delta_{k+1} |$$

Bu yerda Δ_j lar mos element algebraik to‘ldiruvchisidan iborat. Bundan $C^{(k+1)}$ ni $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_{k+1}},\dots,\frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}},1\right)$ qilib tanlasak, barcha $j \geq 1$ uchun

$$V_{k+1} \geq V_k |< A_j^{(k+1)}, C^{(k+1)} >|$$

ga ega bo‘lamiz. Natijada $V_{k+1} \geq V_k \sup_j |< A_j^{(k+1)}, C^{(k+1)} >|$ va

$$\frac{V_{k+1}}{V_k} \geq h_{k+1}$$

bo‘ladi.

Ikkinchi tomoni uchun yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ son olib shunday $C^{(k+1)}$ vektor topamizki,

$$| \left\langle A_j^{(k+1)}, C^{(k+1)} \right\rangle | < h_{k+1} + \varepsilon, \qquad j = 1,2,\dots$$

bo‘lsin. Agar V_{k+1} o‘zining maksimum qiymatiga $A_{j_1},\dots,A_{j_{k+1}}$ vektorlarda erishsa, u holda

$$V_{k+1} = \operatorname{mod}\begin{vmatrix} a_{j_1}\dots a_{j_1+k} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{j_{k+1}}\dots a_{j_{k+1}+k}\end{vmatrix} = \operatorname{mod}\begin{vmatrix} a_{j_1}\dots a_{j_1+k-1} < A_{j_1}^{(k+1)}, C^{(k+1)} > \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{j_{k+1}}\dots a_{j_{k+1}+k-1} < A_{j_{k+1}}^{(k+1)}, C^{(k+1)} >\end{vmatrix} \le$$

$$\le (k+1)\sup_j |< A_j^{(k+1)}, C^{(k+1)} >| V_k \le (k+1)(h_{k+1}+\varepsilon)V_k$$

bo‘lib, $\varepsilon > 0$ sonning ixtiyoriyligidan 1.2.5–tengsizlikni hosil qilamiz.

Teorema isboti. (2) tengsizlikka asosan

$$V_0 h_1 h_2 \dots h_k \le V_k \le V_0 k!\, h_1 h_2 \dots h_k$$

bo‘lib, h_k kattalik xossalaridan foydalanib quyidagi elementar faktni isbot qilish mumkin; istalgan kamayuvchi $a_n \ge 0$ ketma–ketlik uchun

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, a_k^{\frac{1}{k}} \le \lim_{k\to\infty}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_k)^{\frac{1}{k^2}} \le \overline{\lim_{k\to\infty}}\, a_k^{\frac{1}{2k}} \qquad (1.2.6)$$

tengsizlik o‘rinli.

(1.2.6) ni isbot qilish uchun $a = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, a_k^{\frac{1}{k}}$, $A = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_k)^{\frac{1}{k^2}}$

$$a = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, a_k^{\frac{1}{k}}, \quad A = \overline{\lim_{k\to\infty}}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_k)^{\frac{1}{k^2}}$$

a_k ni monotonligidan

$$A = \overline{\lim_{k\to\infty}}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_k)^{\frac{1}{k^2}} \ge \overline{\lim_{k\to\infty}}(a_n^k)^{\frac{1}{k^2}} = a$$

Boshqa tomondan esa $\varepsilon > 0$ sonni fiksirlab k_0 nomerni shunday tanlaymizki, $k \ge k_0$ uchun $a_k^{\frac{1}{k}} \le a + \varepsilon$ bo‘lsin. U holda

$$A = \overline{\lim_{k\to\infty}}(a_{k_0}\dots a_k)^{\frac{1}{k^2}} \le \overline{\lim_{k\to\infty}}(a+\varepsilon)^{\frac{k_0+\dots+k}{k^2}} = (a+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$$

Va $\varepsilon > 0$ ni ixtiyoriyligidan $A \le \alpha^{\frac{1}{2}}$ bo‘ladi. Bu faktdan

$$\varlimsup_{k\to\infty} \eta_k^{\frac{1}{k^2}} = 0 \Leftrightarrow \varlimsup_{k\to\infty} V_k^{\frac{1}{k^2}} = 0$$

munosabat kelib chiqadi.

II BOB. NOZIK TOPOLOGIIYA

2.1 Nozik topologiya.

Metrik fazolarning asosiy tushunchalari (limit nuqta, to‘plamning yopilmasi) atrof hamda ochiq to‘plam tushunchalari yordamida kiritiladi. Bunda atrof va ochiq to‘plamlar ko‘rilayotgan fazoda berilgan metrika bilan aniqlanadi. Umuman, berilgan to‘plamda ochiq to‘plamlar sistemasini aksiomalar yordamida bevosita kiritish mumkin.

2.1.1-ta’rif X to‘plamdagi **topologiya** deb, X ning qism to‘plamlaridan iborat va quyidagi aksiomalarni qanoatlantiruvchi τ to‘plamlar sistemasiga aytiladi:

1⁰. $X \in \tau$, $\varnothing \in \tau$;

2⁰. Agar $\{G_\alpha\} \subset \tau$ bo‘lsa, u holda $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \in \tau$;

bu yerda indekslar to‘plami I ixtiyoriy;

3⁰. $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n \in \tau$ va n ixtiyoriy natural son bo‘lsa, u holda

$$\bigcap_{k=1}^{n} G_k \in \tau .$$

(X, τ) juftlik **topologik fazo** deb ataladi. X ning τ sistemaga tegishli bo‘lgan qism to‘plamlari **ochiq to‘plamlar** deyiladi. Shunday qilib, topologik fazoni berish – bu biror X to‘plamni olib, unda τ topologiyani kiritish, ya’ni X ning ochiq to‘plam deyiladigan qism to‘plamlarini aniqlash, demakdir. Topologik fazoning elementlari uning nuqtalari deb ham ataladi.

Bitta X to‘plamda turli xil topologiyalarni kiritish mumkin bo‘lib, bunda turli topologik fazolar hosil bo‘ladi.

τ_1 va τ_2 sistemalar X dagi ikkita topologiya bo‘lsin. Agar $\tau_1 \subset \tau_2$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, τ_2 topologiya τ_1 topologiyaga nisbatan **kuchliroq topologiya** deyiladi va $\tau_1 \prec \tau_2$ ko‘rinishda yoziladi. Bu holda τ_1 topologiyani τ_2 topologiyaga nisbatan **kuchsizroq(sustroq) topologiya** ham deyiladi.

Nozik topologiya. Bizga ixtiyoriy bir X to‘plam berilgan bo‘lsin. Φ orqali quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyalar sinfini belgilaymiz:

i) $\varphi \in \Phi \Rightarrow \lambda \varphi \in \Phi, \ \forall \lambda \geq 0;$

ii) $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 \in \Phi.;$

iii) $-\infty \in \Phi$.

Bunda $0 \cdot (-\infty) = 0$ deb qabul qilamiz. Shu sababli i) xossa $\lambda = 0$ va φ funksiya ba’zi bir nuqtalarda $-\infty$ bo‘lganda ham ma’noga ega bo‘ladi.

Agar X to‘plamda topologiya berilmagan bo‘lsa, biz unda eng kuchsiz shunday τ_0 topologiyani kiritamizki, bu topologiyada barcha $u(x) \in \Phi$ funksiyalar yuqoridan yarim uzluksiz bo‘ladi. Bu topologiya quyidagi to‘plamlar yordamida hosil qilinadi:

$$\{x \in X : u(x) < a\}$$

Bu yerda $u(x) \in \Phi$ ixtiyoriy bir funksiya, a - ixtiyoriy bir haqiqiy son. Agar X - to‘plamda oldindan biror τ_1 topologiya berilgan bo‘lsa, u holda biz Φ funksiyalar sinfiga yana bir yuqoridan yarim uzluksiz bo‘lishlik shartini qo‘shamiz.

X to‘plamda τ_1 topologiyadan kuchli bo‘lgan topologiyalar ichida va ular bo‘yicha Φ funksiyalar sinfiga qarashli barcha funksiyalar uzluksiz bo‘ladigan topologiyalar ichida eng kuchsizini τ bilan belgilaymiz. Aniqlanishiga ko‘ra τ_1

topologiyada $\{x : u(x) < a\}$ to‘plamlar ochiq to‘plamlar bo‘ladi. τ topologiya esa quyidagicha aniqlanadi: τ_1 ga qarashli barcha ochiq to‘plamlar va $\{x : u(x) > a\}$ ko‘rinishdagi barcha to‘plamlar birgalikda τ **topologiya**, ya’ni, **nozik-topologiya** bo‘ladi.

2.1.2-Ta’rif $E \subset X$ qism to‘plam $x_0 \notin E$ nuqtada **siyrak** deyiladi, agar

i) $x_0 \notin \overline{E}$ ($\overline{E}$ - τ_1 topologiya bo‘yicha);

yoki

ii) $x_0 \in \overline{E}$ va $\exists\, u(x) \in f$ funksiya topilib,

$$\overline{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}}} u(x) < u(x_0)$$

qat’iy tengsizlik o‘rinli bo‘lsa.

$x_0 \notin E$ nuqtada E to‘plam siyrak bo‘lmasligi uchun har qanday $u \in f$ funksiyani olmaylik,

$$u(x_0) = \overline{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}}} u(x)$$

bo‘lishligi zarur va yetarli.

Berilgan nuqtada siyrak bo‘lgan to‘plamning xossalari.

i) x_0 nuqtada siyrak to‘plamning ixtiyoriy qism to‘plami ham x_0 nuqtada siyrak bo‘ladi.

ii) x_0 nuqtada siyrak cheklita to‘plamning birlashmasi ham x_0 nuqtada siyrak bo‘ladi.

iii) E to‘plam x_0 nuqtada siyrak biror D ochiq to‘plamning qismi bo‘ladi. $(x_0 \text{П} D)$.

2.1.1-Teorema(Kartan) *E to‘plam x_0 nuqtada siyrak bo‘lsin, u holda $x_0 \text{П} \bar{E}$, ya’ni x_0 nuqtaning shunday U nozik atrofi topilib, $E \text{З} U = \text{Ж}$ va E to‘plamning to‘ldiruvchisi E^C* ham *x_0 nuqtaning nozik atrofi bo‘ladi.*

Isbot: Faraz qilaylik, E to‘plam x_0 nuqtada siyrak bo‘lsin. E^C to‘plam x_0 nuqtaning nozik atrofini saqlashini ko‘rsatamiz. Siyrak to‘plamning ta’rifiga ko‘ra, shunday bir $u(x) \text{О} f$ funksiya topiladiki,

$$\inf_U \Big(\sup_{x \text{О} E \text{З} U} u(x) \Big) < u(x_0)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerdan kelib chiqadiki, x_0 nuqtaning shunday bir U atrofi topiladiki,

$$\sup_{x \text{О} E \text{З} U} u(x) < l < u(x_0)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

$$S = \{x : u(x) > l\}$$

to‘plamni qaraymiz. U *nozik topologiya* bo‘yicha ochiq va $x_0 \text{О} S$. $E \text{З} U$ to‘plamda $u(x) \text{J} l$ ekanligidan $S \text{З} (E \text{З} U) = \text{Ж}$ ekanligi, ya’ni $S \text{З} U \text{М} E^C$ ekanligi kelib chiqadi hamda U va S to‘plamlar x_0 nuqtaning *nozik topologiya* bo‘yicha atroflari bo‘ladi. Demak, E^C to‘plam x_0 nuqtaning *nozik atrofi* bo‘ladi.

Teskarisi, aytaylik, V to‘plam x_0 nuqtaning *nozik atrofi* bo‘lsin. V^C to‘plamning x_0 nuqtada siyrak ekanligini ko‘rsatamiz. V atrof o‘zida nozik ochiq to‘plam S ni saqlaydi, qaysiki, S ' x_0. Faraz qilaylik, S to‘plam x_0 nuqtaning t_1 –atrofi bo‘lsin(oddiy ma’nodagi ochiq to‘plam). U holda $x_0 \Pi \overline{V}^{C}$, demak, V^C to‘plam x_0 nuqtada siyrak bo‘ladi. Agar S to‘plam x_0 nuqtaning t_1–atrofi bo‘lmasa, u holda S to‘plam t_1–ochiq to‘plam bilan chekli sondagi $\{x : u(x) > l\}$ ko‘rinishdagi x_0 nuqtani o‘z ichida saqlovchi to‘plamlar kesishmasidan iborat bo‘ladi. Ularning to‘ldiruvchisi esa ta’rifga ko‘ra x_0 nuqtada siyrak bo‘ladi. Ularning chekli birlashmasi ham x_0 nuqtada siyrak bo‘ladi, demak, S^C ham x_0 nuqtada siyrak, ikkinchi tomondan V^C MS^C. Demak, V^C to‘plam x_0 nuqtada siyrak bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

Nozik topologiyaning ba’zi bir xossalari.

2.1.2-teorema *a) agar t_1–topologiya nuqtalarni ajratuvchi bo‘lsa, t –topologiya ham shunday bo‘ladi.*

b) agar t_1– topologiya regulyar bo‘lsa, t –topologiya ham regulyar bo‘ladi.

v) agar t_1– topologiya teng kuchli bo‘lsa, t –topologiya ham teng kuchli bo‘ladi.

Isbot: a) t –topologiya t_1–topologiyadan kuchlirok bo‘lganligi sababli t_1– ajratuvchi bo‘lsa, t –topologiya ham ajratuvchi bo‘ladi.

b) x_0 nuqtaning nozik atrofi V ni qaraymiz. x_0 nuqtaning biror t_1–atrofi U uchun shunday u Of funksiya topiladiki, $\sup\limits_{y Œ V 3 U} u(y) < u(x_0)$. Aytaylik, l $\sup\limits_{y Œ V 3 U} u(y) < l < u(x_0)$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy bir son bo‘lsin va $S = \{x : u(x) \text{ i } l\}$ bo‘lsin. Bu to‘plam t_1– yopiq va x_0 ni nozik atrofi bo‘ladi. Bundan tashqari S 3 U MV. Teorema shartiga ko‘ra, x_0 nuqtaning yopiq t_1–

atrofi U_1 topiladiki, qaysiki, $U_1 \subset U$ bo‘ladi. U holda $S \cap U_1 \subset S \cap U$ va x_0 nuqtaning t_1– yopiq nozik atrofi bo‘ladi.

Faraz qilaylik, endi t_1–topologiya lokal kompakt bo‘lsin.Nozik topologiya bo‘yicha Ω to‘plamda zich bo‘lgan w_n ochiq to‘plamlar ketma-ketligini qaraymiz va $\bigcap_{n=1}^{\infty} w_n$ to‘plam ham nozik topologiya bo‘yicha Ω to‘plamda zich bo‘lishligini ko‘rsatamiz, ya’ni ixtiyoriy nozik-ochiq $w \neq \emptyset$ to‘plam uchun $\left(\bigcap w_n\right) \cap w \neq \emptyset$ $w_1 \cap w \neq \emptyset$ to‘plamdan x_1 nuqta tanlab olamiz va uni biror t_1–yopiq atrofini qaraymiz. Bu atrofga qarashli K_1 kompakt atrofni qaraymizki, qaysiki, u $a_1 \subset K_1$ nozik-ochiq to‘plamni o‘zida saqlaydi.Endi xuddi shunday o‘zida nozik-ochiq a_2 to‘plamni saqlovchi $w_2 \cap a_1$ to‘plamga qarashli K_2 kompaktni qaraymiz va xokazo. Shunday qilib, biz

$$w \supset K_1 \supset a_1 \supset w_2 \cap a_1 \supset K_2 \supset a_2 \supset w_3 \cap a_2 \supset \ldots$$

ichma-ich joylashgan to‘plamlar ketma-ketligiga ega bo‘lamiz. Bu yerdan kelib chiqadiki, $w_n \cap w \supset w_n \cap a_{n-1} \supset K_n \supset \bigcap_i K_i$ va

$$\left(\bigcap_n w_n\right) \cap w = \bigcap_n \left(w_n \cap w\right) \supset \bigcap_i K_i \neq \emptyset.$$

v) Bu yerda quyidagini isbotlash yetarli. Faraz qilaylik, V to‘plam x_0 nuqtaning biror nozik atrofi bo‘lsin. U holda shunday bir x_0 nuqtada nolga teng, V^C da 1 ga teng va qiymatlari to‘plami $[0; 1]$ segmentdan iborat shunday bir nozik uzluksiz funksiya topiladi.

V^C to‘plam x_0 nuqtada zich bo‘lmaganligi sababli ta’rifga ko‘ra shunday bir $u \in f$ funksiya topiladiki, x_0 nuqtaning biror U atrofida $\sup\limits_{V^C \cap U} u(x) = l < u(x_0)$ bo‘ladi. $u_1 = \inf\{u, l\}$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya nozik uzluksiz funksiya bo‘ladi. Aytaylik,

$$u_2(x) = \frac{1}{l - u(x_0)}\left[\inf\{u_1, u(x_0)\} - u(x_0)\right]$$

bo‘lsin. $u_2(x)$ funksiya nozikuzluksiz va $[0; 1]$ oraliqdagi qiymatlarni qabul qiladi. Undan tashqari,

$$u_2(x) = \begin{cases} 0, & x = x_0 \\ 1, & x \in V^C \cap U \end{cases}$$

Lekin, τ_1–topologiya teng o‘lchamli bo‘lganligi uchun Ω da uzluksiz bo‘lgan shunday $w(x)$ funksiya topiladiki, qaysiki, $w(x_0) = 0$, $w(x) = 1$, $x \in U^C$ va $w : \Omega \to [0, 1]$. $f(x) = \inf\{u_2, w\}$ funksiyani qaraylik. U holda f funksiya nozik uzluksiz $0 \le f(x) \le 1$ va

$$f = \begin{cases} 0, & x = x_0 \\ 1, & x \in V^C\,. \end{cases}$$

teorema isbot bo‘ldi.

2.1.1-ta’rif *a) E to‘plam $x_0 \notin E$ nuqtada o‘ta siyrak deyiladi, agar shunday bir $u(x) \in f$ funksiya topilib, $u(x) \neq -\infty$ va $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} u(x) = -\infty$ bo‘lsa.*

b) E to‘plam polyar to‘plam deyiladi, agar shunday bir $u(x)\in f$ funksiya topilib, $u(x)\not\equiv -\infty$ va $u\big|_E=-\infty$ bo‘lsa.

v) E to‘plam qat’iy polyar to‘plam deyiladi, agar ixtiyoriy $E'\subset E$ qism to‘plam va ixtiyoriy $x\notin E'$ nuqta uchun shunday bir $u\in f$ funksiya topilib, $u\big|_{E'}=-\infty$ va $u(x)>-\infty$ shart bajarilsa.

2.1.3-teorema *Agar E to‘plam qat’iy polyar to‘plam bo‘lsa, u holda $E\setminus\{x\}$ to‘plam x nuqtada o‘ta siyrak bo‘ladi, hamda E to‘plamning har bir nuqtasi nozik yakkalangan bo‘ladi, ya’ni ixtiyoriy $x\in E$ uchun nozik topologiya bo‘yicha $\overline{E\setminus\{x\}}\neq E$ bo‘ladi.*

2.2. Nozik analitik funksiyalar va ularning xossalari

Nozik analitik funksiyalar

2.2.1-ta’rif. U to‘plam $\mathbb{C}$ kompleks tekislikning nozik ochiq qism to‘plami bo‘lsin. $f:U\to\mathbb{C}$ funksiya uchun ixtiyoriy $V\subset\mathbb{C}$ ochiq to‘plam asli $f^{-1}(V)$ nozik ochiq to‘plam bo‘lsa, u holda f funksiya **nozik uzluksiz** funksiya deyiladi.

2.2.2-ta’rif. Faraz qilaylik z nuqta U to‘plamning nozik limit nuqtasi bo‘lsin. $f:U\to\mathbb{C}$ funksiya uchun shunday L son topilib, bu L sonining har qanday N atrofi uchun z nuqtaning shunday V atrofi topilib,

$$f((V\cap U)\setminus\{z\})\subset N$$

munosabat bajarilsa, u holda L soni $f(z)$ funksiyaning z nuqadagi **nozik limiti** deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$F-\lim_{w\to z} f(w)=L$$

2.2.3-ta’rif. $f:U\to\mathbb{C}$ funksiya va $z\in U$ nuqta berilgan bo‘lsin. Agar ushbu nisbatning

$$\frac{f(w)-f(z)}{w-z}$$

$w\to z$ dagi limiti mavjud bo‘lsa, u holda, bu limitga

f funksiyaning z nuqtadagi **nozik hosilasi** deyiladi va $F-f'(z)$ kabi belgilanadi. Agar z nuqtada funksiyaning **nozik hosilasi** mavjud bo‘lsa **nozik differensiallanuvchi** bo‘ladi.

Yuqorida keltirilgan ta’riflarga asosan nozik differensiallanuvchi funksiyalar albatta nozik uzluksiz bo‘ladi. Nozik topologiyaning aniqlanishiga ko‘ra esa kompleks tekislikdan barcha subgarmonik funksiyalar nozik uzluksiz boladi.

Brelo sharti deb nomlanuvchi quyidagi teorema nozik uzluksiz funksiyalar lokal uzluksiz bo‘lishini ko‘rsatadi.

2.2.1-teorema. $V \subset \mathbb{C}$ - nozik ochiq to‘plam. $f_n : U \to \mathbb{C}$ nozik uzluksiz funksiyalar ketma-ketligi bo‘lsin. U to‘plamning har bir nuqtasi uchun shunday $V \subset U$ nozik atrofi topilib, f_n funksiyalarning barchasining bu to‘plamda uzluksiz funksiyalar bo‘ladi.

2.2.4-ta’rif. $V \subset \mathbb{C}$ nozik ochiq qism to‘plam bo‘lib, bu to‘plamda $f : U \to \mathbb{C}$ funksiya aniqlangan bo‘lsin. Agar f funksiya U to‘plamning har bir nuqtasida nozik differensiallanuvchi bo‘lib, uning nozik hosilasi U toplamda nozik uzluksiz bolsa, u holda $f(z)$ funksiyaga U to‘plamda **nozik analitik** funksiya deyiladi.

Keyingi teoremga asosan nozik analitik funksiya ta’rifini boshqa ekvivalent shartlar bilan ham berish mumkin.

2.2.2-teorema. $U \subset \mathbb{C}$ *nozik ochiq to‘plam bo‘lsin. Quyidagi shartlar o‘zaro ekvivalent.*

a) $f : U \to \mathbb{C}$ *funksiya nozik analitik.*

b) U *to‘plamning har bir nuqtasining* $V \subset U$ *nozik atrofi topilib,* $f|_V$ *funksiya* V *ning ichida ratsioanal funksiyalar bilan tekis yaqinlashtirilishi mumkin.*

c) U *to‘plmning har bir nuqtasining shunday* $V \subset U$ *nozik atrofi topilib,* f *funksiya bu atrofda biror* $\varphi \in L^2_c(\mathbb{C})$ *funksiyaning Koshi-Pompeu almashtirishi bilan ustma-ust tushadi.*

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{z-\xi}\varphi(\xi) \wedge d\lambda(\xi), \quad z \in V$$

λ - $\mathbb{C}$ *dagi lebeg o‘lchovi,* φ *funksiya* V *da deyarli nolga teng.*

2.2.3-teorema. $U \subset \mathbb{C}$ *nozik ochiq to'plam bolsin. Har qanday* $f : U \to \mathbb{C}$ *nozik analitik funksiya istalgan tartibgacha nozik differensiallanuvchi bo'ladi va barcha tartibli nozik hosilari nozik analitik bo'ladi.*

2.2.4-teorema(Kartan). x *nuqta* E *to'plamning nozik limit nuqtasi bo'lsin va* g *funksiya haqiqiy qiymatli funksiya bo'lib,* x *nuqtada* l *- nozik limitga ega bo'lsin, u holda* x *nuqtani shunday* V^f *nozik atrofi topilib,*

$$\lim_{\substack{y \to x, \\ y \in E \setminus \{x\} \cap V^f}} g(y) = l$$

tenglik bajariladi.

Nozik analitik funksiyalarning ratsioanal approksimatsiyasi

2.2.5-teorema. $U \subset \mathbb{C}$ *nozik ochiq qism to'plam bo'lsin. Agar* $f : U \to \mathbb{C}$ *funksiya nozik analitik bo'lsa, u holda* U *to'plamning har bir nuqtasida shunday* $V \subset U$ *nozik atrofi topilib,* V *qutblari va* V *atrofidan tashqarida bo'lgan* g_j *ratsional funksiyalar ketma-ketligi mavjud bo'ladi va istalgan* $n \geq 0$ *butun son uchun* $g_j^{(n)}$ *hosilalar* V *to'plamda* F *-* $f^{(n)}$ *nozik hosilaga tekis yaqinlashadi.(bu yerda* $f^{(0)} = f$ *deb olamiz).*

Teorema isboti uchun bizga quyidagi lemma zarur.

2.2.1-lemma. $V \subset \mathbb{C}$ *nozik ochiq to'plam va* $k \subset \mathbb{C}$ *kompakt to'plam bo'lsin. Istalgan* α *haqiqiy son uchun ushbu*

$$h_\alpha(z) = \int_{K \setminus U} |z - \xi|^{-\alpha} \, d\lambda(\xi), \qquad z \in U$$

funksiya chekli va U *to'plamda nozik uzluksiz bo'lib,* U *ni har bir nuqtasining kompakt nozik atrofi* $V \subset U$ *topiladi va* h_α *bu atrofda chegaralangan bo'ladi. Ya'ni*

$$C_a = \sup_{z \in V} h_a(z) < \infty .$$

2.2.5-teoremaning isboti. 2.2.2-teoremaga asosan ixtiyoriy z_0 nuqta uchun $V_{z_0} \subset U$ nozik atrofi topilib,

$$f(z) = \int_{\Gamma} \frac{1}{z - \xi}\varphi(\xi)d\lambda(\xi) = \int_{S \setminus U_{z_0}} \frac{1}{z - \xi}\varphi(\xi)d\lambda(\xi), \quad z \in U_{z_0},$$

ko‘rinishda tasvirlanadi va bunda $\varphi \in L_c^2(\Gamma)$ bo‘lib, U to‘plamda $\varphi = 0$ deyarli bajariladi.

$f^{(n)}, \ n = 0,1,2...$ funksiyalar yuqoridagi integralni integral ostida differensiallashdan hosil qilingan funksiyalar bo‘lsin, ya’ni

$$f^{(n)}(z) := (-1)^n n! \int_{S \setminus U_{z_0}} \frac{1}{(z - \xi)^{n+1}}\varphi(\xi)d\lambda(\xi), \quad z \in U_{z_0}.$$

Yuqoridagi 1-lemmaga asosan z_0 nuqtaning shunday $V \subset U_{z_0}$ nozik kompakt atrofi topilib, $n \geq 0$ da

$$C_{n+1} = \sup_{z \in V} h_{n+1}(z) \int_{S \setminus U_{z_0}} \frac{1}{|z - \xi|^{n+1}} d\lambda(\xi) < \infty .$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

1. Avvalo biz $F - f^{(n)}$ nozik hosilalar $f^{(n)}$ga tengligini ko‘rsatamiz. n ni tayinlab olamiz, $g(w) = w^{-n-1}, w \in \Gamma \setminus \{0\}$ funksiyani qaraymiz. $g(w)$ funksiyaning Teylor yoyilmasi

$$g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(w - z)^k g^{(k)}(z).$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Endi biz quyidagi

$$R(z,w) := w^{-n-1} - \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!}(w-z)^k g^{(k)}(z) = w^{-n-1}z^{-n-2}[(n+1)w^{n+2} -$$

$$-(n+2)zw^{n+1} + z^{n+2}] = w^{-n-1}z^{-n-2}\sum_{i=0}^{n+2} P_i(w-z)^i$$

funksiyani aniqlaymiz. Bunda $P_i(z)$ ko‘phadlar bo‘lib, Teylor teoremasiga ko‘ra

$$\lim_{w\to z}\frac{R(z,w)}{w-z} = 0$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi. Lekin,

$$\frac{R(z,w)}{w-z} = w^{-n-1}z^{-n-2}\sum_{j=0}^{n+2} P_i(z)(w-z)^{i-1}$$

tenglik o‘rinli bo‘lib, $P_i = 0,\ i = 0,1,2.$ bo‘lishi kelib chiqadi. Bu yerda ixtiyoriy $w \neq z$ uchun

$$\frac{R(z,w)}{(w-z)^2} = w^{-n-1}z^{-n-2}\sum_{j=0}^{n} P_{j+2}(z)(w-z)^j =$$

$$= w^{-n-1}z^{-n-2}\sum_{\substack{i,j\ge 0\\ j=n\\ i=n+2}} a_{i,j}z^i w^j = \sum_{r,s\ge 0}^{\substack{r=n+2\\ s=n+1}} b_{r,s}z^{-r}w^{-s}.$$

bo‘ladi va bunda $b_{r,s}$ koeffitsiyentlar. $w,z\in V$ ni shunday tanlaymizki, $z\neq w$ bo‘lganda

$$\frac{1}{(w-z)^2}[f^{(n)}(w) - f^{(n)}(z) - (w-z)f^{(n+1)}(z)] =$$

$$= (-1)^n n!\int_{S\setminus U_{z_0}} \frac{(w-x)^{-n-1} - (z-x)^{-n-1}}{(w-z)^2}\varphi(x)d\lambda(x) +$$

$$+(-1)^n n!\int_{S\setminus U_{z_0}} \frac{(w-z)(n+1)(z-x)^{n-2}}{(w-z)^2}\varphi(x)d\lambda(x) =$$

$$= (-1)^n n! \int\limits_{S\setminus U_{z_0}} \frac{R(w-\xi, z-\xi)}{[(w-\xi)-(z-\xi)]^2}\varphi(\xi)\,d\mu(\xi)$$

$$= (-1)^n n! \sum_{r,s\geq 0}^{\substack{r=n+2\\ s=n+1}} \int\limits_{S\setminus U_{z_0}} (z-\xi)^{-r}(w-\xi)^{-s}\varphi(\xi)\,d\mu(\xi)\,.$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

2.2.1-lemmaga va Gyolder tengsizligiga ko‘ra quyidagi

$$\left|\int\limits_{S\setminus U_{z_0}} (z-\xi)^{-r}(w-\xi)^{-s}\varphi(\xi)\,d\mu(\xi)\right| \leq$$

$$\leq \|\varphi\|_{L^2}\left(\int\limits_{S\setminus U_{z_0}} |z-\xi|^{-2r}\,|w-\xi|^{-2s}\,d\mu(\xi)\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \|\varphi\|_{L^2}[h_{4r}(z)]^{\frac{1}{4}}[h_{4s}]^{\frac{1}{4}} \leq \|\varphi\|_{L^2}C_{4r}^{\frac{1}{4}}C_{4s}^{\frac{1}{4}}\,.$$

tengsizlik kelib chiqadi va uchburchak tengsizligiga asosan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\left|(-1)^n n! \sum_{r,s\geq 0}^{\substack{r=n+2\\ s=n+1}} b_{r,s}\int\limits_{S\setminus U_{z_0}} (z-\xi)^{-r}(w-\xi)^{-s}\varphi(\xi)\,d\mu(\xi)\right| \leq$$

$$\leq n!\,\|\varphi\|_{L^2} \sum_{r,s\geq 0}^{\substack{r=n+2\\ s=n+1}} |b_{r,s}|\,C_{4r}^{\frac{1}{4}}C_{4s}^{\frac{1}{4}}\,.$$

Yuqoridagi yig‘indi chekli ekanligida, quyidagi musbat o‘zgarmas A soni topilib,

$$\left|\frac{f^{(n)}(w)-f^{(n)}(z)}{w-z} - f^{(n+1)}(z)\right| \leq A\|\varphi\|_{L^2}|w-z|$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. $n=0$ bo‘lganda 3-ta’rifga asosan ixtiyoriy $z \in V$ uchun $F - f'(z) = f^{(1)}(z)$ va matematik induksiya metodiga asosan $F - f^{(n)}(z) = f^{(n)}(z)$ tengliklar bajariladi.

2. Endi biz $\Phi - f^{(n)}$ nozik hosilalar analitik funksiyalar ketma-ketligi bilan yaqinlashtirilishini ko‘rsatamiz, ya’ni shunday f_j funksiyalar topilib, $f_j^{(n)}$ analitik funksiyalarning hosilalari $\Phi - f^{(n)}$ da tekis yaqinlashishini ko‘rsatamiz.

Ochiq ω_j to‘plamlarning kamayuvchi ketma-ketligini olamiz. Bunda $V \subset \omega_j$ va $\bigcap_{j=1} \omega_j = V$ bo‘lsin. Biz $\varphi_j = 1_{\{\mathbb{C} \setminus \omega_j\}} \cdot \varphi$ funksiyani olib,

$$\left\| \varphi_j - \varphi \right\|_{L_2} = \left(\int_{\mathbb{C}} \left| \varphi_j - \varphi \right|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\omega_j \setminus U_{z_0}} \varphi^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}$$

munosabatga va bu munosabat orqali $j \to \infty$ da $\left\| \left\| \varphi_j - \varphi \right\|_{L_2} \right\| \to 0$ bo‘lishini ko‘ramiz. Chunki, ω_j kamayadi va $\bigcap_{j=1} \omega_j = V \subset U_{z_0}$ munosabat o‘rinli.

$\{f_j\}$ ketma-ketlikni quyidagicha aniqlaymiz:

$$f_j(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{z - \xi} \varphi_j(\xi) d\lambda(\xi) = f_j(z) = \int_{S \setminus \omega_j} \frac{1}{z - \xi} \varphi_j(\xi) d\lambda(\xi), \quad z \in \omega_j.$$

$a \in \omega_j$ va

$$\frac{1}{z - \xi} = \frac{1}{a - \xi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - a}{\xi - a}} = \frac{1}{a - \xi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\xi - a} \right)^n$$

tenglikka asosan $f_j(z)$ analitik funksiyalar quyidagicha yaqinlashuvchi qator ko‘rinishida ifodalanadi

$$f_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^n \cdot \int_{S \setminus \omega_j} \frac{1}{(\xi - a)^{n+1}} \varphi(\xi) d\lambda(\xi).$$

Ya’ni f_j funksiyalar ω_j da golomorf va cheksiz differensiallanuvchi. $f_j^{(n)}$ ifoda f_j analitik funksiyaning n- tartibli hosilasi bo‘lsin. U holda,

$$f_j^{(n)} = (-1)^n n!\int_{J} \frac{1}{(z-\xi)^{-(n+1)}}\varphi_j(\xi)\,d\lambda(\xi),\quad n = 0,1,2\ldots$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglikdan va 1-lemmaga asosan

$$\sup_{z\in V}\left|f_j^{(n)}(z) - F\sim f^{(n)}(z)\right| = \sup_{z\in V}\left|f_j^{(n)}(z) - f^{(n)}(z)\right| =$$

$$= \sup_{z\in V} n!\left|\int_{S\setminus U_{z_0}}(z-\xi)^{-(n+1)}(\varphi_j(\xi)-\varphi(\xi))\,d\lambda(\xi)\right| \le$$

$$\le n!\sup_{z\in V}\left|\int_{S\setminus U_{z_0}}|z-\xi|^{-(n+1)}\,|\varphi_j(\xi)-\varphi(\xi)|\,d\lambda(\xi)\right| \le$$

$$\le n!\sup_{z\in V}\left(\int_{S\setminus U_{z_0}}|z-\xi|^{-2(n+1)}d\lambda(\xi)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{S\setminus U_{z_0}}|\varphi_j(\xi)-\varphi(\xi)|^2 d\lambda(\xi)\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le n!(C_{2(n+1)})^{\frac{1}{2}}\left\|\varphi_j-\varphi\right\|_{L_2}$$

Baholash kelib chiqadi. $C_{2(n+1)}$ - chekli son va $j\to\infty$ da

$$\left\|\varphi_j-\varphi\right\|_{L_2}\to 0$$

ekanidan $j\to\infty$ da

$$\sup_{z\in V}\left|f_j^{(n)}(z) - Ff^{(n)}(z)\right| \to 0$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Shuni isbotlash talab qilingan edi. Ixtiyoriy analitik funksiyaga esa ratsional funksiyalar bilan yaqinlashtirish mumkinligiga asosan teorema isboti tugaydi.

2.2.6-teorema. *U nozik sohada aniqlangan f analitik funksiya o‘zining biror $z_0\in U$ nuqtadagi $F-f^{(n)}(z)$ nozik hosilalari ketma-ketligi bilan yagona aniqlanadi.*

Nozik topologiya va nozik analitik funksiyalar tushunchalarini kompleks tekislik uchun quyidagicha qisqacha tavsiflash mumkin.

$\mathbb{C}$ tekislikdagi nozik topologiya deb, subgarmonik funksiyalarning uzluksizligini bo‘lishini ta’minlovchi topologiyalarning eng kuchlisiga aytiladi. Nozik topologiya $\{u \in sh(\mathbb{C}):\ u(z) > a\}$ va $\{u \in sh(\mathbb{C}):\ u(z) < a\}$ ko‘rinishdagi to‘plamlar orqali hosil qilinadi. z^0 nuqtaning nozik atrofi deb, z^0 nuqtani o‘z ichiga oluvchi nozik topologiyadagi ochiq $V \subset \mathbb{C}$ to‘plamga aytiladi. Bunda, shunday $U = U(z^0, r)$ doira va U da subgarmonik bo‘lgan $u \in sh(U)$ funksiya mavjudki, $\lim\limits_{z \to z^0, z \in V} u(z) < u(z^0)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. z^0 nuqtaning yopiq nozik atrofi deb, $\overline{U}(z^0, r) \setminus G$ ko‘rinishdagi kompaktga aytiladi, bunda $r > 0, G \subset U(z^0, r)$ orqali z^0 nuqtani o‘zichiga olgan ochiq siyrak to‘plam belgilangan.

Nozik analitik funksiyalar va ularning xossalari asosida uning ta’rifini quyidagicha ham berish mumkin ekan: *Agar* $f(z)$ *funksiya* D *sohada sig‘im bo‘yicha deyarli hamma yerda aniqlangan bo‘lsa, ya’ni biror* $E \subset D$ *polyar to‘plamning tashqarisida chekli qiymat qabul qilib, har bir* $z^0 \in D \setminus E$ *nuqta uchun* z^0 *nuqtaning yopiq nozik* F *atrofi mavjud bo‘lib, bu atrofda ratsional funksiyalar bilan tekis yaqinlashtirish mumkin bo‘lsa, u holda* $f(z)$ *funksiya* $D \subset \mathbb{C}$ *sohada nozik analitik deyiladi.*

III BOB. R^0 SINF FUNKSIYASINING NOZIK ANALITIK DAVOMI

3.1 R^0 sinfga tegishli chekli funksiyalarning nozik analitikligi

3.1.1-teorema. *Agar $f \in R^0$ funksiya uchun ushbu*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\ln m}{\ln \dfrac{\ln m}{\rho_m^{\frac{1}{m}}}} < +\infty$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda bu funksiya butun $\mathbb{C}$ tekislikka nozik analitik davom qiladi, ya’ni butun $\mathbb{C}$ tekislikda nozik analitik bo‘lgan $\tilde{f}(z)$ funksiya topilib, $\tilde{f}|_U \equiv f$ bo‘ladi.

Isbot. Isbotni bir necha qismlarga ajratamiz:

1. Umumiylikni buzmasdan, f funksiya $B(0,r) \subset \mathbb{C}$, $r > 1$ doirada golomorf bo‘lsin deb hisoblaymiz. Teorema shartiga ko‘ra $f \in R^0$ funksiya quyidagicha tartibga ega

$$t = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\ln m}{\ln \dfrac{\ln m}{\rho_m^{\frac{1}{m}}}} < +\infty,$$

va bunda $\rho_m = \rho_m(f, \overline{B})$ va $\overline{B} = \overline{B}(0,1)$. ρ_m ning ta’rifiga asosan ixtiyoriy $s > 0$ son uchun shunday $r_m(z) = \dfrac{p_m(z)}{q_m(z)}$, $m = 1, 2, 3, ...$ ratsional funksiyalar ketma-ketligi mavjudki, bunda $\| f - r_m \|_{\overline{B}}^{1/m} = \rho_m^{1/m} \le \dfrac{\ln m}{m^{1/s}}$, $m \ge m'$ va $m = k^l$ $\forall k > 0$. Bu yerda $l > 7s$. $f(z)$ funksiyani

$$f(z) = r_{m_1}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[r_{m_{k+1}}(z) - r_{m_k}(z) \right] \qquad (3.1.1)$$

deb olamiz.(1) qator $\overline{B}(0,1)$ yopiq doirada tez tekis yaqinlashadi.

2. Ushbu $r_{m_{k+1}}(z) - r_{m_k}(z)$ ayirmani $m_k \ge m'$ uchun baholaymiz:

$$\left\| r_{m_{k+1}}(z) - r_{m_k}(z) \right\|_{\overline{B}} \le \left\| r_{m_{k+1}}(z) - r_{m_{k+1}-1}(z) \right\|_{\overline{B}} + \left\| r_{m_{k+1}-1}(z) - r_{m_{k+1}-2}(z) \right\|_{\overline{B}} + ... +$$

$$+\left\|r_{m_k+1}(z)-r_{m_k}(z)\right\|_{\overline{B}} \le \left\|r_{m_{k+1}}(z)-f(z)\right\|_{\overline{B}} + 2\left\|r_{m_{k+1}-1}(z)-f(z)\right\|_{\overline{B}} + \ldots +$$

$$+2\left\|r_{m_k+1}(z)-f(z)\right\|_{\overline{B}} + \left\|r_{m_k}(z)-f(z)\right\|_{\overline{B}} \le 2\left\{\frac{\ln m_{k+1}}{\left[m_{k+1}\right]^{m_{k+1}/s}} + \ldots + \frac{\ln m_k}{\left[m_k\right]^{m_k/s}}\right\}.$$

Hisoblashlardan kelib chiqadiki, $m_k = k^l$ uchun

$$\frac{\ln m_{k+1}}{\left[m_{k+1}\right]^{m_{k+1}/s}} + \ldots + \frac{\ln m_k}{\left[m_k\right]^{m_k/s}} \le l\cdot k\left(\frac{1}{(k+l)^{\frac{l\cdot(k+1)^l}{s}}} + \ldots + \frac{1}{k^{\frac{l\cdot k^l}{s}}}\right) \le 2lk\left[\frac{1}{k^l}\right]^{\frac{k^l}{s}}.$$

Bu yerda biz $\ln(k+1)\le k$ ekanidan foydalandik.

Natijada, ushbu

$$\left\|r_{m_{k+1}}(z)-r_{m_k}(z)\right\| \le 4kl\left[\frac{1}{k^l}\right]^{\frac{k^l}{s}},\ m_k \ge m' \tag{3.1.2}$$

baholash kelib chiqadi.

3. Endi $r_{m_{k+1}}(z)-r_{m_k}(z)$ ayirmani butun $\mathbb{C}$ tekislikda baholaymiz. Buning uchun $r_m(z)=\dfrac{p_m(z)}{q_m(z)}$ ifodaning surat va maxrajini o‘zgarmas songa ko‘paytirib, $q_m(z)$ ko‘phadning modul bo‘yicha maksimal koeffitsientini 1 ga teng bo‘ladigan qilib olamiz. U holda

$$r_{m_{k+1}}(z)-r_{m_k}(z)=\frac{p_{m_{k+1}}(z)q_{m_k}(z)-p_{m_k}(z)q_{m_{k+1}}(z)}{q_{m_k}(z)q_{m_{k+1}}(z)}$$

bo‘lgani uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli

$$\left\|p_{m_{k+1}}(z)q_{m_k}(z)-p_{m_k}(z)q_{m_{k+1}}(z)\right\|_{\overline{B}} \le$$

$$\le \left\|r_{m_{k+1}}(z)-r_{m_k}(z)\right\|_{\overline{B}}\cdot\left\|q_{m_{k+1}}(z)\cdot q_{m_k}(z)\right\|_{\overline{B}}. \tag{3.1.3}$$

Ushbu $q_m(z)$ ko‘phadning modul bo‘yicha maksimal bo‘lgan koeffitsiyentlari 1 ga teng ekanligidan $\left\|q_m(z)\right\|_{\overline{B}} \le m+1$ bo‘lishi kelib chiqadi. (3.1.2) va (3.1.3) munosabatlardan

$$\left\|p_{m_{k+1}}(z)q_{m_k}(z)-p_{m_k}(z)q_{m_{k+1}}(z)\right\|_{\overline{B}} \le A_1\left[\frac{1}{k^l}\right]^{\frac{k^l}{s}},\quad m\ge m' \tag{3.1.4}$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz, bunda $A_1 = 4kl(k^l+1)((k+1)^l+1)$. Endi, Bernshteyn-Uolsh tengsizligidan foydalanamiz, bunga ko‘ra ixtiyoriy $p(z)$ ko‘phad uchun

$$|p(z)| \le \|p(z)\| \cdot |z|^{\deg p}, \quad z \in \mathbb{C}$$

o‘rinli.Bundan va (3.1.4) dan kelib chiqadiki,

$$\left|p_{m_{k+1}}(z)q_{m_k}(z) - p_{m_k}(z)q_{m_{k+1}}(z)\right|_{\overline{B}} \le A_1\left[\frac{1}{k^l}\right]^{\frac{k^l}{s}} \cdot |z|^{d_k}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Natijada, ushbu

$$\left|r_{m_{k+1}}(z) - r_{m_k}(z)\right| \le A_1\left[\frac{1}{k^l}\right]^{\frac{k^l}{s}} \cdot |z|^{d_k} \cdot \frac{1}{\left|q_{m_k}(z)q_{m_{k+1}}(z)\right|}, \quad z \in \mathbb{C},\ m_k \ge m' \qquad (3.1.5)$$

tengsizlik hosil bo‘ladi. Bu yerda $d_k = k^l + (k+l)^l$.

4. Ushbu $Q_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left|q_{m_k}(z)q_{m_{k+1}}(z)\right|^{\frac{1}{d_k}} < \frac{1}{k^l} \right\}$ to‘plamni kiritib olamiz.Tekislikda kompakt bo‘lgan $D = B(0,R),\ R > 1$ sohani olamiz. Agar $Q_{k,D} = Q_k \cap D$ deb baholasak, u holda bu to‘plam sig‘imi uchun quyidagi baholash o‘rinli bo‘ladi

$$C\left(Q_{k,D}\right) = C\left(Q_{k,D}, D\right) \le \frac{A_2}{k^2}.$$

Bunda A_2 orqali R ga bog‘liq o‘zgarmas belgilangan. C sig‘imning sanoqli subadditiv ekanligidan $N \to 0$ da $C\left(\bigcup_{k \ge N} Q_{k,D}\right) \to 0$ munosabatga ega bo‘lamiz.

Demak, $\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{j \ge N} Q_{k,D}$ va $E = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{j \ge N} Q_k$ to‘plamlar polyar ekan. Agar $z^0 \notin \bigcup_{j \ge N} Q_k$ bo‘lsa, u holda bu nuqtada $\left|q_{m_k}(z^0)q_{m_{k+1}}(z^0)\right|^{\frac{1}{d_k}} < \frac{1}{k^2},\ k \ge N$ bo‘lib, (3.1.5) tengsizlikka asosan quyidagi baholash bajariladi

$$\left|r_{m_{k+1}}(z^0) - r_{m_k}(z^0)\right| \le A_1\left[\frac{1}{k^l}\right]^{\frac{k^l}{s}} \cdot \left|z^0\right|^{d_k} \cdot k^{2d_k} = A_1 k^{\left[2d_k - \frac{l}{s}k^l\right]} \left|z^0\right|^{d_k}, \ k \ge N. \qquad (3.1.6)$$

Agar $d_k = k^l + (k+1)^l$ ekanligidan foydalansak, ushbu

$$2d_k-\frac{l}{s}k^l=\left\{2\left[1+\left(1+\frac{1}{k}\right)^l\right]-\frac{l}{s}\right\}k^l$$

tenglikka ega bo‘lamiz. $\frac{l}{s}>7$ bo‘lishidan, yetarlicha katta $k\ge k_0$ lar uchun

$2d_k-\frac{l}{s}k^l\le -3k^l$ bo‘lishi kelib chiqadi. Bunga ko‘ra ushbu

$$\left|r_{m_{k+1}}(z^0)-r_{m_k}(z^0)\right|\le A_1k^{-3k^l}\left|z^0\right|^{d_k},\quad k\ge\max\{k_0,N\},\ m_k\ge m' \qquad (3.1.7)$$

tengsizlik bajariladi. Qayd qilish kerakki,

$$\left|r_{m_{k+1}}(z^0)-r_{m_k}(z^0)\right|^{\frac{1}{d_k}}\le A_1^{\frac{1}{d_k}}k^{-3\frac{k^l}{d_k}}\left|z^0\right|,\quad k\ge\max\{k_0,N\},\ m_k\ge m'.$$

Bunda

$$A_1^{\frac{1}{d_k}}=\left[4kl(k^l+1)((k+1)^l+1)\right]^{\frac{1}{k^l+(k+1)^l}}\to 1,\ k\to\infty$$

$$\frac{k^l}{d_k}=\frac{k^l}{k^l+(k+1)^l}\to\frac{1}{2},\quad k\to\infty$$

bo‘lganibois, yetarlicha katta $k\ge k(z^0)$ uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$\left|r_{m_{k+1}}(z^0)-r_{m_k}(z^0)\right|^{\frac{1}{d_k}}<\frac{\left|z^0\right|}{k},\qquad k\ge k(z^0).$$

Bu tengsizlikning isbotidan $z\in\overline{D}\setminus\bigcup_{j\ge N}Q_j$ uchun bu tengsizlik tekis bajarilishi ko‘rinadi, ya`ni shunday butun $k_0\in N$ son mavjudki, bunda

$$\left|r_{m_{k+1}}(z)-r_{m_k}(z)\right|^{\frac{1}{d_k}}<\frac{R}{k},\qquad k\ge k_0,\ z\in\overline{D}\setminus\bigcup_{j\ge N}Q_j \qquad (3.1.8)$$

bo‘ladi.

5. $Z=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{z\in\mathbb{C}:\ q_k(z)=0\}$ to‘plam polyar bo‘lgani uchun $v(z)\in sh(\mathbb{C})$ subgarmonik funksiya mavjudki, $v\not\equiv-\infty$, $v|_Z\equiv-\infty$ bo‘ladi. Ushbu

$$S_N=\left\{\bigcup_{k\ge N}Q_k\right\}\cup Z_N,\quad A=\bigcap_{N=1}^{\infty}S_N$$

belgilashlarni kiritib olamiz, bunda $Z_N = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : v(z) < \dfrac{1}{N} \right\}$.Sig‘imning sanoqli subadditiv ekanligidan quyidagi munosabat

$$C\left(S_N \bigcap D\right) \leq \sum_{k \geq N} C(Q_k \bigcap D) + C(Z_N \bigcap D) \to 0$$

kelib chiqadi.

Bundan, S ning plyuripolyar to‘plam bo‘lishiko‘rinadi. S ning tashqarisida (1) qator tez yaqinlashadi va uning yig‘indisi $\mathbb{C}^n \setminus S$ dagi $f(z)$ funksiyani aniqlaydi. (3.1.8) ga asosan tayinlangan natural N son uchun shunday natural $k_0 > N$ mavjudki, bunda $z \in \overline{D} \setminus \bigcup_{j \geq N} Q_j$ kompaktda quyidagi tekis baholash o‘rinli bo‘ladi

$$\left| r_{m_k}(z) - f(z) \right| = \left| \sum_{t \geq k} \left(r_{m_{t+1}}(z) - r_{m_t}(z) \right) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{t \geq k} \left| r_{m_{t+1}}(z) - r_{m_t}(z) \right| \leq \sum_{t \geq k} \left(\frac{R}{t} \right)^{d_t} \approx \left(\frac{R}{k} \right)^{d_k}, \ k \geq k_0. \qquad (3.1.9)$$

Endi $f(z)$ funksiya $\mathbb{C}^n$ da nozik analitik funksiya bo‘lishini ko‘rsatamiz. Shu maqsadda $z^0 \in \mathbb{C}^n \setminus S$ nuqtani tayinlaymiz va $z^0 \in D \setminus S$ deb olamiz. Aytaylik $F_N = \overline{D} \setminus S_N$, $F = \bigcup_{N=1}^{\infty} F_N$ bo‘lsin. U holda $D \setminus F \subset S$ ayirma $z^0 \in F$ nuqtada "uzilgan" to‘plambo‘ladi. F_N to‘plam kompakt bo‘lib, (3.1.9) ga asosan

$$\lim_{k \to \infty} \left\| r_{m_k}(z) - f(z) \right\|_{F_N} = 0.$$

Bu esa, $f|_{F_N} \in R(F_N)$ va $f(z)$ funksiyalarning z^0 nuqtada nozik analitik bo‘lishini ko‘rsatadi. Teorema isbotlandi.

3.2 Ba’zi muhim natijalar

3.2.1-teorema *3.1.1-teoremaning shartlari bajarilganda* $\{r_m(z)\}$ *ratsional funksiyalar ketma-ketligi* $\mathbb{C}$ *tekislikning hamma yerida sig’im bo‘yicha nozik analitik* $\hat{f}$ *funksiyaga tez yaqinlashadi.*

3.2.1-natija. *Agar* $f \in R^0$ *funksiya chekli tartibga ega bo‘lsa, u holda bu funksiya* $\mathbb{C}$ *tekislikdagi yagona nozik analitik funksiya* $\hat{f}$ *ni aniqlaydi. Boshqacha aytganda, agar* $\{r_m^1(z)\}$ *va* $\{r_m^2(z)\}$ *ratsional funksiyalar ketma-ketligi nolning biror atrofida* $f(z)$ *funksiyaga chekli tartib tezligida yaqinlashsa, u holda ular aniqlaydigan* $\hat{f}_1(z)$ *va* $\hat{f}_2(z)$ *nozik-analitik funksiyalar* $\mathbb{C}$ *da sig’im bo‘yicha deyarli hamma yerda ustma-ust tushadi.*

R sinfning qator xossalarini keltiramiz.

Teorema3.2.2. . f - R^0 sinfning chekli t - tartibdagi funksiyasi bo‘lishi uchun

$$A_m^{\frac{1}{m}} \asymp \frac{1}{m^{\frac{1}{t}}}$$

munosabat o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli. Bu yerda

$$A_m = A_m(f) = \left[\bmod \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k & a_{k+1} & \dots & a_{2m-1} \end{vmatrix}\right]^{\frac{1}{m}}$$

A_m^m - Gankel determinantining moduli hisoblanadi.

Isbot. Aytaylik, $f(z) \in O(B(0,r))$, $r > 0$ va $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ Teylor qatori yoyilmasi bo‘lsin. Oldin

$$A_m(f(Rz)) = \left[\bmod \begin{vmatrix} Ra_1 & R^2a_2 & \ldots & R^m a_m \\ R^2 a_2 & R^3 a_3 & \ldots & R^{m+1} a_{m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R^k a_k & R^{k+1} a_{k+1} & \ldots & R^{2m-1} a_{2m-1} \end{vmatrix}\right]^{\frac{1}{m}} = R^m A_m(f)$$

bo‘lishini aytib o‘tamiz. Demak, $A_m^{\frac{1}{m}}(f(Rz)) \approx A_m^{\frac{1}{m}}(f(z))$ va biz umumiylikni buzmasdan, $r > 1$ radiusli doirada qator yaqinlashuvchi deb faraz qilishimiz mumkin.

Agar f funksiya R^0 sinfni t - chekli tartibdagi funksiyasi bo‘lsa, u holda Sadullayev kriteriyasiga muvofiq

$$V_m^{\frac{1}{m}} \approx \frac{1}{m^{\frac{1}{t}}}$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi. Biroq ushbu

$$A_m^{\frac{1}{m}} \le V_m^{\frac{1}{m}} \approx \frac{1}{m^{\frac{1}{t}}}$$

baholash zaruriy shartni bajarilishini isbotlaydi.

Yetarliligini isbotlash uchun biz quyidagi lemmadan foydalanamiz.

Lemma. Aytaylik, $e_j = (a_{j1}, a_{j2}, \ldots a_{jm}), \quad j = 1, 2, \ldots, m$ - $\mathbb{C}^m$ fazoning ixtiyoriy vektori va

$$A_m = \left[\bmod \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_m \end{vmatrix}\right]^{\frac{1}{m}}$$

ifoda o‘rinli bo‘lsin. U holda, shunday e yagona vektor mavjud-ki,

$$\left|\langle e,e_j\rangle\right| \geq A_m\,, \quad j=1,2,\dots,m$$

Tengsizlik bajariladi.

Ushbu

$$e_{j,m}=(a_j,\dots,a_{j+m-1}),\;\; j=1,2,\dots,m$$

$$e_{j,m+1}=(a_j,\dots,a_{j+m}),\;\; j=1,2,\dots,m+1$$

vektorlar uchun bu yuqoridagi lemmani qo‘llab quyidagi

$$e=(c_{m-1},c_{m-2},\dots,c_0),\; e'=(c'_m,c'_{m-1},\dots,c'_0)$$

$$\left|\langle e,e_{j,m}\rangle\right| \geq A_m\,, \quad j=1,2,\dots,m$$

$$\left|\langle e',e_{j,m+1}\rangle\right| \geq A_{m+1}\,, \quad j=1,2,\dots,m+1.$$

vektorni topamiz. Faraz qilaylik,

$$q_{m-1}(z)=c_0+c_1z+\dots c_{m-1}z^{m-1},$$

$$q_m(z)=c'_0+c'_1z+\dots c'_m z^m$$

ifoda o‘rinli bo‘lsin. U holda,

$$fq_{m-1}=p_{m-1}+\langle e,e_{1,m}\rangle z^m+\langle e,e_{2m}\rangle z^{m+1}+\dots+\langle e,e_{m,m}\rangle z^{2m-1}+O\left(|z|^{2m}\right)$$

$$fq_m=p_m+\langle e',e_{1,m+1}\rangle z^{m+1}+\langle e',e_{2,m+1}\rangle z^{m+2}+\dots+\langle e',e_{m+1,m+1}\rangle z^{2m+1}+O\left(|z|^{2m+2}\right)$$

bajariladi.

Ushbu $q_{m-1}p_m - q_mp_{m-1}$ ayirma $2m-1$ dan yuqori bo‘lmagan polinom darajasi hisoblanadi.

Demak,

$$q_{m-1}p_m - q_m p_{m-1} = q_m\left[\langle e,e_{1,m}\rangle z^m + \langle e,e_{2,m}\rangle z^{m+1} + \ldots + \langle e,e_{m,m}\rangle z^{2m-1}\right]$$

$$-\,q_{m-1}\left[\langle e',e_{1,m+1}\rangle z^{m+1} + \langle e',e_{2,m+1}\rangle z^{m+1} + \ldots + \langle e',e_{m-1,m+1}\rangle z^{2m-1}\right]$$

ifodani (1) ga asosan modul bo‘yicha bu polinom koeffitsientlari $const \times m \times (A_m + A_{m+1})$ dan oshib ketmaydi. Demak,

$$\left|q_{m-1}(z)p_m(z) - q_m(z)p_{m-1}(z)\right| \le const \times m^2 \times \frac{1}{m^{\frac{1}{\tau+\varepsilon}}}, \ z \in B(0,1),\ \varepsilon > 0,\ m \ge m_0$$

munosabatga kelamiz. Bunda $l > 7\tau$ butun sonni tayinlab olamiz. Faraz qilamiz,

$m_k = k^l$ va $r_m(z) = \dfrac{p_m(z)}{q_m(z)},\ m = 1,2,\ldots$ tengliklar bilan aniqlansin. U holda 3.1.1.-teorema isbotidagi mulohazalarida ba’zi o‘zgartirishlar kiritib, ularni takrorlasak, $\mathbb{C}$ tekislikda aniqlangan

$$\tilde{f}(z) = r_{m_1}(z) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[r_{m_{k+1}}(z) - r_{m_k}(z)\right]$$

qatorga ega bo‘lamiz. Bu yerda $\tilde{f}$ nozik analitik funksiya, shuningdek, $\{r_m(z)\}$ ratsional funksiyalar ketma-ketligi $\mathbb{C}$ tekislikning barcha joyida sig’im bo‘yicha $\tilde{f}$ analitik funksiyaga tez yaqinlashadi.

$$\lim_{m\to\infty} C\left\{z \in B(0,R) : \left|r_m(z) - f(z)\right|^{\frac{1}{m}} > \varepsilon\right\} = 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ R > 0.$$

Bundan, $f \in R^0$ funksiya τ dan oshmaydigan tartibga egaligi ham kelib chiqadi.

Teorema isbotlandi.

XULOSA

Ushbu magistrlik dissertatsiyasida Gonchar sinfiga tegishli bo‘lgan funksiyalarning nozik analitik bo‘lishi shartlari o‘rganilgan bo‘lib quyidagi asosiy natijalar olingan.

Agar $f \in R^0$ funksiya uchun ushbu

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\ln m}{\ln \frac{\ln m}{\rho_m^{\frac{1}{m}}}} < +\infty$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda bu funksiya butun $\mathbb{C}$ tekislikka nozik analitik davom qiladi, ya’ni butun $\mathbb{C}$ tekislikda nozik analitik bo‘lgan $\tilde{f}(z)$ funksiya topilib, $\tilde{f}|_U \equiv f$ bo‘ladi.

Yuqoridagi shartlar bajarilganda shunday $\{r_m(z)\}$ ratsional funksiyalar ketma-ketligi topilib, $\mathbb{C}$ tekislikning hamma yerida sig’im bo‘yicha nozik analitik $\tilde{f}$ funksiyaga tez yaqinlashadi, ya’ni

$$\lim_{m\to\infty} C\left\{ z \in B(0,1) : | r_m(z) - f(z)|^{\frac{1}{m}} > \varepsilon \right\} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0,\ R > 0 .$$

Adabiyotlar

1. Брело М., Основы классической теории потенциала. М., ИЛ, 1964.
2. Гончар А.А., Локальное условие однозначности аналитических функций. Мат.сб., Т.89(131), (1972), 148-164.
3. Гончар А.А., Локальное условие однозначности аналитических функций нескольких переменных. Мат. Сб., Т. 93 (135), (1974), 296-313.
4. Садуллаев А., Рациональные аппроксимации и плюриполярные множества. Мат. сб., Т.119:1, (1982), 96-118.
5. Садуллаев А., Критерий быстрой рациональной аппроксимации в □^{n}. Мат. сб., Т.125:2, (1984), 269-279.
6. Садуллаев А., Ибрагимов З., Класс R А. А. Гончара и тонко-аналитические функции. Мат. сб., Т.
7. Fuglede B., Finely holomorphic functions. A survey. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., V.33 (1988), 283-295.
8. Edlund T., Joricke B., The pluripolar hull of a graph and fine analytic continuation. Ark. Mat., V.44 (2006), 39-60.
9. Anders Bjo‘rn, Jana Bjo‘rn, Visa Latvala “ The weak carton property for the p-fine topology on metric spaces”. Indiana Univ. Math. J. 64. (2015). 915-941.
10. Levenberg N., Martin G., Poletsky E. A., Analytic disks and pluripolar sets. Indiana Univ. Math. J., V 41 (1992), 515-532.
11. Edigarian A., Wiegerinck J., The pluripolar hull of the graph of a holomorphic function with polar singularities. Indiana Univ. Math. J., V.52 (2003), 1663-1680.
12. Edigarian A., Wiegerinck J., Graphs that are not complete pluripolar. Proc. Amer. Math. Soc. V. 131 (2003), 2459-2465.
13. Edigarian A., Wiegerinck J., Determination of the pluripolar hull of graphs of certain holomorphic functions. Ann. Inst. Fouier (Genoble)., V. 54 (2004), 2085-2104.
14. Edlund T., Joricke B., Complete pluripolar curves and graphs. Ann. Polon. Math., V. 84 (2004), 75-86.

Internet saytlari:

1. www.math-net.ru
2. http://eqworld.ipmnet.ru/
3. http://www.ziyonet.uz/
4. http://www.ams.org/samplings/math-history/math-history
5. http://people.math.gatech.edu/~cain/textbooks/onlinebooks.html