

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

QARSHI MUXANDISLIK IQTISODIYOT INSTITUTI

Holmurodov O, T.Aliqulov, G.Qayumova

«OLIV MATEMATIKA» KAFEDRASI

MATEMATIK ANALIZDAN

Butun va kasr-ratsional funksiyalar.

6-ta'rif. $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ ko'rinishdagi funksiya butun ratsional funksiya yoki ko'phad deb ataladi, bu yerdagi n natural son ko'phadning darajasi, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ ma'lum sonlar ko'phadning koeffitsientlari deb ataladi.

Masalan, $y = 2x + 1$, $y = 2x^2 + 3x + 4$, $y = 6x^3 + 4x - 7$ funksiyalar mos ravishda birinchi, ikkinchi va uchinchi darajali ko'phadlardir.

Birinchi darajali $y = a_0x + a_1$ ko'phad **chiziqli funksiya** deb ataladi.

Umumiylikni buzmaslik maqsadida $y = C$ o'zgarmas funksiyani nolinch darajali ko'phad deb qarash mumkin: $y = Cx^0$.

Odatda n -darajali ro'phadni $P_n(x)$ kabi yoziladi.

7-ta'rif. Ikki ko'phadning nisbati **kasr-ratsional funksiya** yoki **ratsional kasr** deyiladi.
$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_{m-1}x + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n}$$

Kasrning suratini darajasi maxrajining darajasidan kichik ($m < n$) bo'lganda kasr to'g'ri va aks holda ($m \geq n$) kasr **noto'g'ri** kasr deb ataladi. Masalan, $y = \frac{x^4 - 7x - 3}{4x^3 + 6x - 1}$, $y = \frac{x^3 + 1}{1 - x^3}$, $y = \frac{x^2 + 3}{x^3 + 7x + 8}$ funksiyalar kasr-ratsional funksiya bo'lib, ulardan birinchi ikkitasi noto'g'ri kasr, uchinchi esa to'g'ri kasrdir.

Funksiyaning juft va toqligi, davriyligi.

8-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli barcha x lar uchun $f(-x) = f(x)$ tenglik bajarilsa $f(x)$ funksiya **juft funksiya** deb ataladi. Agar har bir $x \in D(f)$ uchun $f(-x) = -f(x)$ tenglik bajarilsa $f(x)$ funksiya **toq funksiya** deb ataladi. Juft funksiyaning grafigi Oy o'qqa nisbatan, toq funksiyaning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Masalan, $y = x$, $y = x^3$, $y = \sin x$ funksiyalar toq $y = x^2$, $y = x^4$, $y = \cos x$ funksiyalar juft (81 va 84 chizmalar) funksiyalardir. $y = a^x$, $y = \log_a x$ funksiyalar juft ham emas toq ham emas.

Ko'rinib turibdiki juft funksiyaning ham, toq funksiyaning ham aniqlanish sohasi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

9-ta'rif. Agar o'zgarmas $T \neq 0$ son mavjud bo'lib $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli barcha x lar uchun $f(x \pm T) = f(x)$ tenglik bajarilsa $f(x)$ funksiya **davriy funksiya** deb ataladi. $f(x \pm T) = f(x)$ tenglikni qanoatlantiruvchi musbat T sonlarning eng kichigi T_0 $f(x)$ funksiya **davri** deb ataladi. Masalan, $y = \sin x$, $y = \cos x$ funksiyalar davri 2π ga teng davriy funksiyalar, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ funksiyalar esa davri π ga teng davriy funksiyalardir.

Monoton funksiyalar.

$f(x)$ funksiya biror $[a; b]$ kesmada (interval, yarim interval bo'lishi ham mumkin) aniqlangan bo'lsin.

10-ta'rif. Agar x ning shu kesmaga tegishli ixtiyoriy ikkita x_1 va x_2 qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) < f(x_2)$ (yoki $f(x_1) > f(x_2)$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada **o'suvchi** (yoki **kamayuvchi**) deyiladi.

Boshqacha aytganda argumentning katta qiymatiga funksiyaning katta qiymati mos kelsa funksiya o'suvchi deyilar ekan.

Masalan, $y = \sqrt{x}$ (81-chizma) funksiya $[0; +\infty)$ da, $y = a^x$ ($a > 1$) (82-chizma) funksiya $(-\infty; +\infty)$ da, $y = \log_a x$ ($a > 1$) (83(a)-chizma) funksiya $(0; +\infty)$ da, $y = \sin x$ (84-chizma) funksiya $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ kesmada, $y = \cos x$ (84-chizma) funksiya $[-\pi; 0]$ kesmada o'suvchi.

Argumentning katta qiymatiga funksiyaning kichik qiymati mos kelganda funksiya kamayuvchi deyilar ekan.

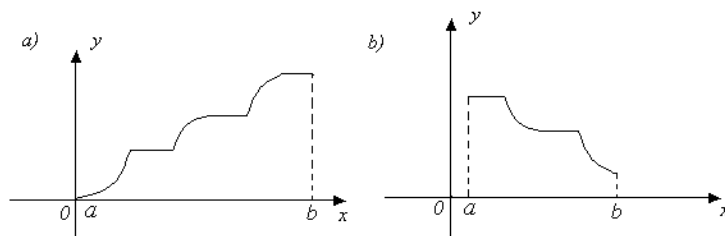
Masalan, $y = x^2, y = x^4$ funksiyalar (81-chizma) $(-\infty; 0)$ oraliqda, $y = a^x$ ($0 < a < 1$) (3-chizma) funksiya $(-\infty; +\infty)$ oraliqda, $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$) (83-chizma) funksiya $(0; +\infty)$ oraliqda, $y = \cos x$ (84-chizma) funksiya $[0; \pi]$ kesmada kamayuvchi.

$[a; b]$ kesma $f(x)$ funksiyaning mos ravishda **o'sish** yoki **kamayish oralg'i** deyiladi. O'suvchi va kamayuvchi funksiyalar **monoton** funksiyalar deb ataladi. Monoton funksiyaning o'sish, kamayish oraliqlari uning **monotonlik oralg'i** deyiladi.

Funksiyaning o'sish yoki kamayishi haqida gapirganda o'sish yoki kamayish oraliqlari ko'rsatilishi shart. Chunki bir funksiyaning o'zi bir oraliqda o'ssa u boshqa bir oraliqda kamayishi ham mumkin. Masalan, $y = \cos x$ funksiya $[-\pi; 0]$ orliqda o'sadi, $[0; \pi]$ orliqda kamayadi (84-chizma). Shuningdek $y = x^2$ va, $y = x^4$ funksiyalar ham $(-\infty; 0)$ oraliqda kamayadi, $(0; +\infty)$ oraliqda esa o'sadi.

11-ta'rif. Agar $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \leq f(x_2)$ (yoki $f(x_1) \geq f(x_2)$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada **kamaymaydigan** (yoki **o'smaydigan**) funksiya deyiladi.

Masalan, 85(a)-chizmada kamaymaydigan, 85(b)-chizmada o'smaydigan funksiyalarning grafiklari tasvirlangan.



6-chizma.

Funksiyaning chegaralanganligi.

12-ta'rif. $(a; b)$ intervalda aniqlangan $y = f(x)$ funksiya uchun shunday $M > 0$ son mavjud bo'lib, $(a; b)$ dagi barcha x lar uchun $|f(x)| \leq M$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda **chegaralangan** deyiladi.

Agar bunday M son mavjud bo'lmasa, u holda $y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda **chegaralanmagan** deb ataladi.

Masalan, $y = \cos x$ funksiya $(-\infty; +\infty)$ intervalda chegaralangan, chunki bu intervaldagi barcha x lar uchun $|\cos x| \leq 1$, ya'ni $M=1$.

$y = \frac{1}{x}$ funksiya $(0;1)$ intervalda chegaralanmagan, chunki $\left| \frac{1}{x} \right| \leq M$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi musbat M sonni topish mumkin emas, chunki $\frac{1}{x}$ kasrning maxraji kichraygan sari u kattalasha boradi. Shu funksiyaning o'zi 0 nuqtani o'z ichiga olmagan istalgan intervalda chegaralangan bo'ladi.

ma'ruza. Mavzu: O'zgaruvchi miqdorning limiti.

Sonli ketma-ketliklar.

1-ta'rif. Natural sonlar to'plamida aniqlangan $x_n = f(n)$, $n \in N$ funksiyaning qiymatlari to'plami **sonli ketma-ketliklar** deb ataladi.

Agar n ga 1,2,3,... qiymatlar bersak, bu funksiyaning

$$x_1 = f(1), x_2 = f(2), \dots, x_n = f(n), \dots$$

xususiylariga ega bo'lamiz, ular ketma-ketlikning **hadlari** yoki **elementlari** deb ataladi.

Bunda x_1 ketma-ketlikning birinchi hadi, x_2 uning ikkinchi hadi va hokozo x_n ketma-ketlikning n -hadi deyiladi. Demak

$$x_1, x_2, \dots, x_n \dots \text{ yoki } f(1), f(2), \dots, f(n) \dots$$

sonli ketma-ketlikni tashkil etadi. Sonli ketma-ketlik $\{x_n\}$ yoki $\{f(n)\}$ orqali belgilanadi. Ketma-ketlikning n -hadi $x_n = f(n)$ uning **umumiy hadi** deb ataladi.

Ketma-ketlikning umumiy hadi ma'lum bo'lsa u berilgan hisoblanadi.

1-misol. $x_n = \frac{1}{2^n}$ funksiya $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{2^n} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \right\}$ ketma-ketlikni beradi.

2-misol. $x_n = 2n$ funksiya $\{x_n\} = \{2n\} = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ ketma-ketlikni beradi.

3-misol. $x_n = 1 + (-1)^n$ funksiya $\{x_n\} = \{1 + (-1)^n\} = \{0, 2, 0, 2, \dots, 1 + (-1)^n, \dots\}$ ketma-ketlikni beradi.

4-misol. $x_n = \frac{1}{n}$ funksiya $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$ ketma-ketlikni beradi.

Barcha misollarda n natural son, ya'ni $n \in N$.

Shunday M son mavjud bo'lsaki, barcha $n \in N$ uchun $x_n < M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik **yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik** deb ataladi.

Shunday $M > 0$ son mavjud bo'lsaki, istalgan $n \in N$ uchun $x_n > M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik **quyidan chegaralangan ketma-ketlik** deb ataladi.

Ham yuqoridan ham quyidan chegaralangan ketma-ketlik chegaralangan deb ataladi. Chegaralangan ketma-ketlik uchun shunday $M > 0$ son mavjud bo'lib barcha $n \in N$ uchun $|x_n| \leq M$ tengsizlik bajariladi.

Agar istalgan n natural son uchun $x_n < x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ **monoton o'suvchi ketma-ketlik** deb ataladi.

Agar istalgan n natural son uchun $x_n > x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ **monoton kamayuvchi ketma-ketlik** deb ataladi.

Agar istalgan n natural son uchun $x_n \geq x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ **o'smaydigan ketma-ketlik** deb ataladi.

Agar istalgan n natural son uchun $x_n \leq x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ **kamaymaydigan ketma-ketlik** deb ataladi.

5-misol. $\{x_n\} = \{n^2\} = \{1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots\}$ -o'suvchi, quyidan chegaralangan ketma-ketlik.

6-misol. $\{x_n\} = \{1 - 2n\} = \{-1, -3, -5, \dots\}$ -kamayuvchi, yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik.

7-misol. $\{x_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right\}$ -o'suvchi, chegaralanganketma-ketlik.

Ketma-ketlikning limiti.

a o'zgarmas son va $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

2-ta'rif. Agar istalgancha kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ natural son mavjud bo'lsaki, undan katta barcha n lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a o'zgarmas son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning **limiti** deb ataladi va $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ yoki $x_n \rightarrow a$ kabi belgilanadi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti a chekli son bo'lsa **ketma-ketlik yaqinlashuvchi**, aks holda ya'ni a mavjud bo'lmasa yoki ∞ bo'lsa u **uzoqlashuvchi ketma-ketlik** deb ataladi.

$|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ tengsizliklarga teng kuchli ekanini ko'rdik. Buni e'tiborga olsak, limit tushunchasini geometrik nuqtai nazardan bunday tushuntirish mumkin: agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ natural son topilsaki, $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1}, \dots\}$ ketma-ketlikning $N+1$ - hadidan boshlab barcha hadlari a nuqtaning ε - atrofiga tushsa, ya'ni a nuqtaning ε -atrofiga $\{x_n\}$ ketma-ketlikning birinchi N ta chekli sondagi hadlaridan tashqari barcha hadlari tushsa, a o'zgarmas son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning **limiti** deb ataladi.

Shunday qilib a o'zgarmas son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'lganda bu nuqtaning istalgan ε -atrofi $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ da ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari yotadi, ε -atrofdan tashqarida ketma-ketlikning chekli sondagi hadlari qoladi xolos.

8-misol. $\{x_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ ketma-ketlikning limiti 1 ga teng ekanligi ko'rsatilsin.

Yechish. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olib $|x_n - a| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$ yoki $\left| -\frac{1}{n} \right| < \varepsilon$ tengsizlikni tuzamiz. Biroq $n > 0$, shuning uchun $\frac{1}{n} < \varepsilon$ yoki $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Bundan ko'rinadiki, $N = N(\varepsilon)$ sifatida $\frac{1}{\varepsilon}$ natural bo'lganda shu sonni o'zini, u natural son bo'lmaganda $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ sonni ($[x]$ - x ning butun qismi) olinsa, u holda n ning $n > N(\varepsilon)$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha qiymatlari uchun $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ yoki $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ ekanini bildiradi.

Masalan, $\varepsilon = 0,01$ bo'lsa $N = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{0,01} = 100$ va ketma-ketlikning 101-hadidan boshlab barcha hadlari $a=1$ nuqtaning 0,01- atrofi (0,99, 1,01) ga tushadi, atrofda tashqarida ketma-ketlikning chekli, ya'ni 100 ta hadi qoladi. Shuningdek $\varepsilon = 0,001$ bo'lganda $N = \frac{1}{0,001} = 1000$ va n ning 1001-qiymatidan boshlab barcha hadlari uchun $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < 0,001$ tengsizlik bajariladi. Boshqacha qilib aytganda bu holda $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ ketma-ketlikning 1001-hadidan boshlab barcha hadlari $a=1$ nuqtaning $\varepsilon = 0,001$ atrofi (0,999, 1,001) ga tushadi, bu atrofda tashqarida esa ketma-ketlikning chekli, ya'ni 1000 ta hadi qoladi xolos.

1-izoh. O'zgarmas sonning limiti shu sonning o'ziga teng.

Haqiqatan, o'zgarmas c sonni barcha hadlari shu songa teng bo'lgan ketma-ketlik deb qarash mumkin, ya'ni $x_n = c$. Shuning uchun istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun

$$|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

tengsizlik doimo bajariladi.

2-izoh. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik faqat birgina limitga ega bo'ladi.

Haqiqatan, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ bo'lib $a \neq b$ bo'lsin. U holda ketma-ketlik limitining ta'rifiga binoan istalgancha kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N_1 va N_2 natural sonlar topilib n ning N_1 dan katta barcha qiymatlari uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik va n ning N_2 dan katta barcha qiymatlari uchun $|x_n - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. N_1 va N_2 dan kattasini N deb belgilasak n ning N dan katta barcha qiymatlari uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ ba $|x_n - b| < \varepsilon$ tengsizliklar bir vaqtda bajariladi. Demak $\{x_n\}$ ketma-ketlikning x_{N+1} - hadidan boshlab barcha hadlari ham $x=a$ nuqtaning ham $x=b$ nuqtaning ε -atrofida yotadi. Bu esa $a \neq b$ bo'lganda $\frac{b-a}{2}$ dan kichik ε lar uchun bajarilmaydi. Bundan $a=b$ ekani kelib chiqadi.

3-izoh. Har qanday ketma-ketlik ham limitga ega bo'lavermaydi.

Masalan, $\{x_n\} = \{1 + (-1)^n\} = \{0, 2, 0, 2, \dots, 1 + (-1)^n, \dots\}$ ketma-ketlik hech qanday limitga ega emas, chunki uning toq raqamli hadlari 0 ga, juft raqamli hadlari 2 ga teng bo'lib, $|x_{n+1} - x_n| = 2$ va $\varepsilon < 1$ bo'lganda n ning barcha qiymatlarida $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi a son mavjud emas.

Monoton chegaralangan ketma-ketlik limitining mavjudligi.

1-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton o'suvchi va yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u chekli limitga ega.

2-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton kamayuvchi va quyidan chegaralangan bo'lsa, u chekli limitga ega.

Bu teoremlarning isbotini keltirmaymiz.

Funksiyaning nuqtadagi limiti.

$f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin ($x=a$ nuqtaning o'zida aniqlanmagan bo'lishi ham mumkin). $D(f)$ -funksiyaning aniqlanish sohasidan limitga ega bo'lgan ixtiyoriy $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ ketma-ketlikni olamiz. $f(x)$ funksiyaning $\{x_n\}$ ketma-ketlikning nuqtalaridagi qiymatlari $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlikni tashkil etadi.

3-ta'rif. Argument x ning a dan farqli va unga yaqinlashuvchi barcha $\{x_n\}$ ketma-ketliklar uchun $y = f(x)$ funksiyaning shu ketma-ketlik nuqtalaridagi qiymatlaridan tuzilgan $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik b songa yaqinlashsa, b son $y = f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi (yoki $x \rightarrow a$ dagi) limiti deb ataladi va $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ yoki $x \rightarrow a$ da $f(x) \rightarrow b$ ko'rinishda yoziladi.

$f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada faqat birgina limitga ega bo'ladi. Bu yaqinlashuvchi $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlikning yagona limitga ega ekanligidan kelib chiqadi.

9-misol. $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa.} \end{cases}$

Dirixle funksiyasi sonlar o'qining hech bir nuqtasida limitga ega emasligi ko'rsatilsin.

Yechish. Son o'qining istalgan x_0 nuqtasini olamiz. x_0 ga yaqinlashuvchi argumentning $\{x_n\}$ ratsional sonlar ketma-ketligiga funksiyaning $\{D(x_n)\} = \{1\}$ qiymatlari ketma-ketligi mos bo'lib uning limiti 1 ga teng bo'lishi ravshan. x_0 ga yaqinlashuvchi argumentning $\{\bar{x}_n\}$ irratsional sonlar ketma-ketligiga funksiyaning $\{D(\bar{x}_n)\} = \{0\}$ qiymatlari ketma-ketligi mos kelib uning limiti 0 ga teng bo'ladi. Shunday qilib, x_0 ga yaqinlashuvchi argumentning $\{x_n\}$ va $\{\bar{x}_n\}$ ketma-ketliklariga funksiyaning shu ketma-ketliklarni nuqtalaridagi qiymatlaridan tuzilgan $\{D(x_n)\}$ va $\{D(\bar{x}_n)\}$ ketma-ketliklar har xil limitlarga ega. Bu funksiyaning limitga ega bo'lish ta'rifiga xilof. Demak $D(x)$ funksiya x_0 nuqtada limitga ega emas. x_0 nuqta sonlar o'qining istalgan nuqtasi bo'lganligi uchun u sonlar o'qining hech bir nuqtasida limitga ega emas. Shunday qilib Dirixle funksiyasi aniqlanish sohasining hech bir nuqtasida limitga ega emas ekan.

4-ta'rif. Istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lsaki, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha a dan farqli x nuqtalar uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b chekli son $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi (yoki $x \rightarrow a$ dagi) **limiti** deb ataladi.

Bu ta'rifga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. b son $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi limiti bo'lganda $(a-\delta, a+\delta)$ intervaldagi barcha x lar uchun $f(x)$ funksiyaning qiymatlari $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ intervalda yotadi.

Keltirilgan uchinchi va to'rtinchi ta'riflarni teng kuchlilikini ko'rsatish mumkin.

10-misol. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = 2$ ekanini tarifdan foydalanib isbotlang.

Yechish. $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x}$ funksiyaning $x=5$ nuqtaning biror atrofida, masalan $(4,6)$ intervalda qaraylik. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olib $|f(x) - b| < \varepsilon$ ni $x \neq 5$ deb quyidagicha o'zgartiramiz:

$$\left| \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} - 2 \right| = \left| \frac{(x-5)(x+5)}{x(x-5)} - 2 \right| = \left| \frac{x+5}{x} - 2 \right| = \left| \frac{5-x}{x} \right| = \frac{|5-x|}{|x|}.$$

$x > 4$ ekanini hisobga olsak $|x| = x > 4$ bo'lib $\left| \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} - 2 \right| < \frac{|5-x|}{4}$ kelib chiqadi. Bundan ko'rinib turibdiki, $\delta = 4\varepsilon$ deb olsak, u holda $0 < |x-5| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x \in (4, 6)$ uchun

$$\left| \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} - 2 \right| < \frac{\delta}{4} = \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bundan 2 soni $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x}$ funksiyaning $x=5$ nuqtadagi limiti bo'lishi kelib chiqadi.

5-ta'rif. Istalgancha katta $M > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(M) > 0$ son mavjud bo'lib, $|x-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha a dan farqli x lar uchun $|f(x)| > M$ tengsizlik bajarilsa, $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiya cheksizlikka intiladi deb aytiladi va bu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ kabi yoziladi.

11-misol. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = \infty$ ekani isbotlansin.

Yechish. $f(x) = \frac{1}{x-2}$ funksiyaning qaraylik. Ixtiyoriy $M > 0$ sonni olsak, $|f(x)| = \left| \frac{1}{x-2} \right| > M$ tengsizlik $|x-2| < \frac{1}{M}$ bo'lganda bajarilishi ko'rinib turibdi. Agar $\delta = \frac{1}{M}$ deb olinsa, $|x-2| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $\left| \frac{1}{x-2} \right| > \frac{1}{\delta} = M$ yoki $\left| \frac{1}{x-2} \right| > M$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $x \rightarrow 2$ da $f(x) = \frac{1}{x-2}$ funksiya cheksizlikka intilishini bildiradi, ya'ni $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = \infty$

Funksiyaning cheksizlikdagi limiti.

6-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N > 0$ son mavjud bo'lib, $|x| > N$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa,

o'zgaras b son $y = f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow \infty$ dagi **limiti** deb ataladi va bu $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ kabi yoziladi.

12-misol. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1$ ekani isbotlansin.

Yechish. $f(x) = \frac{x+1}{x}$ funksiyaning qaraylik. Istalgan $\varepsilon < 0$ sonni olsak $|f(x) - b| = \left| \frac{x+1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{x+1-x}{x} \right| = \frac{1}{|x|}$ bo'lib $N = \frac{2}{\varepsilon}$ desak, barcha $|x| > N$ uchun $\left| \frac{x+1}{x} - 1 \right| < \frac{2}{N} = \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan 1 soni $f(x) = \frac{x+1}{x}$ funksiyaning $x \rightarrow \infty$ dagi limiti bo'lishi ayon bo'ladi.

7-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo'lib, istalgan yetarlicha katta $M > 0$ son uchun shunday $N > 0$ son topilsaki, $|x| > N$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x)| > M$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya $x \rightarrow \infty$ da cheksizlikka intiladi deyiladi va $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ kabi yoziladi.

13-misol. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ ekani isbotlansin.

Yechish. $f(x) = x^2$ funksiyaning qaraylik. Istalgan $M > 0$ sonni olib $|f(x)| > M$ tengsizlikni tuzamiz. $x^2 > M$, bundan $|x| > \sqrt{M}$ kelib chiqadi. $N = \sqrt{M}$ deb olinsa, $|x| > N$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $x^2 > N^2 = M$ tengsizlik bajariladi. Bu $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ ekanini bildiradi.

Limitga ega funksiyaning chegaralanganligi.

16.3-teorema. Agar $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti b chekli son bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida chegaralangandir.

Isboti. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ chekli son bo'lsin. U holda limitni ta'rifiga binoan istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib $(a - \delta, a + \delta)$ intervaldagi barcha x lar uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ yoki $|f(x)| - |b| \leq |f(x) - b| < \varepsilon$, bundan $|f(x)| < |b| + \varepsilon$ bo'lishi kelib chiqadi. Agar $M = |b| + \varepsilon$ deb olinsa a nuqtaning δ -atrofidagi barcha x lar uchun $|f(x)| \leq M$ tengsizlik bajariladi. Bu $f(x)$ funksiya $(a - \delta, a + \delta)$ intervalda chegaralanganligini ko'rsatadi.

Agar $f(x)$ funksiya biror intervalda chegaralangan va nolga teng bo'lmasa, u holda $\frac{1}{f(x)}$ funksiya ham shu intervalda chegaralangan bo'lishini ta'kidlab o'tamiz.

Bir tomonlama limitlar.

8-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limitining ta'rifida x o'zgaruvchi a dan kichik bo'lganicha qolsa, u holda funksiyaning shu nuqtadagi b_1 limiti uning $x = a$ nuqtadagi (yoki $x \rightarrow a - 0$ dagi) **chap tomonlama limiti** deb ataladi va $b_1 = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$, yoki $b_1 = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$, yoki $b_1 = f(a-0)$ kabi yoziladi.

Agar $a=0$ bo'lsa, u holda $b_1 = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = f(-0)$ kabi yoziladi.

9-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi limiti ta'rifida x o'zgaruvchi a dan katta bo'lganicha qolsa, u holda funksiyaning shu nuqtadagi b_2 limiti uning $x=a$ nuqtadagi (yoki $x \rightarrow a+0$ dagi) **o'ng tomonlama limiti** deb ataladi va $b_2 = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ yoki $b_2 = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, yoki $b_2 = f(a+0)$ kabi yoziladi.

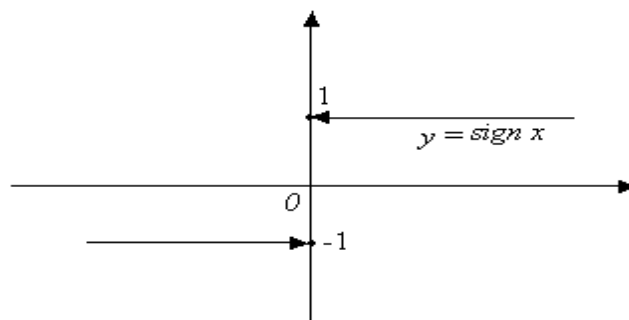
Agar $a=0$ bo'lsa, u holda $b_2 = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(+0)$ kabi yoziladi.

$f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi chap va o'ng tomonlama limitlari **bir tomonlama limitlar** deb ataladi. $b_1=b_2$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada limitga ega. Aksincha, $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi bir tomonlama limitlari mavjud va ular teng, ya'ni $f(a-0)=f(a+0)$ bo'lganda va faqat shundagina bu funksiya a nuqtada limitga ega bo'ladi.

Masalan,

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \\ -1, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya $x=a$ nuqtada limitga ega emas, chunki $f(-0)=-1$, $f(+0)=1$ va $f(-0) \neq f(+0)$ (86-chizma). Bu funksiya 0 dan farqli istalgan nuqtada limitga ega.



7-chizma.

Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar.

10-ta'rif. Agar $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ (yoki $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$) bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x \rightarrow a$ da (yoki $x \rightarrow \infty$ da) **cheksiz kichik funksiya** deyiladi.

Cheksiz kichik funksiya $x=a$ nuqtada chekli 0 limitga ega bo'lgani uchun u shu nuqtaning qandaydir atrofida doimo chegaralangan bo'ladi.

11-ta'rif. Agar $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (yoki $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$) bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x \rightarrow a$ da (yoki $x \rightarrow \infty$ da) **cheksiz katta funksiya** deyiladi.

Cheksiz katta funksiya qaralayotgan $x=a$ nuqtaning atrofida chegaralanmagan bo'ladi.

Endi cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar orasidagi bog'lanishni ifodalovchi teorema bilan tanishamiz.

4-teorema. 1. Agar $f(x)$ funksiya $x \rightarrow a$ da (yoki $x \rightarrow \infty$ da) cheksiz kichik funksiya bo'lsa, u holda $\frac{1}{f(x)}$ funksiya $x \rightarrow a$ da (yoki $x \rightarrow \infty$ da) cheksiz katta funksiya bo'ladi.

2. Agar $\varphi(x)$ funksiya $x \rightarrow a$ da (yoki $x \rightarrow \infty$ da) cheksiz katta funksiya bo'lsa, u holda $\frac{1}{\varphi(x)}$ funksiya $x \rightarrow a$ da (yoki $x \rightarrow \infty$ da) cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Isboti. 1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ bo'lsin. U holda cheksiz kichik funksiyaning ta'rifiga ko'ra istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, $0 < |x - a| < \delta$ shartni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x)| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bundan $\left| \frac{1}{f(x)} \right| > \frac{1}{\varepsilon}$ bo'lishi kelib chiqadi, $\frac{1}{\varepsilon} = M$ deb belgilasak $\left| \frac{1}{f(x)} \right| > M$ bo'ladi. Bu esa $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty$ ekanini, ya'ni $f(x)$ funksiya $x \rightarrow a$ da cheksiz katta funksiya ekanini bildiradi. $x \rightarrow \infty$ bo'lgan hol ham shunga o'xshash isbotlanadi.

2. $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$ bo'lsin. U holda cheksiz katta funksiyaning ta'rifiga binoan istalgan $M > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|\varphi(x)| > M$ tengsizlik bajariladi. Bundan $\left| \frac{1}{\varphi(x)} \right| < \frac{1}{M}$ kelib chiqadi, $\frac{1}{M} = \varepsilon$ deb belgilasak $\left| \frac{1}{\varphi(x)} \right| < \varepsilon$ bo'ladi. Bu esa $x \rightarrow a$ da $\frac{1}{\varphi(x)} \rightarrow 0$ ni, ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\varphi(x)} = 0$ ekanini bildiradi. $x \rightarrow \infty$ bo'lgan hol ham shunga o'xshash isbotlanadi. Bu teoremaga binoan $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ bo'lgani uchun $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ ekanligi kelib chiqadi.

Cheksiz kichik funksiylarning asosiy xossalari.

1-xossa. Chekli sondagi cheksiz kichik funksiylarning algebraik yig'indisi ham cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Isboti. Ikkita qo'shiluvchi bo'lgan holni qaraymiz. $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik funksiylar bo'lganda, ularning yig'indisi $u(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ ham cheksiz kichik funksiya bo'lishini ko'rsatamiz. $\alpha(x)$ $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik funksiya bo'lgani uchun $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta_1 > 0$ son topilib, $0 < |x - a| < \delta_1$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajariladi.

$\beta(x)$ ham cheksiz kichik funksiya bo'lganligi sababli yana o'sha $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta_2 > 0$ son topilib, $0 < |x - a| < \delta_2$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajariladi.

δ_1 va δ_2 sonlarning kichigini δ deb belgilasak, u holda $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ va $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar bajariladi.

Demak, a nuqtaning biror δ -atrofi uchun

$$|u(x)| = |\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

tengsizlik to'g'ri bo'ladi. Bundan $x \rightarrow a$ da $u(x)$ cheksiz kichik funksiya bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$. Xossa isbot bo'ldi.

2-xossa. Cheksiz kichik funksiyaning chegaralangan funksiyaga ko'paytmasi ham cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Isboti. $x \rightarrow a$ da $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya $z(x)$ chegaralangan funksiya bo'lganda, $u(x) = \alpha(x) z(x)$ funksiya cheksiz kichik funksiya bo'lishini isbotlaymiz. $x \rightarrow a$ da $z(x)$ chegaralangan funksiya bo'lgani sababli biror $M > 0$ son uchun shunday $\delta_1 > 0$ son topiladiki, $0 < |x - a| < \delta_1$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|z(x)| < M$ tengsizlik bajariladi.

$x \rightarrow a$ da $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya bo'lganligi sababli istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta_2 > 0$ son topilib, $0 < |x - a| < \delta_2$ shartni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$ tengsizlik bajariladi.

δ_1 va δ_2 sonlarning kichigini δ deb belgilasak, u holda $0 < |x - a| < \delta$ shartni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|z(x)| < M$ va $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$ tengsizliklar bajariladi. Demak, a nuqtaning biror δ -atrofidagi barcha x lar uchun

$$|u(x)| = |\alpha(x) z(x)| = |\alpha(x)| |z(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

tengsizlik to'g'ri bo'ladi. Bundan $x \rightarrow a$ da $u(x)$ cheksiz kichik funksiya bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \cdot u(x) = 0$.

3-xossa. Chekli sondagi cheksiz kichik funksiylarning ko'paytmasi ham cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Isboti. Ikkita ko'paytuvchi bo'lgan holni qaraymiz. $x \rightarrow a$ da $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik funksiylar bo'lsin, Cheksiz kichik funksiya chegaralanganligi sababli $u(x) = \alpha(x) \beta(x)$ ko'paytmada funksiylardan biri chegaralangan funksiya, ikkinchisi esa cheksiz kichik funksiya bo'lib ikkinchi xossaga binoan ularning ko'paytmasi ham cheksiz kichik funksiya bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \cdot \beta(x) = 0 \text{ bo'ladi.}$$

4-xossa. Cheksiz kichik funksiya noldan farqli limitga ega bo'lgan funksiya bo'linmasi ham cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Isboti. $x \rightarrow a$ da $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya, $z(x)$ esa 0 dan farqli limitga ega bo'lgan funksiya bo'lsin. Biroq limitga ega bo'lgan $z(x)$ funksiya chegaralangan. Shu sababli $\frac{1}{z(x)}$ funksiya ham chegaralanmagan. $\frac{\alpha(x)}{z(x)} = \alpha(x) \frac{1}{z(x)}$

bo'linmani cheksiz kichik funksiyani chegaralangan funksiyaga ko'paytmasi sifatida qarash mumkin. U holda 2-xossaga binoan $\frac{\alpha(x)}{z(x)}$ bo'linma ham $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi, ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{z(x)} = 0$.

16.5-teorema. 1. Agar $y = f(x)$ funksiya $x \rightarrow a$ da chekli b limitga ega bo'lsa, u holda uni b son va $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik funksiyaning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin.

2. Agar $y = f(x)$ funksiyaning o'zgarmas b son bilan $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik funksiyaning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsa, u holda b son bu funksiyaning $x \rightarrow a$ dagi limiti bo'ladi.

Isboti. 1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bo'lsin, u holda limitni ta'rifiga binoan istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lib, $0 < |x - a| < \delta$ shartni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlik $f(x) - b$ funksiya $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik funksiya ekanligini bildiradi. Uni $\alpha(x)$ orqali belgilasak $f(x) - b = \alpha(x)$ yoki $f(x) = b + \alpha(x)$ kelib chiqadi, bu yerda $\alpha(x)$ $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik funksiya.

2. $f(x) = b + \alpha(x)$ bo'lsin, bu yerda b -o'zgarmas son, $\alpha(x)$ esa $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik funksiya. U holda cheksiz kichik funksiyani ta'rifiga binoan istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lib, $0 < |x - a| < \delta$ shartni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|\alpha(x)| < \varepsilon$ yoki $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi, chunki $\alpha(x) = f(x) - b$. Bu $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiya b limitga ega ekanligini bildiradi, ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

ma'ruza. Mavzu: Limitlar haqida asosiy teoremlar. Ajoyib limitlar. Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash.

Limitlar haqida asosiy teoremlar.

Funksiyalarning limitlarini topishga yordam beradigan limitga o'tishning eng sodda qoidalari bilan tanishamiz.

Bunda isbot faqatgina $x \rightarrow a$ hol uchun o'tkaziladi ($x \rightarrow \infty$ da shunga o'xshash isbotlanadi). Ba'zan qisqalik uchun, $x \rightarrow a$ ni ham, $x \rightarrow \infty$ ni ham yozmaymiz.

17.1-teorema. Chekli sondagi limitga ega funksiyalar algebraik yig'indisining limiti qo'shiluvchi funksiyalar limitlarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\lim(u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)) = \lim u_1(x) + \lim u_2(x) + \dots + \lim u_n(x)$$

Isboti. Mulohazani ikkita qo'shiluvchi bo'lgan hol uchun yuritamiz. $\lim u_1(x) = a$, $\lim u_2(x) = b$ bo'lsin. U holda $\lim(u_1(x) + u_2(x)) = a + b$ tenglik to'g'ri bo'lishini ko'rsatamiz. Cheksiz kichik funksiyalarning xossalari dagi 16.5-teoremaning birinchi qismiga asosan $u_1 = a + \alpha$, $u_2 = b + \beta$ deb yozishimiz mumkin, bu yerdagi α, β - cheksiz kichik funksiyalar.

Demak, $u_1 + u_2 = (a + \alpha) + (b + \beta) = (a + b) + (\alpha + \beta)$ bu tenglikda $a + b$ -o'zgarmas son, $\alpha + \beta$ -cheksiz kichik funksiya. Yana o'sha 16.5-teoremaning ikkinchi qismini qo'llasak $\lim(u_1 + u_2) = a + b = \lim u_1 + \lim u_2$ ekanligi kelib chiqadi.

1-misol. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 2 = 2 + 2 = 4.$

2-misol. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4}{x^4} - \frac{5x^2}{x^4} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} = 1 - 0 = 1.$

2-teorema. Chekli sondagi limitga ega funksiyalar ko'paytmasining limiti shu funksiyalar limitlarining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\lim(u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \dots \cdot u_n(x)) = \lim u_1(x) \cdot \lim u_2(x) \cdot \dots \cdot \lim u_n(x).$$

Isboti. Ko'paytmada ikkita funksiya bo'lgan holni qaraymiz. $\lim u_1 = a$, $\lim u_2 = b$ bo'lsin. U holda yuqorida eslatilgan 16.5-teoremaga binoan $\lim u_1 = a + \alpha$, $\lim u_2 = b + \beta$ bo'ladi, α , β -cheksiz kichik funksiyalar. Demak, $u_1 \cdot u_2 = (a + \alpha) \cdot (b + \beta) = ab + (\alpha b + a\beta + \alpha\beta)$. Bu tenglikdagi ab -o'zgarmas son, $(\alpha b + a\beta + \alpha\beta)$ - cheksiz kichik funksiya. Yana o'sha 16.5-teoremani ikkinchi qismini qo'llasak $\lim u_1 \cdot u_2 = ab = \lim u_1 \cdot \lim u_2$ ekanligi kelib chiqadi.

3-misol. $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3)(x - 4) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) \lim_{x \rightarrow 2} (x - 4) = [\lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3] \cdot [\lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 4] = (2 + 3)(2 - 4) = 5 \cdot (-2) = -10.$

4-misol. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \left(2 - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x^2} \right) = (1 - 0)(2 + 0) = 2$

Natija. O'zgarmas C ko'paytuvchini limit belgisidan chiqarish mumkin, ya'ni $\lim C \cdot u(x) = C \lim u(x)$ chunki $\lim C = C$.

5-misol. $\lim_{x \rightarrow -1} 7x^2 = 7 \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 7 \cdot (-1)^2 = 7.$

17.3- teorema. Ikkita limitga ega funksiya bo'linmasining limiti maxrajning limiti noldan farqli bo'lganda, shu funksiyalar limitlarining bo'linmasiga teng, ya'ni agar $\lim v \neq 0$ bo'lsa, $\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$ bo'ladi.

Isbot. $\lim u(x) = a$, $\lim v(x) = b \neq 0$ bo'lsin. U holda $u = a + \alpha$, $v = b + \beta$ bo'lishini hisobga olsak.

$$\frac{u}{v} = \frac{a + \alpha}{b + \beta} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a + \alpha}{b + \beta} - \frac{a}{b} \right) = \frac{a}{b} + \frac{ab + \alpha b - ab - a\beta}{b(b + \beta)} = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - a\beta}{b(b + \beta)}$$

tenglikka ega bo'lamiz, bunda $\frac{a}{b}$ -o'zgarmas son, $\frac{\alpha b - a\beta}{b(b + \beta)}$ - cheksiz kichik funksiya, chunki $\alpha b - a\beta$ cheksiz kichik funksiya va $b(b + \beta) \neq 0$.

So'nggi tenglikka 16.5-teoremani 2-qismini qo'llasak $\lim \frac{u}{v} = \frac{a}{b} = \frac{\lim u}{\lim v}$ tenglik hosil bo'ladi.

6-misol. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 3}{3x + 1}$ ni toping.

Yechish. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x+1) = 3 \cdot 2 + 1 = 7 \neq 0$. Shuning uchun:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+3}{3x+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (2x+3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (3x+1)} = \frac{2 \cdot 2 + 3}{3 \cdot 2 + 1} = \frac{7}{7} = 1.$$

7-misol. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-3}$ ni toping.

Yechish. $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 3-3=0$ bo'lgani uchun 17.3-teoremani qo'llab bo'lmaydi. Suratning limiti $\lim_{x \rightarrow 3} (x+1) = 3+1=4 \neq 0$ bo'lgani uchun berilgan

ifodaning teskarisining limitini topamiz: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x+1)} = \frac{3-3}{3+1} = \frac{0}{4} = 0$

Bundan $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-3} = \infty$ kelib chiqadi, chunki cheksiz kichik funksiyaga teskari funksiya cheksiz katta funksiya bo'ladi.

4-teorema. Agar a nuqtaning biror atrofiga tegishli barcha x lar uchun $y=f(x) \geq 0$ va $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ (b -chekli son) bo'lsa, u holda $b \geq 0$ bo'ladi.

Isboti. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bo'lib $b < 0$ bo'lsin. U holda $|f(x)-b| \geq |b| > 0$ bo'lishi ravshan. Oxirgi tengsizlik $f(x)-b$ ayirmaning nolga intilmasligini, ya'ni b son $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow a$ dagi limiti emasligini ko'rsatadi. Bu teoremaning shartiga zid, binobarin $b < 0$ degan faraz shu ziddiyatga olib keldi. Demak, $f(x) \geq 0$ bo'lsa $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$ bo'lar ekan.

Shunga o'xshash limitga ega $f(x) \leq 0$ funksiya uchun $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq 0$ bo'lishini isbotlash mumkin.

Boshqacha aytganda nomanfiy funksiya limitga ega bo'lsa uning limiti manfiy son bo'lolmas ekan va nomusbat funksiya limitga ega bo'lsa uning limiti musbat son bo'laolmas ekan.

17.5- teorema. Agar $x \rightarrow a$ da limitga ega $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyaning mos qiymatlari uchun $f_1(x) \geq f_2(x)$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \geq \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$ bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra $f_1(x) \geq f_2(x)$, bundan $f_1(x) - f_2(x) \geq 0$. Oldingi teoremaga binoan $\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) - f_2(x)] \geq 0$ yoki $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) - \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \geq 0$. Bundan $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \geq \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$ tengsizlik kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi. Bu teoremaga ko'ra tengsizlikda limitga utish mumkin ekan.

17.6-teorema (oraliq funksiyaning limiti haqida). Agar $x \rightarrow a$ da limitga ega bo'lgan $u(x)$, $v(x)$ va $z(x)$ funksiylarning mos qiymatlari uchun $u(x) \leq v(x) \leq z(x)$ tengsizliklar bajarilsa va $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} z(x) = b$ bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = b$ bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ va $\lim_{x \rightarrow a} z(x) = b$, demak istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun a nuqtaning δ_1 -atrofi mavjudki, undagi barcha x lar uchun $|u(x) - b| < \varepsilon$

tengsizlik bajariladi. Shunga o'xshash $\varepsilon > 0$ son uchun a ning δ_2 -atrofi mavjud bo'lib undagi barcha x lar uchun $|z(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Agar δ orqali δ_1 va δ_2 sonlarning kichigini belgilasak a nuqtaning δ -atrofidagi barcha x lar uchun $|u(x) - b| < \varepsilon$ va $|z(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bular

$$-\varepsilon < u(x) - b < \varepsilon \quad \text{va} \quad -\varepsilon < z(x) - b < \varepsilon \quad (17.1)$$

tengsizliklarga teng kuchli.

Endi teorema shartidagi $u(x) \leq v(x) \leq z(x)$ tengsizliklarni unga teng kuchli $u(x) - b \leq v(x) - b \leq z(x) - b$ tengsizliklar bilan almashtiramiz (barchasidan bir xil b son ayirildi).

Bunga (17.1) tengsizliklarni qo'llasak $-\varepsilon < u(x) - b \leq v(x) - b \leq z(x) - b < \varepsilon$ yoki bundan $-\varepsilon < v(x) - b < \varepsilon$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Shunday qilib a nuqtaning δ -atrofidagi barcha x lar uchun $-\varepsilon < v(x) - b < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli ekan.

Bu $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = b$ ekanini bildiradi.

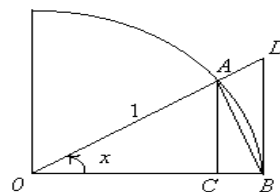
Bu teoremani hazillashib «Ikki militsioner haqidagi teorema» deb atashadi. Nima uchun shunday deb atalishini o'ylab ko'rishni o'quvchiga havola etamiz.

8-misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ isbotlansin.

Yechish. Radiusi 1 ga teng aylanani qaraymiz.

8-chizmadan: $x > 0$ bo'lsa $\frac{AC}{OA} = \sin x$; $AC = \sin x$,

$\overset{\sim}{AB} = x$ (markaziy burchak o'zi tiralgan yoy bilan o'lchanadi), $AC < \overset{\sim}{AB}$ yoki $\sin x < x$ ekani ayon bo'ladi. $x < 0$ bo'lganda $|\sin x| < |x|$ bo'lishi ravshan.



8-chizma.

Shunday qilib $x > 0$ uchun $0 < \sin x < x$ va $x < 0$ uchun $0 < |\sin x| < |x|$ tengsizliklarga ega bo'ldik. $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ekanligini hisobga olsak 17.6-teoremaga binoan $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

9-misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = 0$ isbotlansin.

Yechish. $0 < \left| \sin \frac{x}{2} \right| < |\sin x|$ ekani ravshan.

$\lim_{x \rightarrow 0} 0 = \lim_{x \rightarrow 0} |\sin x| = 0$ bo'lgani uchun 17.6-teoremaga binoan $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \sin \frac{x}{2} \right| = 0$ yoki

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = 0$ kelib chiqadi.

10-misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ ekanligi isbotlansin.

Yechish. $2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$ yoki $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ ekanligini e'tiborga olsak

$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2 \cdot 0^2 = 1$ hosil bo'ladi.

Birinchi ajoyib limit.

$\frac{\sin x}{x}$ funksiya faqat $x=0$ nuqtada aniqlanmagan, chunki bu nuqtada kasrning surati ham, mahraji ham 0 ga aylanib uni o'zi $\frac{0}{0}$ ko'rinishga ega bo'ladi. Shu funksiyaning $x \rightarrow 0$ dagi limitini topamiz. Bu limit **birinchi ajoyib limit** deb ataladi.

7-teorema. $\frac{\sin x}{x}$ funksiya $x \rightarrow 0$ da 1 ga teng limitga ega.

Isbot. Radiusi 1 ga teng aylana olib AOB markaziy burchakni x bilan belgilaymiz va u $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervalda yotadi deb faraz qilamiz (87-chizma)

Chizmadan ko'rinish turibdiki,

$$\Delta AOB \text{ yuzi} < \Delta AOB \text{ sektor yuzi} < \Delta DOB \text{ yuzi} \quad (2).$$

Biroq, $\Delta AOB \text{ yuzi} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin x = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \sin x = \frac{1}{2} \sin x$ (uchburchakning yuzi ikki tomoni va ular orasidagi burchak sinusi ko'paytmasining yarmiga teng).

$$AOB \text{ sektor yuzi} = \frac{1}{2} OB^2 \cdot \overset{\sim}{A\hat{B}} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x = \frac{1}{2} x,$$

$$\Delta DOB \text{ yuzi} = \frac{1}{2} OB \cdot BD = \frac{1}{2} OB \cdot \frac{BD}{1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

Shu sababli (2) tengsizliklar $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$ ko'rinishni yoki $\frac{1}{2}$ ga qisqartirilgandan so'ng $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ ko'rinishni oladi. Buning barcha hadlarini $\sin x > 0$ ga bo'lamiz $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. U holda $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ yoki

$$1 < \frac{\sin x}{x} < \cos x$$

tengsizliklarga ega bo'lamiz. Bu tengsizliklar $x > 0$ deb faraz qilinib chiqarildi.

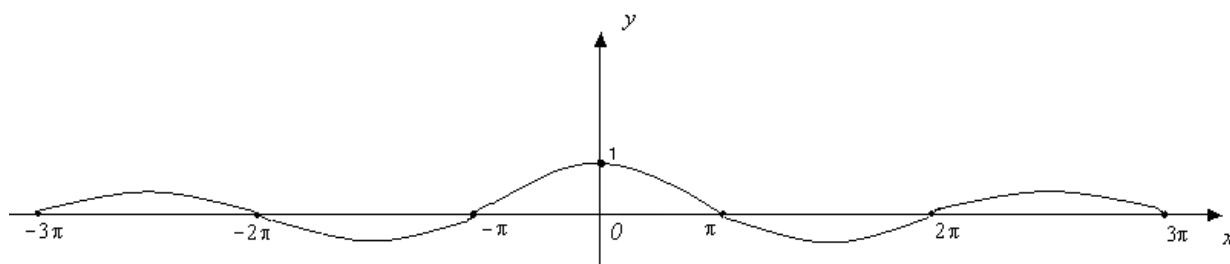
$$\frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{\sin x}{x}, \quad \cos(-x) = \cos x \quad \text{ekanligini e'tiborga olib, bu tengsizliklar } x < 0$$

bo'lganda ham to'g'ri degan xulosaga kelamiz. Ammo $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ va $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

Demak, $\frac{\sin x}{x}$ funksiya shunday ikki funksiya orasidaki, ularning ikkalasi ham bir xil 1 ga teng limitga intiladi. Shuning uchun oraliq funksiyaning limiti haqidagi 16.6-teoremaga binoan oraliqdagi $\frac{\sin x}{x}$ funksiya ham ana shu 1 limitga intiladi, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$y = \frac{\sin x}{x}$ funksiyaning grafigi 88-chizmada tasvirlangan.



88-chizma

$$\text{11-misol. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

$$\text{12-misol. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} m \cdot \frac{\sin mx}{mx} = m \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{mx} = m \cdot 1 = m. \quad (m\text{-o'zgarmas son}).$$

$$\text{13-misol. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \alpha x}{x}}{\frac{\sin \beta x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \beta x}{x}} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ikkinchi ajoyib limit.

Ushbu $\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ sonli ketma-ketlikni qaraymiz, bunda n -natural son.

8-teorema. Umumiy hadi $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ bo'lgan ketma-ketlik $n \rightarrow \infty$ da 2 bilan 3 orasida yotadigan limitga ega.

Isboti. Nyuton binomi formulasi

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} b^n$$

dan foydalanib ketma-ketlikni x_n va x_{n+1} hadlarini qo'yidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \left(\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \end{aligned} \quad (17.4)$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right),$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

x_n bilan x_{n+1} ni taqqoslasak, x_{n+1} had x_n haddan bitta musbat qo'shiluvchiga ortiqqligini ko'ramiz.

$1 - \frac{k}{n+1} > 1 - \frac{k}{n}$ ($k=1,2,3,\dots,n-1$) bo'lgani uchun uchinchi haddan boshlab x_{n+1} dagi har bir qo'shiluvchi x_n dagi unga mos qo'shiluvchidan katta. Demak, istalgan n uchun $x_{n+1} > x_n$ va umumiy hadi $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ bo'lgan ketma-ketlik monoton o'suvchi.

Endi berilgan ketma-ketlikni chegaralanganligini ko'rsatamiz. Istalgan $k=1,2,3,\dots$ uchun $1 - \frac{k}{n} < 1$ ekanini hisobga olib (17.4) formuladan

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

So'ngra $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \frac{1}{2^2}, \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} < \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} < \frac{1}{2^{n-1}}$

ekanligini ta'kidlab tengsizlikni

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots\right)$$

ko'rinishda yozamiz. Qavsga olingan yig'indi birinchi hadi $a=1$ va maxraji $q=\frac{1}{2}$

bo'lgan geometrik progressiyaning hadlari yig'indisini ifodalanganligi uchun cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning hadlari yig'indisini topish

formulasi $S = \frac{a}{1-q}$ ga asosan $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Ketma-ketlik monoton o'suvchi bo'lganligi sababli

uning birinchi hadi $x_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$ uning qolgan barcha hadlaridan kichik bo'ladi.

Demak, barcha n uchun $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ o'rinli, ya'ni umumiy hadi

$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ bo'lgan ketma-ketlik monoton o'suvchi va chegaralangan. Shu sababli

u monoton chegaralangan ketma-ketlikning limiti mavjudligi haqidagi 16.1-teoremaga ko'ra chekli limitga ega. Bu limitni e harfi bilan belgilaymiz, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

e -irratsional son. Keyinroq uni istalgan darajada aniqlik bilan hisoblash usuli ko'rsatiladi.

$$e = 2,7182818284$$

9-teorema. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ funksiya $x \rightarrow \infty$ da e songa teng limitga ega:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (17.5).$$

Isboti. 1) $x \rightarrow \infty$ deylik U holda $n \leq x < n+1$; $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}$,

$1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1}$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$ bo'ladi. Agar $x \rightarrow +\infty$, u

holda $n \rightarrow \infty$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$ yoki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} \quad e \cdot 1 \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \geq e \cdot 1$$

bundan $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

kelib chiqadi.

2) $x \rightarrow -\infty$ deylik. Yangi $t = -(x+1)$ yoki $x = -(t+1)$ o'zgaruvchini kiritamiz. $t \rightarrow +\infty$ da $x \rightarrow -\infty$ va

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \left(1 + \frac{1}{t}\right) = e \cdot 1 = e \end{aligned}$$

Shunday qilib, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ekanini isbotladik. Bu limit **ikkinchi ajoyib**

limit deb yuritiladi.

Agar bu tenglikda $\frac{1}{x} = \alpha$ deb faraz qilinsa, u holda $x \rightarrow \infty$ da $\alpha \rightarrow 0$ ($\alpha \neq 0$) va

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

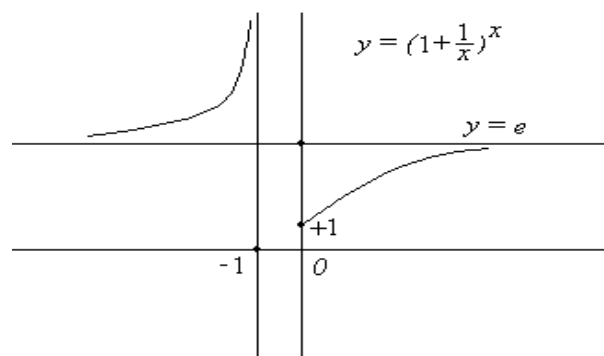
tenglikni hosil qilamiz. Bu ikkinchi ajoyib limitning yana bir ko'rinishi

$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ funksiyaning grafigi 89-chizmada tasvirlangan.

Chizmadan ko'inib turibdiki bu funksiya $(-1, 0)$ intervalda aniqlanmagan, ya'ni $1 + \frac{1}{x} < 0$.

Izoh. Asosi e bo'lgan $y = e^x$ ko'rsatkichli funksiya eksponential funksiya deb ataladi. Bu funksiya mexanikada (tebranishlar nazariyasida), elektrotexnikada va radiotexnikada, radioximiyada va hokozalarda turli hodisalarni o'rganishda katta rol o'ynaydi.

Izoh. Asosi $e = 2,7182818284$ sonidan iborat logarifmlar natural logarifmlar yoki Niper logarifmlari deb ataladi va $\log_e x$ o'rniga $\ln x$



10-chizma.

deb yoziladi. Bir asosdan ikkinchi asosga o'tish formulasi $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ dan foydalanib o'nli va natural logarifmlar orasida bog'lanish o'rnatish mumkin:

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \ln x = 0,434294 \ln x \quad \text{yoki} \quad \ln x = \ln 10 \lg x = 2,302585 \lg x.$$

14-misol.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^8 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^8 = e(1+0)^8 = e.$$

15-misol. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$ topilsin.

Yechish. $x=3t$ desak, $x \rightarrow \infty$ da $t \rightarrow \infty$ va

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{3t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e \cdot e \cdot e = e^3 \quad \text{bo'ladi.} \end{aligned}$$

16-misol. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1+3}{x+1}\right)^{x+1+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x+1}\right)^{(x+1)+1} =$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{y}\right)^{y+1} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{y}\right)^y \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{y}\right)^1 = e^3 \cdot 1 = e^3.$$

Ikkinchi ajoyib limit 1^∞ ko'rinishdagi aniqlik ekanini ta'kidlab o'tamiz.

Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash.

$\alpha = \alpha(x)$ va $\beta = \beta(x)$ funksiya $x \rightarrow a$ (yoki $x \rightarrow \infty$) da cheksiz kichik funksiyalar bo'lsin. Bu funksiyalarning yig'indisi, ayirmasi va ko'paytmasi ham cheksiz kichik funksiya bo'lishini ko'rdik. Ularning nisbati, ya'ni bo'linmasi haqida gapirilmagan edi. Ikkita cheksiz kichik funksiyalar ularning nisbatlarini limitiga qarab taqqoslanadi.

1-ta'rif. Agar $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$ (yoki $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$) bo'lsa, α funksiya β funksiyaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya deyiladi.

Masalan $x \rightarrow 0$ da $\alpha = \sin^2 x$ funksiya $\beta = x$ funksiyaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya, chunki $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ va

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 1 \cdot 0 = 0.$$

2-ta'rif. Agar $\lim \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$ bo'lsa, α va β funksiyalar bir xil tartibli cheksiz kichik funksiyalar deyiladi.

Masalan $x \rightarrow 0$ da $\alpha = \sin 3x$ va $\beta = x$ funksiyalar bir xil tartibli cheksiz kichik funksiyalardir, chunki $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ va $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \neq 0$.

3-ta'rif. Agar $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$ bo'lsa, α va β cheksiz kichik funksiyalar ekvivalent deb ataladi va $\alpha \sim \beta$ yoki $\alpha \approx \beta$ kabi yoziladi.

Masalan, $x \rightarrow 0$ da $\sin x \sim x$, chunki $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ va $x \rightarrow 0$ da $\operatorname{tg} x \sim x$, chunki

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

Amaliyotda qo'yidagi teoremdan ko'p foydalaniladi.

10-teorema. Agar $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$ bo'lsa, $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$ tenglik to'g'ridir.

Haqiqatan $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\alpha_1} \frac{\alpha_1}{\beta_1} \frac{\beta_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\alpha_1} \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} \lim \frac{\beta_1}{\beta} = 1 \cdot \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot 1 = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$

17-misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{x} = 5.$

18-misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}.$

ma'ruza. Mavzu: Funksiyaning uzluksizligi.

Argument va funksiyaning orttirmalari.

$y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda aniqlangan bo'lsin. Bu intervaldan ixtiyoriy x_0 nuqtani olamiz, unga funksiyaning $y_0 = f(x_0)$ qiymati mos keladi (91-chizma).

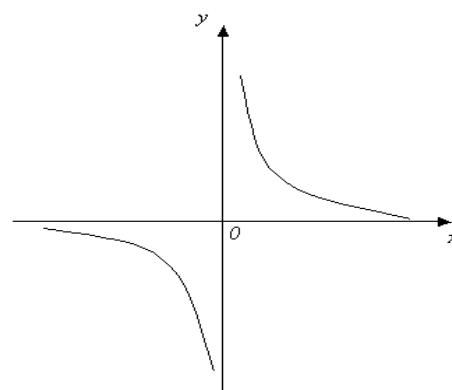
$(a; b)$ intervaldan olingan argumentning boshqa x qiymatiga funksiyaning $y = f(x)$ qiymati mos keladi. $x - x_0$ ayirma x argumentning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi va Δx orqali belgilanadi.

$f(x) - f(x_0)$ ayirma $f(x)$ funksiyaning argument orttirmasi Δx ga mos orttirmasi deyiladi va Δy orqali belgilanadi. Shunday qilib, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Bundan $x = x_0 + \Delta x$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

91-chizmada $(a; b)$ intervalning hech bir nuqtasida grafigi uzilmaydigan funksiya tasvirlangan. Undan ko'rinib turibdiki argumentning kichik Δx orttirmasiga funksiyaning ham kichik Δy orttirmasi mos keladi. Boshqacha aytganda argument x ning bir-biriga yaqin qiymatlariga funksiyaning ham bir-biriga yaqin qiymatlari mos keladi. Bu qoida har qanday funksiya uchun ham to'g'ri kelavermaydi. Masalan, $y = \frac{1}{x}$ funksiyaning qaraylik. x ning bir-biriga ancha yaqin $x_1 = -10^{-6}$ va $x_2 = 10^6$ qiymatlariga funksiyaning bir-biridan katta farq qiladigan $y_1 = -10^6$ va $y_2 = 10^6$ qiymatlari mos keladi. Agar biz $y = \frac{1}{x}$ funksiyaning grafigini (90-chizma) kuzatsak grafikning uzilishga ega ekanligini va uzilish x ning $x=0$ qiymatida sodir bo'lishini ko'ramiz.

Shuning uchun ham argumentning $x_0=0$ nuqtaga yaqin nuqtalardagi kichik orttirmasiga funktsiyaning kichik orttirmasi mos kelmaydi.

Bu kabi hollar barcha funktsiyalar sinfini ikkiga, ya'ni grafigi uzilmaydigan va grafigi bir nechta qismlardan iborat funktsiyalar sinfiga bo'lib o'rganishni taqozo etadi.



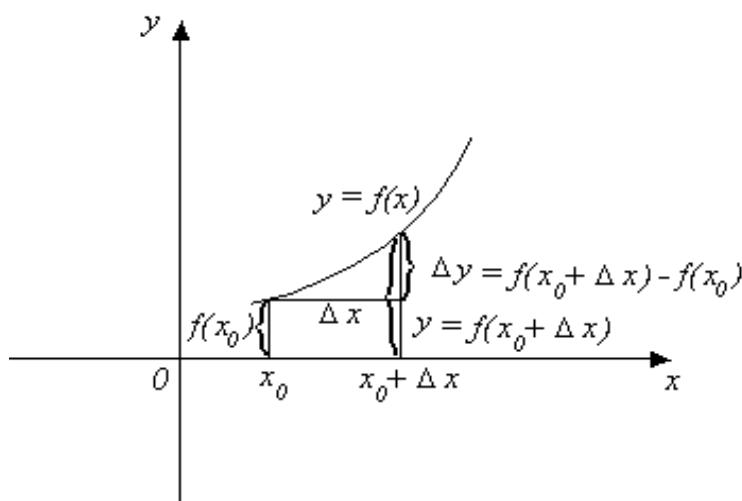
11-chizma.

Funktsiyaning nuqtada va intervalda uzluksizligi.

$y = f(x)$ funktsiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.

1-ta'rif. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, (1)

ya'ni funktsiyaning x_0 nuqtadagi limiti uning shu nuqtadagi qiymatiga teng bo'lsa, $y = f(x)$ funktsiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.



12-chizma.

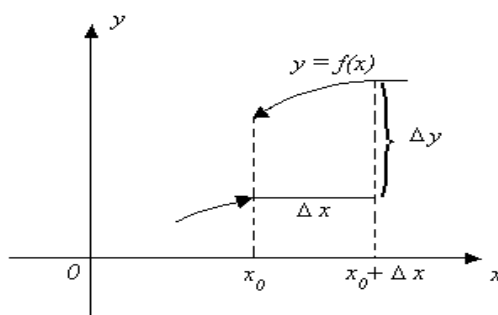
Bu ta'rifga teng kuchli yana bir ta'rifni keltiramiz.

2-ta'rif. Istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son mavjud bo'lsaki, $|x - x_0| < \delta$ shartni qanoatlantiradigan istalgan x uchun $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funktsiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

3-ta'rif. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ (2)

bo'lsa, $y = f(x)$ funktsiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

12-chizmada tasvirlangan $y = f(x)$ funktsiya x_0 nuqtada uzluksiz, chunki (2) shart bajariladi.



13-chizma.

13-chizmada tasvirlangan $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz emas, chunki

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y \neq 0$$

1-misol. $y = x^2$ funksiyaning ixtiyoriy x_0 nuqtada uzluksizligini ko'rsating.

Yechish. Bu funksiya butun sonlar o'qida aniqlangan. Δy ni tuzamiz:

$$f(x) = x^2; \quad f(x_0) = x_0^2; \quad f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2;$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Demak, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0\Delta x + \Delta x^2) = 0$ va $y = x^2$ funksiyaning ixtiyoriy x_0 nuqtada uzluksiz.

Shunday qilib, $y = x^2$ funksiya aniqlanish sohasining har bir nuqtasida uzluksiz ekan.

2-misol. $y = \sin x$ funksiyaning ixtiyoriy x_0 nuqtada uzluksizligini ko'rsating.

Yechish. $f(x) = \sin x$

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2} \cos \frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right), \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\Delta x}{2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) = 0$$

$$\text{chunki } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\Delta x}{2} = 0.$$

Har bir elementar funksiya uchun shu tariqa mulohaza yuritib quyidagi teoremaning to'g'riligiga iqror bo'lamiz.

1-teorema. Asosiy elementar funksiyalar o'zlari aniqlangan barcha nuqtalarda uzluksizdir.

Bir tomonlama limit tushunchasidan foydalanib uzluksizlikni quyidagicha ta'riflash mumkin.

4-ta'rif. Funksiyaning x_0 nuqtadagi chap va o'ng tomonlama limitlari mavjud va o'zaro teng bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

Shunday qilib $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun u shu nuqtada aniqlangan va $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ shart bajarilishi lozim ekan.

Yana 1-ta'rifga qaytib uni $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$ ko'rinishda yozamiz. Bundan ko'rinish turibdiki x_0 nuqtada funksiya uzluksiz bo'lsa funksiyaning shu nuqtadagi limitini topishda limit ishorasini funksiya belgidan ichkariga kiritish mumkin ekan

3-misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln e = 1$

Bu yerda $\ln x$ funksiyaning $x=e$ nuqtada uzluksizligidan foydalanib limitni funksiya ishorasi $\ln$ ning ichkarisiga kiritdik.

5-ta'rif. $(a; b)$ intervalning barcha nuqtalarida uzluksiz $f(x)$ funksiya shu intervalda uzluksiz deb ataladi.

Agar funksiya x_0 nuqtada aniqlangan bo'lib $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$ bo'lsa $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada **o'ngdan uzluksiz** deyiladi.

Agar funksiya $x = x_0$ nuqtada aniqlangan bo'lib $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$ bo'lsa $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada **chapdan uzluksiz** deyiladi.

6-ta'rif. $y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda uzluksiz bo'lib $x=a$ nuqtada o'ngdan va $x=b$ nuqtada chapdan uzluksiz bo'lsa, u $[a; b]$ kesmada uzluksiz deb ataladi.

5- va 6- ta'riflarga hamda 18.1 teorema asoslanib $y = a^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ funksiyalar butun sonlar o'qida, $y = \log_a x$ funksiya $(0; +\infty)$ intervalda, $y = \sqrt{x}$ funksiya $[0; +\infty)$ intervalda, $y = \frac{1}{x}$ funksiya $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ intervalda uzluksiz ekanligini ta'kidlab o'tamiz.

Shuningdek ko'phad butun sonlar o'qida, kasr-ratsional funksiya x ning kasr maxrajini nolga aylantirmaydigan barcha qiymatlarida uzluksiz ekanini eslatib o'tamiz.

2- teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funktsiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda ularning algebraik yig'indisi, ko'paytmasi va $g(x_0) \neq 0$ bo'lganda $\frac{f(x)}{g(x)}$ bo'linmasi ham shu x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Bu teoremaning isboti funksiya limitining xossalari asoslangan.

Endi murakkab funksiyaning uzluksizligiga oid teorema bilan tanishamiz.

Nuqtada uzluksiz funksiya xossalari ifodalovchi teorema bilan tanishamiz.

3-teorema. Agar $u = \varphi(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, $y = f(u)$ funksiya $u_0 = \varphi(x_0)$ nuqtada uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda $y = f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isboti. $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f[\varphi(x_0)]$ ekanligini ko'rsatamiz. $u = \varphi(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligidan $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$ ga ega bo'lamiz, ya'ni $x \rightarrow x_0$ da $u \rightarrow u_0$ $f(u)$ funksiyaning shu nuqtada uzluksizligini hisobga olsak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0) = f[\varphi(x_0)]$$

Shunday qilib ikkita uzluksiz $f(u)$ va $\varphi(x)$ funksiyalardan tashkil topgan $y = f[\varphi(x)]$ funksiya ham uzluksiz bo'lar ekan. Masalan, $y = \ln(4-x^2)$ murakkab funksiya x ning $4-x^2 > 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida, ya'ni $(-2; 2)$ intervalda uzluksiz.

Asosiy elementlar va murakkab funksiyani uzluksizligi haqidagi teoremlarga tayanib elementar funksiyaning uzluksizligi haqidagi qo'yidagi teorema ega bo'lamiz.

4-teorema. Barcha elementar funksiyalar o'zlarining aniqlanish sohalarida uzluksizdirlar.

4-misol. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 4^{\sin x}$ topilsin.

Yechish. $4^{\sin x}$ murakkab funksiya $x = \frac{\pi}{2}$ nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 4^{\sin x} = 4^{\sin \frac{\pi}{2}} = 4^1 = 4 \quad \text{bo'ladi.}$$

5-misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$ topilsin.

Yechish. Bu yerda $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka egamiz. $a^x - 1 = t$ almashtirish olamiz. U holda $a^x = 1+t$, $x = \log_a(1+t)$ bo'lib $x \rightarrow 0$ da $t \rightarrow 0$ da va

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{t} \log_a(1+t)} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\log_a e} = \log_e a = \ln a$$

bo'ladi. Xususiyl holda $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1$ kelib chiqadi, ya'ni $x \rightarrow 0$ da $e^x - 1 \sim x$.

6-misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x}$ topilsin.

Yechish. Bu yerda $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka egamiz. $(1+x)^p - 1 = y$ almashtirish olamiz. U holda $(1+x)^p = 1+y$, yoki buni e asosga ko'ra logarifmlasak $p \ln(1+x) = \ln(1+y)$ bo'ladi. $x \rightarrow 0$ da $y \rightarrow 0$. Demak,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p \ln(1+x)}{x} \cdot \frac{y}{\ln(1+y)} = p \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = p \cdot 1 \cdot 1 = p.$$

Shunday qilib, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$ formulaga ega bo'ldik.

Uzluksizlik tushunchasidan foydalanilsa limitni hisoblash ancha osonlashadi, ya'ni uzluksiz funksiyaning biror nuqtadagi limitini hisoblash uning shu nuqtadagi qiymatini hisoblashga keltiradi.

Endi asosiy elementar funksiyalarning aniqlanish sohalarining chetlaridagi limitlari hamda ajoyib limitlar jadvalini keltiramiz.

1) $x = a$ nuqtada uzluksiz $y = f(x)$ funksiya uchun $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ bo'ladi.

- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.
- 3) $a > 1$ bo'lganda $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ bo'ladi.
- 4) $0 < a < 1$ bo'lganda $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ bo'ladi.
- 5) $\alpha > 0$ bo'lganda $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$, $\alpha < 0$ bo'lganda $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$ bo'ladi;
- 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} \ln x = -\infty$.
- 6') $a > 1$ bo'lganda $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = -\infty$
- 7) $0 < a < 1$ bo'lganda $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = +\infty$.
- 8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty$.
- 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- 11) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.
- 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
- 12') $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$
- 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$
- 14') $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Uzilish nuqtalari va ularning turlari.

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u shu nuqtada aniqlangan, x_0 nuqtada o'zaro teng $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ bir tomonlama limitlarga ega hamda bu bir tomonlama limitlar funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati $f(x_0)$ ga teng bo'lishini ko'rdik. Ana shu shartlardan birortasi bajarilmasa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning **uzilish nuqtasi**, funksiyaning o'zi **uzlukli funksiya** deb ataladi.

Shunday qilib:

- 1) funksiya x_0 nuqtada aniqlanmagan;
- 2) funksiya x_0 nuqtada aniqlangan, lekin $f(x_0 - 0)$ va $f(x_0 + 0)$ bir tomonlama limitlardan kamida bittasi mavjud emas;
- 3) funksiya x_0 nuqtada aniqlangan, bir tomonlama limitlar ham mavjud, ammo ular o'zaro teng emas;
- 4) funksiya x_0 nuqtada aniqlangan, bir tomonlama limitlar ham mavjud va o'zaro teng, lekin ular funksiyaning bu nuqtadagi qiymatlariga teng emas;

$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ shartlardan kamida bittasi bajarilganda x_0 nuqta funksiyaning uzilish nuqtasi deyilar ekan.

Masalan, $y = \frac{\sin x}{x}$ funksiya $x=0$ nuqtada uzilishga ega(uzlukli), chunki bu nuqtada funksiya aniqlanmagan. Shuningdek $f(x) = \text{sign}x$ funksiya ham $x=0$ nuqtada uzilishga ega(uzlukli), chunki bu nuqtada funksiya limitga ega emas, ya'ni $f(-0) \neq f(+0)$.

Uzilish nuqtalari uch turga bo'linadi.

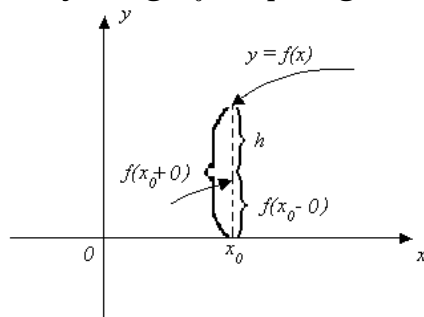
7-ta'rif. x_0 nuqtada $y = f(x)$ funksiya aniqlanmagan biroq shu nuqtadagi bir tomonlama limitlar mavjud va o'zaro teng, ya'ni $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ bo'lsa, x_0 nuqta funksiyaning **yo'qotiladigan uzilish** nuqtasi deb ataladi.

Masalan, $x_0 = 0$ nuqta $y = \frac{\sin x}{x}$ funksiyaning yo'qotiladigan uzilish nuqtasi, chunki bu funksiya $x=0$ nuqtada aniqlanmagan, biroq

$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$, ya'ni $f(-0) = f(+0)$ bir tomonlama limitlar mavjud va o'zaro teng. Agar biz funksiyaning $x=0$ nuqtadagi qiymati sifatida uning bir tomonlama limitlarining qiymati 1 ni olsak, $f(0) = f(-0) = f(+0) = 1$ bo'lib funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz funksiyaga aylanadi va $x=0$ uzilish nuqta yo'qoladi.

8-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada aniqlangan yoki aniqlanmagan, lekin bir tomonlama limitlar mavjud va o'zaro teng bo'lmasa, ya'ni $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ bo'lsa, x_0 nuqta funksiyaning **birinchi tur uzilish** nuqtasi deb ataladi.

$h = f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)$ soni funksiyaning x_0 nuqtadagi **sakrashi** deb ataladi (93-chizma).



14-chizma

Masalan,

$$f(x) = \text{sign}x = \begin{cases} 1, & \text{agar } x > 0, \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0, \text{ bo'lsa,} \\ -1, & \text{agar } x < 0, \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya uchun $x=0$ nuqta birinchi tur uzilish nuqtasi bo'lib bu nuqtadagi funksiyaning sakrashi 2 ga teng.

Haqiqatan, $f(x) = \text{sign}x$ funksiya $x=0$ nuqtada aniqlangan va $f(0)=0$. $f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} \text{sign}x = \lim_{x \rightarrow +0} 1 = 1$. $f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} \text{sign}x = \lim_{x \rightarrow -0} (-1) = -1$, ya'ni $x=0$ nuqtada bir tomonlama limitlar mavjud va o'zaro teng emas. $h = f(+0) - f(-0) = 1 - (-1) = 2$.

9-ta'rif. Agar x_0 nuqtada bir tomonlama limitlardan kamida biri mavjud bo'lmasa yoki cheksizlikka teng bo'lsa, x_0 nuqta funksiyaning **ikkinchi tur uzilish** nuqtasi deb ataladi.

Masalan, $x=0$ nuqta $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya uchun **ikkinchi tur uzilish** nuqtasi bo'ladi, chunki $x=0$ nuqtada bir tomonlama limitlarning har ikkalasi cheksizlikka teng, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{va} \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Kesmada uzluksiz funksiyalarning xossalari

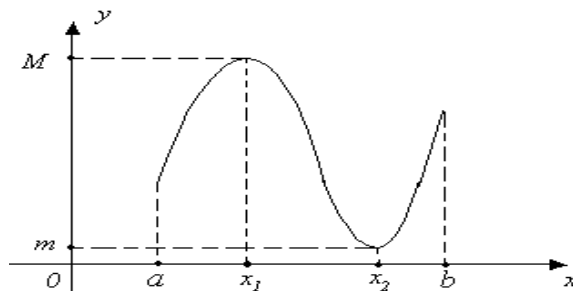
Kesmada uzluksiz funksiyalarning ayrim xossalarini isbotsiz keltiramiz.

5-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda u bu kesmada o'zining eng kichik va eng katta qiymatiga erishadi, ya'ni $[a; b]$ kesmada shunday x_1, x_2 nuqtalar mavjud bo'lib $[a; b]$ kesmadagi barcha x lar uchun $f(x_1) \geq f(x)$ va $f(x_2) \leq f(x)$ tengsizliklar to'g'ri bo'ladi (94-chizma).

$m = f(x_1)$ va $M = f(x_2)$ $y = f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlaridir.

Izoh. Teoremaning shartidagi kesmani interval yoki yarim intervalga almashtirish mumkin emas.

Masalan, $(0; 1)$ intervalda uzluksiz $y = x$ funksiya bu intervalda o'zining eng kichik va eng katta qiymatlarini hech biriga erisha olmaydi.

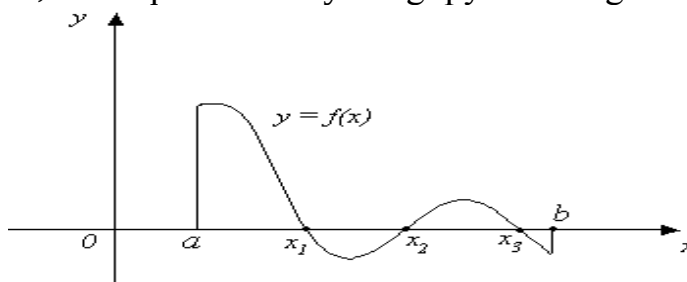


15-chizma

Natija. $[a; b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiya shu kesmada chegaralangandir.

Haqiqatan, $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini mos ravishda M va m orqali belgilasak $[a; b]$ kesmadagi barcha x lar uchun $m \leq f(x) \leq M$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Agar C orqali $|m|$ va $|M|$ dan kattasini belgilasak $|f(x)| \leq C$ tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlik $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada chegaralanganligini ko'rsatadi.

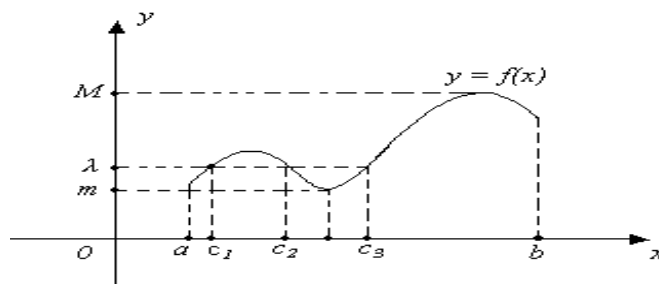
6-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning oxirida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u holda $(a; b)$ intervalda kamida bitta nuqta mavjud bo'lib, bu nuqtada funksiyaning qiymati nolga teng bo'ladi.



16-chizma

16-chizmada $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ va x_1, x_2, x_3 nuqtalarda funksiyaning grafigi Ox o'qni kesib o'tadi, demak, $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$, $f(x_3) = 0$

7-teorema. $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lib m va M uning shu kesmadagi eng kichik va eng katta qiymati bo'lsin, u holda funksiya shu kesmada m bilan M orasidagi barcha oraliq qiymatlarini qabul qiladi, ya'ni $m < \lambda < M$ shartni qanoatlantiradigan istalgan λ son uchun $[a; b]$ kesmada kamida bitta $x = c$ nuqta mavjud bo'lib, $f(c) = \lambda$ tenglik to'g'ri bo'ladi (96-chizma).



17-chizma

Izoh. Funksiya $[a; b]$ kesmaning birorta nuqtasida uzilishga ega bo'lganda 18.6- va 18.7- teoremlar bajarilmasligi mumkin. Masalan, $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya uchun $f(-1) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$ bajarilsada $y \in [-1; 1]$ kesmaning hech bir nuqtasida nolga aylanmaydi. Buning sababi $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya $[-1; 1]$ kesmadagi $x = 0$ nuqtada uzilishga ega

ADABIYOTLAR

1. YO.U.Soatov-Oliy matematika 1-jild.Toshkent, 1992y.
2. N.S.Piskunov-Differensial va integral hisob.1-tom,Toshkent,1972y.
3. I.I.Privalov-Analiticheskaya geometriya.Moskva,1966y.
4. N.V.Yefimov-Kratkiy kurs analiticheskoy geometrii.Moskva,1958y
5. I.A.Zaysev-Visshaya matematika.Moskva,1991y.
6. O.T.Suberbiller-Zadachi i uprajneniya po analiticheskoy geometrii.Moskva,1970y.
7. S.M.Nikolskiy-Kurs matematicheskogo analiza.1-tom.Moskva,1973y.
8. V.S.Shipachev- Visshaya matematika.Moskva,1985y.
9. B.Abdalimov,SH.Solixov-Oliy matematika qisqa kursi.Toshkent,1981y.
10. I.Shneyder, A.I.Slusitskiy,A.S.Shilov-Kratkiy kurs visshiy matematiki.Moskva,1972y.
11. I.A.Kaplan-Prakticheskiye zanyatiya po visshey matematiki.1,2-chast, Xarkov,1973y.
12. E.Xolmurodov,Z.Uzoqov-Ekstremumlar nazariyasining amaliy masalalar yechishga tadbiqi,Qarshi,1991y.
13. G.Xudayberganov,A.Vorisov,X.Mansurov-Matematik analiz.1-qism.Qarshi, «Nasaf»,2003y.
14. V.S.Shipachev.Visshaya matematika.Moskva, «Nauka», 2001y.

15. V.A. Shneyder, A.I.Sluskiy, A.S.Shumov-Oliy matematika qisqa kursi. 1-qism. «O‘qituvchi»,1983y.
16. T.N.Qori-Niyoziy-Analitik geometriya asosiy kursi. Toshkent «O‘qituvchi»,1971y.
17. SH.I.Tojiyev-Oliy matematikadan masalalar yechish.Toshkent, «O‘zbekiston»,2002y.