

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

QARSHI MUXANDISLIK IQTISODIYOT INSTITUTI

«OLIV MATEMATIKA» KAFEDRASI

Holmurodov O, T.Aliqulov, J.Eshonqulov

DIFFERENSOAL HISOBDAN

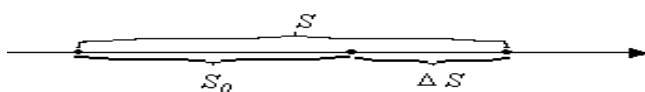
Ma'ruza matni

QARSHI-2017

ma'ruza. Mavzu: Funksiyaning hosilasi, uning geometrik va mexanik ma'nolari.

Hosila tushunchasiga olib keluvchi masalalar.

1. Tezlik haqidagi masala. Faraz qilaylik moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab $s = f(t)$ qonun bo'yicha bir tomonlama harakatlanayotgan bo'lsin, bunda t -vaqt, s t vaqt ichida nuqtaning bosib o'tgan yo'li. Vaqtning t_0 momentini qaraymiz. Bu momentda nuqta $s_0 = f(t_0)$ yo'lni o'tadi. Moddiy nuqtaning t_0 momentdagi oniy tezligini topish masalasini qo'yamiz. Buning uchun vaqtning boshqa $t_0 + \Delta t$ momentini qaraymiz. Bunga $s = f(t_0 + \Delta t)$ o'tilgan yo'l mos keladi. U holda $\Delta t = t - t_0$ vaqt ichida moddiy nuqta $\Delta s = s - s_0 = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ masofani o'tadi (18-chizma).



1-chizma

$v_{o'rt} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbat nuqta harakatining Δt vaqt oralig'idagi **o'rtacha tezligini** beradi.

O'rtacha tezlikning $\Delta t \rightarrow 0$ dagi limiti t_0 momentdagi **oniy tezlik** deb ataladi va u v_0 orqali belgilanadi.

Demak, $v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ yoki $v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$.

Shunday qilib moddiy nuqtaning t_0 momentdagi oniy tezligini topish

$$v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \quad (1)$$

limitni hisoblashga keltirildi.

1-misol. Moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab $s = t^3$ qonuniyat asosida harakatlanayotgan bo'lsin. Bunda s - o'tilgan yo'l santimetrda o'lchanadi, t -vaqt sekunda o'lchanadi. $t=2$ sek dan $t_1 = (2 + \Delta t)$ sek gacha vaqt oralig'ida nuqtaning o'rtacha tezligi topilsin; $\Delta t = 1; 0,01; 0,001$ deb olinsin. $t=2$ momentdagi oniy tezlik topilsin.

Yechish. $\Delta s = (t + \Delta t)^3 - t^3 = t^3 + 3t^2\Delta t + 3t\Delta t^2 + \Delta t^3 - t^3 = 3t^2\Delta t + 3t\Delta t^2 + \Delta t^3$.

O'rtacha tezlik $v_{o'rt} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 3t^2 + 3t\Delta t + \Delta t^2$ bo'adi. Agar $\Delta t = 1$ sek bo'lsa, $t=2$ sek ekanini hisobga olib $v_{o'rt} = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2 = 19$ sm/sek kelib chiqadi.

$t=2$ sek, $\Delta t = 0,01$ sek bo'lganda $v_{o'rt} = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 0,01 + (0,01)^2 = 12,0601$ sm/sek va $t=2$ sek, $\Delta t = 0,001$ sek bo'lganda $v_{o'rt} = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 0,001 + (0,001)^2 = 12,006001$ sm/sek bo'ladi. Endi $t=2$ sek momentdagi oniy tezlikni topamiz.

$$v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{o'rt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (3t^2 + 3t\Delta t + \Delta t^2) = 3t^2.$$

$t=2$ sek bo'lganda $v_0 = 3 \cdot 2^2 = 12$ sm/sek hosil bo'ladi.

Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki $t = 2\text{sek}$ ga $\Delta t = 0$ ga qanchalik yaqin bo'lsa o'rtacha tezlik oniy tezlikdan shunchalik kam farq qilar ekan.

2-misol. $s = \frac{gt^2}{2}$ qonuniyat asosida tekis tezlanuvchan harakatlanayotgan (erkin tushayotgan) moddiy nuqtaning harakatning ixtiyoriy t momentidagi va $t=3\text{sekund}$ momentidagi oniy tezliklari topilsin.

Yechish.

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2 - \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2}(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - \frac{gt^2}{2} = gt\Delta t + \frac{g\Delta t^2}{2}.$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ nisbatni tuzamiz: } \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{gt\Delta t + \frac{g\Delta t^2}{2}}{\Delta t} = gt + \frac{g}{2}\Delta t; \text{ ta'rifga binoan}$$

$$v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(gt + \frac{g}{2}\Delta t \right) = gt.$$

Demak, t vaqtning istalgan momentida oniy tezlik $v_0 = gt$ ga teng ekan.
 $t=3\text{sek}$ bo'lsa $v_0(3) = g \cdot 3 = 9,8\text{m/sek}^2 \cdot 3\text{sek} = 29,4\text{m/sek}$, ya'ni harakat boshlangandan so'ng uchinchi sekundda moddiy nuqtaning tezligi $29,4\text{m/sek}$ bo'lar ekan.

2. Sterjenning zichligi haqidagi masala. Uzunligi ℓ ga teng ingichka to'g'ri chiziqli bir jinsli bo'lmagan sterjenni qaraymiz. Shu sterjenning istalgan nuqtasida zichlikni aniqlaymiz. Sterjen Ox o'q bo'ylab joylashgan va uning uchlaridan biri koordinatalar boshida yotadi deb faraz qilamiz. U holda sterjenning har bir nuqtasiga ma'lum x koordinata mos keladi.

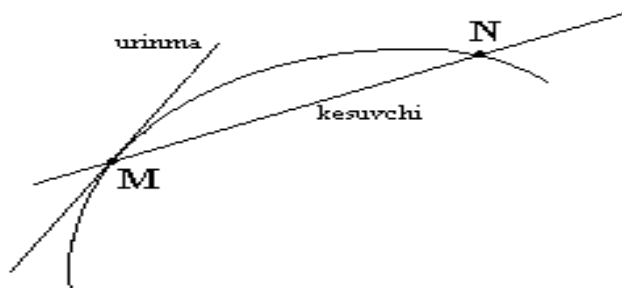
Koordinatalari 0 va x bo'lgan sterjen nuqtalari orasidagi qismining massasini m orqali belgilaymiz. U holda m massa x ning funksiyasi bo'lishi ravshan: $m = f(x)$. Sterjenning aniq qo'zg'olmas x_0 nuqtasini hamda o'zgaruvchi $x_0 + \Delta x$ nuqtasini qaraymiz. Sterjenni qaralayotgan qismining uzunligi Δx ga, massasi $\Delta m = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$ ga teng bo'ladi. $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ nisbat sterjenning x_0 va $x_0 + \Delta x$ oraliqdagi **o'rtacha zichligi** deb ataladi.

O'rtacha zichlikning sterjenning uzunligi Δx nolga intilgandagi limiti sterjenning x_0 nuqtadagi **zichligi** deb ataladi va u δ orqali belgilanadi. Demak,

$$\delta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (2)$$

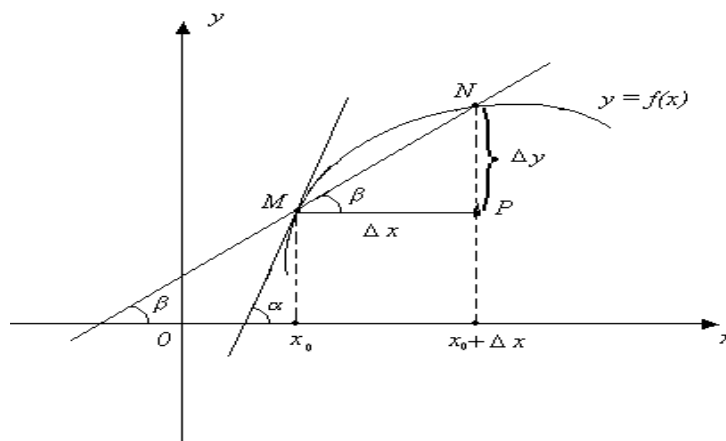
3. Egri chiziqqa urinmaning burchak koeffitsienti. Oldin egri chiziqqa urinma tushunchasini kiritamiz.

1-ta'rif. Egri chiziqning berilgan M va ixtiyoriy N nuqtasini orqali o'tadigan kesuvchi to'g'ri chiziqning N nuqta egri chiziq bo'ylab M nuqtaga intilgandagi limit holati shu egri chiziqqa M nuqtasida o'tkazilgan **urinma** deb ataladi
 (98-chizma).



2-chizma

Uzluksiz egri chiziqlik $y = f(x)$ tenglama yordamida berilgan bo'lib uning $M(x_0, y_0)$ nuqtasida egri chiziqqa o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini topish talab etilsin.



3-chizma

Egri chiziqda $N(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ nuqtani olib MN kesuvchini o'tkazamiz. Bu kesuvchini Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchakni β orqali belgilaymiz. Urinmaning Ox o'q bilan tashkil etgan burchakni α desak 99-chizmadagi $\triangle MNP$ dan

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ekani ko'rinib turibdi. N nuqta egri chiziqlik bo'ylab M nuqtaga intilganda $\Delta x \rightarrow 0$ va $\beta \rightarrow \alpha$. Demak, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$ va $\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Shunday qilib, urinmaning burchak koeffitsientini k orqali belgilasak uni topish

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (3)$$

ko'rinishdagi limitni topishga keltirildi.

Biz qaragan masalalarning barchasida ularning fizik mohiyatidan qat'iy nazar bir xil ya'ni funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatini argument orttirmasi nolga intilgandagi limitini topishga keltirildi. Shuning uchun bu kabi nisbatlarni o'rganish va ularning limitlarini hisoblashni bilish maqsadga muvofiq.

Hosilaning taʼrifi, uning geometrik va mexanik maʼnolari.

$y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda aniqlangan boʻlsin. $(a; b)$ intervalga tegishli x_0 va $x_0 + \Delta x$ nuqtalarni olamiz.

Funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ni hisoblab $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni tuzamiz.

2-taʼrif. Funksiya orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining Δx nolga intilgandagi limiti (agar u mavjud boʻlsa) $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi **hosilasi** deb ataladi.

Funksiyaning hosilasi $y', f'(x_0), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$ belgilardan biri bilan belgilanadi.

$$\text{Shunday qilib, } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Hosilani topish jarayoni funksiyaning **differensiallash** deb ataladi.

Endi yuqorida qaralgan misollarga qaytamiz. Hosila tushunchasidan foydalanib (19.1) tenglikni

$$v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$$

koʻrinishda yozish mumkin. Demak, toʻgʻri chiziqli bir tomonlama harakatda oniy tezlik yoʻldan vaqt boʻyicha olingan hosilaga teng ekan. Bu hosilaning **mexanik maʼnosidir**.

(2) tenglikni hosila tushunchasidan foydalanib

$$\delta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = m'(x)$$

koʻrinishda yozish mumkin. Demak toʻgʻri chiziqli sterjenning x nuqtadagi zichligi m massadan x uzunlik boʻyicha hosila ekan.

Shunga oʻxshash (19.3) tenglikni hosila tushunchasidan foydalanib

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

koʻrinishda yozishimiz mumkin. Demak, $f'(x_0)$ hosila geometrik nuqtai nazardan $y = f(x)$ egri chiziqqa $M(x_0, f(x_0))$ nuqtasida oʻtkazilgan urinmaning burchak koeffitsientiga teng ekan. Bu hosilaning **geometrik maʼnosi**.

3-misol. $y = x^2$ funksiyaning istalgan nuqtadagi hosilasi topilsin.

Yechish. $f(x_0) = x_0^2$, $f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2$,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$$

$$\text{Hosilaning taʼrifiga binoan } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 + 0 = 2x_0,$$

chunki x_0 aniq qiymat.

x_0 -istalgan nuqta bo'lganligi uchun $y = x^2$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ intervalning barcha nuqtalarida hosilaga ega ekanligi va uning hosilasi $2x$ ga tengligi kelib chiqadi, ya'ni $(x^2)' = 2x$.

4-misol. $y = x^2$ parabolaga $M(3; 9)$ nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti topilsin.

Yechish. $x_0 = 3$, $f(x_0) = f(3) = 3^2 = 9$. $f'(x_0) = 2x_0$ edi. Demak, $k = f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$.

Biz yuqorida hosilaning mexanik va geometrik ma'nolari bilan tanishdik. Endi uning biologik va iqtisodiy ma'nolari bilan tanishamiz.

Hosilaning biologik ma'nosi.

Ko'paygan mikroorganizmlar soni y va ko'payish vaqti t orasidagi bog'lanish

$$y = p(t)$$

tenglama bilan berilgan bo'lsin.

Vaqtning aniq t momentiga mikroorganizmlarning aniq $p(t)$ soni va vaqtning boshqa $t + \Delta t$ momentiga mikroorganizmlarning aniq $p(t + \Delta t)$ soni mos keladi. $\Delta y = p(t + \Delta t) - p(t)$ ifoda Δt vaqt oralig'ida mikroorganizmlarni o'zgarish sonini beradi.

$\frac{\Delta p}{\Delta t}$ nisbat ko'payishning o'rtacha tezligi yoki boshqacha aytganda ko'payishning

o'rtacha samaradorligi $y' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = p'(t)$ vaqtning t momentidagi

mikroorganizm ko'payishining samaradorligini anglatadi. Bu **hosilaning biologik ma'nosi**.

Hosilaning iqtisodiy ma'nosi.

Sarflangan xarajatlar miqdori x va olinadigan mahsulot miqdori y orasidagi moslikni aniqlovchi

$$y = f(x)$$

funksiyani olaylik.

U holda sarflangan xarajatni aniq x miqdoriga olingan mahsulotning $f(x)$ miqdori va sarflangan xarajatning boshqa bir $x + \Delta x$ miqdoriga olingan mahsulotning $f(x + \Delta x)$ miqdori mos keladi. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ayirma xarajat Δx ga oshganda olingan qo'shimcha mahsulotning miqdorini beradi.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbat sarflangan Δx xarajat miqdoriga mos olingan mahsulot

miqdorining o'rtacha o'zgarish tezligidir. $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ifoda

xarajatlarning ma'lum miqdoridagi olingan mahsulot hajmining o'zgarish tezligini (xarajat birligida olingan mahsulot hajmini) anglatadi. Bu **hosilaning iqtisodiy ma'nosi**dir.

Funksiyaning differensiallanuvchiligi.

3-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli hosilaga ega bo'lsa, u shu nuqtada differensiallanuvchi deb ataladi.

4-ta'rif. Agar $y = f(t)$ funksiya $(a; b)$ intervalning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, u shu **intervalda differensiallanuvchi** deb ataladi.

Funksiyaning uzluksizligi va differensiallanuvchiligi orasidagi bog'lanishni ko'rsatadigan teoremani isbotlaymiz.

1-teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u shu nuqtada uzluksizdir.

Isboti. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lgani uchun

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

chekli limit mavjud. Buni limitning xossasi (16.5-teorema) dan foydalanib

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $\Delta x \rightarrow 0$ da α -cheksiz kichik funksiya.

Bundan $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$ va

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f'(x_0)\Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0.$$

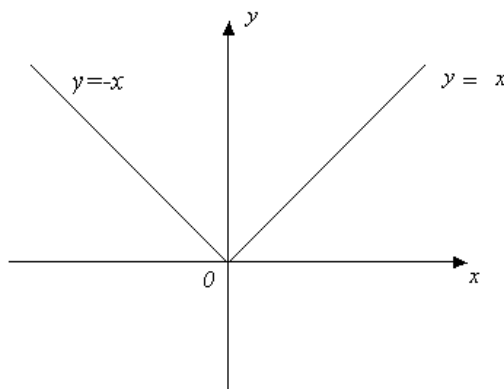
Demak, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ va $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz. Shunday qilib funksiyaning chekli hosilaga ega ekanligidan uning uzluksizligi kelib chiqar ekan.

Teskari da'vo, umuman aytganda, to'g'ri emas, chunonchi nuqtada uzluksiz, biroq bu nuqtada hosilaga ega bo'lmagan funksiyalar ham mavjud.

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \\ -x, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya butun sonlar o'qida, jumladan $x_0=0$ nuqtada ham uzluksiz (21-chizma), chunki $f(0) = |0| = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ va

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0.$$



4-chizma

Bu funksiyaning $x_0=0$ nuqtada hosilaga ega emasligini ko'rsatamiz.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x| \quad \text{va} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Shunga o'xshash $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$. Shunday qilib $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbat $x=0$ nuqtada har xil bir tomonlama limitlarga ega. Bu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbat $x_0=0$ nuqtada limitga emasligini, ya'ni $f'(0)$ hosilaning mavjud emasligini ko'rsatadi.

Demak, funksiyaning biror nuqtada uzluksizligidan uning shu nuqtada chekli hosilaga ega ekanligi (differensiallanuvchiligi) kelib chiqmas ekan.

Differensiallashning asosiy qoidalari.

teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda ularning algebraik yig'indisi, ko'paytmasi va mahraji noldan farqli bo'lganda bo'linmasi ham shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, hosilalar

a) $(u \pm v)' = u' \pm v'$, b) $(uv)' = u'v + uv'$, d) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ formulalar yordamida topiladi.

Isbot. (Bo'linma uchun). $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ bo'lsin, bu yerda $v(x) \neq 0$ Δy

orttirmani tuzamiz:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{u(x_0 + \Delta x)}{v(x_0 + \Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u(x_0 + \Delta x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0 + \Delta x)}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} = \\ &= \frac{u(x_0 + \Delta x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0) - u(x_0)v(x_0 + \Delta x) + u(x_0)v(x_0)}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} = \\ &= \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)]v(x_0) - u(x_0)[v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} = \frac{\Delta u v(x_0) - u(x_0) \Delta v}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)}. \end{aligned}$$

Shartga ko'ra $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x_0)$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x_0)$ va $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x_0 + \Delta x) = v(x_0)$ (differensiallanuvchi funksiya uzluksiz).

$$\text{Demak, } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v(x_0) - u(x_0) \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$

Shunday qilib, $y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. a) va b) formulalar ham shunga o'xshash isbotlanadi.

Teorema qo'shiluvchilar va ko'paytuvchilar soni chekli bo'lganda ham to'g'ri bo'ladi. Masalan, $(u + v - w)' = u' + v' - w'$, yoki $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$ tenglik o'rinli.

Natija. O'zgarmas ko'paytuvchini hosila belgisidan chiqarish mumkin, ya'ni $(Cu)' = Cu'$ yoki $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}$, bunda C -o'zgarmas son.

Haqiqatan, $y = Cu(x)$ bo'lsa, $\Delta y = Cu(x_0 + \Delta x) - Cu(x_0)$
 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Cu(x_0 + \Delta x) - Cu(x_0)}{\Delta x}$ bo'lib $y' = (Cu)' = C \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} = Cu'(x)$ bo'ladi.

Murakkab funksiyaning hosilasi.

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasi bilan tanishamiz. $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ murakkab funksiyani qaraymiz.

3-teorema. $y = f(u)$ va $u = \varphi(x)$ differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin. Murakkab $f(u)$ funksiyaning erkli o'zgaruvchi x bo'yicha hosilasi bu funksiyaning oraliq argumenti u bo'yicha hosilasi y'_u ning oraliq argumentning erkli o'zgaruvchi x bo'yicha hosilasi $u'(x)$ ga ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Isboti. $u = \varphi(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada, $y = f(u)$ funksiya esa bu nuqtada mos $u_0 = \varphi(x_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0)$

chekli limit mavjud. Bundan $\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0) + \alpha$ yoki $\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \alpha\Delta u$ kelib chiqadi, bu yerdagi $\alpha, \Delta u \rightarrow 0$ da cheksiz kichik funksiya. So'nggi tenglikni har ikkala tomonini Δx ga bo'lsak $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}$ hosil bo'ladi. Bunda $\Delta x \rightarrow 0$ da limitga o'tib

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha = 0$ ekanini hisobga olsak isbotlanishi lozim bo'lgan $y'(x_0) = f'(u_0) \cdot u'(x_0)$ yoki $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ kelib chiqadi. Biz bu yerda differensiallanuvchi $u(x)$ funksiya uzluksiz va $\Delta x \rightarrow 0$ da $\Delta u \rightarrow 0$ ni hisobga oldik.

Teskari funksiya va uning hosilasi.

$[a; b]$ kesmada aniqlangan o'suvchi yoki kamayuvchi $y = f(x)$ funksiyani qaraymiz. $f(a) = c$, $f(b) = d$ bo'lsin. Aniqlik uchun $y = f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada o'suvchi deb faraz qilamiz. $[a; b]$ kesmaga tegishli ikkita har xil x_1 va x_2 nuqtani olamiz. O'suvchi funksiyaning ta'rifidan agar $x_1 < x_2$ va $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ bo'lsa, $y_1 < y_2$ bo'ladi.

Demak, argumentning ikkita har xil x_1 va x_2 qiymatlarga funksiyaning ikkita har xil y_1 va y_2 qiymatlari mos keladi. Buning teskarisi ham to'g'ri, ya'ni $y_1 < y_2$ bo'lib, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ bo'lsa, o'suvchi funksiya ta'rifidan $x_1 < x_2$ bo'lishi kelib chiqadi.

Boshqacha aytganda x ning qiymatlari $[a; b]$ kesma bilan y ning qiymatlari $[c; d]$ kesma orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi. y ni argument, x ni esa funksiya sifatida qarab x ni y ning funksiyasi sifatida hosil qilamiz:

$$x = \varphi(y).$$

Bu funksiya berilgan $y = f(x)$ funksiyaga **teskari funksiya** deyiladi. Kamayuvchi funksiya uchun ham shunga o'xshash mulohaza yuritish mumkin. Shuni aytish lozimki, $y = f(x)$ funksiyaning qiymatlari sohasi $[c; d]$ unga teskari $x = \varphi(y)$ funksiyaning aniqlanish sohasi bo'ladi va aksincha. $x = \varphi(y)$ funksiya uchun $y = f(x)$ funksiya teskari funksiya bo'lgani uchun $x = \varphi(y)$ va $y = f(x)$ funksiyalar **o'zaro teskari funksiyalar** deb ataladi.

$y = f(x)$ funksiyaga teskari funksiya $y = f(x)$ tenglamani x ga nisbatan yechib topiladi. O'zaro teskari funksiyalarning grafigi Oxy tekisligidagi bitta egri chiziqni ifodalaydi.

5-misol. $y = x^3$ funksiyaga teskari funksiya topilsin.

Yechish. Bu funksiya butun sonlar o'qida aniqlangan va o'suvchi. Tenglikni x ga nisbatan yechsak berilgan funksiyaga teskari $x = \sqrt[3]{y}$ funksiya hosil bo'ladi.

Har qanday funksiya ham teskari funksiya ega bo'lavermaydi. Masalan $y = x^2$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ intervalda teksari funksiya ega emas, chunki y ning har bir musbat qiymatiga x ning ikkita $x = -\sqrt{y}$ va $x = \sqrt{y}$ qiymatlari mos keladi. Agar $y = x^2$ funksiyani $(-\infty, 0]$ intervalda qaralsa funksiya $x = -\sqrt{y}$ teskari funksiya ega, chunki y ning har bir musbat qiymatiga x ning yagona $y = x^2$ tenglikni qanoatlantiradigan qiymati mos keladi.

Shuningdek $y = x^2$ funksiyani $[0, +\infty)$ oraliqda qarasak unga teskari $x = \sqrt{y}$ funksiya mavjud bo'ladi.

Izoh. $y = f(x)$ funksiyaga teskari $x = \varphi(y)$ funksiyaning argumentini odatdagidek x bilan, funksiyani esa y bilan belgilasak va $y = f(x)$ hamda $y = \varphi(x)$ funksiyalarni grafigini bitta koordinatalar sistemasida chizsak grafik birinchi koordinatalar burchagining bissektisasiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

4-teorema. Agar o'suvchi (kamayuvchi) $y = f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz, shu bilan birga $f(a) = c$, $f(b) = d$ bo'lsa, u holda unga teskari $x = \varphi(y)$ funksiya $[c; d]$ ($[d; c]$) kesmada aniqlangan monoton va uzluksiz bo'ladi.

Endi $x = \varphi(y)$ teskari funksiyani hosilasini bilgan holda $y = f(x)$ funksiyaning hosilasini topish imkonini beradigan teoremani isbotlaymiz.

5-teorema. Agar $x = \varphi(y)$ funksiya biror intervalda monoton bo'lib shu intervalning y nuqtasida noldan farqli $\varphi'(y)$ hosilaga ega bo'lsa, bu nuqtaga mos x nuqtada teskari $y = f(x)$ funksiya ham hosilaga ega bo'lib,

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

bo'ladi.

Isboti. Shartga binoan $x = \varphi(y)$ funksiya monoton va differensiallanuvchi bo'lgani uchun u uzluksiz hamda unga teskari monoton va uzluksiz $y = f(x)$ funksiya mavjud. x ga $\Delta x \neq 0$ orttirma bersak $y = f(x)$ funksiya Δy orttirma oladi va uzluksizligini nazarga olsak $\Delta x \rightarrow 0$ da $\Delta y \rightarrow 0$. Natijada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

Bu formulani $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ ko'rinishda yozish mumkin.

Shunday qilib, teskari funksiyaning hosilasi shu funksiya hosilasiga teskari miqdorga teng ekan.

ma'ruza. Mavzu: Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari.

O'zgarmas funksiyaning hosilasi.

1-teorema. O'zgarmas funksiyaning hosilasi nolga teng, ya'ni $C' = 0$ bunda C -o'zgarmas son.

Isbot. $y = f(x) = C$ desak x argument Δx orttirma olganda y funksiya $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$ orttirma oladi.

Demak, $C' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$. Shunday qilib $C' = 0$.

Masalan, $(25)' = (2^{18})' = (tg 20^\circ)' = (\ln 87)' = 0$.

2. Logarifmik funksiyaning hosilasi.

2-teorema. $\ln x$ lagorifmik funksiyaning hosilasi $\frac{1}{x}$ ga teng.

Isboti $y = \ln x$ funksiya qaraymiz. x Δx orttirma olganda funksiya $\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$ orttirma oladi.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$ nisbatni tuzamiz. $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$ deb belgilasak $\Delta x \rightarrow 0$ da $\alpha \rightarrow 0$.

Demak, $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \ln(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$, ya'ni $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Bu yerda $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ ikkinchi ajoyib limitdan foydalanildi.

Shunga o'xshash $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{(\ln x)'}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}$ kelib chiqadi. (bunda $a > 0$, $a \neq 1$).

Agar $y = \ln u$ bo'lib, bunda, $u = u(x)$ differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, u holda murakkab funksiya differensiallash

qoidasiga binoan $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ tenglikka ega bo'lamiz.

Xususan, agar $y = \log_a u$, $u = u(x)$ bo'lsa, u holda

$(\log_a u)' = \left(\frac{\ln u}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln u)' = \frac{u'}{\ln a \cdot u}$ bo'ladi.

Darajali funksiyaning hosilasi.

3-teorema. x^α darajali funksiyaning hosilasi $\alpha x^{\alpha-1}$ ga teng, bunda α -o'zgarmas son.

Isboti. $y = x^\alpha$ funksiya qaraymiz. Uni e asosga ko'ra logarifmlab $\ln y = \alpha \ln x$ tenglikka ega bo'lamiz. y ni x ning funksiyasi hisoblab, tenglikning ikkala

qismini x bo'yicha differensiallaymiz: $\frac{y'}{y} = \alpha \cdot \frac{1}{x}$. Bundan

$$y' = \alpha \cdot y \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^\alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Shunday qilib $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$. Teorema isbotlandi.

Agar $y = u^\alpha$ bo'lib, $u = u(x)$ differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, u holda murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga binoan $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$ bo'ladi.

1-misol. $y = \sqrt{x}$ funksiyaning hosilasi topilsin.

Yechish. $y^1 = \left(\sqrt{x} \right)' = \left(x^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

Demak, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

2-misol. $y = \frac{1}{x}$ funksiyaning hosilasi topilsin.

Yechish. $y' = \left(\frac{1}{x} \right)' = \left(x^{-1} \right)' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$

Demak, $\left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}.$

Izoh. Bundan buyon funksiyaning hosilasi topilsin deyilganda shu funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli istalgan nuqtada uning hosilasini topishni nazarda tutamiz.

Ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi.

4-teorema. a^x ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi $a^x \ln a$ ga tengdir.

Isboti. $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) funksiyaning qaraymiz. Uni e asosga ko'ra logarifmlasak $\ln y = x \cdot \ln a$ bo'ladi. y ni x ning funksiyasi hisoblab, tenglamaning ikkala qismini x bo'yicha differensiallaymiz. $\frac{y'}{y} = \ln a$. Bundan $y' = y \ln a$ yoki

$y' = a^x \ln a$ kelib chiqadi. Demak, $(a^x)' = a^x \ln a$.

$y = a^u$ murakkab funksiya uchun $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ formulaga ega bo'lamiz.

Xususiyl holda $a = e$ bo'lsa $\ln e = 1$ bo'lib $(e^x)' = e^x$ va $(e^u)' = e^u \cdot u'$ formulalarga ega bo'lamiz.

3-misol. $y = 2^x$ bo'lsa, y' topilsin.

Yechish. $(2^x)' = 2^x \ln 2.$

4-misol. $y = 3^{x^2}$ bo'lsa, y' topilsin.

Yechish. $y' = (3^{x^2})' = 3^{x^2} \ln 3 (x^2)' = 3^{x^2} \ln 3 \cdot 2x.$

5-misol. $y = e^{x^3}$ bo'lsa, y' topilsin.

Yechish. $y' = (e^{x^3})' = e^{x^3} (x^3)' = e^{x^3} 3x^2$

Trigonometrik funksiyalarning hosilalari.

5-teorema. $\sin x$ funksiyaning hosilasi $\cos x$ ga teng.

Isboti. $y = \sin x$ funksiyani qaraymiz. x ga Δx ortirma bersak funksiya

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) \sin\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right) = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}$$

ortirma oladi. Shuning uchun

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\text{va } y' = (\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Bu yerda birinchi ajoyib limitdan hamda $\cos x$ funksiyaning uzluksizligidan foydalanildi.

Shunday qilib, $(\sin x)' = \cos x$.

$y = \sin u$ (bunda $u = u(x)$) murakkab funksiya uchun $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ formulaga ega bo'lamiz.

6-misol. $y = \sin \sqrt{x}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $y' = \cos \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' = \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

7-misol. $y = \sin^2 x$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $y' = (\sin^2 x)' = ((\sin x)^2)' = 2 \sin x \cdot (\sin x)' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.

8-misol. $y = \sin(\ln x)$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $y' = \cos(\ln x) (\ln x)' = \frac{\cos(\ln x)}{x}$.

6- teorema. $\cos x$ funksiyaning hosilasi $-\sin x$ ga teng.

Isboti. $y = \cos x$ funksiyani qaraymiz. Keltirish formulasidan foydalanib uni

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ ko'rinishda yozamiz. Demak,}$$

$$y' = (\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \sin x \cdot (0 - 1) = -\sin x, \text{ yoki } (\cos x)' = -\sin x$$

$y = \cos u$ (bunda $u = u(x)$) murakkab funksiyani hosilasini topish uchun

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u' \text{ formulaga ega bo'lamiz.}$$

9-misol. $y = \cos x^3$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $y' = -\sin x^3 (x^3)' = -\sin x^3 \cdot 3x^2$.

10-misol. $y = \cos \sqrt{x^2 + 1}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $y' = -\sin \sqrt{x^2+1} \left(\sqrt{x^2+1} \right)' = -\sin \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)' =$
 $= -\sin \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = -\frac{x \sin \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$

7-teorema. $\operatorname{tg} x$ funksiyaning hosilasi $\frac{1}{\cos^2 x}$ ga teng.

Isboti. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ bo'lganligi sababli bo'linmani hosilasini topish qoidasiga binoan

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Shunday qilib, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$y = \operatorname{tgu}$ (bunda, $u = u(x)$) murakkab funksiyaning hosilasini topish uchun $(\operatorname{tgu})' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

formulaga ega bo'lamiz.

11-misol. $y = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $y' = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2 \cos^2 \frac{1}{x}}.$

12-misol. $y = \operatorname{tg}^3 \sqrt{x}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $y' = \left((\operatorname{tg} \sqrt{x})^3 \right)' = 3 \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} \cdot (\operatorname{tg} \sqrt{x})' = 3 \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{3 \operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}{2 \sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}}.$

20.8-teorema. $\operatorname{ctg} x$ funksiyaning hosilasi $-\frac{1}{\sin^2 x}$ ga teng.

Bu teoremani isbotlashni o'quvchiga qoldiramiz.

13-misol. $y = \operatorname{ctg} \sqrt{2x^2+1}$ funksiyaning hosilasini toping.

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 \sqrt{2x^2+1}} \cdot \left(\sqrt{2x^2+1} \right)' = -\frac{1}{\sin^2 \sqrt{2x^2+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x^2+1}} \cdot (2x^2+1)' =$$

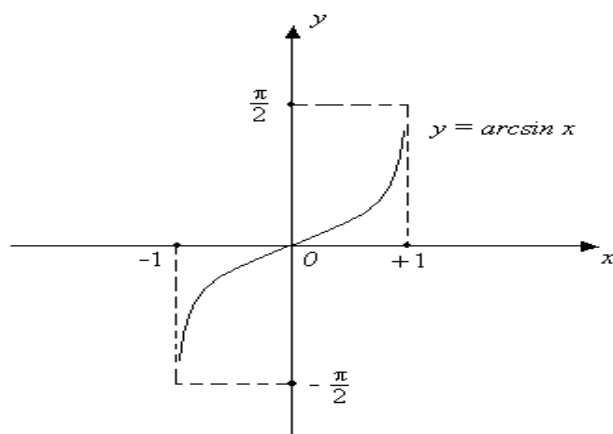
$$= -\frac{1}{\sin^2 \sqrt{2x^2+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x^2+1}} \cdot 4x = -\frac{2x}{\sin^2 \sqrt{2x^2+1} \cdot \sqrt{2x^2+1}}.$$

Teskari trigonometrik funksiyalar va ularning hosilalari.

1) $y = \arcsin x$ funksiya. $x = \sin y$ funksiyaning qaraymiz. Bu funksiya $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

kesmada monoton o'uvchi bo'lib uning qiymatlari $-1 \leq x \leq 1$ kesmani to'ldiradi. Shuning uchun bu funksiya aniqlanish sohasi $[-1, 1]$ dan, qiymatlar sohasi

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ kesmadan iborat teskari funksiya ega (19.4-teorema).



5-chizma.

Odatda uni $y = \arcsin x$ ko'rinishda yozish qabul qilingan. Demak $x = \sin y$ va $y = \arcsin x$ funksiyalar o'zaro teskari funksiyalar. $y = \arcsin x$ funksiyaning grafigi 5-chizmada tasvirlangan. $D(\arcsin x) = [-1, 1]$, $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

9. teorema. $\arcsin x$ funksiyaning hosilasi $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ga teng..

Isboti. $y = \arcsin x$ funksiyani qaraymiz. $x = \sin y$ funksiya bu funksiyaga teskari funksiya bo'ladi.

O'zaro teskari funksiyani hosilasini topish formulasi $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ (19.5.teorema) dan

foydalanamiz. $y' = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\pm \sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$

chunki $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ kesmada $\cos y \geq 0$ bo'lgani uchun $\sqrt{1-\sin^2 y}$ oldidagi plyus ishora olindi.

Shunday qilib, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

$y = \arcsin u$ (bunda, $u = u(x)$) murakkab funksiya uchun $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

hosilani topish formulasiga ega bo'lamiz.

14-misol. $y = \arcsin e^x$ funksiyani hosilasini toping.

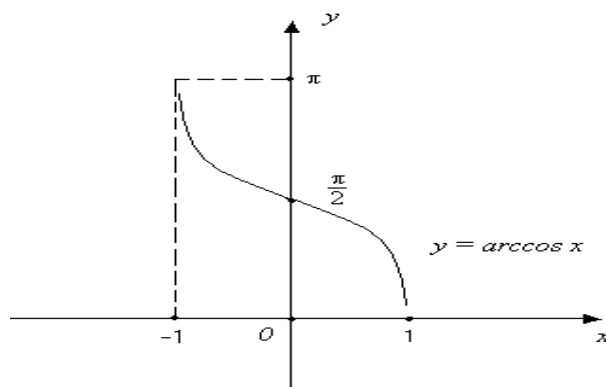
Yechish. $y' = \frac{(e^x)'}{\sqrt{1-(e^x)^2}} = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$

15-misol. $y = 2\arcsin \sqrt{x}$ funksiyani hosilasini toping.

Yechish. $y' = 2(\arcsin \sqrt{x})' = 2 \cdot \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (1-x)}.$

2) $y = \arccos x$ funksiya. $x = \cos y$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $0 \leq y \leq \pi$ kesmada monoton kamayuvchiligini bilamiz. Shuning uchun bu funksiyaga teskari funksiya mavjud (19.4 teorema) bo'lib uning aniqlanish sohasi $[-1, 1]$ kesmadan, qiymatlari sohasi $[0; \pi]$ kesmadan iborat bo'ladi. $x = \cos y$ funksiyaga teskari

funksiyani $y = \arccos x$ kabi yoziladi. $y = \arccos x$ funksiyaning grafigi 102-chizmada tasvirlangan. $D(\arccos x) = [-1, 1]$, $E(\arccos x) = [0; \pi]$ ekani ravshan.

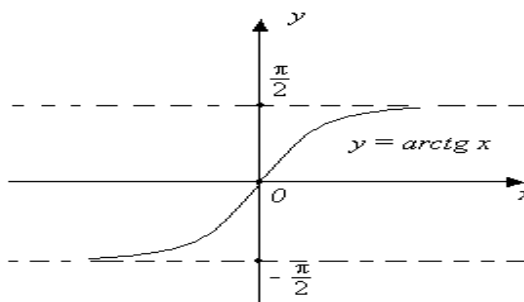


6-chizma.

10-teorema. $\arccos x$ funksiyaning hosilasi $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ga teng.

Teoremaning isboti 9-teoremaning isbrtini takrorlagani uchun uni isbotlashni o'quvchiga qoldiramiz.

3) $y = \arctg x$ funksiya. $x = tgy$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ intervalda monoton o'sadi. Shuning uchun bu funksiyaga teskari funksiya mavjud (19.4-teorema) bo'lib uning aniqlanish sohasi butun sonlar o'qidan iborat. $x = tgy$ funksiyaga teskari funksiya $y = \arctg x$ kabi yoziladi. Demak $D(\arctg x) = (-\infty; \infty)$, $E(\arctg x) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ va $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$. $y = \arctg x$ funksiyaning grafigi 7-chizmada tasvirlangan.



7-chizma

11-teorema. $\arctg x$ funksiyaning hosilasi $\frac{1}{1+x^2}$ ga teng.

Isboti. $y = \arctg x$ funksiyani qaraymiz. $x = tgy$ funksiyaga teskari funksiya bo'lganligi sababli ularning hosilalari (5-teorema) $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ tenglik orqali

bog'langan. Shuning uchun $y' = \frac{1}{(tg y)_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$. Demak,

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}. \quad y = \arctg u \text{ murakkab funksiyani hosilasi} \quad (\arctg u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

formula yordamida topiladi.

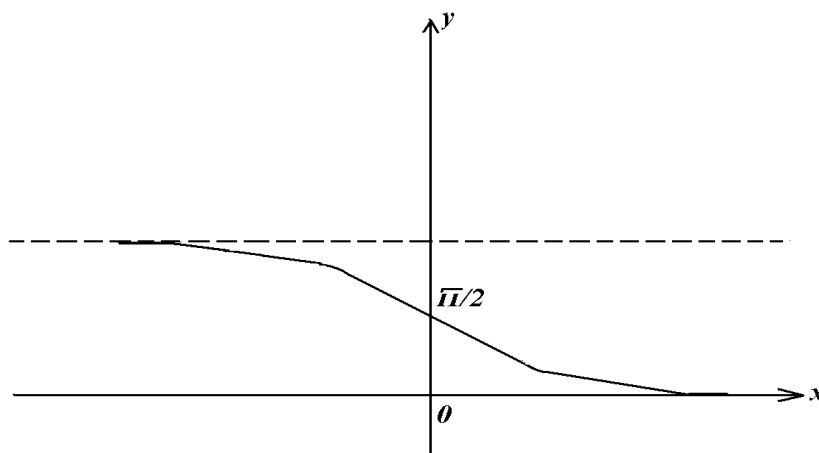
16-misol. $y = (\arctg x)^3$ funksiyani hosilasini toping.

Yechish. $y' = 3(\arctg x)^2 \cdot (\arctg x)' = 3(\arctg x)^2 \cdot \frac{1}{1+x^2}$.

17-misol. $y = \arctg x^2$ funksiyani hosilasini toping.

Yechish. $y' = \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} = \frac{2x}{1+x^4}$.

4) $y = \text{arcctg} x$ funksiya. $x = \text{ctg} y$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $0 < y < \pi$ intervalda monoton kamayuvchi. Shuning uchun bu funksiyaga teskari funksiya mavjud (19.4-teorema) va uning aniqlanish sohasi $(-\infty, +\infty)$ dan iborat. $x = \text{ctg} y$ funksiyaga teskari funksiya $y = \text{arcctg} x$ ko'nishda belgilanadi. Demak, $D(\text{arcctg} x) = (-\infty, +\infty)$, $E(\text{arcctg} x) = (0; \pi)$ va $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{arcctg} x = \pi$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{arcctg} x = 0$. $y = \text{arcctg} x$ funksiyaning grafigi 8-chizmada tasvirlangan.



8-chizma.

12-teorema. $\text{arcctg} x$ funksiyaning hosilasi $-\frac{1}{1+x^2}$ ga teng.

Teoremani isboti 11-teoremani isbotiga o'hshaganligi uchun uni isbotini o'quvchiga qoldiramiz.

$y = \text{arcctg} u$ murakkab funksiyani hosilasi $(\text{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$ formula yordamida topiladi.

18-misol. $y = \text{arcctg} x^4$ funksiyani hosilasini toping.

Yechish. $y' = -\frac{(x^4)'}{1+(x^4)^2} = -\frac{4x^3}{1+x^8}$.

19-misol. $y = \text{arctg} \frac{1}{x}$ funksiyani hosilasini toping

$$y' = -\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{1}{x^2+1}.$$

ma'ruza. Mavzu: Ba'zi elementar funksiyalarning hosilalari.
Hosilalar jadvali.

Giperbolik funksiyalar va ularning hosilalari

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

tengliklar yordamida aniqlanadigan funksiyalar **giperbolik** funksiyalar deb ataladi.

Bunda $\operatorname{sh} x$ - **giperbolik sinus**, $\operatorname{ch} x$ -**giperbolik kosinus**, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ - **giperbolik**

tangens, $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ - **giperbolik kotangens** deb ataladi.

Bu funksiyalar orasida

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x,$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 x}$$

ayniyatlar o'rinli ekanligini tekshirib kurishni o'quvchiga tavsiya etamiz.

Endi Shu funksiyalarni hosilalarini topish formulalarini hosil qilamiz.

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{(e^x - e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{(e^x + e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \right)' = \frac{(\operatorname{ch} x)' \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x)'}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Hisoblashda $(e^x)' = e^x$, $(e^{-x})' = -e^{-x}$ ekanligidan foydalandik.

Shunday qilib:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Oshkormas funksiya va uning hosilasi

x va y o'zgaruvchilar orasidagi funktsional bog'lanish $F(x,y)=0$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. Agar qandaydir (a, b) intervalda aniqlangan $y=f(x)$ funksiya mavjud bo'lib, u $F(x,y)=0$ tenglamani qanoatlantirsa, u holda $y=f(x)$ funksiya $F(x,y)=0$ tenglama bilan aniqlangan **oshkormas** funksiya deyiladi. Funksiya $y=f(x)$ tenglik yordamida berilganda y oshkor ko'rinishda berilgan deyiladi. Oshkor ko'rinishda berilgan funktsiyani $y-f(x)=0$ ko'rinishda yozilsa y oshkormas ko'rinishda berilganga o'tiladi. Funksiya $F(x,y)=0$ tenglama yordamida

oshkormas shaklda berilganda tenglamani y ga nisbatan yechilsa funksiyaning oshkor ko'rinishdagi tenglamasi hosil bo'ladi. Ammo bunday o'tish har doim ham oson bo'lavermaydi, ba'zan esa umuman o'tishning iloji bo'lmaydi.

Shuning uchun oshkormas funksiya hosilasini uni oshkor holga keltirmasdan topish usuli bilan misollarda tanishamiz.

1-misol $x^2+y^2=4$ tenglama bilan berilgan funksiyaning y' hosilasini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani y ni x ning funksiyasi ekanligini hisobga olgan holda x bo'yicha differensiallaymiz: $(x^2)' + (y^2)' = 4$; $2x + 2y \cdot y' = 0$,

$$x + y \cdot y' = 0, \text{ bundan } y' = -\frac{x}{y}.$$

2-misol. $y^4 - 4xy + x^4 = 0$ tenglama bilan berilgan funksiyaning y' hosilasini toping.

Yechish. Differensiallaymiz: $4y^3 \cdot y' - 4(x'y + x \cdot y') + 4x^3 = 0$; $y^3 \cdot y' - y - xy' = -x^3$;
 $(y^3 - x)y' = y - x^3$; $y' = \frac{y - x^3}{y^3 - x}$

Biz kelgusida oshkormas funksiyaning hosilasini topishga yana qaytamiz. Shuning uchun bu yerda uni batafsil o'rganib o'tirmaymiz.

Funksiyaning parametrik berilishi va parametrik berilgan funksiyaning hosilasi.

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (1)$$

tenglamalar berilgan bo'lsin. Bu yerda $t \in [T_1, T_2]$ kesmadagi qiymatlarni qabul qiladi. t ning har bir qiymatiga x va y ning aniq qiymatlari to'g'ri keladi. Agar x va y ni Oxy koordinata tekisligidagi nuqtaning koordinatalari deb qaralsa, u holda t ning har bir qiymatiga tekislikning ma'lum bir nuqtasi to'g'ri keladi. t ning qiymatlari T_1 dan T_2 gacha o'zgarsa, bu nuqta tekislikda biror egri chiziqni chizadi. (1) tenglamalar ana shu egri chiziqning **parametrik tenglamalari** deyiladi, t parametr deyiladi.

Bu egri chiziq qandaydir $y=f(x)$ funksiyaning grafigi bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya (1) parametrik tenglamalari yordamida berilgan deyiladi. x bilan y orasidagi bog'lash (1) tenglamalardan t ni yuqotish orqali o'rnatiladi.

Faraz qilaylik, $x = \varphi(t)$ funksiya $t = \Phi(x)$ teskari funksiyaga ega bo'lsin.

U holda $t = \Phi(x)$ ni (1) ning ikkinchi tenglamasiga qo'ysak y ni x ning funksiyasi sifatida aniqlaydigan

$$y = \psi[\Phi(x)] \text{ yoki } y = f(x)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib (1) tenglamalar qandaydir $y=f(x)$ funksiyani aniqlar ekan.

3-misol: $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan o'tib $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j}$ yo'naltiruvchi vektorga ega to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari yozilsin.

Yechish. Bu to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$$

ko'rinishga ega ekanligi ma'lum. $\frac{x-x_0}{m} = t, \frac{y-y_0}{n} = t$ deb belgilasak $x-x_0=mt,$

$y-y_0=nt$ yoki $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \end{cases}$ to'g'ri chiziqning **parametrik tenglamalari** hosil bo'ladi.

4-misol.
$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi, R > 0)$$

tenglamalar aylananing parametrik tenglamalari ekanini ko'rsatamiz.

Tenglamalarni kvadratga ko'tarib qo'shsak

$$x^2 + y^2 = R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t = R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2$$

yoki $x^2 + y^2 = R^2$ hosil bo'ladi. Bu markazi koordinata boshida bo'lib radiusi R ga teng aylananing **kanonik tenglamasi** ekanini ma'lum.

5-misol.
$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0, b > 0)$$

tenglamalar ellipsning kanonik tenglamalari ekanini ko'rsatamiz. Tenglamalarni birinchisini a ga, ikkinchisini b ga bo'lib ularni

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \cos t, \\ \frac{y}{b} = \sin t \end{cases}$$

ko'rinishda yozamiz. Bu tenglamalarni kvadratga ko'tarib qo'shsak

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ellipsning kanonik tenglamasiga ega bo'lamiz.

6-misol.
$$\begin{cases} x = a \cosh t, \\ y = b \sinh t. \end{cases}$$

tenglamalar giperbolaning parametrik tenglamalari ekanini ko'rsatamiz ($a > 0, b > 0$).

Tenglamalarning birinchisini a ga ikkinchisini b ga bo'lsak $\frac{x}{a} = \cosh t, \frac{y}{b} = \sinh t$ hosil

bo'ladi. Bu tenglamalarning kvadratga ko'tarib birinchi tenglamadan ikkinchisini hadlab ayirsak

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{giperbolaning kanonik tenglamasiga}$$

ega bo'lamiz.

Endi parametrik tenglamalari $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ bilan berilgan funksiyaning hosilasini

topish uchun formula chiqaramiz. $\varphi(t), \psi(t)$ funksiyalar differensiallashuvchi hamda $x = \varphi(t)$ funksiya $t = \varphi(x)$ teskari funksiyaga ega deb faraz qilamiz. U holda $y = \psi(t), t = \varphi(x)$ bo'lgani uchun y x ning murakkab funksiyasi bo'ladi, t -oraliq argument.

Shu sababli murakkab funksiyani hosilasini topish formulasiga binoan

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x \quad (2)$$

bo'ladi. Teskari funktsiyani differentsiallashtirish qoidasiga ko'ra $t'_x = \frac{1}{x'_t}$, bo'lgani uchun buni (21.2)ga qo'ysak

$$y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t} \text{ hosil bo'ladi.}$$

$$\text{Shunday qilib, } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad (3)$$

parametrik tenglamalari bilan berilgan funktsiyaning hosilasini topish formulasini hosil qilamiz.

$$\textbf{7-misol.} \quad \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases} \quad y'_x \text{ -?}$$

$$\textbf{Yechish.} \quad y'_x = \frac{(b \sin t)'}{(a \cos t)'} = \frac{b \cos t}{a \cdot (-\sin t)} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctgt}.$$

$$\textbf{8-misol} \quad \begin{cases} x = a \operatorname{cht}, \\ y = b \operatorname{sht}. \end{cases} \quad y'_x \text{ -?}$$

$$\textbf{Yechish.} \quad y'_x = \frac{(b \operatorname{sht})'}{(a \operatorname{cht})'} = \frac{b \operatorname{cht}}{a \operatorname{sht}} = \frac{b}{a} \operatorname{ctht}$$

$$\textbf{9-misol} \quad \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases} \quad y'_x \text{ -?}$$

$$\textbf{Yechish.} \quad y'_x = \frac{(a \sin^3 t)'}{(a \cos^3 t)'} = \frac{3a \sin^2 t (\sin t)'}{3a \cos^2 t (\cos t)'} = \frac{\sin^2 t \cos t}{-\cos^2 t \sin t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tgt}.$$

Hosilalar jadvali

$u = u(x), v = v(x)$ -differentsiyanuvchi funktsiyalar deb hisoblab asosiy elementar funktsiyalarning hosilalari jadvalini tuzamiz va differentsiallashtirish qoidalarini keltiramiz:

1) $C' = 0$; $C = \text{const}$

2) $x' = 1$, x – erkli o'zgaruvchi.

3) $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$, $\alpha = \text{const}$. 4) Xususiy holda $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

5) Xususiy holda $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$.

6) $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, $a = \text{const}$, $a > 0$, $a \neq 1$. 7) Xususiy holda $(e^u)' = e^u \cdot u'$.

8) $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$, $a = \text{const}$, $a > 0$, $a \neq 1$. 9) Xususiy holda $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$.

10) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

11) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

12) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.

13) $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.

$$14) (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

$$15) (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

$$16) (\arctg u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

$$17) (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

$$18) (sh u)' = chu \cdot u'.$$

$$19) (ch u)' = sh u \cdot u'.$$

$$20) (th u)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'.$$

$$21) (cth u)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'.$$

$$22) (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

$$23) (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

$$24) (Cu)' = C \cdot u', \quad \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}, \quad C = \text{const.}$$

$$25) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

$$26) y = f(u), \quad u = u(x) \text{ murakkab funksiyaning hosilasi uchun } y'_x = y'_u \cdot u'_x \text{ o'rinli.}$$

$$27) y = f(x) \text{ va } x = v(y) \text{ o'zaro teskari funksiyalar uchun } y'_x = \frac{1}{x'_y} \text{ o'rinli.}$$

$$28) \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \text{ bo'lsa } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Izoh. $y = [u(x)]^{(x)}$ ko'rinishdagi funksiyaning hosilasini topish talab etilsa, avval berilgan tenglikni e asosga ko'ra logarifmlab keyin tenglikni x bo'yicha differensiallash ma'qul.

10-misol. $y = x^{x^2}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $\ln y = x^2 \cdot \ln x; \quad \frac{1}{y} \cdot y' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}, \quad y' = y[2x \ln x + x]$

yoki $y' = (x^{x^2})' = x^{x^2} \cdot x[2 \ln x + 1].$

ma'ruza. Mavzu: Funksiyaning differensial. Yuqori tartibli hosilalar va differensiallar. Urinma va normal tenglamalari.

Funksiyaning differensial va uning geometrik ma'nosi.

$(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning olamiz. U holda $(a; b)$ dagi istalgan x uchun

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1)$$

chekli hosila mavjud bo'ladi. Umumiy holda $f'(x) \neq 0$ deb faraz qilinsa, (1) tenglikdan (16.5-teorema) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$ ekani kelib chiqadi, bunda $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$.

Agar oxirgi tenglikni barcha hadlarini Δx ga ko'paytirilsa

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x \quad (2)$$

tenglik hosil bo'ladi. (2.2) dagi har ikkala qo'shiluvchilar ham $\Delta x \rightarrow 0$ da nolga intiladilar. Ularni Δx bilan taqqoslaymiz:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x) \text{ - chekli son, } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

Shunday qilib (2.2) tenglikdagi birinchi qo'shiluvchi Δx bilan bir xil tartibli cheksiz kichik miqdor(funksiya), ikkinchi qo'shiluvchi $\alpha \cdot \Delta x$ esa Δx ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor. Bundan (2) formulada birinchi qo'shiluvchi $f'(x)\Delta x$ asosiy ekanligi kelib chiqadi. Ana shu qo'shiluvchi **funksiyaning differensial** deyiladi.

Funksiyaning differensial dy yoki $df(x)$ kabi belgilanadi.

Demak,

$$dy = f'(x)\Delta x. \quad (3)$$

Shunday qilib funksiyaning differensial uning hosilasini argument orttirmasiga ko'paytirilganiga teng ekan. $y=x$ bo'lganda $y'=x'=1$ bo'lib, $dy=dx=1 \cdot \Delta x$ yoki $dx=\Delta x$, ya'ni erkli o'zgaruvchining differensial uning orttirmasiga tengligi kelib chiqadi. Buni hisobga olsak (3) formulani

$$dy = f'(x)dx = y'dx \quad (4)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan $y' = \frac{dy}{dx}$, ya'ni hosila funksiya differensialining argument differensialiga nisbati ekanligi kelib chiqadi.

(2.4) tenglikdan ko'rinib turibdiki funksiyaning differensialini topish masalasi uning hosilasini topishga teng kuchli, chunki funksiyaning hosilasi erkli o'zgaruvchining orttirmasi Δx ga ko'paytirilsa funksiyaning differensial hosil bo'ladi. Shunday qilib hosilalarga tegishli bo'lgan teoremlar va formulalarning ko'pchiligi differensiallar uchun ham to'g'ri bo'ladi.

Xususan, differensiallanuvchi u va v funksiyalar uchun differensiallash qoidalaridagi singari

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \quad d(cu) = cdu, \quad c = \text{const},$$

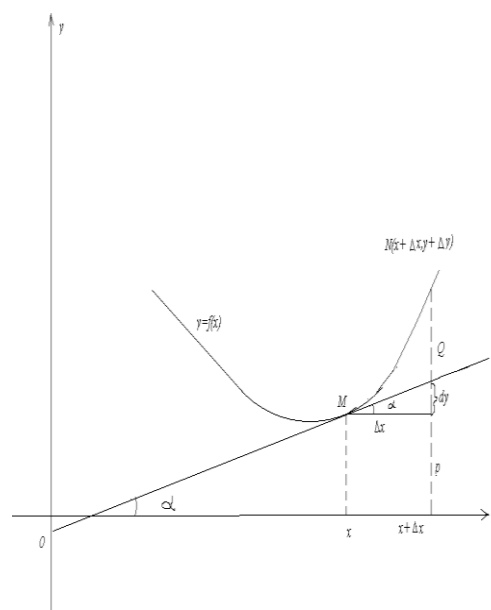
$$d(u \cdot v) = vdu + u dv, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

formulalar to'g'ri bo'ladi.

1-misol. $y = t$ funksiyaning differensialini toping.

$$\textbf{Yechish.} \quad dy = y'dx = (tgx)'dx = \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

2-misol. $y = e^{x^2}$ funksiyaning differensialini toping.



Yechish. $dy = y' dx = (e^{x^2})' dx = e^{x^2} (x^2)' dx = e^{x^2} 2x dx$.

Endi differensialning geometrik ma'nosi bilan tanishamiz.

$y = f(x)$ funksiya va unga mos egri chiziqni qaraymiz (105-chizma).

Egri chiziqning $M(x, y)$ nuqtasini olib shu nuqtada egri chiziqqa urinma o'tkazamiz. Urinmaning Ox o'qning musbat yo'nalish bilan hosil qilgan burchakni α bilan belgilaymiz. Erkli o'zgaruvchi x ga Δx ortirma beramiz, u holda 105-chizma

funksiya $PN = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ orttirmani oladi. Chizmadagi $\triangle MPQ$ dan $\frac{PQ}{MP} = \operatorname{tg} \alpha$ yoki $PQ = MP \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x$. Ammo hosilaning geometrik ma'nosiga binoan $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ ekanini hisobga olsak $PQ = f'(x) \Delta x$ bo'ladi. Differensialning ta'rifiga asosan $dy = f'(x) \Delta x$ edi. Shunday qilib, $PQ = dy$. Bu tenglik $f(x)$ funksiyaning x va Δx ning berilgan qiymatlariga mos keluvchi differensial $y = f(x)$ egri chiziqqa $M(x, f(x))$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning ordinatasi orttirmasiga teng ekanligini bildiradi. **Differensialning geometrik ma'nosi** shundan iborat.

Taqribiy hisoblashda differensialdan foydalanish.

Yuqorida chiqarilgan (2) tenglikni $dy = f'(x) \Delta x$ ekanini hisobga olib $\Delta y = dy + \alpha \Delta x$ ko'rinishda yozamiz, bunda $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$. Buni dy ga bo'lsak

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 + \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x}$ yoki $\Delta x \rightarrow 0$ da limitga o'tsak

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \Delta x}{f'(x) \Delta x} = 1 + \frac{1}{f'(x)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 1 + \frac{1}{f'(x)} \cdot 0 = 1$$

hosil bo'ladi. Shunday qilib $f'(x) \neq 0$ bo'lganda dy va Δy $\Delta x \rightarrow 0$ da ekvivalent cheksiz kichik miqdorlar ekan. Demak, $\Delta y \approx dy$ yoki $\Delta y \approx f'(x) \Delta x$.

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ekanini hisobga olsak $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x$ yoki bundan

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x \quad (5)$$

hosil bo'ladi.

Bu formuladan foydalanib biror x nuqtada funksiyaning va uning hosilasining qiymatini bilgan holda unga yaqin boshqa $x + \Delta x$ nuqtada funksiyaning taqribiy qiymatini hisoblash mumkin. (22.5) tenglikda Δx qanchalik kichik bo'lsa tenglik shunchalik aniq bo'ladi.

3-misol. $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n \Delta x$ taqribiy tenglikning to'g'riligi ko'rsatilsin, bunda Δx etarlicha kichik son.

Yechish. $f(x) = x^n$ funksiyaning qaraymiz. U holda $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$, $dy = n \cdot x^{n-1} \Delta x$ bo'lib (5) tenglikka ko'ra $(x + \Delta x)^n - x^n \approx n x^{n-1} \Delta x$ yoki $(x + \Delta x)^n \approx x^n + n x^{n-1} \Delta x$ bo'ladi. Bunga $x=1$ qiymatni qo'ysak $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n \Delta x$ taqribiy hisoblash formulasiga ega bo'lamiz. Bunga asoslanib quyidagilarni hosil qilamiz:

$$1) (1,03)^5 = (1 + 0,03)^5 \approx 1 + 5 \cdot 0,03 = 1,15 \quad (\Delta x = 0,03, n = 5).$$

$$2) \sqrt{1,005} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,005 = 1,0025 \quad (\Delta x = 0,005, n = \frac{1}{2}).$$

$$3) \sqrt[3]{0,998} = \sqrt[3]{1-0,012} \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot (-0,012) = 1 - 0,004 = 0,996. \quad \left(\Delta x = -0,012, n = \frac{1}{3} \right).$$

$$4) \sqrt[4]{267} = \sqrt[4]{256+11} = \sqrt[4]{256 \left(1 + \frac{11}{256} \right)} = 4 \sqrt[4]{1 + \frac{11}{256}} \approx 4 \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{256} \right) =$$

$$= 4(1 + 0,0107) = 4,0428. \quad \left(\Delta x = \frac{11}{256}, n = \frac{1}{4} \right).$$

4-misol. $\cos 61^\circ$ hisoblansin.

Yechish. $f(x) = \cos x$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya uchun (21.5) formula $\cos(x + \Delta x) \approx \cos x - \sin x \cdot \Delta x$ ko'rinishni oladi.

$$x = 60^\circ = \frac{\pi}{3}, \Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0,01745 \text{ desak}$$

$$\cos 61^\circ \approx \cos 60^\circ - \sin 60^\circ \cdot 1^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,01745 \approx 0,4849 \text{ hosil bo'ladi.}$$

Yuqori tartibli hosilalar.

$(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyani olamiz. Bu funksiyani hosilasi $f'(x)$ funksiyaning hosilasi haqida gapirish mumkin.

1-ta'rif. Berilgan funksiya hosilasidan olingan hosila shu funksiyaning **ikkinchi tartibli hosilasi** yoki **ikkinchi hosilasi** deyiladi va y'' yoki $f''(x)$ kabi belgilanadi: $y'' = (y')' = f''(x)$.

Masalan, $y = x^7$ bo'lsa, u holda $y' = 7x^6$, $y'' = (7x^6)' = 7 \cdot 6 \cdot x^5 = 42x^5$.

2-ta'rif. Funksiyaning Ikkinchi tartibli hosilasidan olingan hosila shu funksiyaning **uchinchi tartibli hosilasi yoki uchinchi hosila** deyiladi va y''' yoki $f'''(x)$ kabi belgilanadi.

Masalan, $y = x^4$ bo'lsa, u holda $y' = 4x^3$, $y'' = (4x^3)' = 12x^2$, $y''' = (12x^2)' = 24x$.

3-ta'rif. Funksiyaning $(n-1)$ -tartibli hosilasidan olingan hosila shu funksiyaning **n -tartibli hosilasi** yoki **n -hosilasi** deyiladi $y^{(n)}$ yoki $f^{(n)}(x)$ kabi belgilanadi: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f^{(n)}(x)$.

Qonuniyatni saqlab qolish maqsadida $n=0$ bo'lgan xususiyl holda $f^{(0)}(x) = f(x)$ deb olamiz, ya'ni nolinch hosila funksiyaning o'ziga teng.

To'rtinchi, beshinchi va undan yuqori tartibli hosilalar Rim raqamlari bilan ham belgilanadi: y^{IV} , y^V , y^VI , ...

5-misol. $y = \sin x$ bo'lsa, $y^{(n)}$ topilsin.

Yechish. $y' = \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$,

$$y'' = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

.....

$$y^{(n)} = \sin \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right). \text{ Shunday qilib, } (\sin x)^{(n)} = \sin \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right).$$

Shu formulaga asosan $\sin x$ funksiyaning 102-hosilasini topamiz:

$$(\sin x)^{(102)} = \sin\left(x + 102 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + 51 \cdot \pi) = \sin(x + \pi + 50 \cdot \pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x.$$

Demak, $(\sin x)^{(102)} = -\sin x$.

6-misol. $y = \cos x$ bo'lsa, $y^{(n)}$ topilsin.

$$\text{Yuqoridagi singari } (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

ekanini ko'rsatish mumkin.

Ba'zi-bir elementar funksiyalarning istalgan tartibli hosilalari uchun ham formulalar shunga o'xshash chiqariladi.

O'quvchiga $y = e^{kx}$, $y = x^k$, $y = a^x$, $y = e^{kx}$, $y = \ln x$ funksiyalarning n -tartibli hosilalari uchun formulalarni o'zi topishini maslahat beramiz.

n -tartibli hosilalar uchun $(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$, $(cu)^{(n)} = cu^{(n)}$ tengliklarning to'g'riligini isbotlash qiyin emas.

$$\text{Shuningdek } (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n}{1}u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)} \quad (6)$$

formulaning to'g'ri ekanligini ko'rsatish mumkin.

Bu yerdagi $u = u(x)$, $v = v(x)$ funksiyalar n -tartibgacha hosilaga ega bo'lgan funksiyalar. 6 formula **Leybnis formulasi** deb ataladi.

Oshkormas funksiyaning yuqori tartibli hosilasi.

x ning funksiyasi y $F(x, y) = 0$ tenglama yordamida oshkormas shaklda berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning y' hosilasini topish usuli bilan misolda tanishgan edik. Uning yuqori tartibli hosilalarini topish usuli bilan ham misolda tanishamiz.

7-misol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ tenglama bilan oshkormas holda berilgan y funksiyaning ikkinchi hosilasini toping.

Yechish. Oldin y' ni topamiz. y ni x ning funksiyasi ekanligini hisobga olib berilgan tenglamani differensiallasak $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y \cdot y'}{b^2} = 0$ hosil bo'di. Bundan

$$\frac{y \cdot y'}{b^2} = -\frac{x}{a^2}; \quad y \cdot y' = -\frac{b^2 x}{a^2}; \quad y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} \quad \text{va} \quad y'' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'y - xy'}{y^2}$$

$$y'' \text{ ga topilgan } y' \text{ ni qo'yamiz: } y'' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y + x \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2 y^2 + b^2 x^2}{a^2 y^3}.$$

Ammo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tenglamadan $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ kelib chiqishini hisobga olsak $y'' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 y^3}$ yoki $y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$

ga ega bo'lamiz.

y''' , y^{IV} , y^V va hokozo hosilalarni ham shunga o'xshash topish mumkin.

Parametrik berilgan funksiyaning yuqori tartibli hosilalari

x ning funksiyasi y

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

tenglamalar bilan parametrik berilgan bo'lsin, bunda $x = \varphi(t)$ funksiya $t = \Phi(x)$ teskari funksiyaga ega. U holda y'_x hosila

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad (7)$$

formula yordamida topilishi isbotlangan edi. Ikkinchi hosila y''_{xx} ni topish uchun (7) tenglikni t x ning funksiyasi ekanini hisobga olib x bo'yicha differensiallaymiz.

$$y''_{xx} = \left(y'_x \right)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right)'_t \cdot t'_x = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{\left(x'_t \right)^2} \cdot \frac{1}{x'_t}$$

$$\text{Shunday qilib } y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{\left(x'_t \right)^3}.$$

y''' , y^{IV} , y^V va hokozo hosilalarni ham shunga o'xshash topish mumkin.

$$\mathbf{8-misol.} \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t. \quad a = \text{const} \end{cases}$$

parametrik tenglamalari yordamida berilgan x ning funksiyasi y ning ikkinchi hosilasini toping.

$$\mathbf{Yechish.} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(a \sin t)'}{(a \cos t)'} = \frac{a \cos t}{a \sin t} = -\cot t,$$

$$y''_{xx} = (-\cot t)'_t \cdot t'_x = \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{1}{(a \cos t)'_t} = -\frac{1}{a \sin^3 t}.$$

Yuqori tartibli differensiallar.

Differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning qaraymiz. Bu funksiyaning differensial $dy = f'(x)dx$ yana x ning funksiyasi bo'ladi. Shuning uchun bu funksiyaning differensial haqida gapirish mumkin.

4-ta'rif. Funksiyaning differensialidan olingan differensial shu funksiyaning **ikkinchi tartibli differensial** yoki **ikkinchi differensial** deyiladi va d^2y kabi belgilanadi.

$$\text{Shunday qilib, } d(dy) = d^2y.$$

5-ta'rif. Funksiyaning ikkinchi tartibli differensialdan olingan differensial shu funksiyaning **uchinchi tartibli differensial** yoki **uchinchi differensial** deyiladi va d^3y kabi belgilanadi.

$$\text{Shunday qilib, } d(d^2y) = d^3y.$$

6-ta'rif. Funksiyaning $(n-1)$ - tartibli differensialdan olingan differensial shu funksiyaning **n -tartibli differensial** yoki **n -differensial** deyiladi va $d^n y$ kabi belgilanadi.

$$\text{Shunday qilib, } d(d^{n-1}y) = d^n y.$$

Yuqori tartibli differensiallarni hosilalar orqali ifodalaymiz. $dx = \Delta x = \text{const}$ ekanini hisobga olib ikkinchi tartibli differensial uchun

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = (y'dx)'dx = y''dx dx = y''(dx)^2 = y''dx^2 \text{ ga ega bo'lamiz.}$$

Shunday qilib, $d^2y = y''dx^2$.

Bu yerda $dx^2 = (dx)^2$, chunki argument differensial darajasini yozishda qavsni tashlab yozish qabul qilingan.

Shunga o'xshash uchinchi tartibli differensial uchun

$d^3y = d(d^2y) = d(y''dx^2) = (y''dx^2)'dx = y'''dx^2 dx = y'''(dx)^3 = y'''dx^3$ tenglikka ega bo'lamiz. Demak, $d^3y = y'''dx^3$. Bu jarayonni davom ettirib, n -tartibli differensial uchun $d^n y = y^{(n)}dx^n$ formulani hosil qilamiz, bunda $dx^n = (dx)^n$.

Yuqori tartibli differensiallarni hisoblash uchun chiqarilgan formulalardan istalgan tartibli hosilani differensiallarning nisbati sifatida tasvirlovchi

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \dots, \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Shu paytgacha $y = f(x)$ munosabatda x erkli o'zgaruvchi deb qaradik. Endi x oraliq argument bo'lgan holni qaraymiz, ya'ni $y = f(x)$ murakkab funksiyaga ega bo'laylik, bunda $x = \phi(t)$. Murakkab funksiyaning hosilasini topish qoidasiga ko'ra $y'_t = y'_x \cdot x'_t$ bo'lgani uchun

$$dy = y'_t dt = y'_x \cdot x'_t dt = y'_x dx = y' dx.$$

Shunday qilib $y = f(x)$ funksiyaning differensial x erkli o'zgaruvchi bo'lganda qanday ko'rinishga ega bo'lgan bo'lsa u x oraliq argument ya'ni biror yangi o'zgaruvchining funksiyasi bo'lganda ham xuddi o'sha ko'rinishga ega bo'lar ekan. Birinchi tartibli differensialning bu xossasi **differensial shaklning invariantligi** deb ataladi.

9-misol. $y = \sin \sqrt{t}$ funksiyaning differensialini toping.

Yechish. $\sqrt{t} = x$ desak $y = \sin x$ murakkab funksiyaga ega bo'lamiz. U holda

$$dy = y' dx = (\sin x)' dx = \cos x dx = \cos \sqrt{t} d\sqrt{t}.$$

Murakkab funksiyaning ikkinchi tartibli differensial invariantlik xossasiga ega emasligini, ya'ni $d^2y \neq y''dx^2$ ekanini ko'rsatamiz.

Qaralayotgan holda $dx = d\phi(t) = \phi'(t)dt \neq \text{const}$ ekanini hisobga olib, ikkinchi differensial uchun

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = dy'dx + y'd(dx) = y''dx^2 + y'd^2x$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Buni x erkli o'zgaruvchi bo'lgan holdagi $d^2y = y''dx^2$ bilan taqqoslab ularni tashqi ko'rinishlari o'xshash emasligini ko'ramiz. Boshqacha aytganda ikkinchi tartibli differensial invariantlik xossasiga ega emas ekan. Shunga o'xshash yuqori tartibli differensiallar ham invariantlik xossasiga ega bo'lmasligini ko'rsatish mumkin.

Invariantlik xossasi faqat birinchi tartibli differensiallar uchun o'rinli.

10-misol. $y = \operatorname{tg} x$ funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli differensiallarini toping, x -erkli o'zgaruvchi.

Yechish. $dy = y' dx = (\operatorname{tg} x)' dx = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx,$

$$d^2 y = y'' dx^2 = (\cos^{-2} x)' dx^2 = -2 \cos^{-3} x \cdot (\cos x)' dx^2 = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} dx.$$

11-misol. $y = \sin x$, $x = e^t$ murakkab funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli differensiallarini toping.

Yechish. $dy = y' dx = \cos x dx,$

$$d^2 y = d(y' dx) = y'' dx^2 + y' d^2 x = -\sin x dx^2 + \cos x d^2 x.$$

Ikkinchi hosilaning mexanik ma'nosi.

To'g'ri chiziq bo'ylab harakat qiluvchi jismning o'tgan s yo'li bilan t vaqt orasidagi bog'lanish $y = f(t)$ formula bilan ifodalansin.

Hosilaning mexanik ma'nosiga binoan jismning oniy tezligi yo'ldan vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng, ya'ni $v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$.

Biror t momentda jismning tezligi v ga teng bo'lsin. Agar harakat tekis bo'lmasa, u holda t paytdan keyin o'tgan Δt vaqt oralig'ida tezlik Δv ga o'zgaradi.

$$a_{o'rt} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

nisbat Δt vaqtdagi **o'rtacha tezlanish** deyiladi.

O'rtacha tezlanishning vaqt orttirmasi Δt nolga intilgandagi limiti berilgan momentdagi yoki oniy tezlanish deb ataladi: $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$

Demak, oniy tezlanish tezlikdan vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng. Ammo $v = \frac{ds}{dt}$ bo'lgani uchun $a = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$, ya'ni **to'g'ri chiziqli harakat tezlanishi yo'ldan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi hosilaga teng**. $s = f(t)$ ga asosan: $a = f''(t)$.

Bu ikkinchi tartibli hosilaning **mexanik ma'nosidir**.

Urinma va normal tenglamalari.

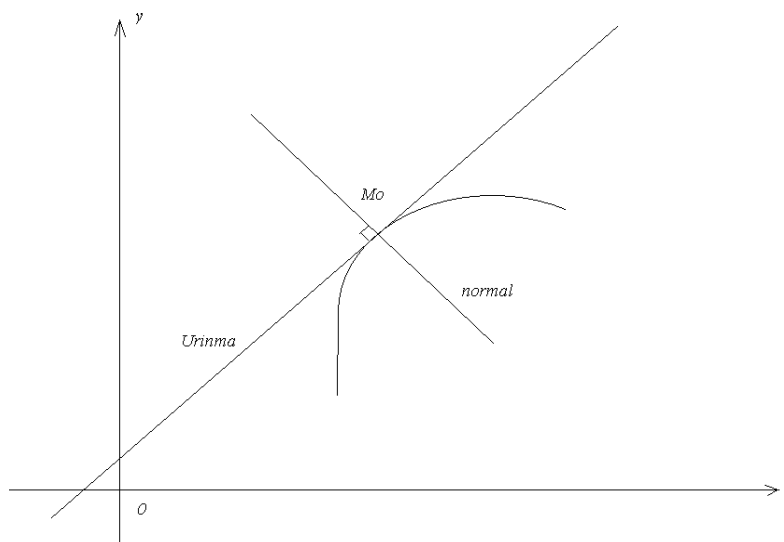
Tenglamasi $y = f(x)$ bo'lgan egri chiziqni qaraymiz, bunda $f(x)$ differensiallanuvchi funksiya. Bu egri chiziqda $M_0(x_0, y_0)$ nuqtani olamiz va bu nuqtada egri chiziqqa urinma o'tkazamiz. O'tkazilgan urinma Oy o'qqa parallel emas deb faraz qilib, uning tenglamasini yozamiz. Berilgan M_0 nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasiga ko'ra urinmaning tenglamasi

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Hosilaning geometrik ma'nosiga binoan $k = f'(x_0)$ bo'lgani uchun urinma tenglamasi $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ ko'rinishni oladi.

7-ta'rif. Urinish nuqtasidan o'tadigan va urinmaga perpendikulyar to'g'ri chiziq egri chiziqqa berilgan nuqtada **normal** deb ataladi(106-chizma).

Ta'rifdan qaralayotgan nuqtada egri chiziq urinmaga ega bo'lmasa u normalga ham ega bo'lmasligi kelib chiqadi. $f'(x)$ hosila mavjud bo'lmaganda egri chiziqqa uning $M(x; f(x))$ nuqtasida Oy o'qqa parallel bo'lmagan urinma o'tkazib bo'lmaydi.



106-chizma.

Endi normalni tenglamasini yozamiz.

Ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik shartiga ko'ra normalning burchak koeffisientini k_n urinmaning burchak koeffisienti $k = f'(x_0)$ bilan

$$k_n = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

tenglik orqali bog'langan.

Demak, $y = f(x)$ egri chiziqqa $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasidagi normal tenglamasi

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

ko'rinishga ega.

12-misol. $y = x^4$ egri chiziqqa uning $M_0(1; 1)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma va normalning tenglamalari yozilsin.

Yechish. $y' = 4x^3$ bo'lgani uchun urinmaning burchak koeffisienti $y'|_{x=1} = 4 \cdot 1^3 = 4$ ga teng. Demak, urinma tenglamasi: $y - 1 = 4(x - 1)$ yoki $y = 4x - 3$.

Normal tenglamasi: $y - 1 = -\frac{1}{4}(x - 1)$ yoki $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

Mavzu: Differensiallanuvchi funksiyalar haqida ba'zi teoremlar

Ferma teoremasi. $(a; b)$ intervalda aniqlangan $y = f(x)$ funksiya shu intervalning biror nuqtasida eng katta va eng kichik qiymatlaridan birini qabul qilsin. U holda funksiya shu nuqtada hosilaga ega bo'lsa funksiyaning hosilasi nolga teng bo'ladi.

Isboti. Aniqlik uchun funksiya $(a; b)$ intervalning $x=c$ nuqtasida o'zining eng katta qiymatiga erishadi va $f(c)=M$ deb olib $f'(c)=0$ ekanini ko'rsatamiz.

$$\text{Hosilaning ta'rifiga ko'ra } f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

c nuqtada funksiya eng katta qiymatiga ega bo'lganligi sababli istalgan musbat yoki manfiy Δx uchun $f(c) \geq f(c+\Delta x)$ yoki $f(c+\Delta x) - f(c) \leq 0$ bo'ladi.

Bundan, $\Delta x > 0$ bo'lganda $\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$ bo'lib, bundan

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \quad \text{kelib chiqadi. Agar } \Delta x < 0 \text{ bo'lganda}$$

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \quad \text{va } f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \quad \text{kelib chiqadi. Shunday qilib}$$

$f'(c)$ hosila musbat ham bo'la olmaydi va manfiy ham bo'la olmaydi. Demak,

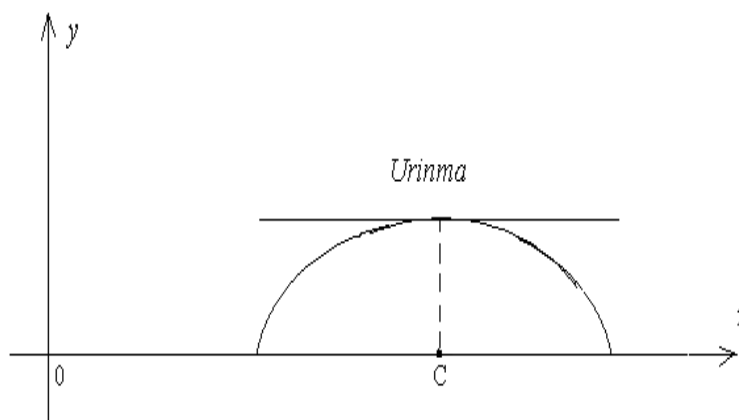
$$f'(c) = 0$$

Ferma teoremasiga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. $f'(c)=0$ tenglikdan hosilaning geometrik ma'nosini hisobga olsak $\tan \alpha = 0$ yoki $\alpha = 0$ kelib chiqadi, bunda α $y = f(x)$ egri chiziqqa $M(c; f(c))$ nuqtasida o'tkazilgan urinmaning Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchagi. Demak, egri chiziqning $M(c; f(c))$ nuqtasida o'tkazilgan urinma Ox o'qqa parallel bo'lar ekan (107-chizma).

Roll teoremasi. Agar $y = f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz, $(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi, kesmaning oxirlarida nolga teng ($f(a) = f(b) = 0$) qiymatlarni qabul qilsa, u holda $(a; b)$ intervalda kamida bitta $x=c$ nuqta mavjud bo'lib unda hosila nolga teng, ya'ni $f'(c)=0$ bo'ladi.

Isboti. Shartga binoan $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lgani uchun u shu kesmada o'zining eng katta M va eng kichik m qiymatlarini qabul qiladi (teorema).

Agar $M=m$ bo'lsa $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada o'zgarmas bo'lib uning hosilasi $f'(x)$ kesmaning barcha nuqtalarida nolga teng bo'ladi. $M \neq m$ bo'lsin.



107-chizma

U holda $f(a) = f(b) = 0$ bo'lgani uchun m va M dan kamida bittasi, masalan $M \neq 0$ bo'ladi. Funksiya $x=c$ nuqtada o'zining eng katta M qiymatiga erishsa bu nuqta $[a; b]$ kesmaning ichki nuqtasi bo'ladi, chunki kesmaning

oxirlarida $f(a) = f(b) = 0$. Demak, Ferma teoremasiga binoan $f'(c) = 0$ kelib chiqadi.

Bu teoremaga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. Teoremaning shartlari bajarilganda $(a; b)$ intervalda kamida bitta $x=c$ ($a < c < b$) nuqta topilib $y = f(x)$ egri chiziqqa uning $M(c; f(c))$ nuqtasida o'tkazilgan urinma Ox o'qqa parallel bo'ladi.

1-misol. $f(x) = \cos x$ funksiya $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ kesmada Roll teoremasi unga qo'ygan

barcha shartlarni qanoatlantiradi. Bu funksiyaning $f'(x) = -\sin x$ hosilasi $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

kesmaning $x = \pi$ nuqtasida nolga teng. Demak, $f(x) = \cos x$ egri chiziqqa $M(\pi; -1)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma Ox o'qqa parallel bo'lar ekan.

1-izoh. $f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalning aqalli birorta nuqtasida hosilaga ega bo'lmaganda funksiyaning hosilasi $(a; b)$ intervalning hech bir nuqtasida 0 ga aylanmasligi mumkin.

Masalan, $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ funksiya $[-1; 1]$ kesmada uzluksiz va kesmaning chetlarida $f(-1) = f(1) = 0$. Ammo $y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$ hosila $(-1; 1)$ intervalning hech bir nuqtasida 0 ga aylanmaydi. Buning sababi funksiyaning hosilasi $x=0$ nuqtada mavjud emas. Bu holda $[-1; 1]$ kesmada Ox o'qqa parallel urinma mavjud bo'lmaydi (108-chizma).

2-izoh. Roll teoremasi. $f(a) = f(b)$ shart bajarilganda ham o'z kuchini saqlaydi.

Lagranj teoremasi (chekli orttirmalar haqida). Agar $y = f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz, $(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $(a; b)$ intervalda kamida bitta $x=c$ ($a < c < b$) nuqta topilib bu nuqtada

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad (1)$$

tenglilik bajariladi.

Isboti.

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad (b$$

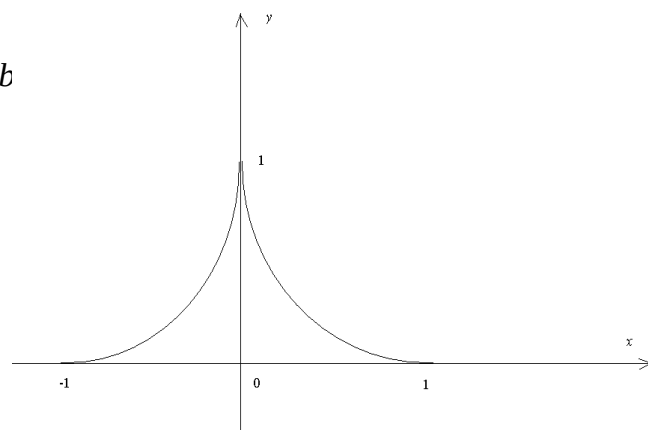
yordamchi funksiyaning qaraymiz. Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi, ya'ni u $[a; b]$ kesmada uzluksiz, $(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi va

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

,

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0$$

.



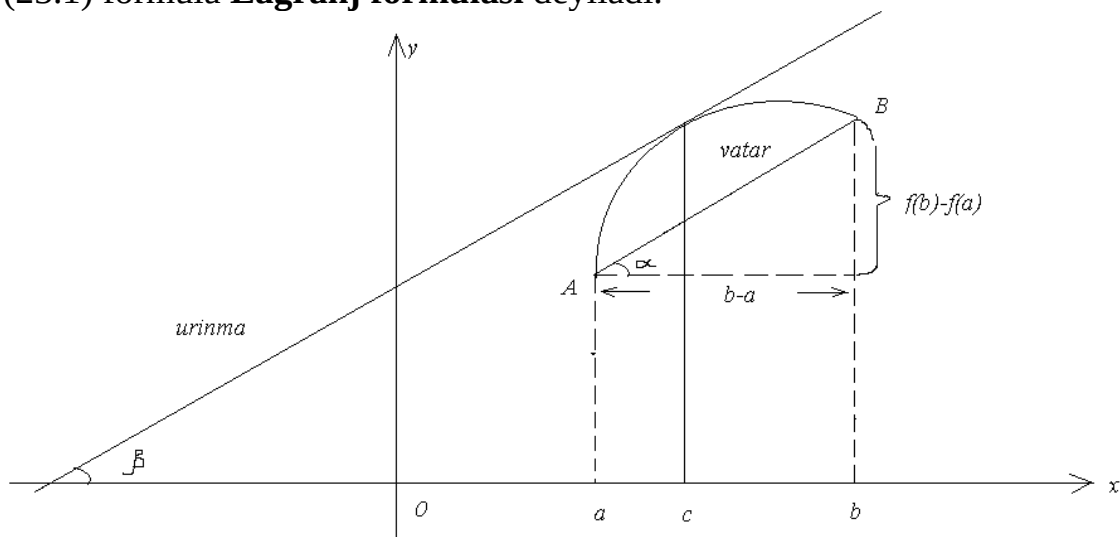
108-chizma

Shu sababli Roll teoremasiga ko'ra $(a; b)$ intervalda kamida bitta $x=c$ nuqta mavjud bo'lib, unda $F'(c)=0$ bo'ladi. $F'(x)$ hosilani topamiz:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \text{ Demak } x=c \text{ da } F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Bundan $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ yoki $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

(23.1) formula **Lagranj formulasi** deyiladi.



109-chizma

Lagranj formulasining geometrik ma'nosi bilan tanishish maqsadida Lagranj formulasini $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ ko'rinishda yozamiz.

109-chizmadan $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \alpha$ ekani ko'rinib turibdi, bunda α burchak

AB vatarning og'ish burchagi. Ikkinchi tomondan, $f'(c) = \operatorname{tg} \beta$, bunda β -abssissasi c ga teng nuqtada $y = f(x)$ egri chiziqqa o'tkazilgan urinmaning og'ish burchagi.

Lagranj teoremasiga ko'ra $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$, bundan $\alpha = \beta$ ekani kelib chiqadi. Demak, egri chiziqda kamida bitta nuqta mavjud bo'lib, bu nuqtadagi egri chiziqqa urinma AB vatarga parallel bo'ladi. Bu Lagranj teoremasining **geometrik** ma'nosi.

Endi Lagranj formulasining boshqacha ko'rinishi bilan tanishamiz. $a = x$, $b = x + \Delta x$ deb olamiz.

U holda Lagranj formulasi

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c) \Delta x$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bunda c x bilan $x + \Delta x$ orasidagi qiymat. Agar c ni

$c = x + \theta \Delta x$ ko'rinishida tasvirlasak, bunda $0 < \theta < 1$ Lagranj formulasini

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x, \quad \theta \in (0; 1)$$

ko'rinishda yozish ham mumkin.

Agar $f(a) = f(b)$ bo'lsa (23.1) Lagranj formulasidan $f'(c) = 0$ kelib chiqadi. Bu Roll teoremasi Lagranj teoremasining xususiy holi ekanligini ko'rsatadi.

O'zgarmas funksiyaning hosilasi nolga tengligi isbotlangan edi. Lagranj teoremasidan foydalanib teskari tasdiqning ham to'g'riligini ko'rsatish mumkin,

ya'ni $[a; b]$ kesmada uzluksiz funksiya $(a; b)$ intervalda 0 ga teng hosilaga ega bo'lsa, u $[a; b]$ kesmada o'zgarmas bo'ladi.

Bundan o'z navbatida $[a; b]$ kesmada hosilalari teng bo'lgan funksiyalarning o'zlari bir-birlaridan o'zgarmas songa farq qilishi kelib chiqadi.

2-misol. $y = x^2$ parabolaning qaysi nuqtasida o'tkazilgan urinma uning $A(-1; 1)$ va $B(3; 9)$ nuqtalarini tortib turuvchi vatariga parallel bo'ladi.

Yechish. $a = -1, b = 3, f(x) = x^2$ va $f(a) = (-1)^2 = 1, f(b) = 3^2 = 9$.

$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ Lagranj formulasiga tegishli qiymatlarni qo'yib tenglamadan c ni topamiz: $9 - 1 = 2c(3 + 1); 8 = 8c; c = 1$.

Demak, parabolaning $(1; 1)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma AB vatarga parallel bo'lar ekan.

23.4. Koshi teoremasi. Agar ikkita $f(x)$ va $g(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz, $(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi bo'lib $g'(x)$ hosila intervalning hech bir nuqtasida nolga teng bo'lmasa, u holda $(a; b)$ intervalda kamida bitta $x=c$ ($a < c < b$) nuqta mavjud bo'lib unda

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (2)$$

tenglik bajariladi, bunda $g(a) \neq g(b)$. (23.2) **Koshi formulasi** deb ataladi.

Isboti. $F(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$ yordamchi funksiya Roll teoremasining shartlarini bajarishiga asoslangan. Teoremaning isboti Lagranj teoremasining isbotini takrorlagani uchun uni tekshirib ko'rishni o'quvchiga qoldiramiz.

Lagranj teoremasi Koshi teoremasining $g(x) = x$ bo'lgandagi xususiy holidir.

3-misol. $f(x) = x^3$ va $g(x) = x^2$ funksiyalar uchun Koshi formulasi yozilsin va c topilsin.

Yechish. $f'(x) = 3x^2, g'(x) = 2x, f(b) = b^3, f(a) = a^3, g(b) = b^2, g(a) = a^2, f'(c) = 3c^2, g'(c) = 2c$ bo'lgani uchun $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Koshi formulasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\frac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2} = \frac{3c^2}{2c}; \quad \frac{(b-a)(b^2 + ba + a^2)}{(b-a)(b+a)} = \frac{3}{2}c.$$

$$\text{Bundan, } c = \frac{2(b^2 + ba + a^2)}{3(b+a)}.$$

Mavzu: Aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidasi

$\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik

1-teorema. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtaning biror atrofida uzluksiz, a nuqtaning o'zidan tashqari shu atrofda differensiallanuvchi bo'lib, shu

atrofda $\varphi(x) \neq 0$ va $\varphi(a) = f(a) = 0$ hamda chekli yoki cheksiz $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$ limit mavjud bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ limit ham mavjud bo'ladi va

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi

Isboti. $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)}$ nisbatni qaraymiz. $f(a) = 0$, $\varphi(a) = 0$ bo'lgani uchun bu tenglik to'g'ri.

Agar x a nuqtaning atrofiga tegishli bo'lsa, u holda yuqoridagi nisbatning o'ng tomoniga Koshi teoremasini qo'llasak $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$

kelib chiqadi, bunda c a bilan x orasidagi qiymat bo'lgani uchun $x \rightarrow a$ da $c \rightarrow a$.

Shu sababli oxirgi tenglikda $x \rightarrow a$ da limitga o'tsak

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

isbotlanishi lozim bo'lgan tenglik hosil bo'ladi.

1-eslatma. Agar $f(a) = 0$, $\varphi(a) = 0$ va $f(x)$ hamda $\varphi(x)$ hosilalar 24.1- teorema shartlarini qanoatlantirsa, u holda teoremani $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ nisbatga ikkinchi

marta qo'llash mumkin. Ya'ni: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ va hakoza.

1-misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$

2-misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \left(\frac{0}{0} \right) =$
 $= \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$

2-eslatma. 1-teorema $x \rightarrow \infty$ da $f(x) \rightarrow 0$, $\varphi(x) \rightarrow 0$ bo'lganda ham to'g'riligicha qoladi, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Bu tenglikning to'g'riligiga $x = \frac{1}{z}$ almashtirish olib ishonch hosil qilish mumkin.

3-misol. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{2}{x}}{\frac{3}{x}} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{2}{x}} \cdot \left(\frac{2}{x} \right)'}{\left(\frac{3}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{2}{x}} \cdot \left(-\frac{2}{x^2} \right)}{-\frac{3}{x^2}} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos^2 \frac{2}{x}} =$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\cos^2 0} = \frac{2}{3}.$$

$$\textbf{4-misol.} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^m - a^m)'}{(x^n - a^n)'} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{ma^{m-1}}{na^{n-1}} = \frac{m}{n} a^{m-n}.$$

$$\begin{aligned} \textbf{5-misol.} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15} \left(\frac{0}{0} \right) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 5x^2 + 2x + 8)'}{(x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 10x + 2}{4x^3 - 6x^2 - 32x + 2} = \frac{3 \cdot 1 - 10 \cdot (-1) + 2}{4 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot 1 - 32 \cdot (-1) + 2} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslik

Ushbu teoremani isbotsiz keltiramiz.

2-teorema. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtaning biror atrofida uzluksiz, differensiallanuvchi ($x=a$ nuqtaning o'zidan tashqarida) bo'lsa hamda shu atrofda $\varphi(x) \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$ bo'lsa va chekli yoki cheksiz

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ limit mavjud bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ limit ham mavjud bo'ladi va

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

tenglik to'g'ri bo'ladi.

Bu teorema $x \rightarrow \infty$ da ham o'z kuchini saqlaydi.

$$\textbf{6-misol.} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0$$

$$\textbf{7-misol.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$\textbf{8-misol.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

3-eslatma. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ tenglikning o'ng tomonidagi chekli yoki

cheksiz limit mavjud bo'lsa uning chap tomonidagi limit ham mavjud bo'ladi. O'ng tomonidagi limitning mavjud bo'lmasligidan uning chap tomonidagi limitning mavjud bo'lmasligi kelib chiqmaydi.

$$\textbf{9-misol.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} \text{ limitni toping.}$$

Yechish. Lopital qoidasini qo'llaymiz:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \cos x)$$

$x \rightarrow +\infty$ da $1 + \cos x$ ifoda 0 bilan 2 orasida tebranadi, ya'ni $x \rightarrow +\infty$ da $1 + \cos x$ ifodaning limiti mavjud emas. Shu sababli Lopital qoidasini qo'llab bo'lmaydi.

Izlanatgan limitni boshqa yo'l bilan topamiz.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 1 + 0 = 1.$$

3. $\infty - \infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik. Bunday aniqmaslikni ochish deyilganda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$, bir xil ishorali cheksizlik bo'lganda

$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - \varphi(x))$ limitni topish tushiniladi. Bunday aniqmasliklar $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishga keltirilib keyin Lopital qoidasidan foydalaniladi. Bunda $a = \infty$ bo'lishi ham mumkin.

10-misol. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$ limitni toping.

Yechish. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 - \ln x}{(x-1) \ln x} \left(\frac{0}{0} \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1 - \ln x)'}{((x-1) \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x \ln x + x - 1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x + x - 1} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(x \ln x + x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}.$$

4. $0 \cdot \infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik. Bunday aniqmaslikni ochish deyilganda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$ bo'lganda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \varphi(x)$ limitni topish tushiniladi.

Agar $f(x) \cdot \varphi(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$ yoki $f(x) \cdot \varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$

ko'rinishda yozilsa $0 \cdot \infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishga keltiriladi. Bunda $a = \infty$ bo'lishi ham mumkin.

11-misol. $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 0$ (6-misolga qarang).

5. 1^∞ ko'rinishdagi aniqmaslik. Bunday aniqmaslikni ochish deyilganda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$ bo'lganda $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)}$ limitni topish tushiniladi.

Agar $[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x) \ln f(x)}$ (α) ko'rinishda tasvirlansa 1^∞ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish $0 \cdot \infty$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochishga keltiriladi. Bunda (a) $= \infty$ bo'lishi ham mumkin.

12-misol. $\lim_{x \rightarrow +0} (1 + mx)^{\frac{1}{x}}$ limitni hisoblang.

Yechish. $\lim_{x \rightarrow +0} (1 + mx)^{\frac{1}{x}} (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x} \ln(1+mx)} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} \ln(1+mx)} =$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1+mx)}{x} \left(\frac{0}{0} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{m}{1+mx}}{1}} = e^m.$$

6. 0^0 ko'rinishdagi aniqmaslik. Bunday aniqmaslikni ochish deyilganda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ bo'lganda $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)}$ limitni topish tushiniladi. Bu holda ham yuqoridagi (α) tenglikdan foydalaniladi. Bunda $a = \infty$ bo'lishi ham mumkin.

13-misol. $\lim_{x \rightarrow +0} x^x (0^0) = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x} = e^0 = 1.$

7. ∞^0 ko'rinishdagi aniqmaslik. Bunday aniqmaslikni ochish deyilganda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ bo'lganda $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)}$ limitni topish tushiniladi. Bunda $a = \infty$ bo'lishi ham mumkin.

14-misol. $\lim_{x \rightarrow +0} (-\ln x)^x (\infty^0) = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\ln(-\ln x)^x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\lim_{x \rightarrow +0} x \ln(-\ln x)}.$

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \cdot \ln(-\ln x) (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(-\ln x)}{\frac{1}{x}} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln(-\ln x))'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{-\ln x} \cdot \left(-\frac{1}{x} \right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{\ln x} = 0.$$

Demak $\lim_{x \rightarrow +0} (-\ln x)^x = e^0 = 1.$

4-eslatma. 1^∞ , 0^0 va ∞^0 ko'rinishdagi aniqmasliklar $[f(x)]^{\varphi(x)}$ ifodani logarifmlab $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmasliklardan birortasiga keltiriladi.

Shunday qilib, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , ∞^0 , 0^0 ko'rinishdagi aniqmasliklar $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishga keltirilib keyin Lopital qoidasidan foydalanilar ekan.

Isbotlangan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$ ajoyib limitlarni Lopital qoidasidan foydalanib isbotlashni o'quvchiga tavsiya qilamiz.

Mavzu: Teylor va Makloren formulalari

1.Teylor formulasi. Matematik analizning muhim formulalaridan biri bilan tanishamiz. Bu formula matematik analizning o'zida ham shunga o'xshash matematikaga yaqin boshqa fanlarda ham ko'p sonli tadbirlarga ega. $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ ko'rinishdagi funksiyani **ko'phad** deb atadik, bundagi n —natural son ko'p hadning darajasi. Ko'p had istalgan tartibli hosilalarga ega ekanligi ko'rinib turibdi. Endi teskari masalani qaraymiz, ya'ni bir qancha hosilalarga ega bo'lgan funksiyani ko'p had ko'rinishida tasvirlash mumkinmi? Bu savolga qo'yidagi Teylor (1685-1731) teoremasi javob beradi.

1-teorema. $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada va uning biror atrofida $(n+1)$ —tartibgacha hosilalarga ega ($(n+1)$ —hosila ham kiradi) bo'lib, x shu atrofga tegishli

va a dan farqli ixtiyoriy nuqta bo'lsin. U holda a bilan x orasida shunday z nuqta topilib

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (25.1)$$

formula o'rinli bo'ladi. Bunda $n!$ orqali 1 dan n gacha natural sonlarning ko'paytmasi belgilangan, ya'ni $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ (o'qilishi: en faktorial). Masalan, $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ va hakoza. Umumiy qonuniyatni saqlab qolish maqsadida $0! = 1$ deb olinadi.

Isboti. $\varphi(x, a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

belgilashni kiritamiz. Bu ko'phad $f(x)$ funksiyaning $(x-a)$ ning darajalari bo'yicha **Taylor ko'phadi** deyiladi. $f(x) - \varphi(x, a) = R_{n+1}(x)$ deb belgilaymiz. Agar

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad a < z < x$$

ekanligini ko'rsata olsak teorema isbot bo'ladi, bunda z a bilan x orasidagi qiymat x ning qaralayotgan atrofga tegishli ixtiyoriy qiymatini olamiz. Aniqlik uchun $x > a$ deb hisoblaymiz. $[a, x]$ kesmada o'zgaruvchi miqdorni t orqali belgilab

$$F(t) = f(x) - \varphi(x, t) - \frac{(x-t)^{n+1} R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} \quad (2)$$

yordamchi funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $[a, x]$ kesmada Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi: 1) (25.2) formuladan hamda teoremda $f(x)$ ga qo'yilgan shartlarga binoan $F(t)$ funksiya $[a, x]$ kesmada uzluksiz va differensiallanuvchi, chunki $f(t)$ funksiya n - tartibgacha uzluksiz hosilalarga ega;

2) (2) formulaga $t=a$ qiymatini qo'ysak

$$F(a) = f(x) - \varphi(x, a) - R_{n+1}(x) = R_{n+1}(x) - R_{n+1}(x) = 0$$

va unga $t=x$ qiymatni qo'ysak

$$F(x) = f(x) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(x-x) - \frac{f''(x)}{2!}(x-x)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x)^n - \frac{(x-x)^{n+1} R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0$$

kelib chiqadi. Demak $F(a)=F(x)$. Roll teoremasiga ko'ra (a, x) intervalda shunday z nuqta topilib funksiyaning bu nuqtadagi hosilasi nolga teng, ya'ni $F'(z)=0$. $F'(t)$ hosilani hisoblaymiz. (2) tenglikka $\varphi(x, t)$ o'rniga qiymatni qo'yib, keyin hosil bo'lgan tenglikni t bo'yicha differensiallasak

$$F'(t) = -f'(t) + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}2 \cdot (x-t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

yoki o'xshash hadlar qisqartirilgandan so'ng

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} \text{ hosil bo'ladi. Bunga } t=z \text{ qiymatni qo'yib}$$

$F'(z)=0$ ekanligini hisobga olsak

$$F'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n + \frac{(n+1)(x-z)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0; \quad \frac{(n+1)R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!};$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!(n+1)}(x-a)^{n+1}.$$

Bundan $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. Teorema isbot bo'ladi.

(1) formula **Taylor formulasi** deb ataladi, $R_{n+1}(x) = f(x) - \phi(x, a)$ esa Taylor formulasining **qoldiq hadi** deb ataladi. $R_{n+1}(x)$ qoldiq hadining turli shakllari mavjud bo'lib teoremada keltirilgan $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ shakli qoldiq hadning

Lagranj shakli deb ataladi.

$R_{n+1}(x)$ qoldiq hadni boshqacharoq ko'rinishda yozish ham mumkin. $z \in (a, x)$ bo'lgani uchun $(0, 1)$ intervalda shunday θ son mavjud bo'lib $z = a + \theta(x-a)$ tenglik o'rinli bo'ladi. U holda $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, $0 < \theta < 1$ ko'rinishga ega bo'ladi.

Makloren formulasi. (25,1) Taylor formulasining $a=0$ bo'lgandagi xususiy ko'rinishi

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x) \quad (3)$$

Makloren (1698-1746) **formulasi** deyiladi. Bunda $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1}$ yoki

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1 \text{ va } z \text{ 0 bilan } x \text{ orasidagi qiymat.}$$

(1) va (3) formulalardan ko'rinib turibdiki qoldiq had $R_{n+1}(x)$ qanchalik kichik bo'lsa $f(x)$ funksiya shu funksiyaning Taylor ko'phadiga shunchalik yaqinlashar ekan.

Endi ba'zi-bir muhim elementar funksiyalarning Makloren formulalari bilan tanishamiz.

$f(x)=e^x$ funksiyani Makloren formulasi bo'yicha yoyish

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n+1)}(x) = e^x \text{ bo'lgani uchun}$$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^n(0) = 1$$

bo'lib (25.3) Makloren formulasi qo'yidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (4)$$

Bu formula istalgan $x \in (-\infty, +\infty)$ uchun o'rinli. Endi shu yoyilmadan foydalanib e sonni istalgan aniqlikda hisoblash mumkinligini ko'rsatamiz. Agar e^x funksiyani uning Taylor ko'phadi bilan almashtirsak

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad (5)$$

taqribiy tenglikka ega bo'lamiz, bunda absolyut xato

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} |x|^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Agar e^x funksiya $[-1;1]$ kesmada qaralsa

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}, \quad (6)$$

chunki $2 < e < 3$. (5) ra $x=1$ qiymatini qo'ysak e ning qiymatini taqribiy hisoblash uchun $e^x \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

formulaga ega bo'lamiz, bunda absolyut xato $\frac{3}{(n+1)!}$ dan kichik. Agar e ning qiymatini 0,001 aniqlikda hisoblash talab etilsa, $n \cdot \frac{3}{(n+1)!} < 0,001$ tengsizlikdan

aniqlanadi, ya'ni $(n+1)! > \frac{3}{0,001} = 3000$ yoki $7! = 5040 > 3000$ bo'lgani uchun $n=6$

deb olish mumkin, ya'ni $e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 2,718$

Shunday qilib, Makloren formulasidan foydalanib e sonni istalgan aniqlikda hisolash mumkin ekan. (5) va (6) formulalarga asoslangan e sonni hisoblash algoritmi EHM da osonlikcha amalga oshiriladi.

$f(x)=\sin x$ funksiyaning Makloren formulasi bo'yicha yoyish

$$f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, \dots, f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right).$$

$$f(0) = \sin 0 = 0, f'(0) = \cos 0 = 1, f''(0) = -\sin 0 = 0, f'''(0) = -\cos 0 = -1, \dots, f^{(n)}(0) = \sin n \cdot \frac{\pi}{2} =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ juft son bo'lsa,} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n \text{ toq son bo'lsa.} \end{cases}$$

$$f^{(n+1)}(z) = \sin\left(z + (n+1) \frac{\pi}{2}\right), \text{ bunda } z \text{ 0 bilan } x \text{ orasidagi qiymat.}$$

Topilgan qiymatlarni (3) Makloren formulasiga qo'yib $\sin x$ uchun ushbu yoyilmani hosil qilamiz.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin\left(z + (2n+1) \frac{\pi}{2}\right). \quad (7)$$

Bu formula istalgan $x \in (-\infty, +\infty)$ uchun to'g'ridir. Bu formuladan foydalanib $\sin x$ funksiya istalgan qiymatini istalgan aniqlikda hisoblash mumkin.

1-misol. $\sin 10^0$ ning taqribiy qiymati 0,00001 gacha aniqlikda hisoblansin.

Yechish. Burchakning radian o'lchoviga o'tilsa

$$x = 10^0 = \frac{\pi}{18}$$

bo'ladi. Agar $\sin x$ funksiyaning Teylor ko'phadiga almashtirsak

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

hosil bo'ladi. Bunga $x = \frac{\pi}{18}$ qiymatini qo'yamiz.

$$\sin 10^\circ = \sin \frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^5 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(2n-1)!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^{2n-1}.$$

Bu holda xatolik:

$$|R_{2n+1}| = \left| \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^{2n+1} \cdot \sin \left(z + (2n+1) \frac{\pi}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^{2n+1} < 0,00001.$$

$$\text{Agar } n=1 \text{ bo'lsa, u holda } |R_3| \leq \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^3 = 0,00089 > 0,00001.$$

$$\text{Agar } n=2 \text{ bo'lsa, u holda } |R_5| \leq \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^5 = 0,0000013 < 0,00001.$$

Demak taqribiy formulaning dastlabki ikkita hadi olinsa hisoblashning talab qilingan aniqligiga erishiladi:

$$\sin 10^\circ \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^3 = 0,17453 - 0,00089 = 0,17364.$$

$f(x)=\cos x$ funksiyani Makloren formulasi bo'yicha yoyish

$f(x)=\cos x$ funksiyaning $x=0$ dagi ketma-ket hosilalarini topish va Makloren formulasiga qo'yish bilan qo'yidagi yoyilmani hosil qilamiz.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos(z + (n+1)\pi). \quad (8)$$

Endi qoldiq hadni baholash imkonini beradigan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \text{ tenglik } x \text{ ning har qanday aniq qiymatida to'g'ri ekanligini}$$

ko'rsatamiz. $\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \dots \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1} \right|$ ga egamiz. Agar x aniq son bo'lsa u holda shunday N natural son topilib

$$|x| < N$$

tengsizlik barcha N dan katta n lar uchun bajariladi.

$$\frac{|x|}{N} = q \text{ belgilashni kiritamiz; u vaqtda}$$

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{x}{1} \right| \cdot \left| \frac{x}{2} \right| \dots \left| \frac{x}{N-1} \right| \left| \frac{x}{N} \right| \left| \frac{x}{n+1} \right| \dots \left| \frac{x}{n} \right| \left| \frac{x}{n+1} \right| < \frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \dots \frac{|x|}{N-1} \cdot q \cdot q \dots q \cdot q = \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!} q^{n-N+2},$$

$$\text{chunki } \left| \frac{x}{N} \right| = q, \left| \frac{x}{N+1} \right| < q, \dots, \left| \frac{x}{n+1} \right| < q.$$

$$\text{Ammo } \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!} \text{ miqdor o'zgarmas ya'ni } n \text{ ga bog'liq emas, } 0 < q < 1 \text{ bo'lgani}$$

uchun $n \rightarrow \infty$ da q^{n-N+2} nolga intiladi. Shuning uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Demak, $n \rightarrow \infty$ da e^x , $\sin x$, $\cos x$ funksiyalarning yoyilmalaridagi qoldiq hadlarning barchasi 0 ga intiladi, chunki $e^{\pm x} < 3$, $\left| \sin\left(z + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) \right| \leq 1$, $|\cos(z + (n+1)\pi)| \leq 1$.

$f(x) = (1+x)^\alpha$ **funksiyaning Makloren formulasi bo'yicha yoyish**

$f(x) = (1+x)^\alpha$ funksiyaning $x=0$ nuqtadagi hosilalarini hisoblaymiz, bunda α -o'zgarmas son.

$$f(x) = (1+x)^\alpha, f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \dots, f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1} \quad \text{va} \quad f(0)=1,$$

$$f'(0) = \alpha, f''(0) = \alpha(\alpha-1), f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1),$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}.$$

Hosilalarning topilgan qiymatlarini (25.3) Makloren formulasiga qo'yamiz:

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x) \end{aligned} \quad (8)$$

Xususiyl holda $\alpha = n$ natural son bo'lsa, $f^{(n+1)}(x) = 0$, demak $R_{n+1}(x) = 0$ bo'lib (8) dan **Nyuton binom formulasi**

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + x^n$$

kelib chiqadi.

2-misol. $\sqrt[4]{83}$ ning taqribiy qiymatini 0,000001 gacha aniqlikda hisoblang.

Yechish. Berilgan ifodani

$$\sqrt[4]{83} = \sqrt[4]{81+2} = \sqrt[4]{81\left(1+\frac{2}{81}\right)} = 3\left(1+\frac{2}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$$

ko'rinishda yozib

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

taqribiy hisoblash formulasidan foydalaniamiz.

$$x = \frac{2}{81}, \alpha = \frac{1}{4} \text{ desak}$$

$$\sqrt[4]{83} = 3 \cdot \left(1 + \frac{2}{81}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 3 \cdot \left(1 + \frac{\frac{1}{4}}{1!} \cdot \frac{2}{81} + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!} \left(\frac{2}{81}\right)^2 + \dots + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\dots\left(\frac{1}{4}-n+1\right)}{n!} \left(\frac{2}{81}\right)^n\right)$$

yoki ba'zi hisoblashlardan keyin

$$\sqrt[4]{83} \approx 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{162} - \frac{1}{162 \cdot 108} + \frac{7}{162 \cdot 108 \cdot 486} - \dots + \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{4} - n + 1 \right)}{n!} \left(\frac{2}{81} \right)^n \right)$$

hosil bo'ladi

$$\text{Xatolik: } 3R_{n+1} = 3 \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) \left(\frac{1}{4} - 2 \right) \dots \left(\frac{1}{4} - n \right)}{(n+1)!} \left(\frac{2}{81} \right)^{n+1} (1+z)^{\frac{1}{4}-n-1}.$$

Hisoblashlarning xatoliklari $|R_n|$ ketma-ketlikni baholaymiz:

agar $n=1$ bo'lsa, u holda $|R_2| < \frac{3}{162} < 0,018518 > 0,000001$;

agar $n=2$ bo'lsa, u holda $|R_3| < \frac{3}{162 \cdot 108} < 0,0002 > 0,000001$;

agar $n=3$ bo'lsa, u holda $|R_4| < \frac{3 \cdot 7}{162 \cdot 108 \cdot 486} < 0,000003 > 0,000001$;

agar $n=4$ bo'lsa, u holda $|R_5| < \frac{3 \cdot 7}{162 \cdot 108 \cdot 486 \cdot 59} < 0,00000006 < 0,000001$.

Demak, hisoblashning talab etilgan aniqligiga erishmoq uchun R_5 dan oldin keladigan to'rtta had yig'indisini olish kifoya:

$$\sqrt[4]{83} \approx 3(1 + 0,006 \cdot 173 - 0,000057 + 0,000001) = 3,018349.$$

Shunday qilib, Makloren formulasidan foydalanib funksiyaning taqribiy qiymatini talab etilgan ε aniqlikda hisoblash uchun bu funksiyaning Teylor (Makloren) ko'phadi bilan almashtirib undagi qo'shiluvchilar soni n ni $|R_{n+1}| < \varepsilon$ tengsizlikdan aniqlash lozim ekan, bunda R_{n+1} —qoldiq had.

Endi Makloren formulasining yana bir tatbiqi, ya'ni undan foydalanib funksiyaning limitini topish usuli bilan misollarda tanishamiz.

3-misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ topilsin.

Yechish. $n=2$ bo'lganda (25.7) ga binoan

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \sin \left(z + 5 \frac{\pi}{2} \right) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cos z$$

bo'lganligi sababli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cos z - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} \cos z \right) = -\frac{1}{3!} + 0 = -\frac{1}{6}$$

kelib chiqadi.

4-misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x}$ topilsin

Yechish. (25.4) ga binoan

$$e^{\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \left(-\frac{x^2}{2} \right)^2 + \frac{1}{3!} e^{\theta x} \left(-\frac{x^2}{2} \right)^3 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} e^{\theta x},$$

(8) formulaga asosan $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cos(z + 3\pi) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} \cos z$,

hamda (7) formulaga ko'ra $\sin z = x - \frac{x^3}{3!} \sin\left(z + \frac{3\pi}{2}\right) = x + \frac{x^3}{6} \cos z$

$$\begin{aligned} \text{bo'lganligi sababli } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} e^{\theta x} - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{6!} \cdot \cos z}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{12} x^4 - \frac{x^6}{48} e^{\theta x} + \frac{x^6}{6!} \cos z}{x^4 \left(1 + \frac{x^2}{6} \cos z\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{12} - \frac{x^2}{48} e^{\theta x} - \frac{x^2}{6!} \cos z}{1 + \frac{x^2}{6} \cos z} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Mavzu: Funksiyaning o'sishi va kamayishi. Funksiyaning maksimum va minimumi

Funksiyaning o'sishi va kamayishi

O'suvchi va kamayuvchi funksiyalarga ta'rif berilgan edi. Shunday bo'lsada ularni yana bir eslaylik. $(a; b)$ intervalda (u kesma bo'lishi ham mumkin) aniqlangan $y = f(x)$ funksiyani qaraymiz. $(a; b)$ intervaldan olingan argumentning istalgan $x_1 < x_2$ qiymatlariga funksiyaning $f(x_1) < f(x_2)$ qiymatlari mos kelsa $y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda **o'suvchi** deyilar edi. Shuningdek, $(a; b)$ intervaldan olingan argumentning istalgan $x_1 < x_2$ qiymatlari uchun $f(x_1) > f(x_2)$ bo'lganda, $y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda kamayuvchi deyilar edi.

Bu yerda funksiyaning o'sish, kamayish oraliqlarini uning hosilasi yordamida aniqlash usuli bilan tanishamiz.

O'suvchi funksiyaning ta'rifiga binoan $x_2 - x_1 > 0$ bo'lganda $f(x_2) - f(x_1) > 0$ bo'ladi. Agar $x_2 - x_1 = \Delta x$, $f(x_2) - f(x_1) = \Delta y$ deb belgilasak, $\Delta x > 0$ va $\Delta y > 0$ ekanini, ya'ni orttirmalar bir xil ishorali ekanini ko'ramiz.

Shunday qilib o'suvchi funksiya uchun $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ bo'lar ekan. Shunga o'xshash

kamayuvchi funksiya uchun $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ bo'lishiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

6.1-teorema(funksiya o'suvchi bo'lishining zaruriy sharti). Agar $(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya shu intervalda o'suvchi bo'lsa, u holda bu funksiyaning hosilasi intervalning hech bir nuqtasida manfiy bo'lmasligi zarur, ya'ni $(a; b)$ intervaldagi barcha x lar uchun $f'(x) \geq 0$ bo'ladi.

Isboti. Teoremaning shartiga ko'ra $y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda o'suvchi, shu sababli istalgan $x \in (a; b)$ uchun $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$. Musbat funksiyaning limiti

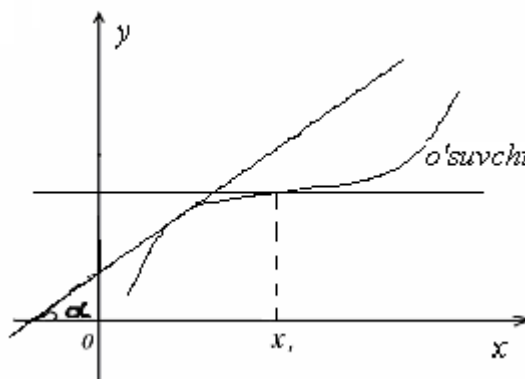
manfiy bo'la olmasligi sababli $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$. Ammo teoremaning shartiga ko'ra $f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi bo'lganligi sababli

$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ chekli limit mavjud va $(a; b)$ dagi barcha x lar uchun $f'(x) \geq 0$ bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

2-teorema(funksiya kamayuvchi bo'lishining zaruriy sharti). Agar $(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya shu intervalda kamayuvchi bo'lsa, u holda bu funksiyaning hosilasi intervalning hech bir nuqtasida musbat bo'lmasligi zarur, ya'ni $(a; b)$ intervaldagi barcha x lar uchun $f'(x) \leq 0$ bo'ladi.

Teoremani isboti kamayuvchi funksiya uchun $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ ekanini hisobga olinsa

1-teoremang isbotidagi mulohazalarni takrorlagani uchun uni isbotlashni o'quvchiga hovola etamiz. Bu teoremaga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. O'suvchi funksiyaning grafigi Ox o'q bo'ylab o'ngga harakatlenganda yuqoriga ko'tarila boradi.



110-chizma

Bu holda grafika urinma Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan o'tkir α burchakni tashkil etadi, yoki ba'zi-bir nuqtalarda y Ox o'qqa parallel bo'ladi. Masalan x_1 nuqtada $f'(x_1) = 0$ (110-chizma).

O'tkir burchakning tangensi musbat (urinma Ox ga parallel nuqtalarda nolga teng) va hosilaning geometrik ma'nosiga ko'ra $\tan \alpha = f'(x)$ bo'lgani sababli o'suvchi funksiya uchun $f'(x) \geq 0$ kelib chiqadi.

Kamayuvchi funksiyaning garfigiga urinma Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan o'tmas burchak tashkil etadi, yoki Ox ga parallel bo'ladi. O'tmas burchakning tangensi manfiylikni hisobga olib kamayuvchi funksiya uchun $f'(x) \leq 0$ tengsizlikka ega bo'lamiz (111-chizma).

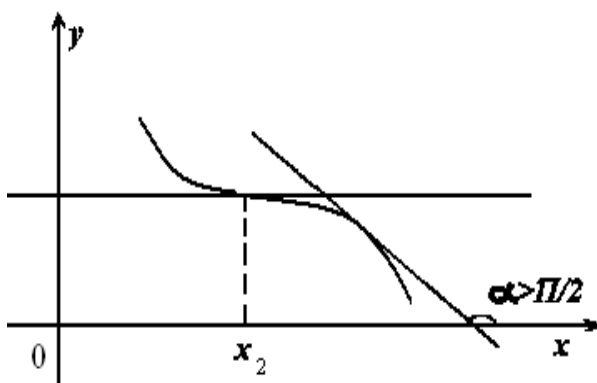
3-teorema(funksiya o'suvchi bo'lishining yetarlilik sharti). Agar $[a; b]$ kesmada uzluksiz $y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda musbat hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiya $[a; b]$ kesmada o'suvchi bo'ladi.

Isboti. Barcha $a < x < b$ uchun $f'(x) > 0$ bo'lsin. $(a; b)$ intervalga tegishli ikkita ixtiyoriy $x_1 < x_2$ qiymatlarni qaraymiz. $[x_1, x_2]$ kesma uchun Lagranjning chekli ayirmalar formulasini yozamiz:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad x_1 < c < x_2 \quad (1)$$

Teoremaning shartiga ko'ra $f'(x) > 0$. Bundan tashqari $x_2 - x_1 > 0$. Shuning uchun (26.1) tenglikdan $f(x_2) - f(x_1) > 0$ yoki $f(x_2) > f(x_1)$, ya'ni $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada o'suvchiligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

4-teorema(funksiya kamayuvchi bo'lishining zaruriy sharti). Agar $[a; b]$



111-chizma

kesmada uzluksiz $y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda manfiy hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiya $[a; b]$ kesmada kamayuvchi bo'ladi.

$[a; b]$ kesmada faqat o'suvchi (faqat kamayuvchi) funksiya shu kesmada monoton o'suvchi (monoton kamayuvchi) funksiya deb atalar edi.

Funksiya faqat o'suvchi yoki faqat kamayuvchi bo'ladigan intervallar uning monotonlik intervallari deyilar edi.

1-misol. $y = x^2$ funksiyaning monotonlik intervallarini aniqlang.

Yechish. y' hosilani topamiz: $y' = 2x$.

$x < 0$ da $y' < 0$ va funksiya $(-\infty; 0)$ intervalda kamayadi;

$x > 0$ da $y' > 0$ va funksiya $(0; +\infty)$ intervalda o'sadi;

2-misol. $y = 4x + \sin x$ funksiyaning monotonlik intervallarini aniqlang.

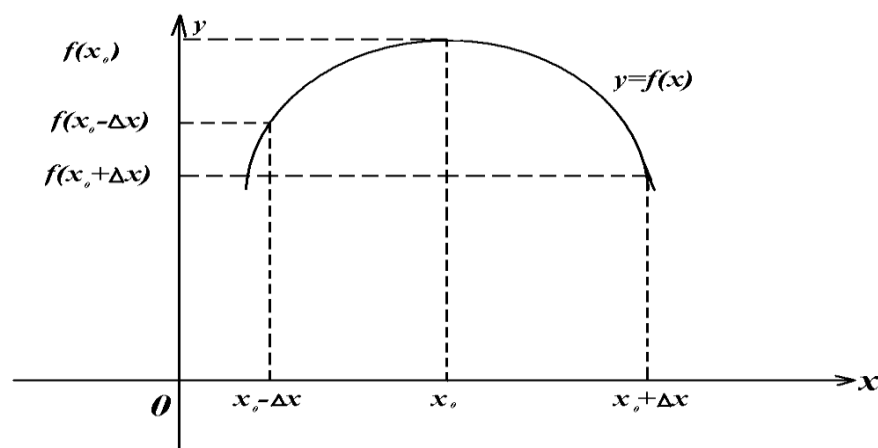
Yechish. y' hosilani topamiz: $y' = 4 + \cos x$. Barcha $x \in (-\infty; +\infty)$ uchun $y' > 0$ bo'lganligi sababli berilgan funksiya $(-\infty; +\infty)$ intervalda o'sadi.

2. Funksiyaning maksimum va minimumi

x_0 nuqtada va uning atrofida aniqlangan $y = f(x)$ funksiyaning qaraymiz.

1-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati shu funksiyaning bu nuqtaning yetarlicha kichik atrofida qolgan qiymatlaridan katta bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada **maksimum** (maximum)ga ega deyiladi.

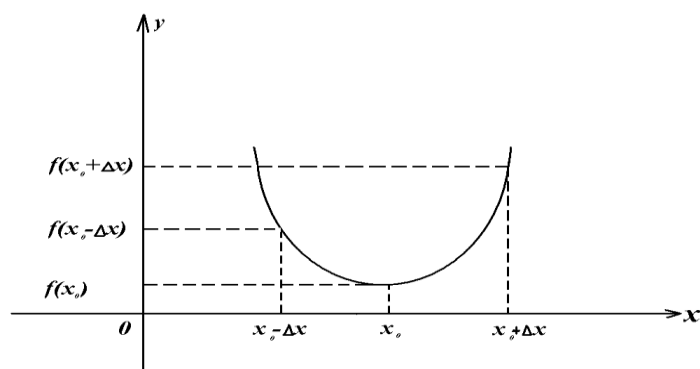
Boshqacha aytganda, agar har qanday yetarlicha kichik musbat yoki manfiy Δx larda $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega deyiladi ($\Delta x > 0$ da 112-chizma). Bu holda x_0 funksiyaning maksimum nuqtasi deyiladi.



112-chizma

2-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati shu funksiyaning bu nuqtaning yetarlicha kichik atrofida qolgan qiymatlaridan kichik bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada **minimum** ga ega deyiladi.

Boshqacha aytganda, agar har qanday yetarlicha kichik musbat yoki manfiy Δx larda $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega deyiladi ($\Delta x > 0$ da 113-chizma). Bu holda x_0 funksiyaning minimum nuqtasi deb ataladi.

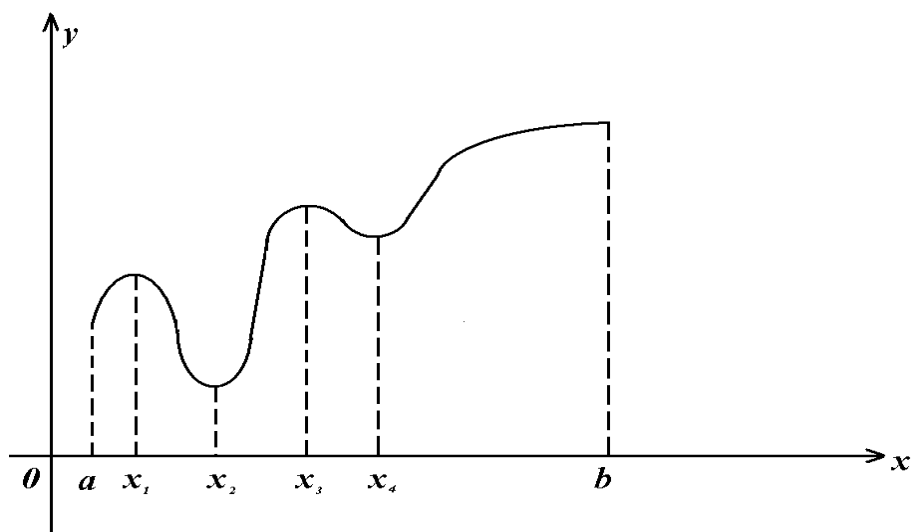


113-chizma.

Masalan, $y = x^2$ funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega, chunki $x=0$ bo'lganda $y=0$ va x ning boshqa qiymatlarida $y>0$.

1-eslatma. $[a; b]$ kesmada aniqlangan funksiya o'zining maksimum va minimum qiymatlariga x ning shu kesma ichidagi qiymatlaridagina erishadi. Boshqacha aytganda $f(a)$, $f(b)$ qiymatlar funksiyaning maksimum va minimum qiymatlari bo'la olmaydi.

2-eslatma. Funksiyaning $[a; b]$ kesmadagi maksimum va minimumini uning shu kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari deb qarash xato bo'ladi. Funksiyaning maksimum qiymati uning funksiya maksimumga ega nuqtaga yetarli darajada yaqin turgan hamma nuqtalaridagi qiymatlariga nisbatangina eng katta bo'ladi. Funksiyaning minimumi haqida ham shunga o'xshash gaplarni aytish mumkin.



114-chizma

Funksiyaning maksimumi uning minimumidan har doim katta bo'ladi deb o'ylash noto'g'ri. 114-chizmada $[a; b]$ kesmada aniqlangan funksiya tasvirlangan. Bu funksiya:

$x = x_1$ va $x = x_3$ nuqtalarda maksimumga ega; $x = x_2$ va $x = x_4$ nuqtalarda minimumga ega; lekin funksiyaning $x = x_4$ nuqtadagi minimumi uning $x = x_1$ nuqtadagi maksimumidan katta. Funksiyaning $x = b$ nuqtadagi qiymati uning $[a; b]$ kesmadagi eng katta qiymati bo'ladi.

Funksiyaning maksimumlari va minimumlari funksiyaning ekstremumlari yoki ekstremal qiymatlari deyiladi.

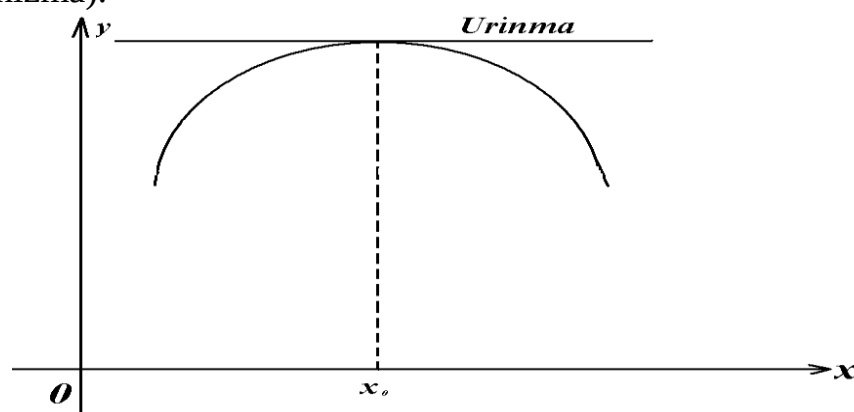
Agar x_0 nuqtada funksiyaning ekstrimumga ega bo'lsa u holda bu nuqta funksiyaning **ekstrimum** nuqtasi deyiladi.

Izoh. Biror oraliqda faqat o'suvchi(faqat kamayuvchi) funksiya shu oraliqda ekstrimumga ega bo'lmaydi.

3. Ekstremum mavjudligining zaruriy sharti.

5-teorema. Agar differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstrimumga ega bo'lsa, u holda uning shu nuqtadagi hosilasi nolga teng bo'lishi zarur, ya'ni $f'(x) = 0$ bo'ladi.

Isboti. Aniqlik uchun funksiyaning x_0 nuqtada maksimumga ega deb faraz qilamiz(115-chizma).



115-chizma

1) U holda $x < x_0$ lar uchun funksiya o'suvchi va $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$,
demak, $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$

2) $x > x_0$ lar uchun funksiya kamayuvchi va $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, demak, $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$
 $f'(x_0) \geq 0$ va $f'(x_0) \leq 0$ munosabatlardan $f'(x_0) = 0$ kelib chiqadi.

Teoremaning geometrik mazmuni shuni bildiradiki, differensiallanuvchi funksiya uchun ekstrimum nuqtalarida urinma Ox o'qqa parallel bo'ladi.

Biz shu paytgacha funksiya ekstrimumga ega bo'lgan nuqtalarda differensiallanuvchi deb faraz qildik.

Funksiya hosilaga ega bo'lmagan yoki hosilasi cheksiz bo'lgan nuqtalarda ham funksiya ekstrimumga ega bo'lishi mumkin.

3-misol. $y = |x|$ funksiya butun son o'qida uzluksiz bo'lib $x=0$ nuqtada hosilaga ega emasligi isbotlangan edi. Bu nuqtada funksiya minimumga ega (100-chizma).

4-misol. $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ funksiyaning hosilasi $y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ $x=0$ nuqtada

cheksizlikka aylanadi. Funksiya $x=0$ nuqtada maksimumga ega (108-chizma).

Shunday qilib funksiya ekstrimumga ega bo'lgan nuqtalarda funksiyaning hosilasi yo nolga teng, yoki cheksizlikka teng yoki mavjud bo'lmas ekan. Bunday

nuqtalar funksiyaning **kritik(statsionar)** nuqtalari deyiladi. Demak funksiya ekstremal qiymatlarini faqatgina o'zining kritik nuqtalarida qabul qilishi mumkin.

Teskari tasdiq o'rinli emas, ya'ni nuqtaning kritik nuqta ekanligidan shu nuqtada funksiyaning ekstremumga ega ekanligi kelib chiqmaydi. Masalan, $y = x^3$ funksiyaning hosilasi $y' = 3x^2$ $x=0$ nuqtada nolga aylanadi. Ammo bu nuqtada funksiya ekstremumga ega emas, chunki u o'suvchi ($y' \geq 0$).

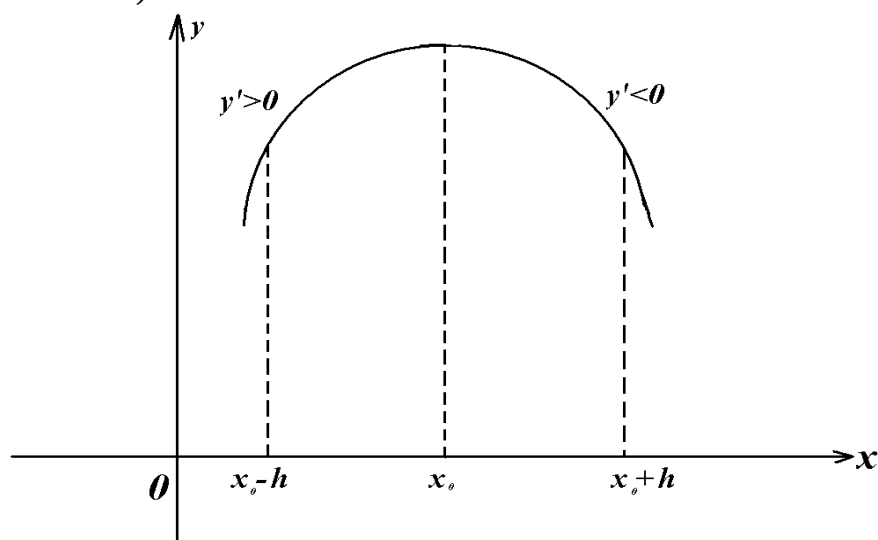
Ekstremum mavjudligining yetarlilik sharti

6-teorema(ekstremum mavjudligining birinchi yetarlilik sharti). $f(x)$ funksiya kritik nuqta x_0 ni o'z ichiga olgan birorta intervalda uzluksiz va shu intervalning barcha (balki x_0 nuqtaning o'zidan boshqa) nuqtalarida differensiallanuvchi bo'lsin. Agar shu nuqtaning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tishda hosilaning ishorasi plusdan minusga o'zgarsa, funksiya $x = x_0$ kritik nuqtada maksimumga ega bo'ladi. Agar $x = x_0$ nuqtaning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tishda hosilaning ishorasi minusdan plusga o'zgarsa, funksiya bu nuqtada minimumga ega bo'ladi.

Isboti. x_0 -kritik nuqta bo'lib uning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tishda $f'(x)$ hosila ishorasini plusdan minusga o'zgartirsin, ya'ni x_0 nuqtaning chapida hosila musbat, uning o'ngida hosila manfiy bo'lsin. Demak shunday yetarlicha kichik musbat $h > 0$ son mavjud bo'lib $(x_0 - h, x_0)$ intervalda funksiyaning hosilasi $f'(x) > 0$ va $(x_0, x_0 + h)$ intervalda hosila $f'(x) < 0$ bo'ladi.

Funksiyaning o'sishi va kamayishi haqidagi teoremaga binoan $[x_0 - h, x_0]$ kesmada funksiya o'sadi, $[x_0, x_0 + h]$ kesmada esa u kamayadi.

Demak, $[x_0 - h, x_0 + h]$ kesmaga tegishli barcha x lar uchun $f(x) < f(x_0)$ bo'ladi. Bu $f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada maksimumga ega ekanligini ko'rsatadi(116-chizma).



116-chizma

Teoremaning ikkinchi qismi ham shunga o'xshash isbotlanadi(117-chizma).

Izoh. $x = x_0$ kritik nuqtaning bir tomonidan ikkinchi tomoniga o'tishda $f'(x)$ hosila ishorasini o'zgartirmasa $x = x_0$ kritik nuqtada funksiya ekstremumga ega bo'lmaydi.

5-misol. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ funksiyaning monotonlik intervallarini va ekstremumini toping.

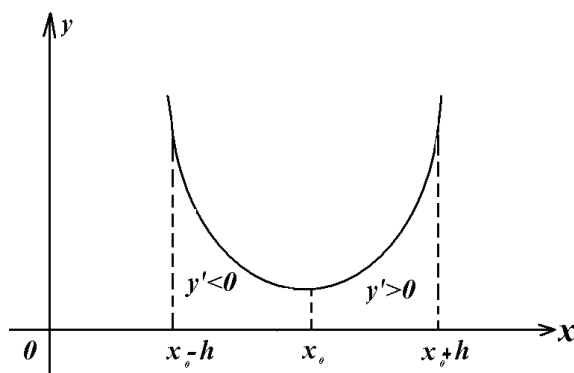
Yechish. 1) Berilgan funksiya $(-\infty; +\infty)$ intervalda aniqlangan va differensiallanuvchi.

2) Funksiyaning hosilasini topamiz: $y' = 6x^2 - 18x + 12$.

3) Kritik nuqtalarini topamiz: $6x^2 - 18x + 12 = 0$; $x^2 - 3x + 2 = 0$;

$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ - kritik nuqtalar.

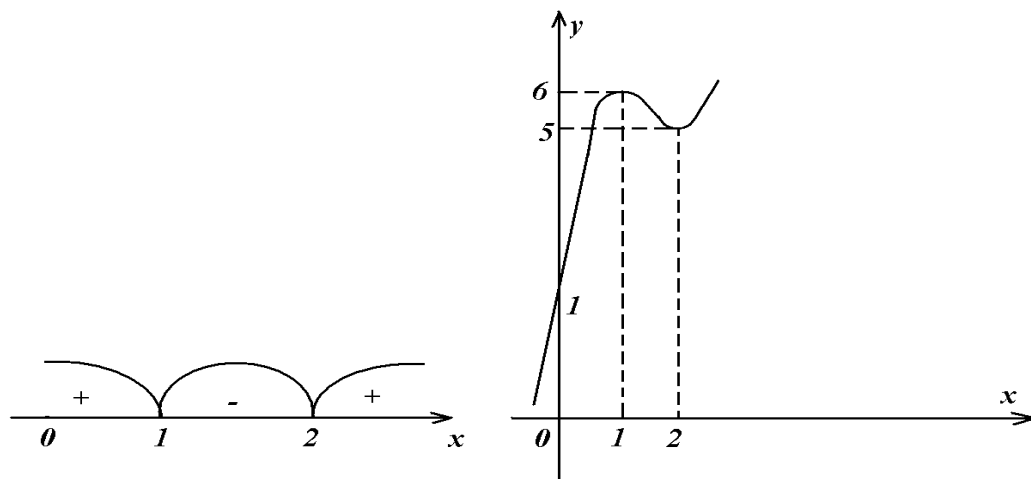
$y' = 6(x-1)(x-2)$ hosilaning ishorasini intervallar usulidan foydalanib tekshiramiz.



117-chizma

Demak, $(-\infty; 1)$ va $(2; +\infty)$ intervallarda $y' > 0$ bo'lgani uchun bu intervallarda funksiya o'sadi, $(1; 2)$ intervalda $y' < 0$ bo'lgani uchun bu intervalda funksiya kamayadi. $x=1$ kritik nuqtaning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tishda hosila ishorasini plusdan minusga o'zgartirganligi uchun $x=1$ kritik nuqtada funksiya maksimumga ega. $x=2$ kritik nuqtaning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tishda hosila ishorasini minusdan plusga o'zgartirganligi uchun bu kritik nuqtada funksiya minimumga ega (118-chizma).

$$y_{\max} = y(1) = 6, \quad y_{\min} = y(2) = 5.$$



118-chizma

Funksiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari

$[a; b]$ kesmada uzluksiz $y = f(x)$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $[a; b]$ kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatlarini qabul qilishi aytilgan edi (18.5-teorema). Agar funksiya o'zining eng katta (eng kichik) qiymatlarini $[a; b]$ kesmaning ichki nuqtasida qabul qilsa u funksiyaning $(a; b)$ intervaldagi maksimum(minimum) qiymatlaridan biri bo'ladi. Bundan tashqari funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga $[a; b]$ kesmaning oxirlarida ham erishishi mumkin.

Shunday qilib, funksiyaning $[a; b]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun quyidagi qoidaga ega bo'lamiz.

1. Funksiyaning $(a; b)$ intervaldagi barcha kritik nuqtalarini topib funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz.

2. Funksiyaning kesmaning oxirlari $x = a$, $x = b$ nuqtalardagi qiymatlari $f(a)$, $f(b)$ larni hisoblaymiz.

Topilgan qiymatlardan eng kattasi funksiyaning $[a; b]$ kesmadagi eng katta qiymati, ulardan eng kichigi funksiyaning $[a; b]$ kesmadagi eng kichik qiymati bo'ladi.

6-misol. $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 72x + 6$ funksiyaning $[2; 5]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish. 1. Funksiyaning $[2; 5]$ kesmadagi kritik nuqtalarini topamiz va bu nuqta-larda $f'(x)$ hosilani hisoblaymiz. $f'(x) = 6x^2 - 42x + 72$. $f'(x) = 0$ tenglamani yechamiz:

$6x^2 - 42x + 72 = 0$; $x^2 - 7x + 12 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ -kritik nuqtalar. Kritik nuqtalarning har ikkalasi berilgan kesmaga tegishli. Funksiyaning $x_1 = 3$ va $x_2 = 4$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(3) = 2 \cdot 3^3 - 21 \cdot 3^2 + 72 \cdot 3 + 6 = 87, \quad f(4) = 2 \cdot 4^3 - 21 \cdot 4^2 + 72 \cdot 4 + 6 = 80.$$

2. Funksiyaning $[2; 5]$ kesmaning oxirlari $x = 2$ va $x = 5$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 21 \cdot 2^2 + 72 \cdot 2 + 6 = 82, \quad f(5) = 2 \cdot 5^3 - 21 \cdot 5^2 + 72 \cdot 5 + 6 = 91.$$

Topilgan qiymatlar 82, 87, 80, 91 dan eng kichigi 80 berilgan funksiyaning $[2; 5]$ kesmadagi eng kichik qiymati, ulardan eng kattasi 91 uning shu kesmadagi eng katta qiymati bo'ladi.

Ekstremumlarni ikkinchi hosila yordamida tekshirish

Ba'zi hollarda funksiyaning ekstremumlarini uning ikkinchi hosilasi yordamida tekshirish qulay bo'ladi.

Faraz qilaylik $y = f(x)$ funksiyaning hosilasi $x = x_0$ nuqtada nolga aylansin, ya'ni $f'(x_0) = 0$ va funksiya shu nuqtada hamda uning biror atrofida ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lib, $f''(x_0) \neq 0$ bo'lsin.

7-teorema(ekstremum mavjudligining ikkinchi yetarlilik sharti).

Agar $f''(x_0) < 0$ bo'lsa $f(x)$ funksiya $x = x_0$ kritik nuqtada maksimumga ega bo'ladi, $f''(x_0) > 0$ bo'lganda $y = x = x_0$ kritik nuqtada minimumga ega bo'ladi.

Isboti. Aniqlik uchun $f''(x_0) < 0$ bo'lsin. $f(x)$ funksiya $x = x_0$ kritik nuqtada maksimumga ega ekanligini ko'rsatamiz. Ikkinchi hosilaning ta'rifiga binoan:

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}.$$

Shartga ko'ra $f'(x_0) = 0$ bo'lgani uchun

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Ammo $f''(x_0) < 0$. Shuning uchun

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} < 0.$$

limiti manfiy ifodaning o'zi ham kichik $|\Delta x|$ lar uchun manfiy bo'lganligi sababli

$$\frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} < 0$$

bo'ladi.

$\Delta x < 0$ bo'lsin, u holda $f'(x_0 + \Delta x) > 0$; agarda $\Delta x > 0$ bo'lsa, u holda $f'(x_0 + \Delta x) < 0$. Bu $x = x_0$ kritik nuqtaning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tishda hosila ishorasini plusdan minusga o'zgartirishini ko'rsatadi. Demak, ekstremum mavjudligining birinchi yetarlilik shartiga ko'ra $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada maksimumga ega.

Teoremaning ikkinchi qismi ham shunga o'xshash isbotlanadi.

7-misol. $y = x + 2\cos x$ funksiyaning $[0; 2\pi]$ kesmadagi ekstremumini toping.

Yechish. 1. Birinchi hosilani topamiz: $y' = 1 - 2\sin x$.

2. $(0; 2\pi)$ intervalga tegishli kritik nuqtalarni topamiz:

$$1 - 2\sin x = 0; \quad \sin x = \frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6}.$$

3. Ikkinchi hosilani topamiz: $y'' = -2\cos x$.

4. Ikkinchi hosilaning $x_1 = \frac{\pi}{6}$ ba $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ kritik nuqtalardagi ishoralarini

aniqlaymiz.

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\cos\frac{\pi}{6} = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} < 0, \quad f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2\cos\frac{5\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} > 0$$

26.7- teoremaga binoan berilgan funksiya $x_1 = \frac{\pi}{6}$ nuqtada maksimumga va $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ nuqtada minimumga ega bo'ladi.

$$y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3,14}{6} + \sqrt{3} \approx 2,23,$$

$$y_{\min} = y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} + 2\cos\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,78.$$

8-misol. $f(x) = x^4$ funksiyaning ekstremumini toping.

Yechish. Bu funksiya butun sonlar o'qida aniqlangan va differensiallanuvchi.

1. Hosilani topamiz: $f'(x) = 4x^3$.

2. Hosilani nolga tenglashtirib uning ildizlarini topamiz: $f'(x) = 0$;

$$4x^3 = 0; x = 0 \text{ -kritik nuqta.}$$

3. Ikkinchi hosilani topamiz: $f''(x) = 12x^2$.

Kritik nuqtada ikkinchi hosila nolga teng, ya'ni $f''(0) = 12 \cdot 0^2 = 0$. Demak, qaralayotgan hol uchun ikkinchi yetarlilik sharti ishlamaydi. Birinchi yetarlilik shartiga murojaat etib topamiz: $x < 0$ da $f'(x) < 0$ va $x > 0$ da $f'(x) > 0$. Shunday qilib, $x = 0$ kritik nuqtaning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tishda hosila ishorasini minusdan plusga o'zgartirganligi sababli $x = 0$ nuqtada funksiya minimumga ega.

Demak, kritik nuqtada ikkinchi hosila mavjud bo'lib u noldan farqli bo'lgandagina ikkinchi yetarlilik shartidan foydalanish mumkin ekan. Agar kritik nuqtada ikkinchi hosila nolga teng bo'lsa yoki mavjud bo'lmasa, u holda ikkinchi yetarlilik shartidan foydalanib bo'lmaydi.

Shunday qilib differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning ekstremumini quyidagi sxema asosida izlash maqsadga muvofiqdir.

1. Funksiyaning hosilasi $f'(x)$ topiladi.

2. Kritik nuqtalar topiladi; buning uchun: a) $f'(x) = 0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari topiladi.

b) x ning $f'(x)$ hosila mavjud bo'lmagan yoki cheksizlikka aylanadigan qiymatlari topiladi.

3. Yetarlilik shartlarining birortasidan foydalanib topilgan kritik nuqtalarning har birida funksiyaning maksimum yoki minimumga ega ekanligi yoki ekstremumning mavjud emasligi aniqlanadi.

4. $f(x)$ funksiyaning ekstrimumi mavjud kritik nuqtalaridagi qiymatlarini hisoblab uning ekstremumini topiladi.

26.7. Ekstremumlar nazariyasining masalalar yechishga tadbiqu

Ekstremumlar nazariyasi yordamida geometriya, mexanika va hokozolarga doir ko'pgina masalalar yechiladi. Shunday masalalarning ba'zilarini yechish usuli bilan tanishamiz.

1-masala. Uzunligi 120 metrlik panjara bilan bir tomondan uy bilan chegaralangan eng katta yuzga ega to'g'ri to'rtburchak shaklidagi maydon o'rab olinishi kerak. To'g'ri to'rtburchakli maydonning o'lchovlari (bo'yi va eni) aniqlansin.

Yechish. Maydonning uzunligini x , enini y , yuzini S orqali belgilaymiz. U holda to'g'ri to'rtburchakning yuzini topish formulasiga ko'ra maydonning yuzi $S = xy$ bo'ladi.

S yuz hozircha ikkita erkli o'zgaruvchilar x va y ga bog'liq. Ulardan birortasini ikkinchisi orqali ifodalash uchun masalaning shartidan foydalanamiz. Shartga ko'ra maydonning bir tomoni tayyor uy (devor) bilan, qolgan uch tomoni uzunligi 120m panjara bilan chegaralanishi lozim, ya'ni $x + 2y = 120$. Bundan

$x=120-2y$ kelib chiqadi. x ning ushbu qiymatini S yuzni topish formulasiga qo'yamiz. U holda $S=(120-2y)y=120y-2y^2$ bitta erkli o'zgaruvchining funksiyasi hosil bo'ladi. Endi shu $S(y)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

$$S'(y)=120-4y, \quad S''(y)=(120-4y)'=-4,$$

$S'(y)=0$ yoki $120-4y=0$ dan $4y=120$, $y=30$ yagona kritik nuqta kelib chiqadi.

$S''(30)=-4<0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartga ko'ra $x=30$ qiymatda funksiya maksimumga ega. Bu yagona maksimum uning eng katta qiymati ham bo'ladi. Shunday qilib bir tomoni uy bilan qolgan uch tomoni 120 m uzunlikdagi panjara bilan chegaralangan to'rtburchak shaklidagi maydonlar orasida eni $y=30$ m, bo'yi (uzunligi) $x=120-2\cdot 30=60$ m bo'lgan maydon eng katta $S=60\cdot 30\text{m}^2=1800\text{m}^2$ yuzga ega bo'lar ekan.

2-masala. 180 soni ko'paytmasi eng katta va ulardan ikkitasi 1:2 nisbatda bo'lgan uchta qo'shiluvchiga ajratilsin.

Yechish. Faraz qilaylik $180=x+y+z$ ko'rinishda tasvirlansin. Shartga ko'ra x,y,z sonlardan ikkitasi, masalan x,y 1:2 nisbatda, ya'ni $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$, $y=2x$ bo'lishi lozim. U holda $180=x+2x+z$ yoki $180=3x+z$, $z=180-3x$ hosil bo'ladi. Demak $180=x+2x+(180-3x)$ ko'rinishdagi uchta x , $2x$, $180-3x$ qo'shiluvchilarga ajratildi. Shularning ko'paytmasi

$v=x\cdot 2x\cdot (180-3x)=360x^2-6x^3$ ifodaning eng katta qiymatini topishimiz kerak. $v'(x)=720x-18x^2$; $v''(x)=720-36x$; $v'(x)=0$ yoki $720x-18x^2=0$; dan $x\cdot (720-18x)=0$; $x\neq 0$ bo'lgani uchun $720-18x=0$; $x=\frac{720}{18}=40$ kritik qiymat kelib chiqadi. $v''(40)=720-36\cdot 40<0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga binoan $x=40$ qiymatda $v=x\cdot 2x\cdot (180-3x)$ funksiya eng katta qiymatga ega bo'ladi.

Demak, $y=2x=2\cdot 40=80$, $z=180-3x=180-3\cdot 40=60$. Shunday qilib, 180 soni 40, 80, 60 sonlarning yig'indisi ko'rinishida tasvirlanganda qo'shiluvchilardan ikkitasi 1:2 nisbatda bo'lib, qo'shiluvchilarning ko'paytmasi eng katta bo'lar ekan, ya'ni $v_{\max}=40\cdot 80\cdot 60=192000$.

3-masala. Marvaridni bahosi uning massasi kvadratiga proporsional. Ishlov berish vaqtida marvarid ikki bo'lakka ajralib ketdi va natijada eng ko'p qiymatini (bahosini) yo'qotdi. Bo'laklarning massalari topilsin.

Yechish. Marvaridning massasini m , bahosini z , bo'laklarning massalarini m_1, m_2 ($m_1+m_2=m$) va ularning baholarini mos ravishda z_1, z_2 orqali belgilaymiz. U holda butun marvaridning bahosi $z=\alpha\cdot m^2$ bo'laklarning baholari esa $z_1=\alpha\cdot m_1^2, z_2=\alpha\cdot m_2^2$ bo'ladi, bunda $\alpha>0$ -proporsionallik koeffitsienti. Shartga ko'ra, butun marvaridning bahosi $z=\alpha\cdot m^2$ bilan siniq ikki bo'lak marvaridning bahosi $\alpha\cdot m_1^2+\alpha\cdot m_2^2$ orasidagi farq $y=\alpha\cdot m^2-\alpha\cdot (m_1^2+m_2^2)$ eng katta ekanligi bizga ma'lum, $m=m_1+m_2$ yoki $m_2=m-m_1$ ekanini hisobga olsak $y=\alpha\cdot m^2-\alpha\cdot (m_1^2+m_2^2)=\alpha\cdot m^2-\alpha\cdot m_1^2-\alpha\cdot (m-m_1)^2=$
 $=\alpha\cdot m^2-\alpha\cdot m_1^2-\alpha\cdot m^2+2\alpha\cdot m\cdot m_1-\alpha\cdot m_1^2=2\alpha\cdot (m\cdot m_1-m_1^2)$ kelib chiqadi. Bu yerda

α, m o'zgarmas miqdorlar, m_1 esa o'zgaruvchi miqdordir. Endi $y(m_1)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz. $y' = 2\alpha(m - 2m_1)$; $y'' = -4\alpha$. $y'(m_1) = 0$ yoki $m - 2m_1 = 0$ dan $m_1 = \frac{m}{2}$ kritik qiymat kelib chiqadi. $y''\left(\frac{m}{2}\right) = -4\alpha < 0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga ko'ra $y = 2\alpha(mm_1 - 2m_1^2)$ funksiya $m_1 = \frac{m}{2}$ qiymatda maksimumga ega bo'ladi. Demak, marvarid teng $\left(m_1 = m_2 = \frac{m}{2}\right)$ ikki bo'lakka bo'linganda o'zining eng ko'p bahosini yo'qotar ekan.

4-masala. Jism $v_0 = 60 \text{ m/sek}$ tezlik bilan tik yo'nalishda yuqoriga otilgan. Jismning eng yuqori ko'tarilish balandligi topilsin.

Yechish. Fizika kursidan ma'lumki tik yo'nalishda yuqoriga v_0 boshlang'ich tezlik bilan otilgan jismning harakat tenglamasi $H = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ bo'ladi. Bunda H -otilgan jismning yerdan balandligi, $g \approx 10 \text{ m/sek}^2$ erkin tushish tezlanishi, t esa sarflangan vaqt. Masalaning shartiga asosan $v_0 = 60 \text{ m/sek}$ va binobarin, $H = 60t - 5t^2$. Endi shu $H(t)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz. $H'(t) = 60 - 10t$; $H''(t) = -10$.

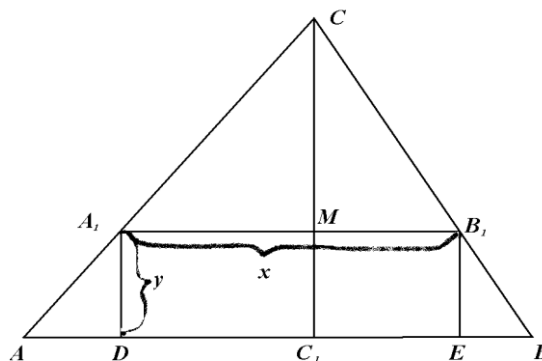
$H'(t) = 0$ yoki $60 - 10t = 0$ dan $10t = 60$, $t = 6$ kritik nuqta kelib chiqadi.

$H''(6) = -10 < 0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga asosan $t = 6$ qiymatda $H = 60t - 5t^2$ funksiya maksimumga ega bo'ladi. Demak, $H_{\max} = H(6) = 60 \cdot 6 - 5 \cdot 6^2 = 180 \text{ (m)}$.

Shunday qilib $v_0 = 60 \text{ m/sek}$ tezlik bilan yuqoriga tik otilgan jism taqriban 6 sek.dan so'ng eng yuqori $H = 180 \text{ m}$ balandlikka ko'tarilar ekan.

5-masala. Asosi a va balandligi h bo'lgan uchburchakka eng katta yuzli to'g'ri to'rtburchak ichki chizilgan. To'g'ri to'rtburchakning yuzi aniqlansin.

Yechish. ABC (119-chizma) uchburchakka ichki chizilgan to'g'ri to'rtburchakning tomonlarini x va y orqali belgilaymiz. U holda to'g'ri to'rtburchakning yuzi $S = xy$ bo'ladi.



119-chizma.

ABC va A_1B_1C uchburchaklarning o'xshashligidan $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{CM}{CC_1}$ (1)

proporsiya kelib chiqadi. Masalaning shartiga ko'ra $AB=a$, $CC_1=h$. Belgilashimizga asosan $A_1B_1=x$, $B_1E=MC_1=y$, $CM=CC_1-CM=h-y$ bo'lgani uchun (1) munosabat quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h},$$

bundan $x = \frac{a}{h}(h-y)$ kelib chiqadi. x ning ushbu qiymatini $S=xy$ ga qo'yib

$$S = \frac{a}{h}(h-y)y = \frac{a}{h}(hy - y^2) \text{ bir o'zgaruvchining funksiyasiga ega bo'lamiz.}$$

Endi shu $S(y)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

$$S'(y) = \frac{a}{h}(h-2y), \quad S''(y) = -\frac{2a}{h}.$$

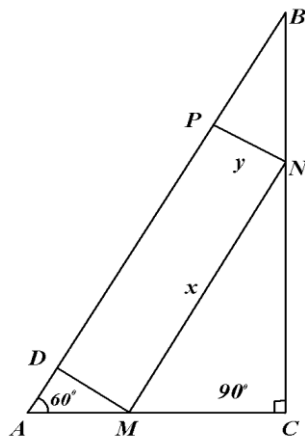
$$S'(y) = 0 \text{ yoki } \frac{a}{h}(h-2y) = 0 \text{ dan } h-2y = 0, \quad y = \frac{h}{2} \text{ kritik qiymat kelib chiqadi.}$$

$$S''\left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{2a}{h} < 0 \text{ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga ko'ra } S(y)$$

funksiya $y = \frac{h}{2}$ da maksimumga ega bo'ladi. Bu yagona maksimum uning eng katta qiymati ham bo'ladi. Shunday qilib uchburchakka ichki chizilgan to'g'ri to'rtburchaklardan asosi $x = \frac{a}{h}(h-y) = \frac{a}{h}\left(h - \frac{h}{2}\right) = \frac{a}{2}$ va balandligi $y = \frac{h}{2}$ bo'lgan to'rtburchak eng katta yuzga ega bo'lar ekan. Bu to'rtburchakning yuzi esa $S = \frac{ah}{4}$ bo'ladi.

6-masala. Gipotenuzasi 24sm, burchagi 60° to'g'ri burchakli uchburchakka asosi gipotenuzada bo'lgan to'g'ri to'rtburchak ichki chizilgan. Shu to'g'ri to'rtburchak eng katta yuzga ega bo'lishi uchun uning tomonlari qanday bo'lishi kerak?

Yechish. To'g'ri to'rtburchakning tomonlarini x va y orqali belgilaymiz. U holda uning yuzi $S=xy$ bo'ladi. Endi y ni x orqali ifodalaymiz(120-chizma).



120-chizma.

Shartga ko'ra $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 90^\circ$. Demak $\angle B = 30^\circ$. Ma'lumki to'g'ri burchakli uchburchakning 30° li burchagi qarshisidagi tomoni gipotenuzaning

yarmiga teng. Shuning uchun $AC = \frac{AB}{2} = \frac{24}{2} = 12(\text{sm})$. To'g'ri burchakli uchburchak MNC ning 30° li burchagi qarshisidagi MC tomoni uning gipotenuzasi x ning yarmiga teng, ya'ni $MC = \frac{x}{2}$. Demak $AM = AC - MC = 12 - \frac{x}{2}$. $\triangle ADM$ dan $AD = \frac{AM}{2}$.

Pifagor teoremasiga ko'ra $y^2 = DM^2 = AM^2 - AD^2 = AM^2 - \left(\frac{AM}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}AM^2$ yoki

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}AM = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(12 - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{3}\left(6 - \frac{x}{4}\right) \text{ bo'ladi.}$$

Demak, to'g'ri to'rtburchakning yuzi $S = xy = x\sqrt{3}\left(6 - \frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}\left(6x - \frac{x^2}{4}\right)$ bo'ladi.

Endi shu $S(x)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

$$S'(x) = \sqrt{3}\left(6 - \frac{2x}{4}\right), \quad S''(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad S'(x) = 0 \text{ yoki } 6 - \frac{x}{2} = 0 \text{ dan } x = 12 \text{ kritik}$$

qiymat kelib chiqadi. $S''(12) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga ko'ra

$$S(x) = \sqrt{3}\left(6x - \frac{x^2}{4}\right) = \sqrt{3}\left(6 - \frac{x}{4}\right)x \text{ funksiya } x = 12 \text{ qiymatda maksimumga ega}$$

bo'ladi.

Shunday qilib, uchburchakka ichki chizilgan va bir tomoni uning 24 sm li gipotenuzasida bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan tomonlari $x = 12$,

$$y = \sqrt{3}\left(6 - \frac{12}{4}\right) = 3\sqrt{3} \text{ ga teng bo'lgani eng katta yuzga ega bo'lib,}$$

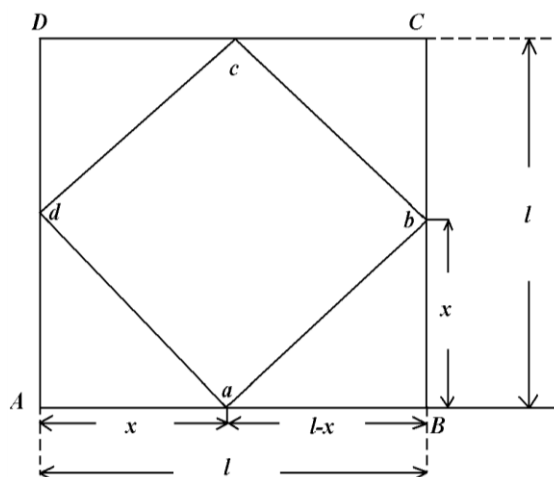
$$S_{\max} = 12 \cdot 3\sqrt{3} = 36\sqrt{3} (\text{sm}^2) \text{ ga teng ekan.}$$

7-masala. $ABCD$ kvadrat berilgan. Uning uchlaridan bir xil Aa, Bb, Cc, Dd kesmalar ajratilgan va a, b, c, d nuqtalarni birlashtirib kvadrat hosil qilingan. Aa ning qanday qiymatida $abcd$ kvadratning yuzi eng kichik bo'ladi. (121-chizma).

Yechish. $Aa = x, AB = \ell$ deb belgilasak, $aB = \ell - x$ va Pifagor teoremasiga ko'ra $ab^2 = x^2 + (\ell - x)^2 = x^2 + \ell^2 - 2\ell x + x^2 = 2x^2 - 2\ell x + \ell^2$ bo'ladi. Tomoni ab ga teng $abcd$ kvadratning yuzi $S = ab^2$ ga teng. Demak, $S = 2x^2 - 2\ell x + \ell^2$. Endi shu $S(x)$ funksiyaning eng kichik qiymatini topamiz. $S'(x) = 4x - 2\ell, S''(x) = 4. S'(x) = 0$ yoki $4x - 2\ell = 0$ dan $x = \frac{\ell}{2} = \frac{AB}{2}$ kritik qiymat kelib chiqadi. $S'\left(\frac{\ell}{2}\right) = 4 > 0$ bo'lgani uchun

ikkinchi yetarlilik shartiga binoan $S = 2x^2 - 2\ell x + \ell^2$ funksiya $x = \frac{\ell}{2}$ qiymatda eng

kichik qiymatga ega bo'ladi. Shunday qilib, $ABCD$ kvadratga masalaning shartida ko'rsatilgandek qilib ichki chizilgan kvadratlardan $ABCD$ kvadrat tomonlarini o'rtasini birlashtirib hosil qilingan kvadrat eng kichik yuzga ega bo'lar ekan. (121-chizma).



121-chizma.

8-masala. Tagi kvadrat shaklidagi, hajmi 108 m^3 ga teng ochiq hovuzning o'lchovlari shunday aniqlansinki, uning devorlari bilan tagini qoplash uchun mumkin qadar oz material sarf etilsin. Hovuzning o'lchovlari deganda uning tagini tomonlari va balandligi (chuqurligi) tushuniladi.

Yechish. Hovuz tagini tomoni x orqali va hovuz balandligini h orqali belgilaymiz. U holda hovuz parallelepiped shaklida bo'lgani uchun uning hajmi $v = x^2 h$ bo'ladi. Shartga ko'ra $x^2 h = 108$. Hovuz tagi x^2 , devori $4xh$ yuzga ega bo'lgani uchun jami $S = x^2 + 4xh$ yuzni material bilan qoplash lozim. S yuzni birgina erkli o'zgaruvchining funksiyasi sifatida ifodalash uchun $x^2 h = 108$ tenglikdan topilgan $h = \frac{108}{x^2}$ qiymatni unga qo'yamiz. U holda

$S = x^2 + 4x \frac{108}{x^2} = x^2 + \frac{432}{x}$ kelib chiqadi. Endi shu $S(x)$ funksiyaning eng kichik qiymatini topamiz.

$$S'(x) = 2x - \frac{432}{x^2}; S''(x) = 2 + \frac{864}{x^3} (x > 0).$$

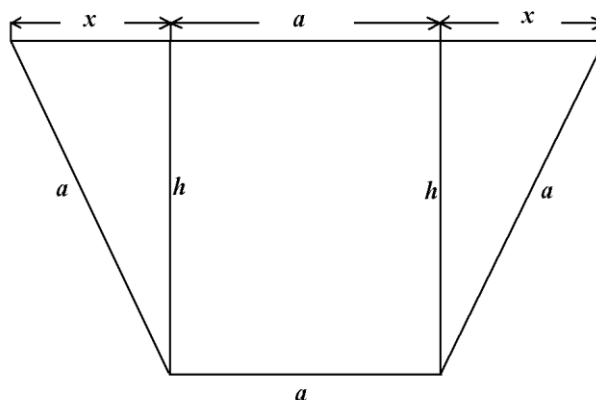
$$S'(x) = 2x - \frac{432}{x^2} = 0 \text{ dan } 2x^3 - 432 = 0; x^3 = 216, x = 6 \text{ kritik nuqta kelib chiqadi.}$$

Ikkinchi hosila $S''(6) = 2 + \frac{864}{216} > 0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga

asosan $x = 6$ qiymatda $S(x) = x^2 + \frac{432}{x}$ funksiya eng kichik qiymatga ega bo'ladi.

Demak, hajmi 108 m^3 ga teng ochiq hovuzning tagi 6 m kvadratdan iborat, balandligi $h = \frac{108}{36} = 3 \text{ m}$ bo'lgandagina uning devorlariga ishlov berish uchun eng kam material sarflanar ekan. Ya'ni hovuzning o'lchovlari $6 \text{ m} \times 6 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ bo'lishi lozim ekan.

9-masala. Trapetsiyaning kichik asosi va yon tomonlarining har biri a ga teng. Uning katta asosi shunday aniqlansinki, trapetsiyaning yuzi eng katta bo'lsin(122-chizma).



122-chizma

Yechish. Chizmaga binoan trapetsiyaning katta asosi $2x+a$ ga teng. Trapetsiyaning balandligini h orqali belgilaymiz. Ma'lumki trapetsiyaning yuzi asoslari yig'indisining yarmi bilan balandligi ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\frac{2x+a+a}{2}h = (x+a)h$$

Pifagor teoremasiga ko'ra chizmadan $h = \sqrt{a^2 - x^2}$ bo'lgani uchun trapetsiyaning yuzi $S = (x+a)\sqrt{a^2 - x^2}$ bo'ladi. Endi shu $S(x)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

$$S'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + (x+a) \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - x^2 - x(x+a)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$S'(x) = 0 \text{ yoki } -2x^2 - ax + a^2 = 0 \text{ dan } x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4 \cdot 2 \cdot a^2}}{-4} = \frac{a \pm 3a}{-4};$$

$$x_1 = \frac{a}{2}; \quad x_2 = -a \text{ kelib chiqadi. Masalaning shartiga ko'ra } x > 0 \text{ bo'lgani uchun}$$

$x = \frac{a}{2}$ kritik qiymatga ega bo'lamiz. Hosilani

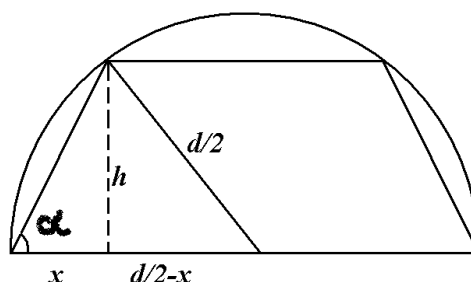
$$S'(x) = \frac{-2\left(x - \frac{a}{2}\right)(x+a)}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ ko'rinishda tasvirlasak } x < \frac{a}{2} \text{ bo'lganda } x - \frac{a}{2} < 0 \text{ va}$$

$S'(x) > 0$ ekani kelib chiqadi. Xuddi shuningdek $x > \frac{a}{2}$ bo'lganda $S'(x) < 0$ ekani

kelib chiqadi. $S'(x)$ hosila $x = \frac{a}{2}$ kritik qiymatning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tganda o'z ishorasini «+» dan «-» ga o'zgartiradi. Shuning uchun birinchi yetarlilik shartiga ko'ra $S = (x+a)\sqrt{a^2 - x^2}$ funksiya $x = \frac{a}{2}$ qiymatda maksimumga ega bo'ladi. Bu yagona maksimum uning eng katta qiymati ham bo'ladi. Shunday qilib trapetsiyaning katta asosi $2x+a = 2\frac{a}{2} + a = 2a$ bo'lganda u eng katta yuzga ega bo'lar ekan.

Izoh. Masalaning natijasidan kanal qazish ishlarida, tarnov yasash va hakoazolarda foydalanish mumkin.

10-masala. Yarim doiraga asosi yarim doira diametridan iborat bo'lgan trapetsiya ichki chizilgan. Trapetsiyaning asosiga yopishgan burchagi qanday bo'lganda trapetsiyaning yuzi eng katta bo'ladi(123-chizma).



123-chizma

Yechish. Doiraning diametrini d , trapetsiyaning balandligini h , trapetsiya yon tomonining katta asosidagi proeksiyasini x , shu tomon bilan asos orasidagi burchakni α deb olamiz. U holda trapetsiyaning kichik asosi $d-2x$, balandligi $h = x \operatorname{tg} \alpha$ va yuzi $S = \frac{d + d - 2x}{2} h = (d - x)x \operatorname{tg} \alpha$ bo'ladi. Ikkinchi tomondan chizmadan Pifagor teoremasiga ko'ra

$h^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} - x\right)^2 = dx - x^2$ ga ega bo'lamiz. Bunga $h = x \operatorname{tg} \alpha$ qiymatni qo'ysak

$x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = d \cdot x - x^2$; $x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + x^2 = d \cdot x$; $x^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = d \cdot x$; $x \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} = d$; $x = d \cos^2 \alpha$ kelib chiqadi. Shunday qilib,

$$S = (d - x)x \operatorname{tg} \alpha = (d - d \cos^2 \alpha) d \cos^2 \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = d(1 - \cos^2 \alpha) d \cos \alpha \cdot \sin \alpha = d^2 \sin^3 \alpha \cos \alpha$$

bo'ladi.

Endi $S(\alpha) = d^2 \sin^3 \alpha \cos \alpha$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

$$S'(\alpha) = d^2 (\sin^3 \alpha \cos \alpha)' = d^2 (3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^4 \alpha) = d^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (3 - \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

$$S'(\alpha) = 0 \text{ yoki } d^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (3 - \operatorname{tg}^2 \alpha) = 0 \text{ dan } \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \neq 0 \text{ bo'lgani}$$

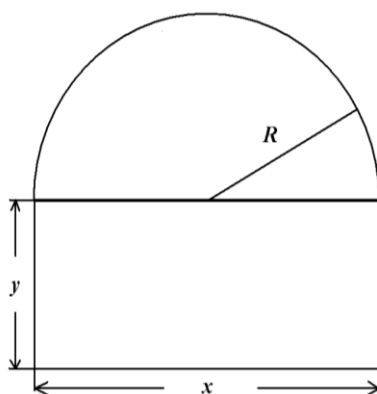
uchun $3 - \operatorname{tg}^2 \alpha = 0$; $\operatorname{tg}^2 \alpha = 3$, $\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{3}$ kelib chiqadi. Shartga ko'ra $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

bo'lgani sababli $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, $\alpha = 60^\circ$ kritik qiymatga ega bo'lamiz. $0 < \alpha < 60^\circ$

bo'lsa $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg}^2 \alpha < 3$, $3 - \operatorname{tg}^2 \alpha > 0$ va $S'(\alpha) = d^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (3 - \operatorname{tg}^2 \alpha) > 0$ bo'ladi.

$60^\circ < \alpha < 90^\circ$ bo'lganda $\operatorname{tg} 60^\circ < \operatorname{tg} \alpha$; $\sqrt{3} < \operatorname{tg} \alpha$; $3 < \operatorname{tg}^2 \alpha$; $3 - \operatorname{tg}^2 \alpha < 0$ bo'lib, $S'(\alpha) < 0$ bo'ladi, chunki $y = \operatorname{tg} x$ funksiya o'suvchi. $S(\alpha)$ funksiyaning hosilasi $\alpha = 60^\circ$ kritik qiymatning chapidan o'ngiga o'tganda ishorasini "+" dan "-" ga o'zgartirganligi uchun birinchi yetarlilik shartiga binoan funksiya $\alpha = 60^\circ$ bo'lganda uning yuzi eng katta bo'lar ekan.

11-masala. Tunnelning ko'ndalang kesimi bir tomoni yarim doiradan iborat to'g'ri to'rtburchak shakliga ega. Kesim perimetri 25m. Yarim doira radiusi qanday bo'lsa, kesim yuzi eng katta bo'ladi(124-chizma).



124-chizma

Yechish. Aylana uzunligini topish formulasi ($\ell = 2\pi R$) ga binoan yarim doiraning uzunligi πR (R -yarim doiraning radiusi). To'g'ri to'rtburchakning asosini x , balandligini y orqali belgilasak kesimning perimetri shartga ko'ra $x + 2y + \pi R = 25$ (α) bo'ladi. Kesimning yuzi to'g'ri to'rtburchak yuzi bilan yarim

doira yuzining yig'indisidan iborat, ya'ni $S = xy + \frac{1}{2}\pi R^2$ (β) bo'ladi. $x = 2R$ bo'lgani uchun (α) dan $2R + 2y + \pi R = 25$; $y = 12,5 - \frac{\pi + 2}{2}R$ kelib chiqadi. y ning

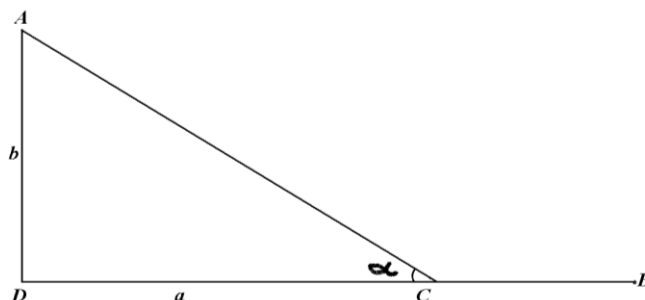
topilgan qiymatini (β) ga qo'yamiz. U holda $S = 2R\left(12,5 - \frac{\pi + 2}{2}R\right) + \frac{1}{2}\pi R^2 =$

$= 25R - (\pi + 2)R^2 + \frac{1}{2}\pi R^2$ bir o'zgaruvchi R ning funksiyasi kelib chiqadi. Endi shu $S(R)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

$S'(R) = 25 - 2(\pi + 2)R + \pi R$; $S''(R) = -2(\pi + 2) + \pi = -\pi - 4 = -(\pi + 4)$; $S'(R) = 0$ yoki $25 - 2(\pi + 2)R + \pi R = 0$ dan $25 - \pi R - 4R = 0$; $R = \frac{25}{\pi + 4} \approx 3,5$ kelib chiqadi.

$S''(R) = -(\pi + 4) < 0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga asosan funksiya $R = 3,5m$ bo'lganda tunnel kesimining yuzi eng katta bo'lar ekan.

12-masala. A zavodga yaqin bo'lgan joydan berilgan to'g'ri chiziq bo'yicha B shaharga qarab temir yo'l o'tqazilgan. Agar bir tonna yukni bir km ga tosh yo'l bo'yicha tashish temir yo'l bo'yicha tashishga qaraganda m marta qimmatroq bo'lsa, A dan B ga yuk tashish eng arzon bo'lishi uchun, A zavoddan temir yo'lgacha tosh yo'lni temir yo'lga nisbatan qanday α burchak ostida o'tkazish kerak?(125-chizma).



125-chizma

Yechish. A zavoddan temir yo'lgacha masofani b ($AD = b$), D dan B gacha masofani a , tosh yo'l bilan temir yo'l orasidagi burchakni α orqali belgilaymiz.

1 tonna yukni tosh yo'lda 1 km ga tashish uchun d so'm sarf bo'lsin. U holda 1 tonna yukni temir yo'lda 1 km ga tashish uchun $\frac{d}{m}$ so'm sarflanadi. Yuk A dan B gacha AC km tosh yo'lda, CB km temir yo'lda tashiladi. $\triangle ACD$ dan trigonometrik funksiyalarning ta'rifiga ko'ra quyidagilarga ega bo'lamiz.
 $\frac{AD}{AC} = \sin \alpha$, $AC = \frac{AD}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \alpha}$, $\frac{DC}{AD} = \operatorname{ctg} \alpha$; $DC = AD \operatorname{ctg} \alpha = b \operatorname{ctg} \alpha$.

Demak $CB = DB - DC = a - b \operatorname{ctg} \alpha$. Shunday qilib tashilgan yuk A dan B gacha $AC = \frac{b}{\sin \alpha}$ km.ni tosh yo'lda o'tib uni tashishga $\frac{bd}{\sin \alpha}$ so'mni $CB = (a - b \operatorname{ctg} \alpha)$ km.ni temir yo'lda o'tib uni tashishga $(a - b \operatorname{ctg} \alpha) \frac{d}{m}$ so'm sarflanadi. U holda yukni tashish uchun hammasi bo'lib $f(\alpha) = \frac{bd}{\sin \alpha} + (a - b \operatorname{ctg} \alpha) \frac{d}{m}$ so'm pul sarflanadi. Endi a, b, d, m larni o'zgarmas hisoblab $f(\alpha)$ funksiyaning eng kichik qiymatini topamiz.

$$f'(\alpha) = \frac{bd \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{bd}{m \sin^2 \alpha} = bd \frac{1 - m \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = mbd \frac{\frac{1}{m} - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}. \quad f'(\alpha) = 0 \quad \text{yoki}$$

$\frac{1}{m} - \cos \alpha = 0$ dan $\cos \alpha = \frac{1}{m}$; $\alpha = \arccos \frac{1}{m}$ kritik qiymat kelib chiqadi. $\cos \alpha$ funksiya $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ da kamayuvchi ekanini hisobga olsak $\alpha < \arccos \frac{1}{m}$ bo'lganda $\cos \alpha > \frac{1}{m}$;

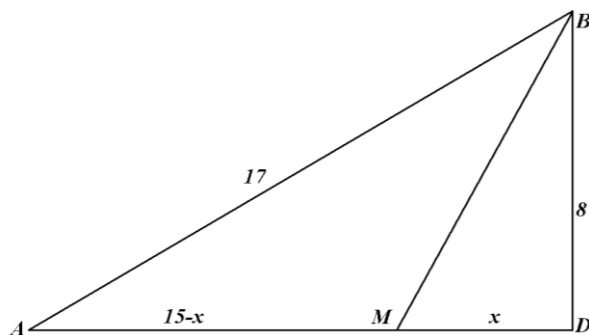
$\frac{1}{m} - \cos \alpha < 0$, $f'(\alpha) = mbd \frac{\frac{1}{m} - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} < 0$ va $\alpha > \arccos \frac{1}{m}$ bo'lganda $\cos \alpha < \frac{1}{m}$;
 $\frac{1}{m} - \cos \alpha > 0$, $f'(\alpha) > 0$ kelib chiqadi. Hosila $\alpha = \arccos \frac{1}{m}$ kritik nuqtaning chapidan o'ngiga o'tganda ishorasini “-” dan “+”ga o'zgartirganligi uchun birinchi yetarlilik shartiga ko'ra funksiya shu qiymatda minimumga ega bo'ladi.

Shunday qilib yukni A zavoddan B shaharga tashish eng arzon bo'lishi uchun tosh yo'lni temir yo'lga $\alpha = \arccos \frac{1}{m}$ burchak ostida qurish lozim ekan.

Hususiyl holda yukni tosh yo'lda tashish temir yo'ldagiga qaraganda 5 marta qimmat bo'lganda eng kam xarajat qilish uchun tosh yo'lni temir yo'lga $\alpha = \arccos \frac{1}{5} \approx 78^\circ$ burchak ostida o'tkazish kerak ekan.

13-masala. Sayyoh A manzildan chiqib tosh yo'l bo'ylab shu yo'ldan 8 km chetda joylashgan va A dan to'g'ri chiziq bo'yicha 17 km uzoqlikda joylashgan B manzil tomon bormoqda. Sayyoh B manzilga tezroq yetishish uchun tosh yo'lning qaysi joyidan B manzilga burilishi kerak?(126-chizma). Sayyoh burilgandan so'ng B manzilgacha yo'lsiz yuradi.

Sayyoh tosh yo'ldagi tezligi 5 km/soat, yo'lsiz joydagi tezligi 3km/soat.



126-chizma.

Yechish. Aytaylik sayyoh tosh yo'lining M nuqtasidan B manzilga burilsin. Chizmadagi D nuqta bilan M nuqta orasidagi masofani x orqali belgilaymiz.

To'g'ri burchakli $\triangle BAD$ dan Pifagor teoremasiga asosan

$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15$, ya'ni $AD = 15\text{km}$ kelib chiqadi.

Demak A va M orasidagi masofa $AM = AD - MD = 15 - x$ ga teng. AMB marshrutni o'tish uchun sarflangan vaqtni t orqali belgilaymiz. Sayyoh $AM = 15 - x$ tosh yo'lni 5km/soat tezlik bilan $\frac{15-x}{5}$ ($t = \frac{S}{v}$ formulaga asosan) vaqt oralig'ida

bosib o'tadi. $\triangle BMD$ dan Pifagor teoremasiga ko'ra $MB = \sqrt{8^2 + x^2} = \sqrt{64 + x^2}$ bo'ladi. Yo'lining MB qismida 3km/soat tezlik bilan harakat qilgan sayyoh uni $\frac{\sqrt{64+x^2}}{3}$ vaqt oralig'ida bosib o'tadi. Demak AMB marshrutni o'tish uchun sayyoh

jami $t = \frac{15-x}{5} + \frac{\sqrt{64+x^2}}{3}$ vaqt sarflaydi. Ushbu $t(x)$ funksiyaning eng kichik qiymatini topamiz.

$$t'(x) = \frac{1}{5}(15-x)' + \frac{1}{3}(\sqrt{64+x^2})' = -\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(64+x^2)'}{2\sqrt{64+x^2}} = -\frac{1}{5} + \frac{x}{3\sqrt{64+x^2}} = \frac{-3\sqrt{64+x^2} + 5x}{15\sqrt{64+x^2}}$$

$$t'(x) = 0 \text{ yoki } -3\sqrt{64+x^2} + 5x = 0 \text{ dan } 3\sqrt{64+x^2} = 5x;$$

$$9(64+x^2) = 25x^2; 9 \cdot 64 + 9x^2 = 25x^2; 9 \cdot 64 = 16x^2; x^2 = \frac{9 \cdot 64}{16}; x^2 = 36, x = 6$$

kritik qiymat kelib chiqadi (chunki $x > 0$).

$$t''(x) = \left(-\frac{1}{5} + \frac{x}{3\sqrt{64+x^2}} \right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{64+x^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{64+x^2}}}{(\sqrt{64+x^2})^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{64+x^2-x^2}{(64+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{64}{3(64+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$t''(6) = \frac{64}{3(64+36)^{\frac{3}{2}}} = \frac{64}{3000} > 0 \text{ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga asosan}$$

$x=6$ qiymatda $t(x)$ funksiya eng kichik qiymatga ega bo'ladi. Shunday qilib, sayyoh A manzildan $15-6=9(\text{km})$ yurgandan so'ng B manzilga burilsa u eng kam

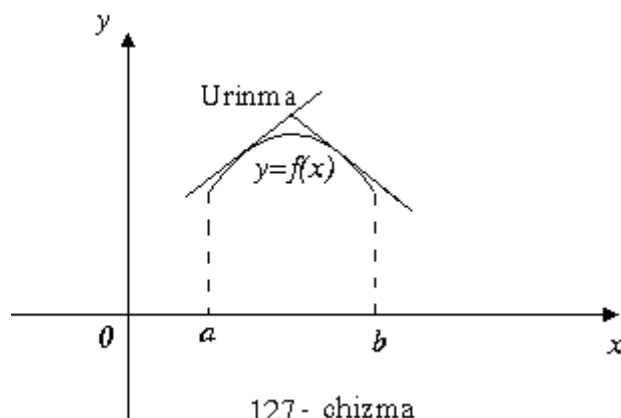
vaqt $t = \frac{15-x}{5} + \frac{\sqrt{64+x^2}}{3} = \frac{77}{15}$ soat ($t \approx 5$ soatu 8 minut) sarflar ekan.

ma'ruza. Mavzu: Funksiyaning grafigini chizish.

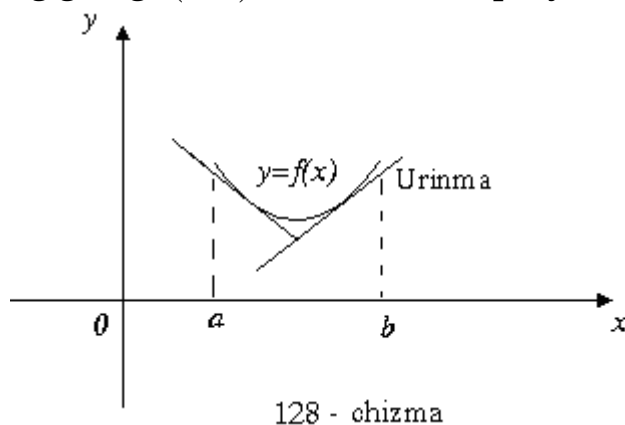
Funksiya grafigining qavariqligi va botiqligi. Egilish nuqta.

$(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning grafigini qaraymiz. $y = f(x)$ funksiya grafigining $(a; b)$ intervaldagi urinmasi deyilganda grafikning abssissasi $(a; b)$ intervalga tegishli istalgan nuqtalaridan grafikka o'tkazilgan urinmalar tushuniladi.

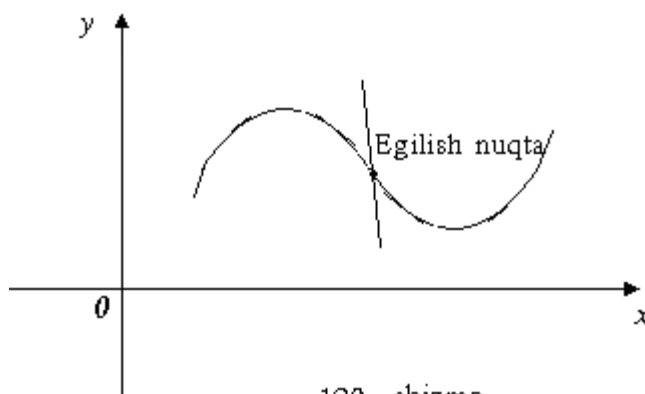
1-ta'rif. Agar $(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning grafigi o'zining shu intervaldagi har qanday urinmasidan pastda joylashsa, u holda bu funksiyaning grafigi $(a; b)$ intervalda **qavariq** deyiladi (127-chizma).



2-ta'rif. Agar $(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning grafigi o'zining shu intervaldagi har qanday urinmasidan yuqorida joylashsa, u holda bu funksiyaning grafigi $(a; b)$ intervalda **botiq** deyiladi (128-chizma).



3-ta'rif. Uzluksiz funksiya grafigining qavariq qismini botiq qismidan ajratuvchi nuqtasi grafikning **egilish nuqtasi** deyiladi. (129-chizma).

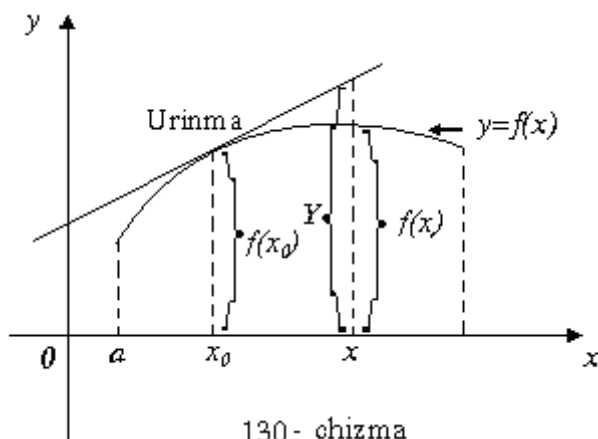


129 - chizma

Funksiya grafigining botiqlik, qavariqlik intervallari hamda grafikning egilish nuqtalarini aniqlash funksiyaning ikkinchi hosilasidan foydalanib amalga oshiriladi.

27.1-teorema. Agar $(a; b)$ intervalning barcha nuqtalarida $f''(x)$ mavjud va $f''(x) < 0$ bo'lsa, u holda $(a; b)$ intervalda $y = f(x)$ funksiyaning grafigi qavariq bo'ladi.

Isboti. $(a; b)$ intervalda $f''(x) < 0$ bo'lsin. $(a; b)$ dan ixtiyoriy $x = x_0$ nuqtani olib $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtada grafikka urinma o'tkazamiz (130-chizma).



130 - chizma

Urinmaning x absissaga mos ordinatasini Y orqali belgilaymiz. U holda urinmaning tenglamasi

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ yoki } Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (27.1)$$

bo'lishi ravshan.

x nuqtada grafik va urinma ordinatalari ayirmasi

$$y - Y = f(x) - f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (27.2)$$

bo'ladi. $f(x) - f(x_0)$ ayirmaga nisbatan Lagranj formulasini qo'llasak $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ bo'ladi, bu yerdagi c x_0 bilan x orasidagi qiymat. Ushbu qiymatni (27.2) tenglikka qo'ysak

$$y - Y = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

yoki

$$y - Y = [f'(c) - f'(x_0)](x - x_0) \quad (27.3)$$

kelib chiqadi.

$f'(c) - f'(x_0)$ ayirmaga nisbatan Lagranj formulasini qo'llab $f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)(c - x_0)$ tenglikni hosil qilamiz, bu yerda c_1 c bilan x_0 orasidagi qiymat. Oxirgi tenglikni hisobga olib (27.3) ni

$$y - Y = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0) \quad (27.3)$$

ko'rinishda yozamiz.

$x > x_0$ bo'lsin. U holda $x_0 < c < x$ bo'lib $c - x_0 > 0$, $x - x_0 > 0$ va $(c - x_0)(x - x_0) > 0$ bo'ladi.

$x < x_0$ bo'lsin. U holda $x < c < x_0$ bo'lib $c - x_0 < 0$, $x - x_0 < 0$ va $(c - x_0)(x - x_0) > 0$ bo'ladi. Ushbu tengsizlikni hamda shartga ko'ra $f''(c_1) < 0$ ekanini hisobga olib (27.4) dan $y - Y < 0$ yoki $y < Y$ ga ega bo'lamiz.

Shunday qilib bir xil argument x ning o'zida funksiyaning ordinatasi y urinmaning ordinatasi Y dan kichik ekan. Bu grafik urinmadan pastda yotishini ya'ni grafik qavariqligini bildiradi.

2-teorema. Agar $(a; b)$ intervalning barcha nuqtalarida $f''(x)$ mavjud va $f''(x) > 0$ bo'lsa, u holda $(a; b)$ intervalda $y = f(x)$ funksiyaning grafigi botiq bo'ladi.

Teoremaning isboti 1 teoremaning isbotiga o'xshaganligi sababli uni isbotlash o'quvchiga qoldirildi.

3-teorema. Agar $f''(x_0) = 0$ bo'lsa yoki $f''(x_0)$ mavjud bo'lmasa va x_0 nuqtadan o'tganda ikkinchi hosila o'z ishorasini o'zgartirsa, u holda grafikning $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtasi $y = f(x)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi.

Isboti. Masalan, $x < x_0$ bo'lganda $f''(x_0) < 0$ va $x > x_0$ bo'lganida $f''(x_0) > 0$ bo'lsin. U vaqtda $x < x_0$ uchun grafik qavariq, $x > x_0$ uchun grafik botiq bo'ladi.

Demak, grafikning $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtasi uning qavariq qismini botiq qismidan ajratib turadi, ya'ni u grafikning egilish nuqtasi.

1-misol. $y = x^3 - 9x^2 + 5x + 43$ funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik intervallarini hamda egilish nuqtalarini toping.

Yechish. Ikkinchi hosilani topamiz:

$y' = 3x^2 - 18x + 5$, $y'' = 6x - 18$. Ikkinchi hosilani nolga tenglashtirib hosil bo'lgan tenglamani yechamiz: $y'' = 0$, $6x - 18 = 0$, $x = 3$.

$x < 3$ bo'lganda $y'' = 6(x - 3) < 0$ bo'lganligi sababli $(-\infty; 3)$ intervalda funksiyaning grafigi qavariq bo'ladi.

$x > 3$ bo'lganda $y'' = 6(x - 3) > 0$ bo'lganligi sababli $(3; +\infty)$ intervalda grafik botiq bo'ladi.

$y(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 43 = 4$ ekanligini hisobga olsak $M_0(3; 4)$ nuqta grafikning egilish nuqtasi ekanligi kelib chiqadi.

2-misol. $y = \ln x$ funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik intervallarini hamda egilish nuqtalarini toping.

Yechish. $y = \ln x$ funksiya $(0; +\infty)$ intervalda aniqlangan. Ikkinchi hosilani topamiz: $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, $y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$.

Ikkinchi hosila $(0, +\infty)$ intervalda manfiy bo'lganligi sababli $y = \ln x$ funksiyaning grafigi bu intervalda qavariq bo'ladi. Grafik egilish nuqtaga ega emas.

Egri chiziqning asimptotalari

Funksiyaning grafigi Oxy tekislikdagi egri chiziqdan iborat bo'lganligi sababli (agar u mavjud bo'lsa) funksiya grafigi uchun aytilgan gaplar egri chiziq uchun ham o'rinli. Shuning uchun egri chiziq yoki funksiya grafigi deyilganda bir narsa tushuniladi.

4-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya grafigining o'zgaruvchi nuqtasi grafik bo'ylab cheksiz uzoqlashganda undan biror to'g'ri chiziqqacha masofa nolga intilsa, bu to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining asimptotasi deb ataladi.

Asimptotalar **vertikal** (ya'ni Oy o'qqa parallel) hamda og'ma (ya'ni Ox o'qqa parallel bo'lmagan) asimptotalarga ajratilib o'rganiladi.

1. Vertikal asimptotalar. Vertikal asimptotaning ta'rifidan, agar $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \infty$ yoki $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \infty$ yoki $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ bo'lsa, u holda $x = x_0$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ egri chiziqning asimptotasi ekanligi kelib chiqadi; va aksincha, agar $x = x_0$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ egri chiziqning vertikal asimptotasi bo'lsa, u holda yozilgan tengliklardan biri albatta bajariladi.

Demak, $y = f(x)$ egri chiziqning vertikal asimptotalarini topish uchun argument x ning $f(x)$ funksiyani cheksizlikka aylantiradigan qiymatlarini topish kerak ekan (131-chizma).

3-misol. $y = x - \frac{2}{x+3}$

funksiya grafigining vertikal asimptotasini toping.

Yechish. $\lim_{x \rightarrow -3} \left(x - \frac{2}{x+3} \right) = \infty$, shu sababli $x = -3$ to'g'ri chiziq grafikning vertikal asimptotasidir.

4-misol. $y = \operatorname{ctg} x$ funksiya grafigining vertikal asimptotasini toping.

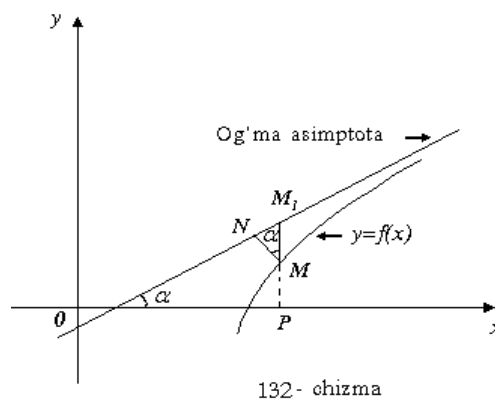
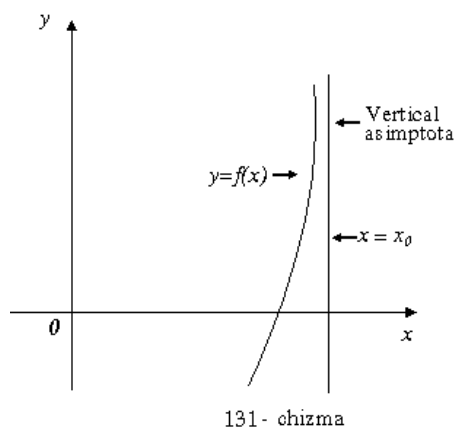
Yechish. $\lim_{x \rightarrow n\pi} \operatorname{ctg} x = \infty$, bo'lganligi sababli funksiyaning grafigi cheksiz ko'p vertikal asimptotalarga ega:

$$x = 0, x = \pm\pi, x = \pm2\pi, x = \pm3\pi, \dots$$

2. Og'ma asimptotalar. $y = f(x)$ funksiyaning grafigi Oy o'qqa parallel bo'lmagan asimptotalarga ega bo'lsin. U holda bu asimptotaning tenglamasi $y = kx + b$ ko'rinishga ega bo'lishi ravshan. Xususiyl holda $k = 0$ bo'lganda Ox o'qqa parallel gorizontaal asimptota hosil bo'ladi. k va b ni aniqlashga kirishamiz. Grafikning M nuqtasidan asimptotaga MN perpendikulyar o'tkazamiz (132-chizma). Asimptotaning ta'rifidan $\lim_{x \rightarrow +\infty} MN = 0$ ekani kelib chiqadi. $\triangle M_1MN$ dan

$$\frac{MN}{M_1M} = \cos \alpha \text{ yoki bundan } M_1M = \frac{MN}{\cos \alpha} \text{ hosil bo'ladi. } \alpha \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} \right) \text{ o'zgarmasligini}$$

hisobga olsak $\lim_{x \rightarrow +\infty} M_1M = \frac{1}{\cos \alpha} \lim_{x \rightarrow +\infty} MN = 0$ bo'ladi.



Shu sababli

$$M_1M = y_{asimptota} - y_{grafik} = (kx+b) - f(x) \text{ ba}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} M_1M = \lim_{x \rightarrow +\infty} (kx+b - f(x)) = 0 \quad (27.5)$$

$$\text{Bundan } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(k + \frac{b}{x} - \frac{f(x)}{x} \right) = 0.$$

Ma'lumki ikki ifodaning ko'paytmasi nolga teng bo'lishi uchun kamida ulardan biri nolga teng bo'lishi lozim. Shuning uchun oxirgi tenglikda $x \rightarrow +\infty$, shu sababli $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(k + \frac{b}{x} - \frac{f(x)}{x} \right) = 0$ bo'ladi.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} = 0 \text{ ekanini hisobga olsak } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(k - \frac{f(x)}{x} \right) = 0 \text{ yoki bundan}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad (27.6)$$

$$\text{hosil bo'ladi. (27.5) tenglikdan } b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) \quad (27.7)$$

ga ega bo'lamiz. Bunga k ning topilgan qiymatini qo'ysak b topiladi.

Shunday qilib og'ma asimptotaning k , b parametrlari mos ravishda (27.6) va (27.7) formulalar yordamida topilar ekan. (27.6) va (27.7) limitlar mavjud bo'lganda $y=kx+b$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiyani og'ma asimptotasi bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. Agar (27.6) va (27.7) limitlardan aqalli bittasi mavjud bo'lmasa, u holda $y=f(x)$ funksiyaning grafigi $x \rightarrow +\infty$ da og'ma asimptotaga ega bo'lmaydi.

Funksiya grafigining $x \rightarrow -\infty$ dagi og'ma asimptotasi ham shunga o'xshash topiladi. Umuman olganda funksiyaning grafigi $x \rightarrow +\infty$ da va $x \rightarrow -\infty$ da ikkita har xil og'ma asimptotalarga ega bo'lishi mumkin.

5-misol. $y = \frac{x^2+1}{x+1}$ funksiya grafigining asimptotalarini toping.

Yechish. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+1}{x+1} = \infty$, bo'lganligi sababli $x=-1$ to'g'ri chiziq grafikning vertikal asimptotasidir. $y=kx+b$ og'ma asimptotani izlaymiz.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 - x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{0 - 1}{1 + 0} = -1.$$

Demak, $y = x - 1$ to'g'ri chiziq grafikning og'ma asimptotasidir.

6-misol. $y = e^{-x} + x$ funksiya grafigining asimptotalarini toping.

Yechish. Vertikal asimptota mavjud emas, chunki funksiya butun son o'qida aniqlangan.

Og'ma asimptotalarni izlaymiz:

$$1) k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} + x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} + 1 \right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + x - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Demak, $y = x$ to'g'ri chiziq grafikning $x \rightarrow +\infty$ dagi og'ma asimptotasidir.

$$2) k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} + 1.$$

$x \rightarrow -\infty$ da $\frac{e^{-x}}{x}$ nisbat $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslik. Unga Lopital qoidasini qo'llasak $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^{-x})}{x'} + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x}}{1} + 1 = \infty$ bo'ladi. Demak, $x \rightarrow -\infty$ da grafik og'ma asimptotaga ega emas.

Asimptotaning ta'rifidan chegaralangan egri chiziqlar asimptotalarga ega bo'lmasligi kelib chiqadi (masalan, aylana, ellips va hakoza). Chegaralanmagan egri chiziqlar orasida asimptotaga ega bo'lganlari ham bo'lmaganlari ham mavjud. Masalan, giperbolaning ikkita og'ma asimptotalarga ega ekanligi ma'lum. Parabola esa asimptotaga ega emas.

Funksiyani to'la tekshirish va grafigini chizish

Funksiyani to'la tekshirish deyilganda quyidagilar nazarda tutiladi.

1. Funksiyaning aniqlanish sohasini topish.
2. Funksiyaning uzluksizlik intervallari, uzilish nuqtalari hamda bu nuqtalardagi bir tomonlama limitlarni topish.
3. Funksiyaning o'sish va kamayish intervallarini topish.
4. Funksiyaning ekstremumlarini topish.
5. Grafikning qavariqlik, botiqlik intervallari hamda egilish nuqtasini topish.
6. Grafikning asimptotalarini topish.

Yuqoridagi bandlarga to'liq javob olingandan so'ng ularga asoslanib funksiyaning grafigi chiziladi.

1-eslatma. Grafikni yasashda uning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topish foydalidir.

2-eslatma. Grafikni yasash oldidan funksiyaning juft yoki toqligini aniqlash foydalidir.

7-misol. $y = e^{-x^2}$ funksiyaning grafigi chizilsin.

Yechish. 1. Funksiya $(-\infty; +\infty)$ intervalda aniqlangan.

2. Funksiya butun son o'qida uzluksiz.

$$3. y' = (e^{-x^2})' = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = -2x \cdot e^{-x^2}.$$

$e^{-x^2} > 0$ bo'lganligi sababli $x < 0$ da $y' > 0$ va $x > 0$ da $y' < 0$ bo'ladi. Demak funksiya $(-\infty; 0)$ intervalda o'sadi, $(0; +\infty)$ intervalda esa kamayadi.

4. Funksiyaning hosilasini nolga tenglashtirib, hosil bo'lgan tenglamani yechib funksiyaning kritik nuqtalarini aniqlaymiz:

$$y' = -2x \cdot e^{-x^2} = 0. \text{ Demak, } x = 0 \text{ kritik nuqta.}$$

Bu kritik nuqtaning chapidan o'ngiga o'tganda hosila ishorasini plusdan minusga o'zgartirganligi uchun $x = 0$ nuqtada funksiya maksimumga ega. $y_{\max} = y(0) = e^0 = 1.$

5. Ikkinchi hosilani topamiz:

$$y'' = (-2x \cdot e^{-x^2})' = -2 \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot e^{-x^2} (-x^2)' = -2 \cdot e^{-x^2} + 4x^2 \cdot e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1) \cdot e^{-x^2}.$$

Buni nolga tenglashtirib yechsak grafikning egilish nuqtalarining absissalari hosil bo'ladi.

$e^{-x^2} \neq 0$ bo'lganligi uchun $2(2x^2 - 1) \cdot e^{-x^2} = 0$ tenglamadan $2x^2 - 1 = 0$, $x^2 = \frac{1}{2}$, $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ga ega bo'lamiz. Demak grafikning $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ va $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

absissali $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}})$ va $(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}})$ nuqtalari uning egilish nuqtalaridir.

$(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}})$ va $(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty)$ oraliqlarda $y'' > 0$ bo'lgani uchun grafik bu oraliqlarda botiq, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$ oraliqda $y'' < 0$ bo'lgani uchun bu oraliqda grafik qavariq.

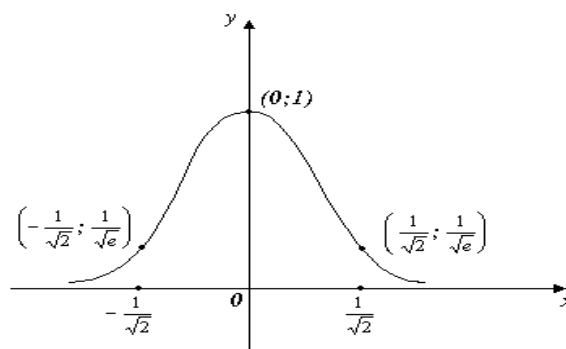
6. Funksiya x ning barcha qiymatlarida aniqlanganligi uchun uning grafigi vertikal asimptotalarga ega emas. Grafikning og'ma asimptotalarini aniqlaymiz.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{xe^{x^2}} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - k \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x^2} - 0 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0.$$

Demak, $y = 0$, ya'ni $0x$ o'q grafikning asimptotasidir.

$y = e^{-x^2}$ funksiyaning grafigi **Gauss egri chizig'i** deb ataladi. U 133-chizmada tasvirlangan.



133- chizma

ADABIYOTLAR

1. Ё.У.Соатов-Олий математика 1-жилд.Тошкент, 1992й.
2. Н.С.Пискунов-Дифференциал ва интеграл ҳисоб.1-том,Тошкент,1972й.
3. И.И.Привалов-Аналитическая геометрия.Москва,1966й.
4. Н.В.Ефимов-Краткий курс аналитической геометрии.Москва,1958й
5. И.А.Зайцев-Высшая математика.Москва,1991й.
6. О.Т.Цубербиллер-Задачи и упражнения по аналитической геометрии.Москва,1970й.
7. С.М.Николский-Курс математического анализа.1-том.Москва,1973й.
8. В.С.Шипачев- Высшая математика.Москва,1985й.
9. Б.Абдалимов,Ш.Солихов-Олий математика қисқа курси.Тошкент,1981й.
10. И.Шнейдер, А.И.Слуцкий,А.С.Шилов-Краткий курс высший математики.Москва,1072й.
11. И.А.Каплан-Практические занятия по высшей математики.1,2-часть, Харков,1973й.
12. Э.Холмуродов,З.Узоков-Экстремумлар назариясининг амалий масалалар ечишга тадбиқи,Қарши,1991й.
13. Г.Худайберганов,А.Ворисов,Х.Мансуров-Математик анализ.1-қисм.Қарши, «Насаф»,2003й.
14. В.С.Шипачев.Высшая математика.Москва, «Наука», 2001й.
15. В.А. Шнейдер, А.И.Слуцкий, А.С.Шумов-Олий математика қисқа курси. 1-қисм. «Ўқитувчи»,1983й.
16. Т.Н.Қори-Ниёзий-Аналитик геометрия асосий курси. Тошкент «Ўқитувчи»,1971й.
17. Ш.И.Тожиев-Олий математикадан масалалар ечиш.Тошкент, «Ўзбекистон»,2002й.

