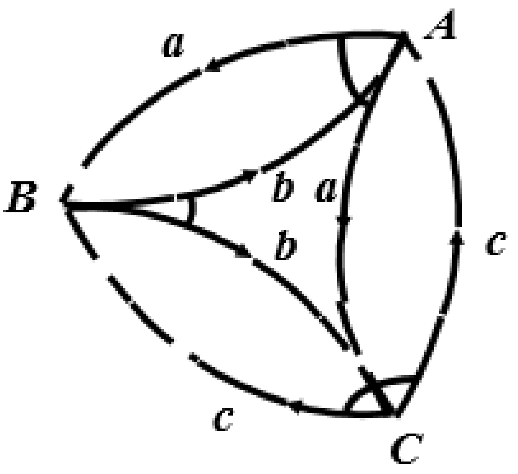
ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ТОШКЕНТ АРХИТЕКТУРА-ҚУРИЛИШ ИНСТИТУТИ

С.А. ТАШПЎЛАТОВ

СФЕРОИДИК ГЕОДЕЗИЯ



Тошкент-2018

УДК 528.23.3 (075.8)
Муаллиф: С.А. Ташпўлатов
"Сфероидик геодезия". Дарслик.

Мазкур дарсликдада ер эллипсоиди геометриясининг асосий масалалари баён этилган ва ер эллипсоиди сатҳида геодезик масалаларни ечиш усуллари келтирилган ҳамда Гаусс-Крюгер координаталари назарияси ва унинг амалда қўлланилиши ёритилган.

Дарслик геодезия, картография ва кадастр соҳасида ўқиётган талабаларга мўлжалланган.

Тақризчилар: Тошкент архитектура-қурилиш институти доцентлари,
техника фанлари номзоди **Ш.Р. Хуррамов**,
ТИҚХММИ "Геодезия ва геоинформатика" кафедраси
мудири техника фанлари номзоди доцент **И. Мусаев.**

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 27 март 2018 йилдаги 274 -сонли буйруғига асосан дарслик сифатида нашр этишга руҳсат берилди (гр. № 274-161).

I-ҚИСМ СФЕРОИДИК ГЕОДЕЗИЯНИНГ НАЗАРИЙ АСОСЛАРИ

КИРИШ

Олий геодезия фани «Асосий геодезик ишлар», «Сфероидик геодезия» ва «Назарий геодезия» каби учта қисмдан ташкил топган бўлиб, улардан «Сфероидик геодезия» нимани ўрганади деган саволни қараб чиқамиз.

«Элементар геодезия» фани ўрганилганда, 300÷350 квадрат километрдан кичик бўлган ер юзаси текислик деб қабул қилинар ва бу юзада бажарилган геодезик ўлчаш ишлари текисликда амалга оширилган деб ҳисобланар эди.

Ер мураккаб шаклга эга бўлиб, уни бирон-бир математик формула билан ифодалаш қийин вазифа ҳисобланади. Аммо, ер шаклини математик ифодаламасдан катта майдонда бажарилган геодезик ўлчаш натижаларини математик қайта ишлаш мумкин эмас. Геодезик ўлчаш натижаларини математик қайта ишлаш учун ўлчаш ишлари бажарилган деб қабул қилинган шаклнинг параметрлари (ўлчамлари, катталиклари) маълум бўлиши керак. Шу сабабли Ер физик сатҳи Ер шаклига яқин бўлган математик шакл бўлган **айланма эллипсоид** (эллипс ўз кичик ўқи атрофида айланиш натижасида ҳосил бўлган) шакл, яъни **сфероид** билан алмаштирилади.

Ер физик сатҳида бажарилган геодезик ўлчаш натижалари **референц эллипсоид, яъни геоид ичида ориентирланган эллипсоид** сатҳида қайта ишланади. Бунда, эллипсоидни геоид ичида ориентирлаш учун қуйидаги шартлар бажарилиши керак:

- эллипсоид ҳажми геоид ҳажмига тенг бўлиши керак;
- эллипсоид маркази Ер оғирлик марказида бўлиши ва эллипсоид кичик ўқи Ер айланиш ўқи билан устма-уст тушиши керак;
- баландлик жиҳатидан эллипсоид сатҳини геоид сатҳидан оғиши квадратларининг йиғиндиси энг кичик бўлиши керак.

Ер физик сатҳи эллипсоид сатҳига мос тушмаганлиги сабабли, геодезик ўлчаш натижаларини қайта ишлаш учун Ер сатҳидаги нуқталар эллипсоид сатҳига проекцияланади.

Бунда, **ер сатҳидан эллипсоид сатҳига ўтишдаги ҳисоблаш ишларигаредукцион муаммо дейилади.** Шу билан бирга эллипсоид сатҳидан текисликка ўтишда ҳам редукцион ҳисоблаш ишлари бажарилади. Шундай қилиб, сфероидик геодезияда қуйидагилар ўрганилади дейиш мумкин:

1. Ер эллипсоиди геометрияси.

2. Геодезик масалаларни эллипсоид сатҳида ечиш.

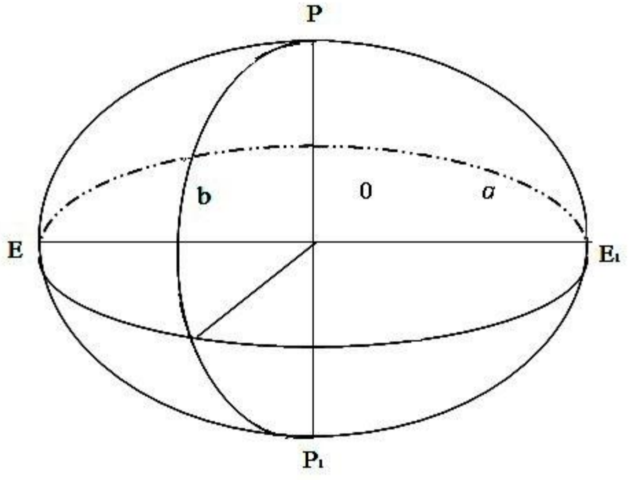
3. Эллипсоид сатҳининг катта қисмини текисликда тасвирлаш.

§ 1. ЕР ЭЛЛИПСОИДИНИНГ АСОСИЙ ФОРМУЛАЛАРИ ВА ЎЗАРО БОҒЛАНИШЛАРИ

Дастур: Ер эллипсоидининг асосий параметрлари. Сфероидик геодезияда (СГ) қўлланиладиган координата системалари ва улар орасидаги ўзаро боғланишлар. Бош эгрилик радиуслари. Ихтиёрий кесим эгрилик радиуси. Эллипсоид сатҳида берилган нуқта ўртача эгрилик радиуси. Меридиан ва параллел ёй узунлиги. Сфероидик трапеция майдони. Харита трапециясининг ҳошияларини ҳисоблаш.

Ер эллипсоидининг асосий параметрлари

1.1-шаклда келтирилган эллипсоид учун қуйидагича белгилашлар киритамиз:



1.1-шакл.

- О–эллипсоид маркази;

- РР1–эллипсоид айланиш ўқи;

- ОЕАЕ1 – экватор текислиги;

- *а* (*а = ОЕ = ОЕ1 = ОА*)- эллипсоид **катта ярим ўқи,** яъни экваториал ярим ўқ;

- *b* -эллипсоид **кичик ярим ўқи** (қутб ярим ўқ) (*b* = ОР = ОР1);

- α - эллипсоид **қутб сиқилиши**

$$\alpha=\frac{a-b}{a} \; ; \qquad \textbf{(1.1)}$$

е – эллипсоид **биринчи эксцентриситети**

$$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2} \; ; \qquad \textbf{(1.2)}$$

е′ - эллипсоид **иккинчи эксцентриситети**

$$e'^2=\frac{a^2-b^2}{b^2} \; ; \qquad \textbf{(1.3)}$$

Келтирилган *a, b,* α, е, е' сонлари ер эллипсоидининг параметрлари дейилади. Улардан *a, b* ёки *a,* α **параметрлар асосий, қолганлари ёрдамчи параметр ҳисобланади**

$c=\frac{a^2}{b^2}$ **-** сонга қутб эгрилик радиуси дейилади.

Ер эллипсоидининг параметрлари орасидаги боғланишларни қараб чиқамиз.

1. ***е* ва *е'* орасидаги боғланиш**

(1.2) ва **(1.3)** формулалар устида алмаштиришлар бажариб қуйидагиларга эга бўламиз

$$\frac{b^2}{a^2}=1-e^2 \qquad \textbf{(1.4)}$$

$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{1+e'^2} \qquad \textbf{(1.5)}$$

(1.4) ва **(1.5)** формулалар чап томонлари тенг.

Уларнинг ўнг томонларини тенглаштириш натижасида е ва е’ орасидаги боғланишларни топамиз:

$$e^2 = \frac{e'^2}{1+e'^2} \qquad \textbf{(1.6)}$$

ёки

$$e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \qquad \textbf{(1.7)}$$

2. *e* ва α орасидаги боғланиш

(1.1) формуладан $\frac{b}{a} = 1-\alpha$ ни ҳосил қилиб, уни **(1.4)** формулага қўйсак

$$1-e^2 = (1-\alpha)^2$$

ёки

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2 \qquad \textbf{(1.8)}$$

келиб чиқади.

(1.8) формулада α^2 кичик миқдор бўлишлигини ҳисобга олсак

$$e^2 \approx 2\alpha \qquad \textbf{(1.9)}$$

муносабат ҳосил бўлади.

Ер эллипсоидининг асосий параметрлари Красовский эллипсоиди учун қуйидагича қабул қилинган:

a = 6378245,0000 м	lg a = 6.8046011973
b = 6356863,01877 м	lg b = 6.8032428531
c = 6399698,90178 м	lg c = 6.8061595414
α = 0,003352329869	lg α= 7.5253467466^{-10}
e^2 = 0,006693421623	lg e^2 = 7.8256481824^{-10}
e'^2 = 0,006738525415	lg e'^2 = 7.828564707^{-10}

$\frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2}$ = 0,9966476701

$\frac{a}{b} = \sqrt{1+e'^2}$ = 1,0033636058

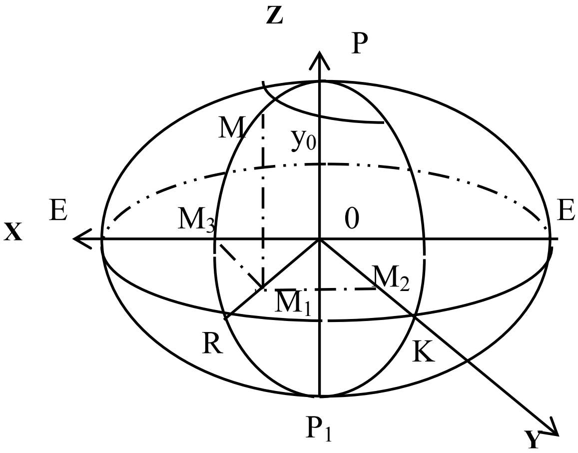
$\frac{a+b}{2}$= 6367554.0094 м

lg b = 5.314425133	ρ = 206265
lgc = 9.637784311	μ = 0.4343

§1.1 СФЕРОИДИК ГЕОДЕЗИЯДА ҚЎЛЛАНИЛАДИГАН КООРДИНАТА СИСТЕМАЛАРИ

Сферик геодезияда қўлланиладиган координата системалари билан танишамиз.

1. Фазодаги тўғри бурчакли *OXYZ* координата системаси



1.2-шакл.

Бу координата системасида:

О - координата боши эллипсоид марказида;

OZ - ўқи эллипсоид айланиш ўқида;

OX - ўқи бошланғич (Гринвич) меридиан PEP_1 билан экватортекислигида, **OY**ўқи - бошланғич меридиан текислигига перпендикуляр бўлган PKP_1меридиан текислиги билан экватор текислигида жойлашади. Бу системада $X_M=OM_3=M_1M_2$; $У_M=OM_2=M_3M_1Z_M=MM_1$

2. Геодезик координата системаси *(B, L)*

1.3-шакл.

PEP_1- бошланғич меридиан;

PRP_1- M нуқтадан ўтувчи меридиан;

$OERE_1$- экватор текислиги;

Mn- нуқтадан ўтган эллипсоид сатҳига нормал чизиқ келтирилган.

Бу координата системасида эллипсоид сатҳидаги нуқтанинг планли ҳолати **геодезик кенглик *B*, геодезик узоқлик *L*** орқали аниқланади.

Эллипсоид сатҳидаги нуқтадан ўтган нормал чизиқ билан экватор текислиги орасида ҳосил бўлган бурчакка нуқтанинг геодезик кенглиги дейилади $(B_M = \angle Mn'R)$

Кенглик 0^0-90^0 оралиғда қиймат қабул қилади. Координатаси аниқланаётган нуқта шимолий ярим шарда бўлса шимолий кенглик, жанубий ярим шарда бўлса жанубий кенглик деб аталади.

Нуқтанинг геодезик узоқлиги деб бошланғич меридиан текислиги билан координатаси аниқланаётган нуқтадан ўтган геодезик меридиан текисликлари орасида ҳосил бўлган икки ёқли бурчакка айтилади (1.3-шаклда $L=\angle EOR$**).**

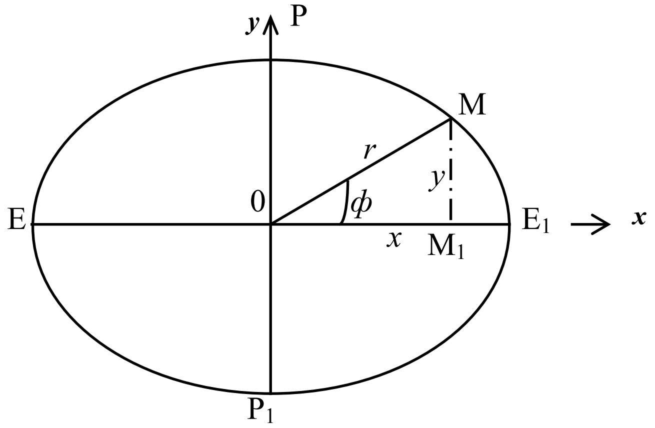
Геодезик узоқлик, нуқта бошланғич меридиан таъсислигидан шарқда ётган бўлса шарқий, акс ҳолда ғарбий деб аталади ва 0^0-180^0 оралиғда қийматни қабул қилади.

Координатаси аниқланаётган нуқтанинг физик сатҳидаги ҳолатини билиш учун *B, L* дан ташқари унинг **геодезик баландлигини** билиш керак.

Ер сатҳида жойлашган нуқтадан нормал чизиқ бўйича эллипсоид сатҳигача бўлган кесмага (чизиқ узунлигига) нуқтанинг геодезик баландлиги дейилади (1.3-шаклда $H=MM_1$**).**

Бу координата системаси назарий хулосалар чиқаришда ва ҳисоблаш ишларида кенг қўлланилади.

3. Берилган нуқта меридиан текислигидаги тўғри бурчакли (*Oxy*) координата системаси



1.4-шакл.

Бу координата системасида:

О - координата бошида,

Ох - ўқи экваториал ўқда,

Оу - ўқи кутб ўқида жойлашади (1.4-шакл) ва даставвал нуқта жойлашган меридиан текислигининг ҳолати *L* аниқланади. Нуқтани элепсоид сатхидан ҳолати L, x ва y орқали ифодаланади.

Бу координаталар системаси назарий хулосалар чиқаришда ишлатилади.

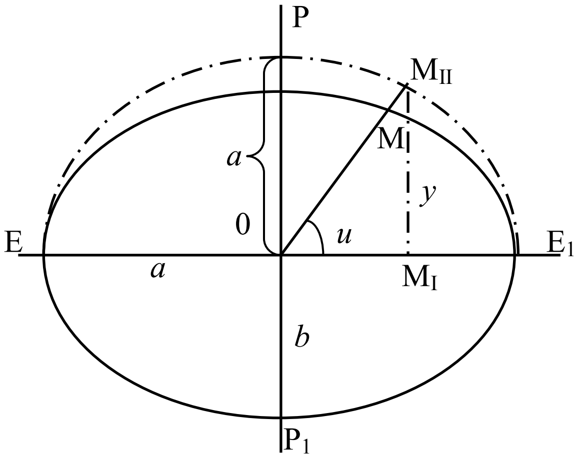
4. Геоцентрик координата системаси (*L*, ϕ)

Эллипсоид сатҳида нуқтани ҳолати геодезик узоқлик *L* ва **геоцентрик узоқлик** ϕ орқали ифодаланади.

Нуқта билан эллипсоид марказини бирлаштирувчи радиус вектор *r* ва экватор текислиги орасида ҳосил бўлган бурчакка нуқтани геоцентрик кенглиги дейилади (1.4-шакл).

Бу координата системаси астрономия ва математик картографияда кенг қўлланилади.

5. Келтирилган кенглик билан геодезик узоқлик (*u, L*) координата системаси



1.5-шакл.

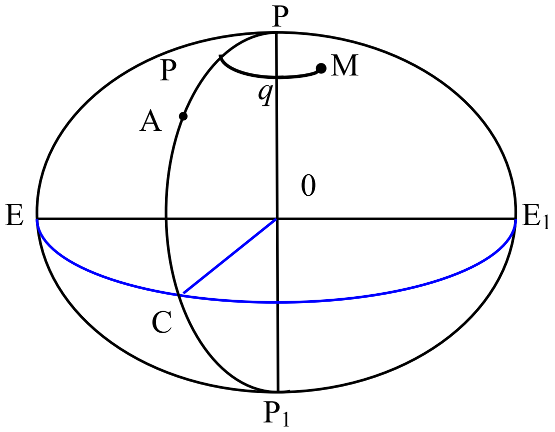
Келтирилган кенгликни ҳосил қилиш учун, маркази эллипсоид марказида бўлган радиуси катта ярим ўққа тенг бўлган ёрдамчи айлана чизамиз. Ордината MM_I ни ёрдамчи айлана билан кесишгунча давом эттиришдан ҳосил бўлган M_{II} нуқта билан эллипсоид марказини бирлаштириш натижасида ҳосил бўлган $M_{II}OM_I$ бурчакга келтирилган кенглик дейилади **(1.5-шакл).**

Келтирилган кенглик(*u*) катта масофаларда геодезик масалаларни ечишда кенг ишлатилади.

6. Тўғри бурчакли сфероидик координата системаси

Бу координата системасида координата боши сифатида бирор-бир нуқта олинади (Бу нуқтанинг эллипсоид сатҳидаги координатаси аниқланган бўлиши керак).

Координатаси аниқланаётган *M* нуқтани ҳолати координата боши деб қабул қилинган *A* нуқтадан, шу нуқтадан ўтган параллелгача бўлган меридиан ёй узунлиги *P* ва шу меридиандан нуқтагача бўлган параллел ёй узунлиги *q* орқали ифодаланади ($P \perp q$) (1.6-шакл).



1.6-шакл.

7. Ясси тўғри бурчакли координата системаси

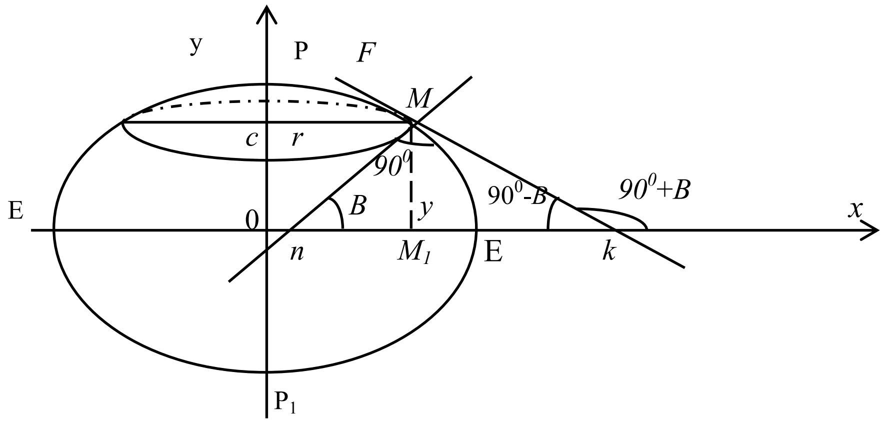
Бу координата системаси геодезия фанида ўрганилганлиги сабабли сфероидик геодезияда бу координата системасини кейинчалик қараб чиқамиз.

Текшириш учун саволлар:

1. Ер эллипсоидининг асосий параметрлари.
2. e ва e' орасидаги боғланишлар.
3. e ва α орасидаги боғланиш.
4. Сфероидик геодезияда қўлланиладиган координаталар системалари.
5. Геодезик, геоцентрик, келтирилган кенгликларнинг таърифлари.
6. Геодезик узоқликнинг таърифи.
7. Геодезик баландликнинг таърифи.
8. Қайси координата системалари фақат назарий хулосалар чиқаришда ишлатилади?
9. Қандай эллипсоидга референц эллипсоид дейилади?

§ 2. АЙРИМ КООРДИНАТА СИСТЕМАЛАРИ ОРАСИДАГИ БОҒЛАНИШЛАР

1. Геодезик кенглик *B* ва ҳолати аниқланаётган нуқта меридианал текислигидаги тўғри бурчакли *x, y* координаталари орасидаги боғланиш.



2.1-шакл.

KMF-координатаси аниқланаётган *M* нуқтага ўтказилган уринма бўлсин. Математикадан маълумки эгри чизиқ нуқтасига ўтказилган уринма билан абсцисса ўқининг мусбат йўналиши орасидаги бурчак тангенси биринчи тартибли $\frac{dy}{dx}$ ҳосилага тенг бўлади. У ҳолда 2.1-шаклдан кўринадики.

$$\frac{dy}{dx} = tg\,(90^0 + B) =- ctg\;\;B =- \frac{1}{tgB} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Эллипс тенгламасини ёзамиз

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \text{бундан } y = (b^2 - \frac{x^2b^2}{a^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(2.2)}$$

(2.2)ни дифференциаллаб

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{2x\cdot b^2}{a^2}\right) \qquad \textbf{(2.3)}$$

ни ҳосил қиламиз.

(2.3) дан **(2.1)** ва **(2.2)** ни ҳисобга олиб топамиз:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{xb^2}{ya^2}=\frac{-1}{tgB} \qquad \textbf{(2.4)}$$

ёки

$$y=\frac{b^2x}{a^2}tgB \qquad \textbf{(2.5)}$$

(2.5) ни эллипс формуласига қўйсак:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2x^2tg^2B}{a^4}=1 \qquad \textbf{(2.6)}$$

$b=a\sqrt{1-e^2}$ эканлигини инобатга олсак

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\left(1-e^2\right)x^2tg^2B}{a^2}=1,$$

бундан

$$\frac{x^2}{a^2}\left[1+\left(1-e^2\right)\cdot tg^2B\right]=1;$$

$$x^2\left[1+tg^2B-e^2tg^2B\right]=x^2\left[\frac{1}{\cos^2 B}-e^2\frac{\sin^2 B}{\cos^2 B}\right]=x^2\frac{1-e^2\sin^2 B}{\cos^2 B}=a^2;$$

ёки

$$x=\frac{a\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} \qquad \textbf{(2.7)}$$

келиб чиқади.

(2.5) формуладан $\frac{b^2}{a^2}=1-e^2$ эканлигини инобатга олсак,

$$y=\left(1-e^2\right)xtgB \qquad \textbf{(2.8)}$$

ёки **(2.7)** асосида

$$y=\left(1-e^2\right)\frac{a\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}tgB;$$

келиб чиқади.

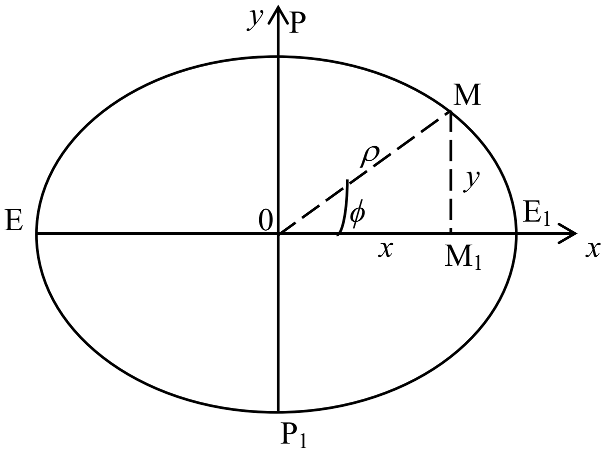
Бундан:

$$y=\frac{a\left(1-e^2\right)\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} \qquad \textbf{(2.9)}$$

Нуқтадан ўтган параллел радиуси *r* абсцисса *x* га тенг бўлганлиги сабабли **(2.7)** ни қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$x = r = \frac{a\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} \qquad \mathbf{(2.10)}$$

2. Геодезик кенглик *B* ва геоцентрик кенглик ϕ орасидаги боғланиш



2.2-шакл.

2.2-шаклдан топамиз:

$$tg\phi = \frac{y}{x} \qquad \mathbf{(2.11)}$$

(2.5)формуладан $\frac{y}{x} = \frac{b^2}{a^2}tgB$**(1.4)**ни хисобга олсак

$$\frac{y}{x} = (1-e^2)tgB$$

$tgB = \frac{a^2}{b^2}\frac{y}{x}$ва $b = a\sqrt{1-e^2}$ =>$\frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2}$муносабатлардан келиб чиқади.

$$\frac{y}{x} = \left(1-e^2\right)\cdot tgB \qquad \mathbf{(2.12)}$$

(2.11)дан **(2.12)** асосида аниқлаймиз:

$$tg\phi = \left(1-e^2\right)\cdot tgB \qquad \mathbf{(2.13)}$$

(2.13)да қуйидагича алмаштиришлар бажарамиз:

$$\mathrm{e}^2\mathrm{tgB} = \mathrm{tgB} - \mathrm{tg}\phi$$

$$\mathrm{e}^2\mathrm{tgB} = \frac{\sin(\mathrm{B}-\phi)}{\mathrm{cosBcos}\phi}$$

$$\mathrm{e}^2\mathrm{sinBcos}\phi = \sin(\mathrm{B}-\phi)$$

$(B-\phi)$ кичик қийматлигини инобатга олиб, $\cos\phi \approx \cos B$ ва $\sin(B-\emptyset) \approx B-\emptyset$ деб оламиз, унда

$$(B-\phi)=e^2\sin B\cos B$$

ёки

$$(B-\phi)=\frac{1}{2}e^2\sin 2B \text{ келиб чиқади.}$$

Бундан:

$$(B-\phi)''=\frac{1}{2}\rho''e^2\sin 2B \qquad \textbf{(2.14)}$$

(2.14) дан агар $B=45^0$ бўлса, $(B-\phi)''=11.8''$бўлиши келиб чиқади.

3. Геоцентрик кенглик ϕ ва нуқта меридиан текислигидаги *x,y* координаталари орасидаги боғланиш

2.2-шаклдан қутб координаталарига ўтиб

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\,; \qquad x=\rho\cos\phi, y=\rho\sin\emptyset \qquad \textbf{(2.15)}$$

уларни эллипс тенгламасига қўямиз

$$\frac{\rho^2\cos^2\phi}{a^2}+\frac{\rho^2\sin^2\phi}{b^2}=\frac{\rho^2\cos^2\phi}{a^2}+\frac{\rho^2\sin^2\phi}{a^2\left(1-e^2\right)}=1 \qquad \textbf{(2.16)}$$

(2.16) дан алмаштиришлар бажарамиз

$$\frac{\rho^2}{a^2\left(1-e^2\right)}\left\{\cos^2\phi\left(1-e^2\right)+\sin^2\phi\right\}=1$$

Бундан:

$$\frac{\rho^2}{a^2\left(1-e^2\right)}\left(1-e^2\cos^2\phi\right)=1$$

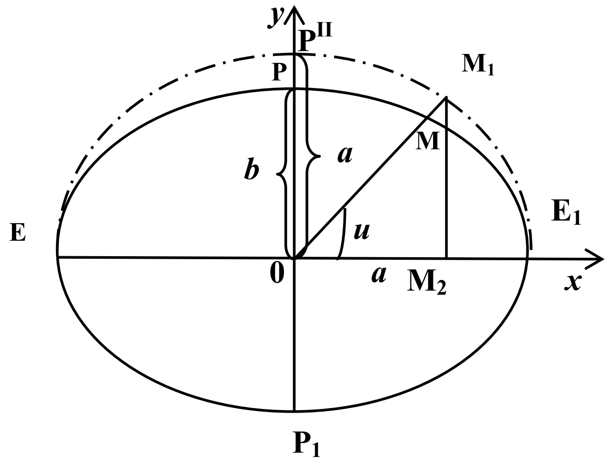
$$\rho=\frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\phi}} \qquad \textbf{(2.17)}$$

(2.17)ни **(2.15)** га қўйиб, изланаётган боғланишни аниқлаймиз:

$$x=a\cos\phi\sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2\cos^2\phi}}$$

$$y = a\sin\phi\sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2\cos^2\phi}} \qquad (2.18)$$

4. Келтирилган кенглик u ва геодезик кенглик *B* орасидаги боғланиш



2.3-шакл.

2.3-шаклда:

EPE_1P_1- меридианалкесим,

$EP''M_1E_1$-a радиусдаги ярим айлана берилган.

Айлана ординатаси M_1M_2ва эллипс ординатаси MM_2орасидаги боғланишни ўрганамиз. $\Delta\, OM_1M_2$дан

$$a^2 = (M_1M_2)^2 + (OM_2)^2 \qquad \textbf{(2.19)}$$

Эллипс тенгламасини 2.3-шаклдаги белгиларни инобатга олиб ёзамиз:

$$OM_2 = x,\ \ MM_2 = y$$

$$\frac{(OM_2)^2}{a^2} + \frac{(MM_2)^2}{b^2} = 1$$

бундан:

$$a^2 = (OM_2)^2 + \frac{a^2}{b^2}(MM_2)^2 \qquad \textbf{(2.20)}$$

(2.19) билан **(2.20)** ни солиштирамиз, унда

$$(M_1M_2)^2 + (OM_2)^2 = (OM_2)^2 + \frac{a^2}{b^2}(MM_2)^2\ ;$$

$$(M_1M_2)^2 = \frac{a^2}{b^2}(MM_2)^2 b^2 (M_1M_2)^2 = a^2 (MM_2)^2$$

$MM_2=y$ эканлигини инобатга олсак

$$y = \frac{b(M_1M_2)}{a} \qquad \textbf{(2.21)}$$

2.3-шаклдан

$$\left.\begin{array}{r} x = a\cos u \\ M_1M_2 = a\sin u \end{array}\right\} \qquad \textbf{(2.22)}$$

келиб чиқади.

(2.22) га кўра **(2.21)** дан

$$y = (M_1M_2)\frac{b}{a} = a\sin u\frac{b}{a} = b\sin u \qquad \textbf{(2.23)}$$

ни ҳосил қиламиз.

(2.22) ва (2.23) эллипс тенгламасининг параметрик кўриниши дейилади.

(2.22) ва **(2.23)** формулаладан топамиз:

$$\frac{y}{x} = \frac{b\sin u}{a\cos u} = \frac{b}{a}tgu = \sqrt{1-e^2}\,tgu \qquad \textbf{(2.24)}$$

$$tgu = \frac{y}{x\sqrt{1-e^2}} \qquad \textbf{(2.25)}$$

(2.12)дан

$$\frac{y}{x} = (1-e^2)\cdot tgB$$

эканлигини ҳисобга олиб **(2.25)** дан

$$tgu = \sqrt{1-e^2}\,tgB \qquad \textbf{(2.26)}$$

ни ҳосил қиламиз:

(2.26) нинг ўнг ва чап томонини *tgB* дан айирамиз

$$tgB - tgu = tgB - \sqrt{1-e^2}\,tgB \qquad \textbf{(2.27)}$$

ёки

$$\frac{\sin(B-u)}{\cos B\cos u} = tgB\left(1-\sqrt{1-e^2}\right) = tgB\left[1-(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\right] \qquad \textbf{(2.28)}$$

(2.28) да қуйидагича алмаштиришларни бажарамиз:

1) $cosu \approx cosB$ деб оламиз;

2) $\left(1-e^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ни қаторга ёямиз ва иккита ҳади билан чегараланамиз

$$\left(\sqrt{1-e^2}=1-\frac{e^2}{2}+\frac{e^4}{2}-\frac{e^6}{16}+....\approx 1-\frac{e^2}{2}\right);$$

3) $sinB\ cosB = \frac{1}{2}\sin 2B$ эканлигини инобатга оламиз;

У ҳолда $\sin\left(B-\mathrm{u}\right)=\frac{1}{2}\sin 2B\left[1-\left(1-\mathrm{e}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$,

$$\sin\left(B-u\right)=\frac{1}{2}\sin 2B\left(1-1+\frac{e^2}{2}\right)=\frac{e^2}{4}\sin 2B$$

ёки $\sin(B-u)\approx B-u$ деб олсак.

$$(B-u)=\frac{1}{4}e^2\sin 2B \qquad \textbf{(2.29)}$$

ва

$$\left(B-u\right)''=\frac{1}{4}e^2\rho''\sin 2B \qquad \textbf{(2.30)}$$

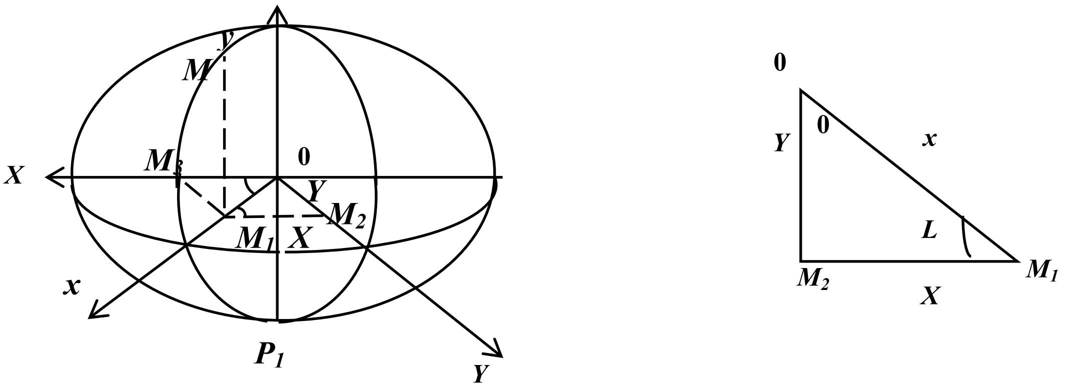
келиб чиқади.

(2.22) формуладан параллел радиуси

$$r = x = a\ cos\ u \qquad \textbf{(2.31)}$$

5. *X, Y, Z* ва бошқа координаталар орасидаги боғланишлар

Δ OM₁M₂ дан



2.4-шакл.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{X}{x} = \cos L \to X = x\cos L \\ \dfrac{Y}{x} = \sin L \to Y = x\sin L \\ Z = y \end{array}\right\} \qquad \textbf{(2.32)}$$

(2.32)ни **(2.23)**ва **(2.31)**ларни инобатга олиб ёзамиз:

$$\left.\begin{array}{l} X = a\cos u\cos L \\ Y = a\cos u\sin L \\ Z = b\sin u = a\sqrt{1-e^2}\,\sin u \end{array}\right\} \qquad \textbf{(2.33)}$$

(2.32), (2.10), (2.9)асосида қуйидагиларни аниқлаймиз:

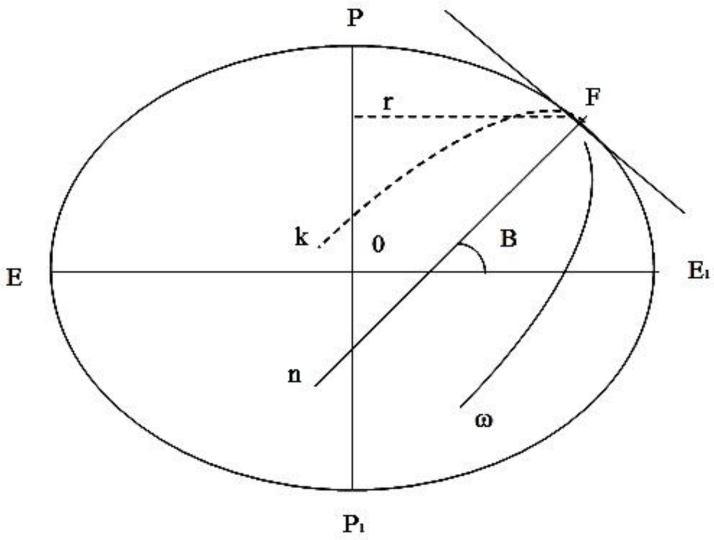
$$\left.\begin{array}{l} X = \dfrac{a\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}\cos L \\ Y = \dfrac{a\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}\sin L \\ Z = \dfrac{a\left(1-e^2\right)\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} \end{array}\right\} \qquad \textbf{(2.34)}$$

Текшириш учун саволлар:

1. Нима учун берилган нуқта меридианал текислигидаги тўғри бурчакли координаталар системасининг абсциссаси шу нуқтадан ўтган параллел радиусига тенг бўлади?

2. Қайси геодезик кенгликда $y = x\left(1-e^2\right)tgB$ B=45° tgB=1.

§ 3.ЭЛЛИПСОИДДА БЕРИЛГАН НУҚТАДАГИ БОШ ЭГРИЛИК РАДИУСИ



3.1-шакл.

Эллипсоидга туширилган нормалдан чексиз кўп текислик ўтказиш мумкин. Бу текисликлар нормал туширилган нуқтага уринма бўлган текисликка перпендикуляр бўлади ва **нормал текислик** деб аталади.

Нормал текислик эллипсоид сатҳини кесиши натижасида ҳосил бўлган кесимга нормал кесим дейилади. Нормал кесимлар орасида фақатгина иккита шундай кесим мавжудки улар ўзаро перпендикуляр бўлиб, бири энг катта иккинчиси энг кичик **эгрилик радиусига** эга бўлади. Бу кесимларга **бош нормал** кесимлар дейилади.

Дифференциал геометриядан маълумки эллипсоид сатҳида қуйидагилар нормал кесимлардир:

1. PEP_1E_1F меридианал кесим ва эллипсоиднинг икки қутби.

2. ωFK F нуқтадан ўтган биринчи вертикал кесими.

$$\omega FK \perp PFE_1P_1E$$

M – билан, меридианал кесим эгрилик радиусини;

N – билан, биринчи вертикал кесимни эгрилик радиусини белгилаймиз.

Бош нормал кесимларни эгрилик радиусларни геодезик кенглик билан ифодаланган функция сифатида топамиз.

Математикадан маълумки меридианал кесим эгрилик радиуси қуйидаги формула орқали топилади

$$M = -\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \qquad \textbf{(3.1)}$$

(2.1)дан қуйидагини топамиз

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2 B}\frac{dB}{dx} \qquad \textbf{(3.2)}$$

$x = \frac{a\cos B}{\sqrt{1 - e^2\sin^2 B}} = a\cos B\left(1 - e^2\sin^2 B\right)^{-\frac{1}{2}}$ формуладан $\frac{dB}{dx}$ ни топамиз.

$$dx = \left\{ -a\sin B\left(1 - e^2\sin^2 B\right)^{-\frac{1}{2}} + a\cos B\left[-\frac{1}{2}\left(1 - e^2\sin^2 B\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-2e^2\sin B\cos B\right)\right]\right\} dB$$

$$dx = a\sin B\left(1 - e^2\sin^2 B\right)^{-\frac{3}{2}}\left\{-\left(1 - e^2\sin^2 B\right) + e^2\cos^2 B\right\}\cdot dB$$

$$dx = -a\sin B\left(1 - e^2\sin^2 B\right)^{-\frac{3}{2}}\left(1 - e^2\right)\cdot dB,$$

бундан:

$$\frac{dx}{dB} = -a\sin B\left(1 - e^2\sin^2 B\right)^{-\frac{3}{2}}\left(1 - e^2\right)$$

ёки

$$\frac{dB}{dx} = -\frac{\left(1 - e^2\sin^2 B\right)^{\frac{3}{2}}}{a\sin B\left(1 - e^2\right)}$$

$\frac{dB}{dx}$ ни **(3.2)**га қўйсак

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\left(1 - e^2\sin^2 B\right)^{\frac{3}{2}}}{a\sin^3 B\left(1 - e^2\right)} \qquad \textbf{(3.3)}$$

(2.1)ва **(3.3)** ни яьни $\frac{dy}{dx}$ *ва* $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ларни **(3.1)**га қўямиз

$$M = \frac{\left(1+ctg^2 B\right)^{\frac{3}{2}} a \sin^3 B\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\sin^2 B\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad \textbf{(3.4)}$$

ёки

$$\sqrt{1+ctg^2 B} = \sqrt{\left(\frac{\sin^2 B+\cos^2 B}{\sin^2 B}\right)^3} = \sqrt{\frac{1}{\sin^6 B}} = \frac{1}{\sin^3 B}$$

ни ҳисобга олсак

$$M = \frac{a\left(1-e^2\right)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2 B)^3}} \qquad \textbf{(3.5)}$$

B=90 ^{0}бўлганда (1.4) ва (1.5) ни инобатга олсак

$$M_{90^0} = c = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{a^2}{b} = a\sqrt{1+e'^2} \qquad \textbf{(3.6)}$$

меридианал кесимни қутбдаги эгрилик радиусини беради.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз

$W = \sqrt{1-e^2\sin^2 B}$ - геодезик кенгликни биринчи асосийфункцияси;

$V = \sqrt{1+e'^2\cos^2 B}$ - геодезик кенгликни иккинчи асосий функцияси.

M ни *V* орқали ифодалаймиз. Бунинг учун қуйидаги алмаштиришлар бажарамиз.

$$1-e^2\sin^2 B = 1-\frac{e'^2}{1+e'^2}\sin^2 B = \frac{1+e'^2 - e'^2\sin^2 B}{1+e'^2} = \frac{1+e'^2\cos^2 B}{1+e'^2} \; \textbf{(*)}$$

ва охирги ифодани **(3.5)**га қўямиз, ва **(3.6)** асосида ёзамиз $a(1+e')^{\frac{1}{2}} = c$

$$M = \frac{a\left(1-\frac{e'^2}{1+e'^2}\right)\sqrt{\left(1+e'^2\right)^3}}{\sqrt{\left(1+e'^2\cos^2 B\right)^3}} = \frac{a\left(1+e'^2\right)^{\frac{1}{2}}}{V^3} = \frac{c}{V^3} \qquad \textbf{(3.7)}$$

Биринчи вертикал кесим эгрилик радиуси

3.1-шаклдан (F·n=N)r=NcosB,(2.10) дан $r = \frac{a\cos B}{W}$ ларни аниқлаймиз ва уларни тенглаб, **(*)** инобатга олиб топамиз:

$$N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2 B)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{W} = \frac{c}{V} \tag{3.8}$$

M ва N ни солиштирамиз

$$\frac{N}{M} = \frac{a}{\left(1-e^2\sin^2 B\right)^{\frac{1}{2}}} : \frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\sin^2 B\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1-e^2\sin^2 B}{1-e^2} = \frac{1-e^2+e^2\cos^2 B}{1-e^2} =$$

$$=1+\frac{e^2\cos^2 B}{1-e^2}$$

демак $N \geq M$

(1) биринчи ва (2) иккинчи геодезик катталиклар деб аталувчи қуйидаги белгилашларни киритамиз

$$\frac{\rho''}{M} = (1) \quad \frac{\rho''}{N} = (2)$$

M– меридиан эгрилик радиуси меридиан ёй узунлиги ва кенгликлар фарқини; N-биринчи вертикал кесим эгрилик радиуси параллеллар ёйи узунлиги, узоқликлар ва азимутлар фарқини ҳисоблашда ишлатилади.

(3.5), (3.8) формулаларнинг $(1-e^2sin^2B)^{-\frac{3}{2}}$ва $(1-e^2sin^2B)^{-\frac{1}{2}}$ махражларини бином қаторига ёйиб, мураккаб бўлмаган ўзгартиришлар киритиб, Красовский референц-эллипсоидини элементларини метр бирлигида киритиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} &M = 6367588{,}4969-32072{,}9605\cos 2B+67{,}3123\cos 4B-0{,}1319\cos 6B + \\ &+0{,}0002\cos 8B - \ldots = 6335552{,}7170 + \\ &63609{,}7883\sin^2 B + 532{,}2089\sin^4 B + +4{,}1558\sin^6 B + 0{,}0317\sin^8 B \\ &N= 6388958{,}4431 - 10726{,}9320\cos 2B + 13{,}5077\cos 4B - \\ &0{,}0189\cos 6B - \ldots = 6335552{,}7170 + 63609{,}7883\sin^2 B + 532{,}2089\sin^4 B + \\ &4{,}1558\sin^6 B + 0{,}0317\sin^8 B \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

Юқоридаги M ва N ни ҳисоблаш формулалари сефереодик геодезия масалаларини ечишни классик ёндошувига асосланган. M ва N ларни ҳисоблаш формулалари муҳим эканлигини инобатга олиб, бошқа йўл билан бу формулаларни ҳосил қиламиз.

Эйлерни даражали фукцияни занжир касрга ёйиш формуласидан фойдаланамиз

$$(1+y)^{\nu} = 1 + \frac{\nu y}{1} + \frac{(1-\nu)y}{2} + \frac{(1+\nu)y}{3} + \frac{(2-\nu)y}{2} + \cdots + \frac{(n-\nu)y}{2} + \frac{(n+\nu)y}{2n+1} \dots \quad \mathbf{(3.10)}$$

(3.10) қатор ўзгарувчи y ни бутун комплекс текислигида яқинлаштирувчи, ҳақиқий ўқни y=-1 дан $y = -\infty$, бўлган қирқимида, y ўзгарувчини барча комплекс текислигида яқинлашувчи. У ни ҳақиқий мусбат ёймаси учун, **(3.10)** y аргументни ҳар қандай қиймати учун қўллаш мумкин, бунинг учун занжир касрни зарурий звеноларини олиш етарли. Қаторни икки ҳади билан чегараланамиз:

$$(1+y)^{\nu} \approx 1 + \frac{\nu y}{1} + \frac{(1-\nu)y}{2} \qquad \mathbf{(3.11)}$$

Математик исботдаги амалларни тушириб қолдириб (3.10) ифодани қуйидагича ёзишимиз мумкин

$$(1+y)^{\nu} \approx \frac{2+(1+\nu)y}{2+(1-\nu)y} \qquad \mathbf{(3.12)}$$

(3.7) ва **(3.8)** формулалардаги

$$w = \sqrt{1 - e^2 \sin^2\beta} = (1 - e^2 \sin^2\beta)^{1/2} \qquad \mathbf{(3.13)}$$

$$v = \sqrt{1 + e^2 \cos^2\beta} = (1 + e^2 \cos^2\beta)^{1/2} \qquad \mathbf{(3.14)}$$

Ўзгарувчи y ни **(3.12)** бўйича мос равишда ёзишимиз мумкин.

$y = -1 - e^2 \sin^2\beta$ва $y = 1 + e^2 \cos^2\beta$

$\nu = \frac{1}{2}$

Бундан,

$$w = \frac{1 - 0.75e^2 \sin^2\beta}{1 - 0.25e^2 \sin^2\beta} \qquad \mathbf{(3.15)}$$

$$v = \frac{1 + 0.75e^2\cos^2\beta}{1 + 0.25e^2\cos^2\beta} \qquad (3.16)$$

$$w^3 = \frac{1 - 0.75e^2\sin^2\beta}{1 + 0.25e^2\sin^2\beta} \qquad (3.17)$$

$$v^3 = \frac{1 + 0.75e^2\cos^2\beta}{1 + 0.25e^2\cos^2\beta}$$

Унда **(3.7)** ва **(3.8)** формулалар қуйидаги кўринишга келади

$$M = a(1 - e^2)\frac{1 + 0.25e^2\sin^2\beta}{1 - 1.25e^2\sin^2\beta} = c\frac{1 - 0.25e^2\cos^2\beta}{1 + 1.25e^2\cos^2\beta} \qquad (3.18)$$

$$N = a\frac{1 - 0.25e^2\sin^2\beta}{1 - 0.75e^2\sin^2\beta} = c\frac{1 + 0.25e^2\cos^2\beta}{1 + 0.75e^2\cos^2\beta} \qquad (3.19)$$

Занжир касрни икки звеноси учун **(5.16)** ни яқинлашишидаги абсалют хатоси қуйидаги формула билан ҳисобланиши мумкин.

$$\Delta_{2(y)} < \frac{1}{4}\left|\frac{y^3}{(2 + y)(4 + y)}\right| \qquad (3.20)$$

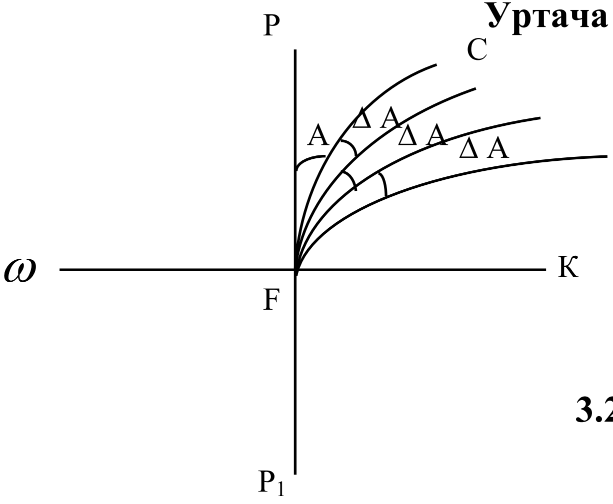
Δ_2 белги индексидаги икки занжир касрни икки звеносига мос яқинлашишни кўрсатади.

(3.15) ва **(3.16)** ифодаларда e^2 ва e'^2 ларни 0.0067 га тенг деб олиб, B кенгликни ихтиёрий қиймати учун, қуйидагини оламиз:

$$\Delta_{2(y)} < \frac{1}{4}\left|\frac{0.007^3}{2.007 * 4.007}\right| < 0.9 * 10^{-8}$$

(3.15) ва **(3.16)** формулалардан фойдаланиб W, V, M ва N ларни $1 * 10^{-8}$ гача бўлган, етарли аниқликда хисоблаш мумкин.

Ўртача эгрилик радиуси



3.2-шакл.

Ўртача эгрилик радиуси айрим назарий ва амалий геодезик масалаларни ечишда ёрдамчи катталик сифатида ишлатилади.

3.2-шаклдаPFP_1 - меридианал кесим

ω FK – биринчи вертикал кесим;

$FC – A$ азимутга эга бўлган ихтиёрий нормал кесим бўлсин. Азимут кетма-кет қуйидаги қийматларни олсин деб фараз қиламиз:

$$O, \ \Delta A, 2\Delta A, \ldots ,2\pi - \Delta A$$

У вақтда бу азимутлар бўйича ўтган нормал кесимлар сони $\frac{2\pi}{\Delta A}$ та бўлади.

Математикадан бизга маълумки ихтиёрий нормал кесим эгрилик радиуси қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$r = \frac{MN}{N\cos^2 A + M\sin^2 A};$$

ΔA оралиғидан ўтказилган нормал кесимлар ўрта арифметик эгрилик радиуси:

$$R_1 = \frac{\sum\limits_{0}^{2\pi-\Delta A} \frac{MN}{N\cos^2 A + M\sin^2 A}}{\frac{2\pi}{\Delta \mathrm{A}}} = \frac{\sum\limits_{0}^{2\pi-\Delta A} \frac{MN\cdot\Delta A}{N\cos^2 + M\sin^2 A}}{2\pi}$$

формула билан топилади.

Нормал кесимлар сони берилган нуқтада чексизликка интилганда ўрта арифметик эгрилик радиуси ўртача эгрилик радиуси дейилади, яъни:

$\Delta \mathrm{A} \to \mathrm{O}$ да $\lim R_1 = R$

унда $$R = \frac{4}{2\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{MN}{N\cos^2 A + M\sin^2 A} dA;$$

(O дан $\frac{\pi}{2}$ гача бўлган ораликда ΔA интервалдаги нормал кесимлар олинса кифоя).

Интеграл остидаги функция сурат ва махражини $N\,cos^2A$ га бўламиз, унда

$$R = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{M}{\cos^2 A}}{1+\frac{M}{N}tg^2 A}dA$$

$\sqrt{MN}$ ни интеграл белгисидан ташқарига чиқарамиз:

$$R = \frac{2}{\pi}\sqrt{MN}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\frac{M}{N}} * \frac{dA}{\cos^2 A}}{1+\left(\sqrt{\frac{M}{N}} * tgA\right)^2}$$

$$dt = \sqrt{\frac{M}{N}} * \frac{dA}{cos^2A}$$

$\sqrt{\frac{M}{N}}\,tgA$ ни t билан белгилаймиз, унда

$$R = \frac{2}{\pi}\sqrt{MN}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}$$

Интеграллаймиз

$$R = \frac{2}{\pi}\sqrt{MN}arctgt|_0^{\infty}$$

$$R = \frac{2}{\pi}\sqrt{MN}arctgt|_0^{\infty} = \frac{2}{\pi}\sqrt{MN}\frac{\pi}{2}$$

ёки

$$R = \sqrt{MN} \qquad \textbf{(3.10)}$$

(3.10)дан эллипсоид сатҳидаги нуқтада ўртача эгрилик радиуси бош нормал кесим эгрилик радиусларини ўрта геометрик қийматига тенг деган хулосага келиш мумкин.

(3.10)га **(3.7)** ва **(3.8)**ни қўйсак**(1.4)** ва геодезик кенглик асосий функциясини инобатга олсак

$$R = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{a}{(1-e^2\sin^2 B)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2 B} = \frac{b}{W^2} = \frac{c}{V^2}; \qquad \textbf{(3.11)}$$

$$R^2 = MN = \frac{c^2}{V^4} = \frac{N^2}{V^2}$$

R-учбурчакларни сферик ортиқлигини ҳисоблашда ва математик картографияда қўлланилади.

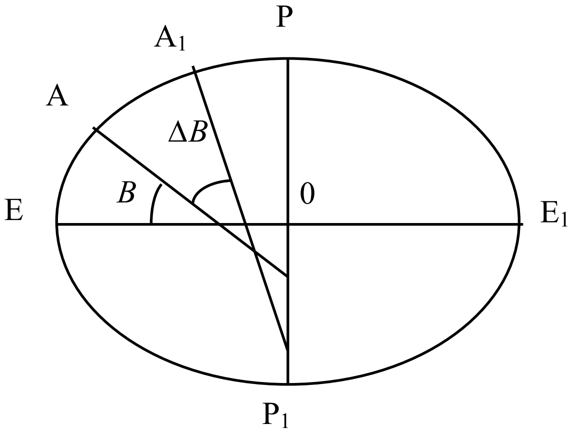
Текшириш учун саволлар:

1. Қандай кесимга нормал кесим дейилади?
2. Қандай кесимларга бош нормал кесимлар дейилади?
3. Эллипсоид сатҳидаги бош нормал кесимларини айтинг.
4. Меридианал кесим ва биринчи вертикал кесим эгрилик радиуси формулаларини ёддан ёзинг.
5. Геодезик кенглик асосий функцияларини ёддан ёзинг.
6. Қайси ифода тўғри? $M=N$; $N < M$; $N > M$; $N \geq M$.
7. Формулалардан қайси бири ўртача эгрилик радиуси формуласи бўлади?

$$R = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)^{\frac{3}{2}}}; \qquad \mathrm{R} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}$$

$$R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{W^2}; \qquad \mathrm{R} = \frac{\mathrm{a}(1-\mathrm{e}^2)}{W^3}$$

§ 4. МЕРИДИАН ЁЙ УЗУНЛИГИНИ ҲИСОБЛАШ



4.1-шакл.

P₁EP меридианда *A* нуқтанива ундан етарлича яқинмасофада *A₁* нуқтани оламиз. Бу оралиқ эгрилик радиусини *M* билан белгилаймиз. Чексиз кичик ёй узунлиги

$$dS = MdB \tag{4.1}$$

формула билан ҳисобланади. (4.1)га *M* нинг ифодасини қўйсак

$$dS = \frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\sin^2 B\right)^{\frac{3}{2}}}dB \tag{4.2}$$

келиб чиқади.

B₁ ва *B₂* кенгликлар оралиғидаги меридиан ёй узунлиги қуйидаги формула билан топилади:

$$S = \int_{B_1}^{B_2} \frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\sin^2 B\right)^{\frac{3}{2}}}dB = a\left(1-e^2\right)\int_{B_1}^{B_2}\frac{dB}{W^3}; \tag{4.3}$$

Интеграл остидаги функцияни бином қаторига ёямиз:

$$\frac{1}{W^3} = \left(1-e^2\sin^2 B\right)^{-3/2} = 1+\frac{3}{2}e^2\sin^2 B+\frac{15}{8}e^4\sin^4 B+\ldots\ldots. \tag{4.4}$$

Даражали функцияларни каррали ёй функциялари билан алмаштирамиз, яъни:

$$\sin^2 B = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2B;$$

$$\sin^4 B = \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2B+\frac{1}{8}\cos 4B;$$

У ҳолда (4.4) қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{1}{W^3} = 1+\frac{3}{2}e^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2B\right)+\frac{15}{8}e^4\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2B+\frac{1}{8}\cos 4B\right)+\ldots\ldots. =$$

$$= 1+\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{4}e^2\cos 2B+\frac{45}{64}e^4-\frac{15}{16}e^4\cos 2B+\frac{15}{64}e^4\cos 4B+\ldots\ldots...$$

ёки гуруҳласак:

$$\frac{1}{W^3} = \left(1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\ldots..\right)-\left(\frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\ldots\ldots.\right)\cos 2\mathrm{B}+\left(\frac{15}{64}e^4+\ldots..\right)\cos 4B-\ldots...$$

Белгилашлар киритамиз;

$$A = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + ... \qquad \mathbf{(*)}$$

$$B = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + ...$$

$$C = \frac{15}{64}e^4 + ...$$

У ҳолда:

$$\frac{1}{W^3} = A - B\cos 2B + C\cos 4B - ......,$$

келиб чиқади ва бу ифодани **(4.3)**га қўйсак

$$S = a\left(1 - e^2\right)\int_{B_1}^{B_2}\left(A - B\cos 2B + C\cos 4B - .....\right)dB$$

ҳосил бўлади.

Интеграллаш натижасида меридиан ёй узунлиги учун қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$S = a\left(1 - e^2\right)\left[A\left(B_2 - B_1\right) - \frac{1}{2}B\left(\sin 2B_2 - \sin 2B_1\right) + \frac{1}{4}C\left(\sin 4B_2 - \sin 4B_1\right) - ....\right]; \mathbf{(4.5)}$$

Геодезия амалиётида меридиан ёй узунлиги қуйидаги ҳолларда ҳисобланади:

1. Триангуляцияни ҳисоблашда.

2. Геодезик жадваллар тузишда.

3. Ер эллипсоиди ўлчамларини ҳисоблаш мақсадида градус ўлчовларини қайта ишлашда.

(4.5) формула кўриниши ҳисоблаш аниқлиги ва мақсадига боғлиқ ҳолда ўзгартирилади. Улардан айримларини келтирамиз:

а) Экватордан *B* кенгликкача бўлган ёй узунлигини ҳисоблаш жадвалини тузиш учун (яъни $B_1=0$, $B_2=B$) ишлатиладиган формула:

$$S_0 = a\left(1 - e^2\right)\left(A\frac{B''}{\rho''} - \frac{B}{2}\sin 2B + \frac{C}{4}\sin 4B - ......\right)$$

б) Ер эллипсоиди ўлчамларини ҳисоблаш мақсадида градус ўлчовларини қайта ишлашда кўлланиладиган формулани келтириб чиқамиз.

(*)ни инобатга олиб, **(4.5)** да синуслар айирмасини кўпайтмага келтириш формулаларидан фойдаланиб e^2 аниқликда ҳадларни сақлаб қоламиз

$$S = a\left(1-e^2\right)\left\{\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)\left(B_2-B_1\right)-\frac{3}{4}e^2\sin\left(B_2-B_1\right)\cos\left(B_2+B_1\right)\right\}$$

ва

$$\sin\left(B_2-B_1\right) = \left(B_2-B_1\right)-\frac{\left(B_2-B_1\right)^3}{6}+.....$$

$2B_m = B_2 + B_1$ дебқабул қиламиз, у ҳолда

$$S = a\left(1-e^2\right)\left\{\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)\left(B_2-B_1\right)-\frac{3}{4}e^2\left[\left(B_2-B_1\right)-\frac{\left(B_2-B_1\right)^3}{6}\right]\cdot\cos 2B_m\right\}$$

$\{\}$ичини $\left(1-e^2\right)$га кўпайтириб e^2аниқликда қуйидагини ҳосил қиламиз

$$S = a\frac{\left(B_2-B_1\right)''}{\rho''}\left\{1-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos 2B_m\right)e^2+\frac{1}{8}e^2\frac{\left(B_2-B_1\right)''^2}{\rho''^2}\cos 2B_m\right\}\textbf{(**)}$$

$e^2\left(B_2-B_1\right)$ ҳадни кичик қиймат эканлигини инобатга олсак кераkли аниқликдаги формулани ҳосил қиламиз.

$$S = a\frac{\left(B_2-B_1\right)''}{\rho''}\left\{1-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos 2B_m\right)e^2\right\} \qquad \textbf{(4.6)}$$

в) Триангуляцияни ҳисоблашда.

Триангуляция томон узунлиги 40÷50 км дан катта бўлмайди, шу сабабли **(4.5)**формулани соддалаштириб фойдаланиш мумкин.

$$B_m = \frac{B_2+B_1}{2} \qquad \text{ва} \qquad M_m = \frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\sin^2 B_m\right)^{\frac{3}{2}}}$$

белгилашларни ва қуйидаги ёрдамчи катталикни киритамиз:

$$S_1 = M_m \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} = a\left(1 - e^2\right)\frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''}\frac{1}{W^3} \qquad \textbf{(4.7)}$$

(*)ни инобатга олиб **(4.7)** ни ёзишимиз мумкин

$$S_1 = a\left(1 - e^2\right)\frac{(B_2 - B_1)}{\rho''}\left(A - B\cos 2B_m + C\cos 4B_m\right) =$$

$$a\left(1 - e^2\right)\frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''}\left\{\begin{matrix}\left(1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4\right) - \left(\frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4\right)\cos 2B_m + \\ + \frac{15}{64}e^4\cos 4B_m\end{matrix}\right\} \qquad \textbf{(4.8)}$$

(4.8)ни **(**)** билан таққослаб e^2 аниқликда қуйидагини ёзишимиз мумкин:

$$S = S_1 + \frac{a\left(1 - e^2\right)}{8}e^2\cos 2B_m\frac{(B_2 - B_1)''^{\,3}}{\rho''^3}$$

$a\left(1 - e^2\right) \approx M_m$ белгилаш киритсак

$$S = M_m\frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} + M_m\frac{e^2\cos 2B_m}{8}\cdot\frac{(B_2 - B_1)''^{\,3}}{\rho''^{\,3}} \qquad \textbf{(4.9)}$$

ёки

$$S = M_m\frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''}\left[1 + \frac{1}{8}e^2\cos 2B_m\frac{(B_2 - B_1)''^{\,2}}{\rho''^{\,2}}\right] \qquad \textbf{(4.10)}$$

ни ҳосил қиламиз.

(4.10) формула меридиан ёй узунлиги 400 км гача бўлган ҳолларда ишлатилиши мумкин, S =400 км бўлганда ±1 мм хатолик билан ёй узунлиги аниқланади.

S ≤45 км бўлганда (**4.10**) формулани қуйидаги кўринишга келтириб фойдаланишимиз мумкин:

$$S = M_m\frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} = \frac{(B_2 - B_1)''}{(1)_m} \qquad \textbf{(4.11)}$$

Агар *S* ва *B₁* берилган бўлса, **(4.11)** формуладан фойдаланиб, B_2 ни топиш ҳам мумкин. Бунинг учун кетма-кет яқинлашиш амалга оширилади:

(4.11)дан

$$(B_2 - B_1)'' = S(1)_m \;; \qquad \textbf{(4.12)}$$

$$B_2 = B_1 + (B_2 - B_1)''; \qquad \textbf{(4.13)}$$

Биринчи ҳисобда

$$(B_2 - B_1)''_1 = S(1)_m$$
$$(B_2)_1 = B_1 + (B_2 - B_1)''_1$$

Иккинчи ҳисобда

$$(B_m)_1 = \frac{B_1 + (B_2)_1}{2}$$
$$(B_2 - B_1)''_2 = S(1)_{m1}$$
$$(B_2)_2 = B_1 + (B_2 - B_1)''_2$$

Учинчи ҳисобда

$$(B_m)_2 = \frac{B_1 + (B_2)_2}{2}$$
$$(B_2 - B_1)''_3 = S(1)_{m2}$$

ва ҳоказо. Икки қўшни яқинлашишда $(B_2 - B_1)''_i$ ва $(B_2 - B_1)''_{i+1}$ бир хил натижа берган ҳолда яқинлашиш тўхтатилади ва у қиймат натижавий деб қабул қилинади ва **(4.13)**га қуйилади.

Юқорида **(4.3)** даги интиграл ости фукцияни Ньютоннинг бином қаторига ёйиш орқали меридиан ёйининг узунлигини ҳисоблаш формуласи келтириб чиқарилади.

Дастлабки:

$$S = \int_{B_1}^{B_2} M dB \qquad \textbf{(4.14)}$$

интегрални бошқа йўл билан тарибий ечимини берамиз.

Бунда интеграллаш интервалини икки қисмга бўлиб, **(4.14)** ифодага содда ва етарли даражада аниқ бўлган Симпсон формуласини (парабола формуласини) қўллаб, қуйидагини ёзишимиз мумкин.

$$S = \frac{\Delta B}{6}(M_1 + 4M_m + M_2)(\mathbf{4.15})$$

(4.15)формулада М- эгрилик радиуси ҳисобланиб меридиан ёйини учта нуқтасида аниқланади, мос равишда B_1, B_2 ва $B_m=1/2(B_1+B_2)$ кенгликларда.

(4.15) ни натижавий кўринишида қуйидагича ёзишимиз мумкин.

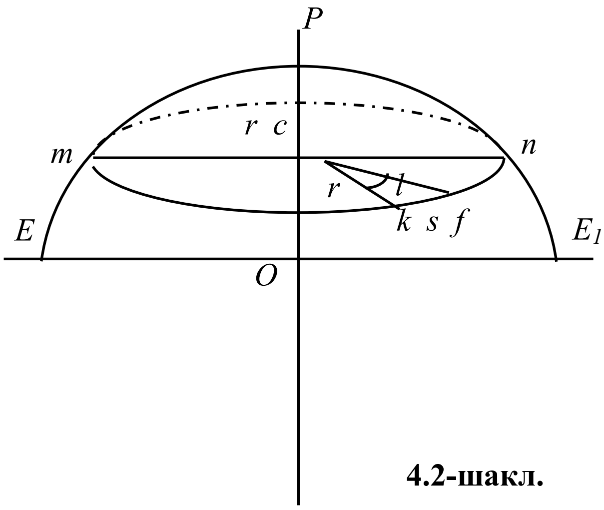
$$S = \frac{(B_2 - B_1)''}{6\rho''}(M_1 + 4M_m + M_2) \qquad (\mathbf{4.16})$$

(4.16)формула билан 1000 км гача бўлган меридиан ёйининг узунлиги 1÷2 см хатолик билан ҳисоблашни таминлайди.

Меридиан ёйининг узунлигини ҳисобини текшириш учун экватор кенглигидан B_2 ва B_1 кенглигига бўлган меридиан ёйларининг x_2 ва x_1 узунликлари ҳисобланади, бундан келиб чиқадики:

$$S=X_2-X_1$$

Параллел ёй узунлигини ҳисоблаш



4.2-шакл.

Айланма эллипсоид параллели айланадан иборат бўлади, шу сабабли 4.2 - шаклдан қуйидагини ёзишимиз мумкин:

$$cm = cn = ck = cf = r = x = \frac{a\cos B}{\left(1 - e^2 \sin^2 B\right)} = N\cos B$$

$$S_П = N\cos B \frac{l''}{\rho''}$$

ёки

$$S_П = \frac{l''\cos B}{(2)} \quad , \qquad \textbf{(4.17)}$$

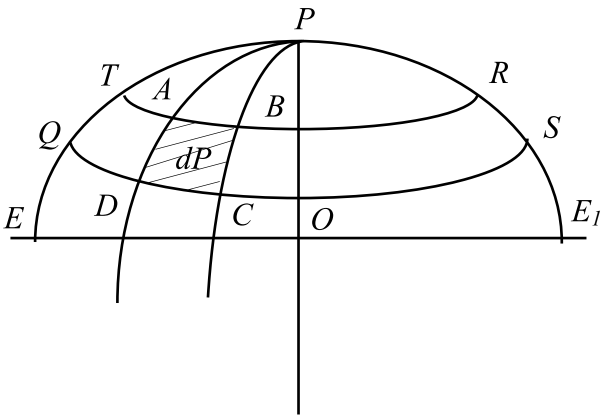
бунда: $l''=L_2$-L_1 параллел ёйининг охирги ва бошланғич нуқталарининг узоқликлари фарқи. **(4.17)** формуладан фойдаланиб тескари масалани ечиш мумкин, яъни $S_П$ ва L_1 берилган бўлса, L_2ни кетма-кет яқинлашиш орқали ҳисоблаш мумкин.

Текшириш учун саволлар:

1. *B*-кенглик ўзгариши билан, $L_2 - L_1$ кенгликлар фарқи ўзгарадими? Худди шу ҳолатда L_2ва L_1 оралиғида ётган параллел ёй узунлиги-чи?

2. Меридиан ёй узунлигини ҳисоблашда (4.5) формуладаги *A, B, C…* коэффициентлар ўзгариши мумкинми? *A, B, C…* коэффициентларнинг ўзгариши ёки ўзгармаслиги нимага боғлиқ?

§ 5. ХАРИТА ТРАПЕЦИЯСИНИ ЮЗАСИНИ ҲИСОБЛАШ



5.1-шакл.

Эллипсоид сатҳида чексиз кичик ABCD трапецияни оламиз. Бу трапеция томонлари *AD=BC=MdB;*

AB=DC=N cosB dl бўлади, унда трапеция юзаси қуйидагига тенг бўлади

$$dp=MdB\ Ncos\ B\ dl; \qquad \textbf{(5.1)}$$

(5.1) да

$$MN=\frac{a\left(1-e^2\right)}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}}\cdot\frac{a}{(1-e^2\sin^2 B)^{\frac{1}{2}}}=\frac{a^2(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)^2}=\frac{b^2}{(1-e^2\sin^2 B)^2}$$

Буни инобатга олсак

$$dp=\frac{b^2\cos B}{(1-e^2\sin^2 B)^2}dBdl \qquad \textbf{(5.2)}$$

B_1 , B_2кенгликлар ва L_1 , L_2 узоқликлар билан чегараланган харита трапециясининг юзаси қуйидагига тенг бўлади

$$P=b^2\int_{l_1}^{l_2}\int_{B_1}^{B_2}\cos B(1-e^2\sin^2 B)^{-2}dBdl \qquad \textbf{(5.3)}$$

$(1-e^2\sin^2 B)^{-2}$ ни Ньютон бином қаторига ёямиз

$$(1-e^2\sin^2 B)^{-2}=1+2e^2\sin^2 B+3e^4\sin^4 B+4e^6\sin^6 B...... \qquad \textbf{(5.4)}$$

(5.4)ни **(5.3)**га қўйсак

$$P=b^2(l_2-l_1)\int_{B_1}^{B_2}(\cos B+2e^2\sin^2 B\cos B+3e^4\sin^4 B\cos B+4e^6\sin^6 B\cos B)dB,$$

у ҳолда:

$$P=b^2\left(l_2-l_1\right)\left[\sin B+\frac{2}{3}e^2\sin^3 B+\frac{3}{5}e^4\sin^5 B+\frac{4}{7}e^6\sin^7 B\right]_{B_1}^{B_2}$$

ёки интеграллаш чегараларини қўйсак:

$$\begin{aligned}P=b^2(l_2-l_1)&\left[(\sin B_2-\sin B_1)+\frac{2}{3}e^2(\sin^3 B_2-\sin^3 B_1)+\right.\\&\left.+\frac{3}{5}e^4(\sin^5 B_2-\sin^5 B_1)+\frac{4}{7}e^6(\sin^7 B_2-\sin^7 B_1)\ \right]\end{aligned} \qquad \textbf{(5.5)}$$

ни ҳосил қиламиз.

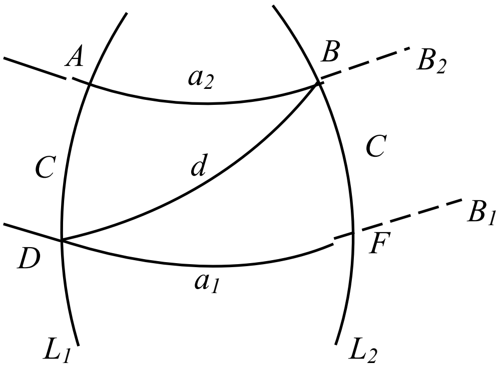
(5.5) формулада $l_2 - l_1 = 2\pi$, $B_1=0$, $B_2=90^0$ деб олиб, уни иккига кўпайтирсак, бутун эллипсоид сатҳининг юзасини топамиз:

$$S э = 4\pi b^2 (1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \frac{5}{9}e^8 + \frac{6}{11}e^{10} + ...)$$

Красовский эллипсоиди учун

$S э = 510083035$ км^2

Харита трапецияси томон узунликларини ҳисоблаш



AD=BF меридиан ёйлари,

AB ва *DF* параллел ёйлари. Бундан:

$$AD=BF=C=\frac{(B_2 - B_1)''}{(1)_m}; \quad \textbf{(5.6)}$$

$$\mathrm{DF} = \frac{l''\cos B_1}{(2)_1}; \quad \textbf{(5.7)}$$

$$AB = \frac{l''\cos B_2}{(2)_2}; \quad \textbf{(5.8)}$$

Трапеция томон узунликларини сантиметр ўлчамида бериш учун, **(5.6), (5.7), (5.8)**ни юзга кўпайтириб масштаб махражига бўламиз:

$$C = \frac{(B_2 - B_1)''}{(1)_m} \cdot \frac{100}{n};$$

$$a_1 = \frac{l''\cos B_1}{(2)_1} \cdot \frac{100}{n}$$

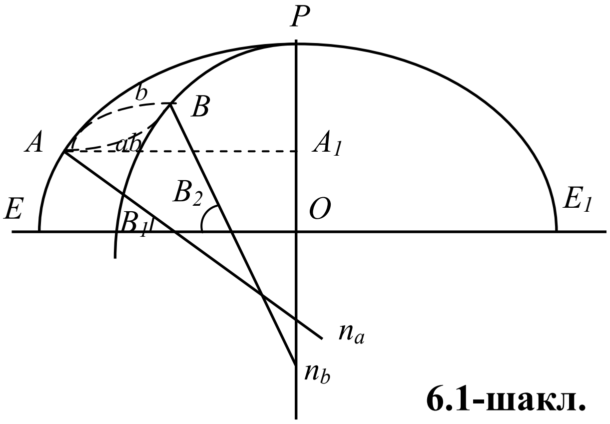
n-масштаб махражи.

$$a_2 = \frac{l''\cos B_2}{(2)_2} \cdot \frac{100}{n};$$

$$d = \sqrt{a_1 a_2 + c^2}$$

§6. ЭЛЛИПСОИД САТҲИДАГИ ЭГРИ ЧИЗИҚЛАР

Дастур: Ўзаро нормал кесимлар. Геодезик чизиқ. Геодезик чизиқ дифференциал тенгламалари ва уларнинг хоссалари. Ўзаро нормал кесимларга нисбатан геодезик чизиқнинг ҳолати. Нормал кесим ёй узунлиги.



6.1-шакл.

Эллипсоид сатҳида B_1ва B_2 кенгликларда A ва B нуқталар оламиз. A ва B нуқталардан нормал чизиқлар ўтказамиз. Бу нормал чизиқлар кичик ўқни n_aва n_bнуқталарда кесиб ўтади. A нуқтадан кичик ўққа перпендикуляр AA_1 ўтказамиз. У ҳолда 6.1-шаклдан:

$$OA_1 = y_a = \frac{a(1-e^2)\sin B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}} \quad ; \qquad \textbf{(6.1)}$$

$An_a=N_1A$ нуқтада биринчи вертикал кесим эгрилик радиуси:

$$N_1 = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}} \quad ; \qquad \textbf{(6.2)}$$

ΔAA_1n_a дан

$$A_1n_a = N_1\sin B_1 = \frac{a\sin B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}}; \qquad \textbf{(6.3)}$$

нормал чизиқ кичик ўқни кесиб ўтган жойидан эллипсоид марказигача бўлган масофа:

$$On_a = A_1n_a - OA_1 = \frac{a\sin B_1}{W_1} - \frac{a(1-e^2)\sin B_1}{W_1}$$

ёки **(6.2)** ни инобатга олиб:

$$On_a = \frac{ae^2 \sin B_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}} = \frac{ae^2 \sin B_1}{W_1} = N_1 e^2 \sin B_1; \qquad \textbf{(6.4)}$$

худди юқоридагидек *B* нуқта учун:

$$On_b = \frac{ae^2 \sin B_2}{W_2} = N_2 e^2 \sin B_2; \qquad \textbf{(6.5)}$$

$B_2 > B_1$ бўлса, **(6.4)** ва **(6.5)** формулалардан шундай хулоса қилиш мумкин

$$On_b > On_a$$

B – кенглик кичик бўлса, шу нуқтадан ўтган нормал эллипсоид кичик ўқини марказига яқин бўлган нуқтадан кесиб ўтар экан.

Агар Bn_b чизиқ ва *A* нуқтадан ўтган нормал текислик ўтказсак бу текислик эллипсоид сатҳини *BbA* эгри чизиқ бўйича кесиб ўтади.

An_a чизиқ ва *B* нуқтадан ўтказилган нормал текислик эллипсоид сатҳини *AaB* эгри чизиқ бўйича кесиб ўтади.

BbA ва *AaB* эгри чизиқлар ўзаро **нормал кесимлар дейилади**.

A нуқтага нисбатан *AaB* эгри чизиқ-тўғри, *AbB* – эса тескари нормал кесим бўлади. Худди шундай *B* нуқта учун *BbA* – тўғри, *Bab* – **тескари нормал кесим бўлади.**

Тўғри ва тескари нормал кесимлар икки ҳолатда устма-уст тушиши мумкин:

- агар иккала нуқта бир меридиан текислигида ётган бўлса.
- агар иккала нуқта бир параллелда ётган бўлса.

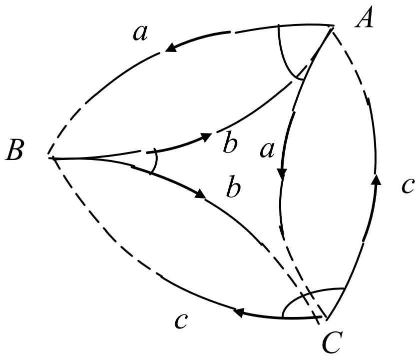
Биринчи ҳолатда An_a ва Bn_b нормаллар кичик ўқни ҳар хил жойдан кесиб ўтгани бўлсада битта меридиан текислигида ётади.

Иккинчи ҳолатда нормал чизиқлар кичик ўқни бир нуқтада кесиб ўтади ва битта нормал текисликда ётади.

Ўзаро нормал кесимларни устма-уст тушмаслиги триангуляцияда ноқулайлик келтириб чиқаради.

Бурчак ўлчашда теодолит вертикал ўки нормал чизиқ билан мос тушади, кўриш трубасини коллимацион текислиги тўғри нормал кесим текислигига мос тушади.

Триангуляция бурчакларини ўлчашда теодолит барча бурчак учларига қўйилади натижада ҳосил бўлган ўзаро нормал кесимлар устма-уст тушмайди, бунинг оқибатида учбурчак ички бурчаклари ёпилмасдан қолади **(6.2-шакл).**



6.2-шакл.

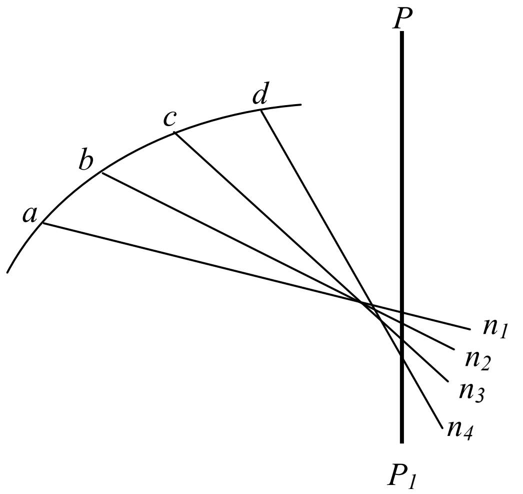
Учбурчак ҳосил қилишдаги ноаниқликдан чиқиш учун геодезик чизиқдан фойдаланилади.

Геодезик чизиқ

Эллипсоид сатҳида икки нуқта орасидаги энг қисқа масофага геодезик чизиқ дейилади.

Эллипсоид сатҳидаги геодезик чизиқ текисликдаги тўғри чизиқ, сферадаги катта айлана ёйи вазифасини бажаради. Шу сабабли триангуляцияда геодезик ўлчаш натижаларини қайта ишлашда ўзаро нормал кесимлар геодезик чизиқ билан алмаштирилади. Геодезик чизиқ учбурчак қуришдаги ноаниқликни бартараф этади.

Ҳар бир нуқтасидан ўтган нормалда ётувчи ёпишма уринувчи текислик ҳосил қилган эгри чизиқ – сатҳидаги геодезик чизиқ дейилади.

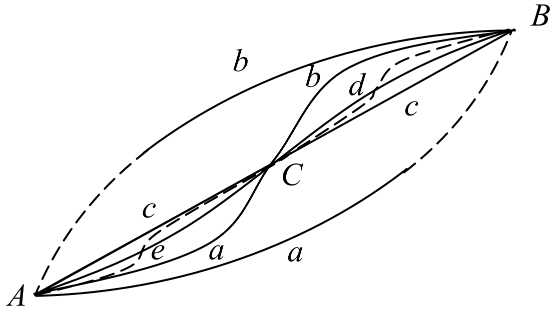


6.3 шакл.

Ер эллипсоиди сатҳида геодезик чизиқ ўтказишни геометрикусулини кўриб чиқамиз.

6.3 шаклда PP_1 – эллипсоид айланиш ўқи, an_1, bn_2, cn_3,dn_4 – *a, b, c, d* нуқталардан эллипсоид сатҳига туширилган нормаллар.

a нуқтада теодолит вертикал ўқи *an,* нормал билан устма-уст тушадиган қилиб ўрнатамиз. Шундан сўнг, керакли бўлган йўналишда эллипсоид сатҳида *a* нуқтага яқин бўлган масофада *b* нуқтани белгилаймиз. Теодолитни *b* нуқтага кўчирамиз, асбоб вертикал ўқини bn_2 нормал билан устма-уст тушириб ўрнатамиз, кўриш трубасини *a* нуқтага қаратиб визирлаймиз, алидадани 180^0 буриб эллипсоид сатҳида *b* нуқтага яқин бўлса *c* нуқтани белгилаймиз. Сўнгра, теодолитни с нуқтага кўчирамиз, асбоб вертикал ўқини cn_3 нормал билан устма-уст тушириб ўрнатамиз, кўриш трубасини *b* нуқтага визирлаб алидадани 180^0га буриб, **коллимацион** текисликда *d* нуқтани белгилаймиз. Шу тартибда бизга керак бўлган масофа оралиғида нуқталарни белгилаб борамиз, нуқталар оралиғи чексиз кичик масофада деб фараз қилсак, натижада эллипсоид сатҳида геодезик чизиқни ҳосил қиламиз. Ҳақиқатдан ҳам $abcn_2$ текислиги *b* нуқтада ёпишма уринувчи текислик бўлади, чунки b_a ва b_c кесмалар шу текисликда ётади ва бу текисликни *b* нуқтада эгри чизиққа уринма деб қараш мумкин; иккинчидан бу текисликда bn_2 нормал ётади; худди шу нарса *c, d* нуқталарда бўлади. an_1, bn_1, cn_3, dn_4 нормаллар кичик ўқни ҳар хил нуқталарда кесиб ўтади, шу сабабли $abcn_2$, $bcdn_3$ текисликлари устма-уст тушмайди, натижада *a, b, c,d……* нуқталар эллипсоид сатҳида иккиланган (двоякий) эгриликдаги узлуксиз эгри чизиқни ҳосил қилади.



6.4-шакл.

Геодезик чизиқ ҳосил қилишни бошқа усулини кўриб чиқайлик.

Эллипсоид сатҳида *A* ва *B* нуқталарни оламиз ва улар орасидан ўзаро нормал кесимлар ўтказамиз (6.4-шакл).

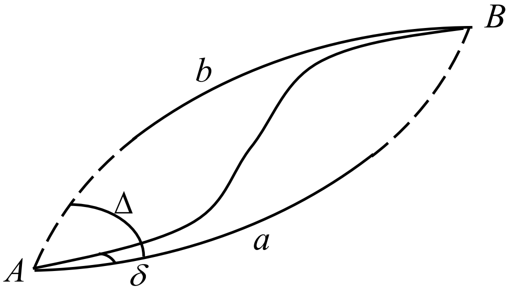
AaB – A нуқтадан тўғри нормал кесим

BbA – B нуқтадан тўғри нормал кесим

A ва *B* нуқталарни **ватар** билан бирлаштирамиз ва унинг ўртасидан эллипсоид сатҳига нормал ўтказамиз. *C* нуқта нормал билан эллипсоид сатҳининг кесишган нуқтаси бўлсин, *C* ва *A* нуқталардан нормал текислик ўтказамиз. Бу текисликда *AB* ватар ётади. Шундай қилиб бу текисликда *C* нуқтадан *A* нуқтага ва *B* нуқтага тўғри нормал кесим ўтказамиз, бу кесим *Aac* чизиқ билан кўрсатилган, у эллипсоидда *AcC* тескари кесимдан жануброқда ётади, сабаби *C* чизмада *A* нуқтадан шимолроқда жойлашган. Худди шундай В нуқтадан *C* нуқтага тўғри нормал кесим ўтказамиз унда *BbC* кесим *Ccb* кесимдан шимолроқда ётади, чунки *C* нуқта *B* нуқтадан жануброқда жойлашган.

A ва *C, B* ва *C* нуқталарни ватар билан бирлаштирамиз. Ватарлар ўртасидан эллипсоид сатҳига нормаллар ўтказамиз, улар эллипсоид сатҳини *e* ва *d* нуқталарда кесиб ўтади. Бу нуқталарда *C* нуқтада бажарган амалларимизни амалга оширамиз. Агарда бундай тузишни чексиз давом эттирсак, унда ватар ўртасидан кесиб ўтувчи нормал кесим нуқталари чексиз кўп бўлади ва бу нуқталар геодезик чизиқни ҳосил қилади.

Геодезик чизиқ (азимутлари 90^0 ёки 270^0га яқин бўлмаган ҳолларда) эллипсоид сатҳида ўзаро нормал кесимлар орасидаги бурчакни 1:3 нисбатда бўлади ва берилган нуқтада тўғри нормал кесимга яқин бўлади.



$$\delta = \frac{1}{3}\Delta$$

Тўғри нормал кесим билан геодезик чизиқ орасидаги бурчак ўзаро нормал кесимлар орасидаги бурчакни учдан бирига тенг.

$$r\sin A = C \tag{6.6}$$

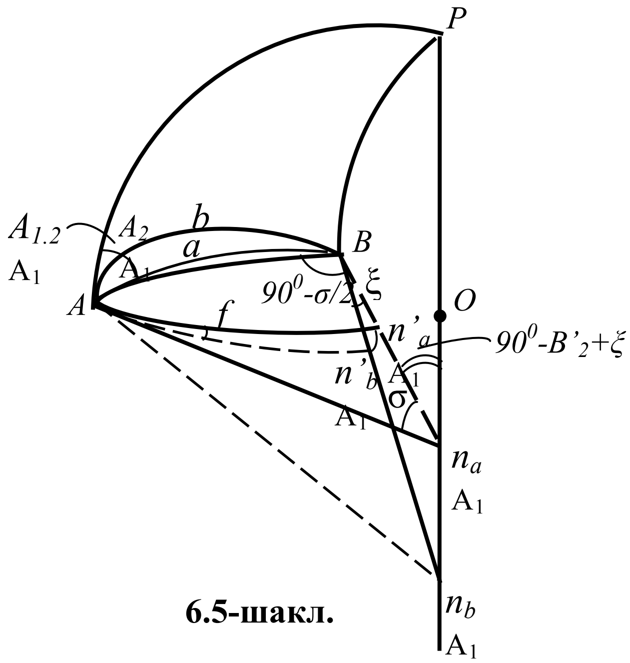
$$a\cos u\sin A = C \tag{6.7}$$

(6.6) ва (6.7) тенгламалар эллипсоид сатҳидаги геодезик чизиқни асосий тенгламасини икки хил кўринишидир.

(6.6) дан шундай хулосага қиламиз:

Айланма эллипсоид сатҳидаги геодезик чизиқни ҳар бир нуқтасидаги параллел радиусининг шу нуқтадаги чизиқ азимутининг синусига кўпайтмаси доимий катталикдир.

(6.7)дан, айланма эллипсоид сатҳида геодезик чизиқ ҳар бир нуқтаси келтирилган кенглиги косинусининг, шу нуқтадаги азимути синусига кўпайтмаси доимий катталикдир.



6.5-шакл.

6.5-шаклдан топамиз:

$$n_a n_b = ae^2 (B_2 - B_1) \cos B_m; \qquad \textbf{(6.8)}$$

$$B_m = \frac{B_2 + B_1}{2}$$

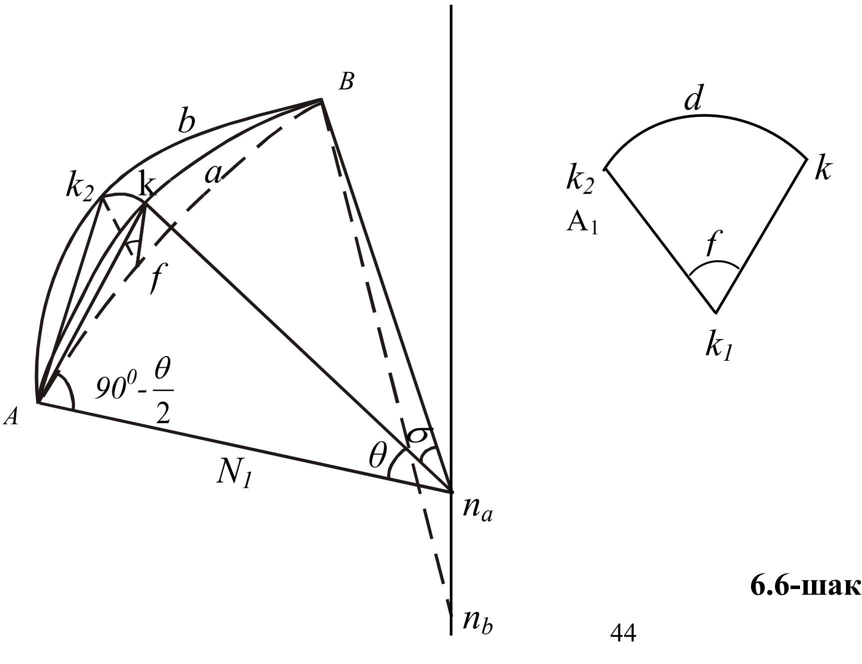
Ўзаро нормал кесимлар орасидаги бурчак қуйидаги формула билан ҳисобланиши мумкин:

$$f'' = \frac{1}{2} e^2 \sigma \cos^2 B_m \sin 2A_{1.2} \rho''; \qquad \textbf{(6.9)}$$

бу ерда: $\sigma = S(1)_1$ S-нуқталар орасидаги масофа.

Агарда $S=100$ *км;* $B_m=45^0$; $A_{1.2}=45^0$; $\sigma = \frac{1}{60}$ бўлса $f'' = 6''$

6.5-шаклдан катталаштирилган 6.6-шаклни қараймиз.



6.6-шакл.

Ўзаро нормал кесимлар орасидаги чизиқли фарқ қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$KK_2 = d = \frac{N_1}{4} e^2 \sigma \cos^2 B_m \sin 2A_{1.2} \theta(\sigma - \theta); \quad \textbf{(6.10)}$$

(6.10)формула 6.6-шаклдан келтириб чиқарилади.

Ўзаро нормал кесимлар орасидаги энг катта чизиқли фарқ *AB* ёйни ўртасида яъни $\theta = \frac{\delta}{2}$ да бўлади, **(6.10)** дан

$$d_{\max} = \frac{N_1}{16} e^2 \sigma^2 \cos^2 B_m \sin 2A_{1.2}; \quad \textbf{(6.11)}$$

$B=45^0 \quad A_{1.2}=45^0$ да

S км	200	100	50
dm_{max} *(m)*	0.05	0.006	0,0008

Геодезик чизиқ узунлиги билан нормал чизиқ ёй узунликлари орасидаги фарқни қуйидаги формула орқали ҳисобланади:

$$Д_S = \frac{ae^4}{360} \sin^2 2A_1 \cos^4 B_m \sigma^5 \quad \textbf{(6.12)}$$

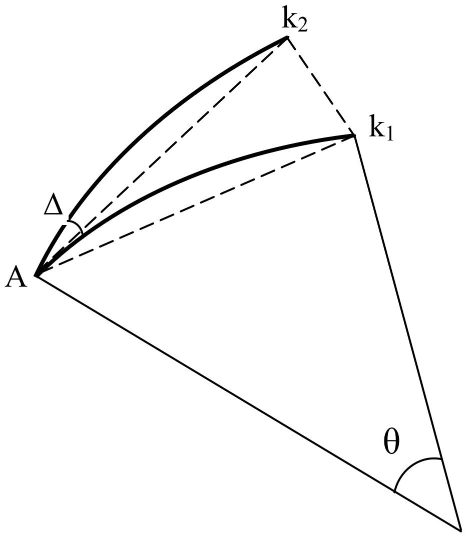
Агар S=600 км бўлса, $Д_S \leq \frac{1}{135000} м$ бўлади.

Геодезик чизиқ узунлиги билан нормал чизиқ ёй узунликлари орасидаги фарқни триангуляцияни ҳисоблашда инобатга олмаса ҳам бўлади.

Ўзаро нормал кесимлар орасидаги Δ" бурчак қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$Δ" = \frac{e^2 \sigma^2 \cos^2 B_m \sin 2A_1}{4} \rho" \quad \textbf{(6.13)}$$

Геодезик чизиқ билан тўғри нормал кесим орасидаги $\sigma"$ бурчак қуйидаги формула орқали топилади.



6.7-шакл.

$$\delta''=\frac{e^2\sigma^2\cos^2 B_m \sin 2A_1}{12}\rho''=\frac{e^2 S^2 (2)_m^2 \cos^2 B_m \sin 2A_1}{12\rho''} \qquad \textbf{(6.14)}$$

1 класс триангуляция ўлчаш натижаларини қайта ишлашда тўғри нормал кесимлар геодезик чизиқлар билан алмаштирилади, бунда **(6.14)** формула билан топилган тузатма ўлчанган йўналиш қийматидан айирилади.

Агарда *S=50 км; B=*0^0*; A=*45^0 бўлса, унда Δ"=0,023"; δ=0,006".

Мисолдан кўринадики 1 класс триангуляцияда Δ ва δ ни ҳисобга олиш керак экан.

Текшириш учун саволлар:

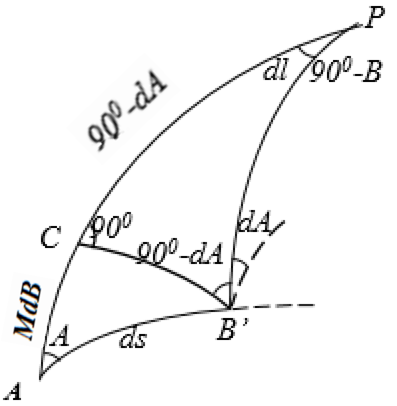
1. Қандай кесимларга ўзаро нормал кесимлар дейилади?
2. Қандай ҳолатларда ўзаро нормал кесимлар устма-уст тушади?
3. Нима учун триангуляцияда ўзаро нормал кесимлардан бевосита фойдаланиш мумкин эмас?
4. Қандай чизиққа геодезик чизиқ дейилади?
5. Геодезик чизиқ таърифини ёпишма уринувчи текисликлар орқали беринг.
6. Теодолит ёрдамида эллипсоид сатҳида геодезик чизиқ ҳосил қилишни тушунтириб беринг.
7. Ўзаро нормал кесимлар устма-уст тушиши мумкинми?

8. Геодезик чизиқни асосий тенгламаларидан қандай хулосалар чиқариш мумкин?

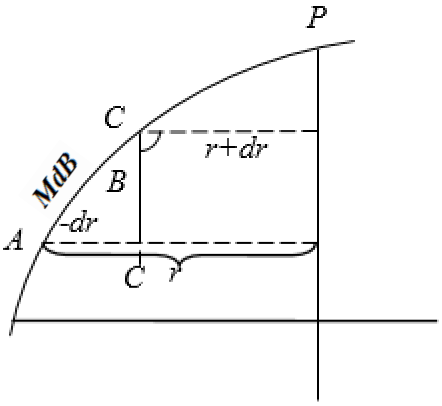
9. Геодезик чизиқ билан тескари нормал кесим орасидаги бурчак ўзаро нормал кесимлар орасидаги бурчакни қандай қисмини ташкил қилади?

10. Геодезик чизиқ билан тўғри нормал кесим орасидаги бурчак 1 класс триангуляциясини ҳисоблашда нима учун инобатга олиниши керак?

§ 7. ГЕОДЕЗИК ЧИЗИҚНИНГ АСОСИЙ ТЕНГЛАМАЛАРИ



7.1-шакл



7.2-шакл

AP, B'P меридиан ёйлари ва *dS* геодезик чизиқ билан *APB'*элементар қутб учбурчаги ҳосил қилинган. *a*-геодезик чизиқни бошланғич элементи азимути. *B'* нуқтадан параллел ёй *B'C* ни ўтказамиз.

Белгилаш киритамиз:

dB-A ва *B'* нуқталарни кенгликлар фарқи;

dl- A ва *B'* нуқталарни узоқликлар фарқи;

dA-B' нуқтада меридианлар яқинлашиш бурчаги.

Тўғри бурчакли элементар *AB'C* учбурчаги учун:

$$\left.\begin{aligned} MdB &= dS\cos A \\ rdl &= dS\sin A = N\cos Bdl \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

r-параллел радиуси.

Тўғри бурчакли *CB'P* сферик учбурчак учун:

$$\cos(90^0 - B) = ctg(90^0 - dA)ctgdl$$

бундан, $tgdA = tgdl \sin B$ келиб чиқади **(7.2)**

$tgdA$ ва $tgdl$ ларни қаторга ёйиб ва биринчи ҳадини оламиз:

$tgdA \approx dA$ ва $tgdl \approx dl$ деб ҳисоблаб, **(7.2)**дан

$$dA = dl \sin B \qquad \textbf{(7.3)}$$

ни топамиз.

A нуқтадан ўтган меридианни текисликда тасвирлайлик (7.2-шакл), унда *r*-*A* нуқтадан ўтган параллел радиуси, $r + dr$ -*C* нуқтадан ўтган параллел радиуси, элементар ACC_1 учбурчакдан:

$$-dr = MdB \sin B \qquad \textbf{(7.4)}$$

(7.1) дан $$\cos A = \frac{MdB}{dS} \qquad \textbf{(7.5)}$$

$$\sin A = \frac{rdl}{dS} \qquad \textbf{(7.6)}$$

(7.5) формулани чап ва ўнг томонларини *rdA* га, **(7.6)** формулани *dr* га кўпайтирамиз:

$$rdA \cos A = \frac{MdB}{dS} rdA \qquad \textbf{(7.7)}$$

$$dr \sin A = \frac{rdl}{dS} dr \qquad \textbf{(7.8)}$$

(7.7)ва**(7.3)**; **(7.8)**ва**(7.4)**формуларидан фойдаланиб, қуйидагиларни ёзамиз:

$$\cos A rdA = \frac{MdB}{dS} rdl \sin B \qquad \textbf{(7.9)}$$

$$\sin A dr = -\frac{MdB}{dS} rdl \sin B \qquad \textbf{(7.10)}$$

(7.9) ва**(7.10)** формуларни қўшсак,

$$r\, cosA\, dA + d\, rsinA = 0 \qquad \textbf{(7.11)}$$

ёки

$$d(r \sin A)=0$$

Бундан:

$$r \sin A = C \qquad \textbf{(7.12)}$$

келиб чиқади. Бунда, C интеграллаш доимийси.

$r = a\cos u$ эканлигини инобатга олсак

$$a\cos u \sin A = C \qquad \textbf{(7.13)}$$

ёки

$$\cos u_1 \sin A_1 = \cos u_2 \sin A_2 = ... = C$$

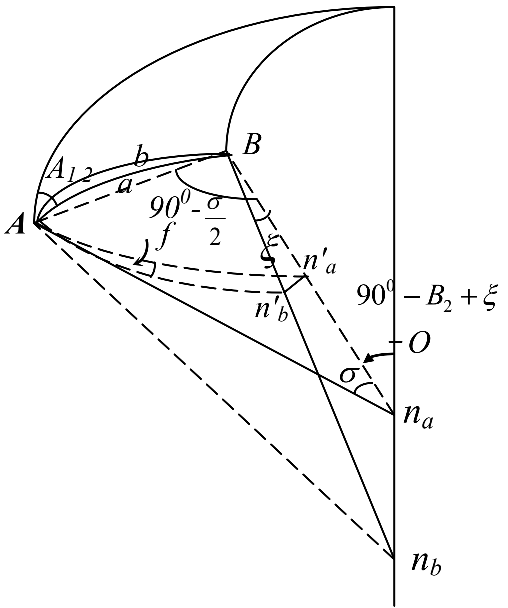
(7.12) дан шундай хулосага келамиз:

Айланма эллипсоид сатҳида геодезик чизиқни ҳар бир нуқтасидаги параллел радиусининг шу нуқтадаги азимут синусига кўпайтмаси доимий катталикдир.

(7.13) дан «айланма эллипсоид сатҳида геодезик чизиқ ҳар бир нуқтасини келтирилган кенглигининг косинусини, шу нуқтадаги азимут синусига кўпайтмаси доимий катталикдир» хулосаси келиб чиқади.

(7.12), (7.13) тенгламалар эллипсоид сатҳидаги геодезик чизиқ асосий тенгламасининг икки хил кўринишидир.

Ўзаро нормал кесимлар орасидаги фарқ



7.3- шакл.

1. Бурчак фарқи.

Эллипсоид сатҳида ҳар хил кенглик ва узоқликка эга бўлган *A* ва *B* нуқталарни оламиз (7.3-шакл).

Белгилаш киритамиз:

n_a, n_b– *A* ва *B* нуқта-лардан эллипсоид сатҳига туширилган нормалларни кичик ўқ билан кесишиш нуқталари;

AaB -*A* нуқтадан *B* нуқтага тўғри нормал кесим;

BbA – *B* нуқтадан *A* нуқтага тўғри нормал кесим;

AB-ватар, ўзаро нормал кесимлар текисликларининг кесишиш чизиғи;

$n_a n_b$-кесим узунлигини топамиз:

$$n_a n_b = On_b - On_a = \frac{ae^2 \sin B_2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}} - \frac{ae^2 \sin B_1}{\sqrt{1 - e^2 - \sin^2 B_1}} \qquad \textbf{(7.14)}$$

(7.14) формуладаги илдиз остидаги ифодаларни бином қаторига ёйиб биринчи ҳадларини оламиз:

$$n_a n_b = ae^2 \sin B_2 (1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 B_2) - ae^2 \sin B_1 (1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 B_1) = ae^2 \sin B_2 +$$

$$+ \frac{1}{2} ae^4 \sin^3 B_2 - ae^2 \sin B_1 - \frac{1}{2} ae^4 \sin^3 B_1 \ ,$$

ёки керакли аниқликни сақлаб қолган ҳолда,

$$n_a n_b = ae^2 (\sin B_2 - \sin B_1) \qquad \textbf{(7.15)}$$

(7.15) ни қуйидагича ёзишимиз мумкин:

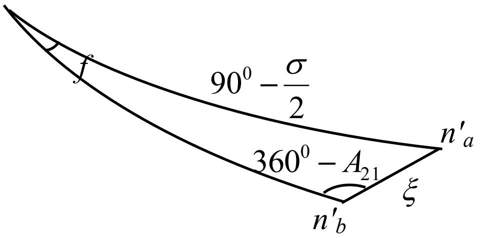
$$n_a n_b = ae^2 2 \sin \frac{B_2 - B_1}{2} \cos \frac{B_2 - B_1}{2} \qquad \textbf{(7.16)}$$

$\sin \frac{(B_2 - B_1)}{2}$ қаторга ёйиб, биринчи ҳадини сақлаган ҳолда, топамиз:

$$n_a n_b = ae^2 (B_2 - B_1) \cos Bm \qquad \textbf{(7.17)}$$

An_aB учбурчакда $An_a \approx Bn_a$деб, тенг томонли учбурчак сифатида қарасак ABn_aбурчак 90^0-$\frac{\sigma}{2}$ га тенг бўлади.

B нуқтани марказ деб олиб, *BA* ватар билан сферик учбурчак $An'_a n'_b$ ҳосил қиламиз. $n'_a n'_b$томонига ξ бурчак, An'_a га $\angle ABn_a$ қ 90^0-$\frac{\sigma}{2}$ мос келади. n'_b даги бурчак 360^0-$A_{2.1}$га тенг, чунки B; n_a; n_bнуқталардан ўтувчи текислик В нуқтадан ўтган меридиан текислигидир. Ўзаро нормал кесимлар текисликлари орасида ҳосил бўлган *f* бурчак биз қидираётган бурчак бўлади.



7.4-шакл.

Учбурчак $An'_a n'_b$ дан ёзишимиз мумкин:

$$\frac{\sin f}{\sin\xi}=\frac{\sin(360^0-A_{2.1})}{\sin(90^0-\frac{\sigma}{2})} \text{ ёки } \sin f=-\frac{\sin\xi\sin A_{2.1}}{\cos\frac{\sigma}{2}} \qquad \textbf{(7.18)}$$

Учбурчак $Bn_a n_b$ дан:

$$\frac{\sin\xi}{n_a n_b}=\frac{\sin\left[180^0-\left(90^0-B_2+\xi\right)\right]}{N_2} \qquad \textbf{(7.19)}$$

келиб чиқади.

(7.19)ва**(7.17)**формуларидан фойдаланиб **(7.19)**нинг ўнг томони суратидаги ξ қийматни ҳисобга олмай қуйидагини топамиз:

$$\sin\xi=\frac{ae^2(B_2-B_1)\cos Bm\cos B_2}{N_2} \quad \text{ёки}$$

$$\sin\xi=ae^2(B_2-B_1)\cos Bm\cos B_2\,\frac{(1-e^2\sin^2 B)^{\frac{1}{2}}}{a}$$

$\left(1-e^2\sin^2 B\right)^{\frac{1}{2}}$ни бином қаторига ёямиз ва қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sin\xi=e^2(B_2-B_1)\cos Bm\cos B_2(1-\frac{1}{2}e^2\sin^2 B_2-......),$$

ёки бизга етарли бўлган аниқликда ёзамиз:

$$\sin\xi=e^2(B_2-B_1)\cos Bm\cos B_2 \qquad \textbf{(7.20)}$$

(7.18) ва **(7.20)** формулалардан фойдаланиб, *cos*B_2 ни *cos*B_m билан алмаштириб топамиз:

$$\sin f = -\frac{e^2(B_2 - B_1)\cos^2 B_m \sin A_{2.1}}{\cos\frac{\sigma}{2}} \qquad \textbf{(7.21)}$$

Агар $(B_2 - B_1) = S\cos A_{1.2}(1)_1 \approx \sigma\cos A_{1.2}$; $\sigma = S(1)_1$

$A_{1.2} \pm 180^0 = A_{2.1}$ деб фараз қилсак

$$\sin f = \frac{e^2\sigma\cos A_{1.2}\cos^2 B_m \sin A_{1.2}}{\cos\frac{\sigma}{2}} \qquad \textbf{(7.22)}$$

$\cos\frac{\sigma}{2}$ ни қаторга ёямиз ва биринчи ҳадини сақлаган ҳолда, топамиз

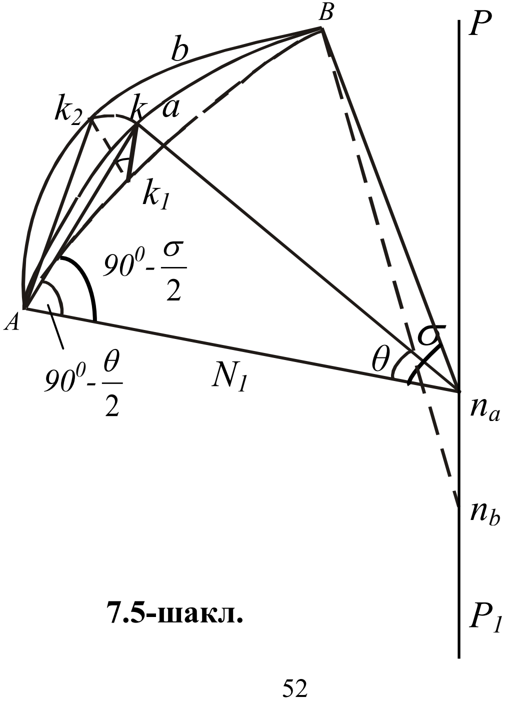
$$f'' = e^2\sigma\cos A_{1.2}\cos^2 B_m \sin A_{1.2}\rho'' \qquad \textbf{(7.23)}$$

$$f'' = \frac{1}{2}e^2\sigma\cos^2 B_m \sin 2A_{1.2}\rho'' \qquad \textbf{(7.24)}$$

Агар *S=100 км;* B_m*=45*^{0}*;* $A_{1.2}$*=45*^{0}*;* $\sigma = \frac{1}{60}$ бўлса, $f = 6''$ бўлади.

2. Чизиқли фарқ

Ўзаро нормал кесимларни бурчак ва чизиқли фарқларининг қийматлари кичик, шу сабабли бу кесим ёйларини маркази n_a ёки n_b нуқталардан бирида бўлган сферик ёй деб қарашимиз мумкин. *AaB – A* нуқтада тўғри нормал кесим, ёй маркази n_a да бўлган айланма ёйи; (7.5-шакл),



7.5-шакл.

AbB – A нуқтада тескари нормал кесим;

AB –тўғри чизиқ *AaB* ёйини тортиб турувчи ватар бўлсин. *AaB* эгри чизиқда бирор *k* нуқта оламиз ва *kA* ватарни ўтказамиз. An_aB бурчакни σ билан, kn_aA бурчакни θ билан белгилаймиз. θ бурчак *O* дан σ гача бўлган қийматларни олиш мумкин.

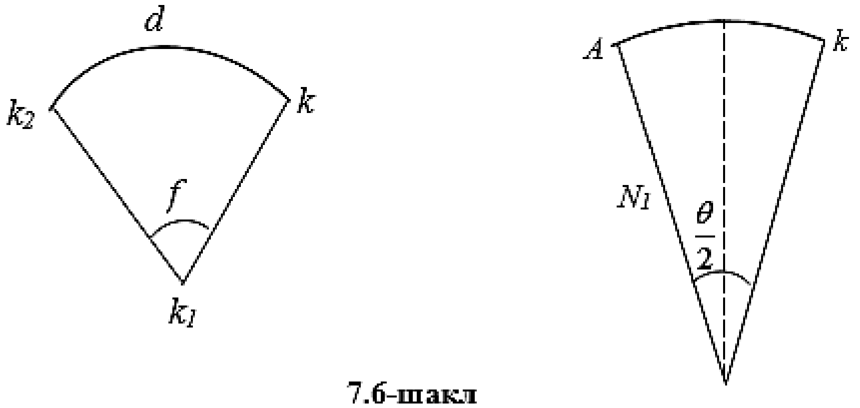
Унда: $$\angle BAn_a = 90^0 - \frac{\sigma}{2};$$

$$\angle kAn_a = 90^0 - \frac{\theta}{2};$$

$$\angle kAB = \angle kAn_a - \angle BAn_a = \left(90^0 - \frac{\theta}{2}\right) - \left(90 - \frac{\sigma}{2}\right)$$ ёки

$$\angle kAB = \frac{\sigma - \theta}{2} \qquad \textbf{(7.25)}$$

k нуқтадан *AB* ватарга перпендикуляр бўлган текислик ўтказамиз. Бу текислик ватарни *к* нуқтада, *AbB* ёйни эса k_2 нуқтада кесиб ўтсин. (7.5-шакл)даги элементар учбурчакларни алоҳида чизайлик



7.6-шакл

$k\,k_1\,k_2$учбурчак k_1 учининг бурчаги *f* га тенг ва kk_2=*d* бу ерда: *d*-тўғри ва тескари нормал кесимлар орасидаги чизиқли фарқ бўлсин. Akn_a учбурчакдан:

$$\frac{1}{2}Ak : N_1 = \sin\frac{\theta}{2},$$

бундан $$Ak = 2N_1 \sin\frac{\theta}{2} \qquad \textbf{(7.26)}$$

7.5-шаклдаги Akk_1 учбурчакдан:

$$\frac{kk_1}{Ak} = \sin\frac{\sigma-\theta}{2},$$

ёки $$kk_1 = Ak\sin\frac{\sigma-\theta}{2} = 2N_1\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\sigma-\theta}{2} \qquad \textbf{(7.27)}$$

kk_1k_2 учбурчакдан $kk_2=kk_1\cdot f$

(7.24)ва **(7.27)**формулалардан фойдаланиб, топамиз

$$kk_2 = 2N_1\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\sigma-\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}e^2\sigma\cos^2 B_m\sin 2A_{1.2} \qquad \textbf{(7.28)}$$

$\sin\frac{\theta}{2}$ ва $\sin\frac{\sigma-\theta}{2}$ ларни қаторга ёйиб, биринчи ҳади билан чегаралансак

$$kk_2 = d = \frac{N_1}{4}e^2\sigma\cos^2 B_m\sin 2A_{1.2}\theta(\sigma-\theta) \qquad \textbf{(7.29)}$$

ни ҳосил қиламиз.

Ўзаро нормал кесимлар орасидаги энг катта чизиқли фарқ AB ёйининг ўртасида, яъни $\theta=\frac{\sigma}{2}$ да бўлади, **(7.29)** дан

$$d_{\max} = \frac{N_1}{16}e_2\sigma^2\cos^2 B_m\sin 2A_{1.2} \qquad \textbf{(7.30)}$$

(7.30) формулада $\theta=\frac{\sigma}{2}$ бўлса **(7.29)** даги

$$\theta(\sigma-\theta) = \frac{\sigma}{2}\left(\sigma-\frac{\sigma}{2}\right) = \frac{\sigma^2}{4}$$

бўлишлиги инобатга олинган.

Мисол:

$B=45^0$ $A_{1.2}=45^0$бўлганда

S км	200	100	50
$d_{\max}$ (м)	0,050	0,006	0,0008

(7.30) формула геодезик чизиқ азимути 90^0 ва 270^0 га яқин бўлмаган ҳолларга тўғри келади. Бошқа ҳолларда бунга нисбатан аниқ бўлган формула қўлланилади.

Геодезик чизиқ узунлиги билан нормал кесим ёйи орасидаги фарқни ҳисоблаш формуласини исботсиз берамиз:

$$Д_S = \frac{ae^4}{360}\sin^2 2A_1 \cos^4 B_m \sigma^5 \qquad \textbf{(7.31)}$$

$S=600$ *км* $Д_S \leq \frac{1}{135000}$ *м*

Ҳисоблаш натижалари асосида шундай хулоса қилиш мумкин: геодезик чизиқ узунлиги билан нормал чизиқ ёй узунликлари орасидаги фарқни триангуляция ҳисоб китобида инобатга олмаса ҳам бўлади.

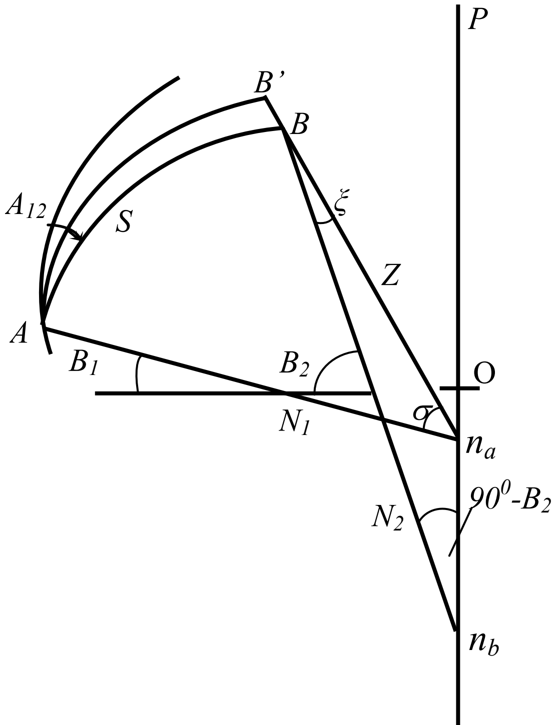
Текшириш учун саволлар:

1. $r \sin A=C$ ва $a\cos u \sin A = C'$ тенгламаларни сўз билан таърифлаб беринг.

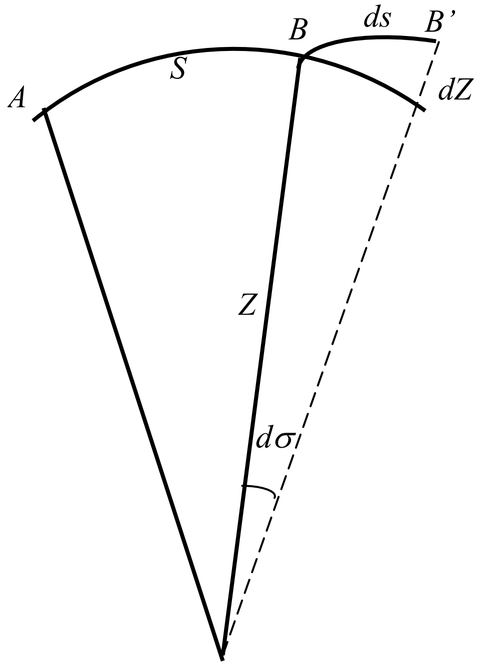
2. Ўзаро нормал кесимлар орасидаги бурчак ва чизиқли фарқлар триангуляцияда инобатга олиниши керакми?

3. Геодезик чизиқ билан нормал кесим ёйи орасидаги узунликлар фарқи триангуляция ҳисоб китобига қандай таъсир кўрсатади?

§8. НОРМАЛ КЕСИМ ЁЙ УЗУНЛИГИ



8.1-шакл.



8.2-шакл.

8.1шаклда *AB* – *A* нуқтадан *B* нуқтага тўғри нормал кесим, *S*-улар орасидаги масофа, $A_{1.2}$ – нормал кесим азимути.

Тўғри нормал кесим текислигида радиуси *A* нуқта биринчи вертикал кесими радиуси N_1га тенг бўлган ва маркази n_aда ётувчи айлана чизамиз. *B'* нуқта, Bn_aчизиғини давом эттириш натижасида айлана билан кесишиш нуқтаси.

8.1 шаклдаги $\angle An_aB(B')$ни σ, $\angle n_aBn_b$ни ξ, Bn_a масофани *Z* деб белгилаймиз.

Bn_an_b учбурчакдан (косинуслар теоремасидан фойдаланиб) қуйидагини ёзишимиз мумкин:

$$Z^2 = N_2^2 + (n_a n_b)^2 - 2N_2(n_a n_b)\cos(180^0 - (90^0 - B_2) - \xi);$$

ёки

$$Z^2 = N_2^2 + (n_a n_b)^2 + 2N_2(n_a n_b)\sin(B_2 - \xi),$$

бундан

$$\frac{Z^2}{N_2^2} = 1 + \frac{(n_a n_b)^2}{N_2^2} + \frac{2(n_a n_b)}{N_2}\sin(B_2 - \xi) \qquad \textbf{(8.1)}$$

(7.17) дан

$$n_a n_b = ae^2(B_2 - B_1)\cos B_m$$

ёки маълум бир аникликда $\left(\frac{S}{R}\right.$ ёки e^2 хатолик билан)

$$n_a n_b = Ne^2(B_2 - B_1)\cos B_m, \qquad \textbf{(8.2)}$$

деб ёзишимиз мумкин. **(8.2)**инобатга олсак, **(8.1)**нинг $\frac{(n_a n_b)^2}{N_2^2}$ ҳадида e^4 ҳосил бўлади, шу сабабли қабул қилинган аниқликда **(8.1)**ни қуйидагича ёзишимиз мумкин

$$\frac{Z^2}{N_2^2} = 1 + \frac{2(n_a n_b)}{N_2}\sin B_2 .$$

Охирги формулани бином қаторига ёйиб, биринчи ҳадини сақлаб қолсак

$$\frac{Z}{N_2} = 1 + \frac{(n_a n_b)}{N_2}\sin B_2 \qquad \textbf{(8.3)}$$

келиб чиқади.

Бошланғич нуқта A аргументларига ўтиш учун (Тейлор қатори) қуйидаги формулалардан фойдаланамиз

$$\left.\begin{aligned} N_2 &= N_1 + (B_2 - B_1)\left(\frac{dN}{dB}\right)_1 + \frac{(B_2 - B_1)^2}{2!}\left(\frac{d^2N}{dB^2}\right)_1 + \dots\dots\dots \\ \sin B_2 &= \sin B_1 + (B_2 - B_1)\cos B_1 - \frac{(B_2 - B_1)^2}{2!}\sin B_1 + \dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \qquad (8.4)$$

(8.4), (8.2) ва (8.3)ни инобатга олган ҳолда бошланғич нуқта учун қуйидагини ёзамиз:

$$\frac{Z}{N_1} = 1 - \frac{e^2\cos^2 B_m (B_2 - B_1)^2}{2} \qquad \textbf{(8.5)}$$

Биринчи яқинлашишда:

$$B_2 - B_1 \approx \frac{(1 - e^2\sin^2 B_1)^{\frac{3}{2}}}{a(1 - e^2)} S\cos A_{1.2} \approx \sigma\cos A_{1.2};$$

ва $\eta^2 = e'^2 \cos^2 B_m$ ни ҳисобга олиб:

(8.5) формулани қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\frac{Z}{N_1} = 1 - \frac{\eta^2\sigma^2\cos^2 A_{1.2}}{2}$$

ёки $$Z = N_1(1 - \frac{\eta^2\sigma^2\cos^2 A_{1.2}}{2}) \qquad \textbf{(8.6)}$$

8.2 шаклдан аниқлаймиз:

$$dS = \sqrt{Z^2 d\sigma^2 + dZ^2};$$

ёки $$dS = \sqrt{\left[Z^2 + \frac{dZ}{d\sigma}\right]} d\sigma \qquad \textbf{(8.7)}$$

(8.6)формулани σ бўйича дифференциаллаб топамиз

$$\frac{dZ}{d\sigma} = -\frac{N_1\eta^2 2\sigma}{2}\cos^2 A_{1.2},$$

ундан $$\left(\frac{dZ}{d\sigma}\right)^2 = N_1^2\eta^2\sigma^2\cos^4 A_{1.2} \qquad \textbf{(8.8)}$$

(8.6) дан

$$Z^2 = N_1^2 - \frac{N_1^2\eta^2\sigma^2\cos^2 A_{1.2}}{4} \qquad \textbf{(8.9)}$$

(8.7), (8.8), (8.9) формулалардан фойдаланиб, топамиз:

$$dS = \sqrt{\left[N_1^2 - \frac{N_1^2\eta^2\sigma^2\cos^2 A_{1.2}}{4} + N_1^2\eta^4\sigma^2\cos^4 A_{1.2}\right]} d\sigma$$

$$dS = N_1(1 - \frac{\eta^2\sigma^2\cos^2 A_{1.2}}{4} + \eta^4\sigma^2\cos^2 A_{1.2})^{\frac{1}{2}} d\sigma,$$

ёки қавс ичини бином қаторига ёйиб, биринчи ҳади билан чегараланиб, керакли бўлган аниқликда қуйидагини топамиз:

$$dS = N_1\left(1 - \frac{\eta^2\sigma^2\cos^2 A_{1.2}}{8}\right) d\sigma \qquad \textbf{(8.10)}$$

(8.10) ни *O* дан σ чегарада интеграллаймиз:

$$S = N_1\left(\sigma - \frac{\eta^2\sigma^3\cos^2 A_{1.2}}{24}\right);$$

бундан

$$N_1\sigma = S + \frac{N_1\eta^2\sigma^3\cos^2 A_{1.2}}{24}$$

Тузатма бўлганҳадда $\sigma \approx \frac{S}{N_1}$ деб, ёй секунд қийматида қуйидагини оламиз:

$$\sigma'' = \frac{S}{N_1}\rho'' + \frac{\eta^2 S^3\cos^2 A_{1.2}}{24N_1^3}\rho'';$$

ёки

$$\sigma'' = \frac{S}{N_1}\rho''\left(1 + \frac{\eta^2 S^2\cos^2 A_{1.2}}{24N_1^2}\right),$$

$\left(\frac{\rho''}{N_1}\right) = (2)_1$ эканлигини инобатга олиб

$$\sigma'' = (2)_1 S\left(1 + \frac{\eta^2 S^2\cos^2 A_{1.2}}{24N_1^2}\right) \qquad \textbf{(8.11)}$$

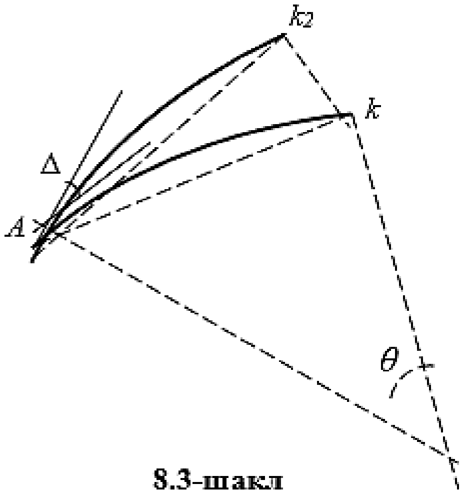
Агарда *S<40* км бўлса

$$\sigma'' = (2)_1 S \qquad \textbf{(8.12)}$$

формуладан фойдаланиш мумкин.

Ўзаро нормал кесимлар ва геодезик чизиқ орасидаги бурчаклар

7.5-шаклдан Ak_2k сферик учбурчакни оламиз. *A* нуқтани *k* ва k_2 нуқталар билан тўғри чизиқ орқали бирлаштирамиз.



8.3-шакл

Учбурчак Akk_2 дан

$$\angle kAk_2 = \frac{kk_2}{Ak} \ , \tag{8.13}$$

(7.29) дан:

$$kk_2 = \frac{N_1}{4} e^2 \sigma \cos^2 B_m \sin 2A_1 \theta(\sigma - \theta) \, ,$$

(7.26) дан:

$$Ak = 2N_1 \sin\frac{\theta}{2} \, ,$$

Унда $\angle kAk_2 = \dfrac{Ne^2 \sigma \cos^2 B_m \sin 2A_1 \theta(\sigma - \theta)}{8N_1 \sin\frac{\theta}{2}}$

$\sin\frac{\theta}{2}$ ни қаторга ёйиб, биринчи ҳадини сақлаб қолган ҳолда охирга тенгликдан қуйидагини ҳосил қиламиз

$$\angle kAk_2 = \frac{e^2 \sigma \cos^2 B_m \sin 2A_1 (\sigma - \theta)}{4} \tag{8.14}$$

Ak масофа билан θ бурчаки камайиб боряпти деб фараз қилсак, у ҳолда *Ak* ва *Ak₂*ватарлар чек охирида нормал кесимлар уринма ҳолатига келади. Бу шартда $\angle kAk_2$, *A* нуқтадаги нормал кесимлар орасидаги бурчакка айланади. Шундай қилиб θ нолга интилганда:

$$\Delta'' = \frac{e^2 \sigma^2 \cos^2 B_m \sin 2A_1}{4} \rho'' \qquad \textbf{(8.15)}$$

$\delta = \frac{1}{3}\Delta$ бўлса, **(8.15)** дан:

$$\delta'' = \frac{e^2 \sigma^2 \cos^2 B_m \sin 2A_1}{12} \rho'' \qquad \textbf{(8.16)}$$

Агарда σ ва N қийматларини ўрнига қўйсак, у ҳолда:

$$\delta'' = \frac{e^2 S^2 (2)_m^2 \cos^2 B_m \sin 2A_1}{12\rho''} \qquad \textbf{(8.17)}$$

келиб чиқади.

(8.15) формула берилган нуқтада ўзаро нормал кесимлар орасидаги бурчакни ифодалайди. **(8.16)**, **(8.17)** формулалар тўғри нормал кесим билан геодезик чизиқ орасидаги бурчакни ифодалайди.

1 класс триангуляция ўлчаш натижаларини қайта ишлашда тўғри нормал кесимлар геодезик чизиқлар билан алмаштирилади, бунда **(8.16)** ёки **(8.17)**формула билан топилган тузатма ўлчанган йўналиш қийматидан айирилади.

Агарда *S=50 км; B=*0^0*; A=*45^0 бўлса, у ҳолда $\Delta'' = 0.023''$;

$\delta = 0.006''$ бўлади.

Мисолдан кўринадики 1 класс триангуляциясида Δ ва δ ларни ҳисобга олмаслик мумкин эмас.

§9. СФЕРОИДИК УЧБУРЧАКЛАРНИ ЕЧИШ

Дастур **Сфероидик учбурчакларни ечиш тўғрисида умумий мулоҳазалар. Сфероидик учбурчакларни ечишнинг Лежандра теоремаси ва аддитаментлар усули.**

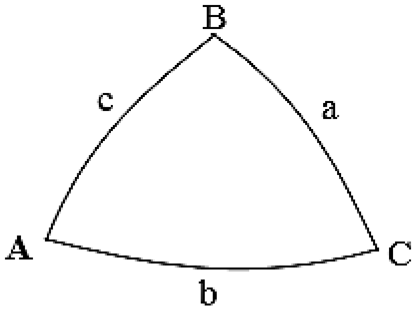
Ўлчанган йўналишлар ва бурчакларни натижавий қийматлари топилгандан сўнг, эллипсоид сатҳида сфероидик учбурчаклар ечилади.

Триангуляция учбурчаклари эллипсоид сатҳида барпо этилган бўлганлиги учун ҳам сфероидикдир. Триангуляция учбурчакларининг томон узунликлари

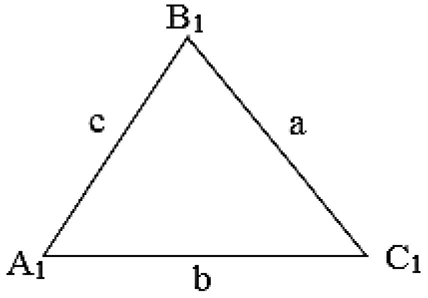
40-50 км дан ошмайди, шу сабабли бу учбурчакларни ечишда уларни сферик учбурчак сифатида ечилади. Сферик тригонометрия формулаларидан фойдаланиб тўғридан-тўғри сферик учбурчакларни ечиш учун унинг томонлари радиус қисмлари билан ифодаланиши зарур. Бу эса ноқулайликка олиб келади, чунки амалда томонлар метр ўлчов бирлигида бўлиши керак. Бундай ҳолда триангуляция учбурчакларини ечиш Лежандра теоремаси ёки аддитаментлар усулида бажарилиши мумкин.

Геодезия тўрини трилотерация усулида барпо этишда учбурчак бурчаклари унинг томон узунликлари орқали ҳисоблаб топилади. Бунда Лежандра теоремаси ва аддитаментлар усулидан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир.

Сферик учбурчакларни Лежандра теоремаси ёрдамида ечиш



9.1 шакл



9.2 шакл

Сферик текисликда *ABC* ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларга эга бўлайлик, уларнинг томонлари мос равишда тенг бўлсин. Бу учбурчакларнинг мос бурчаклари орасидаги фарқларни топайлик A-A_1; B-B_1; C-C_1. Бурчаклар фарқларини билсак, у ҳолда бурчакларнинг текисликдаги қийматлари A_1, B_1 ва C_1 ларни топишимиз мумкин. Сўнгра тўғри чизиқли тригонометрия формулаларини қўллаб учбурчакларни ечамиз.

ABC сферик учбурчак учун

$$\cos\frac{a}{R}=\cos\frac{b}{R}\cdot\cos\frac{c}{R}+\sin\frac{b}{R}\cdot\sin\frac{c}{R}\cos A;$$

бўлади.

Ундан:

$$\cos A = \frac{\cos\frac{a}{R} - \cos\frac{b}{R}\cdot\cos\frac{c}{R}}{\sin\frac{b}{R}\cdot\sin\frac{c}{R}}. \qquad \textbf{(9.1)}$$

Тенгликнинг ўнг томонидаги ҳадларни қаторга ёйиб, ($\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ...$ ва $\cos x = 1 - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...$ формулалар ёрдамида) ва ёйилманинг тўртинчи даражали ҳадларини сақлаб қолган ҳолда топамиз:

$$\cos A = \frac{1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} - (1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4})\cdot(1 - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{c^4}{24R^4})}{(\frac{b}{R} - \frac{b^3}{6R^3})\cdot(\frac{c}{R} - \frac{c^3}{6R^3})};$$

ёки қабул қилинган аниқликда:

$$\cos A = \frac{1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} - 1 + \frac{b^2}{2R^2} - \frac{b^4}{24R^4} + \frac{c^2}{2R^2} - \frac{b^2c^2}{4R^4} - \frac{c^4}{24R^4}}{\frac{bc}{R^2} - \frac{b^3c}{6R^4} - \frac{bc^3}{6R^4}} =$$

$$= \frac{-\frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} + \frac{b^2}{2R^2} - \frac{b^4}{24R^4} + \frac{c^2}{2R^2} - \frac{b^2c^2}{4R^4} - \frac{c^4}{24R^4}}{\frac{bc}{R^2}(1 - \frac{b^2+c^2}{6R^2})};$$

$(1 - \frac{b^2+c^2}{6R^2})^{-1}$ ни бином қаторига ёйиб $((1\text{-}x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$ формула ёрдамида) ва биринчи ҳадини сақлаб, топамиз:

$$\cos A = (\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24R^2bc})\cdot(1 + \frac{b^2+c^2}{6R^2});$$

ёки қабул қилинган аниқликда:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24R^2bc} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot(\frac{b^2+c^2}{6R^2}),$$

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24R^2bc} \qquad \textbf{(9.2)}$$

Текисликдаги $A_1B_1C_1$ учбурчак учун:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A_1;$$

Бундан: $\cos A_1 = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; **(9.3)**

$\sin^2 A_1 = 1 - \cos^2 A_1$ лигини билган ҳолда, топамиз:

$$\sin^2 A_1 = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} =$$

$$= \frac{4b^2c^2 - (b^4 + b^2c^2 - a^2b^2 + b^2c^2 + c^4 - a^2c^2 - a^2b^2 - a^2c^2 + a^4)}{4b^2c^2}$$

ёки $\sin^2 A_1 = \dfrac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4b^2c^2}$ **(9.4)**

деб ёзишимиз мумкин. **(9.3), (9.4)**ни инобатга олиб **(9.2)**ни қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\cos A = \cos A_1 - \sin^2 A_1 \frac{bc}{6R^2};$$

ёки $\cos A - \cos A_1 = -\dfrac{bc}{6R^2}\sin^2 A_1$ **(9.5)**

Бундан: $-2\sin\dfrac{A + A_1}{2}\sin\dfrac{A - A_1}{2} = -\dfrac{bc}{6R^2}\sin^2 A_1$ **(9.6)**

(A-A₁)-кичик қийматга эга бўлганлиги учун:

$$\sin\frac{A + A_1}{2} = \frac{A - A_1}{2};\ \sin\frac{A + A_1}{2} = \sin A_1;$$

деб қабул килиш мумкин. У ҳолда **(9.6)** қуйидаги кўринишга эга бўлади.

$A - A_1 = \dfrac{bc}{6R^2}\sin A_1$ **(9.7)**

$A_1B_1C_1$ учбурчак юзаси:

$$P = \frac{1}{2}bc\sin A_1$$

бўлганлиги сабабли **(9.7)**ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$(A - A_1)'' = \dfrac{P}{3R^2}\rho''$ **(9.8)**

худди шундай:

$(B - B_1)'' = \dfrac{P}{3R^2}\rho''$ **(9.9)**

$(C - C_1)'' = \dfrac{P}{3R^2}\rho''$ **(9.10)**

ларни топамиз ва**(9.8), (9.9)** ва **(9.10)** ларни қўшиб,

$$(A + B + C) - (A_1 + B_1 + C_1) = \frac{P}{R^2}\rho''$$

эканлигини топамиз. $(A_1+B_1+C_1)=180^0$ бўлишлигини ҳисобга олсак

$$A+B+C=180^0+\frac{P}{R^2}\rho'';$$

Бунда: $$\xi''=\frac{P}{R^2}\rho''; \qquad \textbf{(9.11)}$$

у ҳолда: $A+B+C=180^0+\xi''$.

келиб чиқади, бу ерда ξ –сферик ортиқлик дейилади.

(9.8), (9.9), (9.10) ва **(9.11)** формулалардан фойдаланиб текисликдаги бурчак қийматларини топамиз:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A-\frac{1}{3}\xi; \\ B_1 &= B-\frac{1}{3}\xi; \\ C_1 &= C-\frac{1}{3}\xi; \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(9.12)}$$

бу ерда: $$\xi''=\frac{\rho}{R^2}\rho''=\frac{bc\sin A_1}{2R^2}\rho'' \qquad \textbf{(9.13)}$$

$\frac{\rho''}{2R^2}=f$ деб белгиласак (f қиймати ўртача кенглик аргументи асосида жадвалдан топилади) **(9.13)**ни қуйидагича ёзиш мумкин

$$\xi''=fbc\sin A_1 \qquad \textbf{(9.14)}$$

Тенг тамонли учбурчакларда А ва A_1 орасидаги фарқни инобатга олмаса ҳам бўлади, у ҳолда:

$$\xi''=fbc\sin A \qquad \textbf{(9.15)}$$

$$\xi''=f\frac{a^2\sin B\sin C}{\sin A} \qquad \textbf{(9.16)}$$

келиб чиқади.

Агар учбурчак томонларининг узунликлари 90 км дан катта бўлса, сферик ортиқлик икки марта яқинлашиш билан ҳисобланади.

Сферик учбурчакларни аддитаментлар усулида ечиш

АВС сферик учбурчакдан топамиз

$$\frac{\sin\frac{b}{R}}{\sin B}=\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin A};$$

ёки

$$\sin\frac{b}{R}=\sin\frac{a}{R}\cdot\frac{\sin B}{\sin A};$$

$\sin\frac{b}{R}$ ва $\sin\frac{a}{R}$ ларни қаторга ёйиб, биринчи икки ҳадини сақлаб қолсак,

$$\frac{b}{R}-\frac{b^3}{6R^3}=(\frac{a}{R}-\frac{a^3}{6R^3})\cdot\frac{\sin B}{\sin A};$$

$$\frac{b}{R}(1-\frac{b^2}{6R^2})=\frac{1}{R}(a-\frac{a^3}{6R^2})\cdot\frac{\sin B}{\sin A};$$

Бундан, $b=(a-\frac{a^3}{6R^2})\cdot(1-\frac{b^2}{6R^2})^{-1}\cdot\frac{\sin B}{\sin A}$; ни топамиз.

$(1-\frac{b^2}{6R^2})^{-1}$ ни бином қаторига ёйиб, биринчи ҳадини сақлаган ҳолда қуйидагини топамиз:

$$b=(a-\frac{a^3}{6R^2})\cdot(1+\frac{b^2}{6R^2})\cdot\frac{\sin B}{\sin A} \quad \textbf{(9.17)}$$

$\frac{1}{6R^2}=k$ деб белгиласак (МДХ давлатлари минтақаси учун k=409·10^{-11})

$$\frac{a^3}{6R^2}=A_a=ka^3$$

$$a-ka^3=a' \quad \textbf{(9.18)}$$

У ҳолда (9.17) ушбу кўринишни олади

$$b=a'\cdot\frac{\sin B}{\sin A}(1+\frac{b^2}{6R^2})=b'(1+\frac{b^2}{6R^2})=b'+\frac{b^3}{6R^2};$$

агарда $\frac{b^3}{6R^2}=A_b=kb^3$ десак; у ҳолда $b=b'+A_b$ **(9.19)**

Худди шундай *c* томон учун ёзамиз:

$$c' = a' \cdot \frac{\sin C}{\sin A};$$

$$\frac{c^3}{6R^2} = A_c = kc^3;$$

$$c = c' + A_c \qquad \textbf{(9.20)}$$

A_sкатталик S томон аддитаменти дейилади.

Аддитаментлар усулида ҳисоблаш қуйидаги тартибда бажарилади:

1. Бошланғич берилган *a* томонидан уни аддитаментаси A_a айрилади ва бу томони a' қиймати топилади, яъни

$$a' = a - ka^3$$

2. Топилган a' қиймати орқали, учбурчак худди текисликдагидек ечилади ва b', c' ҳисобланади,

$$b' = a' \cdot \frac{\sin B}{\sin A};$$

$$c' = a' \cdot \frac{\sin C}{\sin A};$$

3. Топилган b', c' қийматлар A_b ва A_c аддитаменталар билан тузатилади, яъни

$$b = b' + A_b;$$

$$c = c' + A_c;$$

Триангуляция учбурчаклари қаторини ҳисоблашда бошланғич *a* томон аддитамента A_a орқали тузатилади, топилган a' орқали қолган барча учбурчакларни сферик бурчаклардан фойдаланиб, худди текисликдагидек ечилади. Топилган томон узунликлари уларни аддитаментлари билан тузатилади.

Томон узунликлари берилган сферик учбурчакни ечиш

Учбурчакни *a*, *b* ва *c* томон узунликлари берилган (ўлчанган), *A*, *B* ва *C* сферик бурчакларини топиш керак. Томонлар, текисликда ўлчангандек учбурчак текисликда ечилади ва ҳисоблаб топилган бурчакларига $\frac{1}{3}\xi$ тузатма қўшилади.

Ечиш тартиби:

1. ABC учбурчак юзаси ҳисобланади

$$P = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \qquad \textbf{(9.21)}$$

Сферик ортиқчалик ξ топилади

$$\xi'' = 2fP \qquad \textbf{(9.22)}$$

бунда, $p = \frac{a+b+c}{2}$

2. Ясси бурчаклар ҳисобланади,

$$tg\frac{A_1}{2} = \frac{P}{p(p-a)}; \qquad tg\frac{B_1}{2} = \frac{P}{p(p-b)}; \quad tg\frac{c_1}{2} = \frac{P}{p(p-c)} \qquad \textbf{(9.23)}$$

3. Сферик бурчаклар топилади.

$$A = A_1 + \frac{1}{3}\xi''; \qquad B = B_1 + \frac{1}{3}\xi''; \; C = C_1 + \frac{1}{3}\xi'' \qquad \textbf{(9.24)}$$

Текшириш учун саволлар:

1. Сферик учбурчакларни ечишда нима учун Лежандра теоремасидан ёки аддитаментлар усулидан фойдаланилади?

2. Нима учун трангуляция учбурчакларини ечишда сфероидик учбурчаклар сферик учбурчаклардек ечилади?

3. Сферик ортиқлик ξ катталиги нимага боғлиқ?

4. Сферик учбурчакларни Лежандра теоремасидан фойдаланиб ечиш тартиби қандай?

5. Учбурчакларни ечишнинг аддитаментлар усули билан Лежандра теоремасидан фойдаланиб ечишдаги асосий фарқ нимадан иборат?

6. Аддитаментлар усули билан триангуляция қаторини ечиш тартиби қандай?

7. Трилотерацияда сферик учбурчак қандай тартибда ечилади?

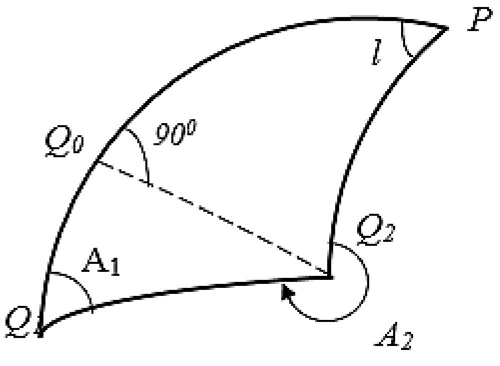
§ 10. ЭЛЛИПСОИД САТҲИДА ГЕОДЕЗИК МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШ

Дастур: Бош геодезик масалалар: тўғри ва тескари геодезик масала; уларни ечишнинг умумий усуллари. Тўғри геодезик масалани ечиш формулари. Тескари геодезик масалани ечиш. Фазода тўғри ва тескари геодезик масала ечиш тўғрисида тушунчалар.

Бош геодезик масалалар, уларни ечишнинг умумий усуллари

Геодезик таянч нуқталар (пунктлар) координатасини аниқлаш олий геодезиянинг асосий вазифаларидандир. Пунктларнинг координаталарини ҳар хил координаталар системасида аниқлаш мумкин. Масалан, 1 класс триангуляция пунктларининг (астронома геодезик тўрда) координаталари эллипсоид сатҳида, геодезик координаталар системасида аниқланади. +олган классдаги давлат триангуляция пунктларининг координаталари Гаусс-Крюгер ясси зонал тўғри бурчакли координаталар системасида аниқланади. Пунктларнинг геодезик координаталарини эллипсоид сатҳида ҳисоблашда икки хилдаги масала келиб чиқади:

1. **Тўғри геодезик масала.**



10.1-шакл

Бу масалада Q_1 пунктнинг B_1, l_1геодезик координаталари, Q_1Q_2 чизиқнинг тўғри азимути $А_1$ ва Q_1, Q_2 пунктлар орасидаги масофа S берилган бўлади.

Q_2 пунктнинг B_2, L_2 геодезик координаталари ва Q_1, Q_2 чизиқнинг тескари азимути A_2ни аниқлаш талаб этилади.

2. Тескари геодезик масала. Бу масалада икки пунктнинг геодезик координаталари B_1, l_1 ва B_2, l_2 лар берилган, бу пунктлар орасидаги S-масофа ва Q_1, Q_2 чизиқнинг тўғри A_1 ва тескари A_2 азимутларини аниқлаш талаб этилади.

Тўғри ва тескари геодезик масалалар биргаликда бош геодезик масала дейилади.

Бош геодезик масалани ечишда турли хил усуллардан фойдаланиш мумкин. Масала ечиш усули нуқталар орасидаги масофага боғлиқ, масофалар шартли равишда тўрт гуруҳга бўлинади:

- кичик масофалар 45 км гача;
- ўртача масофалар 600 км гача;
- катта масофалар 5000 км гача;
- жуда катта масофалар 5000 км дан катта бўлади.

Бош геодезик масалани **бевосита** ёки **бавосита** йўл билан ечиш мумкин.

Бевосита йўл билан бош геодезик масалани ечишда Q_1PQ_2 сфероидик кутб учбурчаги ечилади. Бу учбурчакни $Q_1P=90^0-B_1$; $Q_1Q_2=S$ томонлари ва улар орасидаги бурчак A маълум бўлади. Учбурчакни бевосита ечиш орқали уни қолган уч элементи топилади: $Q_2P=90^0-B_2$ (яъни B_2кенглик);360^0-A_2 (яъни тескари азимут A_2); Q_1 ва Q_2 пунктлар узоқликлар фарқи l (l орқали L_2 топилади $L_2=L_1+l$).

Бевосита йўл билан тескари масала ечишда учбурчакнинг B_1, B_2 ва l элементлари маълум бўлиб, учбурчакни ечиш орқали $PQ_1Q_2=A_1$ ва $PQ_2Q_1=A_2$ тўғри ва тескари азимутлар; $Q_1Q_2=S$ томони топилади.

Сфероидик учбурчак томонлари геодезик чизиқдан иборат бўлганлиги учун эллиптик интеграллар орқали ифодаланади, уларни элементар функциялар орқали интеграллашни иложи йўқ, шу сабабли бош геодезик масалани бевосита ечишда қуйидаги йўл тутилади:

а) сфероидик учбурчак ёрдамчи сферик сатҳида қайта ҳисобланади;

б) иккала учбурчак элементлари орасидаги геометрик боғланиш ўрнатилади;

в) учбурчак ёрдамчи сфера сатҳида ечилади ва уни томонлари оддий сферик тригонометрия формулаларидан фойдаланиб аниқланади;

г) сфероидик ва сферик учбурчаклар орасида ўрнатилган геометрик боғланишдан фойдаланиб, сферик учбурчак эллипсоид сатҳига кўчирилади ва шу орқали сфероидик учбурчак элементлари топилади.

Кичик масофаларда (30÷45 км) бош геодезик масалани бавосита йўл билан ечиш мақсадга мувофиқ ҳисобланади. Бавосита йўл билан бош геодезик масалани ечишда қидирилаётган ва берилган катталиклар орасидаги фарқлар, яъни B_2-B_1; L_2-L_1 ва A_2-$A_1$$\pm180^0$ аниқланади, ундан сўнг қидирилаётган катталиклар топилади:

$$B_2=B_1+(B_2-B_1); \qquad L_2=L_1+(L_2-L_1);$$

$$A_2=A_1\pm180^0-(A_2-A_1)$$

Эллипсоид сатҳида элементар учбурчак бўлиб, унинг бир нуқтасининг B_1, L_1 координаталари томоннинг A_1 тўғри азимути ва томон узунлиги S маълум бўлсин. Унда иккинчи нуқтанинг B_2, L_2 координаталари ва A_2 тескари азимути S масофанининг функцияси бўлади, яъни:

$$B_2 = f_1(S);\ L_2 = f_2(S);\ A_2 = f_3(S);$$

ўз навбатида

$$B_1 = f_1(0);\ L_1 = f_2(0);\ A_1 = f(0);\quad \text{булади.}$$

Қидирилаётган ва берилган катталиклар орасидаги фарқларни Маклорен қаторига ёйиш орқали аниқлаш мумкин;

$$B_2 - B_1 = \left(\frac{dB}{dS}\right)_1 S + \left(\frac{d^2B}{dS^2}\right)\frac{S^2}{2!} + \left(\frac{d^3B}{dS^3}\right)\frac{S^3}{3!} + \ldots.. \ ;$$

$$L_2 - L_1 = \left(\frac{dL}{dS}\right)_1 S + \left(\frac{d^2L}{dS^2}\right)\frac{S^2}{2!} + \left(\frac{d^3L}{dS^3}\right)\frac{S^3}{3!} + \ldots.. \ ;$$

$$A_2 - A_1 \pm 180^0 = \left(\frac{dA}{dS}\right)_1 S + \left(\frac{d^2A}{dS^2}\right)\frac{S^2}{2!} + \left(\frac{d^3A}{dS^3}\right)\frac{S^3}{3!} + \ldots..$$

Геодезик чизиқнинг асосий тенгламалари деган мавзудан фойдаланиб биринчи ҳосилаларни топамиз:

$$\cos A = \frac{MdB}{dS},$$

бундан: $$\frac{dB}{dS} = \frac{\cos A}{M}$$

$$\sin A = \frac{rdl}{dS},$$

бундан: $$\frac{dl}{dS} = \frac{\sin A}{r} = \frac{\sin A}{N \cos B}$$

$$dA = dl \sin B,$$

бундан: $$dA = \frac{\sin AdS}{r} \sin B$$

ёки $$\frac{dA}{dS} = \frac{\sin A \sin B}{r} = \frac{\sin A \sin B}{N \cos B} = \frac{\sin AtgB}{N}$$

У ҳолда иккинчи тартибли ҳосилалар қуйидагиларга тенг бўлади:

$$\frac{d^2B}{dS^2} = -\frac{\sin^2 A}{MN} tgB$$

$$\frac{d^2l}{dS^2} = -\frac{\sin 2A \cos B}{MN} tgB \qquad \textbf{(10.2)}$$

$$\frac{d^2A}{dS^2} = \frac{\sin A \cos A}{MN}(1 + 2tg^2B)$$

Юқоридаги формулалар *S<30км* бўлганда етарли ҳисобланади, агарда *S>30км* бўлса унда учинчи ва ундан юқори тартибли ҳосилалар олинади. Бундан ташқари *M* ва *N* қийматлари кенглик ўзгаришига боғлиқ, яъни улар доимий эмас. Бундай ҳолда қаторлар назариясини қўллаш ҳисоблаш учун ноқулай бўлган формулаларни келтириб чиқаради. Шу сабабли масалани ечишнинг ҳар хил усуллари ишлаб чиқилган бўлиб, улар қандайдир даражада мавжуд формулаларни соддалаштиради. Бош геодезик масалани ечишнинг айрим усулларига тўхталиб ўтайлик:

а) **бош геодезик масалани ўртача аргументли формулалардан фойдаланиб ечиш.** Бу формулаларда ўртача кенглик ва томоннинг ўртача аргументлари ишлатилади. Қидирилаётган катталик кенгликлар, узоқликлар ва азимутлар фарқларини қаторларга ейиш орқали аниқланади;

б) **бош геодезик масалани ёрдамчи нуқта усули билан ечиш.** Бу усулда қидирилаётган катталиклар мақсад билан танланган ёрдамчи нуқта орқали топилади. Натижада ёйилманинг айрим ҳадлари кичраяди;

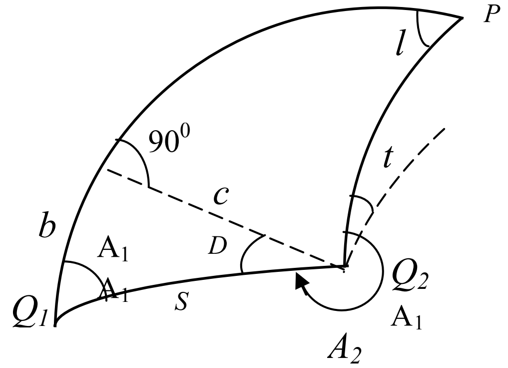
в) **бош геодезик масалани ёрдамчи сфера усулида ечиш.** Бу усулда учбурчак ёрдамчи сферага ўтказилади. Сферик учбурчак ечилгандан сўнг учбурчак сферадан сфероидга қайта ўтказилади.

Юқорида айитилган усуллардан ташқари бош геодезик масалани **ватарлар бўйича ечиш усули мавжуд.** Бу усул формулалари пунктлар орасидаги масофа қандай бўлишидан қатъий назар қўлланилиши мумкин.

Текшириш учун саволлар:

1. Тўғри геодезик масалада қандай катталиклар бошланғич маълумот сифатида берилади, қандай катталиклар ҳисоблаб топилади?
2. Тескари геодезик масалада қандай катталиклар бошланғич маълумот сифатида берилади, қандай катталиклар ҳисоблаб топилади?
3. Бош геодезик масала деганда нимани тушунасиз?
4. Бош геодезик масалани бевосита ва бавосита ечиш йўллари орасидаги асосий фарқларни айтинг.
5. Маклорен қатори нима учун қўлланилади?
6. Бош геодезик масалани бавосита ечишнинг қандай усулларини биласиз?

§ 11. ЁРДАМЧИ НУҚТА УСУЛИДА ТЎҒРИ ГЕОДЕЗИК МАСАЛА ЕЧИШ



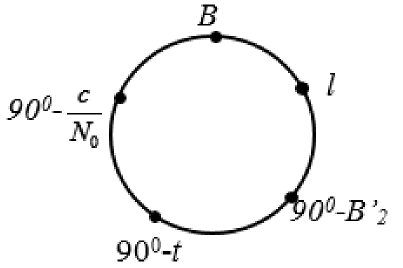
11.1-шакл

Q_1PQ_2 сфероидик қутб учбурчаги бўлсин. Q_2нуқтадан шундай Q_2Q_0 геодезик чизиғини ўтказамизки у Q_0 нуқ-тада 90^0ли азимутга эга бўлсин. Натижада Q_0PQ_2ва $Q_0Q_1Q_2$тўғри бурчакли сфероидик учбурчаклар ҳосил бўлади.

Q_1 нуқтанинг B_1-кенглик, L_1 –узоқлик координаталари, тўғри азимути A_1 ҳамда Q_1 ва Q_2 нуқталар орасидаги S масофаси берилган бўлиб,Q_2нуқтанинг B_2кенглиги, L_2-узоқлиги ва тескари азимути A_2ни аниқлаш лозим бўлсин.

1. $Q_1Q_0Q_2$ учбурчакни ечиш

Изох

Мадюи чизмаси  $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^{15}}{120} - ...$ $tgx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + ...$	Тўғри бурчакли сфероидик учбурчак учун Непер-Мадюи қоидаси. Тўғри бурчакли сфероидик учбурчакни ҳар бир элементининг косинуси унга қўшни бўлган элементларнинг катангенслари ёки узоқ элементларининг синуслари кўпайтмасига тенг.

Учбурчакдан қуйидагиларни топамиз:

$$\cos\left(90^0-\frac{C}{R_{11}}\right)=\sin\frac{C}{R_1}=\sin A_1\sin\frac{S}{R_1} \qquad \textbf{(11.1)}$$

$$\cos A_1=ctg\frac{S}{R_1}ctg\left(90^0-\frac{b}{R_1}\right)=ctg\frac{S}{R_1}tg\frac{b}{R_1}\ .$$

Бундан:

$$tg\frac{b}{R_1}=\cos A_1 tg\frac{S}{R_1} \qquad \textbf{(11.2)}$$

(11.2) ва **(11.1)** формулалардаги $\sin\frac{c}{R_1}$, $\sin\frac{S}{R_1}$, $tg\frac{b}{R_1}$, $tg\frac{S}{R_1}$ ларни қаторга ёямиз:

$$\frac{b}{R_1}+\frac{b^3}{3R_1^3}=\cos A_1\left(\frac{S}{R_1}+\frac{S^3}{3R_1^3}\right)\rightarrow\frac{b}{R_1}=\frac{S}{R_1}\cos A_1+\frac{S^3}{3R_1^3}\cos A_1-\frac{b^3}{3R_1^3}$$

$$\frac{c}{R_1}-\frac{c^3}{6R_1^3}=\sin A_1\left(\frac{S}{R_1}-\frac{S^3}{6R_1^3}\right)\rightarrow\frac{c}{R_1}=\frac{S}{R_1}\sin A_1-\frac{S^3}{6R_1^3}\sin A_1+\frac{c^3}{6R_1^3}$$

Биринчи яқинлашишда $B \approx ScosA_1$, $c \approx SsinA_1$ десак:

$$b=S\cos A_1\left(1+\frac{S^2}{3R_1^2}-\frac{b^2}{3R_1^2}\right) \qquad \textbf{(11.3)}$$

$$C=S\sin A_1\left(1-\frac{C^2}{6R_1^2}+\frac{C^2}{6R_1^2}\right) \qquad \textbf{(11.4)}$$

$U=ScosA_1$, $V=sinA_1$ деб белгилаш киритамиз, у ҳолда $U^2+V^2=S^2$ бўлади ва **(11.3), (11.4)**лар қуйидаги кўринишларга келади:

$$b=U\left(1+\frac{V^2}{3R_1^2}\right) \quad \text{ва} \quad C=V\left(1-\frac{U^2}{GR_1^2}\right) \qquad \textbf{(11.5)}$$

2. Берилган ва ёрдамчи нуқталар кенгликлари фарқини аниқлаш

B_0-B_2 кенгликлар фарқи учун қуйидаги функционал боғланишни ёзамиз:

$$B_0-B_1=\left(\frac{dB}{dx}\right)_1 b+\left(\frac{d^2B}{dx^2}\right)_1\frac{b^2}{2}+\left(\frac{d^3B}{dx^3}\right)_1\frac{b^3}{6}+..... \qquad \textbf{(11.6)}$$

(11.6) формулага биринчи, иккинчи, учинчи тартибли ҳосилаларни қўйиб, кенгликлар фарқини топамиз.

Биринчи ҳосила. Бизга маълумки $dx=MdB$ шунинг учун:

$$\frac{dB}{dx}=\frac{1}{M}=\frac{\left(1-e^2\sin^2 B\right)^{3/2}}{a\left(1-e^2\right)} \qquad \textbf{(11.7)}$$

Иккинчи ҳосила.

$$\frac{dB^2}{dx^2}=\frac{d}{dB}\left(\frac{1}{M}\right)\frac{dB}{dx}=\frac{\frac{3}{2}\left(1-e^2\sin^2 B\right)^{\frac{1}{2}}\left(-2e^2\sin B\cos B\right)}{a\left(1-e^2\right)M}=$$

$$=-\frac{3}{2}\frac{e^2\sin 2B\left(1-e^2\sin^2 B\right)^{\frac{1}{2}}}{a\left(1-e^2\right)M}=-\frac{3e^2\sin 2B}{2\left(1-e^2\right)MN} \qquad \textbf{(11.8)}$$

Учинчи ҳосила. Учинчи ҳосилани топишдан олдин иккинчи ҳосилани соддалаштирамиз.

$$\frac{d^2B}{dx^2}=-\frac{3e^2\sin 2B}{2(1-e^2)MN}=-\frac{3e^2\sin 2B}{\dfrac{2(1-e^2)a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}}\cdot\dfrac{a}{(1-e^2\sin^2 B)^{1/2}}}=-\frac{3e^2\sin 2B}{\dfrac{2a^2(1-e^2)^2}{(1-e^2\sin^2 B)^2}}\ ,$$

бунда $\dfrac{(1-e^2)^2}{(1-e^2\sin^2 B)^2}$; e^2 тартибидаги кичик катталик бўлганлиги учун:

$$\frac{d^2B}{dx^2}=-\frac{3e^2\sin 2B}{2a^2},$$

деб оламиз ва учинчи тартибли ҳосилани топамиз:

$$\frac{d^3B}{dx^3}=\frac{d}{dB}\left(\frac{d^2B}{dx^2}\right)\frac{dB}{dx}=-\frac{3e^2\cos 2B}{a^2M}; \qquad \textbf{(11.9)}$$

(11.7), (11.8) ва **(11.9)**ларни **(11.6)**га қўямиз.

$$(B_0-B_1)=\frac{(1-e^2\sin^2 B_1)^{3/2}}{a(1-e^2)}\cdot b-\frac{3e^2\sin 2B_1}{2(1-e^2)M_1N_1}\cdot\frac{b^2}{2}-$$

$$-\frac{3e^2\cos 2B_1}{a^2M_1}\cdot\frac{b^3}{6}=\frac{b}{M_1}\left[1-\frac{3e^2\sin 2B_1}{4(1-e^2)N_1}\cdot b-\frac{e^2\cos 2B_1}{2a^2}b^2\right]$$

ҳад бошидаги меридиан узунлиги:

$$b=U\left(1+\frac{V^2}{3R_1^2}\right)$$

билан алмаштирамиз.

Квадрат қавс ичидаги ҳадларда $b \approx U$ деб олмиз, унда:

$$B_0 - B_1 = \frac{U}{M_1}\left(1+\frac{V^3}{3R_1^2}\right)\cdot\left[1-\frac{3e^2\sin^2 B_1}{4(1-e^2)N_1}U-\frac{e^2\cos 2B_1}{2a^2}U^2\right]$$

$\frac{U}{M_1}\rho'' = (1)_1 U = \beta''$ деб белгилаш киритамиз ва қабул қилинган аниқликда қуйидагига эга бўламиз:

$$b'' = (B_0 - B_1) = \rho''\left[1-\frac{3e^2\sin 2B_1 U}{4(1-e^2)N_1}-\frac{e^2\cos 2B_1}{2a^2}U^2+\frac{V^2}{3R_1^2}\right]$$ **(11.10)**

(11.10) ни логарифмлаймиз

$$\lg b'' = \lg\beta + \lg\left[1-\frac{3e^2\sin 2B_1}{4(1-e^2)N_1}U-\frac{e^2\cos 2B_1}{2a^2}U^2+\frac{V^2}{3R_1^2}\right];$$

қавс ичидаги ифодани логарифлик қаторга ёйиб, $\lg(1+x) = \mu x - \frac{x^2}{2}\mu + \frac{x^3}{3}\mu$ - формула ёрдамида, биринчи ҳадини сақлаб қуйидагича белгилашлар киритамиз:

$\frac{3e^2\sin 2B}{4(1-e^2)N}\cdot\mu = (4)$- тўртинчи геодезик катталик;

$\frac{1}{3R^2}\mu = (5)$ -бешинчи геодезик катталик;

$-\frac{e^2\cos 2B}{2a^2}\mu = (6)$- олтинчи геодезик катталик;

ва қуйидагини ҳосил қиламиз:

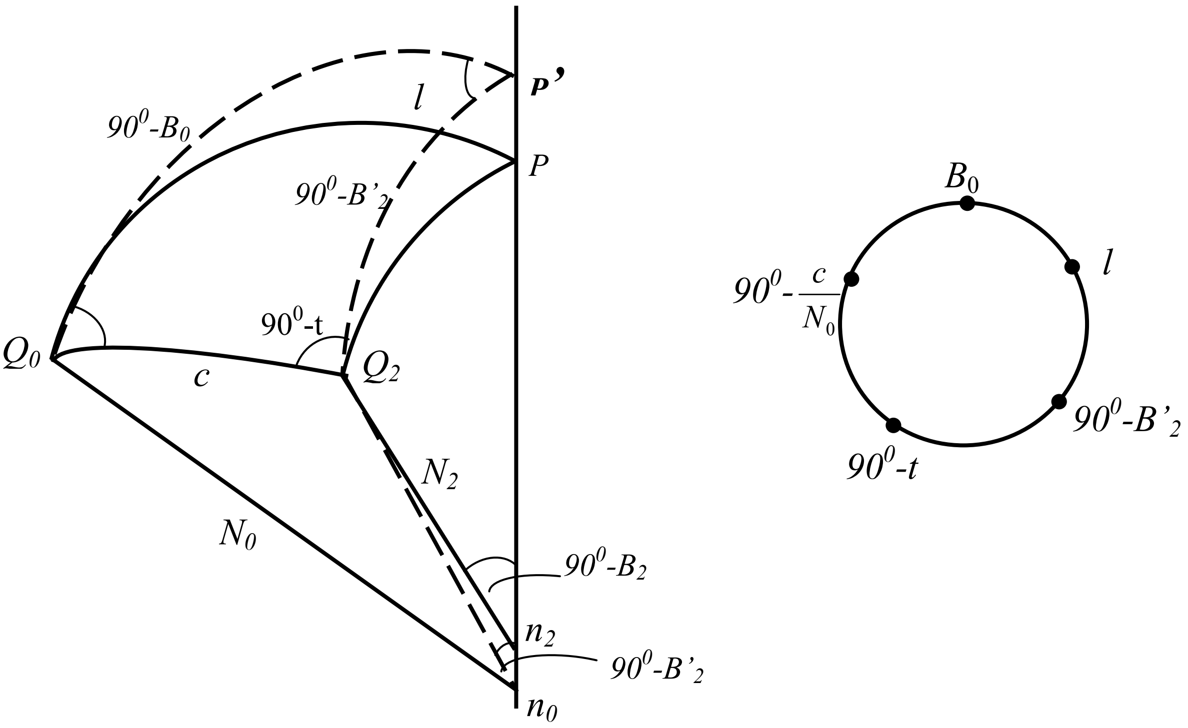
$$\lg b'' = \lg\beta'' - (4)_1 U + (5)_1 V^2 + (6)_1 U^2$$ **(11.11)**

Сўнгра ёрдамчи нуқта кенглиги ҳисобланади:

$$B_0 = B_1 + b_0''$$ **(11.12)**

Ёрдамчи нуқта Q_0 ва координатаси қидирилаётган нуқта Q_2 узоқликлари фарқи ва Q_2Q_0 чизиқ азимутини аниқлаш

Q_0PQ_2 сфероидик учбурчагини оламиз (11.2-шакл) ва уни радиуси Q_0нуқтанинг биринчи вертикал радиуси N_0га тенг бўлган шарга ўтказамиз. Q_0PQ_2 нинг маркази n_0 нуқтада бўлган шар сатҳидаги проекцияси $Q_0P'Q_2$ бўлсин. Сферик учбурчак $Q_0P'Q_2$ да Непер-Модюи қоидасини қўллаб қуйидагини ёзамиз.



11.2-шакл

$$\cos B_0 = tg\frac{C}{N_0}ctgl$$

$$\sin\frac{C}{N_0} = ctgB_0ctg\left(90^0 - t\right)$$

булардан,

$$tgl = tg\frac{C}{N_0}\sec B_0 \qquad \textbf{(11.13)}$$

$$tgt = \sin\frac{C}{N_0}tgB_0 \qquad \textbf{(11.14)}$$

$tgl, tg\dfrac{C}{N_0}, tgt$ ва $\sin\dfrac{C}{N_0}$ ларни қаторга ёйиб, учинчи даражали ҳадлар билан чегараланамиз.

$$l+\frac{l^3}{3}=\left(\frac{C}{N_0}+\frac{C^3}{3N_0^3}\right)\sec B_0 \to l=\frac{C}{N_0}\sec B_0+\frac{C^3}{3N_0^3}\sec B_0-\frac{l^3}{3};$$

$$t+\frac{t^3}{3}=\left(\frac{C}{N_0}-\frac{C^3}{6N_0^3}\right)tgB_0 \to t=\frac{C}{N_0}tgB_0-\frac{C^3}{6N_0^3}tgB_0-\frac{t^3}{3};$$

биринчи яқинлашишда $l\approx\dfrac{C}{N_0}\sec B_0;\ t\approx\dfrac{C}{N_0}tgB_0$ деб, қабул қиламиз, у ҳолда:

$$l=\frac{C}{N_0}\sec B_0\left(1+\frac{C^2}{3N_0^2}-\frac{l^2}{3}\right) \tag{11.15}$$

$$t=\frac{C}{N_0}tgB_0\left(1-\frac{C^2}{6N_0^2}-\frac{t^2}{3}\right) \tag{11.16}$$

(11.4), (11.5)дан $C=V\left(1-\dfrac{U^2}{6R_1^2}\right)$ эканлигини ҳисобга олиб топамиз:

$$C''=\frac{C}{N_0}\rho''=(2)_0 V\left(1-\frac{U^2}{6R_1^2}\right)$$

ёки $(2)_0 V=\gamma''$ деб белгилаш киритсак:

$$C''=\gamma''\left(1-\frac{U^2}{6R_1^2}\right)$$

ҳосил бўлади. Охирги кенгликнинг ҳар икки томонини логарифмлаб қуйидагини аниқлаймиз:

$$\lg C''=\lg\gamma''-\frac{U^2}{6R_1^2}\mu=\lg\gamma''-\frac{1}{2}(5)_1U^2 \tag{11.17}$$

(11.15)ва**(11.16)**ни бурчак ўлчовида берамиз:

$$C''=\frac{C}{N_0}\rho''\to C=\frac{C''N_0}{\rho''};\quad l''=l\rho''\to l=\frac{l''}{\rho''};\quad t''=t\rho''\to t=\frac{t''}{\rho''}$$

ўз навбатида:

$$l''=C''\sec B_0\left(1+\frac{C''^2}{3\rho''^2}-\frac{l''^2}{3\rho''^2}\right) \tag{11.18}$$

$$t''=C''tgB_0\left(1-\frac{C''^2}{6\rho''^2}-\frac{t''^2}{3\rho''^2}\right) \quad \textbf{(11.19)}$$

Қуйидаги белгилашларни киритсак:

$$C''\sec B_0=\lambda''; \; C''tgB_0=\tau'' \quad \textbf{(11.20)}$$

$$C''^2=\lambda''^2-\tau''^2 \quad \textbf{(11.21)}$$

ва қавс ичидаги ҳадларда *l”* ни *λ”, t”*ни *τ”* билан алмаштирсак **(11.18)**ва **(11.19)**лар қуйидаги кўринишларга келади:

$$l''=\lambda''\left(1+\frac{\lambda''^2-\tau''^2-\lambda''^2}{3\rho''^2}\right)=\lambda''\left(1-\frac{\tau''^2}{3\rho''^2}\right) \quad \textbf{(11.22)}$$

$$t''=\tau''\left[1-\frac{\left(\lambda''^2-\tau''^2\right)}{6\rho''^2}-\frac{\tau''^2}{3\rho''^2}\right]=\tau''\left(1-\frac{\lambda''^2}{6\rho''^2}-\frac{\tau''^2}{6\rho''^2}\right) \quad \textbf{(11.23)}$$

(11.22), (11.23)ларни логарифмлаб:

$$\lg l''=\lg\lambda''+\lg\left(1-\frac{\tau''^2}{3\rho''^2}\right);$$

$$\lg t=\lg\tau''+\lg\left(1-\frac{\lambda''^2}{6\rho''^2}-\frac{\tau''^2}{6\rho''^2}\right);$$

ва уларни иккинчи ҳадини логарифмлик қаторга ёйиб, қаторни биринчи ҳадини сақлаб қолган ҳолда қуйидагини топамиз:

$$\lg l''=\lg\lambda''-\frac{\tau''^2}{3\rho''^2}\mu;$$

$$\lg t''=\lg\tau''-\frac{\lambda''^2}{6\rho''^2}\mu-\frac{\tau''^2}{6\rho''^2}\mu;$$

$\frac{1}{6\rho''^2}\mu$ *ни* ϑ билан белгиласак,

$$\lg l''=\lg\lambda''-2\vartheta\tau''^2 \quad \textbf{(11.24)}$$

$$\lg t''=\lg\tau''-\vartheta\lambda''^2-\vartheta\tau''^2 \quad \textbf{(11.25)}$$

ларни ҳосил қиламиз.

Ёрдамчи *Q_0* ва координатаси аниқланилаётган *Q_2* нуқталар кенгликлари фарқини аниқлаш

$Q_0P'Q_2$ учбурчакдан (11.2-шакл) (Пифагор формуласи)

$$\cos\left(90^0 - B_2'\right) = \cos\frac{C}{N_0}\cos\left(90^0 - B_0\right) ;$$

ёки

$$\sin B_2' = \cos\frac{C}{N_0}\sin B_0 \qquad \textbf{(11.26)}$$

Кенгликлар фарқини B_0-B_2'=d_0 деб белгилаймиз, унда

$$\sin B'_2 = \sin\left(B_0 - d_0\right) = \sin B_0 \cos d_0 - \cos B_0 \sin d_0 \qquad \textbf{(11.27)}$$

(11.27)ни **(11.26)**га қўйсак

$$\sin B_0 \cos d_0 - \cos B_0 \sin d_0 = \cos\frac{C}{N_0}\sin B_0 ;$$

ундан,

$$\sin d_0 = \frac{\sin B_0 \cos d_0 - \cos\dfrac{C}{N_0}\sin B_0}{\cos B_0} ;$$

ёки $$\sin d_0 = tgB_0\left(\cos d_0 - \cos\frac{C}{N_0}\right)$$

$sind_0$, $cosd_0$, $cos\frac{C}{N_0}$ ларни қаторга ёйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$d_0 - \frac{d_0^3}{6} = tgB_0\left[\left(1 - \frac{d_0^2}{2} + \frac{d_0^4}{24}\right) - \left(1 - \frac{c^2}{2N_0^2} + \frac{c^4}{24N_0^4}\right)\right],$$

белгиланган аниқликда:

$$d_0 - \frac{d_0^3}{6} = tgB_0\left[\frac{c^2}{2N_0^2} - \frac{c^4}{24N_0^4} - \frac{d_0^2}{2} + \frac{d_0^4}{24}\right] \qquad \textbf{(11.29)}$$

биринчи яқинлашишда:

$$d_0 = \frac{c^2}{2N_0^2}tgB_0 ;$$

деб қабул қилиш мумкин.

$\frac{c}{N_0}$ га нисбатан тўртинчи тартибдаги ҳадларни сақлаб қолишни шартлаймиз, унда $\frac{d_0^3}{6}$ ни ташлаб юборишимиз мумкин, d_0^2 ни $d_0^2=\frac{c^4}{4N_0^4}tg^2B_0$ билан алмаштирамиз.

Унда (11.29) формула:

$$d_0=tgB_0\left(\frac{c^2}{2N_0^2}-\frac{c^4}{24N_0^4}-\frac{c^4}{8N_0^4}tg^2B_0\right)$$ кўринишга, ёки

$$d_0=\frac{c^2}{2N_0^2}tgB_0\left(1-\frac{c^2}{12N_0^2}-\frac{c^2}{4N_0^2}tg^2B_0\right)$$ кўринишга келади.

$$c''=\frac{c}{N_0}\rho''\rightarrow c=\frac{c''}{\rho''}N_0;$$

$$c''\sec B_0=\lambda'';\ c''tgB_0=\tau'';\ c''^2=\lambda''^2-\tau''^2;$$

$d=\frac{d''}{\rho''}$ формулаларни инобатга олиб, d_0 ва c ни градус ўлчовида ифодалаймиз:

$$d_0''=\frac{c''^2N_0^2\tau''}{\rho''^2 2N_0^2c''}\cdot\rho''\left(1-\frac{c''^2N_0^2}{\rho''^2 12N_0^2}-\frac{c''^2N_0^2\tau''^2}{\rho''^2 4N_0^2c''^2}\right)==\frac{c''\tau''}{2\rho''}\left(1-\frac{\lambda''^2-\tau''^2}{12\rho''^2}-\frac{\tau''^2}{4\rho''^2}\right);$$

ёки

$$d_0''=\frac{c''\tau''}{2\rho''}\left(1-\frac{\lambda''^2}{12\rho''^2}-\frac{\tau''^2}{6\rho''^2}\right); \qquad \textbf{(11.30)}$$

Натижада Q_0 ва Q_2 нуқталарнинг шар сатҳидаги кенгликлар фарқини топдик. Эллипсоид сатҳига ўтамиз, $d=B_0-B_2$ кенгликлар фарқини топамиз.

Кенгликлар орасидаги фарқ кичик бўлганлиги учун уларга мос келадиган шар ва эллипсоиддаги меридиан ёйларини айлана ёйлари сифатида қарашимиз мумкин, лекин уларни эгрилик радиусларини ҳар хил деб оламиз, яъни:

$$N_0d_0''=M_0d'';$$

бундан:

$$d_0''=\frac{M_0}{N_0}d''; \qquad \textbf{(11.31)}$$

(11.30) ва **(11.31)** формулалардан қуйидагини топамиз:

$$\frac{M_0}{N_0}d''=\frac{c''\tau''}{2\rho''}\left(1-\frac{\lambda''^2}{12\rho''^2}-\frac{\tau''^2}{6\rho''^2}\right);$$

бундан:

$$d''=\frac{N_0}{M_0}\frac{c''\tau''}{2\rho''}\left(1-\frac{\lambda''^2}{12\rho''^2}-\frac{\tau''^2}{6\rho''^2}\right) \qquad \textbf{(11.32)}$$

$\frac{N_0}{M_0}\cdot\frac{1}{2\rho''}=(3)_0$ деб белгилаймиз, у ҳолда **(11.33)**

$$(3)_0 c''\tau''=\delta'' \qquad \textbf{(11.34)}$$

ва **(11.32)** формула

$$d''=\delta''(1-\frac{\lambda''^2}{12\rho''^2}-\frac{\tau''^2}{6\rho''^2}) \qquad \textbf{(11.35)}$$

кўринишни олади. **(11.35)**ни логарифлаймиз

$$\lg d''=\lg\delta''+\lg\left(1-\frac{\lambda''^2}{12\rho''^2}-\frac{\tau''^2}{6\rho''^2}\right);$$

қавс ичидаги ифодани логарифмлик қаторга ёйиб, биринчи ҳадини сақлаб қуйидагини оламиз:

$$\lg d''=\lg\delta''-\frac{\lambda''^2}{12\rho''^2}\mu-\frac{\tau''^2}{6\rho''^2}\mu;$$

$\frac{1}{6\rho''^2}\mu=\upsilon$ эканлигини ҳисобга олиб,қуйидагини топамиз:

$$\lg d''=\lg\delta''-\frac{1}{2}\upsilon\lambda''^2-\upsilon\tau''^2 \qquad \textbf{(11.36)}$$

Натижада қидирилаётган нуқтанинг кенглик ва узоқлигини топамиз:

Тескари азимутни аниқлаш

11.3-шаклдан

$$A_2=360^0-D-(90^0-t);$$

ёки

$$A_2=270^0-D+t \qquad \textbf{(11.38)}$$

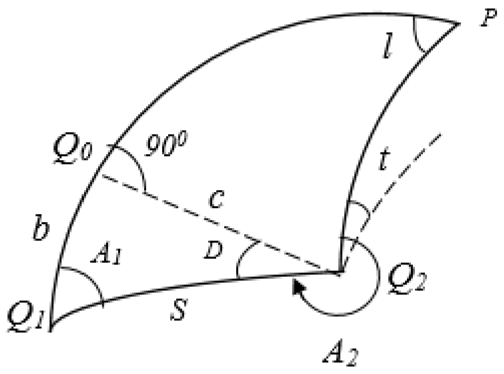
Q₁Q₀Q₂ учбурчакдан:

$$180^0+\xi''=A_1+90^0+D \qquad \textbf{(11.39)}$$

(11.34) ва**(11.35)**формулалардан фойдаланиб қуйидагини топамиз

$$A_2=270^0+t-(180^0+\xi-A_1-90^0)$$

ёки $A_2=A_1+180^0+t+\xi''$ **(11.40)**



11.3-шакл

Сферик ортиқликни ҳисоблаш учун қуйидагини ёзишимиз мумкин:

$$\xi''=\frac{b\cdot c}{2R_1^2}\rho''=\frac{\rho''}{2}\cdot\frac{b}{M_1}\cdot\frac{c}{N_1};$$

бунда:

$$\frac{b}{M_1}\rho''=b'' \quad \text{унда} \quad b=\frac{b''}{\rho''}M_1;$$

$$\frac{c}{N_1}\rho''=c'' \quad \text{унда} \quad c=\frac{c''}{\rho''}N_1;$$

у ҳолда:

$$\xi''=\frac{\rho''}{2}\cdot\frac{b''}{\rho''}\cdot\frac{c''}{\rho''}=\frac{b''c''}{2\rho''} \qquad \textbf{(11.41)}$$

Формулалар тўплами

$$u=S\cos A_1;\ \lg b''=\lg\beta''-(4)_1u+(5)_1v^2+(6)_1u^2\ v=S\sin A_1;\quad \beta=(1)_1u;$$

$$B_0=B_1+b''.$$

$$\gamma''=(2)_1v;\quad \lg c''=\lg\gamma''-\frac{1}{2}(5)_1u^2;$$

$$\lambda''=c''\sec B_0;\quad \tau''=c''tgB_0;\quad \delta''=(3)_0c''\tau'';$$

$$\lg l''=\lg\lambda''-2v\tau''^2;\quad \lg t''=\lg\tau''-v\lambda''^2-v\tau''^2;$$

$$\lg d''=\lg\delta''-v\tau''^2-\frac{1}{2}v\lambda''^2;$$

$$B_2=B_0=d'';\quad L_2=L_1+l'';\quad \xi''=\frac{1}{2\rho''}b''c'';$$

$$A_2=A_1\pm180^0-t''-\xi''$$

(1)-(6) геодезик катталиклар кенглик қиймати бўйича махсус жадвалдан олинади. (4), (5), (6) геодезик катталиклар логарифмнинг *n*-инчи белгисига тузатмалар бўлиб, махсус жадвалларда асосан логарифмани саккизинчи белгисида берилади. Логарифмани еттинчи белгисига ўтказиш учун характеристикасини бирга камайтириш керак. $\upsilon\lambda^2$ ва $\upsilon\tau^2$ тузатма ҳадлар $\lg\lambda$ ва $\lg\tau$ аргументлар бўйича жадвалдан олинади, уларни логарифманинг еттинчи белгисига ўтказиш учун жадвалдан олинган қийматни 10 га бўлиш керак. Юқорида берилган формулалар тўплами 1 класс триангуляциянинг координата ва азимутларини ҳисоблашда қўлланилади.

Агарда пунктлар орасидаги масофа *30* километрдан кичик бўлса, етти хонали логарифм жадвалидан фойдаланилади. Масофа 30÷60 километр оралиғида бўлганда саккиз хонали логарифм жадвалидан фойдаланилади. *S<30 км* бўлганда координаталар ҳисоблаш аниқлиги *±0,0001”;* азимут аниқлиги *±0,001”*га тенг бўлади.

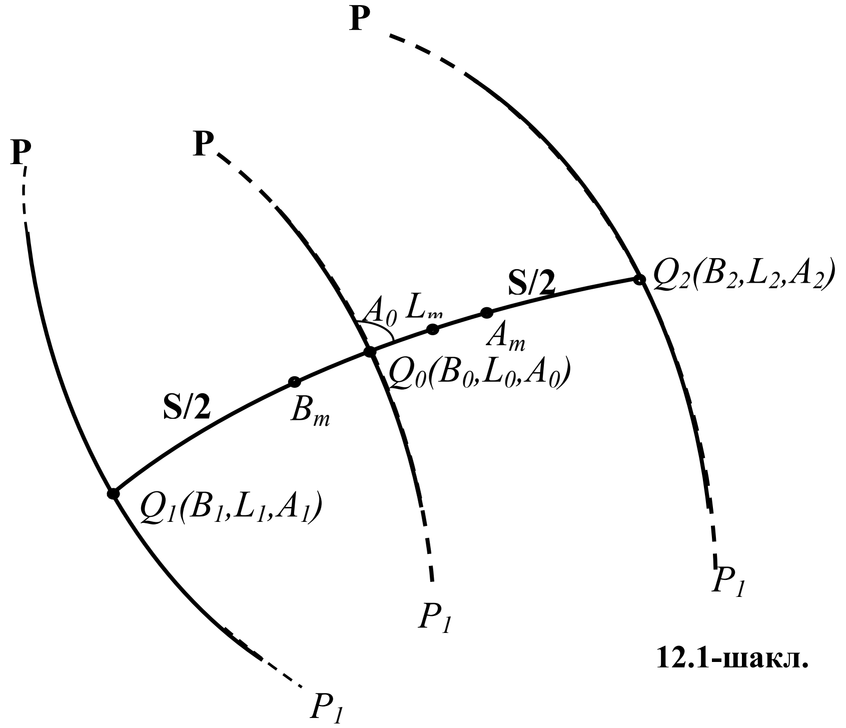
Ҳисоблашни ЭҲМда бажариш учун қуйида келтирилган формулалардан фойдаланиш кулай:

$$u=\frac{S}{N_1}\cos A_1;\quad v=\frac{S}{N_1}\sin A_1;\quad b=u\left(1+\frac{v^3}{3}\right);$$

$$c=v\left(1-\frac{u^6}{6}\right);\quad \varphi_0=B_1+b\rho'';\quad \tau=c\cdot tg\varphi_0;$$

$$\lambda=c\cdot\sec\varphi_0;\quad t''=\tau\left(1-\frac{\lambda^2}{6}-\frac{\tau^2}{6}\right)\rho'';\quad l''=\lambda\left(1-\frac{\tau^2}{3}\right)\rho''$$

§ 12. ЎРТАЧА АРГУМЕНТЛИ ФОРМУЛАЛАРДАН ФОЙДАЛАНИБ ТЎҒРИ ГЕОДЕЗИК МАСАЛА ЕЧИШ



12.1-шакл.

Математикадан маълумки, аргумент ўртача қийматлари бўйича ёйилган даражали қаторда жуфт даражали ҳадлар бўлмайди, бошланғич аргумент бўйича ёйилган қаторни ҳадларидан ҳадлар сони икки марта кам бўлади.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f^{III}(x) + \frac{h^4}{4!} f^{IV}(x) + ... \qquad \textbf{(12.1)}$$

қаторни ўртача аргумент $\frac{h}{2}$ орқали ёзайлик. Бунинг учун ўртача аргумент бўйича барча тартибдаги ҳосилаларни топамиз.

биринчи ҳосила:

$$f(x+\frac{h}{2}) = f'(x) + \frac{h}{2} f''(x) + \frac{h^2}{8} f^{III}(x) + \frac{h^3}{48} f^{IV}(x) + ...;$$

бундан қуйидагини топамиз:

$$f'(x) = f(x+\frac{h}{2}) - \frac{h}{2} f''(x) - \frac{h^2}{8} f^{III}(x) - \frac{h^3}{48} f^{IV}(x) - ...... \qquad \textbf{(12.2)}$$

(12.2)ни **(12.1)**га қўйсак,

$$f(x+h) = f(x) + hf'\left(x+\frac{h}{2}\right) - \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{8} f^{III}(x) - \frac{h^4}{48} f^{IV}(x) - ....$$

$$+\frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f^{III}(x) + \frac{h^4}{4!} f^{IV}(x) + ... \;;$$

ёки

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\frac{h}{2})+\frac{h^3}{24}f^{III}(x)+\frac{h^4}{48}f^{IV}(x)+.... \qquad \textbf{(12.3)}$$

ни ҳосил қиламиз.

Ўртача аргумент бўйича учинчи ҳосилани оламиз.

$$f^{III}\left(x+\frac{h}{2}\right)=f^{III}(x)+\frac{h}{2}f^{IV}(x)+.......\ ; \qquad \text{бундан:}$$

$$f^{III}(x)=f^{III}\left(x+\frac{h}{2}\right)-\frac{h}{2}f^{IV}(x)-..... \qquad \textbf{(12.4)}$$

(12.3) ва **(12.4)** дан фойдаланиб ёзамиз:

$$f(x+h)=f(x)+hf'\left(x+\frac{h}{2}\right)+\frac{h^3}{24}\left[f^{III}\left(x+\frac{h}{2}\right)-\frac{h}{2}f^{IV}(x)-.....\right]+\frac{h^4}{48}f^{IV}(x)+..... \text{ ёки}$$

$$f(x+4)=f(x)+hf'\left(x+\frac{h}{2}\right)+\frac{h^3}{24}f^{III}\left(x+\frac{h}{2}\right)-\frac{h^4}{48}f(x)-....+\frac{h^4}{48}f^{IV}(x)+.....\ ,$$

бундан:

$$f(x+h)=f(x)+hf'\left(x+\frac{h}{2}\right)+\frac{h^3}{24}f^{III}\left(x+\frac{h}{2}\right) \qquad \textbf{(12.5)}$$

(12.5)дан кўрамизки ўртача аргумент бўйича функция қаторга ёйилса жуфт даражали ҳадлар қисқариб кетар экан.

12.1-шаклда Q_1Q_2 геодезик чизиқ ўртасидан Q_0 нуқта оламиз. Агарда геодезик чизиқ узунлиги S га тенг бўлса,

$$Q_1Q_0=Q_0Q_2=\frac{S}{2};$$

(12.5)дан фойдаланиб, координатани узатиш учун формула ёзамиз.

Изох: B_2, L_2, A_2 лар (12.5)даги $f(x+h)$; B_1, L_1, A_1 лар (12.5)даги $f(x)$ десак,

$$\left.\begin{aligned}
B_2-B_1 &=\left(\frac{dB}{dS}\right)_0 S+\left(\frac{d^3B}{dS^3}\right)_0\frac{S^3}{24}+.....\\
L_2-L_1 &=\left(\frac{dL}{dS}\right)_0 S+\left(\frac{d^3L}{dS^3}\right)_0\frac{S^3}{24}+.....\\
A_2-A_1\pm180^0 &=\left(\frac{dA}{dS}\right)_0 S+\left(\frac{d^3A}{dS^3}\right)_0\frac{S^3}{24}+.....
\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(12.6)}$$

(12.6) га **(10.1)** дан фойдаланиб, учинчи тартибли ҳосилаларни топиб қўйсак ишчи формулалар келиб чиқади. Формула индексидаги *0* ҳосила ўртача аргументлар L_0, B_0, A_0 бўйича олиниши кераклигини кўрсатади. Лекин L_m, B_m, A_m ўртача аргументлар геодезик чизиқнинг L_m , B_m , A_m нуқталарига тўғри келади (12.1-шакл). Q_0нуқтага тўғри келмайди, шу сабабли **(12.26)** формулага $(B_m\text{-}B_0)$, $(L_m\text{-}L_0)$, $(A_m\text{-}A_0)$ фарқлар учун тузатмалар киритилиши керак. Бунинг учун $\left(\frac{dB}{dS}\right)_0$ хусусий ҳосиладан $\left(\frac{dB}{dS}\right)_m$ кўринишдаги хусусий ҳосилага ўтиш керак,

$$\left(\frac{dB}{dS}\right)_0 = \left(\frac{dB}{dS}\right)_m - \frac{S^2}{8}\left(\frac{d^2B}{dS^2}\right)_m \frac{\partial\left(\frac{dB}{dS}\right)_m}{dB} - \frac{S^2}{8}\left(\frac{d^2A}{dS^2}\right)_m \frac{\partial\left(\frac{dB}{dS}\right)_m}{dA} \qquad \textbf{(12.7)}$$

Худди шундай узоқлик ва азимут учун хусусий ҳосилалар орасидаги боғланиш тенгламаларини ёзиш мумкин. Мураккаб бўлмаган ўзгаришлар киритиб қўйидаги ишчи формулаларини оламиз:

Формулалар тўплами

$$\lg b'' = \lg\left[(1)_m S \cos A_m\right] + \Delta \lg b$$

$$\lg l'' = \lg\left[(2)_m S \sin A_m \sec B_m\right] + \Delta \lg l$$

$$\lg t'' = \lg\left[(2)_m S \sin A_m tgB_m\right] + \Delta \lg t$$

$$\Delta \lg b = \frac{1}{4}\upsilon l^2 \sin^2 B_m + \frac{1}{2}\upsilon l^2$$

$$\Delta \lg l = \frac{1}{4}\upsilon l^2 \sin^2 B_m - \frac{1}{4}\upsilon b^2$$

$$\Delta \lg t = \frac{1}{4}\upsilon l^2 \sin^2 B_m + \frac{1}{2}\upsilon l^2 \cos^2 B_m + \frac{1}{2}\upsilon b^2$$

$$B_2 = B_1 + b''\ L_2 = L_1 + l''$$

$$A_2 = A_1 \pm 180^0 + t''$$

Бу формулалардан фойдаланишда ўртача кенглик B_m ва ўртача азимут A_m қийматлари номаълум бўлганлиги сабабли масалани ечиш кетма-кет яқинлашиш усулида амалга оширилади.

Биринчи яқинлашишда ўртача кенглик ва ўртача азимутни тақрибий қийматлари топилади:

$$B'_m = \frac{B_1 + B_2'}{2}; \quad A'_m = \frac{A_1 + (A_2' \pm 180^0)}{2}$$

бунда: $B_2' = B_1 + S\cos A_1 (1)_1 = B_1 + b'$;

$$A_2' = A_1 + 180^0 + S\sin A_1 tgB_1 (2)_1 = A_1 \pm 180^0 + t'$$

Узоқликлар фарқини топиш учун қуйидаги формуладан фойдаланилади:

$$l' = S\sin A_1 \sec B_1 (2)_1$$

Иккинчи яқинлашишда, биринчи яқинлашишда аниқланилган катталиклар B'_m, A'_m, b', t ва l' лардан фойдаланиб $\Delta\lg b, \Delta\lg t, \Delta\lg l$ тузатмалар топилади. Бу тузатмалар киритилиб $B''_m, A''_m, b'', t'', l''$ катталиклар топилади.

Юқоридагидек яқинлашиш охирги икки яқинлашишда тенг натижалар олингунча давом эттирилади.

Триангуляция тўри лойихаси тузилган харита мавжуд бўлса, масалани ечиш анча осонлашади, яъни харитадан кенгликлар фарқи b_0 ва узоқликлар фарқи l_0 олинади. Биринчи яқинлашишда,

$$B'_m = B_1 + \frac{b_0}{2}; \quad A'_m = A_1 + \frac{l_0 \sin B'_m}{2}$$ лар топилади.

Бу катталиклардан фойдаланиб b', t', l'лар ҳисоблаб топилади.

Агар $S<40$ км бўлса, υx^2 кўринишдаги $\frac{1}{4}\upsilon(l\sin B_m)^2$; $\frac{1}{2}\upsilon(l\cos B_m)^2$; $\frac{1}{2}\upsilon l^2$; $\frac{1}{2}\upsilon b^2$; $\frac{1}{4}\upsilon b^2$ тузатмалар, $\lg l\sin B_m$; $\lg l\cos B_m$; $\lg l$; $\lg b$ аргументлар бўйича жадвалдан олинади.

Ўртача аргумент формулалардан фойдаланиб тескари геодезик масалани ечиш

Тескари геодезик масалани ечишда бошланғич ва охирги пунктларнинг (иккита пунктни) координаталари берилади: $Q_1(B_1L_1)$; $Q_2(B_2L_2)$. Ўз навбатида пунктлар орасидаги масофа *S* ва унинг тўғри ва тескари азимутлари A_1ва A_2 ҳисоблаб топилади.

Тескари геодезик масалани ечишда ишлатиладиган формулалар тўғри геодезик масалани ечишда ишлатиладиган формулалар асосида келтириб чиқарилади. Қуйида тескари геодезик масалани ечиш учун формулалар тўплами келтирилган:

$$B_m = \frac{1}{2}(B_1 + B_2); \; b = B_2 - B_1; \; l = L_2 - L_1;$$

$$\lg S = \lg P - \lg \sin A_m = \lg Q - \lg \cos A_m;$$

$$\lg P = \lg S \sin A_m = \lg \frac{l'' \cos A_m}{(2)_m} + \Delta \lg l'';$$

$$\lg Q = \lg S \cos A_m = \lg \frac{b''}{(1)_m} + \Delta \lg b'';$$

$$\Delta \lg l'' = +\frac{1}{4}\upsilon b''^2 - \frac{1}{4}\upsilon l''^2 \sin^2 B_m;$$

$$\Delta \lg b'' = -\frac{1}{2}\upsilon l''^2 - \frac{1}{4}\upsilon l''^2 \sin^2 B_m;$$

$$\lg tgA_m = \lg P - \lg Q;$$

$$\lg t'' = \lg l'' \sin B_m + \Delta \lg t;$$

$$\Delta \lg t = +\frac{3}{4}\upsilon b''^2 + \frac{1}{2}\upsilon l''^2 \cos^2 B;$$

$$A_1 = A_m - \frac{1}{2}t;$$

A_m ўртача азимут чораги *P* ва *Q*нинг ишораларига қараб аниқланилади. Тескари геодезик масалани ечишда кетма-кет яқинлашиш бажарилмайди, чунки B_m нинг қиймати бирданига аниқланади. Юқорида келтирилган формулалар *S<40км* бўлганда ишлатиш учун яроқли.

Ўртача аргумент формулаларидан фойдаланиб тескари геодезик масалани ечиш учун нолагорифмлик ишчи формулалар:

$$S \sin A_m = D\left[a_1 \bar{l} + a_2 \overline{\Delta} B^2 \bar{l} + a_2 \bar{l}^3\right] = D\sum\nolimits_1 \qquad \textbf{(12.8)}$$

$$S\cos A_m = D\left[a_4\bar{\Delta}B + a_5\overline{\Delta B}\bar{l}^2 + a_6\bar{\Delta}B^3\right] = D\sum\nolimits_2 \qquad \textbf{(12.9)}$$

$$\Delta A = \sin B_m\left[a_7\bar{l} + a_8\overline{\Delta B}^2\bar{l} + a_9\bar{l}^3\right] = \sin B_m\sum\nolimits_3 \qquad \textbf{(12.10)}$$

бунда:

$$\overline{\Delta B} = (B_2 - B_1)^{11}\cdot 10^{-4};\; D = \frac{m + \cos^2 B_m}{n + \cos^2 B_m}$$

$$\bar{l} = (L_2 - L_1)^{11}\cdot 10^{-4};\; \begin{matrix} m = 593.602160 \\ n = 197.867385 \end{matrix}$$

$a_1 = 103422{,}05\ \cos B_m$

$a_2 = 9.5144\ \cos B_m + 0.5525\ \cos^3 B_m - 0.0078\ \cos^5 B_m$

$a_3 = -10.1287\ \cos B_m + 10.1287\ \cos^3 B_m$

$a_4 = 103422.05 - 696.9116\ \cos^2 B_m + 4.6954\ \cos^4 B_m - 0.0310\ \cos^6 B_m$

$a_5 = -\ 30.3860 + 10.3334\ \cos^2 B_m - 0.2061\ \cos^4 B_m + 0.0014\ \cos^6 B_m$

$a_6 = -\ 0.2048 + 0.4192\ \cos^2 B_m - 0.0124\ \cos^4 B_m$

$a_7 = 10000 = 10^4$

$a_8 = 2.9381 + 0.0132\ \cos^2 B_m$

$a_9 = 1.9587\ \cos^2 B_m + 0.0132\ \cos^4 B_m$

(12.8), (12.9), (12.10)формулалардан тескари геодезик масалани ечиш формулаларини ҳосил қиламиз:

$$A_m = arctg\frac{\sum_1}{\sum_2};\quad S_1 = \frac{D\sum_1}{\sin A_m};\quad S_2 = \frac{D\sum_2}{\cos A_m}$$

$$S_{ўр} = \frac{S_1 + S_2}{2};\; A_{1.2} = A_m - \frac{1}{2}\Delta A;$$

$$A_{2.1} = A_m \pm 180^0 + \frac{1}{2}\Delta A$$

Юқоридаги формулалардан фойдаланиб, ўртача масофада ($S \le 600км$), тескари геодезик масалани ечиш натижасида нуқталар орасидаги масофа $\pm 5 \div 10см$, йўналиш азимути $\pm 0{,}05''$ аниқликда топилади.

$\cos B_m$ қийматини a_1 коэффициентни ҳисоблашди етти хона, a_4ни ҳисоблашда олти хона, қолган a коэффициентларни ҳисоблашда тўрт хона аниқликда олиш керак.

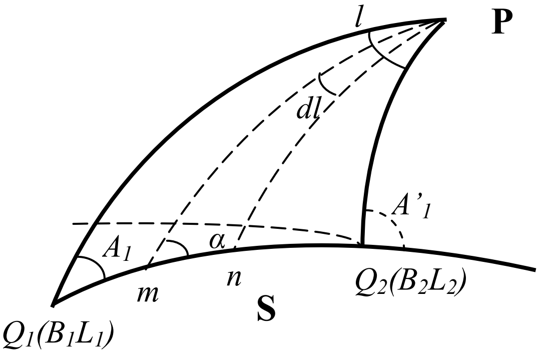
§ 13. КАТТА МАСОФАЛАРДА БОШ ГЕОДЕЗИК МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШ (БЕССЕЛЬ УСУЛИ)

Бу усул билан геодезик масалани ечишда, қидирилаётган катталиклар тўғридан-тўғри бевосита ҳисоблаб топилади. Бессель усулида масалани ечиш қуйидаги тартибда бажарилади:

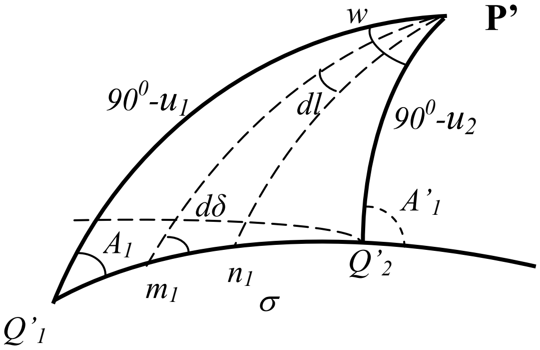
1. Сфероидик учбурчакни берилган уч элементи ва геодезик чизиқни асосий тенгламаси $\cos u_1 \sin A_1 = \cos u_2 \sin A_2 = \cos t$ дан фойдаланиб Q_1PQ_2учбурчак (13.1-шакл) шарга кўчирилади;

2. Шар сатҳида ҳосил килинган $Q_1'P'Q_2'$сферик учбурчак маълум бўлган элементлари орқали ечилади;

3. Ҳисоблаб топилган сферик учбурчак элементларидан уларга мос бўлган сфероидик учбурчак элементларига ўтилади;



13.1-шакл



13.2-шакл

Сферик учбурчак $Q_1'P'Q_2'$ ва сфероидик учбурчак Q_1PQ_2 орасида қуйидаги муносабатлар мавжуд:

а) $Q_1'P'$ ва $Q_2'P'$ томонлар шарда, Q_1 ва Q_2 нуқталарнинг келтирилган кенгликларини 90^0 га тўлдирилганига тенг, яъни

$$Q_1'P'=90^0-u_1$$

$$Q_2'P'=90^0-u_2$$

б) Сферадаги катта айлана ёйи σ, эллипсоид сатҳидаги Q_1 ва Q_2 нуқталар орасидаги S геодезик чизиққа мос келади.

в) Сфероидик учбурчак Q_1PQ_2 ни Q_1 ва Q_2 нуқталаридаги бурчаклар, сферик учбурчак $Q_1'P'Q_2'$ нинг Q_1'ва Q_2' нуқталаридаги бурчакларига тенг.

Бессель формулаларини келтириб чиқариш учун эллипсоид сатҳидаги S геодезик чизиқ билан шардаги катта айлана ёйи σ орасидаги боғланишни ифодалаш зарур. Бундан ташқари эллипсоиддаги нуқталар узоқликлари орасидаги фарқ l билан шардаги мос нуқталарни орасидаги узоқликлар фарқи ω орасидаги боғланишни ўрнатиш зарур.

Формулаларни келтириб чиқариш қуйидаги тартибда амалга оширилади:

1. S ва σ; l ва ω ораларидаги боғланишни ифодаловчи дифференциал тенгламаларни келтириб чиқарилади;

2. Келтириб чиқарилган дифференциал тенгламаларни интегралланади;

3. Учбурчак шарда ечилади ва натижада қидирилаётган катталиклар аниқланади.

Дифференциал тенгламаларни келтириб чиқариш

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

ds-эллипсоид сатҳидаги геодезик чизиқнинг Sни чексиз кичик элементи.

α -ds чизиқ азимути

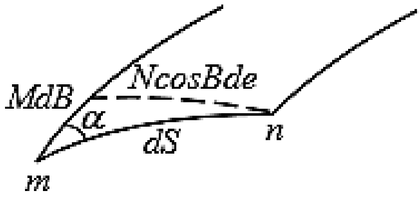
B ва u-m нуқтанинг геодезик ва келтирилган кенгликлари.

du ва dl-m ва n нуқталарнинг кенглик ва узоқликлари фарқи.

$d\sigma$ -эллипсоиддаги ds га мос келувчи шар катта айлана ёйининг чексиз кичик элементи.

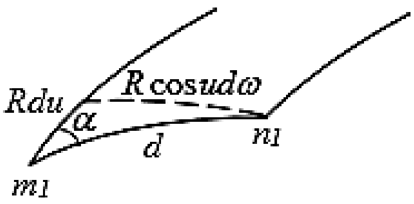
$d\omega$ -шардаги m_1 ва n_1 нуқталарнинг узоқликлари фарқи.

A) S ва σ орасидаги боғланиш



эллипсоидда

13.3-шакл



шарда

13.4-шакл

13.3, 13.4 шакллардан:

шарда $Rdu = d\sigma\cos\alpha$;

эллипсоидда $MdB = ds\cos\alpha$;

булардан $\dfrac{Rdu}{MdB} = \dfrac{d\sigma\cos\alpha}{ds\cos\alpha}$;

Шар радиусини бирга тенг деб олсак

$$\frac{du}{dB} = M\frac{d\sigma}{ds}; \qquad \textbf{(13.1)}$$

Бизга маълумки $y = b\sin u$; $b = a\sqrt{1-e^2}$; $y = \dfrac{a(1-e^2)\cdot\sin B}{\sqrt{1-e^2\cdot\sin^2 B}}$;

булардан

$$\sin u = \frac{\sqrt{1-e^2}\cdot\sin B}{\sqrt{1-e^2\cdot\sin^2 B}} \qquad \textbf{(13.2)}$$

$tgu = \sqrt{1-e^2}\cdot tgB$, $tg^2u = \left(1-e^2\right)\cdot tg^2B$, $tg^2B = \dfrac{tg^2u}{\left(1-e^2\right)}$;

$1 + tg^2B = \sec^2 B$ эканлигини инобатга олиб,

$$1 - \sec^2 B = -\frac{tg^2u}{1-e^2};$$

деб ёзишимиз мумкин, бундан

$$\frac{1}{\cos^2 B}=1+\frac{tg^2 u}{1-e^2}\ , \quad \cos^2 B=\frac{1-e^2}{1-e^2+tg^2 u}=\frac{\left(1-e^2\right)\cdot\cos^2 u}{\cos^2 u-e^2\cdot\cos^2 u+\sin^2 u}; \quad \textbf{(13.3)}$$

(13.2)ни дифференциаллаб, топамиз

$$\cos u du=\frac{\sqrt{1-e^2}\cdot\cos B\cdot\sqrt{1-e^2\cdot\sin^2 B}-\sqrt{1-e^2}\cdot\sin B}{1-e^2\cdot\sin^2 B}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left[\frac{1}{2}\cdot(1-e^2\cdot\sin^2 B)^{-\frac{1}{2}}(-2e^2\cdot\sin B\cdot\cos B)\right]}{}dB$$

ёки
$$\cos u du=\sqrt{1-e^2}\left[\frac{\cos B}{\sqrt{1-e^2\cdot\sin^2 B}}+\frac{e^2\cdot\sin^2 B\cdot\cos B}{\left(1-e^2\cdot\sin^2 B\right)^{\frac{3}{2}}}\right]dB;$$

бундан
$$\frac{du}{dB}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{\cos u}\left[\frac{\cos B\cdot\left(1-e^2\cdot\sin^2 B\right)+e^2\cdot\sin^2 B\cdot\cos B}{\left(1-e^2\cdot\sin^2 B\right)^{\frac{3}{2}}}\right];$$

ёки
$$\frac{du}{dB}=\frac{1-e^2}{\cos u}\cdot\frac{\cos B}{(1-e^2\cdot\sin^2 B)^{\frac{3}{2}}} \quad \textbf{(13.4)}$$

(13.3)ни **(13.4)**га қўйиб, тенгликнинг ўнг томонини сурат ва махражини *a* га кўпайтириб, қуйидагини топамиз

$$\frac{du}{dB}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{\cos u}\cdot\frac{1}{\left(1-e^2\cdot\sin^2 B\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{a\sqrt{1-e^2}\cdot\cos u}{a\sqrt{1-e^2\cdot\cos^2 u}},$$

$$\frac{du}{dB}=\frac{a\cdot\left(1-e^2\right)}{a\cdot\left(1-e^2\cdot\sin^2 B\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-e^2\cdot\cos^2 u}},$$

ёки
$$\frac{du}{dB}=\frac{M}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-e^2\cdot\cos^2 u}}, \quad \textbf{(13.5)}$$

(13.1) ва **(13.5)** формулалар асосида:

$$\frac{M}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-e^2\cdot\cos^2 u}}=M\frac{d\sigma}{ds};$$

деб ёзишимиз мумкин, бундан:

$$ds=a\sqrt{1-e^2\cdot\cos^2 u}d\sigma \qquad \textbf{(13.6)}$$

б) *l* ва *w* орасидаги боғланиш

13.3 ва 13.4-шакллардан:

$R\cos udw=d\sigma\sin\alpha$ шарда,

$N\cos Bdl=ds\sin\alpha$ эллипсоидда

булардан:

$$\frac{N\cdot\cos Bdl}{R\cdot\cos udw}=\frac{ds\sin\alpha}{d\sigma\sin\alpha};$$

R=1 деб қабул қилсак,

$$N\cos Bdl=\frac{\cos u\ dw\ ds}{d\sigma}; \qquad \textbf{(13.7)}$$

(13.6) ва **(13.7)** формулалар асосида,

$$N\cos Bdl=a\cos u\sqrt{1-e^2\cdot\cos^2 u}\ dw;$$

$x=a\cos u$; $r=N\cos B$; $x=r$ эканлигини инобатга олсак,

$$dl=a\sqrt{1-e^2\cdot\cos^2 u}\ dw \qquad \textbf{(13.8)}$$

келиб чиқади.

Дифференциал тенгламаларни интеграллаш

А) *s* ва *σ* орсасидаги боғланиш

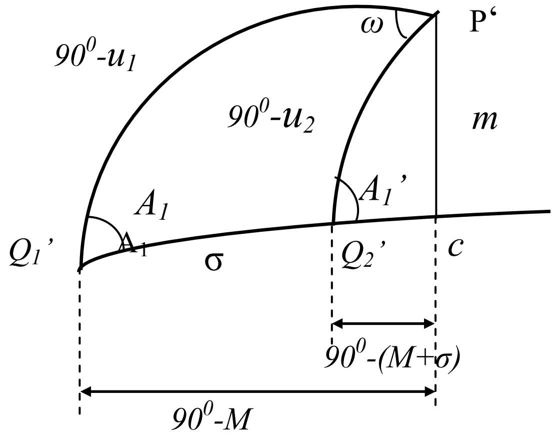
$Q_1'P'Q_2'$ сферик учбурчакнинг (13.5-шакл) *P'* учидан, унинг *$Q_1'Q_2'$*томонини давомига перпендикуляр туширамиз *(P'C)*.

$Q_1'P'c$ тўғри бурчакли сферик учбурчакнинг *P'c* томонини *m*; *$Q_1'c$* ни *90^0-M* орқали белгилаймиз. *Q_2'* нуқта кенлигини *u*га тенг деб оламиз, унда *$Q_2'P'c$* тўғри бурчакли сферик учбурчакдан (Пифагор сферик формуласи)

$$\cos\left(90^0-u\right)=\cos m\cdot\cos\left[90^0-\left(M+\sigma\right)\right];$$

деб ёзишимиз мумкин, ёки

$$\sin u = \cos m \cdot \sin(M+\sigma); \qquad \textbf{(13.9)}$$



13.5-шакл

(13.9)ни квадратга кўтариб, $\sin^2 u = 1-\cos^2 u$ эканлигини ҳисобга олиб,

$$\cos^2 u = 1-\cos^2 m \cdot \sin^2(M+\sigma); \qquad \textbf{(13.10)}$$

(13.10)ни **(13.6)**га қўйсак

$$ds = a\sqrt{1-e^2+e^2\cos^2 m \sin^2(M+\sigma)}d\sigma; \qquad \text{ёки}$$

$$ds = a\sqrt{1-e^2}\sqrt{1+\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2 m \sin^2(M+\sigma)}d\sigma$$ ни оламиз.

$b = a\sqrt{1-e^2}$; $e'^2 = \dfrac{e^2}{1-e^2}$ эканлигини инобатга олиб,

$$ds = b\sqrt{1+e'^2\cos^2 m \sin^2(M+\sigma)}d\sigma;$$

$e'^2\cos^2 m$ ни k^2 деб белгилаб, топамиз

$$ds = b\sqrt{1+k^2\sin^2(M+\sigma)}d\sigma; \qquad \textbf{(13.11)}$$

Илдиз остидаги ифодани бином қаторига ёямиз:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\ldots;$$

$$\left[1+k^2\sin^2(M+\sigma)\right]^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}k^2\sin^2(M+\sigma)-\frac{1}{8}k^4\sin^4(M+\sigma)+$$

$$+\frac{1}{16}k^6\sin^6(M+\sigma)-\ldots \qquad \textbf{(13.12)}$$

Олтинчи даражали ҳадни ташлаб юбориб, даражали функцияларни каррали ёй функциялари билан алмаштирамиз:

$$\sin^2(M+\sigma)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2(M+\sigma);$$

$$\sin^4(M+\sigma)=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2(M+\sigma)+\frac{1}{8}\cos 4(M+\sigma);$$

Унда (13.12) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$\sqrt{1+k^2\sin^2(M+\sigma)}=1+\frac{1}{2}k^2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2(M+\sigma)\right]-$$

$$-\frac{1}{8}k^4\left[\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2(M+\sigma)+\frac{1}{8}\cos 4(M+\sigma)\right]=1+\frac{1}{4}k^2-\frac{1}{4}k^4\cos 2(M+\sigma)-$$

$$-\frac{3}{64}k^4\cos 2(M+\sigma)-\frac{1}{64}k^4\cos 4(M+\sigma)=$$

$$=(1+\frac{1}{4}k^2-\frac{3}{64}k^4)-\cos 2(M+\sigma)\left[\frac{1}{4}k^2-\frac{1}{16}k^4\right]-\frac{1}{64}k^4\cos 4(M+\sigma); \quad (13.13)$$

Белгилаш киритамиз:

$$\left.\begin{aligned}&1+\frac{1}{4}k^2-\frac{1}{64}k^4=A\\&\frac{1}{4}k^2-\frac{1}{64}k^4=B\end{aligned}\right\} \qquad (13.14)$$

$$\frac{1}{64}k^4=2C$$

(13.11), (13.13) ва **(13.14)** формулалар асосида қуйидагини ёзамиз:

$$S=b\int_0^\sigma[A-B\cos 2(M+\sigma)-2c\cos 4(M+\sigma)]d\sigma; \qquad \mathbf{(13.15)}$$

(13.15)ни ҳадма-ҳад интеграллаймиз:

$$\text{II}=B\int_0^\sigma\cos 2(M+\sigma)d\sigma=B\Big|_0^\sigma\frac{1}{2}\sin 2(M+\sigma)=\frac{1}{2}B[\sin 2(M+\sigma)-\sin 2M]=$$

$$=\frac{1}{2}B\left[2\cos\frac{2(M+\sigma)+2M}{2}\cdot\sin\frac{2(M+\sigma)-2M}{2}\right]=B\sin\sigma\cos(2M+\sigma);$$

$$\text{III}=2c\int_0^\sigma\cos 4(M+\sigma)d\sigma=2c\Big|_0^\sigma\frac{1}{4}\sin 4(M+\sigma)=\frac{1}{2}c[\sin 4(M+\sigma)-\sin 4M]=$$

$$=\frac{1}{2}c\left[2\cos\frac{4(M+\sigma)+4M}{2}\cdot\sin\frac{4(M+\sigma)-4M}{2}\right]=c\sin2\sigma\cos(4M+2\sigma),$$

интеграллаш амалга оширилгандан сўнг **(13.15)** қуйидаги кўринишни олади:

$$S=Ab\sigma-Bb\sin\sigma\cos(2M+\sigma)-cb\sin2\sigma\cos(4M+2\sigma); \qquad \textbf{(13.16)}$$

Тескари боғланиш қуйидагича бўлади:

$$\sigma''=\frac{\rho''}{Ab}S+\frac{\rho''}{A}B\sin\sigma\cos(2M+\sigma)-Cb\sin2\sigma\cos(4M+2\sigma); \qquad \textbf{(13.17)}$$

$\frac{\rho''}{Ab}=\alpha$; $\frac{\rho''}{A}B=\beta$; $\frac{\rho''}{A}c=\gamma$; деб белгилаб,

(13.17) ни қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\sigma''=\alpha\cdot s+\beta\cdot\sin\sigma\cdot\cos(2M+\sigma)+\gamma\cdot\sin2\sigma\cdot\cos(4M+2\sigma) \qquad \textbf{(13.18)}$$

Тўғри боғланиш қуйидагича бўлади:

$$S=\frac{1}{2}\cdot[\sigma''-\beta\cdot\sin\sigma\cdot\cos(2M+\sigma)-\gamma\cdot\sin2\sigma\cdot\cos(4M+2\sigma)] \qquad \textbf{(13.19)}$$

б) *l* ва *w* орасидаги боғланиш

13.4-шаклдан

$$R\cos udw=d\sigma\sin\alpha; \qquad \textbf{(13.20)}$$

Q₂'P'c тўғри бурчакли сферик учбурчакдан:

$$\sin\alpha=\frac{\sin m}{\sin(90^0-u)}=\frac{\sin m}{\cos u}; \qquad \textbf{(13.21)}$$

(13.20) ва **(13.21)** формулалар асосида топамиз:

$$dw=\frac{\sin m}{\cos^2 u}\cdot d\sigma; \qquad \textbf{(13.22)}$$

(шартга кўра *R=1*):

$dl=a\sqrt{1-e^2\cdot\cos^2 u}dw$ формулани бином қаторгига ёямиз ва тўринчи даражали ҳадни сақлаб қолиб, қуйидагини оламиз:

$$dl=\left(1-\frac{1}{2}e^2\cos^2u-\frac{1}{8}e^4\cos^4u-...\right)dw;$$

Уни интеграллаймиз:

$$l = w - \frac{1}{2} e^2 \int_0^w \left(\cos^2 u + \frac{1}{4} e^2 \cos^4 u \right) dw;$$

(13.22) ни инобатга олиб, топамиз:

$$l = w - \frac{1}{2} e^2 \int_0^\sigma \left(\cos^2 u + \frac{1}{4} e^2 \cos^4 u \right) \frac{\sin m}{\cos^2 u} d\sigma;$$

sin m – доимий катталик бўлганлиги учун,

$$l = w - \frac{1}{2} e^2 \sin m \int_0^\sigma \left(1 + \frac{1}{4} e^2 \cos^4 u \right) d\sigma; \qquad \textbf{(13.23)}$$

деб ёзишимиз мумкин. Агар (13.10)ни (13.23)га қўйсак, қуйидагини оламиз:

$$l = w - \frac{1}{2} e^2 \cdot \sin m \int_0^\sigma \left[1 + \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} e^2 \cdot \cos^2 m \cdot \sin^2 (M + \sigma) \right] d\sigma;$$

$\sin^2 (M + \sigma) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2(M + \sigma)$ эканлигини ҳисобга олиб,

$$l = w - \frac{1}{2} e^2 \cdot \sin m \int_0^\sigma \left\{ 1 + \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} e^2 \cdot \cos^2 m \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(M + \sigma) \right] \right\} d\sigma =$$

$$= w - \frac{1}{2} e^2 \cdot \sin m \int_0^\sigma \left[1 + \frac{1}{4} e^2 \cdot \cos^2 m + \frac{1}{8} e^2 \cdot \cos^2 m \cdot \cos 2(M + \sigma) \right] d\sigma;$$

Бу формулани интеграллаймиз:

$$\begin{aligned} l = w - \frac{1}{2} e^2 \cdot \sin m \left(1 + \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{8} e^2 \cdot \cos^2 m \right) \sigma - \\ - \frac{1}{16} e^4 \cdot \sin m \cdot \cos^2 m \cdot \Big|_0^\sigma \frac{1}{2} \sin 2(M + \sigma) \end{aligned} \qquad \textbf{(13.24)}$$

Бу тенгликни охирги ҳадини алоҳида ечамиз:

$$\Big|_0^\sigma \frac{1}{2} \sin 2(M + \sigma) = \frac{1}{2} [\sin 2(M + \sigma) - \sin 2M] = \cos(2M + \sigma) \sin \sigma; \qquad \textbf{(13.25)}$$

(13.25)ни ҳисобга олсак **(13.24)** қуйидаги кўринишни олади:

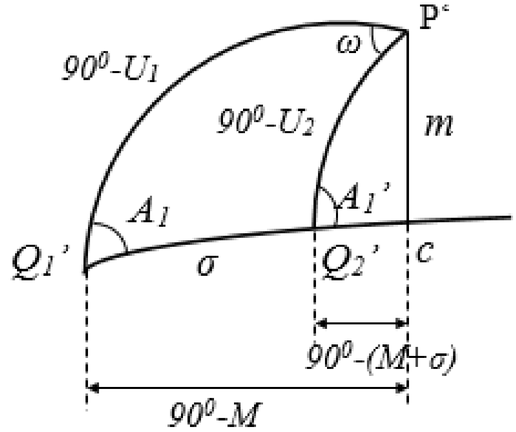
$$l = w - \frac{1}{2}e^2 \cdot \sin m\left(1 + \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{8}e^2 \cdot \cos^2 m\right)\sigma -$$
$$- \frac{1}{16}e^4 \cdot \sin m \cdot \cos^2 m \cdot \sin\sigma \cdot \cos(2M + \sigma); \qquad \textbf{(13.26)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^4 \cdot \cos^2 m = \alpha_1 \\ &\frac{1}{16}e^4 \cdot \cos^2 m \cdot p'' = \beta_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{деб белгилаймиз}$$

l ни ёй секундларида ифодалаб, топамиз:

$$l'' = w'' - \sin m \cdot \left[\alpha_1 \cdot \sigma'' + \beta_1 \cdot \sin\sigma \cdot \cos(2M + \sigma)\right] \qquad \textbf{(13.27)}$$

Катта масофада тўғри геодезик масаланиечиш



13.6-шакл

Берилган:

Q_i нуқтанинг координаталари B_1, L_1.

Q_1 ва Q_2 нуқталар орасидаги масофа (геодезик чизиқ)-*S*

Q_1Q_2 чизиқни тўғри азимути-A_1

Топиш керак:Q_2 нуқтанинг координаталари – B_2, L_2; Q_1Q_2 чизиқ тескари азимути –A_2 ни

1) Берилган геодезик кенгликдан фойдаланиб, бошланғич пунктда келтирилган кенглигини ҳисобланади

$$tgu_1 = \sqrt{1-e^2}tgB_1;$$

2) ***m*** **ва** ***M*** **катталикларни ҳисоблаймиз.** ***Q₁'P'c*** **тўғри бурчакли сферик учбурчакдан:**

$$\cos A_1 = \frac{tg\left(90^0 - M\right)}{tg\left(90^0 - u_1\right)}; \quad \text{ёки} \quad \cos A_1 = \frac{tgu_1}{tgM}; \text{ булардан } tgM = \frac{tgu_1}{\cos A_1};$$

Бизга маълумки,

$$\sin m = \sin A_1 \cdot \cos u_1;$$

3)*$\alpha; \beta; \gamma; \alpha_1; \beta_1$* коэффициентларни ҳисоблаймиз:

Олдин $k^2 = e'^2 \cdot \cos^2 m$ ҳисоблаб топилади, сўнгра *A, B, C* коэффициентлар ҳисобланади, ундан сўнг $\alpha; \beta; \gamma; \alpha_1; \beta_1$ коэфффициентлар ҳисобланади.

4) ***S*** **дан фойдаланиб,** ***σ*** **кетма-кет яқинлашиш орқали ҳисобланади:**

1. $\sigma_1 \approx \alpha S;$
2. $\sigma_2 \approx \sigma_1 + \beta \cdot \sin\sigma_1 \cdot \cos(2M + \sigma_1);$
3. $\sigma_3 \approx \sigma_1 + \beta \cdot \sin\sigma_2 \cdot \cos(2M + \sigma_2) + \gamma \cdot \sin 2\sigma_2 \cdot \cos(4M + 2\sigma_2);$
4. $\sigma_4 \approx \sigma_1 + \beta \cdot \sin\sigma_3 \cdot \cos(2M + \sigma_3) + \gamma \cdot \sin 2\sigma_3 \cdot \cos(4M + 2\sigma_3);$

ва х.к.

5) ***u₂; A₁'; w*** **катталикларни топамиз:**

Q₂'P'c сферик тўғри бурчакли учбурчакдан

$$\sin m = \sin\left(90^0 - u_2\right) \cdot \sin A_1' \rightarrow \sin A_1' = \frac{\sin m}{\sin\left(90^0 - u_2\right)};$$

$$\cos\left(90^0 - u_2\right) = \cos m \cdot \cos\left[90^0 - (M + \sigma)\right];$$

ёки $\sin A_1' = \frac{\sin m}{\cos u_2}; \qquad \sin u_2 = \cos m \cdot \sin(M + \sigma);$

(Изоҳ: олдин $sinu_2$, сўнгра $sinA_1'$ ҳисобланади).

Текшириш: $\cos u_2 \cdot \cos A_1' = \cos m \cdot \cos(M + \sigma);$

*Q₁'P'Q₂'*учбурчагидан узоқликлар фарқини топиш учун синуслар теоремасидан фойдаланамиз:

$$\frac{\sin w}{\sin \sigma}=\frac{\sin A_1}{\sin\left(90^0-u_2\right)};$$

$$\frac{\sin w}{\sin \sigma}=\frac{\sin\left(180^0-A_1'\right)}{\sin\left(90^0-u_1\right)};$$

булардан:

$$\sin w=\sin\sigma\frac{\sin A_1}{\cos u_2};$$

$$\sin w=\sin\sigma\frac{\sin A_1}{\sin u_1};$$

6) Сферик узоқликлар фарқи *w* орқали сфероидик узоқликлар фарқи *l* ҳисобланади:

$$l''=w''-\sin m\cdot\left[\alpha_1\cdot\sigma''+\beta_1\cdot\sin\sigma\cdot\cos(2M+\sigma)\right];$$

7) Келтирилган кенглик u_2 дан геодезик кенглик B_2га ўтилади:

$$tgB_2=\frac{tgu_2}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Катта масофаларда тескари геодезик масалани ечиш

Берилган:Q_1ва Q_2 нуқталарнинг координаталари – $Q_1(B_1, L_1)$ ва $Q_2(B_2, L_2)$.

Топиш керак:Q_1ва Q_2 нуқталар орасидаги масофа – S ва шу нуқталар орасидаги чизиқнинг тўғри A_1 ва тескари A_2азимутларини.

1) Геодезик кенгликлар B_1 ва B_2 орқали келтирилган кенгликлар u_1ва u_2лар ҳисобланади.

2) Геодезик узоқликлар фарқи l орқали сферик узоқликлар фарқи w ҳисобланади.

$Q_1'P'Q_2'$ сферик учбурчакдан Непер формуласи ёрдамида топамиз:

$$tg\frac{A_1'+A_1}{2}=\frac{\cos\frac{u_2+u_1}{2}}{\sin\frac{u_2-u_1}{2}}\cdot tg\frac{w}{2};$$

$$tg\frac{A_1'-A_1}{2}=\frac{\sin\frac{u_2+u_1}{2}}{\cos\frac{u_2-u_1}{2}}\cdot tg\frac{w}{2};$$

Бу формулалардан фойдаланиб A_1 ва A_1'ни топиш учун *w* қиймати ноъмалум. *w* эса *M, m* ва σлар орқали ифодаланади, уларнинг катталиклари ҳам ноъмалум. Шу сабабли (A_1, A_1', *M, m*, σ, *w*) катталикларни топишда кетма-кет яқинлашиш усулидан фойдаланилади.

Биринчи яқинлашишда *wқl* деб олинади ва тўғри, тескари азимутлар, *M, m*, σ катталиклари ҳисобланилади.

$$tgM=\frac{tgu_1}{\cos A_1};\qquad \sin m=\sin A_1\cdot\cos u_1;$$

$$\sin\sigma=\sin w\cdot\frac{\cos u_2}{\sin A_1}=\sin w\cdot\frac{\cos u_1}{\sin A_1'};$$

Иккинчи яқинлашишни ҳисобалаш учун *w* нинг қиймати қуйидаги формула ёрдамида ҳисоблаб топилади:

$$w''=l''+\sin m[\alpha_1\cdot\sigma''+\beta_1\cdot\sin\sigma\cdot\cos(2M+\sigma)];$$

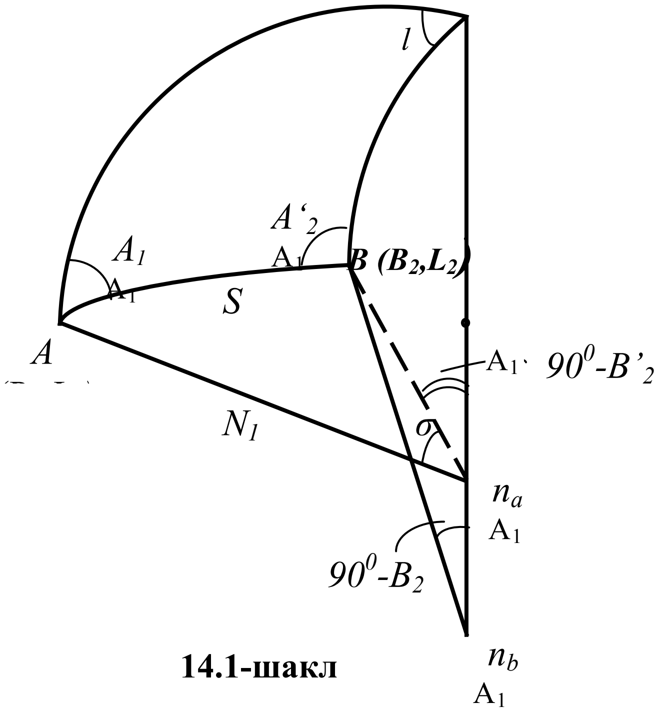
сўнгра A_1, A_1', *M, m*, σ катталиклари ҳисобланади.

Яқинлашиш охирги икки яқинлашишда топилган натижалар бир хил бўлгунга қадар давом эттирилади.

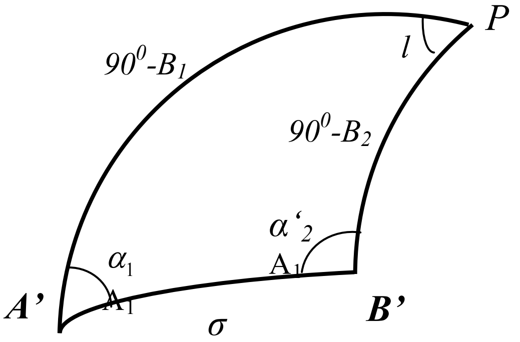
3) *M, m*, σ натижавий қийматларидан фойдаланиб геодезик чизиқ узунлиги ҳисобланади:

$$S=\frac{1}{2}[\sigma''-\beta\cdot\sin\sigma\cdot\cos(4M+2\sigma)];$$

§ 14. НОРМАЛ КЕСИМЛАРДАН ФОЙДАЛАНИБ БОШ ГЕОДЕЗИК МАСАЛАНИ ЕЧИШ



14.1-шакл



14.2-шакл

14.1-шаклда эллипсоид сатҳидаги *APB* қутуб учбурчаги ва 14.2-шаклда *APB* учбурчагига мос келадиган сфера сатҳидаги *A'P'B'* қутуб учбурчаги келтирилган. *A'P'B'* учбурчагини ясаш учун маркази n_a нуқтада, радиуси *A* нуқтадаги биринчи вертикал кесим эгрилик радиуси N_1га тенг бўлган ёрдамчи сфера ҳосил қилинади. Радиуси N_1га тенг бўлган катта айланага $A'P'=90^0$-B_1лиёй қўйилади, натижада бошланғич нуқта меридианида *P'* ва *A'* нуқталар ҳолати топилади.

Сўнгра эллипсоид сатҳидаги *A* нуқтадан *B* нуқтага ўтказилган тўғри нормал кесим азимути A_1га тенг бўлган бурчак *A'* нуқта меридианидан қўйилиб, шу бурчак йўналишида σ катта айлана ёйи ўтказилади, бунда $\sigma = \angle An_aB$ бўлиши керак.

Ечим умумий тартиби қуйидагича бўлади:

а) Сфероидик учбурчакнинг маълум элементларидан уларга мос бўлган сферик учбурчак элементларига ўтилади;

б) Сферик учбурчакни ечиш орқали унинг номаълум катталиклари сфера сатҳида аниқланилади;

в) Сфера сатҳида топилган номаълум катталиклар эллипсоид сатҳига қайта ҳисоблаб ўтказилади.

Сфероидик ва сферик учбурчаклар элементлари орасида боғланиш ўрнатамиз:

Қутб учбурчагини *A'P'*томони 90^0-B_1га тенг. Bn_b ва Bn_a чизиқлар *B* нуқтадан ўтган меридиан текислигида ётибди, шу сабабли узоқликлар фарқига тенг бўлган *l* бурчак сферага ўтказилишида ўзгармайди.

Эллипсоид сатҳида A_1 азимут билан берилган *S* геодезик чизиққа, сферада α_1 азимутида ўтказилган тўғри нормал кесим мос келади. Шу сабабли A_1 ва α_1, *S* ва σ, B_2 ва B_2', α_2' ва A_2'лар орасидаги боғланишларни ўрнатиш зарур. Исботсиз қўйидаги муносабатларни келтирамиз:

а) $$\alpha_1 = A_1 + \upsilon_1 - \upsilon_2 \qquad \textbf{(14.1)}$$

$$\upsilon_1 = \frac{\eta_1^2 S^2 \sin A_1 \cos A_1}{6N_1^2}\rho''; \qquad \upsilon_2 = \frac{\eta_1^2 S^3 \sin A_1 tgB_1}{24N_1^3}\rho''; \quad (*)$$

б) $$\sigma'' = \frac{S}{N_1}\rho''\left[1 + \frac{\eta_1^2 S^2}{6N_1^2}\cos^2 A_1 - \frac{\eta_1^4 S^2}{6N_1^2}\cos^4 A_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{\eta_1^2 S^3 tgB_1 \cos A_1}{8N_1^3}(1 - 2\eta_1^2 \cos^2 A_1)\right] \qquad \textbf{(14.2)}$$

в) $$tgB_2^1 = ktgB_2 \qquad \textbf{(14.3)}$$

бунда $k = \left(1 - e^2 + e^2 \frac{V_1}{V_2}\frac{\sin B_1}{\sin B_2}\right)$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B};$$

2. $$A_2' = \alpha_2' - \frac{\eta_1^2 S^2 \sin A_1 \cos A_1}{3N_1^2} + \frac{\eta_1^2 S^3 \sin A_1 tgB_1}{8N_1^3}$$

(*) белгилашни инобатга олиб қуйидагига ёзишимиз мумкин

$$A_2' = \alpha_2' - 2\upsilon_1 + 3\upsilon_2, \qquad \textbf{(14.4)}$$

келтирилган формулаларда $\eta^2 = e'^2 \cos^2 B$

Юқорида келтирилган формулалардан фойдаланиб сфероидик ва сферик учбурчак элементлари орасидаги боғланишлар ўрнатилади.

Тўғри геодезик масала

Бошланғич берилган катталиклар:B_1,L_1,, A_1, L_1.

Аниқланиши зарур бўлган катталиклар: B_2, L_2, A_2.

1.**(14.1)**формуладан фойдаланиб геодезик чизиқ азимути A_1дан тўғри нормал кесим азимути α_1га ўтилади.

2.**(14.2)**формуладан фойдаланиб геодезик чизиқ узунлигидан нормал кесим ёй узунлигига ўтилади.

3. Қуйидаги формулалардан α_2'; l; B_2' катталиклар аниқланилади:

$$tg\frac{\alpha_2'+l}{2}=\frac{\sin\frac{90^0-(B_1-\sigma)}{2}}{\sin\frac{90^0-(B_1+\sigma)}{2}}tg\frac{\alpha_1}{2}$$

$$tg\frac{\alpha_2'-l}{2}=\frac{\cos\frac{90^0-(B_1-\sigma)}{2}}{\cos\frac{90^0-(B_1+\sigma)}{2}}tg\frac{\alpha_1}{2}$$

$$tg\frac{90^0-B_2'}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha_2'-l}{2}}{\sin\frac{\alpha_2'+l}{2}}tg\frac{90^0-(B_1+\sigma)}{2}$$

4. **(14.3)** формуладан фойдаланиб иккинчи нуқта кенглиги B_2 аниқланади (яъни B_2'дан B_2га ўтилади).

5. Иккинчи нуқта узоқлиги ҳисобланади $L_2=L_1+l$

6. **(14.4)** формуладан фойдаланиб шардаги α_2' азимутдан эллипсоиддаги геодезик чизиқнинг тескари азимути A_2'га ўтилади.

Тескари геодезик масала

Бошланғич берилган катталиклар: B_1, L_1; B_2, L_2

Аниқланиши зарур бўлган катталиклар: S; A_1; A_2.

1.**(14.3)**формуладан фойдаланиб B_2' кенглик ҳисобланади.

2. Сферик учбурчак томонлари (90^0-B_1), (90^0-B_2) ва улар орасидаги бурчак l=L_2-L_1 орқали сферик учбурчак-қуйидаги формулалар ёрдамида ечилади:

$$tg\frac{\alpha_2'+\alpha_1}{2}=\frac{\cos\frac{(B_2'-B_1)}{2}}{\sin\frac{(B_2'+B_1)}{2}}ctg\frac{l}{2};$$

$$tg\frac{\alpha_2'-\alpha_1}{2}=\frac{\sin\frac{(B_2'-B_1)}{2}}{\cos\frac{(B_2'+B_1)}{2}}ctg\frac{l}{2};$$

$$\sin\sigma=\frac{\sin l\cos B_1}{\sin\alpha_2'}=\frac{\sin l\cos B_2'}{\sin\alpha_1}$$

Юқоридаги формулалар ёрдамида α_1; α_2'; σ катталиклари топилади.

3. (**14.1**) ва **(14.4)** формулалардан фойдаланиб геодезик чизиқнинг тўғри ва тескари азимутлари ҳисобланади.

4. $$S=\frac{\sigma''}{(2)_1}-\frac{\eta_1^2S^3\cos^2A_1}{6N_1^3}\rho''\frac{N_1}{\rho''}+\frac{\eta_1^2S^4\cos A_1tgB_1}{8N_1^4}\rho''\frac{N_1}{\rho''}$$

формуладан фойдаланиб σ дан S га ўтилади.

Агар $\frac{\eta_1^2S^3\cos^2A_1}{6N_1^3}\rho''=P_1$

$$\frac{\eta_1^2S^4\cos A_1tgB_1}{8N_1^4}\rho''=P_2$$

деб белгиласак ва $\frac{N_1}{\rho''}$ ўрта кенгликларда биринчи вертикал кесимни бир секундига тўғри келадиган ёй узунлиги тахминан *31м* га тенг келишини инобатга олсак, унда

$$S=\frac{\sigma''}{(2)_1}-31(P_1-P_2)$$

деб ёзишимиз мумкин.

Рунге усулида тўғри геодезик масала ечиш

ЭҲМ ёрдамида ҳисоблаш учун қуйидаги формулалардан фойдаланиш қулайдир.

$$\Delta B_i'' = S_0 k_i^{\beta} \cos\alpha_i$$
$$\Delta \alpha_i'' = S_0 k_i^{\alpha} \sin\alpha_i \sec\beta_i$$
$$\Delta A_i'' = S_0 k_i^{\alpha} \sin\alpha_i tg\beta_i$$

(i=1,2,3,4,5)

$$S_0 = \frac{\rho''}{3C} S = 0.010743464 S$$

$$K_i^{\beta} = (1 + 0.00842316\cos^2\beta_i)(1 - 0.00168463\cos^2\beta_i)^{-1};$$
$$K_i^{\alpha} = (1 + 0.00505389\cos^2\beta_i)(1 + 0.00168463\cos^2\beta_i)^{-1};$$

α_i ва β_i қийматлари қуйидагича ҳисобланади

i	Rcosudω	β
1	A_1	B_1
2	$A_1 + \Delta A_1$	$B_1 + \Delta B_1$
3	$A_1 + \frac{1}{2}\Delta A_1 + \frac{1}{2}\Delta A_2$	$B_1 + \frac{1}{2}\Delta B_1 + \frac{1}{2}\Delta B_2$
4	$A_1 + \frac{3}{8}\Delta A_1 + \frac{9}{8}\Delta A_3$	$B_1 + \frac{3}{8}\Delta B_1 + \frac{9}{8}\Delta B_3$
5	$A_1 + \frac{3}{8}\Delta A_1 - \frac{9}{2}\Delta A_3 + 6\Delta A_4$	$B_1 + \frac{3}{8}\Delta B_1 - \frac{9}{2}\Delta B_3 + 6\Delta B_4$

Қидирилаётган координаталар фарқи қуйидагига тенг бўлади;

$$\Delta B = \frac{1}{2}(\Delta B_1 + 4\Delta B_4 + \Delta B_5);$$
$$\Delta L = \frac{1}{2}(\Delta L_1 + 4\Delta L_4 + \Delta L_5);$$
$$\Delta A = \frac{1}{2}(\Delta A_1 + 4\Delta A_4 + \Delta A_5)$$

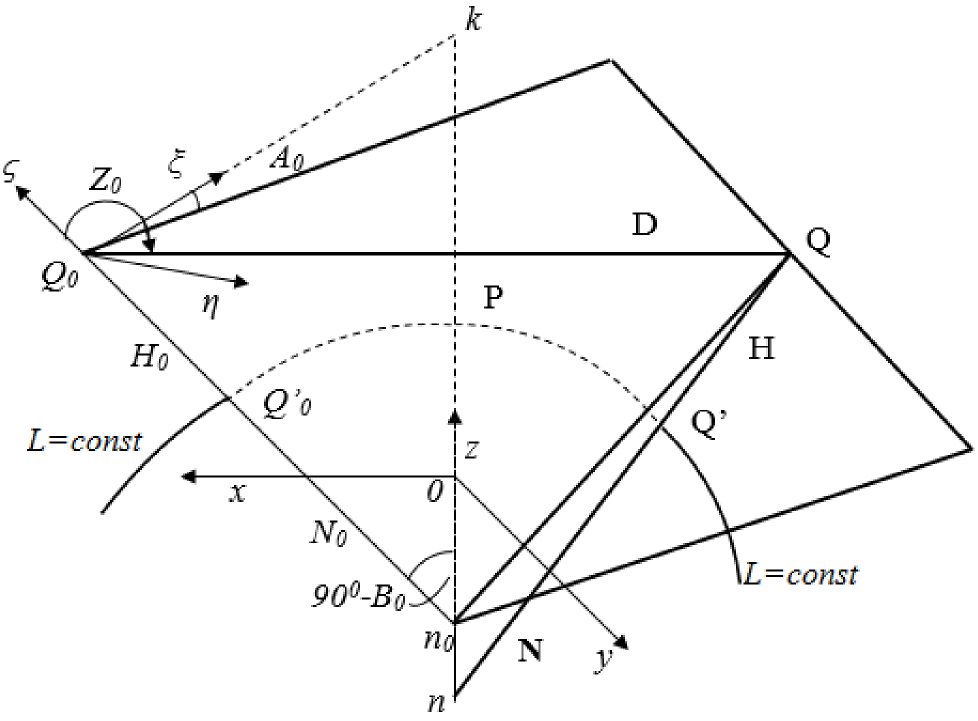
Шундан сўнг иккинчи нуқта координаталари ҳисобланади:

$$B_2 = B_1 + \Delta B$$
$$L_2 = L_1 + \Delta L$$
$$A_2 = A_1 \pm 180^0 + \Delta A$$

§ 15. БОШ ГЕОДЕЗИК МАСАЛАНИ ФАЗОДА ЕЧИШ (МОЛОДЕНСКИЙ УСУЛИ) ТОПОЦЕНТРИК КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ

Уч ўлчамли геодезияда қўлланиладиган топоцентрик координата системаси тўғрисида қисқача тушунча бериб ўтамиз.

Координата боши ер сатҳидаги қандайдир $Q_0\ (B_0\ L_0\ H_0)$ нуқтада жойлашган бўлади.



15.1-шакл

а) Тўғри бурчакли декарт координаталари: ς ўқи эллипсоид сатҳидаги Q_0 нуқтадан ўтувчи нормал давомида жойлашади. ξ ўқи Q_0 нуқтадан ўтувчи меридиан текислигида ς ўқига перпендикуляр жойлашган бўлиб, эллипсоид айланиш ўқи томонига йўналган бўлади.

y-ўқи ξ ва ς ўқларига перпендикуляр бўлиб, узоқлик ўқи томонига йўналган бўлади.

б) Қутб координаталари

Бошланғич нуқта Q_0 меридиан текислиги билан ва фазода берилган Q нуқталардан ўтувчи нормал текислик орасидаги икки қиррали бурчак **геодезик чизиқ азимути-A_0.**

ς ўқи билан Q_0 нуқтадан Q нуқтага йўналган тўғри чизиқ йўналиши орасидаги бурчак зенит масофа – Z_0.

Q_0 ва Q нуқталарини бирлаштирувчи тўғри чизиқ бўйича нуқталар орасидаги **масофа – *D***.

Юқоридаги бу икки топоцентрик координаталар орасидаги боғланиш қуйидаги формулалар билан ифодаланади:

$$\xi = D \cdot \sin Z_0 \cdot \cos A_0;$$

$$\eta = D \cdot \sin Z_0 \cdot \sin A_0;$$

$$\varsigma = D \cdot \cos Z_0;$$

$$tgA_0 = \frac{\eta}{\xi};$$

$$ctgZ_0 = \frac{\varsigma}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \frac{\varsigma}{\xi \cdot \cos A_0 + \eta \cdot \sin A_0};$$

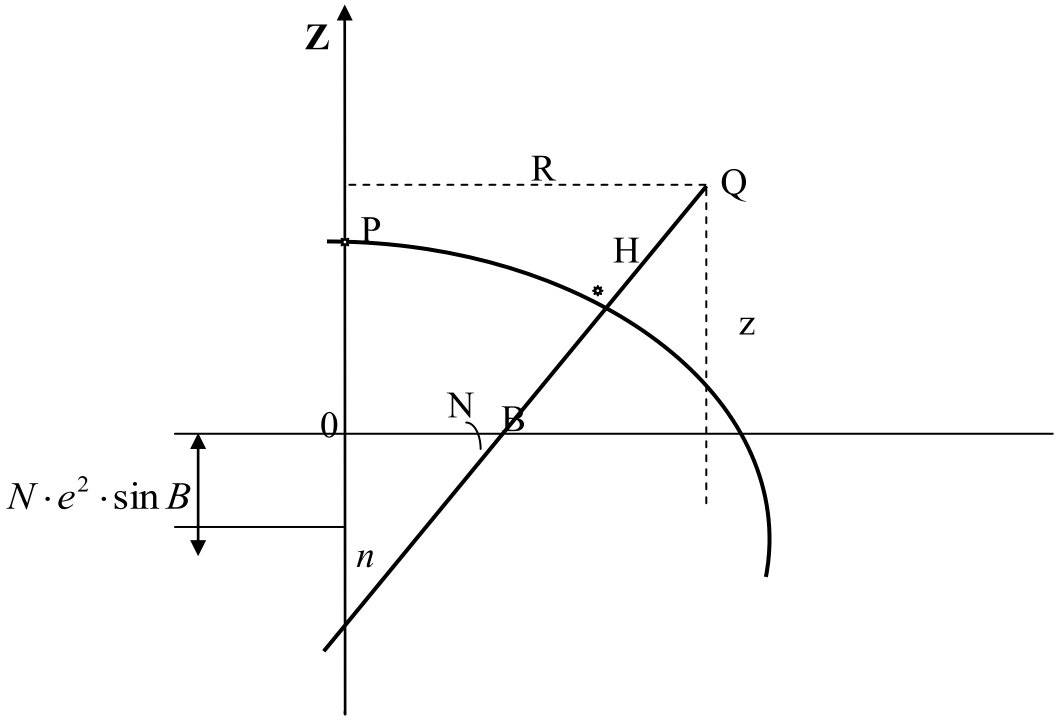
$$D = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \varsigma^2} = (\xi \cdot \cos A_0 + \eta \cdot \sin A_0)\sin Z_0 + \varsigma \cdot \cos Z_0.$$

Геодезик координата системаси

Фазода берилган нуқтадан ўтувчи нормал чизиқ йўналиши бўйича, нуқтадан эллипсоид сатҳигача бўлган энг қисқа масофа **геодезик баландлик-*H*.**

B-геодезик кенглик, *L*-геодезик узоқлик. Топоцентрик декарт координата системаси билан геодезик координата системаси орасидаги боғланиш қуйидаги формулалар билан ифодаланади:

$$\left.\begin{aligned} x &= (N + H)\cos B \cdot \cos L; \\ y &= (N + H)\cos B \cdot \sin L; \\ z &= (N + H)\sin B - e^2 \cdot N \cdot \sin B \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(15.1)}$$



15.2-шакл.

x, y, z дан *B, L, H* га ўтиш формуларини топамиз.

(15.1) формуладан узоқликни

$$tgL = \frac{y}{x}; \qquad \textbf{(15.2)}$$

15.2-шаклдан $R = \sqrt{x^2 + y^2} = (N + H)\cos B$ни топиб ва **(15.1)** формуладан $(N + H)\sin B = z + e^2 \cdot N \cdot \sin B$ эканлигини инобатга олиб, кенгликни топиш учун қуйидаги формулани ёзамиз:

$$tgB = \frac{z + e^2 \cdot N \cdot \sin B}{R}; \qquad \textbf{(15.3)}$$

Тенгликнинг ўнг томонидаги $N \cdot \sin B$ ифода қидирилаётган *B*-кенгликга боғлиқ, лекин бу ифода $e^2 \approx \frac{1}{150}$кичик сонга кўпайтирилишлигини ҳисобга олсак, *B*-кенгликни кетма-кет яқинлашиш усулида топишимиз мумкин. Ҳар бир яқинлашишда кенгликнинг арктангенсни топиб, сўнгра кейинги яқинлашишни бажариш учун $N \cdot \sin B$ қиймати ҳисобланади. Ҳисоблашни енгиллаштириш мақсадида **(15.3)** формулани ЭҲМ да ҳисоблаш учун қулай ҳолга келтирамиз:

$$tgB = \frac{z}{R} + \frac{e^2 \cdot N \cdot \sin B}{R};$$

$N = \dfrac{c}{\sqrt{1 + e'^2 \cdot \cos^2 B}}$ эканлигини инобатга олиб, қуйидагини ёзамиз

$$tgB = \frac{z}{R} + \frac{c \cdot e^2 \cdot \sin B}{R\sqrt{1 + e'^2 \cdot \cos^2 B}}$$

Тенгликнинг иккинчи ҳади сурат ва махражини *cosB* га бўламиз ва $\dfrac{1}{\cos^2 B} = 1 + tg^2 B$ эканлигини ҳисобга олиб, қўйидагини ёзамиз

$$tgB = \frac{z}{R} + \frac{c \cdot e^2 \cdot tgB}{R\sqrt{1 + e'^2 + tg^2 B}} \qquad \textbf{(15.4)}$$

Ҳисоблаш қулай бўлиши учун (15.4)ни қўйидаги кўринишга келтирамиз

$$t_{i+1} = t_0 + \frac{pt_i}{\sqrt{k + t_i^2}}; \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ ..) \qquad \textbf{(15.5)}$$

бунда,

$$t_0 = \frac{z}{R}; \qquad p = \frac{c \cdot e^2}{R}; \qquad k = 1 + e'^2;$$

(15.5) формула бўйича ҳисоблаш тугатилгандан сўнг энг охирги яқинлашиш бўйича *B*-кенглик топилади:

$$B = arctgt_{i+1}; \qquad \textbf{(15.6)}$$

яқинлашишлар сони кенгликни топиш аниқлиги ёки *tgB* аниқлигига боғлиқ.

tgB аниқлиги	Яқинлашишлар сони
10^{-6}	2
10^{-9}	3
10^{-12}	4

Энди геодезик баландликни ҳисоблаш формуласини топамиз. Бизга маълумки

$$R = (N + H)\cos B;$$

Бундан $H=\dfrac{1}{\cos B}\left(R-N\cdot\cos B\right)=\dfrac{1}{\cos B}\left(R-\dfrac{c\cdot\cos B}{\sqrt{1+e'^2\cdot\cos^2 B}}\right)$; қавс ичидаги иккинчи ҳадни сурат ва маражини *cosB* га бўлиб, $\dfrac{1}{\cos^2 B}=1+tg^2B$ эканлигини инобатга олиб ёзамиз:

$$H=\frac{1}{\cos B}\cdot\left(R-\frac{c}{\sqrt{1+e'^2+tg^2B}}\right); \qquad \mathbf{(15.7)}$$

Ҳисоблашни осонлаштириш учун (15.7)ни қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$H=\left(R-\frac{c\cdot\cos B}{\sqrt{k+t_{i+1}^2}}\right)\sqrt{1+t_{i+1}^2}\ ; \qquad \mathbf{(15.8)}$$

Формуладаги t_{i+1}(15.5) формула бўйича охирги яқинлашда топилган катталикдир.

Мисол: Кенглик *B* ва геодезик баландлик *H* ни ҳисоблаш. Бошланғич маълумот

$Z=R=5604589,00$ *м*

Ҳисоблаш:

$t_0=1;$ $P=0,007643002;$

$t_1=1,005395337;$ $(B_1=45^0 09'15'')$

$t_2=1,005409882;$ $(B_2=45^0 09'16,4'')$

$t_3=1,005409921;$ $(B_3=45^0 09'16,4317'')$

$H=1558551,63$*м.*

§15.1 Тўғри геодезик масала

Масала моҳияти шундан иборатки, бошланғич нуқта координаталари $(B_1L_1H_1)$, икки нуқта орасидаги масофа $D_{1.2}$, азимут A_{12}ва зенит масофа z_{12} лардан фойдаланиб, иккинчи нуқта координаталари (B_2, L_2, H_2)ни топиш керак.

Формулалар:

$$\left.\begin{aligned}\xi_{12} &= D_{12}\cdot\sin z_{12}\cdot\cos A_{12};\\ \eta_{12} &= D_{12}\cdot\sin z_{12}\cdot\sin A_{12};\\ \varsigma_{12} &= D_{12}\cdot\cos z_{12};\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(15.1.1)}$$

$$\left.\begin{aligned}&N_1 = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\cdot\sin^2 B_1}};\\ &x_2 = \left(N_1 + H_1 + \varsigma_{12}\right)\cos B_1 - \xi_{12}\cdot\sin B_1;\\ &y_2 = \eta_{12};\\ &z_2 = \left(N_1 + H_1 + \varsigma_{12}\right)\sin B_1 + \xi_{12}\cdot\cos B_1 - e^2\cdot N_1\cdot\sin B_1;\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(15.1.2)}$$

$$\left.\begin{aligned}&R = \sqrt{x^2 + y^2};\\ &t_0 = \frac{z_2}{R}; \qquad P = \frac{ce^2}{R}; \qquad k = 1 + e'^2;\\ &t_{i+1} = t_0 + \frac{Pt_i}{\sqrt{k + t_i^2}}; \qquad (i = 0,1,2,...).\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(15.1.3)}$$

Охирги интеграциядан сўнг қуйидагилар ҳисобланади:

$$\left.\begin{aligned}&B_2 = arctgt_{i+1};\\ &H_2 = \left(R - \frac{c}{\sqrt{k + t_{i+1}^2}}\right)\sqrt{1 + t_{i+1}^2};\\ &L_2 - L_1 = l = arctg\left(\frac{y_2}{x_2}\right);\\ &L_2 = L_1 + l;\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(15.1.4)}$$

y_2 ишораси	+	+	-	-
x_2 ишораси	+	-	-	+
l=	$\|l\|$	$180^0-\|l\|$	$\|l\|-180^0$	$-\|l\|$

|*l*| - биринчи чоракдаги аргумент

Красовский эллипсоиди учун доимий катталиклар:

$a=6378245$ *м;* $c=6399698{,}902$ *м;* $e^2=0{,}006693422;$

$ce^2=42835{,}88$ *м;* $k=1{,}006738525.$

§15.2 Тескари геодезик масала

Тескари геодезик масалада фазода берилган икки нуқтанинг координаталари *B; L; H* дан фойдаланиб, бу нуқталар орасидаги масофа D_{12}, нормал текислик азимути A_{12} ва биринчи нуқтадан иккинчи нуқтага бўлган зенит масофа Z_{12}ҳисоблаб топилади.

Формулалар:

$$\left.\begin{array}{l} N_1=\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\cdot\sin^2 B_1}}; \qquad N_2=\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\cdot\sin^2 B_2}}; \\ x_2=\left(N_2+H_2\right)\cos B_2\cdot\cos\left(L_2-L_1\right); \\ y_2=\left(N_2+H_2\right)\cos B_2\cdot\sin\left(L_2-L_1\right); \\ z_2=[N_2\left(1-e^2\right)+H_2]\sin B_2; \end{array}\right\} \qquad \textbf{(15.2.1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \xi_{12}=\left(z_2+e^2\cdot N_1\cdot\sin B_1\right)\cos B_1-x_2\cdot\sin B_1; \\ \eta_{12}=y_2; \\ \varsigma=\left(z_2+e^2\cdot N_1\cdot\sin B_1\right)\sin B_1+x_2\cdot\cos B_1-(N_1+H_1); \end{array}\right\} \qquad \textbf{(15.2.2)}$$

$$A_{12}=arctg\left(\frac{\eta_{12}}{\xi_{12}}\right); \qquad \textbf{(15.2.3)}$$

η_{12} ишораси	+	+	-	-
ξ_{12} ишораси	+	-	-	+
$A_{12}=$	$\lvert A_{12}\rvert$	$180^0-\lvert A_{12}\rvert$	$180^0+\lvert A_{12}\rvert$	$360^0-\lvert A_{12}\rvert$

A_{12}-биринчи чоракдаги аргумент.

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_{12}=\xi_{12}\cdot\cos A_{12}+\eta_{12}\cdot\sin A_{12}=\sqrt{\xi_{12}^2+\eta_{12}^2}\,;\\
&\qquad\qquad z_{12}=arctg\left(\frac{\varsigma_{12}}{\psi_{12}}\right);\\
&D_{12}=\psi_{12}\cdot\sin z_{12}+\varsigma\cdot\cos z_{12}=\sqrt{\psi_{12}^2+\varsigma_{12}^2}\,;
\end{aligned}\right\}\qquad \mathbf{(15.2.4)}$$

Шу масофа учун иккинчи нуқтадан биринчи нуқта йўналиши бўйича азимут A_{21} ва зенит масофа Z_{12} ни топиш керак бўлса юқорида келтирилган формулалардаги 1 ва 2 индексларини жойларини алмаштириш зарур.

Тескари геодезик масалани ечишнинг умумий холи учун ҳисоблаш натижаларини текшириш формулаларини топиш мумкин.

Бунинг учун **(15.1.1), (15.1.2)** ва **(15.2.1.), (15.2.2)** формулалар билан ҳисобланадиган η координаталарни тенглаштирамиз. Унда Q_2 нуқта учун

$$D_{12}\cdot\sin z_{12}\cdot\sin A_{12}=\left(N_2+H_2\right)\cdot\cos B_2\cdot\sin\left(L_2-L_1\right);$$

Q_1 нуқта учун индекслардаги 1 ва 2 ларни жойларини алмаштириб ёзамиз.

$$D_{21}\cdot\sin z_{21}\cdot\sin A_{21}=-\left(N_1+H_1\right)\cdot\cos B_1\cdot\sin\left(L_2-L_1\right);\qquad \mathbf{(15.2.5)}$$

Бу тенгликларда $D_{12}=D_{21}$ ва $sin(L_2\text{-}L_1)$ ташлаб юбориб қўйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left(N_1+H_1\right)\cos B_1\cdot\sin z_{12}\cdot\sin A_{12}+\left(N_2+H_2\right)\cos B_2\cdot\sin z_{21}\cdot\sin A_{21}=0\,;\qquad \mathbf{(15.2.6)}$$

Фазодаги D тўғри чизиқнинг ихтиёрий Q_i ва Q_kнуқталарини координаталари орасидаги боғланиш қуйидаги формула билан берилади:

$$\left(N_i+H_i\right)\cos B_i\cdot\sin z_{ik}\cdot\sin A_{ik}+\left(N_k+H_k\right)\cos B_k\cdot\sin z_{ki}\cdot\sin A_{ki}=0\,;\quad (15.2.7)$$

Бу боғланишни 1957 йил инглиз геодезисти М.Хотин келтириб чиқарган.

Агарда $H_1=H_2=0$ деб олсак юқорида келтирилган формулаларни эллипсоид сатҳида геодезик масалаларни ечишда ҳам ишлатса бўлади.

§ 16. ФАЗОДА АСОСИЙ ГЕОДЕЗИК МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШДА ҚЎЛЛАНИЛАДИГАН ФОРМУЛАЛАР ВА БОҒЛАНИШЛАР

Тўғри чизиқ кесма узунлиги ва йўналиши орасидаги боғланишни кесма учларининг геодезик координаталари орқали ифодалаш уч ўлчамли геодезиянинг амалий масаларини ечишда муҳим аҳамиятга эга. Бу боғланишлар биринчи бор М.С.Молодинский томонидан ўрнатилган. Йўналтирувчи косинуслар l_{12}; m_{12}; n_{12}ва координаталари ($x_1 y_1 z_1$), ($x_2 y_2 z_2$) бўлган кесма узунликлари орасидаги боғланиш қуйидагича берилади:

$$S_{12} = \frac{x_2 - x_1}{l_{12}} = \frac{y_2 - y_1}{m_{12}} = \frac{z_2 - z_1}{n_{12}}; \qquad \textbf{(16.1)}$$

(16.1) формула ва

$$x = (N + H) \cdot \cos B \cdot \cos L;$$

$$y = (N + H) \cdot \cos B \cdot \sin L;$$

$$z = \left(\frac{b^2}{a^2} N + H \right) \cdot \sin B;$$

формулалар асосида топамиз:

$$\left. \begin{aligned} S_{12} l_{12} &= (N_2 - H_2) \cdot \cos B_2 \cdot \cos L_2 - (N_1 + H_1) \cdot \cos B_1 \cdot \cos L_2; \\ S_{12} m_{12} &= (N_2 + H_2) \cdot \cos B_2 \cdot \sin L_2 - (N_1 + H_1) \cdot \cos B_1 \cdot \cos L_1; \\ S_{12} n_{12} &= (N_2 + H_2) \cdot \sin B_2 - e^2 N_2 \sin B_2 - (N_1 + H_1) \cdot \sin B_1 + e^2 N_1 \cdot \sin B_1; \end{aligned} \right\} \textbf{(16.2)}$$

(16.2) тенгламадан фойдаланиб, кесма учларини координаталари ёрдамида кесма узунлиги S_{12}ни топиш имконияти бўлади.

$l_{12}^2 + m_{12}^2 + n_{12}^2 = 1$ эканлигини ҳисобга олиб, Молоденский формуласини чиқарамиз.

$$\begin{aligned} S_{12}^2 &= (N_2 + H_2)^2 + (N_1 + H_1)^2 - 2(N_2 + H_2) \cdot (N_1 + H_1) \cdot \cos\psi - \\ &- \mu (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1)^2 - 2e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) \cdot (H_2 \sin B_2 - H_1 \sin B_1) \end{aligned} \qquad \textbf{(16.3)}$$

бу ерда:

$$\cos\psi = \sin B_1 \cdot \sin B_2 + \cos B_1 \cos B_2 \cos(L_2 - L_1);$$

$$\mu = \frac{a^4 - b^4}{a^4};$$

Агар *H_1=H_2=0* бўлса, у ҳолда *S_{12}* кесманинг эллипсоид сатҳидаги проекциясини оламиз, яъни

$$\overline{S_{12}^2} = -4N_1N_2\sin^2\frac{\psi}{2} - (N_2 - N_1)^2 - \mu(N_2\sin B_2 - N_1\sin B_1)^2; \qquad \textbf{(16.4)}$$

S_{12} кесим йўналишини топиш учун унинг йўналтирувчи косинуслари *l_{12}; m_{12}; n_{12}*ларни зенит масофа *z_{12}* ва бу йўналиш геодезик азимути *A_{12}*орқали ифодалаймиз. Бунинг учун биринчи нуқтани геодезик узоқлиги *L_1* га тенг бўлган бурчакка (*xyz*) координаталар системасини *oz* ўқи атрофида бурамиз. Янги координаталар системасида нуқта координаталари (*x'y'z'*) эски координаталар системасидаги нуқта координаталари билан қуйидагича боғланган:

$$\left.\begin{aligned} x \cdot \cos L_1 + y\sin L_1 = x'; \\ y \cdot \cos L_1 - y\sin L_1 = y'; \\ z = z'; \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(16.5)}$$

Яъни координаталар системасида йўналтирувчи косинуслар,

$$\left.\begin{aligned} S_{12}l'_{12} = x'_2 - x'_1; \\ S_{12}m'_{12} = y'_2 - y'_1; \\ S_{12}n'_{12} = z'_2 - z'_1; \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(16.6)}$$

тенгламалар билан топилади. **(16.5)**ни инобатга олиб **(16.6)** қўйидагига ёзишимиз мумкин:

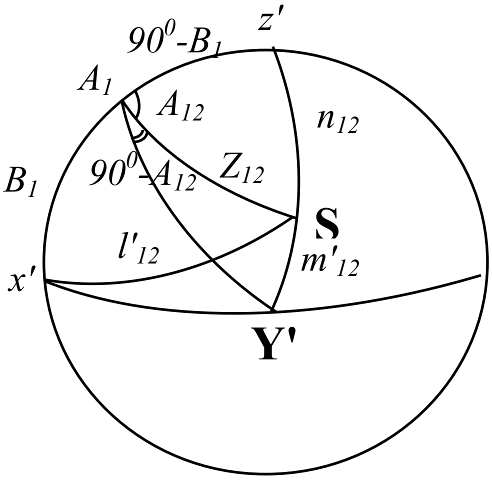
$$\left.\begin{aligned} S_{12}l'_{12} = (x_2 - x_1)\cos L_1 + (y_2 - y_1)\sin L_1; \\ S_{12}m'_{12} = (y_2 - y_1)\cos L_1 + (x_2 - x_1)\sin L_1; \\ S_{12}n'_{12} = z_2 - z_1; \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(16.7)}$$

Эски ва янги координата системаларида *S_{12}* кесманинг йўналтирувчи косинуслари орасидаги боғланиш **(16.1)**ни инобатга олиб, топамиз:

$$\left.\begin{aligned} l'_{12} = l_{12}\cos L_1 + m_{12}\sin L_1; \\ m'_{12} = m_{12}\cos L_1 - l_{12}\sin L_1; \\ n'_{12} = n_{12}; \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(16.8)}$$

(16.8)га тескари боғланиш:

$$\left.\begin{aligned} l'_{12} &= l_{12}\cos L_1 - m_{12}\sin L_1; \\ m_{12} &= l'_{12}\sin L_1 + m'_{12}\cos L_1; \\ n_{12} &= n'_{12}; \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(16.9)}$$



16.1-шакл.

1-инчи нуқта геодезик координаталари, A_{12} азимут ва z_{12}зенит масофалари билан l_{12}, m_{12}, n_{12}лар орасидаги боғланишларни топиш учун 16.1 – шаклдан фойдаланамиз. Бу шаклда бирлик радиусга эга бўлган сфера тасвирланган бўлиб қуйидаги белгилашлар қабул қилинган:

A_1 – 1-инчи нуқтада геодезик зенит ҳолати;

S – 1-2 йўналишни бирлик сфера билан келишиш нуқтаси;

x'; y'; z' – координа ўқлари билан бирлик сферани кесиши нуқталари.

Ҳосил бўлган нуқталарни катта айлана ёйлари билан бирлаштирамиз.

A_1Sx' сферик учбурчакдан топамиз:

$$\cos(x';s) = l_{12} = \cos B_1 \cdot \cos z_{12} - \sin B_1 \cdot \sin z_{12} \cdot \cos A_{12}; \qquad \textbf{(16.10)}$$

яъни $\cos(180^0 - A_{12}) = -\cos A_{12}$.

$A_1y'S$ сферик учбурчакдан (унда $A_1y'=90^0$).

$$\cos(y';s) = m'_{12} = \cos 90^0 \cdot \cos z_{12} + \sin 90^0 \cdot \sin z_{12} \cdot \cos(90^0 - A_{12}) =$$
$$= \sin z_{12} \cdot \sin A_{12} \qquad \textbf{(16.11)}$$

$A_1z'S$ сферик учбурчакдан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\cos(z';s) = n'_{12} = \sin B_1 \cdot \cos z_{12} + \cos B_1 \cdot \sin z_{12} \cdot \cos A_{12} \qquad \textbf{(16.12)}$$

(16.8)дан фойдаланиб, **(16.10); (16.11); (16.12)** ларни ўнг томонларини *l_{12}; m_{12}; n_{12}* лар орқали ифодалаймиз.

$$l_{12}\cos L_1 + m_{12}\sin L_1 = \cos B_1 \cdot \cos z_{12} - \sin B_1 \cdot \sin z_{12} \cdot \cos A_{12}; \tag{16.13}$$

$$m_{12}\cos L_1 - l_{12}\sin L_1 = \sin z_{12} \cdot \sin A_1; \tag{16.14}$$

$$n_{12} = \sin B_1 \cdot \cos z_{12} + \cos B_1 \cdot \sin z_{12} \cdot \cos A_{12}; \tag{16.15}$$

(16.13); (16.14); (16.15) ифодалардан топамиз:

$$l_{12} = \cos B_1 \cdot \cos L_1 \cdot \cos z_{12} - \sin B_1 \cdot \cos L_1 \cdot \sin z_{12} \cdot \cos A_{12} - \sin L_1 \cdot \sin z_{12} \cdot \sin A_{12};$$

$$m_{12} = \cos B_1 \cdot \sin L_1 \cdot \cos z_{12} - \sin B_1 \cdot \sin L_1 \cdot \sin z_{12} \cdot \cos A_{12} + \cos L_1 \cdot \sin z_{12} \cdot \sin A_{12};$$

$$n_{12} = \sin B_1 \cdot \sin z_{12} + \cos B_1 \cdot \sin z_{12} \cdot \cos A_{12}; \tag{16.16}$$

*z_{12}*ва *A_{12}*ларга нисбатан **(16.13); (16.14); (16.15)** ифодаларни ечиб қуйидагини топамиз:

$$\cos z_{12} = (L_{12} \cdot \cos L_1 + m_{12} \cdot \sin L_1) \cdot \cos B_1 + n_{12} \cdot \sin B_1; \tag{16.17}$$

$$ctgA_{12} = \frac{n_{12} \cdot \cos B_1 - (l_{12} \cdot \cos L_1 + m_{12} \cdot \sin L_1) \cdot \sin B_1}{m_{12} \cdot \cos L_1 - l_{12} \cdot \sin L_1}; \tag{16.18}$$

(16.2)ни инобатга олиб ва *l_{12}; m_{12}; n_{12}* ларни **(16.16)**даги кўриниши билан алмаштириб Молоденский формуласини ҳосил қиламиз

$$S_{12}\cos z_{12} = (N_2 + H_2) \cdot \cos\varphi - (N_1 + H_1) - e^2 (N_2 \cdot \sin B_2 - N_1 \cdot \sin B_1) \cdot \sin B_1; \tag{16.19}$$

$$ctgA_{12} = ctg\alpha_{12} - e^2 \frac{(N_2 \cdot \sin B_2 - N_1 \cdot \sin B_1) \cdot \cos B_1}{(N_2 + H_2) \cdot \cos B_2 \cdot \sin(L_2 - L_1)}; \tag{16.20}$$

бу ерда:

$$ctg\alpha_{12} = \frac{\sin(B_2 - B_1)}{\cos B_2 \cdot \sin(L_2 - L_1)} + \sin B_1 \cdot tg\frac{L_2 - L_1}{2} =$$

$$= \frac{\sin B_2 \cdot \cos B_1 - \cos B_2 \cdot \sin B_1 \cdot \cos(L_2 - L_1)}{\cos B_2 \cdot \sin(L_2 - L_1)};$$

1 ва 2 индексларни жойларни алмаштириб тескари зенит масофа ва азимутларни топамиз:

$$S_{12}\cos z_{21} = (N_1 + H_1) \cdot \cos\varphi - (N_2 + H_2) + e^2 (N_2 \cdot \sin B_1 - N_1 \cdot \sin B_1) \cdot \sin B_2; \tag{16.21}$$

$$ctgA_{21} = ctg\alpha_{21} - e^2 \frac{(N_2 \cdot \sin B_2 - N_1 \cdot \sin B_1) \cdot \sin B_2}{(N_1 + H_1) \cdot \cos B_1 \cdot \sin(L_2 - L_1)}; \tag{16.22}$$

бу ерда:

$$ctg\alpha_{21} = \frac{\sin(B_2 - B_1)}{\cos B_2 \cdot \sin(L_2 - L_1)} - \sin B_2 \cdot tg\frac{L_2 - L_1}{2} =$$

$$= -\frac{\sin B_1 \cdot \cos B_2 - \cos B_1 \cdot \sin B_2 \cdot \cos(L_2 - L_1)}{\cos B_1 \cdot \sin(L_2 - L_1)};$$

(16.3); (16.4); (16.19); (16.20) Молоденский формуларидан ташқари қўйидаги боғланишлар ҳам муҳим амалий аҳамиятга эга. Улар қўйидагича ҳосил қилинган:

(16.14) дан:
$$m_{12}\cos L_1 - l_{12}\sin L_1 = \sin z_{12} \cdot \sin A_{12};$$
$$m_{21}\cos L_2 - l_{12}\sin L_2 = \sin z_{21} \cdot \sin A_{21};$$

(16.2)ни ва l_{21}=-l_{12} m_{21}=-m_{12} ни инобатга олиб, қўйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left[(N_2 + H_2)\cdot\cos B_2 \cdot \sin L_2 - (N_1 + H_1)\cdot\cos B_1 \cdot \sin L_1\right]\cdot\cos L_1 -$$
$$-\left[(N_2 + H_2)\cdot\cos B_2 \cdot \sin L_2 - (N_1 + H_1)\cdot\cos B_1 \cdot \cos L_1\right]\cdot\sin L_1 =$$
$$= (N_2 + H_2)\cdot\cos B_2 \cdot \sin(L_2 - L_1) = S_{12} \cdot \sin z_{12} \cdot \sin A_{12}; \qquad \textbf{(16.23)}$$

$$\left[(N_1 + H_1)\cdot\cos B_1 \cdot \sin L_1 - (N_2 + H_2)\cdot\cos B_2 \cdot \sin L_2\right]\cdot\cos L_2 -$$
$$-\left[(N_1 + H_1)\cdot\cos B_1 \cdot \cos L_1 - (N_2 + H_2)\cdot\cos B_2 \cdot \cos L_2\right]\cdot\sin L_2 =$$
$$= -(N_1 + H_1)\cdot\cos B_1 \cdot \sin(L_2 - L_1) = S_{12} \cdot \sin z_{21} \cdot \sin A_{21}; \qquad \textbf{(16.24)}$$

(16.24)ни (16.23)га бўлиб, қўйидаги боғланишни ҳосил қиламиз.

$$(N_1 + H_1)\cdot\cos B_1 \cdot \sin z_{12} \cdot \sin A_{12} = -(N_n + H_n)\cdot\cos B_n z_{n1} \cdot \sin A_{n1} = const \, \textbf{(16.25)}$$

(16.25) формула инглиз геодезисти Хотин формуласи ҳисобланади.

§ 17. ГАУСС-КРЮГЕР ЯССИ ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ КООРДИНАТА СИСТЕМАСИ

Дастур: Гаусс-Крюгер координата системаси тўғрисида умумий тушунчалар. Гаусс-Крюгер проекциясида эллипсоидни текисликда конформ тасвирлашнинг асосий формулари. Геодезик координаталардан Гаусс-Крюгер координаталарига ва аксинча геодезик координаталардан Гаусс-Крюгер координаталарига ўтиш формулалари. Текисликда меридианлар яқинлашишини ҳисоблаш. Масофа ва йўналишни текисликга редукциялаш. Гаусс-Крюгер координаталарни бир зонадан бошқа зонага қайта ҳисоблаш. Сфероидик геодезияда қўлланиладиган бошқа координата системалари тўғрисида тушунчалар.

Гаусс-Крюгер координата системаси Тўғрисида умумий тушунчалар

Маълумки, геодезик масалаларини ечишда асосан тўғри бурчакли ва геодезик координата системалари қўлланилади, текисликда ва фазода геодезик масалалар ечишда эса тўғри бурчакли координаталар системаси, эллипсоид сатҳида геодезик масалаларни ечишда эса геодезик координаталар системаси қўлланилади.

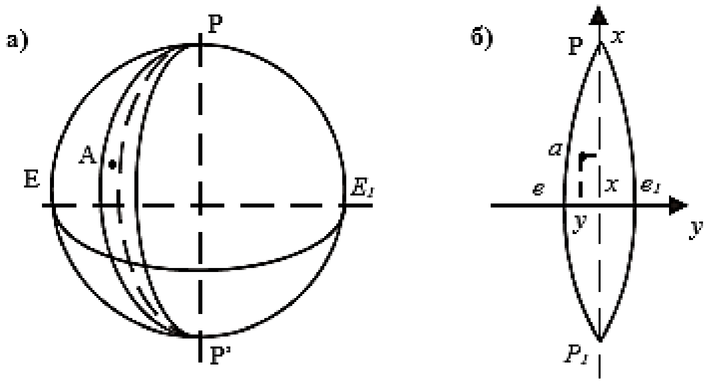
1 класс триангуляция тўри координаталарини ҳисоблаш эллипсоид сатҳида амалга оширилади. Катта майдонда ягона геодезик тўрни барпо этишда геодезик координаталар системасини қўллаш қулайдир. Бундан ташқари кўпгина илмий аҳамиятга эга бўлган масалаларни ечишда, масалан, Ер эллипсоиди катталикларини (параметрларини) аниқлашда; Ер физик сатҳини ўрганишда; сунъий йўлдошлар орбитасини ҳисоблашда; самовий ёритгичларни эфемеридасини ҳисоблашда; авиация ва денгиз навигацияларида ва х.к.ларда ҳам бу координаталар системасидан фойдаланиш қўл келади.

Бу координата системасида нуқталарнинг ўзаро ҳолати бурчак бирлигида берилади. Меридианлар ўзаро параллел бўлмаганлиги сабабли уларга нисбатан ўлчанадиган чизиқнинг (йўналишни) ҳар хил нуқталарида азимутлар турлича бўлади. Меридиан нуқталарининг узоқликлари кенгликга боғлиқ эмас, лекин геодезик координаталарнинг чизиқли қиймати нуқтанинг кенглигига боғлиқ.

Юқоридагидек масалаларни ечишда геодезик координаталарни қўллаш мураккаб бўлиб, кўп вақт ва маҳорат талаб қилади, шу сабабли геодезик координаталардан фойдаланиш ҳамма масаларни ечишда қўл келавермас экан.

2,3,4 класс триангуляция тўрларини ҳисоблаш ишлари, топографик хариталар тўзиш билан боғлиқ бўлган геодезик ҳисоблашлар (таянч тўрларини барпо этиш) ва турли инженер-геодезик масалаларни ечиш текисликда амалга оширилади, яъни бу мақсадларда ясси тўғри бурчакли координаталар қўлланилади. Шу сабабли эллипсоид сатҳидан текисликга ўтиш ва акчинча текисликдан эллипсоид сатҳига ўтиш муҳим аҳамиятга эга бўлиб, ҳисоблаш ишларини аниқлиги кейинги бажариладиган геодезик ишлар аниқлигига таъсир этади. Эллипсоид сатҳини текисликга ўзгаришсиз (хатосиз, бузмасдан) ёйиб бўлмайди. Эллипсоид сатҳини текисликда хатосиз тасвирлайдиган тўғри бурчакли координаталар системалари ҳам мавжуд эмас. Бизнинг мамлакатимизда, мустақил давлатлар ҳамдўстлиги давлатларида ва айрим бошқа давлатларда эллипсоид сатҳини текисликда тасвирлаш учун Гаусс-Крюгернинг конформ проекцияси қўлланилади. Бу проекцияда Ер эллипсоиди меридианлар ёрдамида узоқликлар фарқи олти градусли (йирик масштабли топографик планга олишда узоқликлар фарқи уч градусли) зоналарга бўлинади. **Зона ўртасидан ўтувчи меридианга ўқ меридиани дейилади.**

Ҳар бир зонада ўқ меридиани тасвирини абцисса-*x* ўқи деб, экватор чизиғи тасвирини ордината-*y* ўқи деб қабул қилинади. Эллипсоид сатҳидаги бу эгри чиқлар текисликда тўғри чизиқ кўринишида тасвирланади, ўқ меридиани билан экватор чизиғини кесишиш нуқтаси координата бош деб олинади. Ҳар бир зона ўз координата бошига (координата системасига) эга бўлади. Зона ўқ меридиани текисликда ўзгаришсиз тасвирланади.

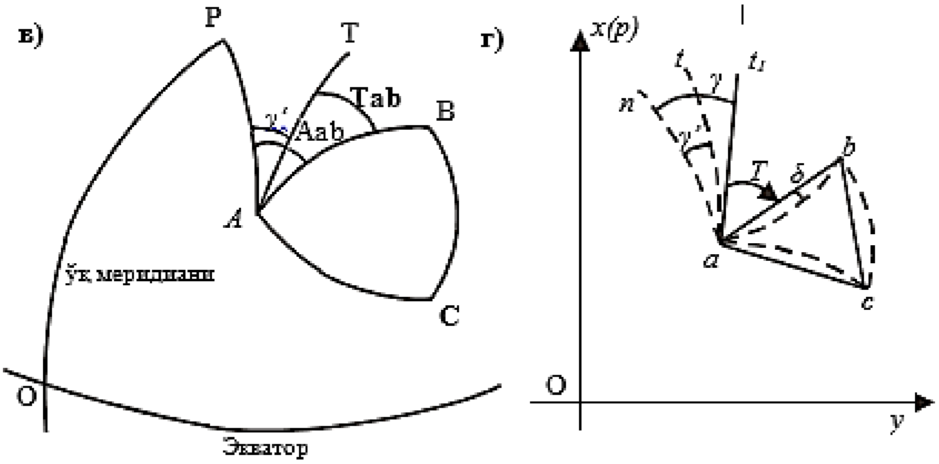


17.1-шакл.

а)-17.1-шаклда эллипсоид сатҳидаги *«n»* инчи зона тасвирланган. Ўқ меридианини узоқлиги:

$$L_0 = 6 \cdot n - 3^0$$

формула билан топилади. *A* нуқтанинг эллипсоид сатҳидаги ҳолати кенглик *B* ва узоқлик *L* орқали берилади.



17.1-шакл.

Худди шу зонани Гаусс-Крюгер проекциясида текисликдаги тасвири б)-17.1-шаклда тасвирланган. Эллипсоид сатҳидаги *A* нуқтанинг текисликдаги проекцияси *«a»* бўлиб, унинг ҳолати ясси координата *x, y* билан ифодаланади. Биз юқорида айитганимиздек Гаусс-Крюгер проекцияси конформ проекция. Бу прекциянинг конформлиги қўйидаги хусусиятлари билан белгиланади:

1. Эллипсоид сатҳидаги чексиз кичик бўлган контур шу контурнинг текисликдаги тасвири билан ўхшаш бўлади;
2. Бурчакларни текисликдаги проекциясида ўзгаришлар бўлмайди;
3. Ҳар бир нуқтада тасвирлаш масштаби нуқта координатасига боғлиқ бўлиб, унга йўналишнинг таъсири йўқ.

Зона ўқ меридианида тасвирлаш масштаби бирга тенг, яъни ўқ меридианида жойлашган нуқталар ўзгаришсиз тасвирланади. Ўқ меридианидан узоқлашган сари тасвирлаш масштаби «бир» дан катталашади, ўзгариш ортиб боради. Юқоридаги камчиликларга қарамасдан Гаусс-Крюгер проекциясини афзаллик томонлари мавжуд:

1. Бошқа проекциялардагига нисбатан ҳисоблаш ишлари анча содда;
2. Проекциядаги ўзгаришлар юқори аниқликда топилади.

Гаусс-Крюгер проекциясида эллипсоид сатҳидан текисликга ўтиш тартибини қисқача кўриб чиқамиз. Эллипсоид сатҳида триангуляциянинг ихтиёрий *ABC* учбурчагини олайлик (17.1-шакл, в чизма).

PO –триангуляция жойлашган зонанинг ўқ меридиани.

AP – *A* нуқтадан ўтган меридиан.

AT – ўқ меридианига параллел ва эллипсоидга уринма бўлган текислик.

γ' - *A* нуқтадаги меридианларни геодезик яқинлашиш бурчаги.

Aab – *AB* томон азимути.

T''_{ab} – *AB* томон геодезик дирекцион бурчаги.

Юқоридаги элементларни Гаусс-Крюгер проекциясида текисликдаги тасвири (17.1-шакл, г)-чизма)

a, b, c, - A, B, C нуқталар тасвири.

ox – *OP* ўқ меридиани тасвири.

an эгри чизиқ - *A* нуқтадан ўтган *AP* меридиан тасвири.

at – эгри чизиқ - *AT* –уринма тасвири.

ab, ac, bc эгри чизиқлар – *AB, AC, BC* геодезик чизиқлар тасвири.

«a» нуқтадан ўқ меридиани тасвирига (абсцисса ўқига) параллел бўлган чизиқ ўтказамиз, уни at_1 билан белгилаймиз.

an эгри чизиқ билан at_1 чизиқ орасида ҳосил бўлган γ'бурчакга меридианларни текисликдаги яқинлашиш бурчаги дейилади.

Текисликда геодезик чизиқлар эгри чизиқ билан тасвирланади, бу эса триангуляцияни ҳисоблаш ишларини қийинлаштиради, шу сабабли улар учбурчак учларини туташтирувчи ватарлар билан алмаштирилади. Натижада текисликда триангуляцияни ясси учбурчаклари ҳосил бўлади, уларни тўғри чизиқли тригонометрия формулаларидан фойдаланиб ҳисоблаш мумкин бўлади. Геодезик чизиқ билан ватар орасида ҳосил бўлган δ кичик бурчакка геодезик чизиқни тасвиридаги эгриликка тузатма дейилади. Текисликда томонлари тўғри чизиқдан иборат бўлган учбурчакларни ҳосил қилиш учун ўлчанган йўналишларга δ тўзатма киритилади.

at_1 тўғри чизиқ ва *ab* ватар орасида ҳосил бўлган бурчакка текисликдаги дирекцион бурчак дейилади ва *T* билан белгиланади.

Гаусс-Крюгер проекциясида масофани эллипсоид сатҳидан текисликга ўтказишда ўзгариш бўлади, шу сабабли эллипсоид сатҳидаги масофадан унга мос бўлган текисликдаги масофага ўтиш учун унга тузатма киритилади, бунга масофани редукциялаш дейилади.

Эллипсоид сатҳидан текисликка ўтиш учун қуйидаги бошланғич маълумотлар бўлиши керак:

S_0 - триангуляция чиқиш томони.

A – чиқиш томон азимути.

B, L – бошланғич пунктлардан бирининг геодезик коодинаталари.

Гаусс-Крюгер проекциясида эллипсоид сатҳидан текисликка ўтиш қуйидаги кетма-кетликда амалга оширилади:

1. Бошлағич пункт геодезик координаталаридан фойдаланиб, Гаусс-Крюгер проекциясида шу пунктни тўғри бурчакли координаталари ҳисобланади. Текисликда меридианлар яқинлашиш бурчаги аниқланади ва бошланғич томонни тақрибий дирекцион бурчаги топилади:

$$T' = A - \gamma$$

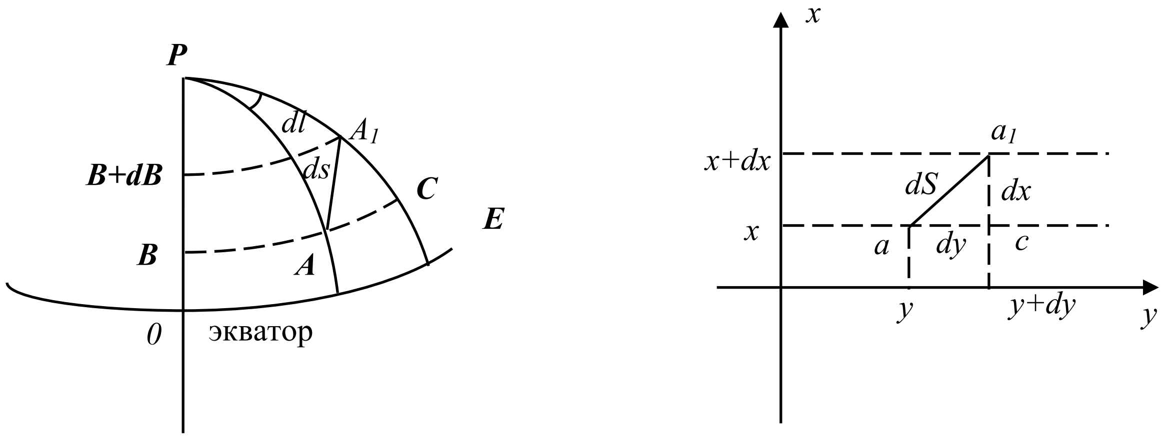
2. Аввалдан учбурчаклар ечилади ва учбурчак учларини (пунктларни) тақрибий координаталари ҳисобланади.

3. Бошланғич томон узунлиги редукцияси ва барча йўналишлар учун геодезик чизиқларни эгрилиги учун δ тузатмалар ҳисобланади.

Топилган тузатмалар бошланғич томон узунлигига ва ўлчанган йўналишларга киритилади.

4.Триангуляция текисликда тенглаштирилади.

§ 18. ГАУСС-КРЮГЕР ПРОЕКЦИЯСИНИНГ АСОСИЙ ФОРМУЛАЛАРИ



18.1-шакл.

Эллипсоид сатҳида чексиз кичик AA_1C учбурчак оламиз, шу учбурчакни текисликдаги тасвири aa_1c бўлсин (18.1-шакл).

Элементар AA_1C учбурчакдан,

$A_1C = MdB$ (меридиан ёй элементи)

$AC = N\cos Bdl$ (параллел ёй элементи)

бўлади, булардан фойдаланиб,

$$ds = \sqrt{(MdB)^2 + (N\cos Bdl)^2} \qquad \textbf{(18.1)}$$

деб ёзишимиз мумкин.

Илдиз остидаги ифодани $\left(\frac{N\cos B}{N\cos B}\right)^2$ га кўпайтирамиз, унда

$$ds = \sqrt{\frac{(MdB)^2 (N\cos B)^2}{(N\cos B)^2} + \frac{(N\cos Bdl)^2 \cdot (N\cos B)^2}{(N\cos B)^2}} = N\cos B\sqrt{\left(\frac{MdB}{N\cos B}\right)^2 + (dl)^2} \qquad \textbf{(18.2)}$$

$$\frac{MdB}{N\cos B} = dq \text{ деб белгилаймиз} \qquad \textbf{(18.3)}$$

Бу ерда, ўзгарувчи q изометрик кенглик деб аталади.

(18.3)ни инобатга олиб **(18.2)**ни куйидагига ёзишимиз

$$ds = N\cos B\sqrt{(dq)^2 + (dl)^2} \qquad \textbf{(18.4)}$$

Текисликда

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \qquad \textbf{(18.5)}$$

*dS*ни*ds*га нисбатини олсак бу тасвирлаш масштабини беради, яъни

$$m = \frac{dS}{ds}$$

(18.4) ва **(18.5)** формулаларни ҳисобга олсак:

$$m = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{N \cos B \sqrt{(dq)^2 + (dl)^2}}$$

Бу ифодани квадратга кўтариб, комплекс сонлар назарияси асосида қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$m^2 = \frac{(dx + idy)(dx - idy)}{N^2 \cos^2 B(dq + idl)(dq - idl)} = \frac{d(x + iy)d(x - iy)}{N^2 \cos^2 Bd(q + il)d} \qquad \mathbf{(18.6)}$$

Тасвирлашда конформликни сақлаб қолиш учун тўғри бурчакли координаталар геодезик координаталарнинг функцияси бўлиши керак, яъни

$$x = f_1(B; L)$$
$$y = f_2(B; L)$$

ёки

$$\begin{aligned} x + iy &= f(q + il) \\ x - iy &= f(q - il) \end{aligned} \qquad \mathbf{(18.7)}$$

Гаусс-Крюгер проекцияси шартига кўра, зонанинг *OP*ўқ меридиани текисликда тўғри чизиқ билан тасвирланади ва *x*ўқи деб олинади, демак ўқ меридиани учун

$$l=0; \quad y=0$$

Ўқ меридианида жойлашган нуқта абсциссаси экватордан шу нуқтагача бўлган меридиан ёй узунлигига тенг, бўлишлигини инобатга олиб **(18.7)**ни қуйидагича ёзишимиз мумкин

$$x = X = f(q), \qquad \mathbf{(18.8)}$$

Бу ерда: $X - B$ кенгликгача бўлган ўқ меридиан ёй узунлиги.

$f(q+il)$ ни Тейлор қаторига ёямиз:

$$f(q+il)=f(q)+il\frac{df(q)}{dq}+\frac{1}{2!}(il)^2\frac{d^2f(q)}{dq^2}+\frac{1}{3!}(il)^3\frac{d^3f(q)}{dq^3}+\frac{1}{4!}(il)^4\frac{d^4f(q)}{dq^4}+$$
$$+\frac{1}{S!}(il)^5\frac{d^5f(q)}{dq^5}+\frac{1}{6!}(il)^6\frac{d^6f(q)}{dq^6}+\ldots\ldots,$$

ёки

$$f(q+il)=f(q)+il\frac{df(q)}{dq}-\frac{1}{2}l^3\frac{d^2f(q)}{dq^2}-\frac{1}{6}il^3\frac{d^3f(q)}{dq^3}+\frac{1}{24}l^4\frac{d^4f(q)}{dq^4}+$$
$$+\frac{1}{120}il^5\frac{d^5f(q)}{dq^5}-\frac{1}{720}l^6\frac{d^6f(q)}{dq^6}+\ldots\ldots,$$

Бу ерда $f(q)=X$ бўлганлиги сабабли

$$x+iy=X+il\frac{dX}{dq}-\frac{1}{2}l^2\frac{d^2X}{dq^2}-\frac{1}{6}il^3\frac{d^3X}{dq^3}+\frac{1}{24}l^4\frac{d^4X}{dq^4}+\frac{1}{120}il^5\frac{d^5X}{dq^5}-\frac{1}{720}l^6\frac{d^6X}{dq^6}+\ldots\mathbf{(18.9)}$$

Комплекс сонлар назариясига кўра тенгликнинг ҳақиқий ҳадлар қаторини ҳақиқий ҳадларига, мавҳум ҳадлар қаторини мавҳум ҳадларига тенглаш мумкин, унда:

$$x=X-\frac{1}{2}l^2\frac{d^2X}{dq^2}+\frac{1}{24}l^4\frac{d^4X}{dq^4}-\frac{1}{720}l^6\frac{d^6X}{dq^6}+\ldots. \qquad \mathbf{(18.10)}$$

$$y=l\frac{dX}{dq}-\frac{1}{6}l^3\frac{d^3X}{dq^3}+\frac{1}{120}l^5\frac{dX}{dq^5}-\ldots.. \qquad \mathbf{(18.11)}$$

(18.10) ва **(18.11)** формулалар эллипсоид нуқталарни Гаусс-Крюгер проекциясида текисликда тасвирлаш қонуниятини ифодаловчи умумий кўринишдаги асосий тенгламалар ҳисобланади.

§18.1 *B, L* геодезик координаталардан фойдаланиб *x, y* тўғри бурчакли коодинаталарни ҳисоблаш (тўғри масала)

Гаусс-Крюгер тўғри бурчакли координаталарни ҳисоблаш учун

$$\frac{dX}{dq};\frac{d^2X}{dq^2};\ldots\ldots;\ \frac{d^4X}{dq^4}\ ,$$

ҳосилаларни топиб, умумий кўринишдаги асосий тенгламага қўйиш керак.

Ёзувларни қисқа ёзиш учун белгилашлар киритамиз:

$$\left.\begin{array}{l} c=\dfrac{a^2}{b}; \quad t=tgB; \\ \eta^2=e'^2\cos^2 B; \quad V^2=1+\eta^2 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(18.1.1)}$$

Биринчи ҳосила: Бизга маълумки

$$dX = MdB;$$

$$dq=\frac{MdB}{N\cos B}$$

булардан фойдаланиб ёзишимиз мумкин,

$\dfrac{dX}{dq}=N\cos B;$ лекин $N=\dfrac{C}{V}$ ва шу сабабли

$$\frac{dX}{dq}=\frac{C}{V}\cos B \qquad \textbf{(18.1.2)}$$

Иккинчи ҳосила:

$$\frac{d^2X}{dq^2}=\frac{-c\sin BV-c\cos B\dfrac{dV}{dB}}{V^2}\cdot\frac{dB}{dq}=\left[-\frac{c}{V}\sin B-\frac{c}{V^2}\cos B\frac{dV}{dB}\right]\frac{dB}{dq} \qquad \textbf{(18.1.3)}$$

$\dfrac{dV}{dB}$ дифференциалини топиш учун $V^2=1+e'^2\cos^2 B$ формуласини дифференциаллаймиз:

$$2VdB=-2e'^2\cos B\sin BdB,$$

бундан:

$$\frac{dV}{dB}=\frac{-e'^2\cos B\sin B}{V} \qquad \textbf{(18.1.4)}$$

(18.14)ни **(18.13)** га қўямиз

$$\frac{d^2X}{dq^2}=\left[-\frac{c}{V}\sin B-\frac{c}{V^2}\cos B\left(-\frac{e'^2\cos B\sin B}{V}\right)\right]\frac{dB}{dq}=\left[-\frac{c}{V}\sin B+\frac{c}{V^3}e'^2\cos^2 B\sin B\right]\frac{dB}{dq}=$$

$$\left[-\frac{c}{V}\sin B+\frac{c}{V^3}e'^2\cos^2 B\sin B\right]\frac{dB}{dq}=\left[-\frac{cV^2\sin B-ce'^2\cos^2 B\sin B}{V^3}\right]\frac{dB}{dq}=$$

$$=\left[-\frac{c(1+\eta^2)\sin B-c\eta^2\sin B}{V^3}\right]\frac{dB}{dq}=\left[-\frac{c\sin B+c\eta^2\sin B-c\eta^2\sin B}{V^3}\right]\frac{dB}{dq},$$

Бундан:

$$\frac{d^2X}{dq^2} = -\frac{c}{V^3}\sin B\frac{dB}{dq} \qquad \textbf{(18.1.5)}$$

$dq = \dfrac{MdB}{N\cos B}$ тенгликдан топамиз. Бундан $\dfrac{dB}{dq} = \dfrac{N\cos B}{M}$ ни топиб **(18.1.5)**га қўйсак

$$\frac{d^2X}{dq^2} = -\frac{c}{V^3}\sin B\cdot\frac{N\cos B}{M}, \text{ келиб чиқади.}$$

$\dfrac{c}{V^3} = M$ эканлигини инобатга олсак

$$\frac{d^2x}{dq^2} = -N\sin B\cos B \qquad \textbf{(18.1.6)}$$

Шу йўсинда қолган ҳосилалар топилади, уларни асосий тенгламаларга **(18.10), (18.11)**ларга қўйсак тўғри масалани ечиш учун ишчи формулалар ҳосил қилинади:

$$x = X + \frac{l''^2}{2\rho''^2}N\cos B\sin B + ..., \qquad \textbf{(18.1.7)}$$

$$y = \frac{l''}{\rho''}N\cos B + ... \qquad \textbf{(18.1.8)}$$

Триангуляцияда талаб этилган аниқликдаги ҳисоблашни бажариш учун олтинчи тартибдаги ҳосилаларни топиб ва уларни асосий тенгламаларга қўйиб иш формулаларни келтириб чиқариш мумкин:

$$x = X + \frac{l''^2}{2\rho''^2}N\sin B\cos B\left\{1 + \frac{l''^2\cos^2 B}{12\rho''^2}(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \right.$$

$$\left. + \frac{l''^4\cos^4 B}{360\rho''^4}(61 - 58t^2 + t^4)\right\} \qquad \textbf{(18.1.9)}$$

$$y = \frac{l''}{\rho''}N\cos B\left\{1 + \frac{l''^2\cos^2 B}{6\rho''^2}(1 - t^2 + \eta^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{l''^4\cos^4 B}{120\rho''^4}(5 - 18t^2 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2)\right\} \qquad \textbf{(18.1.10)}$$

ЭҲМ дан фойдаланиб *B, L* асосида *x* ва *y* ларни ҳисоблаш учун қуйидаги формулалардан фойдаланиш мақсадга мувофиқ:

$$\left.\begin{aligned} x &= 63675584969\frac{B''}{\rho''} - \left\{ a_0 - \left[0.5 \left(a_4 + a_6 l^2\right) l^2\right] l^2 N \right\} \sin B \cos B \\ y &= \left[1 + \left(a_3 + a_5 l^2\right) l^2\right] lN \cos B \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(8.1.11)}$$

(18.1.11) формулаларда қуйидаги белгилашлар киритилган:

$l = \dfrac{(L - L_0)''}{\rho''}$ - берилган нуқта узоқлиги билан ўқ меридианузоқлиги айирмаси, радиан ўлчовидаифодаланган.

$$N = 6399698{,}902 - \left[2562{,}267 - \left(108{,}973 - 0{,}612\cos^2 B\right) \cos^2 B\right] \cos B;$$

$$a_0 = 32140{,}404 - \left[135{,}3302 - \left(0{,}7092 - 0{,}0040\cos^2 B\right) \cos^2 B\right] \cos^2 B;$$

$$a_4 = (0{,}25 + 0{,}00252\cos^2 B) \cos^2 B - 0{,}04166;$$

$$a_6 = (0{,}166\cos^2 B - 0.084) \cos^2 B;$$

$$a_3 = (0{,}3333333 + 0{,}001123\cos^2 B) \cos^2 B - 0{,}1666667;$$

$$a_5 = 0{,}0083 - \left[0{,}1667 - (0{,}1968 + 0{,}0040\cos^2 B) \cos^2 B\right] \cos^2 B$$

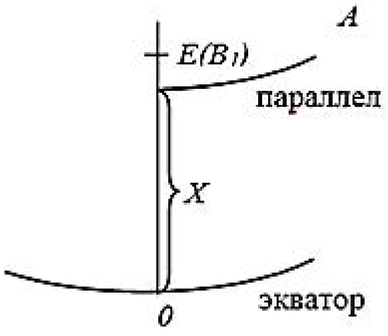
1-класс триангуляцияда кенгликлар ва узоқликлар 0,0001”; *x,y* координаталар 0,001 *м* гача ҳисобланади. Ордината қиймати *y,* зона ўқ меридианига нисбатан ҳосил қилинади.

§18.2 Тўғри бурчакли координаталардан фойдаланиб геодезик координаталарни ҳисоблаш (тескари масала)

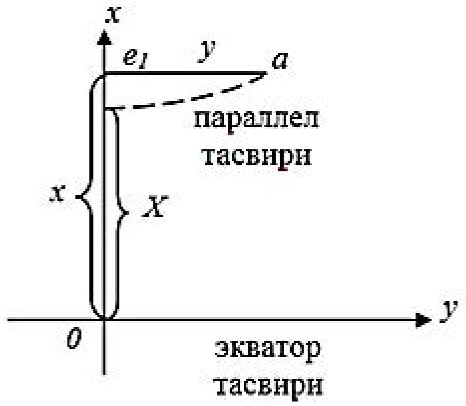
Проекция шартига кўра

$$\begin{aligned} B &= f(x, y); \\ L &= f(x, y); \end{aligned} \quad \text{ёки} \quad \begin{aligned} q + il &= F(x + iy); \\ q - il &= F(x - iy); \end{aligned} \qquad \textbf{(18.2.1)}$$

бўлиши керак.



эллипсоидда



текисликда

(18.2.1)ни Тейлор қаторига ёямиз:

$$q + il = F(x + iy) = F(x) + iyF'(x) - \frac{1}{2}y^2F''(x) - \frac{1}{6}iy^3F^{III}(x) + \frac{1}{24}y^4F^{IV}(x) + ... \textbf{(18.2.2)}$$

$$q - il = F(x - iy) = F(x) - iyF'(x) - \frac{1}{2}y^2F''(x) + \frac{1}{6}iy^3F^{III}(x) + \frac{1}{24}y^4F^{IV}(x) + ... \textbf{(18.2.3)}$$

(18.2.2) ва **(18.2.3)**данқуйидагиларни топамиз:

$$q = F(x) - \frac{1}{2}y^2F''(x) + \frac{1}{24}y^4F^{IV}(x) - ... \qquad \textbf{(18.2.4)}$$

$$l = yF'(x) - \frac{1}{6}y^3F^{III}(x) + ... \qquad \textbf{(18.2.5)}$$

Текисликда нуқта абсциссаси *oe₁* кесма билан аниқланади, бу кесмага эллипсоидда *OE, B₁* кенгликгача бўлган меридиан ёйи мос келади. *E* нуқта учун $l = 0$; $(y = 0)$, ва ўз навбатида шу нуқта учун

$$q_1 = F(x), \qquad \textbf{(18.2.6)}$$

бу ерда q_1кенглик B_1ни функцияси сифатида ҳисобланади. B_1-кенглик эса x аргумент асосида жадвалдан олинади.

(18.2.6) тенгликни инобатга олиб, **(18.2.4)**, **(18.2.5)** формуларни қайта ёзамиз

$$q = q_1 - \frac{1}{2}y^2\left(\frac{d^2q}{dx^2}\right)_1 + \frac{1}{24}y^4\left(\frac{d^4q}{dx^4}\right)_1 - .... , \qquad \textbf{(18.2.7)}$$

$$l = y\left(\frac{dq}{dx}\right)_1 - \frac{1}{6}y^3\left(\frac{d^3q}{dx^3}\right)_1 + ..., \qquad \textbf{(18.2.8)}$$

Маълумки $dq = \frac{MdB}{N\cos B}$.

Бу тенглик асосида ёзишимиз мумкин:

$$\left.\begin{aligned} B &= \varphi(q) = \varphi[q_1 + (q - q_1)] \\ B_1 &= \varphi(q_1) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(18.2.9)}$$

(18.2.9)ни Тейлор қаторига ёямиз:

$B = \varphi(q_1) + (q - q_1)\varphi'(q_1) + ...$

*(q-q₁)*ни **(18.2.7)** формула билан алмаштирамиз, унда

$$B = B_1 - \left[\frac{1}{2}y^2\left(\frac{d^2q}{dx^2}\right)_1 - \frac{1}{24}y^4\left(\frac{d^4q}{dx^4}\right)\right]\frac{dB_1}{dq_1} \qquad \textbf{(18.2.10)}$$

Ишчи формулаларни олиш учун ҳосила оламиз:

Биринчи ҳосила: Бизга маълумки

$dq = \frac{MdB}{N\cos B}$; лекин $MdB = dx$; шу сабабли

$$\left(\frac{dq}{dx}\right)_1 = \frac{1}{N_1\cos B_1} \quad , \qquad \textbf{(18.2.11)}$$

NcosB=r бўлганлиги учун

$$\left(\frac{dq}{dx}\right)_1 = \frac{1}{r_1} \qquad \textbf{(18.2.12)}$$

Иккинчи ҳосила:

$$\frac{d^2q}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dq}{dx}\right)}{dB}\frac{dB}{dx} \quad , \qquad \textbf{(18.2.13)}$$

$\frac{dB}{dx} = \frac{1}{M}$лиги маълум, у ҳолда **(18.2.14)**

$$\frac{d}{dB}\left(\frac{dq}{dx}\right) = \frac{d}{dB}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dB}, \qquad \textbf{(18.2.15)}$$

Бундан $\frac{dr}{dB}$ни топамиз

$$\frac{dr}{dB}=\frac{d(N\cos B)}{dB}=-N\sin B+\cos B\frac{d}{dB}\left[a(1-e^2\sin^2 B)^{-\frac{1}{2}}\right]=$$

$$=-N\sin B+\cos B\left[-\frac{1}{2}a(1-e^2\sin^2 B)^{-3/2}(-2e^2\sin B\cos B)\right]=$$

$$=-N\sin B+\cos B\left[\frac{ae^2\sin B\cos B}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}}\right]=-\frac{a\sin B}{(1-e^2\sin^2 B)^{\frac{1}{2}}}+\frac{ae^2\sin B\cos^2 B}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}}=$$

$$=\frac{-a\sin B(1-e^2\sin^2 B)+ae^2\sin B(1-\sin^2 B)}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}}=$$

$$=\frac{-a\sin B+ae^2\sin^3 B+ae^2\sin B-ae^2\sin^3 B}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}}=\frac{-a\sin B(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}},$$

агарда $M=\dfrac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}}$ эканлигини инобатга олсак,

$$\frac{dr}{dB}=-M\sin B \tag{18.2.16}$$

(18.2.13); (18.2.14); (18.2.15); (18.2.16) формулалардан фойдаланиб иккинчи ҳосилани топамиз

$$\frac{d^2q}{dx^2}=\left(-\frac{1}{r^2}\right)(-M\sin B)\cdot\frac{1}{M}=\frac{1}{r^2}\sin B$$

ёки

$$\left(\frac{d^2q}{dx^2}\right)_1=\frac{\sin B_1}{N_1^2\cos^2 B_1}=\frac{t_1}{N_1^2\cos B_1} \tag{18.2.17}$$

(18.2.8), (18.2.10), (18.2.11), (18.2.17) формулалардан фойдаланиб ва $\dfrac{dB_1}{dq_1}=\dfrac{N_1\cos B_1}{M_1}$ эканлигини ҳисобга олиб, қуйидагини топамиз:

$$B=B_1-\left[\frac{1}{2}y^2\frac{t_1}{N_1^2\cos B_1}-....\right]\frac{N_1\cos B_1}{M_1}\ \text{ёки}\ B=B_1-\frac{y^2t_1}{2M_1N_1}\rho''-... \tag{18.2.18}$$

$$l''=\frac{y}{N_1\cos B_1}\rho''-.... \tag{18.2.19}$$

Тўлиқ (ҳисоблашда юқори аниқликни таъминловчи) формулаларни олиш учун юқори тартибдаги ҳосилаларни топиб, **(18.2.8), (18.2.10)** формулаларга қўйиб ишчи формулалар келтириб чиқарилади:

$$l''=\frac{y}{N_1\cos B_1}\rho''\left[1-\frac{y^2}{6N_1^2}(1+2t_1^2+\eta_1^2)+\frac{y^4}{120N_1^4}(5+28t_1^2+24t_1^4+6\eta_1^2+8\eta_1^2t_1^2)\right]$$

$$B=B_1-\frac{y^2}{2M_1N_1}t_1\rho''\left[1-\frac{y^2}{12N_1^2}(5+3t_1^2+\eta_1^2-9\eta_1^2t_1^2)+\frac{y^4}{360N_1^4}(61+90t_1^2+45t_1^4)\right]$$

ЭҲМ дан фойдаланиб *x, y* асосида *B, L* ни ҳисоблаш учун қуйидаги формулалардан фойдаланиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} &B = B_x - \left[1 - \left(b_4 - 0.12z^2\right)\, z^2\right]\, z^2 b_2 \rho'';\\ &L = L_0 + l;;\\ &l = \left[1 - \left(b_3 - b_5 z^2\right)\, z^2\right]\, z^2 \rho''; \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(18.2.20)}$$

бунда:

$$B_x = \beta + \left\{\, 50221746 + \left[293622 + \left(2350 + 22\cos^2\beta\right)\cos^2\beta\right]\cos^2\beta \,\right\} 10^{-10} \sin\beta\cos\beta\rho''$$

$$\beta = (x/6367558{,}4969)\rho''$$

$$z = y/(N_x \cos B_x)$$

$$N_x = 6399698{,}902 - \left[21562{,}267 - \left(108{,}973 - 0{,}612\cos^2 B_x\right)\cos^2 B_x\right]\cos^2 B_x$$

$$b_2 = (0{,}5 + 0{,}003369\cos^2 B_x)\sin B_x \cos B_x$$

$$b_3 = 0{,}333333 - \left(0{,}166667 - 0{,}001123\cos^2 B_x\right)\cos^2 B_x$$

$$b_4 = 0{,}225 + (0{,}16161 + 0{,}00562\cos^2 B_x)\cos^2 B_x$$

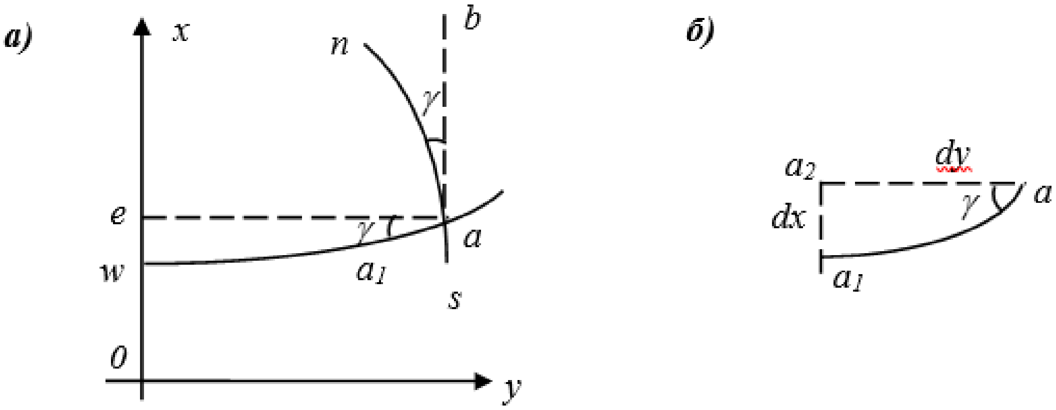
$$b_5 = 0{,}2 - (0{,}1667 - 0{,}0088\cos^2 B_x)\cos^2 B_x$$

B, L асосида тўғри бурчакли Гаусс-Крюгер координаталари *x,y* ни ҳисоблаш формулалари **(18.1.11)** ва *x,y* асосида B, Lларни ҳисоблаш формулалари **(18.2.20)** 1 класс триангуляция ва полигонометрияни ҳисоблашда ишлатилади. Бу формулалар тўғри бурчакли координаталарни 0,001 *м,* геодезик координаталарни 0,0001” аниқликда ҳисоблашни таъминлайди.

Геодезик ишлар амалиётида бу каби аниқликдаги ҳисоблаш кам талаб этилади. Шу сабабли юқори аниқлик талаб этилмайдиган ҳисоблаш ишларида **(18.1.11)** ва **(18.2.20)** формулаларни соддалаштириш мумкин.

§18.3 Текисликда меридианлар яқинлашишини ҳисоблаш

1. Геодезик координаталар функциясида меридианлар яқинлашиши



18.3.1-шакл

18.3.1-шаклда:

a-эллипсоиддаги *A* нуқтани текисликдаги тасвири,

ns-*A* нуқтадан ўтган меридиан тасвири,

aw-*A* нуқтадан ўтган параллел тасвири,

ab-абсцисса ўкига параллел тўғри чизиқ,

ae-ордината ўқига параллел тўғри чизиқ,

γ -текисликда меридианлар яқинлашиш бурчаги келтирилган.

Параллел тасвирда *a* нуқтага етарлича яқинликда a_1 нуқта оламиз. Ҳосил бўлган элементар aa_1a_2учбурчакдан ёзишимиз мумкин:

$$tg\gamma = \frac{dx}{dy} \qquad \textbf{(18.3.1)}$$

(18.3.1)формулани қуйидаги ўзгаришда ёзамиз,

$$tg\gamma = \frac{\frac{dx}{dl}}{\frac{dy}{dl}} \qquad \textbf{(18.3.2)}$$

Тўғри масала ечишда ишлатиладиган формулаларни дифференциаллаш орқали $\frac{dx}{dl}$ ва $\frac{dy}{dl}$ ларни топамиз:

$$x = X + \frac{l''^2}{2\rho''^2} N \cos B \sin B + ... \text{дан}$$

$$\frac{dx}{dl} = \frac{l''}{\rho''^2} N \cos B \sin B + ... \qquad \textbf{(18.3.3)}$$

$$y = \frac{l''}{\rho''} N \cos B + ... \text{дан}$$

$$\frac{dy}{dl} = \frac{1}{\rho''} N \cos B + ... \qquad \textbf{(18.3.4)}$$

(18.3.2), (18.3.3), (18.3.4)формулалардан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$tg\gamma = \frac{l''}{\rho''} \sin B + ... \qquad \textbf{(18.3.5)}$$

Бизга маълумки $\gamma = tg\gamma - \frac{1}{3} tg^3\gamma + \frac{1}{5} tg^5\gamma - .....$ (тескари тригонометрик қатор). Шу сабабли

$$\gamma'' = l'' \sin B + ... \qquad \textbf{(18.3.6)}$$

Бундан ташқари меридианлар яқинлашишини ҳисоблашнинг қатор формулалари мавжуд, улардан яна бирини келтирамиз. Агар тўғри бурчакли координаталардан фойдаланиб 0,001” аниқликда. 1 класс триангуляцияда γ ни ҳисоблаш талаб этилса қуйидаги формуладан фойдаланиш мумкин

$$\gamma = \left\{ 1 - \left[\left(0,33333 - 0,00225 \cos^4 B_x \right) - (0.2 - 0.067 \cos^2 B_x) z^2 \right] z^2 \right\} z \sin B_x \rho'' , \textbf{(18.3.7)}$$

бу формулада **(18.2.20)** формуладаги белгилаш ишлатилган.

2. Тўғри бурчакли координаталар функциясида меридианлар яқинлашиши **(18.3.6)**формуладаги $\sin B$ ни қуйидагича кўринишда ёзамиз

$$\sin B = \sin\left[B_1 - (B_1 - B) \right]$$

Бу ифодани Тейлор қаторига ёямиз,

$$\sin B = \sin B_1 - \frac{(B_1 - B)''}{\rho''}\cos B_1 - ...... \qquad \textbf{(18.3.8)}$$

(18.2.18)дан,

$$(B_1 - B)'' \approx \frac{y^2 t_1}{2M_1 N_1}\rho'' - ..... \qquad \textbf{(18.3.9)}$$

(18.3.9)ни инобатга олсак,**(18.3.8)**ни қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\sin B = \sin B_1 - \frac{y^2 t_1}{2M_1 N_1}\cos B_1 = \sin B_1\left[1 - \frac{y^2}{2M_1 N_1}\right] = \sin B_1\left[1 - \frac{y^2}{\dfrac{2N_1 a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B_1)^{3/2}}}\right] =$$

$$= \sin B_1\left[1 - \frac{y^2}{2N_1^2\dfrac{1-e^2}{1-e^2\sin^2 B_1}}\right] = \sin B_1\left[1 - \frac{y^2}{2N_1^2}\cdot\frac{1-e^2\sin^2 B_1}{1-e^2}\right] =$$

$$= \sin B_1\left[1 - \frac{y^2}{2N_1^2}\cdot\frac{1 - \dfrac{e'^2}{1+e'^2}\sin^2 B_1}{1 - \dfrac{e'^2}{1+e'^2}}\right] = \sin B_1\left[1 - \frac{y^2}{2N_1^2}\cdot\frac{1+e'^2 - e'^2(1-\cos^2 B_1)}{1+e'^2 - e'^2}\right] =$$

$$= \sin B_1\left[1 - \frac{y^2}{2N_1^2}(1 + e'^2\cos^2 B_1)\right],$$

$$\text{ёки} \sin B = \sin B_1\left[1 - \frac{y^2}{2N_1^2}(1+\eta_1^2)\right] \qquad \textbf{(18.3.10)}$$

Бизга маълумки,

$$l'' = \frac{y}{N_1\cos B_1}\rho'' - ... \qquad \textbf{(18.3.11)}$$

(18.3.6), (18.3.11), (18.3.10) формулалар асосида, топамиз:

$$\gamma'' = \frac{y}{N_1\cos B_1}\rho''\sin B_1\left[1 - \frac{y^2}{2N_1^2}(1+\eta_1^2)\right], \qquad \textbf{(18.3.12)}$$

ёки $\gamma'' = \frac{y}{N_1}\rho'' t_1 \left[1 - \frac{y^2}{2N_1^2}(1+\eta_1^2) \right]$ **(18.3.13)**

Бундан ташқари геодезик координаталар B ва $l=L\text{-}L_0$ берилган бўлса, γ ни ҳисоблашда қуйидаги формуладан фойдаланиш мумкин.

$$\gamma = \Big\{ \quad 1 + \Big[\Big(0{,}33333 + 0{,}00674\cos^2 B_1\Big) +$$

$$+ (0{,}2\cos^2 B - 0{,}0067)\ l^2\Big]\, l^2\cos^2 B_1 \quad \Big\}\ l\sin B_1\rho'' \qquad \textbf{(18.3.14)}$$

Ҳисоблаш 0,01" аниқликда бажариш талаб этилганда

$$\gamma = l\sin B + \frac{1}{3}\frac{l^3}{\rho''}\sin B\cos^2 B(1+3\eta^2) \qquad \textbf{(18.3.15)}$$

$$\eta^2 = e'^2\cos^2 B;\ e' = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}}$$

0,01"аниқлик талаб этилганда

$$\gamma = l\sin B + \frac{1}{3}\frac{l^3}{\rho''^2}\sin B\cos^2 B \qquad \textbf{(18.3.16)}$$

0,1' аниқлик талаб этилганда

$$\gamma = l\sin B \qquad \textbf{(18.3.17)}$$

формулалардан фойдаланилади.

§18.4 Тасвирлаш масштабини ҳисоблаш

1. Геодезик координаталар функциясида тасвирлаш масштаби

Бизга маълумки $m = \frac{dS}{ds}$,

$$ds = N\cos B\sqrt{\left(\frac{MdB}{N\cos B}\right)^2 + (dl)^2}$$

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\ ,$$

У ҳолда $m^2 = \left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(MdB)^2 + (N\cos B)^2 (dl)^2}$;

$$m^2 = \frac{(dy)^2\left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1\right]}{(dl)^2\left[\left(\frac{MdB}{dl}\right)^2 + (N\cos B)^2\right]};$$

$$m^2 = \left(\frac{dy}{dl}\right)^2 \cdot \frac{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{(N\cos)^2\left[1+\left(\frac{MdB}{N\cos Bdl}\right)^2\right]}; \qquad \textbf{(18.4.1)}$$

$\frac{dx}{dy} = tg\gamma$ бўлганлиги учун,

$$1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1 + tg^2\gamma = \sec^2\gamma$$

Шартга кўра кенглик доимий катталик бўлганлиги сабабли (кенглик узоқликлар фарқига боғлиқ эмас):

$$\frac{dB}{dl} = 0,$$

Буни инобатга олсак **(18.4.1)** қуйидаги кўринишни олади

$$m = \frac{dy}{dl}\frac{\sec\gamma}{N\cos B} \qquad \textbf{(18.4.2)}$$

$\sec\gamma$ ни Маклорен қаторига ёямиз:

($f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{III}(0) + ...$формула ёрдамида)

$$\sec\gamma = 1 + \frac{\gamma''^2}{2\rho''^2} \qquad \textbf{(18.4.3)}$$

Бизга маълумки $\gamma'' = l''\sin B + ...$ унда,

$$\sec\gamma = 1 + \frac{l''^2\sin^2 B}{2\rho''^2} + ... \qquad \textbf{(18.4.4)}$$

(18.1.10)дан фойдаланиб $\frac{dy}{dl}$ ни топамиз, унда

$$\frac{dy}{dl}=N\cos B\left[1+\frac{l''^2}{2\rho''^2}\cos^2 B\left(1-t^2+\eta^2\right)\right] \qquad \textbf{(18.4.5)}$$

(18.4.4) ва **(18.4.5)** ни **(18.4.2)** га қўйсак

$$m=\left[1+\frac{l''^2}{2\rho''^2}\cos^2 B(1-t^2+\eta^2)\right]\left(1+\frac{l''^2\sin^2 B}{2\rho''^2}\right)$$

Керакли бўлган аниқликни таъминлайдиган формулани топамиз:

$$m=1+\frac{l''^2}{2\rho''^2}\cos^2 B(1-t^2+\eta^2)+\frac{l''^2\sin^2 B}{2\rho''^2}=1+\frac{l''^2}{2\rho''^2}\cos^2 B-\frac{l''^2}{2\rho''^2}\sin^2 B+$$

$$+\frac{l''^2}{2\rho''^2}\cos^2 B\eta^2+\frac{l''^2}{2\rho''^2}\sin^2 B\ ,$$

Бундан $m=1+\frac{l''^2}{2\rho''^2}\cos^2 B(1+\eta^2)$ **(18.4.6)**

§18.5 Тўғри бурчакли координаталар функциясида тасвирлаш масштаби

(18.2.19)ни **(18.4.6)**га қўйсак

$$m=1+\frac{y^2}{2N_1^2}(1+\eta_1^2) \qquad \textbf{(18.5.1)}$$

[**(18.4.6)** формуладаги B ва η, B_1 ва η_1 билан алмаштирилган]

$\frac{1+\eta_1^2}{N_1^2}$ ўзгартирамиз,

$$\frac{1+\eta_1^2}{N_1^2}=\frac{1+e'^2\cos^2 B_1}{\left[\frac{a}{\left(1-e^2\sin^2 B_1\right)^{1/2}}\right]^2}=\frac{\left[1+\frac{e^2}{1+e^2}\left(1-\sin^2 B_1\right)\right]\left(1-e^2\sin^2 B_1\right)}{a^2}=$$

$$=\frac{\left(1-e^2\sin^2 B_1\right)\left(1-e^2\sin^2 B_1\right)}{a^2(1-e^2)}=\frac{\left(1-e^2\sin^2 B_1\right)^2}{a(1-e^2)}$$

.

Бизга маълумки

$$R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2 \sin^2 B)},$$

шу сабабли

$$\frac{1+\eta_1^2}{N_1^2} = \frac{1}{R_1^2}. \qquad \textbf{(18.5.2)}$$

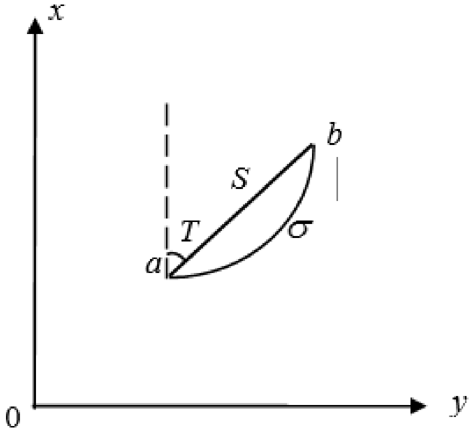
(18.5.2) ни инобатга олсак**(18.5.1)**қуйидаги кўринишга келади,

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R_1^2} + ... \qquad \textbf{(18.5.3)}$$

(18.5.3)нинг тўлиқроқ кўриниши

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R_1^2} + \frac{y^4}{24R_1^4} + ... \qquad \textbf{(18.5.4)}$$

§18.6 Масофани текисликга редукциялаш



18.6.1-шакл

18.6.1-шаклда:

S-*a* ва *b* нуқталар орасидаги тўғри чизиқ бўйича масофа

σ -геодезик чизиқ тасвири;

T-*ab* чизиқ дирекцион бурчаги;

y_1-*a* нуқта ординатаси;

y-*b* нуқта ординатаси;

R_m-*ab* чизиқни ўртача эгрилик радиуси келтирилган.

Бизга маълумки $m = \frac{dS}{ds}$, бундан

$$S = \int_0^S \frac{dS}{m} \quad \text{ёки} \quad S = \int_0^S \left(1 + \frac{y^2}{2R^2}\right)^{-1} dS \qquad \textbf{(18.6.1)}$$

Интеграл остидаги ифодани бином қаторига ёйиб,

($(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$ формула ёрдамида) биринчи ҳадини сақлаб, қуйидагини топамиз:

$$S = \int_0^S \left(1 - \frac{y^2}{2R^2}\right) dS \qquad \textbf{(18.6.2)}$$

b нуқта учун $y = y_1 + S \sin T$, у ҳолда **(18.6.2)**қуйидаги кўринишни олади:

$$S = \int_0^S \left[1 - \frac{(y_1 + S\sin T)}{2R^2}\right] dS \ \text{ёки} \ S = \int_0^S \left(1 - \frac{y_1^2 + 2y_1 S \sin T + S^2 \sin^2 T}{2R^2}\right) dS \qquad \textbf{(18.6.3)}$$

(18.6.3)ни интеграллаймиз

$$S = \left(S - \frac{y^2 S}{2R^2} - \frac{y_1 S^2 \sin T}{2R^2} - \frac{S^3 \sin^2 T}{6R^2} \Big|_0^S \right)$$

ва интеграллаш чегараларини ҳисобга олиб, *S* ни қавсдан ташқарига чиқарсак

$$s = S\left(1 - \frac{y_1^2}{2R^2} - \frac{y_1 S \sin T}{2R^2} - \frac{S^2 \sin^2 T}{6R^2}\right) = S\left(\frac{6R^2 - 3y_1^2 - 3y_1 S \sin T - S^2 \sin^2 T}{6R^2}\right) \textbf{(18.6.4)}$$

Бизга маълумки $y_1 = y_m - \frac{\Delta y}{2}$; $\Delta y = S\sin T$; $\Delta y = y_2 - y_1$. Буни ҳисобга олсак **(18.6.4)**қуйидаги кўринишни олади:

$$s = S\left[\frac{6R^2 - 3\left(y_m - \frac{\Delta y}{2}\right)^2 - 3\left(y_m - \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta y - \Delta y^2}{6R^2}\right] \text{ёки}$$

$$s = S\left(1 - \frac{y_m^2}{2R^2} - \frac{\Delta y^2}{24R^2}\right) \qquad \textbf{(18.6.5)}$$

(18.6.5) ни S га нисбатан ечсак:

$$S = s\left(1 - \frac{y_m^2}{2R^2} - \frac{\Delta y^2}{24R^2}\right)^{-1} \qquad \textbf{(18.6.6)}$$

(18.6.6) ни қаторга ёйиб биринчи ҳадини сақлаб қолсак:

$$S = s\left(1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2}\right) \qquad \textbf{(18.6.7)}$$

(18.6.7.)формулани келтириб чиқариш соддароқ бўлиши учун ҳадлар сони чегараланган эди. Бу формула 2 класс триангуляцияга ишлов беришда қўлланилади, 3-4 класс триангуляцияга ишлов беришда формуланинг икки ҳади билан чегараланиш мумкин.

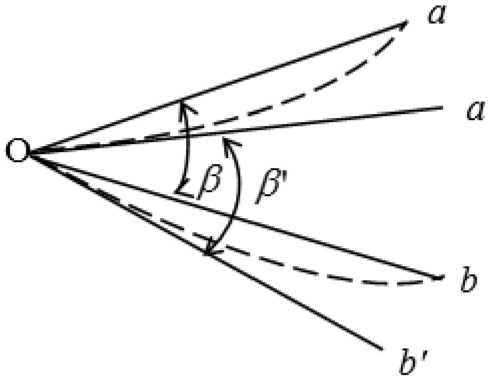
1 класс триангуляцияга ишлов беришда қуйидаги формуладан фойдаланилади:

$$S = s\left(1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} - \frac{y_m^4}{12R_m^4}\right) \qquad \textbf{(18.6.8.)}$$

(18.6.8.)нинг логарифмли кўриниши:

$$\lg S = \lg s + \frac{\mu}{2}\left(\frac{y_m}{R_m}\right)^2 + \frac{\mu}{24}\left(\frac{\Delta y}{R_m}\right)^2 - \frac{\mu}{12}\left(\frac{y_m}{R_m}\right)^4 \qquad \textbf{(18.6.9)}$$

§18.7 Йўналишни текисликга редукциялаш



18.7.1-шакл

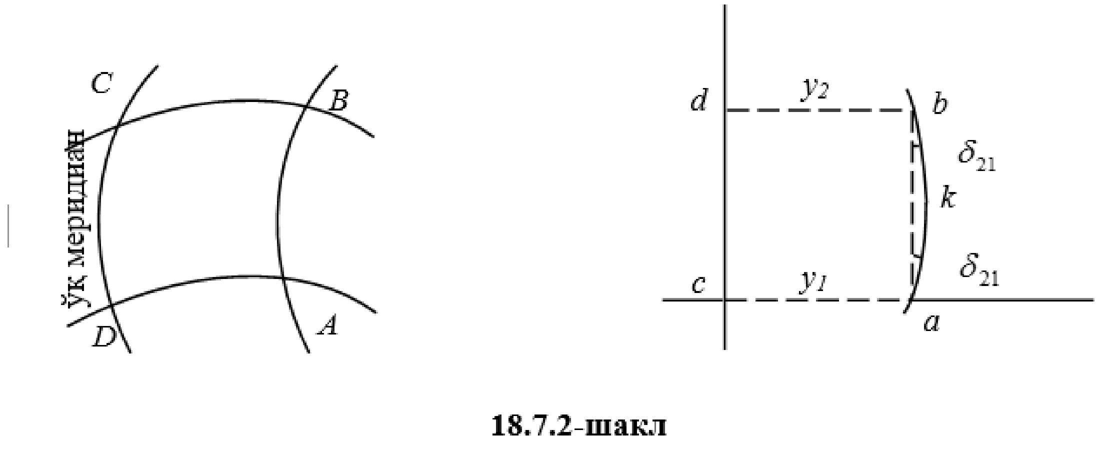
18.7.1-шаклда:

β'-геодезик чизиқлар тасвири орасидаги бурчак,

β-ватарлар орасидаги бурчак келтирилган

Гаусс-Крюгер проекцияси конформлиги сабабли бурчакларда ўзгариш бўлмайди, яъни $\angle\beta = \angle\beta'$

Лекин геодезик чизиқлар тасвири эгрилигича қолади, улардан тўғри чизиққа ўтиш учун йўналишига тузатма киритилади. Бу тузатмаларни йўналиш редукциясига тузатмалар ёки геодезик чизиқнинг текисликдаги тасвирини эгрилигига тузатма дейилади.



18.7.2-шакл

Эллипсоид сатҳида *AB* геодезик чизиқ олайлик, уни текисликдаги тасвири *akb* бўлсин 18.7.2-шакл.

Белгилаш киритамиз: $x_1\, y_1$ ва $x_2 y_2$ –a ва b нуқталар координатаси; δ_{12} ва δ_{21} йўналиш редукциясига тузатмалар.

Текисликдаги *akbdc*шаклга эллипсоидда *ABDC* шакл мос келади.

ADCB бурчакларининг йиғиндиси $360^0 + \xi$га, *akbdc*бурчакларини йиғиндиси $360^0 + \delta_{12} + \delta_{21}$га тенг. Проекция конформлигини инобатга олсак:

$$360^0 + \xi = 360^0 + \delta_{12} + \delta_{21},$$

$$\text{бундан } \xi = \delta_{12} + \delta_{21} \qquad \textbf{(18.7.1)}$$

келиб чиқади. Агарда $\delta_{12} \approx \delta_{21}$ десак, у ҳолда

$$\xi = 2\delta_{12}, \quad \text{бундан} \quad \delta_{12} = \frac{\xi}{2} \qquad \textbf{(18.7.2)}$$

$\xi'' = \dfrac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{2R^2}\rho''$эканлигини ҳисобга олсак

$$\delta''_{12} = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{4R^2}\rho'' \qquad \textbf{(18.7.3)}$$

$x_2 - x_1 = \Delta x$; $(y_1 + y_2)/2 = y_m$десак

$$\delta''^2 = \frac{\Delta x y_m}{2R^2}\rho'' \qquad \textbf{(18.7.4)}$$

Ишораларни инобатга олган ҳолда:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{12} &= +\frac{\Delta x y_m}{2R^2}\rho'' \\ \delta_{21} &= -\frac{\Delta x y_m}{2R^2}\rho'' \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(18.7.5)}$$

(18.7.5)формула 3 ва 4 класс триангуляцияда йўналиш редукцияларига тузатмаларини ҳисоблашда ишлатилади, 2 класс триангуляцияда қуйидаги формулалардан фойдаланилади:

$$\left.\begin{aligned}\delta''_{12} &= +\frac{1}{3} f(x_2 - x_1)(2y_1 + y_2) \\ \delta''_{21} &= -\frac{1}{3} f(x_2 - x_1)(2y_2 + y_1)\end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{(18.7.6)}$$

бунда $f = \frac{\rho''}{2R_m^2}$

Агарда тузатмаларни 0,01"аниқликда ҳисоблаш талаб этилса қуйидаги формуладан фойдаланиш мумкин

$$\delta''_{12} = -\delta''_{21} = -0{,}00253(x_2 - x_1)y_m$$

§ 19. ГАУСС-КРЮГЕР КООРДИНАТАЛАРИНИ БИР ЗОНАДАН БОШҚА ЗОНАГА ҚАЙТА ҲИСОБЛАШ

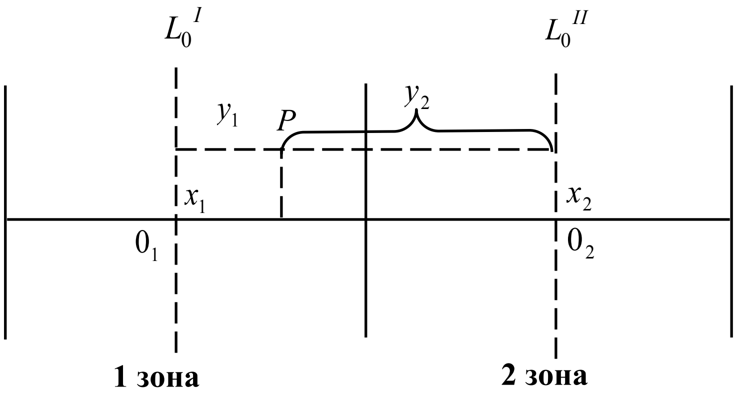
Бундай масала қуйидаги ҳолларда келиб чиқади:

1. Икки қўшни зоналар бирикиш жойида бўлган триангуляция тармоғини тенглаштиришда тармоқ координаталари бир зонага ўтказилади;

2. Икки қўшни зоналар бирикиши жойида йирик масштабда планга олиш бажарилаётганда олти градуслик зонадан уч градусли зонага ўтилади.

Координаталарни зонадан-зонага қайта ҳисоблашни турли усуллари мавжуд, улардан айримларини кўриб чиқамиз:

а) *P* пункт координаталари x_1, y_1ни бир зонадан иккинчи зонага ўтказиш талаб этилсин, 19.1-шакл.



19.1-шакл.

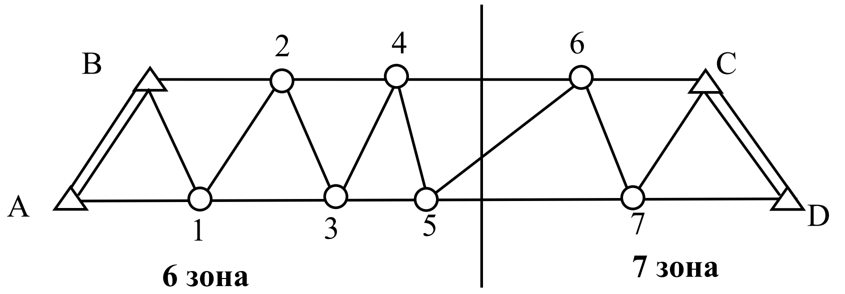
x_1, y_1 берилган координаталар асосида, P пунктни B_1, L_1 –геодезик координаталари ҳисобланади (тескари масала). Сўнгра P нуқтанинг иккинчи зона ўқ меридиани узоқлигига нисбатан фарқи аниқланилади:

$$l = L_1 - L_0^{II}$$

Бундан кейин Р пунктни иккинчи зонадаги тўғри бурчакли координаталари x_2, y_2 ҳисобланади (тўғри масала).

Бу усул координаталари қайта ҳисобланиши зарур бўлган пунктлар сони кам бўлганда ва катта аниқликда ҳисоблаш талаб этилганда қўлланилади.

б) Бир нечта пунктлар координаталарини бир зонадан бошқа зонага қайта ҳисоблаш талаб этилган бўлсин, 19.2-шакл



19.2-шакл.

Берилган триангуляция тўрини 6 зонада тенглаштирилади. Сўнгра 1-5 нуқталар координаталарини 6 зонада, 6 ва 7 нуқталар координаталари 7 зонада ҳисобланилади. Бундан ташқари зоналарга бўлувчи меридиани иккала томонидан *30'*кенгликда ёпилма (перекрўтия) берилади. Бу жараён қуйидаги тартибда амалга оширилади:

1. *C* ва *D* нуқталар координаталари 6 зонага қайта ҳисобланади.

2. Олтинчи зона тизимида барча пунктларни тақрибий координаталари аниқланилади. Йўналишларни редукциялари ҳисобланиб ўлчанган йўналишларга тузатмалар берилади.

3. Триангуляция тўри 6-зонада тенглаштирилади.

4. 1-5 пунктларни 6-зонада якуний координаталари ҳисобланилади.

5. Еттинчи зонада жойлашган триангуляция тўри пунктларининг эллипсоид сатҳи қайта ҳисобланади, яъни тенглаштирилган йўналишларга йўналиш редукцияси учун тузатмалар киритилади.

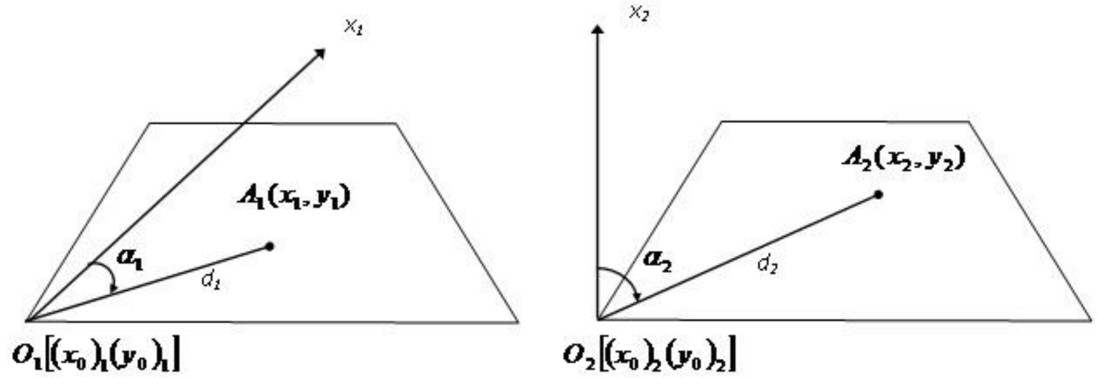
6. Еттинчи зонадаги C ва D пунктлар координаталаридан фойдаланиб 7 ва 6 пунктлар тақрибий координаталари аниқланилади ва йўналишлар учун редукциялар ҳисобланади. Топилган тузатмалар тенглаштирилган сферик йўналишларга киритилади ва натижада тенглаштирилган йўналишлар ҳосил қилинади.

7. Еттинчи зонадаги C ва D пунктлар координаталаридан фойдаланиб 6 ва 7 пунктларни еттинчи зонадаги натижавий координаталари аниқланилади.

8. Махсус жадваллардан фойдаланиб координаталарни бир зонадан бошқа зонага қайта ҳисоблаш.

А.М. Вировц, Б.Н. Рабинович ва С.П. Герасименко, А.В. Буткевичлар томонидан ишлаб чиқилган жадваллар энг кўп қўлланилади.

Вировц ва Рабинович жадвалларидан фойдаланиб, масалани ечиш қоидаларини кўриб чиқайлик.



19.3-шакл.

19.3-шакл бўйича қуйидаги белгилашларни киритамиз:

x_1y_1-A нуқтанинг биринчи зонада берилган координаталари.

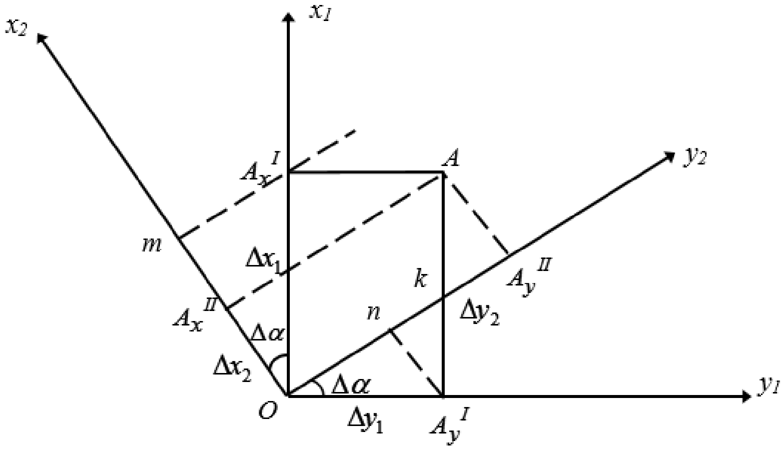
x_2y_2-A нуқтанинг иккинчи зонадаги қидирилаётган координаталари.

0_1x_1 ва 0_2x_2-биринчи ва иккинчи зоналарнинг абсцисса ўқларига параллел бўлган чизиқлари.

α_1 ва α_2 -*0A* чизиқнинг дирекцион бурчаклари.

Биринчи зонада жойлашган *A* нуқта координаталарини иккинчи зонага қайта ҳисоблаш талаб этилган бўлсин. Махсус жадваллардан фойдаланиб, трапеция рамка учларининг координаталари аниқланилади. Биринчи зонада 0_1 ва A_1нуқталар орасидаги координаталар орттирмалари Δx_1 ва Δy_1лар топилади.

OA чизиқларни дирекцион бурчаклари мос келмайди, шу сабабли улар орасидаги фарқни $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha,$ координаталар ўқларининг бурилиш бурчаги деб қараш мумкин. Шу нуқтаи назардан O_2 ва A_2нуқталарнинг иккинчи зонадаги координаталар орттирмалари Δx_2 ва Δy_2 топилади.



19.4-шакл

19.4-шаклдан қуйидагиларни ёзишимиз мумкин

$$\Delta x_2 = (\Delta x_1 \cos\Delta\alpha - \Delta y_1 \sin\Delta\alpha)\Delta m$$
$$\Delta y_2 = (\Delta y_1 \cos\Delta\alpha + \Delta x_1 \sin\Delta\alpha)\Delta m$$

$$x_2 = (x_0)_2 + \Delta x_2$$
$$y_2 = (y_0)_2 + \Delta y_2$$

бу ерда: $\Delta\alpha = (\gamma_0)_1 - (\gamma_0)_2 + \Delta\delta$

γ ва $\Delta\delta$ қийматлари Δx ва Δy аргументлар асосида жадвалдан олинади;

$$\Delta m = 1 + (m-1)_2 - (m-1)_1$$

$(m-1)_i$- жадвалдан олинади.

Гаусс-Крюгер тўғри бурчакли координаталарини бир зонадан бошқасига ўзгартириш аниқлик жиҳатдан юқори ва универсалроқ усулда қуйидагича амалга оширилади:

Ўқ меридиани $L_0{}^I$ бўлган зонада тўғри бурчакли координата x_I, y_I лар геодезик координаталар B_I, L_I лар асосида **(18.2.20)** формуладан фойдаланиб, топилади. Сўнгра ўқ меридиани $L_0{}^{II}$ бўлган зонадаги тўғри бурчакли координата x_{II}, y_{II} ларгеодезик координаталар B_I, L_Iлар асосида **(18.1.11)** формуладан фойдаланиб ҳисобланади. Ҳисоблаш ишлари тўғри бажарилганлигини текшириш учун ўтишни икки марта амалга ошириш тавсия этилади, яъни агар ўтиш ғарбий зонадан шарқий зонага бажарилган бўлса, сўнгра уни шарқий зонадан ғарбий зонага амалга ошириш керак.

§ 20. ГЕОГРАФИК ТЎРГА ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ КООРДИНАТАЛАР ТЎРИНИ ТУШИРИШ

Топографик хариталарни роми меридиан ва параллеллардан иборат, улар кесиши натижасида харитани географик тўри ҳосил бўлади. Географик тўрдан ташқари топографик хариталарда тўғри бурчакли координаталар тўри ҳам бўлади. Тўғри бурчакли координаталар тўри географик тўрга қуйидагича туширилади:

Планшетда тўғри бурчакли координаталар тўри чизилади. Сўнгра координаталар тўридан фойдаланиб географик тўр чизилади. Мисол учун, М-38-129-(224) номенклатурали 1:5000 масштабдаги топохарита планга тушириш (съёмка) трапецияси берилган бўлсин. Номенклатурадан фойдаланиб рамка учларини геодезик координаталари аниқланади. Ушбу трапеция уч градусли зонани №15 да жойлашган, уни ўқ меридиани $L_0{}^I = n \cdot 3^0 = 15 \cdot 3^0 = 45^0$. Узоқликлар фарқи ҳисобланади

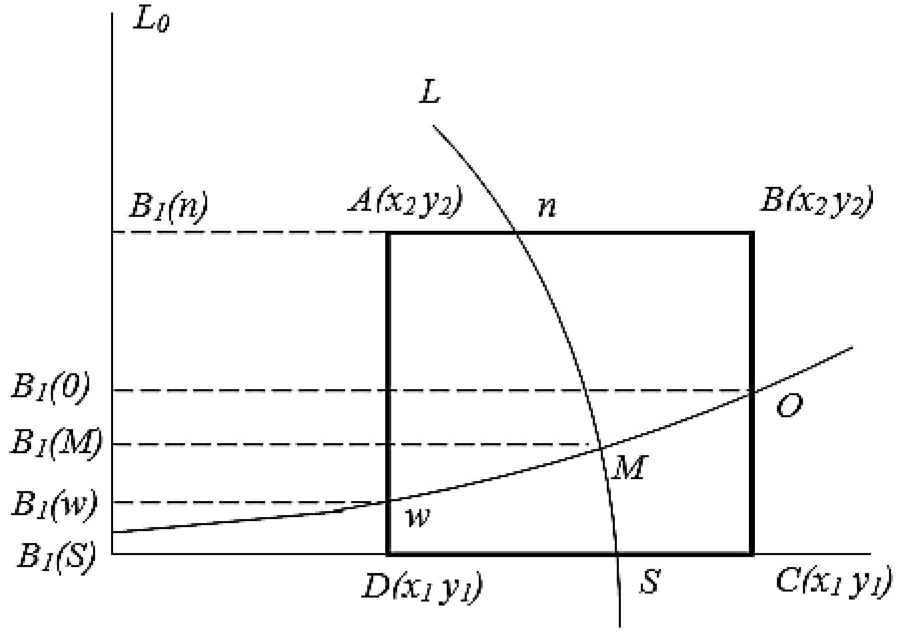
$$l_1 = L_1 - L_0{}^I$$

$$l_2 = L_2 - L_0{}^I$$

Геодезик координаталар *B* ва *l* дан фойдаланиб, жадвалдан трапеция ромининг бурчак учларининг тўғри бурчакли координаталари олинади, сўнгра бурчак учларининг координаталаридан фойдаланиб трапеция планшетга туширилади.

§20.1 Тўғри бурчакли координаталар тўрига географик тўрни тушириш

1:2000 ва ундан майда бўлган масштабдаги Топохариталарни географик тўри бор, чунки уларни роми меридиан ва параллеллар билан чегараланган. 1:1000 ва ундан йирик масштабдаги топографик планларда географик тўр бўлмайди, улар абсцисса ва ордината чизиқлари билан чегараланган бўлади. Демак 1:1000 ва ундан йирик масштабдаги топографик планлар шакли трапеция шаклида эмас тўғри тўрт-бурчак шаклида бўлади. Айрим масалаларни ечишда шундай планшетларга меридиан ва параллелларни тушириш керак бўлиб қолади.



20.1.1-шакл

Меридианни тушириш учун *n* ва *S* нуқталарни y_nва y_S ординаталарини топиш керак. (20.1.1.-шаклга қаранг).

Параллелни тушириш учун w ва O нуқталарнинг x_w ва x_0 абсциссаларини топиш керак.

Меридиан ва параллелни эгрилигини ҳисобга олиш учун M нуқта геодезик координаталари B ва L орқали нуқтанинг тўғри бурчакли координаталари $x_м$ ва $y_м$ ҳисобланади (тўғри масала). n нуқта ҳолатини аниқлаш учун AB чизиқ абсциссаси x_2ва берилган узоқлик L га эгамиз. Тўғри масаладан фойдаланиб қуйидагини ёзишимиз мумкин:

$$y = \frac{l''}{\rho''} N \cos B + ... \ , \qquad \textbf{(20.1.1)}$$

бу ерда: $l'' = L - L_0$; B - n нуқтанинг номаълум кенглиги. B кенглик B_1 кенглик билан алмаштирилади, уни x_2аргумент орқали жадвалдан олинади. +уйидагини ёзайлик

$$B = B_1 - (B_1 - B)$$

Бу ифодани Тейлор қаторига ёямиз:

$$\cos B = \cos[B_1 - (B_1 - B)] = \cos B_1 + \frac{(B_1 - B)''}{\rho''} \sin B_1 - ....$$

Бизга маълумки

$$\frac{(B_1 - B)''}{\rho''} = \frac{y^2 t}{2M_1 N_1} + ... \ ,$$

Шу сабабли

$$\cos B = \cos B_1 + \frac{y^2}{2M_1 N_1} \cdot \frac{\sin^2 B_1}{\cos B_1} \qquad \textbf{(20.1.2)}$$

Биринчи яқинлашишда $y = \frac{l''}{\rho''} N_1 \cos B_1 + ...$,

Буни инобатга олсак

$$\cos B = \cos B_1 + \frac{l''^2}{\rho''^2} \cdot \frac{N_1 \cos B_1}{2M_1} \sin^2 B_1 \qquad \textbf{(20.1.3)}$$

(20.1.3)ни **(20.1.1)**га қўйсак

$$y = \frac{l''}{\rho''} N_1 \cos B_1 \left[1 + \frac{l''^2}{6\rho''^2} \cos^2 B_1 (1 + 2t_1^2) \right] \qquad \mathbf{(20.1.4)}$$

x_wва x_0ларни топиш учун қуйидаги ифодага эгамиз

$$\frac{(B_1 - B)''}{\rho''} = \frac{y^2}{2M_1N_1} t_1,$$

бунда: B –wMO параллелни бизга маълум бўлган кенглиги y-w (ёки O) нуқта ординатаси.

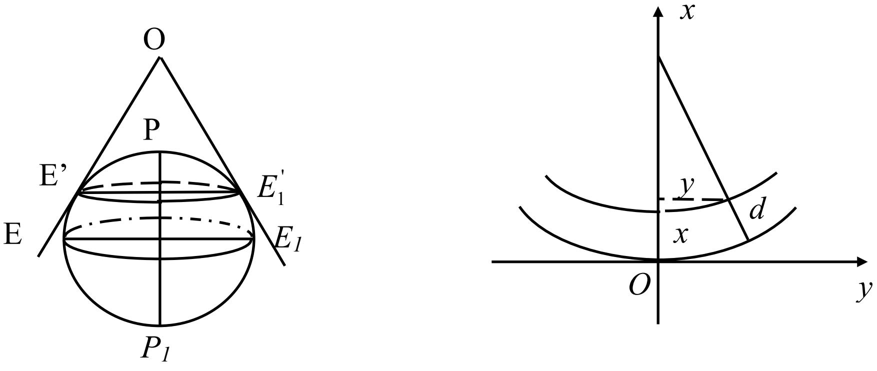
Бундан фойдаланиб, ордината ва ўқ меридианинг кесишиш нуқтаси кенглиги қуйидаги формула билан топилади

$$B_1 = B + \frac{y^2}{2M_1N_1} \rho'' t_1 + ...$$

(M_1, N_1 ва t_1 лар M, N, t билан алмаштирилади). Сўнгра B_1аргумент асосида жадвалдан абсцисса қиймати x_w(ёки x_0) олинади.

§ 21. АЙРИМ БОШҚА ПРОЕКЦИЯЛАР ВА КООРДИНАТА СИСТЕМАЛАРИ ТЎҒРИСИДА ТУШУНЧАЛАР

§21.1 Ламберт-Гаусс конформ конусавий проекцияси тўғрисида тушунча



21.1-шакл.

Бу проекция параллел йўналиши бўйича чўзиқ, тор майдонлар тасвирлаш учун қулай ҳисобланади. Абсцисса ўқи йўналиши ўқ меридиан йўналишига мос келади. Параллел тасвирига уринма ҳолда ордината ўқи олинади.

Уринма параллел билан ўқ меридиан кесиши нуқтаси координата боши қилиб олинади. Уринма параллел йўналишида тасвирлаш масштаби бирга тенг бўлади. Текисликда тўғри бурчакли координаталар қуйидаги формулалар билан ҳисобланади:

$$y = (N_0 ctgB_0 - d)\sin\gamma \ ;$$
$$x = d + ytg\frac{\gamma}{2}$$

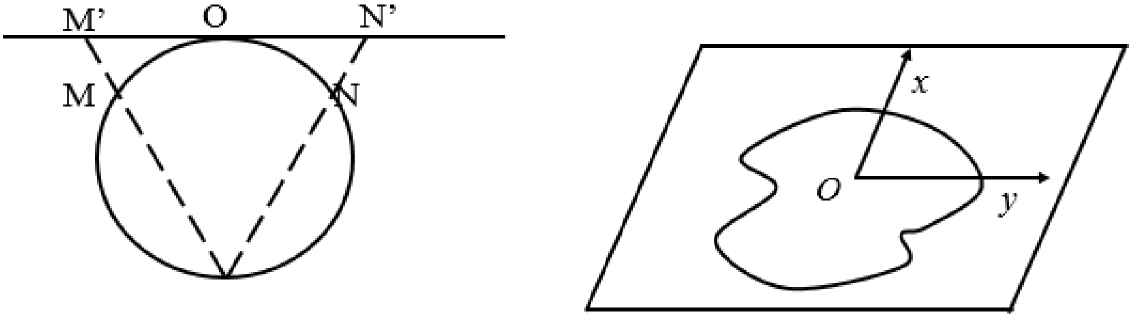
Меридианлар яқинлашиш бурчаги

$$\gamma = (L - L_0)\sin B_0 ,$$

бунда B_0-уринма параллел кенглиги;

L_0-ўқ меридиан узоқлиги.

§21.2 Руссел конформ стереографик проекцияси тўғрисида тушунча



21.2-шакл

Бу проекция айланага яқин шаклларни тасвирлаш учун қулай ҳисобланади.

Координата боши қилиб тасвирланиши керак бўлган майдон маркази олинади. Ўқ меридиани абсцисса ўқи, ўқ меридианига перпендикуляр бўлган чизиқ ордината ўқи қилиб олинади.

Ўқ меридиан нуқталарининг абсциссалари қуйидаги формула орқали ҳисобланади:

$$x_0 = 2R_0 tg\frac{S}{2R_0} ,$$

Бу ерда R_0-координата бошини ўртача эгрилик радиуси;

S-координата бошидан ўтган параллел билан берилган нуқтадан ўтган параллеллар орасидаги меридиан ёйини узунлиги.

Геодезик координаталар ёрдамида тўғри бурчакли координаталар қуйидаги формулалар орқали ҳисобланади:

$$x = a_1 \Delta B + a_2 \Delta B^2 + a_3 l^2 + a_4 \Delta B^3 + ... ,$$
$$y = b_1 l + b_2 \Delta B l + b_3 \Delta B^2 l + b_4 l^3 + ... ,$$

Бу ерда a_iва b_i қийматлари махсус жадваллардан олинади

ΔB ва l-ўқ меридиани билан координата боши орасидаги кенглик ва узоқликлар айирмаси.

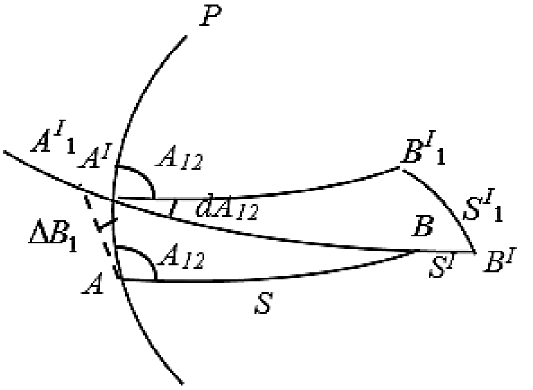
$$\Delta B = B - B_0$$
$$l = L - L_0$$

§ 22. БИРИНЧИ ТУРДАГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФОРМУЛАЛАР

Триангуляцияга ишлов беришда бошланғич маълумотлар нотўғри берилган деб фараз қилайлик, у ҳолда олинган натижалар нотўғри бўлади. Бу хатони икки хил усулда тузатиш мумкин:

Янги бошланғич маълумотлар ёрдамида триангуляцияга қайта ишлаб чиқиш ёки махсус тузатмалар ҳисоблаб топиш орқали.

Бошланғич маълумотлардаги хато сабабли пунктларни геодезик координаталари ва йўналиш азимутларида келиб чиқадиган хатони тузатиш учун киритиладиган тузатмаларни ҳисоблаш формулаларига **биринчи турдаги дифференциал тузатмалар дейилади.**



22.1-шакл

22.1-шаклда:

A (B,L) ва B (B_2,L_2)-координаталари маълум триангуляция пунктлари.

A_{12} ва A_{21}–*AB* чизиқни тўғри ва тескари азимутлари

S- *A* ва *B* пунктлар орасидаги масофа.

A пункт кенглиги *dB* га; *AB*-чизиқ узунлиги *ds* га; *AB* чизиқ азимути dA_{12} га ўзгарган деб фараз қилайлик. Унда иккинчи нуқта dB_2; dL_2; dA_{21} орттирмаларни олади. Бу орттирмаларни дифференциал тенгламалар кўринишида ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} dB_2 &= dB_2^{B_1} + dB_2^{5} + dB_2^{A_{12}}; \\ dL_2 &= dL_2^{B_1} + dL_2^{5} + dL_2^{A_{12}}; \\ dA_{21} &= dA_{21}^{B_1} + dA_{21}^{5} + dA_{21}^{A_{12}}; \end{aligned}\right| \qquad \textbf{(22.1)}$$

Тенгламалар ҳадларини юқорисида келтирилган индекслар нима таъсирида координаталар орттирмалари келиб чиқанлигини кўрсатади.

Бошланғич нуқта кенглиги B_1 ўзгариши натижасида координаталарда келиб чиқадиган ўзгаришлар $dB_2^{B_1}$; $dL_2^{B_1}$; $dA_{21}^{B_1}$

1. $dB_2^{B_1}$ **- кенгликнинг ўзгариши:**

BA чизиқни шундай бурамизки у *A'*нуқтадан ўтсин. *S* чизиқ узунлиги ўзгармаганлиги учун, чизиқ *AP* меридиандан чиқиб BA'_1 ҳолатни эгаллайди.

BA'_1 чизиқни ўзига тортиб A'_1нуқтани A' нуқта устига туширамиз, унда чизиқ *A’B’* ҳолатни эгаллайди. Сўнгра *A’B’*чизиқни *A’*нуқтада A_{12} азимути ҳолатини олгунча бурамиз. BB' ва $B'B'_1$ ёйлар кенгликларини ўзгариши ҳисобига кенглик ўзгариши $dB_2^{B_1}$ бўлади. Чизмадан ёзишимиз мумкин:

$$\frac{A'_1 A'}{AA'_1}=\sin(90^0-A_{12})$$

Шу сабабли

$$A'_1 A=BB'=S'=AA'_1\cdot\sin(90^0-A_{12})=M_1dB_1\cos A_{12}\qquad\textbf{(22.2)}$$

Бош геодезик масалани ечишдан бизга маълумки,

$$B_2-B_1=\frac{\cos A}{M}S$$

Ўз навбатида кенгликни *BB’* ёйига ўзгариши қуйидагига тенг бўлади

$$B_2-B_1=dB=-\frac{\cos A_{21}}{M_2}S'\qquad\textbf{(22.3)}$$

(22.2)ва**(22.3)**формулалар асосида *BB′* ёй учун ёзишимиз мумкин,

$$dB_{BB^I}=-\frac{\cos A_{21}}{M_2}M_1dB_1\cos A_{12}\qquad\textbf{(22.4)}$$

Худди шундай $B'B'_1$ ёй учун топамиз:

$$AA'=B'B'_1=S'_1=AA'_1\cos(90^0-A_{12})=M_1dB_1\sin A_{12}\qquad\textbf{(22.5)}$$

$B'B'_1$ ёйида кенгликнинг ўзгариши қуйидагича бўлади:

$$dB=B_2-B_1=-\frac{\cos(90^0-A_{21})}{M_2}S'_1\qquad\textbf{(22.6)}$$

(22.5)ва **(22.6)**асосида топамиз:

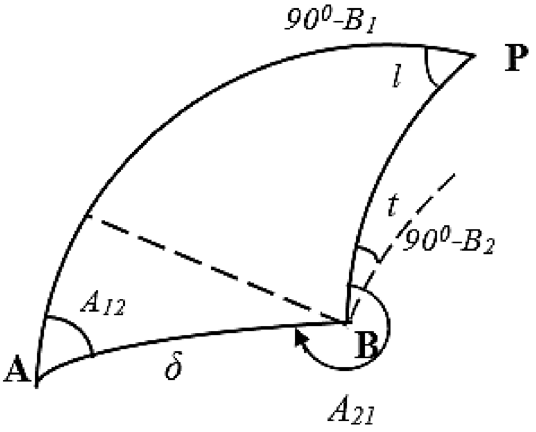
$$dB_{B'B'_1}=-\frac{\sin A_{21}}{M_2}M_1dB_1\sin A_{12}\qquad\textbf{(22.7)}$$

Бошланғич нуқтанинг кенглиги ўзгариши натижасида иккинчи нуқтанинг кенглигини тўлиқ ўзгариши қуйидагича бўлади:

$$dB_2^{B_1}=dB_{BB'}+d_{B'B'_1}=\left(-\frac{\cos A_{21}}{M_2}M_1dB_1\cos A_{12}\right)+\left(-\frac{\sin A_{21}}{M_2}M_1dB_1\sin A_{12}\right)=$$

$$=-\frac{M_1}{M_2}\left(\cos A_{12}\cos A_{21}+\sin A_{12}\sin A_{21}\right)dB_1\ ;$$

(22.8) формулани ўзгартирамиз, бунинг учун *APB* сфероидик қутуб учбурчагини оламиз (22.2-шакл).



22.2-шакл

Биламизки,

$$\cos l = -\cos A_{12}\cos(360^0 - A_{21}) + \sin A_{12}\sin(360^0 - A_{21})\cos\delta$$

90^0-B_1 ва *90^0-B_2* ларга нисбатан δ кичик катталик бўлганлиги учун $\cos\delta \approx 1$ деб қабул қилишимиз мумкин,

У ҳолда $\cos l = -\cos A_{12}\cos A_{21} - \sin A_{12}\sin A_{21}$

ёки

$$-\cos l = \cos A_{12}\cos A_{21} + \sin A_{12}\sin A_{21} \qquad \textbf{(22.9)}$$

Ўз навбатида (22.8) ва (22.9) формулалардан фойдаланиб, топамиз:

$$dB_2^{B_1} = \frac{M_1}{M_2}\cos l dB_1 \qquad \text{(A)}$$

Бу ерда: $l = L_2 - L_1$

2. $dL_2^{B_1}$ - узоқликни ўзгариши:

BB' ва *$B'B'_1$* ёйларни узоқликларини ўзгариши оқибатида $dL_2^{B_1}$ узоқлик ўзгариши ҳосил бўлади. Бизга маълумки

$$L_2 = L_1 = \frac{\sin A}{N\cos B}S,$$

Шу сабабли ёзишимиз мумкин:

$$dL_2^{B_1} = -\frac{\sin A_{21}}{N_2 \cos B_2} S_{BB'} + \frac{\sin(90^0 + A_{21})}{N_2 \cos B_2} S_{B'B'_1} =$$

$$= -\frac{\sin A_{21}}{N_2 \cos B_2} M_1 dB_1 \cos A_{12} + \frac{\cos A_{21}}{N_2 \cos B_2} M_1 dB_1 \sin A_{12}$$

ёки

$$dL_2^{B_1} = \frac{M_1 dB_1}{N_2 \cos B_2}(-\sin A_{21} \cos A_{12} + \sin A_{12} \cos A_{21}) \qquad \mathbf{(22.10)}$$

Чизмадан:

$$\cos A_{12} \sin(360^0 - A_{21}) = \cos(90^0 - B_2)\sin l - \cos\delta \sin A_{12} \cos(360^0 - A_{21})$$

ёки $$-\cos A_{12} \sin A_{21} = \sin B_2 \sin l - \cos\delta \sin A_{12} \cos A_{21}$$

Ўз навбатида $(\cos\delta \approx 1)$

$$\sin B_2 \sin l = -\cos A_{12} \sin A_{21} + \sin A_{12} \cos A_{21},$$

шу сабабли (22.10) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$dL_2^{B_1} = \frac{M_1 dB_1}{N_2 \cos B_2} \sin B_2 \sin l \text{ ёки } dL_2^{B_1} = \frac{M_1}{N_2} tgB_2 \sin l dB_1 \qquad \text{(Б)}$$

3. $dA_{21}^{B_1}$ – тескари азимутнинг ўзгариши. Сфероидик қутб учбурчагидан ёзамиз:

$$\angle PBC = 90^0 - t; \quad A_{21} = A_{12} + 180^0 + t; \quad dA_{21} = dt$$

BCP учбурчагидан ёзамиз:

$$\cos(90^0 - B_2) = ctgl ctg(90^0 - t) \quad \text{ёки} \quad tgt = tgl \sin B_2$$

Бундан кўринадики азимут ўзгариши *B* нуқта кенглиги ва узоқлигининг ўзгариш функцияси экан. Охирги тенгликни дифференциаллаймиз:

$$\frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{dl}{\cos^2 l} \sin B_2 + tgl \cos B_2 dB_2$$

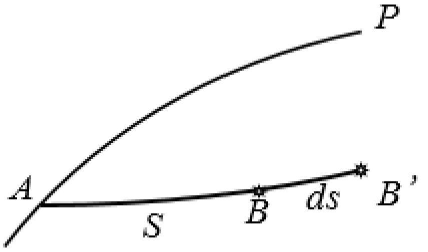
Фараз қилайлик $\cos^2 t \approx 1$; $\cos^2 l \approx 1$; $dl = dL_2^{B_1}$; $dB_2 = dB_2^{B_1}$

(А) ва (Б)ни ҳисобга олсак, охирги тенглик қуйидаги кўринишни олади

$$dA_{21}^{B_1} = \sin B_2 \frac{M_1}{N_2} tgB_2 \sin l dB_1 + tgl \cos B_2 \frac{M_1}{M_2} \cos l dB_1 \qquad \text{(В)}$$

S масофа узунлигининг ўзгариши натижасида dB_2^S ; dL_2^S ; dA_{21}^S координаталар ўзгариши

Фараз қилайлик S масофа $dS = BB'$га узайди, BB'йўналиш азимути $A_{BB'} = A_{21} - 180^0$ бўлади.



Олдинги келтирилганформулалар асосида қуйидаги формулаларга эга бўламиз:

кенглик учун $$dB_2^S = -\frac{\cos A_{21}}{M_2} ds \qquad (\Gamma)$$

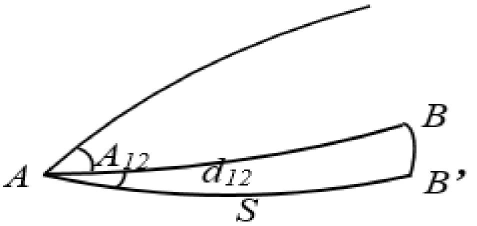
Узоқлик учун $$dL_2^S = -\frac{\sin A_{21}}{N_2 \cos B_2} ds \qquad (Д)$$

Азимут учун $$dA_{21}^S = -\frac{\sin A_{21} tgB_2}{N_2} ds \qquad (Е)$$

Азимут ўзгариши натижасида $dB_2^{A_{12}}$; $dL_2^{A_{12}}$; $dA_{21}^{A_{12}}$ координаталар ўзгариши

Бошланғич азимутни dA_{12} га ўзгаришида S масофага бурилади, яъни унинг охирги нуқтаси B ҳолатдан B' ҳолатагига ўтади.

BB' узунлигини топайлик. ABB' сферик учбурчакдан ёзишимиз мумкин:



$$\frac{\sin\frac{BB'}{R}}{\sin dA_{12}} = \frac{\sin\frac{S}{R}}{\sin\frac{\pi}{2}},$$

$\frac{BB'}{R}$ ва dA_{12} бурчаклар кичик бўлганлари учун

$$BB' = R\sin\frac{S}{R}dA_{12}$$

деб олишимиз мумкин.

Бош геодезик масалани ечиш формуласидан фойдаланиб, бошланғич азимут ўзгариши натижасида координаталарда бўладиган ўзгаришларни топамиз:

$$dB_2^{A_{12}} = -\frac{\cos A_{BB'}}{M_2}BB'; \quad \text{лекин} \quad A_{BB'} = A_{21} + 90^0,$$

шу сабали

$$dB_2^{A_{12}} = \frac{\sin A_{21}}{M_2}R\sin\frac{S}{R}dA_{12} \qquad \text{(Ж)}$$

Шу тариқа узоқликда бўладиган ўзгаришни топамиз

$$dL_2^{A_{12}} = \frac{\cos A_{21}}{N_2\cos B_2}R\sin\frac{S}{R}dA_{12} \qquad \text{(З)}$$

Тўғри азимутнинг ўзгариши натижасида тескари азимутга тузатма $dA_{21}^{A_{12}}$ икки қисмдан иборат:

1. Меридианлар яқинлашиши бурчагини ўзгариши ҳисобига тузатма;
2. Чизиқ узунлиги функцияси ва геодезик чизиқ азимути ўзгариши ҳисобига тузатма.

Тузатма биринчи қисми қуйидагича бўлади:

$$dA_{21}^{A_{12}} = dL_2^{A_{12}}\sin B_2$$

ёки (З) формулани ҳисобга олсак

$$dA_{21}^{A_{12}} = \frac{\cos A_{21}}{N_2}tgB_2R\sin\frac{S}{R}dA_{12} \qquad \textbf{(22.11)}$$

Тузатмани иккинчи қисми:

$$\frac{dm}{ds}dA_{12}=\cos\frac{s}{R}dA_{12} \qquad \textbf{(22.12)}$$

Бу ерда $$m=R\sin\frac{s}{R}$$

(22.11)ва **(22.12)** формулалар асосида тескари азимутга тўлиқ тузатма қуйидагига тенг.

$$dA_{21}^{A_{12}}=\cos\frac{s}{R}dA_{12}-\frac{\cos A_{21}}{N_2}tgB_2R\sin\frac{s}{R}dA_{12} \qquad \text{(И)}$$

(А), (Б), (В), (Г), (Д), (Е), (Ж), (З), (И) формулаларни қўшиш натижасида биринчи турдаги дифференциал формулалар ҳосил бўлади, шундай қилиб:

$$dB_2=\frac{M_1}{M_2}\cos l dB_1-\frac{\cos A_{21}}{M_2}ds+\frac{\sin A_{21}}{M_2}R\sin\frac{s}{R}d_{12} \qquad \textbf{(22.13)}$$

$$dL_2=\frac{M_1}{M_2}tgB_2\sin l dB_1-\frac{\sin A_{21}}{N_2\cos B_2}dS+\frac{\cos A_{21}}{N_2\cos B_2}R\sin\frac{c}{R}dA_{12}+dL_1 \qquad \textbf{(22.14)}$$

$$\begin{aligned}dA_{21}&=\frac{\sin l}{\cos B_2}\left(\frac{M_1}{N_2}\sin^2 B_2+\frac{M_1}{M_2}\cos^2 B_2\right)dB_1-\frac{\sin A_{21}tgB_2}{N_2}ds+\\&+\cos\frac{s}{R}dA_{12}=R\sin\frac{s}{R}\cos A_{21}\frac{tgB_2}{N_2}dA_{12}\end{aligned} \qquad \textbf{(22.15)}$$

§ 23. ИККИНЧИ ТУРДАГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФОРМУЛАЛАР

Ер эллипсоиди параметрлари (ўлчамлари, катталиклари) ўзгариши триангуляция пунктларини координаталарини қайта ҳисоблашни келтириб чиқаради. Бу масалани одатда, олдинги эллипсоид сатҳида ҳисобланган пункт координаталарига махсус тузатмалар киритиш йўли билан ечилади. Ер эллипсоиди параметрлари ўзгариши оқибатида геодезик координаталар, йўналиш азимутларига киритиладиган тузатмаларни ҳисоблаш формулаларнинг иккинчи турдаги дифференциал формулалари деб номланади. Бу формулаларни келтириб чиқариш учун бош геодезик масалани ечишда қўлланиладиган формулалардан фойдаланилади.

Бизга маълумки кенгликлар фарқини топиш учун

$$b''=S\cos A_m(1)_m \quad \text{ёки} \quad b''=\frac{S\cos A_m(1-e^2\sin^2 B_m)^{3/2}}{a(1-e^2)}\rho'' \qquad \mathbf{(23.1)}$$

формуладан фойдаланилади.

Бу ифодани *a* ва *e*^{2} бўйича дифференциаллаймиз, дифференциаллашдан олдин уни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$b''=S\cos A_m\rho''\left[\frac{(1-e^2\sin^2 B_m)^{3/2}}{a(1-e^2)}\right]^{*}$$

$$db''=S\cos A_m\rho''\left\{-\frac{1}{a^2}\frac{(1-e^2\sin^2 B_m)^{3/2}}{(1-e^2)}da+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a}\left[\frac{\frac{3}{2}(1-e^2\sin^2 B_m)^{\frac{1}{2}}(-\sin^2 B_m)(1-e^2)-(1-e^2\sin^2 B_m)^{3/2}(-1)}{(1-e^2)}de^2\right]\right\}$$

ёки

$$db''=\frac{S\cos A_m(1-e^2\sin^2 B_m)^{3/2}}{a(1-e^2)}\rho''\left\{-\frac{da}{a}+\left[-\frac{3}{2}\sin^2 B_m\frac{de^2}{(1-e^2\sin^2 B_m)}+\frac{de^2}{(1-e^2)}\right]\right\}$$

Бизга маълумки $e^2\approx 2\alpha$; $de^2=2d\alpha$ **(23.1)** формулани ҳисобга олиб топамиз:

$$db''=b''\left\{-\frac{da}{a}+\left[-\frac{3}{2}\sin^2 B_m\frac{2d\alpha}{(1-e^2\sin^2 B_m)}+\frac{2d\alpha}{(1-e^2)}\right]\right\}$$

ёки $$db''=-b''\left\{\frac{da}{a}+\left[\frac{2}{1-e^2}-\frac{3\sin^2 B_m}{(1-e^2\sin^2 B_m)}\right]d\alpha\right\};$$

$(1-e^2)$ ва $(1-e^2\sin^2 B_m)$ларни ташлаб юборсак,

$$db''=-b''\left\{\frac{da}{a}-(2-3\sin^2 B_m)d\alpha\right\} \qquad \mathbf{(23.2)}$$

*Изоҳ: $y=\frac{1}{a}$; биринчи ҳосила $y'=-\frac{1}{a^2}$; e^2 -биринчи даражали ўзгарувчи деб қабул қилинади.

Узоқликлар фарқини топиш учун

$$l''=S\sin A_m\sec B_m(2)_m \quad \text{ёки} \quad l''=\frac{S\sin A_m(1-e^2\sin^2 B_m)^{\frac{1}{2}}}{a\cos B_m}\rho'' \qquad \mathbf{(23.3)}$$

формулалардан фойдаланиб, (23.3) формулани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$l''=\frac{S\sin A_m}{\cos B_m}\rho''\left[\frac{(1-e^2\sin^2 A_m)^{\frac{1}{2}}}{a}\right]$$

ва уни a ва e^2бўйича дифференциаллаймиз

$$dl''=\frac{S\sin A_m}{\cos B_m}\rho''\left\{-\frac{1}{a^2}(1-e^2\sin^2 B_m)^{\frac{1}{2}}da+\frac{1}{a}\left[\frac{1}{2}(1-e^2\sin^2 B_m)^{-\frac{1}{2}}(-\sin^2 B_m)de^2\right]\right\}$$

ёки $$dl''=\frac{S\sin A_m(1-e^2\sin^2 B_m)^{\frac{1}{2}}}{a\cos B_m}\rho''\left\{-\frac{da}{a}-\frac{\sin^2 B_m}{2(1-e^2\sin^2 B_m)}de^2\right\}.$$

Махраждаги $(1-e^2\sin^2 B_m)$ни ташлаб юбориб, $de^2=2d\alpha$ эканлигини инобатга олиб, (23.3) формулани ҳисобга олиб топамиз:

$$dl''=l''\left\{-\frac{da}{a}-\frac{\sin^2 B_m}{2}2d\alpha\right\}\text{ ёки }dl''=-l''\left\{\frac{da}{a}+\sin^2 B_m d\alpha\right\}\qquad\textbf{(23.4)}$$

Азимутлар фарқини топиш учун

$$t''=S\sin A_m tgB_m(2)_m\quad\text{ёки}\quad t''=l''\sin B_m\ ,$$

формулалардан фойдаланамиз. Охирги тенгликни дифференциаллаб қуйидагини топамиз:

$$dt''=dl''\sin B_m$$

ёки**(23.4)**ни ҳисобга олсак,

$$dt''=-l''\left\{\frac{da}{a}+\sin^2 B_m d\alpha\right\}\sin B_m$$

$$dt''=dA''\text{ шу сабабли }dA''=-l''\left\{\frac{da}{a}+\sin^2 B_m d\alpha\right\}\sin B_m\qquad\textbf{(23.5)}$$

II- ҚИСМ СФЕРОИДИК ГЕОДЕЗИЯНИНГ АЙРИМ АМАЛИЙ МАСАЛАЛАРИ

§ 24. МЕРИДИАН ВА ПАРАЛЛЕЛ ЁЙ УЗУНЛИКЛАРИНИ ҲИСОБЛАШ

B_1 ва B_2 кенгликларга эга бўлган нуқталар орасидаги S_M меридиан ёй узунлиги қуйидаги эллиптик интегрални ечиш орқали топилади

$$S_M = \int_{B_1}^{B_2} MdB \qquad \textbf{(24.1)}$$

(24.1) интегрални даражали қаторларга ёйиб интеграллаш мумкин. Қуйида **(24.1)** интегрални Симпсон формуласидан фойдаланиб ҳисоблашни келтирамиз:

$$S_M = \int_{B_1}^{B_2} MdB = \frac{(B_2 - B_1)''}{6\rho''}(M_1 + 4M_{ур} + M_2), \qquad \textbf{(24.2)}$$

бунда:

$$M_i = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B_i)^{3/2}} = a(1-e^2)\frac{1+0.25e^2\sin^2 B_i}{1-1.25e^2\sin^2 B_i} \qquad \textbf{(24.3)}$$

B_1, B_2 - меридиан ёйининг бошланғич ва охирги нуқталари кенгликлари; B_1, B_2 ва $B_{ўр} = \frac{B_1 + B_2}{2}$ кенгликлардаги нуқталарнинг меридиан эгрилик радиуслари $M_1, M_2, M_{ўр}$; $\frac{1}{6\rho''} = 8080228 \times 10^{-13}$.

Ҳисоблаш натижасини текшириш учун $S_м$ - меридиан ёй узунлигини B_1, $B_{ўр}$ ва $B_{ўр}$, B_2 нуқталар орасидаги x_1 ва x_2 ёй узунликлари йиғиндиси кўринишида ҳисоблаймиз (24.1 шакл). (24.2) формулага асосан

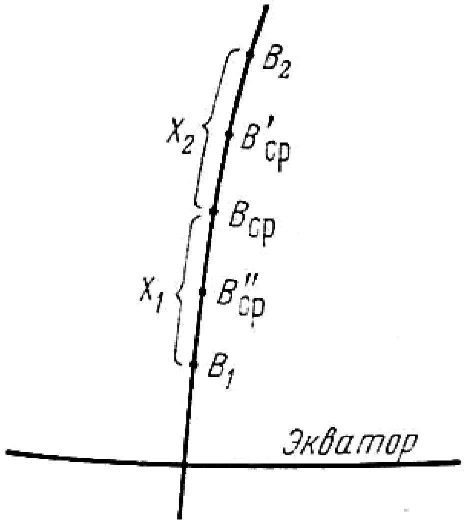
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(B_{ўр} - B_1)''}{6\rho''}(M_{ўр} + 4M_{ўр} + M_1), \\ x_2 &= \frac{(B_2 - B_{ўр})''}{6\rho''}(M_2 + 4M'_{ўр} + M_{ўр}), \end{aligned} \qquad \textbf{(24.4)}$$

$$S_M = x_1 + x_2 ,$$

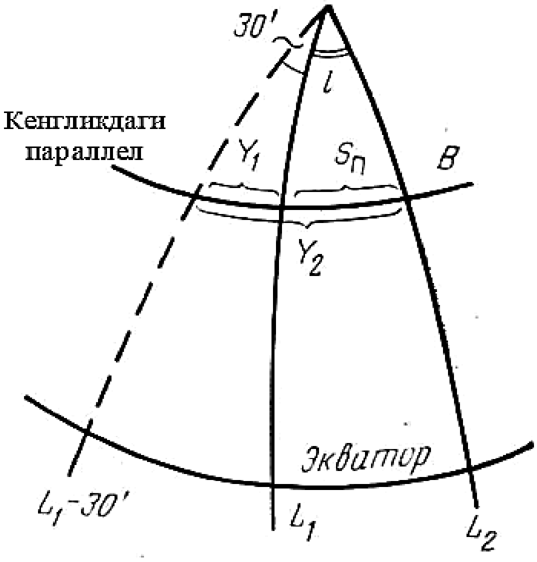
бунда: $M'_{ўр}$ва $M''_{ўр}$ - $M'_{ўр} = \frac{B_2 + B_{ўр}}{2}$ $M''_{ўр} = \frac{B_{ўр} + B_1}{2}$ ва кенгликлардаги нуқталарнинг меридиан эгрилик радиуслари. Улар (24.3) формула орқали ҳисобланади.

(24.2) формула 500 км гача бўлган ёй узунлигини 1-2 см аниқликда ҳисобланишни таъминлайди. Агар ёй узунлиги 500 км. дан катта бўлса, у ҳолда ёйни 500 км. дан катта бўлмаган бўлакларга бўлиб ҳисобланади.

1-Мисол. B_2=49°29′58,938″ ва B_1=45°30′17,221″ кенгликлардаги нуқталар орасидаги меридиан ёй узунлигини **(24.2)** формуладан фойдаланиб ҳисобланг. Олинган натижани **(24.4)** формула билан текширинг.



24.1-шакл.



24.2-шакл.

Меридиан ёй узунлигини ҳисоблаш схемаси

№	Формулалар	Ҳисоблаш натижалари, м	Изоҳ
1	2	3	4
1	a	6378245	(1)-(6) катталиклар Крассовский эллипсоиди учун доимий
2	e^2	0,00669342	
3	$a(1-e^2)$	6335552,727	
4	$1/6\rho''$	$8080228 * 10^{-13}$	
5	$0,25e^2$	0,00167336	
6	$1,25e^2$	0,00836678	
7	B_2	49°29’58,938”	(7),(8) вариант бўйича олинади
8	B_1	45°30’17,221”	
9	$B_{ўр}$	47°30’08,080”	
10	$1+0,25e^2\sin^2B_1$	1,00085142	
11	$1+0,25e^2\sin^2B_2$	1,00096756	
12	$1+0,25e^2\sin^2B_{ўр}$	1,00090966	
13	$1-1,25e^2\sin^2B_1$	0,99574290	

1	2	3	4
14	$1-1,25e^2sin^2B_2$	0,99516223	
15	$1-1,25e^2sin^2B_{ўр}$	0,99545168	
16	M_1	6368056,324	
17	M_2	6372511,409	
18	$M_{ўр}$	6370290,021	
19	$4M_{ўр}$	25481160,084	
20	$(B_2 - B_1)''$	14381,717	
21	$(B_2 - B_1)''/6\rho''$	0,011620755	
22	$S_М$	444165,343м	(21)•(16+17+19)

текшириш: x_1 ни ҳисоблаш			
23	$B_{ўр}$	47°30’08,079”	
24	B_1	45°30’17,221”	
25	$B''_{ўр}$	46°30’12,650”	
26	$1+0,25e^2sin^2B''_{ўр}$	1,00088057	
27	$1-1,25e^2sin^2B''_{ўр}$	0,99559716	
28	$M''_{ўр}$	6369174,032	
29	$M_{ўр}+4M''_{ўр}+M_1$	38215042,473	(18)+4 • (28)+(16)
30	$(B_{ўр} - B_1)$ °	1°59’50,858”	
31	$(B_{ўр} - B_1)''$	7190,858”	
32	$(B_{ўр} - B_1)''/6\rho''$	0,005810378	
33	X_1	222043,812м	
текшириш: x_2 ни ҳисоблаш			
34	B_2	49°29’58,938”	
35	$B_{ўр}$	47°30’08,079”	
36	$B'_{ўр}$	46°30’03,508”	
37	$1+0,25e^2sin^2B'_{ўр}$	1,00093867	
38	$1-1,25e^2sin^2B'_{ўр}$	0,99530664	
39	$M'_{ўр}$	6371402,932	
40	$M_2+4M'_{ўр}+M_{ўр}$	38228413,158	(17)+4 • (39)+(18)
41	$(B_2 - B_{ўр})$ ° ‘ “	1°59’50,859”	
42	$(B_2 - B_{ўр})''$	7190,859”	
43	$(B_2 - B_{ўр})''/6\rho''$	0,005810378	
44	X_2	222121,532	
45	$X_2+X_1қS_м$	444165,344	(22) қ (45)

Параллел ёй узунлигини ҳисоблаш

S_n - параллел ёй узунлиги $r = N cosB$ радиусга тенг бўлган, L_2-L_1=l марказий бурчакга таянган айлана ёй узунлигини ҳисоблаш орқали топилади

$$S_n=\frac{(L_2-L_1)''}{\rho''}N\cos B=\frac{l''}{\rho''}N\cos B, \tag{24.5}$$

$$N=a\frac{1-0{,}25e^2\sin^2 B}{1-0{,}75e^2\sin^2 B} \tag{24.6}$$

Бунда: L_1 ва L_2 параллел ёйи таянган бошланғич ва охирги нуқта узоқликлари; N-биринчи вертикал эгрилик радиуси.

Параллел ёй узунлигини тўғри ҳисобланганлигини текшириш учун l+1800″ ва 1800″ узоқликлар фарқлари орасидаги Y_2 ва Y_1 параллел ёй узунликлари ҳисобланади (24.2-шакл).

$$У_2=\frac{(l+1800)''}{\rho''}N\cos B;\quad У_1=\frac{1800''}{\rho''}N\cos B \tag{24.7}$$

У ҳолда S_n=$У_2$-$У_1$ бўлади.

2-<u>Мисол.</u> B=54°32′19,354″ кенгликдаги узоқликлар фарқи l= L_2 - L_1 = 0°45′46,882″ бўлган параллел ёй узунлигини ҳисобланг.

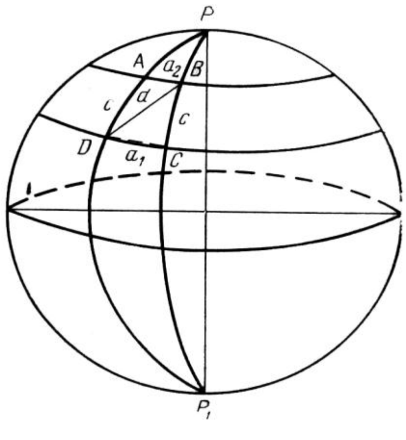
Параллел ёй узунлигини ҳисоблаш схемаси

№	**Формулалар**	**Ҳисоблаш натижалари, м**	**Изоҳ**
1	2	3	4
1	a	6378245	(2)ва(3) вариант бўйича олинади
2	l	0°45′46,882”	
3	B	54°32′19,354”	
4	$0{,}25e^2$	0,00167336	(4)-(5) катталиклар Крассовский эллипсоиди учун доимий
5	$0{,}75e^2$	0,00502006	
6	$1-0{,}25e^2\sin^2B$	0,99888986	
7	$1-0{,}75e^2\sin^2B$	0,99666958	
8	N	6392453.854м	
9	cosB	0,58015280	
10	NcosB	3708600,002	
11	l''	2746,882	
12	$1/\rho''$	$4848137•10^{-12}$	
13	S_n	49388,390м	(10)•(11)•(12)

Текшириш			
14	$l''+1800''$	4546,882”	
15	$(l''+1800'')/\rho''$	0,0220439060	(14)•(12)
16	$1800''/\rho''$	0,0087266466	
17	Y_2	81752,030м	(10)•(15)
18	Y_1	32363,641м	(10)•(16)
19	S_n	49388,389м	(17)-(18)к(13)

Изоҳ: Параллел ёй узунлиги (24.15) формула билан ҳисоблаганда, $l<1°$ ҳолда ҳисоблаш аниқлиги ±0,001м га тенг, $l>1°$ бўлган ҳолларда эса бундай аниқликга эришиш учун тригонометрик функция қийматлари вергулдан сўнг тўққизинчи ва ундан катта бўлган хоналар аниқлигида топилиши лозим.

§ 25. Харита трапецияси томонларининг узунликларини ва юзасини ҳисоблаш



25.1-шакл.

Харита трапецияси эллипсоид сатҳида L_1, L_2 узоқликлардан ўтган меридианлар ва B_1, B_2 кенгликлардан ўтган параллеллар билан чегараланган трапециядир. Демак, харита трапецияси жануб ва шимолдан B_1 ва B_2 кенгликлардан ўтган параллел ёйлари a_1 ва a_2 билан, ғарб ва шарқдан L_1 ва L_2 узоқликлар ўтган меридиан ёйлари c билан чегараланган трапециядан иборат. d-трапеция диагонали бўлсин, a_1 ва a_2 ни ҳисоблашда **(24.5)** формуладан c ни ҳисоблашда эса **(24.1)** формуладан фойдаланамиз. Харита трапециясининг томон узунликларининг сантиметр ўлчамида олиш учун ёйларни узунликларини харита масштабини махражи m га бўлиб, 100 га кўпайтирамиз ва қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз.

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{100N_1}{m\rho''}\cos B_1 l''; \\ a_2 &= \frac{100N_2}{m\rho''}\cos B_2 l''; \\ c &= \frac{100M_{ўр}}{m\rho''}\Delta B''; \\ d &= \sqrt{a_1 a_2 + c^2}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(25.1)}$$

бунда: B_1 ва B_2 кенгликлардаги нуқталарнинг биринчи вертикал эгрилик радиуслари N_1, N_2, $B_{ўр}$ кенгликлардаги нуқтанинг меридиан эгрилик радиуси $M_{ўр}$

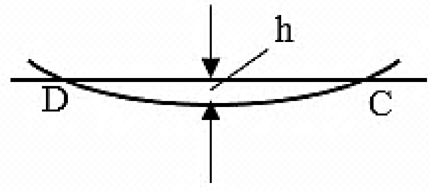
$$B_{ўр} = \frac{B_1 + B_2}{2}, \qquad \Delta B = B_2 - B_1.$$

1:100000 ва ундан йирик масштабдаги хариталарда трапеция томонлари тўғри чизиқ кўринишида тасвирланади, чунки бунда ёй узунлиги a_1 билан унинг ватар узунлиги DC = S орасидаги фарқ ҳисобга олинмаса ҳам бўладиган даражада кичик бўлади. Агар бу фарқни билиш керак бўлса уни қуйидаги формуладан фойдаланиб топиш мумкин:

$$(\mathrm{a} - \mathrm{S}) = 8/3\left(h^2/S\right), \qquad \textbf{(25.2)}$$

бунда h ёйнинг ватар чизиғидан салқиб туриши (25.2 шакл).

$$\mathrm{h} = \frac{l^2 \sin 2B_{ўр} N_{ўр}}{16\rho^2} \qquad \textbf{(25.3)}$$



25.2-шакл

l - C ва D нуқталарнинг узоқликлар фарқи

$$l = L_C - L_D;$$

N$_{ўр}$ кенгликдаги нуқтада биринчи вертикал эгрилик радиуси

$$B_{ўр} = \frac{B_C + B_D}{2}$$

6-градусли зона чегарасида жойлашган йирик масштабдаги харита томонлари Гаусс проекциясида график аниқлик чегараидан катта бўлган ўзгариш беради. Бу чизиқли ўзгариш қуйидаги формула билан ҳисобланади

$$m - 1 = \frac{l^2}{2\rho^2}\cos^2 B_{ўр} \qquad \textbf{(25.4)}$$

бунда m - эллипсоидни текисликда тасвирлаш масштаби.

Амалда 1:1000000÷1:25000 масштаблардаги хариталар 6-градусли зоналарда, бундан йирик масштабдаги хариталар 3-градусли зоналарда тасвирланади. Шу сабабли трапеция томонлари узунликларини Гаусс проекциясидаги ўзгаришини ҳисобга олмаса бўладиган даражада кичик.

3-Мисол. B_1=50°00′ ва B_2=50°10′ кенгликлардан ўтган параллеллар билан чегараланган 1:50000 масштабдаги харита трапеция ўлчамлари ҳисобланилсин. Бу масштабдаги хариталарда узоқликлар интервали *l*=15′==900″. $\Delta B = B_2$ - B_1=10′=600″.

Ҳисоблаш схемаси

№	**Формулалар**	**Ҳисоблаш натижалари, м**	**Изоҳ**
1	2	3	4
1	a	6378245м	(1)-(6) катталиклар Красовский эллипсоиди учун доимий
2	e^2	0,0066932	
3	$a(1-e^2)$	6335552м	
4	$0,25e^2$	0,0016734	
5	$0,75e^2$	0,0050201	
6	$1,25e^2$	0,00836678	
7	B_2	50°10’00”	(7),(8) вариант бўйича олинади

8	B_1	50°00’00”	
9	$B_{\text{ўр}}$	50°05’00”	
10	$\cos B_1$	0,64279	
11	$\cos B_2$	0,64056	
12	$100\cdot l/m$	9/5	
13	$100\Delta B/m$	6/5	
14	$1 - 0{,}25e^2\sin^2 B_1$	0,99902	
15	$1 - 0{,}75e^2\sin^2 B_1$	0,99705	
16	$1 - 0{,}25e^2\sin^2 B_2$	0,99901	
17	$1 - 0{,}75e^2\sin^2 B_2$	0,99704	
18	$1+0{,}25e^2\sin^2 B_{\text{ўр}}$	1,00098	
19	$1- 1{,}25e^2\sin^2 B_{\text{ўр}}$	0,99508	
20	N_1	6390847,45	
21	N_2	6390847,32	
22	$M_{\text{ўр}}$	6373116	
23	$1/\rho''$	$4848137\bullet 10^{-12}$	
24	N_1/ρ''	30,984	
25	N_2/ρ''	30,984	
26	$M_{\text{ўр}}/\rho''$	30,898	
27	a_1	35,849см	(10)•(12)•(24)
28	a_2	35,725см	(11)•(12)•(25)
29	C	37,078см	(13)•(26)
30	$a_1\, a_2$	1280,70	
31	c^2	1374,78	
32	d^2	2655,48	
33	D	51,531см	

Харита трапециясининг юзаси қуйидаги формула билан ҳисобланади

$$P = b^2(L_2 - L_1)[\sin B_2 - \sin B_1 + \frac{2}{3}e^2\left(\sin^3 B_2 - \sin^3 B_1\right) +$$

$$+\frac{3}{5}e^4\left(\sin^5 B_2 - \sin^5 B_1\right) + \frac{4}{7}e^6\left(\sin^7 B_2 - \sin^7 B_1\right) + ...] \qquad \mathbf{(25.5)}$$

Бунда: b - эллипсоид кичик ярим ўқи **(25.5)** формуладан фойдаланиб референц - эллипсоиднинг юзасини ҳисоблаш мумкин, унда L_1–L_2=2π, B_1=0, B_2=π/2. Красовский эллипсоидининг юзаси P=510 083 035 км^2.

Берилган масштабдаги харита трапециясининг юзасини **(25.5)** формуладан фойдаланиб ҳисоблаш учун трапеция томонлари бўлган параллел ва меридианларни кенглик ва узоқликларини билишимиз керак.

4-<u>Мисол.</u> Красовский эллипсоидида B_2=50°20′ ва B_1=50°00′ кенгликлардан ўтган параллеллар билан чегараланган, *l*= L_2 - L_1=30′=1800″ бўлган 1:100000 масштабдаги трапеция юзасини ҳисоблаш учун **(25.5)** формулани қуйидагича ёзиб оламиз

$$P = \frac{b^2(L_2 - L_1)}{\rho''}(\sin B_2 - \sin B_1 + I + II + III)\,, \qquad \textbf{(25.6)}$$

Бунда $I = \frac{2}{3}e^2\left(\sin^3 B_2 - \sin^3 B_1\right);$

$$II = \frac{3}{5}e^4\left(\sin^5 B_2 - \sin^5 B_1\right);$$

$$III = \frac{4}{7}e^6\left(\sin^7 B_2 - \sin^7 B_1\right).$$

Ҳисоблаш схемаси

№	**Формулалар**	**Ҳисоблаш натижалари**	**Изоҳ**
1	2	3	4
1	b	6356,863км	(1)-(5) катталиклар Крассовский эллипсоиди учун доимий
2	e^2	0,00669342	
3	$(2/3)e^2$	0,00446228	
4	$(3/5)e^4$	0,00002688	
5	$(4/7)e^6$	0,00000017	
6	1/ρ”	4848137•10-12	
7	L_2 - L_1	1800”	
8	$\sin B_2$	0,76977104	
9	$\sin^3 B_2$	0,45612587	
10	$\sin^5 B_2$	0,27027622	
11	$\sin^7 B_2$	0,16015148	
12	$\sin B_1$	0,77604444	
13	$\sin^3 B_1$	0,44953332	
14	$\sin^5 B_1$	0,26379698	

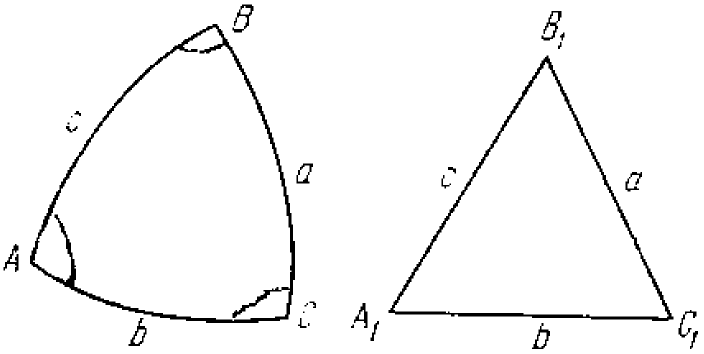
15	$\sin^7 B_1$	0,15480242	
16	I	0,00002942	
17	II	0,00000017	
18	III	0,0	
19	b^2	40409707,2км^2	
20	$b^2(L_2 - L_1)'' / \rho''$	352641,9 км^2	
21	$\sin B_2 - \sin B_1 +$ I+II+III	0,00375619	
22	P	1324,590 км^2	(20)•(21)

§26. Сфероидик учбурчакларни ечиш

Эллипсоид (сфероид) сатҳида геодезик чизиқлар билан ҳосил қилинган учбурчакга сфероидик учбурчак дейилади. Учбурчакни берилган элементларидан фойдаланиб уни қолган барча элементларини (томонлари ва бурчакларини) топиш учбурчакни ечиш ҳисобланади. Элементар функциялардан фойдаланиб сфероидик учбурчакни ечиб бўлмайди.

Ҳисоблаш натижаларидан маълумки, томон узунликлари 240 км гача бўлган сфероидик учбурчакларни сферик учбурчаклардек ечиш 10^{-8} нисбий хатолик беради. Геодезия амалиётида бундай учбурчакларни ечиш учун махсус усуллар (Лежандра теоремаси ва аддитаменталар усули) қўлланилади.

§26.1 Сферик учбурчакни Лежандра теоремасидан фойдаланиб ечиш



26.1-шакл.

А.Лежандра томонидан 1787 йилда ишлаб чиқилган учбурчакни сферик ортиқликни инобатга олиб ечиш (Лежандра теоремаси) моҳияти қуйидагидан иборат: Сферик учбурчакни А, В, С бурчаклари (26.1 шакл) сферик ортиқлик ξ ни учдан бирига камайтирилади, натижада ясси учбурчакнинг A_1, B_1, C_1 бурчаклари ҳосил қилинади, унинг a, b, c томонлари ўзгаришсиз сферик ҳолатда қолдирилиб, синуслар теоремасидан фойдаланиб ясси учбурчакдек ечилади. Хулоса қилиб айтганимизда сферик учбурчакдан бурчакларга тузатма бериб томонлари ўзгартирилмаган ясси учбурчакга ўтилади.

Ишчи формулалар

$$A_1 = A - \frac{\varepsilon}{3}; \quad B_1 = B - \frac{\varepsilon}{3}; \quad C_1 = C - \frac{\varepsilon}{3}; \qquad \textbf{(26.1)}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= fbc\sin A = f\frac{b^2 \sin A \sin C}{\sin B}; \\ \varepsilon &= fD_1; \qquad \mathrm{D}_1 = \frac{b^2 \sin A \sin C}{\sin B}; \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(26.2)}$$

$$a = D_{II}\sin A_1; \quad b = D_{II}\sin B_1; \quad c = D_{II}\sin C_1; \qquad \textbf{(26.3)}$$

$$\begin{aligned} f &= \frac{\rho''}{2R_m^2}; \qquad \mathrm{R_m} = \sqrt{M_m N_m}; \\ D_{II} &= \frac{b}{\sin B_1} = \frac{a}{\sin A_1} = \frac{c}{\sin C_1}. \end{aligned} \qquad \textbf{(26.4)}$$

Юқорида келтирилган ишчи формулаларда “b” томон узунлиги маълум деб қаралади.

5-<u>Мисол.</u> ABC сферик учбурчакнинг A=50°20′19,41″, B=62°12′44,54″, C=67°26′58,43″ бурчаклари ўлчанган бўлиб, пунктлар марказларига келтирилган ва эллипсоид сатҳига проекцияланган бўлсин. Ўлчанган томони (базис томони) узунлиги b=44797,282 м, учбурчак жойлашган жойнинг ўртача кенглиги B_m=48°12′. ABC сферик учбурчак Лежандра теоремасидан фойдаланиб ечилсин.

Сферик ортиқликни ҳисоблаш

№	Формулалар	Ҳисоблаш натижалари	Изоҳ
1	2	3	4
1	f	0,002533	B_m асосида 5.1 жадвалдан олинади
2	b^2	2007,04	ε – ҳисоблашда учбурчак томон узунлиги км.да олинади
3	sinA	0,769831	
4	sinC	0,923542	
5	sinA sinC	0,710971	
6	b^2 sinA sinC	1426,95	
7	sinB	0,88681	
8	D_1	1612,95	
9	ε	4,086”	

Учбурчакни ечиш

Учбурчак учлари	Сферик учбурчакни ўлчанган бурчаклари	$-\frac{\omega}{3}$	Сферик учбурчакни тенглаштирилган бурчаклари	$-\frac{\varepsilon}{3}$	Ясси учбурчак бурчаклари	Ясси учбурчакларини синуслари
B	62°12′44,54"	0,57	62°12′45,11"	-1,36"	62°12′43,75"	0,88467988
A	50°20′19,41"	0,57	50°20′19,98"	-1,36"	50°20′18,62"	0,76982866
C	67°26′58,43"	0,57	67°26′59,00"	-1,37"	67°26′57,63"	0,92354082
∑ ε ω=	180°00′02,38" 4,09" ∑-(180°+δ)к - 1,71	1,71	180°00′04,09"	-4,09		

$$\omega = -(\varepsilon + 180^\circ) + \sum$$

Сферик учбурчак томонлари

D_{II}=50636,714м a= 38981,594м

$в$= 44797,282м c=46765,073м

§26.2 Аддитаментлар усули.

И.Зольднер томонидан 1829 йилда таклиф қилинган бу усул синуслар теоремасига асосланади (26.1-шакл)

$$\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{b}{R}}{\sin B} = \frac{\sin\frac{c}{R}}{\sin C} \qquad \textbf{(26.5)}$$

Сферик учбурчак томонларини радиан ўлчовида ифодаловчи a/R, b/R, c/R катталиклар Ер радиуси R га нисбатан кичик бўлганлиги учун уларни синус қаторга ёйиш мумкин. +аторни икки ҳади билан чегаралансак.

$$\frac{a - a^3/6R^2}{\sin A} = \frac{b - b^3/6R^2}{\sin B} = \frac{c - c^3/6R^2}{\sin C} \qquad \textbf{(26.6)}$$

Аддитаментлар усулида сферик учбурчакни a, b, c томонларига тузатма бериш йўли билан ясси учбурчакни a′, b′, c′ томонлари ҳосил қилинади ва сферик учбурчакнинг номаълум томонлари топилади.

$A_a=ka^3$; $A_b=kb^3$; $A_c=kc^3$ лар учбурчакни томонларига тузатмалар бўлиб, уларни аддитаментлар дейилади, бунда $k = 1/6R^2$, $R = \sqrt{MN}$ учбурчак жойлашган жой эллипсоид эгрилигининг ўртача радиуси.

Сферик учбурчакни аддитаментлар усулида ечиш кетма-кетлигини келтирамиз:

1. Бошланғич берилган томон b дан унинг аддитаменти A_b ни айириб ясси учбурчак томони b′ топилади;

2. Сферик учбурчакни маълум бурчаклари ва b′ томонидан фойдаланиб синуслар теоремаси орқали қолган томонлар a′ ва c′ топилади;

3. Топилган томонлар A_a ва A_c аддитаментлар билан тузатилиб сферик учбурчакнинг номаълум томонлари аниқланади.

Учбурчакнинг аддитаментлар усули билан тўғри ечилганлиги Лежандра теоремаси ёрдамида текширилади.

Ишчи формулалар

b томон узунлиги маълум бўлган ҳолда

$$b' = b - A_b = b - kb^3 \qquad \textbf{(26.7)}$$

$$A_b = kb^3 \qquad \textbf{(26.8)}$$

$$a' = \frac{b' \sin A}{\sin B};\ \mathrm{c}' = \frac{\mathrm{b}'\mathrm{sinC}}{\mathrm{sinB}}, \qquad \textbf{(26.9)}$$

$$a = a' + ka'^3 = a' + A_a;\ \ c = c' + kc'^3 = c' + A_c, \qquad \textbf{(26.10)}$$

$$A_a = ka'^3, \quad \mathrm{A_c} = kc'^3 \qquad \textbf{(26.11)}$$

$$k = 1/6R^2$$

МДХ минтақаси учун k=409×10^{-8} деб олиниши мумкин. A-ларни ҳисоблаш томон узунликлари км.ларда олинади.

6-Мисол. 5 мисолда берилган қийматлардан фойдаланиб ABC учбурчак аддитаментлар усули билан ечилсин. Ҳисоблаш натижалари (сферик учбурчак томон узунликлари) 5 мисолда олинган натижалар билан солиштирилсин.

Ечиш схемаси

Учбурчак учлари	Сферик учбурчакни ўлчанган бурчаклари	$-\frac{\omega}{3}$	Сферик учбурчакни тенглаштирилган бурчаклари	Сферик учбурчакни тенглаштирилган бурчакларини синуслари	Ясси учбурчак томонлари b′, a′, c′	A_s, м	Сферик учбурчак томонлари, м
B	62°12′44,54″	0,57	62°12′45,11″	0,88468295	44796,914	0,368	44797,282
A	50°20′19,41″	0,57	50°20′19,98″	0,76983287	38981,350	0,243	38981,593
C	67°26′58,43″	0,57	67°26′59,00″	0,92354337	46764,654	0,419	46765,073

∑ ε ω=	180°00′02,38" 4,09" ∑-(180°+δ)к -1,71"	1,71	180°00′04,09"				

§27. Тўғри ва тескари геодезик масалаларни ечиш

§27.1 Тўғри геодезик масалани Рунге- Кутта-Ингланд усулида ечиш

Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг x_{j+1} нуқтадаги ечими, Рунге-Кутта-Ингланд усулида [1] қуйидагича бўлади

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4), \qquad \textbf{(27.1)}$$

бунда:

$$k_1 = \Delta x f(x_j, y_j);$$

$$k_2 = \Delta x f(x_j + \frac{1}{2}\Delta x,\ \ y_j + \frac{1}{2}k_1);$$

$$k_3 = \Delta x f[x_j + \frac{1}{2}\Delta x,\ \ y_j + 0{,}25(k_1 + k_2];$$

$$k_4 = \Delta x f(x_j + \Delta x,\quad y_j - k_2 + 2k_3),$$

$\Delta x = x_{j+1} - x_j$ -интеграллаш қадами

Бир қадамда интеграллаш хатоси (локал хато) қуйидаги формула билан топилади:

$$M = \frac{1}{336}(-42k_1 - 224k_3 - 21k_4 + 162k_5 + 125k_6), \qquad \textbf{(27.2)}$$

бунда,

$$k_5 = \Delta x f[x_j + \frac{18}{27}\Delta x,\ \mathrm{y_j} + \frac{1}{27}(7k_1 + 10k_2 + k_3)];$$

$$k_6 = \Delta x f[x_j + \frac{1}{5}\Delta x,\ \mathrm{y_j} + \frac{1}{625}(28k_1 - 125k_2 + 546k_3 + 54k_4 - 378k_5)]$$

$$\left.\begin{aligned} B_2 - B_1 &= \int_0^S \frac{v^3}{c}\cos A dS \\ L_2 - L_1 &= \int_0^S \frac{v^3}{c}\sec B \sin A dS \\ A_2 - A_1 &= \int_0^S \frac{v^3}{c}\sin B \sec B \sin A dS \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(27.3)}$$

интегралларни ечишга**(27.1)**ни қўллаб ишчи формулаларни ҳосил қиламиз. **(27.3)** формулада:

$v = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}$ - геодезик кенгликнинг иккинчи функцияси;

$c = \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2}}$ - эллипсоид меридианининг қутблардаги эгрилик радиуси;

e ва e' - эллипсоиднинг биринчи ва иккинчи эксцентриситетлари.

Ишчи формулалар

$$\left.\begin{aligned} B_2 &= B_1 + \frac{1}{6}(\Delta B_1 + 4\Delta B_3 + \Delta B_4); \\ L_2 &= L_1 + \frac{1}{6}(\Delta L_1 + 4\Delta L_3 + \Delta L_4); \\ A_2 \pm 180^\circ &= A_1 + \frac{1}{6}(\Delta A_1 + 4\Delta A_3 + \Delta A_4). \end{aligned}\right\}, \qquad \textbf{(27.4)}$$

бунда:

$$\left.\begin{aligned} \Delta B_i &= S_0 V_i^3 \cos\alpha_i \\ \Delta L_i &= S_0 V_i^3 \frac{\sin\alpha_i}{\cos\varphi_i} \\ \Delta A_i &= \Delta L_i \sin\varphi_i \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(27.5)}$$

$$v_i = \frac{1 + 0{,}6\gamma_i}{1 + 0{,}2\gamma_i}, \qquad \gamma_{\mathrm{i}} = \beta\cos^2\varphi_i;$$

$$S_0 = \frac{S}{c}\rho'' = 0{,}0322304 \circ S; \qquad \beta = 1{,}25\mathrm{e}'^2,$$

i=1, ... , 6 қадамлар тартиб рақами.

Красовский эллипсоиди учун С=6399698,9 м, β=0,00842316.

α_i ва φ_i лар **27.1-**жадвалдаги каби топилади.

27.1 жадвал

i	α	φ
1	A_1	B_1
2	$A_1+0{,}5\Delta A_1$	$B_1+0{,}5\Delta B_1$
3	$A_1+0{,}25(\Delta A_1+\Delta A_2)$	$B_1+0{,}25(\Delta B_1+\Delta B_2)$
4	$A_1-\Delta A_2+2\Delta A_3$	$B_1-\Delta B_2+2\Delta B_3$
5	$A_1+\frac{1}{27}(7\Delta A_1+10\Delta A_2+\Delta A_3)$	$B_1+\frac{1}{27}(7\Delta B_1+10\Delta B_2+\Delta B_3)$
6	$A_1+\frac{1}{625}(28\Delta A_1-125\Delta A_2+546\Delta A_3+$ $+54\Delta A_4-378\Delta A_5)$	$B_1+\frac{1}{625}(28\Delta B_1-125\Delta B_2+546\Delta B_3+$ $+54\Delta B_4-378\Delta B_5)$

Координаталар ва азимутни ҳисоблашда локал хатоликлар қуйидаги формулалар билан топилади:

$$\left.\begin{aligned}
M_{\Delta B} &= \frac{1}{336}(-42\Delta B_1-224\Delta B_3-21\Delta B_4+162\Delta B_5+125\Delta B_6);\\
M_{\Delta L} &= \frac{1}{336}(-42\Delta L_1-224\Delta L_3-21\Delta L_4+162\Delta L_5+125\Delta L_6);\\
M_{\Delta A} &= \frac{1}{336}(-42\Delta A_1-224\Delta A_3-21\Delta A_4+162\Delta A_5+125\Delta A_6).
\end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{(27.6)}$$

27.2-жадвалда турли координаталар ва масофалар учун ЭҲМда моделлаштириб топилган Рунге-Кутта-Ингланд усулининг аниқлик тавсифлари берилган. Жадвал Δx=S бир каррали интеграллаш қадамида ҳисоблаш натижаси бўйича тузилган. Интеграллашнинг локал хатоси M ни **(27.2)** формула ёрдамида ЭҲМда ҳисоблашда интеграллаш жараёнинг қадамини автоматик ҳолда ўзгартириш мумкин. Бир қадамда, берилган ε хатоликда интеграллашнинг ўзгариш схемаси қуйидагича бўлиши мумкин:

27.2-жадвал

Кенглик	**Масофа, км**	**Хатолик**		
		$M_{\Delta B} \le$	**$M_{\Delta L} \le$**	**$M_{\Delta A} \le$**
$B \le 65^\circ$	$S \le 300$	0,1-0,15м	0,1-0,15м	0,003”
	$S \le 500$	0,3-0,7м	0,3-0,7м	0,03”- 0,04”
$75^\circ \le B \le 80^\circ$	$S \le 100$	0,1м	0,1м	0,3”
	$S \le 200$	0,16м	0,16м	0,3”

$$\Delta x_{j+1} = \begin{cases} \dfrac{\Delta x_j}{2}, & \text{агар } M_j > \varepsilon; \\ \Delta x_j, & \text{агар } M_j = \varepsilon; \\ 2\Delta x_j & \text{агар } M_j < \varepsilon. \ , \end{cases}$$

Бунда: Δx_{j+1} - M ≤ε бўлганда (x_{j+1}, y_{j+1}) нуқтадан ва M >ε бўлганда (x_j, y_j) нуқтадан олинган интеграллаш қадами катталиги; i=1, ... , n - қадам тартиб рақами.

Доимий қадамда интеграллаш усулига нисбатан қадамни автоматик ҳолда танлаш схемасида интеграллаш ечим олиш вақтини 20 - 30% га қисқартиради.

7-<u>Мисол.</u> Бошланғич нуқтани координаталари B_1, L_1, тўғри азимут A_{12} ва нуқталар орасидаги масофа S орқали кейинги нуқтанинг координаталари B_2, L_2 ларни ва тескари азимут A_{21} ни (27.4), (27.5) формулалар ва 27.1-жадвалдан фойдаланиб ҳисоблаб топилсин. Ечим аниқлиги (27.6) формула ёрдамида баҳолансин.

Бошланғич берилган катталиклар

B_1 =50°07’40,97”	S =281260,08м
L_1 =23°45’13,43”	β =0,00842316
$A_{1.2}$ =A_1 =3°29’45,83”	

Ечиш схемаси

Формулалар	I					
	1	2	3	4	5	6
S_o	9065,125	9065,125	9065,125	9065,125	9065,125	9065,125
α_I	3°29′45,83"	3°35′17,18"	3°35′29,34"	3°41′38,52"	3°37′27,47"	3°32′00,33"
φ_I	50°07′40,97"	51°23′23,91"	51°23′23,18"	52°39′03,89"	51°48′37,04"	50°37′58,02"
$\cos\alpha_I$	0,9981390	0,9980398	0,9980362	0,9979226	0,9980001	0,9980992
$\sin\alpha_I$	0,0609800	0,0625833	0,0626421	0,0642283	0,0632137	0,0616308
$\cos\varphi_I$	0,6410740	0,6240162	0,6240191	0,6066674	0,6182672	0,6342883
$\sin\varphi_I$	0,7674791	0,78140114	0,7814091	0,7949558	0,7859679	0,7730966
$\cos^2\varphi_I$	0,4109759	0,3893962	0,3893998	0,3680453	0,3822543	0,4023216
γ_I	0,0034617	0,0032719	0,0032800	0,0031001	0,0032198	0,0033888
$1+0,6\gamma_I$	1,002077	1,001968	1,001968	1,001860	1,001931	1,002033

$1+0,2\gamma_I$	1,000692	1,000656	1,000656	1,000620	1,000644	1,000677
V_i	1,001384	1,001311	1,001311	1,001239	1,001287	1,001355
V^3_i	1,004157	1,003938	1,003938	1,003721	1,003866	1,004077
$\sin\alpha_i/\cos\varphi_I$	0,09551216	0,1002911	0,1003849	0,1062003	0,1022433	0,0971653
$\Delta B''_I$	9085,87	9082,98	9082,95	9079,96	9081,97	9084,73
ΔB^o_i	2°31'25,87"	2°31'22,98"	2°31'22,95"	2°31'19,96”	2°31'21,97"	2°31'24,73"
$\Delta L''_I$	863,48	910,34	911,19	963,91	928,04	882,01
ΔL^o_i	0°14'23,48"	0°15'10,34"	0°15'11,19"	0°16'03,91”	0°15'28,04"	0°14'42,01"
$\Delta A''_I$	662,70	711,35	712,02	766,27	729,41	681,88
ΔA^o_i	0°11'02,70"	0°11'51,35"	0°11'52,02"	0°12'46,27”	0°12'09,41"	0°11'21,88"

$$\Delta B = \frac{1}{6}(9085{,}87''+4\cdot 9082{,}95''+9079{,}96'') = 9082{,}94''= 2^0 31^{'} 22{,}94''$$

$$\Delta L = \frac{1}{6}(863{,}48''+4\cdot 911{,}19''+963{,}91'') = 912{,}02''= 0^0 15^{'} 12{,}02''$$

$$\Delta A = \frac{1}{6}(662{,}70''+4\cdot 712{,}02''+766{,}27'') = 712{,}84''= 0^0 11^{'} 52{,}84''$$

$$B_2 = B_1 + \Delta B = 50^0 07^{'} 40{,}97'' + 2^0 31^{'} 22{,}94''= 52^0 39^{'} 03{,}91''$$

$$L_2 = B_1 + \Delta L = 23^0 45^{'} 13{,}43'' + 0^0 15^{'} 12{,}02''= 24^0 00^{'} 25{,}45''$$

$$A_{21} = A_{12} + \Delta A \pm 180^0 = 3^0 29^{'} 45{,}83'' + 0^0 11^{'} 52{,}84''= 183^0 41^{'} 38{,}67''$$

$$M_{\Delta B} = 1/336\,(-381606{,}5''-2034580''-190679{,}1''+1471279''+1135591'') = 4{,}4''/336 = 0{,}013''$$

$$M_{\Delta L} = 1/336(-36266{,}16''-204106{,}5''-20242{,}11''+150342{,}4''+110251{,}2'') = -21{,}2''/336 = -0{,}063''$$

$$M_{\Delta A} = 1/336(-27833{,}40''-159492{,}4''-16091{,}67''+118164{,}4''+85235'') = -18{,}1''/336 = -0{,}054''$$

§27.2 Ўртача аргументлар формулаларидан фойдаланиб тескари геодезик масалани ечиш (Гаусс усули).

Гаусс усули қуйидаги интеграл остидаги функцияларни

$$\left.\begin{aligned} B_2 - B_1 &= \int_0^S \frac{V^3}{c}\cos A dS \\ L_2 - L_1 &= \int_0^S \frac{V}{c}\sec B \sin A dS \\ A_2 - A_1 &= \int_0^S \frac{V}{c}\sin B \sec B \sin A dS \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(27.7)}$$

ўртача аргументлар

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}; \quad L_m = \frac{L_1 + L_2}{2}; \quad A_m = \frac{A_{12} \pm 180^0 + A_{21}}{2}.$$

бўйича Тейлор қаторига ёйишга асосланган. **(27.7)** формулаларда:

$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}$ - геодезик кенгликнинг иккинчи функцияси;

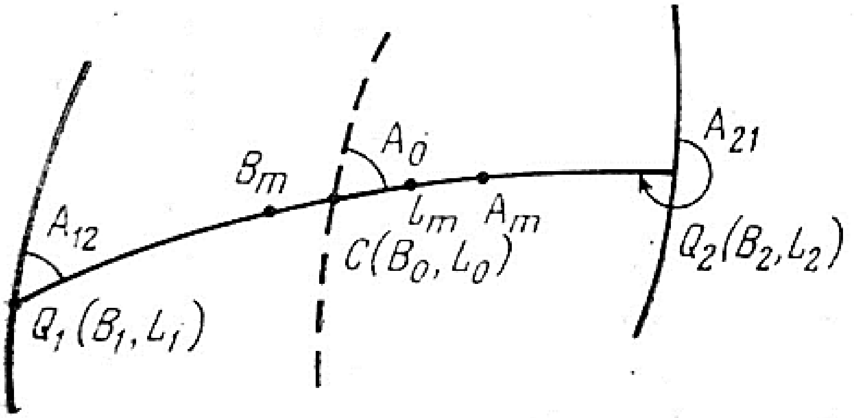
$c = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}$ - қутбларда эллипсоид меридианининг эгрилик радиуси;

e ва e' - эллипсоиднинг биринчи ва иккинчи эксцентритетлари.

Ўртача аргументлар бўйича қаторларга ёйиш қуйидаги ифодага олиб келади

$$\left.\begin{aligned} B_2 - B_1 &= \left(\frac{dB}{dS}\right)_1 S + \left(\frac{d^2B}{dS^2}\right)_1 \frac{S^2}{2} + \left(\frac{d^3B}{dS^3}\right)_1 \frac{S^3}{3!} + \ldots; \\ L_2 - L_1 &= \left(\frac{dL}{dS}\right)_1 S + \left(\frac{d^2L}{dS^2}\right)_1 \frac{S^2}{2} + \left(\frac{d^3L}{dS^3}\right)_1 \frac{S^3}{3!} + \ldots; \\ A_{21} - A_{12} \pm 180^0 &= \left(\frac{dA}{dS}\right)_1 S + \left(\frac{d^2A}{dS^2}\right)_1 \frac{S^2}{2} + \left(\frac{d^3A}{dS^3}\right)_1 \frac{S^3}{3!} + \ldots; \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{(27.8)}$$

қавслар остидаги индекс хусусий ҳосилалар бошланғич нуқтада, яъни B_1, L_1, A_{12} да олинишни кўрсатади. **(27.8)** да жуфт даражали ҳосилалар нолга айланади. Янги ҳосил бўлган қаторлар тез яқинлашади ва ихчам кўринишга келади. Гаусс усулининг асосий моҳияти қуйидагилардан иборат:



27.1-шакл.

27.1-шаклдаги C нуқта геодезик чизиқ S ни B_0, L_0 координаталар ва A_0 азимут билан тенг иккига бўлсин. (B_1- B_0) ва (B_2- B_0) фарқлар учун қуйидаги қаторларни ҳосил қиламиз:

$$(B_1 - B_0) = -\left(\frac{dB}{dS}\right)_0 \frac{S}{2} + \frac{1}{8}\left(\frac{d^2B}{dS^2}\right)_0 S^2 - \frac{1}{48}\left(\frac{d^3B}{dS^3}\right)S^3 + \ldots;$$

$$(B_2 - B_0) = \left(\frac{dB}{dS}\right)_0 \frac{S}{2} + \frac{1}{8}\left(\frac{d^2B}{dS^2}\right)_0 S^2 + \frac{1}{48}\left(\frac{d^3B}{dS^3}\right)S^3 + \ldots;$$

Иккинчи тенгламадан биринчисини айириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(B_2 - B_1) = \left(\frac{dB}{dS}\right)_0 S + \frac{1}{24}\left(\frac{d^3B}{dS^3}\right)S^3 + \ldots; \qquad \mathbf{(27.9)}$$

Шу сингари қуйидагиларни топамиз:

$$\left.\begin{aligned}(L_2 - L_1) &= \left(\frac{dL}{dS}\right)_0 S + \frac{1}{24}\left(\frac{d^3L}{dS^3}\right)S^3 + \ldots;\\ (A_{21} - A_{12} \pm 180^0) &= \left(\frac{dA}{dS}\right)_0 S + \frac{1}{24}\left(\frac{d^3A}{dS^3}\right)S^3 + \ldots;\end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{(27.10)}$$

(27.9) ва **(27.10)** ифодаларда хусусий ҳосилалар C нуқта координаталари B_0, L_0, A_0 лар бўйича олинади. Лекин ўртача аргументлар геодезик чизиқни B_m, L_m, A_m нуқталарга тўғри келиб, C нуқта билан устма уст тушмайди. Шу сабабли **(27.9)** ва **(27.10)** ларга (B_m- B_0), (L_m- L_0) ва (A_m- A_0) фарқлар учун тузатмалар киритиш керак бўлади, яъни $(\frac{dB}{dS})$ хусусий ҳосилалардан $(\frac{dB}{dS})_m$ хусусий ҳосилаларга ўтиш керак бўлади. Бундай ўтишни қуйидаги боғланиш асосида қилиш мумкин. Масалан кенглик учун

$$\left(\frac{dB}{dS}\right)_0 = \left(\frac{dB}{dS}\right)_m - \frac{S^2}{8}\left(\frac{d^2B}{dS^2}\right)_m \frac{\partial\left(\frac{dB}{dS}\right)_m}{dB} - \frac{S^2}{8}\left(\frac{d^2A}{dS^2}\right)_m \frac{\partial\left(\frac{dB}{dS}\right)_m}{dA}. \qquad \mathbf{(27.11)}$$

Шу сингари хусусий ҳосилаларни боғланиш тенгламаларининг узоқлик ва азимутлар учун ҳам ёзишимиз мумкин. **(27.11), (27.10)** ва **(27.9)** ифодаларда мураккаб бўлмаган ўзгартиришлар ва $(dB/dS)_m$, $(dL/dS)_m$, $(dA/dS)_m$ ларнинг турли тартибдаги хусусий ҳосилаларини ифодаларига қўйиш орқали қуйидаги ишчи формулаларни ҳосил қиламиз:

$$S\sin A_m = D[a_1\bar{l} + a_2\overline{\Delta B}^2\bar{l} + a_3\bar{l}^3] = D\sum\nolimits_1, \qquad \textbf{(27.12)}$$

$$S\cos A_m = D[a_4\bar{l} + a_5\overline{\Delta B}\bar{l}^2 + a_6\bar{l}^3] = D\sum\nolimits_2, \qquad \textbf{(27.13)}$$

$$\Delta A = \sin B_m[a_7\bar{l} + a_8\overline{\Delta B}^2\bar{l} + a_9\bar{l}^3] = \sin B_m D\sum\nolimits_3, \qquad \textbf{(27.14)}$$

Бунда:
$$\overline{\Delta B} = (B_2 - B_1)'' \cdot 10^{-4};$$
$$\bar{l} = (L_2 - L_1)'' \cdot 10^{-4};$$

$$D = \frac{593{,}602160 + \cos^2 B_m}{197{,}867385 + \cos^2 B_m};$$

$$a_1 = 103422{,}05\cos B_m;$$
$$a_2 = 9{,}5144\cos B_m + 0{,}5525\cos^2 B_m - 0{,}0087\cos^5 B_m;$$
$$a_3 = -10{,}1287\cos B_m + 10{,}1287\cos^3 B_m;$$

$$a_4 = 103422{,}05 - 696{,}9116\cos^2 B_m + 4{,}6954\cos^4 B_m - 0{,}0310\cos^6 B_m;$$
$$a_5 = -30{,}3860 + 10{,}3334\cos^2 B_m - 0{,}2061\cos^4 B_m + 0{,}0014\cos^6 B_m;$$
$$a_6 = -0{,}2048 + 0{,}4192\cos^2 B_m - 0{,}0124\cos^4 B_m;$$
$$a_7 = 10000 = 10^4;$$
$$a_8 = 2{,}9381 + 0{,}0123\cos^2 B_m;$$
$$a_9 = 1{,}9587\cos^2 B_m + 0{,}0123\cos^4 B_m.$$

(27.12), (27.13), (27.14) формулалардан фойдаланиб тескари геодезик масаланинг ечимини топамиз:

$$r_m = arctg\frac{\sum_1}{\sum_2}; \quad \mathrm{S}_1 = \frac{D\sum_1}{\sin A_m}; \quad \mathrm{S}_2 = \frac{D\sum_2}{\cos A_m}; \quad \mathrm{S}_{\text{ыр}} = \frac{S_1 + S_2}{2};$$

$$A_{12} = A_m - \frac{1}{2}\Delta A; \qquad A_{21} = A_m \pm 180^\circ + \frac{1}{2}\Delta A.$$

Σ_1 ва Σ_2 нинг ишораларини инобатга олиб $\mathrm{A_m}$ қуйидагича топилади.

ишоралар		азимутни топиш
Σ_1	Σ_2	
+	+	$\mathrm{A_m = r_m}$
+	-	$\mathrm{A_m = 180^o - r_m}$
-	-	$\mathrm{A_m = 180^o + r_m}$
+	-	$\mathrm{A_m = 360^o - r_m}$

(27.12), (27.13), (27.14) формулалардан фойдаланиб масофа S±5÷10 см аниқликда ва азимут ±0,05″ аниқликда ҳисобланади.

a_1 ни ҳисоблашда $\cos B_m$ қиймати ўнликнинг еттинчи ҳадигача, a_4 ни ҳисоблашда $\cos B_m$ қиймати ўнликнинг олтинчи ҳадигача олиниши керак. Қолган а коэффициентларни ҳисоблашда $\cos B_m$ ни ўнликнинг тўртинчи ҳадигача олинса кифоя.

8-<u>Мисол</u>. 1 ва 2 нуқталарнинг координаталари B_1, L_1 ва B_2, L_2 (B_2 ва L_2 қийматлари бу мисолда 7-мисолни ечимидан олинади)лардан фойдаланиб нуқталар орасидаги масофа S, тўғри азимут A_{12} ва тескари азимут A_{21} ҳисоблансин.

Бошланғич берилган катталиклар:

B_1 = 50º07’40,97”	B_2 = 52º39’03,91”
L_1 = 23º45’13,43”	L_2 = 24º00’25,46”

Ечиш схемаси

Формулалар	**Ҳисоблаш натижалари**	**Формулалар**	**Ҳисоблаш натижалари**
1	2	3	4
B_1	50º07'40,97"	$\cos^5 B_m$	0,0946
B_2	52°39'03,91"	$\cos^6 B_m$	0,0590
ΔB	+2 31 22,94	$\sin B_m$	0,781407
$\Delta B”$	+9 082,94"	a_1	64537,624
B_m	51°23'22,44"	a_2	6,070
L_1	23°45'13,43"	a_3	-3,859
L_2	24°00'25,46"	a_4	103151,380
l	+0 15 12,03	a_5	-26,393
$l”$	+912,03"	a_6	-0,043
$\overline{\Delta B}$	0,908294	a_7	10000,00
$\bar{l}$	0,091203	a_8	2,943
$\overline{\Delta B}^2$	0,8250	a_9	0,765
$\bar{l}^2$	0,0083	D	2,99607176
$\overline{\Delta B}^2 \bar{l}$	0,0752	$a_1 l$	5886,0249
$\overline{\Delta B} \bar{l}^2$	0,0076	$a_2 \overline{\Delta B}^2 \bar{l}$	0,4565
$\overline{\Delta B}^3$	0,7493	$a_3 \bar{l}^3$	-0,0031

$\bar{l}^3$	0,0008	Σ_1	5886,4783
$\cos B_m$	0,624022	$a_4\overline{\Delta B}$	93691,7795
$\cos^2 B_m$	0,389403	$a_5\overline{\Delta B}\bar{l}^2$	-0,2006
$\cos^3 B_m$	0,2430	$a_6\overline{\Delta B}^3$	-0,0322
$\cos^4 B_m$	0,1516	Σ_2	+93691,5467
$a_7\bar{l}$	912,0300	$\cos A_m$	0,99803213
$a_8\overline{\Delta B}^2\bar{l}$	0,2213	$S_1 = D\Sigma_1/\sin A_m$	281260,08м
$a_9\bar{l}^3$	0,0006	$S_2 = D\Sigma_2/\cos A_m$	281260,08м
Σ_3	912,2519	$S_{ыр}$	281260,08м
$S\sin A_m = D\Sigma_1$	17636,312	$\Delta A = \sin B_m \Sigma_3$	+712,84"
$S\cos A_m = D\Sigma_2$	280706,597	ΔA	11'52,84"
tgA_m	0,06282828	$(1/2)\Delta A$	5'56,42"
A_m	3°35'42,25"	$A_{12} = A_m - (1/2)\Delta A$	3°29'45,83"
$\sin A_m$	0,06270464	$A_{21} = A_m \pm 180^\circ + (1/2)\Delta A$	183°41'38,67"

§28. Геодезик координаталардан ясси тўғрибурчакли Гаусс-Крюгер координаталарига ўтиш ва аксинча

Геодезик тармоқларни текисликда Гаусс-Крюгер проекциясида математик қайта ишлаш учун қуйидагилар бажарилади:

1. Бошланғич пункт геодезик координаталаридан фойдаланиб Гаусс-Крюгер проекциясида шу пунктнинг текисликдаги тўғри бурчакли координаталари ҳисобланади. Ҳисоблашни тўғри бажарилганлигини текшириш учун тескари масала ечилади: тўғри бурчакли координаталардан фойдаланиб геодезик координаталар ҳисобланади.

2. Эллипсоид сатҳидаги бошланғич томон узунлиги ва шу томон геодезик азимутидан текисликдаги томон узунлиги ва шу томон дирекцион бурчагига ўтилади.

3. Эллипсоид сатҳига редукцияланган барча ўлчанган йўналишлар, томонларнинг текисликда тасвирлашдаги эгриликлар тузатмалар бериш йўли билан аниқлаштирилади.

Агарда геодезик тармоқ икки қўшни зонада жойлашган бўлса у ҳолда тўғри бурчакли координаталарни бир зонадан бошқа зонага ўтказиш керак бўлади. МДХ давлатларида Красовский эллипсоиди қабул қилинганлигини инобатга олиб, юқоридаги масалаларни ечиш ушбу эллипсоид параметрлари асосида амалга ошириш бўйича қуйида мисоллар келтирилади.

Красовский эллипсоиди параметрлари:

катта ярим ўқ a = 6378245,000 м,

кичик ярим ўқ b= 6356863,019 м,

қутб сиқилиши $\alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{298{,}3} = 0{,}0033523299$,

биринчи эксцентриситет квадрати $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0{,}0066934216$

иккинчи эксцентриситет квадрати $e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = 0{,}0067385254$

§28.1 Геодезик координаталардан Гаусс-Крюгер тўғри бурчакли координаталарига ўтиш (тўғри масала)

Ўқ меридианни L_0 бўлган зонада жойлашган нуқтани B,L геодезик координаталари бўйича, шу нуқтани ясси тўғри бурчакли x,y координаталарини ҳисоблаш талаб этилсин. Бунинг учун қуйидаги формулалардан фойдаланамиз:

$$\left.\begin{aligned} x &= 6367558{,}4969\frac{B''}{\rho''} - \left\{a_0 - \left[0{,}5 + \left(a_4 + a_6 l^2\right) l^2\right] l^2 N\right\} \sin B \times \cos B; \\ y &= \left[1 + \left(a_3 + a_5 l^2\right) l^2\right] l N \cos B. \end{aligned}\right\} \textbf{(28.1)}$$

(28.1) формулада қуйидаги белгилашлар қабул қилинган:

$l = \frac{(L - L_0)''}{\rho''}$ - берилган нуқта узоқлиги билан шу нуқта жойлашган зона ўқ меридиани узоқликлари орасидаги фарқ (радиан бирлигида берилган).

$$N = 6399698{,}902 - \left[21562{,}267 - \left(108{,}973 - 0{,}612\cos^2 B\right)\cos^2 B\right]\cos^2 B$$

$$a_0 = 32140{,}404 - \left[135{,}3302 - (0{,}7092 - 0{,}0040\cos^2 B)\cos^2 B\right]\cos^2 B;$$

$$a_4 = (0{,}25 + 0{,}00252\cos^2 B)\cos^2 B - 0{,}04166;$$

$$a_6 = (0{,}166\cos^2 B - 0{,}084)\cos^2 B;$$

$$a_3 = (0{,}3333333 + 0{,}001123\cos^2 B)\cos^2 B - 0{,}1666667;$$

$$a_5 = 0{,}0083 - \left[0{,}1667 - (0{,}1968 + 0{,}0040\cos^2 B)\cos^2 B\right]\cos^2 B$$

1 класс триангуляцияда кенглик ва узоқликлар 0,0001” гача, x,y-0,001м. гача ҳисобланади. y-ордината қиймати зонанинг ўз меридианига нисбатан топилади.

А-мисол. Нуқтанинг B=51°38′43,9023″, *L*=24°02′13,1360″ геодезик координаталари бўйича ўқ меридиани L_0=21° бўлган зонада x,y тўғрибурчакли координаталари ҳисоблаб топилсин.

Ечиш схемаси

Ҳисоблаш тартиб номери	Формулалар	Натижалар
1	2	3
1	B°	51°38’43,9023”
2	*B”*	185923,9023”
3	*B”/ρ”*	0,901384549
4	*sin B*	0,7841868
5	*cos B*	0,6205248
6	cos^2B	0,3850510
7	$l°=L-L_0$	3°02’13,1360”
8	*l”*	10933,1360”
1	2	3
9	*l=l”/ρ”*	0,053005341
10	*N*	6391412,451
11	a_0	32088,400
12	a_4	0,05497637
13	a_6	-0,00773241
14	a_3	-0,03814988
15	a_5	-0,02648423
16	*sinB cosB*	0,4866073
17	l^2	0,002809566
18	$a_6 l^2$	-0,004922844
19	$a_5 l^2$	-0,0000744

20	$N l^2$	17957,096
21	$6367558,4969\ B''/\rho''$	5739618,7994
22	X	5728374,726 м
23	$l+(a_3+a_5\, l^2)l^2$	0,99989280
24	$[23]l \cos B$	0,03288760
25	$y=[24][10]$	+210198,193 м

§28.2 Гаусс-Крюгер тўғри бурчакли координаталаридан фойдаланиб геодезик координаталарни ҳисоблаш (тескари масала)

Бу масала 28.1 да кўрилган масалага тескари масала ҳисобланади. Нуқтанинг тўғри бурчакли координаталари х,у ва зона ўқ меридианнинг узоқлиги L₀ берилган бўлсин. Шу нуқтани геодезик координаталарини ҳисоблаш талаб этилсин. Бу масалани ечиш қуйидаги формулалардан фойдаланиб амалга оширилади:

$$\begin{aligned} &B = B_x - [1-(b_4 - 0{,}12z^2)z^2]z^2 b_2 \rho'';\\ &L = L_0 + l;\\ &l = [1+(b_3 - b_5 z^2)z^2]z\rho'', \end{aligned} \qquad \textbf{(28.2)}$$

бунда:

$$\begin{aligned} &B''_x = \beta'' + \{50221746 + [293622 + (2350 + 22\cos^2\beta)\cos^2\beta]\cos^2\beta\}\times\\ &\times 10^{-10}\sin\beta\cos\beta\times\rho'';\\ &\beta'' = (x/6367558{,}4969)\rho'';\\ &z = y/(N_x \cos B_x);\\ &N_x = 6399698{,}902 - [21562{,}267 - (108{,}973 - 0{,}612\cos^2 B_x)\cos^2 B_x]\cos^2 B_x;\\ &b_2 = (0{,}5 + 0{,}003369\cos^2 B_x)\sin B_x \cos B_x;\\ &b_3 = 0{,}333333 - (0{,}166667 - 0{,}001123\cos^2 B_x)\cos^2 B_x;\\ &b_4 = 0{,}25 + (0{,}16161 + 0{,}00562\cos^2 B_x)\cos^2 B_x;\\ &b_5 = 0{,}2 - (0{,}1667 - 0{,}0088\cos^2 B_x)\cos^2 B_x. \end{aligned}$$

В-мисол. Нуқтанинг тўғри бурчакли координаталари x=5728374,726 м ва y=+210198,193 м берилган. Ўқ меридиани узоқлиги $L_0=21^0$ бўлган зонада шу нуқтанинг геодезик координаталари ҳисоблансин.

Ечиш схемаси

Ҳисоблаш тартиб номери	**Формулалар**	**Натижалар**
1	2	3
1	β, рад	0,899618704
2	β''	185559,6722″
3	β°	51°32′39,6722″
4	$\sin\beta$	0,7830898
5	$\cos\beta$	0,6219086
6	$\cos^2\beta$	0,3867703
7	B_x, рад	0,902070103
8	B_x''	186065,3094
9	B_x°	51°41′05,3094″
10	$\sin B_x$	0,7846121
11	$\cos B_x$	0,6199871
12	$\cos^2 Bx$	0,3843840
13	N_x	6391426,7776
14	b_2	0,24385467
15	b_3	0,26943480
16	b_4	0,31295066
17	b_5	0,13722340
18	$N_x \cos B_x$	3962602,1527
19	z	0,05304550
20	z^2	0,00281382

21	$[1-(b_4-0,12z^2)z^2]z^2b_2$	0,00068556
22	$\rho''[21]$	141,4070
23	B	51°38′43,9024″
24	$[1-(b_3-b_5z^2)z^2]z$	+0,053005342
25	$1=[24]\rho''$	+3°02′13,1362″
26	$L=L_0+1$	24°02′13,1362″

(28.1) формулалар ёрдамида B, Lдан *x,y* гаўтиш 0,001 маниқликда, **(28.2)**формулалардан фойдаланиб *x,y* дан B, Lга ўтиш 0,0001” аниқликда амалга оширилади. Бундай юқори аниқлик 1 класс триангуляция ва полигонометрия пунктларининг координаталарини ҳисоблашда талаб этилади. Юқори аниқлик талаб этилмаган ҳолларда **(28.1)** ва **(28.2)** формулалар маълум жиҳатдан соддалаштирилишлари мумкин.

§28.3.Гаусс-Крюгер тўғри бурчакли координаталарини бир зонадан бошқа зонага қайта ҳисоблаш

Бизга ўқ меридианнинг узоқлиги L_0^1, зонадаги нуқтанинг координаталари x_1, y_1 берилган бўлиб, шу нуқтанинг L_0^{II} узоқликка эга бўлган зонадаги x_{II}, y_{II} координаталарини топиш талаб этилсин. Бундай масалага тўғри бурчакли координаталарни бир зонадан бошқа зонага қайта ҳисоблаш (ўтказиш) масаласи дейилади. Координаталарни бир зонадан бошқа зонага ўтказишнинг бир неча ҳил усуллари мавжуд. Улардан ҳозирги вақтда аниқлик жаҳатдан юқори ва универсал бўлган усулни кўриб чиқамиз. Ўқ меридианнинг узоқлиги L_0^1 бўлган, I зона системасида жойлашган нуқтани x_1, y_1 координаталари бўйича шу нуқтани **(28.2)** формулалардан фойдаланиб геодезик координаталари B_1, L_1 ларга ўтилади. Сўнгра **(28.1)** формуладан фойдаланиб нуқтанинг B_1, L_1 геодезик координаталари бўйича ўқ меридианнинг узоқлиги L_0^{II} бўлган зона системасидаги тўғри бурчакли x_{II}, y_{II} координаталарига ўтилади. Ҳисоблаш натижаларини текширишда координатларни қайта ҳисоблаш икки марта бажарилади, яъни шарқий зонадан ғарбий зонага ва аксинча ғарбий зонадан шарқий зонага ўтилади.

С-Мисол. Ўқ меридианнинг узоқлиги L_0=21° бўлган олти градусли зонада нуқтанинг тўғри бурчакли x_1=5728374,726м, y_1=210198,193м координаталари берилган бўлсин. Бу нуқта координаталарини ўқ меридианнинг узоқлиги L_0=27° бўлган қўшни зона системасига ўтказиш талаб этилсин.

Мисол юқорида айтилганидек икки босқичда ечилади. Биринчи босқичда **(28.2)** формуладан фойдаланиб L_0=21° бўлган зонада x_1, y_1 дан B_1, L_1 га ўтилади. Бу масала В-мисолда ечилган бўлиб, қуйидаги натижалар олинган эди: B_1=51°38′43,9028″, L_1=24°02′13,1362″. Иккинчи босқичда B_1, L_1 олинган натижалардан фойдаланиб **(28.1)** формулалар билан L_0=27° бўлган қўшни зона системасида шу нуқтани x_{II}, y_{II} тўғри бурчакли координаталари ҳисобланади. Бу масалани ечиш схемаси биз кўрган А-мисолда берилган.

Ечиш схемаси

Ҳисоблаш тартиб номери	Формулалар	Натижалар
1	2	3
1	L_1	24°02′13,1360″
2	L_0	24°
3	$B°_I$	51°38′43,9023″
4	B''_I	185923,9023″
5	B''_I/ρ''	0,901384542
6	$\sin B_I$	0,7841868
7	$\cos B_I$	0,6205248
8	$\cos^2 B_I$	0,3850510
9	$l°=L_1-L_0$	-2°57′46,864″
10	l''	-10666,864″
11	l, *рад*	-0,051714418
12	N	6391412,451
13	a_0	32088,400
14	a_4	0,05497637

15	a_6	-0,00773241
16	a_3	-0,03814988
17	a_5	-0,02648123
18	$\sin B_I \cos B_I$	0,4866073
19	l^2	0,002674381
20	$N\, l^2$	17093,071944
21	$6367558{,}4969\ B''/\rho''$	5739618,8000
22	x_{II}	5728164,378 м
23	$1+(a_3+a_5\, l^2)\, l^2$	0,99989778
24	$[23]\ l\cos B_I$	-0,03208680
25	y_{II}	-205079,963 м

Бу ерда ҳисобни текшириш бўйича мисол келтирилмаган.

§28.4 Гаусс-Крюгер проекциясида геодезик ўлчаш натижаларини эллипсоиддан текисликка редукциялаш

§28.4.1 Текисликда бошланғич маълумотларни олиш бўйича умумий тушунчалар

Геодезик тармоқни Гаусс-Крюгер проекциясида ҳисоблаш учун эллипсоид сатҳида томон узунликлари s_{ik} ва уларнинг геодезик азимутлари A_{ik} ларни махсус формулалардан фойдаланиб текисликдаги томон узунликлари s_{ik} ва уларни дирекцион бурчаклари α_{ik} ларга ўтказиш керак бўлади. Агар геодезик координаталар B_i, L_i, B_k, L_k лардан s_{ik} томон учларининг тўғри бурчакли координатлари x_i, y_i, x_k, y_k ларга ўтилган бўлса, у ҳолда

$$tg\alpha_{ik} = \frac{y_k - y_k}{x_k - y_k}$$

$$s_{ik} = \frac{x_k - x_i}{\cos\alpha_{ik}} = \frac{y_k - y_i}{\sin\alpha_{ik}} \qquad \textbf{(28.3)}$$

$$s_{ik}^2 = (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2$$

Лекин **(28.3)** формулалардан фойдаланиб α_{ik} ва s_{ik} ларни ҳисоблаш текисликда томон узунликлари ва дирекцион бурчакларни топиш аниқлигини пасайтиради. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун **(28.3)** формулаларнинг биринчи ва учинчисини олиб, уларни s_{ik} томон учларини координаталари x,y лар бўйича дифференциаллаб, бизга маълум бўлган қоидалар бўйича ўрта квадратик хатоларга ўтамиз ва $m_{x_i} = m_{y_i} = m_{x_k} = m_{y_k} = m_{xy}$ деб оламиз. Унда дирекцион бурчакни топиш ўрта квадратик хатоси $m_{\alpha_{ik}}$ ва томон узунлигини топиш ўрта квадратик хатоси $m_{s_{ik}}$ қуйидагиларга тенг бўлади

$$m_{\alpha_{ik}} = \frac{m_{xy}}{S} \rho'' \sqrt{2} \qquad \textbf{(28.4)}$$

$$m_{s_{ik}} = m_{xy} \sqrt{2} \qquad \textbf{(28.5)}$$

2 класс триангуляцияда тўғри геодезик масалани ечиш билан координаталарни текисликда 0,01 м аниқликда топиш мумкин. Агарда $s_{ik} = 20 км$ десак у ҳолда $m_{\alpha_{ik}} = \pm 0{,}15''$ ва $m_{\alpha ik} = \pm 0{,}014 м$ бўлади. **(28.4)** формуладан кўриниб турибдики томон узунлиги кичрайиши билан дирекцион бурчак α_{ik} нинг хатолиги ошиб боради, шу сабабли томон узунликлари ва дирекцион бурчакларни текисликка ўтказишнинг қуйидаги усуллари тавсия этилади.

§28.4.2.Томонлар узунликларини ва йўналишларни текисликка редукциялаш формулалари

Эллипсоиддаги геодезик чизиқ узунлиги S_{ik} ни Гаусс-Крюгер проекциясида текисликдаги узунлиги s_{ik} га ўтказиш учун қуйидаги умумлаштирилган формула таклиф этилади

$$s_{ik} = m_{ik} S_{ik}, \qquad \textbf{(28.6)}$$

бунда m_{ik} - тасвирлашни ўртача масштаби.

Тасвирлаш масштабининг аниқлиги томон узунлиги s_{ik} ва уни зона ўқ меридианидан узоқлиги, яъни томон учларини ўртача ординаталари:

$y_m = (y_i + y_k)/2$ га боғлиқ.

(28.6) формулани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$s_{ik} = S_{ik} + \Delta S_{ik} \tag{28.7}$$

бунда: ΔS_{ik} -эллипсоиддаги томон узунлиги S_{ik} га тузатма.

1 класс геодезик тармоқларда ΔS_{ik} қуйидаги формуладан фойдаланиб 0,001м аниқликда ҳисобланади

$$\Delta S_{ik} = f'_m\left(y_m^2 + \frac{\Delta y^2}{12} + \frac{y_m^4}{12R^2}\right)S_{ik}\,, \tag{28.8}$$

ёки

$$\Delta S_{ik} = \left(\frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4}\right)S_{ik}\,, \tag{28.9}$$

бунда: $\Delta y = y_k - y_i$, R_m – ер эллипсоидининг ўртача эгрилик радиуси.

f'_m нинг қиймати томон ўртача кенглиги B_m ёки томон учларининг ўртача абциссаси $x_m = (x_i + x_k)/2$ орқали 28.1-жадвалдан интерполяциялаш йўли билан олинади.

f ва f' қийматлари

28.1-жадвал

КенгликларB	**хкм**	$f = \frac{\rho''}{2R_m^2}$	$f' = \frac{1}{2R_m^2}$
1	2	3	4
36°	3986	0,0025404	$1{,}23161\times10^{-8}$
38	4208	0,0025392	$1{,}23106\times10^{-8}$
40	4430	0,0025381	$1{,}23049\times10^{-8}$
42	4652	0,0025369	$1{,}22992\times10^{-8}$
44	4874	0,0025357	$1{,}22935\times10^{-8}$
46	5096	0,0025345	$1{,}22877\times10^{-8}$
48	5319	0,0025333	$1{,}22820\times10^{-8}$
50	5541	0,0025322	$1{,}22763\times10^{-8}$
52	5763	0,0025310	$1{,}22706\times10^{-8}$
54	5986	0,0025299	$1{,}22651\times10^{-8}$
56	6209	0,0025287	$1{,}22597\times10^{-8}$
58	6431	0,0025277	$1{,}22544\times10^{-8}$
60	6654	0,0025266	$1{,}22494\times10^{-8}$
62	6877	0,0025256	$1{,}22445\times10^{-8}$
64	7100	0,0025246	$1{,}22398\times10^{-8}$

66	7323	0,0025237	$1{,}22354\times10^{-8}$
68	7546	0,0025229	$1{,}22313\times10^{-8}$
70	7769	0,0025221	$1{,}22274\times10^{-8}$
72	7992	0,0025214	$1{,}22239\times10^{-8}$
74	8215	0,0025207	$1{,}22207\times10^{-8}$
76	8439	0,0025201	$1{,}22178\times10^{-8}$
78	8662	0,0025196	$1{,}22153\times10^{-8}$
80	8875	0,0025191	$1{,}22131\times10^{-8}$

2 класс геодезик тармоқларда ΔS_{ik} ни ҳисоблаш учун **(28.8), (28.9)** формулаларга нисбатан соддароқ формуладан фойдаланилиши мумкин.

$$\Delta S_{ik} = f_m'\left(y_m^2 + \frac{\Delta y^2}{12}\right)S_{ik} = \left(\frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2}\right)S_{ik} \qquad \textbf{(28.10)}$$

3,4 класс геодезик тармоққалрида қуйидаги формуладан фойдаланилади

$$\Delta S_{ik} = f_m' y_m^2 S_{ik} = \frac{y_m^2}{2R_m^2} S_{ik} \qquad \textbf{(28.11)}$$

ΔS_{ik} ни ҳисоблашда ордината қийматлари 1 класс геодезик тармоқларда 1 м, 2 классда 10 м ва 3,4 классларда 0,1 км аниқликда олиниши керак. Бунда абсцисса хатолиги тузатмани ҳисоблаш аниқлигига таъсир этмайди.

Геодезик чизиқни текисликда тасвирлашдаги эгрилик учун горизонтал йўналишга тузатма ҳисоблаш

Томон узунликлари 60км гача бўлган ҳолларда 1 класс триангуляция ва полигонометрия пунктларида тўғри йўналишга $\delta_{1.2}$ ва тескари йўналишга $\delta_{2.1}$ тузатмалар 0,001” аниқликда қуйидаги формулалар билан ҳисобланади

$$\left.\begin{aligned}
\delta_{1.2} &= -f_m\Delta x\left(y_m - \frac{\Delta y}{6} - \frac{y_m^3}{3R_m^2}\right) - \frac{\eta^2\Delta y tgB_m}{R_m^3}y_m^2\rho'';\\
\delta_{2.1} &= +f_m\Delta x\left(y_m + \frac{\Delta y}{6} - \frac{y_m^3}{3R_m^2}\right) + \frac{\eta^2\Delta y tgB_m}{R_m^3}y_m^2\rho'';
\end{aligned}\right\}, \qquad \textbf{(28.12)}$$

бунда:

$$f_m = \frac{\rho''}{2R_m^2}; R_m = \sqrt{M_m N_m};$$
$$\Delta x = x_2 - x_1; \Delta y = y_2 - y_1$$
$$y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2); B_m = \frac{1}{2}(B_1 + B_2); \qquad \textbf{(28.13)}$$
$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 B_m; e'^2 = 0,00673853$$

f_m- коэффициент 28.1-жадвалдан триангуляция томонининг ўртача кенглиги B_m ёки ўртача абциссаси x_m аргумент бўйича олинади; M_m *ва* N_m қуйидаги формулалар билан ҳисобланади:

$$M_i = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B_i)^{3/2}} = a(1-e^2)\frac{1+0.25e^2\sin^2 B_m}{1-1.25e^2\sin^2 B_m} \qquad \textbf{(28.14)}$$

$$N_m = \frac{a}{(1-e^2\sin^2 B_m)^{\frac{1}{2}}} = a\frac{1-0.25e^2\sin^2 B_m}{1-0.75e^2\sin^2 B_m} \qquad \textbf{(28.15)}$$

(28.12) формулаларда $R_m, y_m, \Delta x, \Delta y$ катталиклари км.да ифодаланади; у - ординаталар ўқ меридианига нисбатан олинади. 2,3,4 класс триангуляция ва полигонометрларда **(28.12)** формула соддалаштириш мумкин

$$\delta''_{1.2} = -f_m(x_2 - x_1)\left(y_m - \frac{y_2 - y_1}{6}\right);$$
$$\delta''_{2.1} = +f_m(x_2 - x_1)\left(y_m + \frac{y_2 - y_1}{6}\right). \qquad \textbf{(28.16)}$$

Агар $S \leq 50км$ ва $y \leq 120км$ бўлса **(28.16)** формула 1-класс триангуляция ва полигонометрияда қўлланилади.

(28.16) формулани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин

$$\delta''_{1.2} = -\frac{f_m}{3}(x_2 - x_1)(2y_1 + y_2);$$
$$\delta''_{2.1} = +(x_2 - x_1)(2y_1 + y_2). \qquad \textbf{(28.17)}$$

δ_{ik} тузатмаларни 0,1” аниқликда ҳисоблашда қуйидаги формуладан фойдаланилади

$$\delta''_{1.2} = -\delta''_{2.1} = -0{,}00253(x_2 - x_1)y_m \qquad \textbf{(28.18)}$$

(28.12), (28.16), (28.18) формулалардан фойдаланиб ҳисобланган $\delta_{1.2}, \delta_{2.1}$ тузатмалар ўлчанган йўналишларга алгебраик қўшилади.

Ўлчанган йўналишларга δ_{ik} тузатмаларни киритиш натижасида учбурчакнинг эгри томонлари орасидаги бурчаклардан бу томон учларини бирлаштирувчи ватарлари орасидаги бурчакларга ўтилади. Натижада учбурчакларнинг йиғиндиси сферик ортиқлик ξ катталигига камаяди. Шу сабабли бурчакларга берилаётган тузатма δ_i лар йиғиндиси тескари ишора билан сферик ортиқликка тенг бўлиши керак, яъни

$$\delta_A + \delta_B + \delta_C = -\xi \qquad \textbf{(28.19)}$$

бу ерда: δ_i тузатмалар ўнг томон йўналишига бўлган тузатма δ_{ik} билан чап томон йўналишига берилган δ_{ij} тузатмалар фарқи каби топилади

$$\delta_i = \delta_{ik} - \delta_{ij}$$

(28.12),(28.17) ва **(28.18)** формулалар билан δ_{ik} тузатмаларни ҳисоблашда 1 класс триангуляция ва полигонометрияда абцисса қийматларини 1-2м аниқликда, 2 классда 10 метр ва ундан паст классдаги геодезик тармоқларда 0,1 км гача бўлган аниқликда бўлиши керак. Ординаталар хатоликлари тузатмаларни ҳисоблаш аниқлигига таъсир этмайди.

1-класс триангуляция ва полигонометрияларда масофалар ва йўналишларни текисликка редукциялашда тўғри бурчакли координаталарни ҳисоблаш аниқлигига талаб ортади, шу сабабли координаталарни 1-2 м аниқликда ҳисоблаш учун тақрибий координаталардан фойдаланиб томонлар ва йўналишларга тақрибий ΔS_{ik} ва δ_{ik} тузатмалар киритилади.

Шундай қилиб 1-класс триангуляция ва полигонометрияларни текисликка ўтиказиш учун координаталар ва тузатмаларни кетма-кет яқинлашиш орқали топилади. Бундай масалани ечишни кейинги параграфда кўриб чиқамиз.

Геодезик азимутлардан дирекцион бурчакларга ўтиш

Эллипсоид сатҳидаги геодезик чизиқнинг текисликдаги бошланғич ва охирги нуқталарини бирлаштирувчи ватар $S_{1.2}$ ни дирекцион бурчаги $\alpha_{1.2}$ ни геодезик чизиқ азимути орқали ҳисоблаш қуйидаги формуладан фойдаланиб бажарилади:

$$\alpha_{1.2} = A_{1.2} - \gamma_1 + \delta_{1.2} \qquad \textbf{(28.20)}$$

бунда: γ_1-1 нуқтада текисликдаги Гаусс меридианлар яқинлашиш бурчаги; $\delta_{1.2}$ - геодезик чизиқни текисликда тасвирлаш эгрилиги учун тузатма **(28.12)** ёки **(28.17)** формулалар билан ҳисобланади.

Берилган нуқтада меридианлар яқинлашиши γ_1 ни ҳисоблашнинг бир неча хил формулалари мавжуд. Улардан айримларини келтирамиз.

Тўғри бурчакли координаталардан фойдаланиб 1 класс триангуляция ва полигонометрияда γ_1 бурчагини 0,001” гача ҳисоблашда қуйидаги формулалардан фойдаланилади

$$\begin{aligned}\gamma_1 = \{1 - [&\left(0{,}33333 - 0{,}00225 cos^4 B_x\right) - \\ &- \left(0{,}2 - 0{,}067\cos^2 B_x\right) z^2] z^2\} z \sin B_x \rho''\end{aligned} \qquad \textbf{(28.21)}$$

Агарда геодезик координаталар B_1, $l = L_1 - L_0$ берилган бўлса **(28.21)** ўрнига

$$\begin{aligned}\gamma_1 = \{1 + [&\left(0{,}33333 + 0{,}00674 cos^2 B_1\right) + \\ &+ \left(0{,}2\cos^2 B_1 - 0{,}0067\right) f^2] l^2 \cos^2 B_1\} l \sin B_1 \rho''\end{aligned} \qquad \textbf{(28.22)}$$

формула ишлатилади.

(28.21) ва **(28.22)** формулаларда **(28.1)** ва **(28.2)** формулалардаги белгилашлар қабул қилинган γ_1ни 0,01” гача аниқликда ҳисоблашда:

$$\gamma = l\sin B + \frac{1}{3}\frac{l^3}{\rho''^2}\sin B\cos^2 B(1+3\eta^2) \qquad \textbf{(28.23)}$$

формуладан, 0,1” аниқликда ҳисоблашда:

$$\gamma = l\sin B + \frac{1}{3}\frac{l^3}{\rho''^2}\sin B\cos^2 B \qquad \textbf{(28.24)}$$

формуладан, 0,1’ аниқликда ҳисоблашда:

$$\gamma = l\sin B \qquad \textbf{(28.25)}$$

формуладан фойдаланиш мумкин **(28.22)-(28.25)** формулаларда $l = L - L_0$ нуқта узоқлиги L билан зона ўқ меридиан узоқлиги L_0 орасидаги фарқ, B-нуқтанинг геодезик кенглиги. Шуни такидлаш лозимки, меридианлар яқинлашиш бурчаги γ_1нинг ишораси *l* ишораси билан бир хил бўлади.

§28.4.3. 1-класс триангуляция учбурчагини эллипсоиддан текисликка редукциялаш

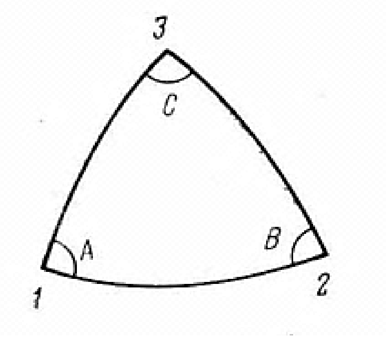
1-класс триангуляция учбурчагини эллипсоиддан текисликка редукциялаш қуйидаги алгоритмда бажарилиши мумкин.

1. Бошланғич 1 нуқта геодезик координаталари B_1, L_1 дан фойдаланиб шу нуқтанинг тўғри бурчакли координаталари x_1, y_1 ҳисобланади (**(28.1)**да мисол келтирилган).
2. Тўғри бурчакли x_1, y_1координаталардан фойдаланиб бошланғич 1-банднинг геодезик координаталари B_1, L_1 ҳисобланади, бу билан 1-банддаги ҳисоб текширилади, (**(28.2)** да мисол келтирилган).

3. 1-бандда ҳисоблаб топилган тўғри бурчакли координаталардан фойдланиб бошланғич 1-бандда **(28.21)** формула билан меридианлар яқинлашиш бурчаги γ_1 ҳисобланади.

4. 3-банддаги ҳисобни текшириш мақсадида **(28.22)** формуладан фойдаланиб бошланғич 1-бандда геодезик координаталар ёрдамида меридианлар яқинлашиш бурчаги ҳисобланади.

5. Биринчи яқинлашишда учбурчак томон узунликлари ҳисобланади:



$$S_{2.3} = S_{1.2}\frac{\sin A}{\sin C}; \qquad S_{1.3} = S_{1.2}\frac{\sin B}{\sin C};$$

6. Бошланғич координаталар x_1, y_1 бошланғич томон узунлиги $S_{1.2}$ ва ўлчанган A, B, C бурчаклардан фойдаланиб 1:100000 (ёки бошқа йирикроқ) масштабда учбурчак схемаси чизилади. Шу чизмадан график равишда 2 ва 3 нуқталарнинг x_2, y_2, x_3, y_3 координаталари олинади (28.1 шакл).

7. Биринчи яқинлашишда δ, ΔS (метрда) тузатмалари ҳисобланади

$$\delta''_{1.2} = -\delta_{2.1} = -0{,}00253 y_m \Delta x;$$
$$\Delta S = 0{,}123 y_m^2 S_{1.2}.$$

Буларда: $y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2); \Delta x = x_2 - x_1.$

8. Биринчи яқинлашишда бошланғич томон дирекцион бурчаги ҳисобланади:

$$\alpha_{1.2} = A_{1.2} - \gamma_1 + \delta_{1.2}.$$

9. Биринчи яқинлашишда бурчакларга δ_i тузатмалар ҳисобланади.

$$\delta_1 = \delta_{12} - \delta_{13}; \quad \delta_2 = \delta_{23} - \delta_{21}; \quad \delta_3 = \delta_{31} - \delta_{32}. \qquad \textbf{(28.26)}$$

10. Биринчи яқинлашишда учбурчакнинг 2 ва 3 учлари координаталари ҳисобланади:

$$\left.\begin{array}{ll} x_2 = x_1 + \Delta x_2 & x_3 = x_1 + \Delta x_3; \\ y_2 = y_1 + \Delta y_2 & y_3 = y_1 + \Delta y_3. \end{array}\right\}, \qquad \textbf{(28.27)}$$

бунда:

$$\begin{array}{ll} \Delta x_2 = s_{12}\cos\alpha_{12}; & \Delta x_3 = s_{13}\cos\alpha_{13}; \\ \Delta y_2 = s_{12}\sin\alpha_{12}; & \Delta y_3 = s_{13}\sin\alpha_{13}; \\ s_{12} = S_{12} + \Delta S_{12}; & s_{13} = S_{13} + \Delta S_{13}. \end{array}$$

11. Иккинчи яқинлашишда бошланғич томон 1-2 га ΔS тузатма ва йўналишларга δ_{ik} тузатмаларни ҳисобланади:

$$\begin{array}{l} \delta_{12} = -f_m(x_2 - x_1)\left(y_m - \dfrac{y_2 - y_1}{6} - \dfrac{y_m^3}{3R_m^2} \right) - \delta'; \\ \delta_{21} = +f_m(x_2 - x_1)\left(y_m + \dfrac{y_2 - y_1}{6} - \dfrac{y_m^3}{3R_m^2} \right) + \delta'. \end{array} \qquad \textbf{(28.28)}$$

$$\begin{array}{l} \delta_{12} = -f_m\Delta x\left(y_m - \dfrac{\Delta y}{6} - \dfrac{y_m^3}{3R_m^2} \right) - \delta'; \\ \delta_{21} = +f_m\Delta x\left(y_m + \dfrac{\Delta y}{6} - \dfrac{y_m^3}{3R_m^2} \right) + \delta'. \end{array} \qquad \textbf{(28.28a)}$$

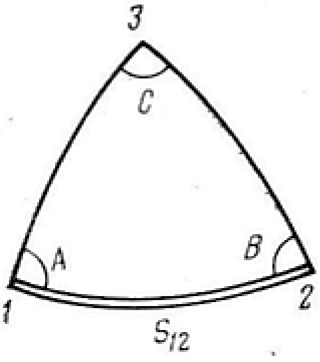
$$\Delta S = \frac{S}{2}\left(\frac{y_m}{R_m}\right)^2 + \frac{S}{24}\left[\left(\frac{\Delta y}{R_m}\right)^2 + \left(\frac{y_m}{R_m}\right)^4\right],$$

бу ерда:

$$\delta' = \frac{\eta^2 (y_2 - y_1) y_m^2 tgB_m}{R_m^2}\rho'',$$

$$\eta^2 = e'^2\cos^2 B_m; \qquad e'^2 = 0{,}00673853; \qquad R_m = \sqrt{MN} = \sqrt{\rho''/2f_m};$$

$$B_m = (B_1 + B_2)/2.$$



28.1-шакл.

f_m - B_mаргументбўйича 28.1-жадвалдан олинади;

12. Иккинчи яқинлашишда **(28.26)** формуладан фойдаланиб бурчакларга δ_i тузатмалар ҳисобланади.

13. Иккинчи яқинлашишда текисликда бошланғич томон узунлиги ва унинг дирекцион бурчаги α_{12} ҳисобланади.

$$s_{12} = S_{12} + \Delta S; \qquad \alpha_{12} = A_{12} - \gamma_1 + \delta_{12}.$$

14. Иккинчи яқинлашишда s_{13} ва s_{23} томонлар узунлиги ҳисобланади

$$s_{13} = s_{23}\frac{\sin B}{\sin C}; \qquad s_{23} = s_{12}\frac{\sin A}{\sin C};$$

15. иккинчи яқинлашишда олинган s ва α қийматлари бўйича **(28.21)** формулалардан фойдаланиб учбурчакни 2 ва 3 учларини натижавий координаталари ҳисобланади.

Д-мисол. А ва В мисоллардаги натижалардан фойдаланиб 1 класс триангуляция учбурчагини Красовский эллипсоидидан Гаусс-Крюгер проекциясида текисликка редукциялаш талаб этилсин (28.1 шакл).

<u>Бошланғич маълумотлар</u>

B_1=51°38′43,9023″	A_{12}=118°49′32,702″
L_1=24°02′13,1360″	∠A=61°43′07,185″
x_1=5728374,726 м	∠B=59°14′13,034″
y_1=+210198,193 м	∠C=59°02′41,284″
S_{12}=25938,210 м	L_0=21°

Топшириқни 6 банди бажарилгандан сўнг x_2 ва x_3 аргументлар бўйича 28.1-жадвалдан B_2 ва B_3 кенгликларни тақрибий қийматлари олинади

B_2=51°32′ ; B_3=51°46′.

Ечим алгоритми

1. Бошланғич 1 нуқтада тўғри бурчакли координаталардан фойдаланиб меридианлар яқинлашиш бурчаги γ_1ни ҳисоблаш [**(28.21)** формула, B_x ва z қийматлари мисол - В ечиш схемаси жадвалидан олинади].

Формула элементлари	**Натижалар**	**Формула элементлари**	**Натижалар**
$\cos B_x$	0,6199871	Z^2	0,00281382
$\cos^2 B_x$	0,3843840	$\sin B_x$	0,7846121
$\cos^4 B_x$	0,1477511	γ_1''	8576,737″
Z	0,05304550	γ_1^0	2°22′56,787″

2. 1-банддаги ҳисобни текшириш. Бошланғич 1 нуқтада геодезик координаталардан фойдаланиб меридианлар яқинлашиш бурчаги γ_1 ни ҳисоблаш [**(28.22)** формуладан фойдаланилади].

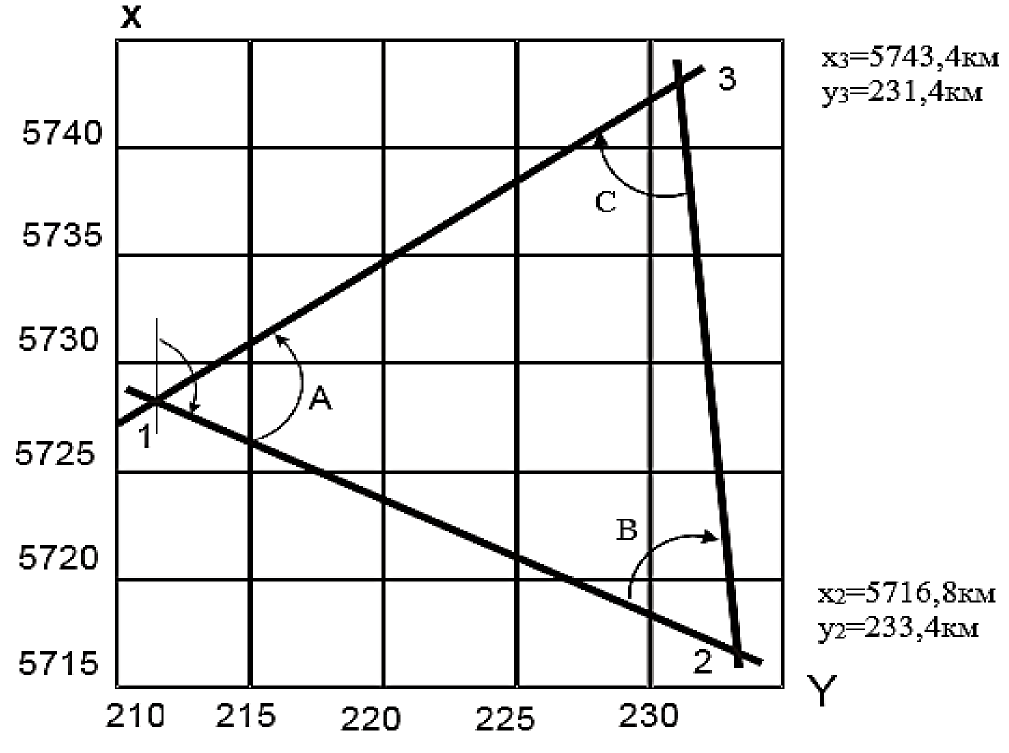
Формула элементлари	**Натижалар**	**Формула элементлари**	**Натижалар**
$\cos B_1$	0,6205248	$\sin B_1$	0,7841868
$\cos^2 B_1$	0,3843840	γ_1''	8576,737
*l*рад	0,053005341	γ_1^0	2°22′56,737″
l^2	0,002809566		

$l_{рад} = \frac{L_1 - L_0}{\rho''}$ - мисол А ни ечиш схемасидан олиниши мумкин.

3. Биринчи яқинлашишда учбурчак томонларини узунликларини ҳисоблаш

Учбурчак бурчак учлари	**Эллипсоиддаги бурчаклар**	**Бурчак синуслари**	**Томонлар, м**
3	59°02′41″	0,85757	25938
1	61°43′07″	0,88063	26635
2	59°14′13″	0,85929	25990

4. Бошланғич 1 нуқта координаталари, бошланғич томон узунлиги ва учбурчак бурчакларидан фойдаланиб масштабда, масалан 1:100000 масштабда (28.2 шакл) учбурчак схемасини чизиш ва 2, 3 бурчак учларини (нуқталар) координаталарини схемадан график равишда олиш.



28.2-шакл

5. Биринчи яқинлашишда γ_{ik} ва ΔS тузатмаларни ҳисоблаш.

Белгилашлар (формулалар элементлари)	1	1	2
	2	3	
x_1, км	5728,4	5728,4	5716,8
x_2, км	5716,8	5743,4	5743,4
$\Delta x = x_2 - x_1$	-11,6	+15,0	+26,6
y_m	+221,8	+220,8	+232,4
$y_1, км$	+210,2	+210,2	+233,4
$y_2, км$	+233,4	+231,4	+231,4
y_m^2	49135	48753	54010
$S, км$	26	26	27
$\delta''_{12} = -0{,}00253 y_m \Delta x$	+6	-8	-16
$\delta''_{21} = -\delta''_{12}$	-6	+8	+16
ΔS_m	16	16	18

6. Биринчи яқинлашишда бошланғич томон дирекцион бурчаги α_{12} ни ҳисоблаш.

$$A_{12}=118°49'33''$$
$$-\gamma_1=-\ 2°22'57''$$
$$\underline{+\delta_{12}=+\ 6''}$$
$$\alpha_{12}=116°26'42''$$

2 ва 3 учбурчак учларини координаталарини биринчи яқинлашишда ва δ_i ва ΔS ларни иккинчи яқинлашишда ҳисоблаш.

28.2-жадвал

№	Белгилаш	1 2	1	2	Ҳисоблаш ва тўлдириш тартиби
			3		
1	2	3	4	5	6
1	α	116°26′42″	116°26′42″	296°26′42″	
2	<, (бурчаклар)		-61°42′07″	+59°14′13″	
3	δ		+14″	-10″	
4	α_{12}	116°26′42″	54°43′49″	355°41′05″	
5	S, км	25,938	25,990	26,635	
6	ΔS, м	16	16	18	
1	2	3	4	5	6
7	s, км	25,954	26,006	26,653	
8	$\cos\alpha_{12}$	-0,44534	+0,57743	+0,99716	
9	$\sin\alpha_{12}$	+0,89536	+0,81644	-0,07524	
10	x_1, км	5728,375	5728,375	5716,817	$\Delta x = s\cos\alpha_{12}$
11	Δx, км	-11,558	+15,016	+26,577	
12	x_2, км	5716,817	5743,392	5743,394	$\Delta y = s\sin\alpha_{12}$
13	y_1, км	+210,198	+210,198	+233,436	
14	Δy, км	+23,238	+21,232	-2,005	
15	y_2, км	+233,436	+231,430	+231,431	
16	y_m, км	+221,817	+220,814	+232,434	
17	$\Delta y/6$, км	+3,873	+3,539	-0,334	$y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$
18	$y_m - \Delta y/6$	+217,944	+217,275	+232,768	
19	$y_m + \Delta y/6$	+225,090	+224,353	+232,100	
20	$-\text{III}_\delta$	-0,09	-0,09	-0,10	$\text{III}_\delta = y_m^3/3R_m^2$
21	σ_1	+217,85	+217,18	+232,67	$\sigma_1 = y_m - \Delta y/6 - \text{III}_\delta$
22	σ_2	+225,60	+224,26	+232,00	$\sigma_1 = y_m + \Delta y/6 - \text{III}_\delta$
23	B_m	51°37′	51°44″	51°42′	
24	f_m	0,00253123	0,00253116	0,00253118	

25	δ'_{12}	+6,373″ (4)	-8,255 (6)	-15,652 (1)	$\delta'_{12}=-f_m\sigma_1\Delta x$
26	$-\delta'$	-0,003″	-0,003	+0,000	
27	δ_{12}	+6,370″	-8,258″	-15,652″	
28	δ'_{21}	-6,600	+8,524	+15,607″	$\delta'_{21}=f_m\sigma_2\Delta x$
29	$+\delta'$	+0,003	+0,003	-0,000	
30	δ_{21}	-6,597	+8,527	+15,607″	
31	R_m, *км*	6383,105			
32	$y_m : R_m$	0,0347506			
33	$\Delta y : R_m$	0,0036405			
34	$S/2$	12969 м			
35	$(y_m : R_m)^2$	0,0012076			
36	$S/24$	1081 м			
37	$(\Delta y : R_m)^2 +$ $+(y_m : R_m)^4$	0,00001471			
38	ΔS	15,677м			
39	s=S+ΔS	25953,887 м			

7. Биринчи яқинлашишда бурчакларга δ_i тузатмаларни ҳисоблаш.

$$\delta_1 = \delta_{12} - \delta_{13} = +6''+8''= +14'',$$
$$\delta_2 = \delta_{23} - \delta_{21} = -16''+6''= -10'',$$
$$\delta_3 = \delta_{31} - \delta_{32} = +8''-16''= -8''.$$

8. Учбурчакнинг 2 ва 3 учларини биринчи яқинлашишда ва δ, ΔS тузатмаларни иккинчи яқинлашишда ҳисоблаш (28.2-жадвал ва изоҳда келтирилган).

9. Иккинчи яқинлашишда бурчакларга δ_i тузатмаларни ҳисоблаш (28.26 формулалар).

$$\delta_1 = \delta_{12} - \delta_{13} = +6{,}371''+8{,}258''= +14{,}629'',$$
$$\delta_2 = \delta_{23} - \delta_{21} = -15{,}651''+6{,}597''= -9{,}054'',$$
$$\delta_3 = \delta_{31} - \delta_{32} = +8{,}526''-15{,}606''= -7{,}080''.$$

Текшириш: $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = -\varepsilon, \quad \varepsilon = fab\sin C = 1{,}504''; \quad \sum\delta_i = -1{,}505''.$

10. Учбурчакнинг текисликдаги аниқ ечими.

Учбурчак учлари	Ўлчанган бурчаклар	δ_i	Текисликдаги бурчаклар	Бурчаклар синуслари	Томонлар узунликлари, м
3	59°02′41,284″	-7,080	59°02′34,204″	0,85755210	25953,887

1 2	61°43′07,185″ 59°14′13,034″	+14,628 -9,055	61°43′21,813″ 59°14′03,979″	0,88066533 0,85926752	26653,410 26005,804
∑	180°00′01,503″	-1,507	179°59′59,996″		

11. Бошланғич томон дирекцион бурчагининг аниқ қиймати.

A_{12}=118°49′33,702″
- γ_1=- 2°22′56,737″
+δ_1=+ 6,371″
α_{12}=116°26′42,335″

12. Учбурчак учларининг якуний координаталари.

№	Белгилаш	1	1	2
		2	3	
1.	α		116°26′42,335″	296°26′42,335″
2.	<		-61°43′21,813″	+59°14′03,979″
3.	α_{12}	116°26′42,335″	54°43′20,522″	355°40′46,314″
4.	$\cos\alpha_{12}$	-0,44539999	+0,5775897	+0,99705828
5.	s	25953,887 м	26005,804 м	26653,410 м
6.	$\sin\alpha_{12}$	+0,89536155	+0,81636311	-0,07533495
7.	x_1	5728374,726	5728374,726	5716816,422
8.	Δx	-11558,304	+15019,365	+26577,668
9.	x_2	5716816,422	5743394,091	5743394,090
10.	y_1	4710198,193	4710198,193	4733436,305
11.	Δy	+23238,112	+21230,179	-2007,933
12.	y_2	4733436,305	4731428,372	4731428,372

Изоҳлар

R_m ни ҳисоблаш учун 28.2-жадвалдан учбурчак учларининг x_2, x_3 координаталарини оламиз. x_2, x_3 координаталардан фойдаланиб 28.1 жадвалдан итерполяция қилиш йўли билан учбурчак 2 ва 3 учларининг B_2 ва B_3

кенгликларини топамиз (B_2 ва B_3 қийматлари берилган бўлса (1 u) формула билан бирданига B_m ни қийматлари ҳисобланилади).

<u>Мисол</u> x_2=5717 км 28.1-жадвалда $B_ю$=50° ва $B_п$=52° оралиғдаги $x_{км}$ қийматлари оралиғида, яъни

$B_ю$=50° да $x_ю$=5541 км
$B_п$=52° да $x_п$=5763 км
$\Delta B_{юп}$=52°-50°=2°,
$\Delta x_{юп}$=5763-5541=222 км, (индиксдаги ю – юқори, п – пастки).

Демак, кенгликни 2° ортишига абсцисса 222 км га ортяпти.

x_2 билан $x_ю$ орасидаги фарқни топамиз.

$$x_{ю2}=x_2-x_ю=5717-5541=176 \text{ км.}$$

Энди 176 км абсцисса орттирмасига тўғри келадиган кенглик ортирмасини топамиз.

$$\Delta B_{ю2}=\frac{x_{ю2}-\Delta B_{юп}}{x_{юп}}=\frac{176\cdot120'}{222}=95'$$

$$B_2=B_ю+\Delta B_{ю2}=50°+95'=50°+1°35'=51°35'$$

Худди шу тариқа B_3 ни топамиз.

$$B_3=B_ю+\Delta B_{ю3}=50°+109'=50°+1°49'=51°49'$$

Томонлар бўйича ўртача кенгликни ҳисоблаймиз

$$B_{12m}=\frac{B_1+B_2}{2}=\frac{51^0 39'+51^0 35'}{2}=51^0 37';$$

$$B_{13m}=\frac{B_1+B_3}{2}=\frac{51^0 39'+51^0 49'}{2}=51^0 44';$$

$$B_{23m}=\frac{B_2+B_3}{2}=\frac{51^0 35'+51^0 49'}{2}=51^0 42'.$$

B_m қийматлари 28.2 жадвалини n23 га ёзилади.

28.1-жадвалдан B_{12m}, B_{13m}, B_{23m} кенгликлар бўйича f_m қийматларини интерполяциялаш орқали топамиз.

Мисол учун f_{12m} ни B_{12m}=51°37′ даги қийматини топиш учун $B_ю$=50° ва $B_п$=52°даги Δf фарқни топамиз, $\Delta f_{юп} = f_ю - f_п$ = 0,0025322 - 0,0025310 =

= - 0,0000012 = - 12×10^{-7}

$$\Delta f_{12m} = \frac{\Delta f_{юп}(B_{12m} - B_{ю})}{(B_{п} - B_{ю})} = \frac{-12\cdot 10^{-7}\cdot 97'}{120'} = -0{,}00000097 = -9{,}7\cdot 10^{-7}.$$

$$f_{12m} = f_{ю} + \Delta f_{12m} = 0{,}0025322 - 0{,}00000097 = 0{,}00253123.$$

юқоридаги мисолдагидек f_{13m} ва f_{23m} ларни топамиз

$$\Delta f_{13m} = \frac{-12\cdot 10^{-7}\cdot 104'}{120'} = -10{,}4\cdot 10^{-7};$$

$$\Delta f_{23m} = \frac{-12\cdot 10^{-7}\cdot 102'}{120'} = -10{,}2\cdot 10^{-7}.$$

$$f_{13m} = 0{,}0025322 - 10{,}4\cdot 10^{-7} = 0{,}00253116;$$

$$f_{23m} = 0{,}0025322 - 10{,}2\cdot 10^{-7} = 0{,}00253118.$$

f_m қийматлари28.2 жадвални n26 гаёзилади. Сўнгра $R_m = \sqrt{\rho''/2f_m}$ формуладан фойдаланиб R_{m} қийматлари топилади.

$$R_{12m} = \sqrt{206265/2\cdot 0{,}00253123} = 6383{,}105км;$$
$$R_{13m} = 6383{,}193км;$$
$$R_{23m} = 6383{,}168км.$$

R_{m} қийматлари 28.2 жадвални n33 га ёзилади.

(28.28) формуладаги $\frac{y_m^3}{3R_m^2}$ ҳадини ҳисоблаймиз, 28.2 – жадвалда ушбу ҳадни III_{δ} билан белгиланган (28.2 жадвал n20 га ёзилади).

$$\text{III}_{12\delta} = \frac{y_m^3}{3R_m^2} = \frac{221{,}817^3}{3\cdot 6383{,}105^2} = 0{,}089;$$
$$\text{III}_{13\delta} = 0{,}088; \qquad \text{III}_{23\delta} = 0{,}103.$$

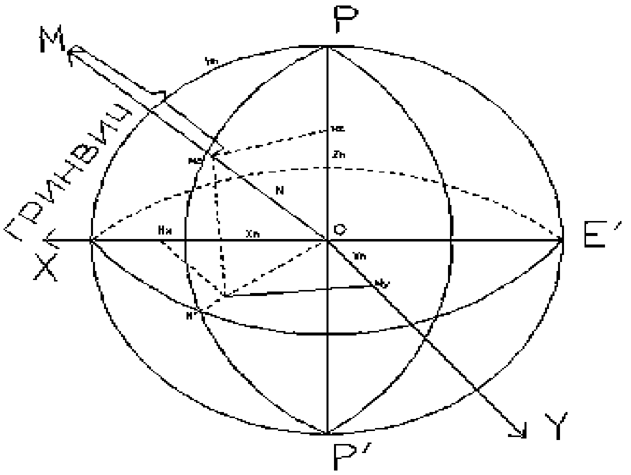
σ′ ни ҳисоблаш [формула (28.28 а)]

№	Белгилаш	1 2	1 3	2 3	Изоҳлар
1	e'^2	0,00673853	0,00673853	0,00673853	
2	B_m	51°37′	51°44′	51°42′	
3	$\cos^2 B_m$	0,38554138	0,38356013	0,38412605	
4	η^2	$0{,}00259398_2$	$0{,}00258463_1$	$0{,}00258844_4$	$\eta^2 = e'^2 \cos^2 B_m$
5	tgB_m	1,2634402	1,26773528	1,26621962	

6	$y_2 - y_1$	+23,238	+21,232	-2,005	5,2 жадвал n14
7	y_m	+221,817	+220,814	+232,434	
8	y_m^2	49202,781	48758,823	54025,564	
9		3447,224	3392,120	355,027	$(4)\cdot(5)\cdot(6)\cdot(8)$
10	R_m	6383,105	6383,193	6383,168	
11	R_m^3	$2,6008417\times10^1$	$2,6008417\times10^1$	$2,6008111\times10^1$	
12	$+\sigma'$	+0,003	+0,003	+0,000	$[(9)/(11)]\rho''$

§29.Геодезик координаталарни фазовий тўғри бурчакли координаталарга ўзгартириш

Ишдан мақсад B, L, H геодезик кординаталарни координата боши референц элепсоид марказида бўлган фазовий тўғри бурчакли кординаталар x, y, z га ўзгартириш. B, L, H ни x, y, z га ўзгартириш қуйидаги формуладан фойдаланиб амалга оширилади.



$$X = (N + H)\cos B\cos L$$

$$Y = (N + H)\cos B\sin L$$

$$Z = [(1 - e^2)N + H]\cos B$$

Бунда: B, L, H- геодезик кенглик, узоқлик ва баландлик;

N- биринчи вертикал эгрилик радиуси;

e^2- элепсоиднинг биринчи эксцентриситети квадрати;

1942й (СК-42) координата системасидан СК-95 системасига пункт геодезик координаталарини ўзгартириш талаб этилсин.

Красовский элепсоидини катта ярим ўқи 6378245м ва қутб сиқилиши $\alpha = 1/298.3$

Геодезик координаталардан фазовий тўғри бурчакли координаталарга ўтишга мисол:

№	**Формула, белгилашлар**	**Ҳисоблаш натижалари**	**Изох**
1	B	$59^0 46'15.0''$ ш	геодезик кенглик
2	L	$30^0 19'28.0''$ $ш_к$	геодезик узоқлик
3	H	127.363м	
4	a ,м	6378245.0	эллепсоид катта ярим ўқ
5	α	1/298.3	эллепсоид сиқилиш
6	b=a-a/298.3	6356863.0	эллепсоид кичик ярим ўқ
7	$e^2=(a^2-b^2)/a^2$	0.00669343	меридианал эллепсоид эксцентриситети квадрати
8	$N=a/\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}$	6394240.4	биринчи вертикал кесим эгрилик радиуси
9	N+H	6394367.8	оралиқ, натижа
10	$X = (N + H)\cos B\cos L$	2778842.8	геоцентрик X
11	$Y = (N + H)\cos B\sin L$	1625415.2	геоценрик Y
12	$Z = [(1 - e^2)N + H]\cos B$	5561832.3	геоцентрик Z

Топширик. СК- 42 координата системасидан геодезик координаталар фазовий тўғри бурчакли геосентирик СК- 95 координаталар системасига ўзгартиринг вариантлар бўйича бошланғич маълумотлар:

Вариантлар №	**СК- 42 геодезик кенглик B шимолий**	**СК- 42 геодезик узоқлик L шарқий**	**СК- 42 геодезик баландлик H м**
1	2	3	4
1	$43^0 16' 21.0''$	$76^0 56' 01.0''$	140.443
2	64 44 02.0	177 28 05.0	17.255

3	51 13 13.0	04 25 16.0	10.000
1	2	3	4
4	64 33 12.0	40 32 54.0	6.897
5	46 21 36.0	48 02 13.0	25.769
6	39 23 39.0	74 25 38.0	15.008
7	40 23 51.0	49 52 15.0	19.059
8	30 18 45.0	76 37 34.0	120.793
9	78 05 07.0	14 13 41.0	50.672
10	06 10 10.0	106 50 01.0	20.090
11	52 29 01.0	13 24 14.0	87.047
12	32 18 23.0	64 45 15.0	1.997
13	42 21 52.0	71 03 03.0	5.039
14	50 51 00.0	04 21 03.0	35.809
15	26 10 41.0	106 45 12.0	3.716
16	44 26 26.0	173 10 11.0	80.997
17	33 55 32.0	18 27 56.0	145.008
18	22 55 33.0	43 12 00.0	97.580
19	37 45 00.0	122 26 16.0	235.851
20	34 37 17.0	58 27 00.0	100.099
21	26 12 09.0	28 02 12.0	29.005
22	22 35 34.0	88 22 09.0	2.059
23	37 50 00.0	144 58 51.0	70.005
24	56 59 31.0	24 09 02.0	6.127
25	34 53 56.0	56 11 52.0	160.005
26	57 01 17.0	42 56 21.0	98.005
27	61 15 34.0	22 00 54.0	43.739
28	20 54 03.0	140 37 12.0	52.946
29	85 33 08.0	70 14 00.0	0.000
30	03 41 16.0	05 56 31.0	110.009

§30. Фазовий тўғри бурчакли координаталарни бир системадан бошқа системага ўзгартириш

СК- 42 координата системасидан СК- 95 координата системасига ўтказиш икки босқичда бажарилади: биринчи СК- 42 дан ПЗ- 90 системасига, сўнгра ПЗ- 90 дан СК- 95 системасига ўтказилади. ПЗ- 90 координата системасида ГЛОНАСС космик апаратларнинг харакатлари тафсифланади, бу эса СК- 42 ва СК- 45 референц системаларига нисбатан дамер системаси ҳисобланади.

Умумий кўринишда дамер тўғри бурчакли фазовий координата системаси ва референц формула билан ифодаланади:

$$\begin{bmatrix}\bar{X}\\ \bar{Y}\\ \bar{Z}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} + R\begin{bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{bmatrix}(1+\Delta m)R = \begin{bmatrix}1 & +\varepsilon_z & -\varepsilon_y\\ -\varepsilon_z & 1 & +\varepsilon_x\\ +\varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1\end{bmatrix}$$

Бунда: $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$- дамер системасида нуқталар координаталар;

X, Y, Zреферени системасида координаталар;

x, y, z- референц элепсоиди марказини Ер марказига нисбатан координаталари (абсалют чизиқли ички элементлари).

ε_x, ε_y, ε_z- дамер координата системаси ўқларини референц система ўқларига нисбатан радиан ўлчовида кичик бурчакка бурилиш, ε_x, ε_y қутубга бўлган йўналишнинг фарқини тавсифлайди, бунда қутб харакатининг халқаро шарли бошланиш йўналишидан ушбу астронома геодезик тўрдаги астронома-геодезик кузатиш олиб келади; ε_z- референц ва дамер системаларида узоқликни ҳисоб бошлари фарқини тавсифлайди; $(1+\Delta m)$- референц системадан дамер системасига ўтказишдаги масштабига тузатма. Бу боғланишдан бир референц системадан бошқа системага ўтишда ҳам фойдаланилади, бунда ўтиш параметрларини мос сонли қийматлари ишлатилади. Амалиётда юқорида келтирилган формулани ёйилган формуласидан фойдаланилади:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= X + x\Delta m + \varepsilon_z y - \varepsilon_y z + x\\ \bar{Y} &= Y + y\Delta m + \varepsilon_x z - \varepsilon_y x + y\\ \bar{Z} &= Z + z\Delta m + \varepsilon_y x - \varepsilon_x y + z\end{aligned}$$

СК-42 дан ПЗ- 90 тўғри бурчакли координата системаларига ўтишда ҳозир амалиётда фойдаланилаётган меъёрий хужжатларда ўтиш параметрларининг қуйидаги сонли қийматлари ишлатилмоқда:

$$\begin{bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{bmatrix}_{ПЗ-90} = \begin{bmatrix}1 & -3.3*10^{-6} & 1.8*10^{-6}\\ +3.3*10^{-6} & 1 & 0\\ -1.8*10^{-6} & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}_{СК-42} + \begin{bmatrix}+25\\ -141\\ -80\end{bmatrix}$$

ПЗ-90 дан СК- 42 га ўтишда

$$\begin{bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{bmatrix}_{СК-42} = \begin{bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{bmatrix}_{ПЗ-90} - \begin{bmatrix}+25.90\\ -130.94\\ -81.76\end{bmatrix}$$

Шундай қилиб СК-42 дан ПЗ-90 ўтишда $\Delta m, \varepsilon_z, \varepsilon_y, x, y, z$ параметрлар, ПЗ-90 дан СК-45 га ўтишда эса x, y, z нольга тенг бўлади.

Юқоридагиларни инобатга олиб ушбу ишни бажариш учун иш формулаларини ёзамиз:

$$X_{П3-90} = X_{СК-42} - X_{СК-42} * 3.3 * 10^{-6} + Z_{CR-42} * 1.8 * 10^{-6} + 25$$

$$Y_{П3-90} = Y_{СК-42} - Y_{СК-42} * 3.3 * 10^{-6} - 141$$

$$Z_{П3-90} = Z_{СК-42} - Z_{СК-42} * 3.3 * 10^{-6} + 80$$

$$X_{СК-95} = X_{П3-90} - 25{,}90$$

$$Y_{СК-95} = Y_{П3-90} + 130.94$$

$$Z_{СК-95} = Z_{П3-90} + 81.76$$

Ишчи формулалардан фойдаланиб хисоблашга мисол:

№	Формулалар, белгилашлар	Ҳисоблаш натижаси	изох
1	2	3	4
1	$X_{СК-42}$	2778842.8	берилган, СК-42 координаталари
2	$Y_{СК-42}$	1625415.2	
3	$Z_{СК-42}$	5561832.3	
4	$-Y_{СК-42} * 3.3 * 10^{-6}$	-5.3638701	ўзгартириш матрицаси элементлари
5	$X_{СК-42} * 3.3 * 10^{-6}$	9.1901812	
6	$-X_{СК-42} * 1.8 * 10^{-6}$	-5.0019170	
7	$Z_{СК-42} * 1.8 * 10^{-6}$	10.011298	
8	$X_{П3-90} = (1) + (4) + (7) + 25$	2778872.4	ПЗ-90 координаталари
9	$Y_{П3-90} = (2) + (5) - 141$	1625283.4	
1	2	3	4
10	$Z_{П3-90} = (3) + (6) - 80$	5561747.3	
11	$X_{СК-95} = (8) - 25.90$	2778842.5	СК-95 координаталари
12	$Y_{СК-95} = (9) + 130.94$	1625414.3	
13	$Z_{СК-95} = (10) + 81.76$	5561829.1	
14	$\Delta x_{(СК95-42)}$	-0.3	берилган ва ўзгартирилган координаталар фарқи
15	$\Delta y_{(СК95-42)}$	-0.9	
16	$\Delta z_{(СК95-42)}$	-3.2	

§31. Фазовий тўғри бурчакли координаталарни геодезик координаталарга ўтказиш

Баландлиги 100-200 метрдан катта бўлмаган нуқталарни фазовий x, y, z координаталарини B, L, H- геодезик координатага ўтказиш қуйидаги тартибда амалга оширилади:

-қутуб масофаси ҳисобланади:

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

-узоқликлар ҳисобланади:

$$L = \arcsin\left(\frac{Y}{D}\right) = \mathrm{arctg}\frac{Y}{X}$$

-кенгликлар ҳисобланади:

$$B = \mathrm{arctg}\left[\frac{Z}{D(1 + e^2)}\right]$$

Бу ерда: e^2 биринчи эксцентриситент квадрати:

-баландлик ҳисобланади:

$$H = \frac{D}{\cos B} - N$$

N- берилган кенгликдаги нуқтада биринчи вертикал эгрилик радиуси.

Ҳисоблаш (мисол)

№	**Формула, белгилар**	**Ҳисоблаш натижаси**	**изох**
1	2	3	4
1	$X_{СК-95}$	2788842.5	тўғрибурчакли, абсцисса
2	$Y_{СК-95}$	1625414.3	Ордината
1	2	3	4
3	$Z_{СК-95}$	5561829.1	аппликата
4	a	6378245.0	эллепсоид катта ярим ўқи
5	e^2	0.00669343	
6	$1 + e^2$	1.00669343	
7	$D = \sqrt{X^2_{СК-95} + У^2_{СК-95}}$	3219306.957	кутб масофаси

8	$D(1-e^2)$	3240855.000	
1	2	3	4
9	$L = \arcsin(\frac{Y_{СК-95}}{D})$	30^0 19' 27.95"	узоқлик СК-95
10	$L = \mathrm{arctg}(\frac{Y_{СК-95}}{X_{СК-95}})$	30^0 19' 27.95"	узоқлик СК-95
11	$B = \mathrm{arctg}(\frac{Z}{D(1+e^2)})$	59^0 46' 14.95"	кенглик СК-95
12	sinB	0.86401850	
13	cosB	0.50346007	
14	$N = a\sqrt{1-e^2\sin^2 B}$	6394240.4	биринчи вертикал эгрилик радиуси
15	$H = \frac{D}{\cos B} - N$	124.3	баландлик СК-95

Маҳсус формулалар билан ўтказишни босқичма босқич текшириш§32- да келтирилган.

§32.Геодезик координаталарни бир референц системадан бошқасига ўтказишни текшириш

Бир координата системадан бошқа системага ўтказишни босқичма- босқич текширишда қуйидаги боғланишдан фойдаланилади:

$$B_Б = B_A + \Delta B$$

$$L_Б = L_A + \Delta L$$

$$H_Б = H_A + \Delta H$$

Бунда B, L, H- мор равишда геодезик кенглик ва узоқлик, бурчак бирлигида ва геодезик баландлик, метр бирлигида

ΔB, $\Delta L, \Delta H$- (A) координата системасидан (B) координата системасига ўтишда геодезик координаталарга тузатмалар.

Геодезик координаталарга тузатмалар қуйидаги формулалар ёрдамида аниқланади:

$$\Delta B = \frac{\rho}{(M+H)}\left[\frac{N}{a}e^2 \sin B \cos B \Delta a + \left(\frac{N^2}{a^2}+1\right) N \sin B \cos B \frac{\Delta e^2}{2} - (\Delta x \cos L + \Delta y \sin L)\sin B \right.$$

$$\left. + \Delta z \cos B\right] - \varepsilon_x \sin L(1+e^2\cos 2B) + \varepsilon_y \cos L(1+e^2 \cos 2B)$$

$$- \rho m e^2 \sin B \cos B$$

$$\Delta L = \frac{\rho}{(N + H\cos B)}(-\Delta x \sin L + \Delta y \cos L) + tgB(1-e^2)(\varepsilon_x \cos L + \varepsilon_y \sin L) - \varepsilon_z$$

$$\Delta H = \frac{a}{N}\Delta a + N\sin^2 B \frac{\Delta l^2}{2} + (\Delta x \cos L + \Delta y \sin L)\cos B + \Delta z \sin B$$

$$- Ne^2 \sin B \cos B\left(\frac{\varepsilon_x}{\rho}\sin L - \frac{\varepsilon_y}{\rho}\cos L\right) + \left(\frac{a^2}{N} + H\right) m$$

Бунда: $\Delta B, \Delta L$, ΔH- геодезик кенглик, узоқликка ва баландликка тузатмалар;

B, L, H- геодезик кенглик, узоқлик радианда ва баландлик, метрда;

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$(Б) координата системасига нисбатан (А) координата системасини трансформациялашни (ўзгартиришни) чизиқли элементлари, метрда;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ (Б) координата системасига нисбатан (А) координата системасини трансформациялашни (ўзгартиришни) бурчак элементлари;

m- (Б) ва (А) координата системаларини масштабларини дифференциал фарқи;

$\Delta a = a_Б - a_А$- (Б) ва (А) элепсоидларнинг катта ярим ўқларининг фарқи

$\Delta e^2 = e_Б^2 - e_А^2$- мос эксцентиментлар квадратларининг фарқи;

$a = \frac{a_Б - a_А}{2}$- мос катта ярим ўқларининг ўртачаси;

$e^2 = \frac{e_Б^2 - e_А^2}{2}$- мос эксцентриситетлар квадратларининг ўртачаси;

$M = \frac{a(1-e^2)}{W^3} N = \frac{a}{W}$ бош нормал кесимлар эгрилик радиуслари;

$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$ – сфероидик фукция.

$\rho = 206265''$, 8062- 1 радианда бурчак секунт бирлигида (А) координата системаларига ўтишда (Б) координата системаларига ўтишда (А) координата системасининг геодезик координаталари ишлатилади.

№1, 2, 3 амалий ишларда СК-42 дан СК-95 га ўтишда ишлатилган параметрларнинг жойи:

$$\varepsilon_x = 0{,}000'', \varepsilon_y = -0{,}35'', \varepsilon_z = -0{,}66''$$

$$\Delta x = -5{,}90\text{м}, \Delta y = -10{,}06\text{м}, \Delta z = +1{,}76\text{м}$$

$$m = 0{,}000$$

Нольга тенг бўлган ўтиш параметрларини инобатга олган ҳолда координаталарга тузатмалар ҳисоблаш формулаларини қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\Delta B = \frac{\rho}{(M + H)}[-(\Delta x \cos L + \Delta y \sin L)\sin B + \Delta z \cos B] + \varepsilon_y \cos L(1 + e^2 \cos 2B)$$

$$\Delta L = \frac{\rho}{(N + H\cos B)}(-\Delta x \sin L + \Delta y \cos L) + \mathrm{tg}B(1 - e^2)\varepsilon_y \sin L - \varepsilon_z$$

$$\Delta H = (\Delta x \cos L + \Delta y \sin L)\cos B + \Delta z \sin B - Ne^2 \sin B \cos B\left(-\frac{\varepsilon_y}{\rho}\cos L\right)$$

Юқоридаги формулалардан фойдаланиб, ҳисоблашга мисол келтирамиз:

-кенгликка тузатма киритиш.

№	Формула, белгилар	Ҳисоблаш натижаси	изох
1	2	3	4
1	$X_{СК-42}$	$59^{0}46'15.0''$	
2	$Y_{СК-42}$	$30^{0}19'28.0''$	
3	$Z_{СК-42}$	127.363м	
4	Δx	-5.90	
5	Δy	-10.06	Красовский
6	Δz	+1.76	эллипсоиди учун
7	ε_y	$-0{,}35''$	доимий
8	ε_z	$-0{,}66''$	
9	a	6378245.0	
10	e^2	0.00669343	
11	$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$	0.997498847	сфероидик функция
12	$M = \frac{a(1 - e^2)}{W^3}$	6469366.3	меридианал кесим эгрилик радиуси
13	$N = \frac{a}{W}$	6394240.4	биринчи вертикал эгрилик радиуси
14	$\Delta x \cos L$	-5.0927636	
15	$\Delta y \sin L$	-5.0792526	
16	$\sin B$	0.86401865	

17	-((14)+(15))*(16)	8.788811	
18	$\Delta z \cos B$	0.88608937	
19	(17)+(18)	9.6749003	
20	$\frac{\rho}{(M+H)}$	0.03188268	
21	(19)*(20)	0.30846098	
22	$1+e^2\cos 2B$	0.9966998	
23	$\varepsilon_y \cos L * (15)$	0.30111606	
1	2	3	4
24	$\Delta B = (23) + (21)$	$0{,}61''$	кенгликка тузатма
	Узоқликка тузатма ҳисоблаш		
25	$\Delta y \cos L$	-8.6835935	узоқликка тузатма
26	$-\Delta x \sin L$	2.9788858	
27	(25)+(26)	-5.7047077	
28	$\frac{\rho}{((N+H)\cos B)}$	0.064071	
29	(27)*(28)	-0.36550633	
30	$\mathrm{tg}B(1-e^2)$	1.7046749	
31	$\varepsilon_y \sin L$	-1.767136	
32	(30)*(31)	-3.0123923	
33	$\Delta L = (29) + (32) - (8)$	$-2{,}72''$	
	Баландликка тузатма ҳисоблаш		
34	(14)+(15)	-10.172016	Баландликка тузатма
35	(34)* cosB	-5.1212018	
36	$\Delta z \sin B$	1.5206728	
37	(33)+(34)	-3.600529	
38	Ne^2	42799.401	
39	sinBcosB	0.434999	
40	$-\frac{\varepsilon_y}{\rho}\cos L$	$2.761*10^{-6}$	
41	(36)*(37)*(38)	0.0514003	
42	$\Delta H = (35) - (39)$	-3.652	

Икки хил усулида ўзгартирилган координаталарни бир каталогга (ведемостьга) туширамиз

	Ск-42 (берилган координаталар)	Ск-95 (кетма- кет ўзгартириш) (1)	тузатма	Ск-95 (ўзгартиришни текшириш) (2)	$\Delta = (2) - (1)$
Кенглик	59^0 46'15.0"	59^0 46,14'95.0"	$0{,}61''$	59^0 46,'15.61"	$0{,}66''$

Узоқлик	30^0 19'28.0"	30^0 19' 27,95"	$-2{,}72''$	30^0 19'25.18"	$-2{,}77''$
баландлик	127,363	124,3	-3,652	123,711	-0,589

Яқинлаштириш қониқарли хисобланади агар кенглик ва узоқлик 0.5"-0.3" чегарада; баландлик бўйича 1.0-3.0 метр чегарада бўлса.

§33. Координата орттирмаларини бир системадан бошқа системага ўтказиш

Спутниклар (йўлдошлар) диффиренциал режимида ишлашида ватар вектори ҳосил бўлади, буни “харакатдаги” приёмник ўрнатилган нуқта билан “базавий” станция ўрнатилган нуқтага нисбатан фазовий нтўғри бурчакли координаталар ортирмасини тавсифлайди. А системадан В системага ва тескари В системадан А системага координата ортирмаларни ўзгартириш қуйидаги формулалар билан амалга оширилади:

А системадан Б системага

$$\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{bmatrix}_{\text{А}} = (1+m)\begin{bmatrix}1 & +\varepsilon_z & -\varepsilon_y\\ -\varepsilon_z & 1 & +\varepsilon_x\\ +\varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{bmatrix}_{\text{Б}}$$

Б системадан А системага

$$\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{bmatrix}_{\text{Б}} = (1-m)\begin{bmatrix}1 & +\varepsilon_z & -\varepsilon_y\\ -\varepsilon_z & 1 & +\varepsilon_x\\ +\varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{bmatrix}_{\text{А}}$$

Бунда: $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ координата ортирмалари (А ёки Б системаларни пастки индекцига боғлиқ), м;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$- радиан бирлигида координата ўқларининг бурилиш бурчаги;

m- масштаб кооффиценти.

Юқоридаги формулани ёйиб ишчи формулани ҳосил қиламиз:

$$\Delta x_{\text{А}} = (1+m)(\Delta x_{\text{Б}} + \Delta y_{\text{Б}} * \varepsilon_z - \Delta z_{\text{Б}} * \varepsilon_y)$$

$$\Delta y_{\text{А}} = (1+m)(-\Delta x_{\text{Б}} * \varepsilon_z + \Delta y_{\text{Б}} + \Delta z_{\text{Б}} * \varepsilon_x)$$

$$\Delta z_{\text{А}} = (1+m)(\Delta x_{\text{Б}}\varepsilon_y - \Delta y_{\text{Б}} * \varepsilon_x + \Delta z_{\text{Б}})$$

$$\Delta x_{\text{Б}} = (1-m)(\Delta x_{\text{А}} - \Delta y_{\text{А}} * \varepsilon_z + \Delta z_{\text{А}} * \varepsilon_y)$$

$$\Delta y_{\text{Б}} = (1-m)(\Delta x_{\text{А}} * \varepsilon_z + \Delta y_{\text{А}} - \Delta z_{\text{А}} * \varepsilon_x)$$

$$\Delta z_{\text{Б}} = (1-m)(-\Delta x_{\text{А}}\varepsilon_y + \Delta y_{\text{А}} * \varepsilon_x + \Delta z_{\text{А}})$$

А системадан Б системага ўзгартириш бажарилгандан сўнг, ҳисобларни текшириш учун тескари ўзгартиришни бажариб кўриш мумкин.

Ҳисоблаш формулалари мустақил тузилиши керак.

Топшириқлар

Икки нуқта орасидаги меридиан ва параллел ёй узунликларини ҳисоблаш бўйича топшириқлар

Изоҳ: параллел ёй узунлиги Вўр бўйича ҳисоблансин

1 - топшириқ

N.№ Вариант	Меридианнинг бошланғич ва охирги нуқталарини кенгликлари						Параллел учларининг узоқликлари фарқи (*l*)		
	B1			B2					
1	2			3			4		
1	54°	2'	10,13"	56°	0'	10,19"	1°	51'	10,101"
2	54	4	12,00	56	2	21,22	1	47	11,111
3	54	6	17,91	56	4	23,22	1	35	13,901
4	54	8	21,84	56	6	43,90	1	29	14,141
5	54	10	20,1	56	8	51,89	1	21	29,191
6	54	12	40,12	56	10	30,67	1	19	30,117
7	54	14	31,92	56	12	31,77	1	58	31,31
8	54	16	57,12	56	14	47,48	1	59	35,351
9	54	18	14,31	56	16	29,30	1	57	47,201
10	54	20	35,22	56	18	29,69	1	56	31,997
11	54	22	41,42	56	20	37,75	1	43	30,886
12	54	24	29,88	56	22	39,64	1	40	12,129
13	54	26	30,3	56	24	27,25	1	41	39,993
14	54	28	39,12	56	26	29,18	1	39	49,491
15	54	30	21,89	56	28	56,56	1	38	50,511
16	54	32	49,00	56	30	39,01	1	37	19,998
17	54	34	48,11	56	32	41,42	1	36	47,479
18	54	36	21,11	56	34	49,10	1	48	37,456
19	54	38	28,99	56	36	13,13	1	11	57,367
20	54	40	47,41	56	38	14,14	1	27	36,457
21	54	42	51,51	56	40	17,99	1	27	36,245
22	54	44	41,41	56	42	19,20	1	30	45,246
23	54	46	20,22	56	44	51,51	1	20	37,456
24	54	48	28,00	56	46	52,12	1	50	31,246

25	54	50	51,50	56	48	50,51	1	37	36,245
26	54	52	10,51	56	50	21,21	1	31	38,246
27	54	54	11,82	56	52	20,1	1	49	36,21
28	54	56	13,13	56	54	48,4	1	29	59,101
29	54	58	17,18	56	56	49,97	1	37	49,491
30	54	59	5,00	56	58	10,11	1	48	11,546
31	54	0	10,10	56	0	0,92	1	51	10,101
1	2			3			4		
32	54	1	18,18	56	1	59,99	1	45	11,109
33	54	3	19,19	56	1	0,00	1	35	12,121
34	54	5	29,17	56	3	10,18	1	25	13,331
35	54	7	27,18	56	5	15,16	1	15	17,221
36	54	9	29,19	56	7	16,16	1	54	18,183
37	54	11	31,14	56	9	39,99	1	44	16,071
38	54	13	56,79	56	11	49,62	1	34	19,091
39	54	15	58,70	56	13	51,52	1	24	59,591
40	54	17	51,31	56	15	19,62	1	14	49,397
41	54	19	39,20	56	17	39,61	1	16	39,917
42	54	21	41,01	56	19	49,62	1	26	41,047
43	54	23	9,161	56	21	59,61	1	36	38,381
44	54	25	8,762	56	23	51,51	1	46	50,501
45	54	27	15,16	56	25	24,19	1	56	40,401
46	54	29	18,92	56	27	27,20	1	59	20,217
47	54	31	19,67	56	29	19,71	1	58	21,297
48	54	33	26,12	56	31	30,32	1	29	17,171
49	54	35	27,12	56	33	30,34	1	39	27,219
50	54	37	27,12	56	35	35,36	1	49	18,161

Харита трапецияси томонларининг узунликлари ва юзасини ҳисоблаш бўйича топшириқлар

Харита масштаби 1:5 000

2 - топшириқ

N.№ Вариант	Трапеция шимолий ва жанубий томонларининг кенгликлари					
	B1			B2		
1	2			3		
1	54°	13’	45”	54°	15’	0”
2	54	15	0	54	16	15
3	54	16	15	54	17	30
4	54	17	30	54	18	45
5	54	18	45	54	20	0
6	54	20	0	54	21	15

7	54	21	15	54	22	30
8	54	22	30	54	23	45
9	54	23	45	54	25	0
10	54	25	0	54	26	15
11	54	26	15	54	27	30
1	2			3		
12	54	27	30	54	28	45
13	54	28	45	54	30	0
14	54	30	0	54	31	15
15	54	31	15	54	32	30
16	54	32	30	54	33	45
17	54	33	45	54	35	0
18	54	35	0	54	36	15
19	54	36	15	54	37	30
20	54	37	30	54	38	45
21	54	38	45	54	40	0
22	54	40	0	54	41	15
23	54	41	15	54	42	30
24	54	42	30	54	43	45
25	54	43	45	55	45	0
26	54	45	0	55	46	15
27	54	46	15	55	47	30
28	54	47	30	55	48	45
29	54	48	45	55	50	0
30	54	50	0	55	51	15
31	55	11	15	55	12	30
32	55	12	30	55	13	45
33	55	13	45	55	15	0
34	55	15	0	55	16	15
35	55	16	15	55	17	30
36	55	17	30	55	18	45
37	55	18	45	55	20	0
38	55	20	0	55	21	15
39	55	21	15	55	22	30
40	55	22	30	55	23	45
41	55	23	45	55	25	0
42	55	25	0	55	26	15
43	55	26	15	55	27	30
44	55	27	30	55	28	45
45	55	28	45	55	30	0
46	55	30	0	55	31	15

47	55	31	15	55	32	30
48	55	32	30	55	33	45
49	55	33	45	55	35	0
50	55	35	0	55	36	15

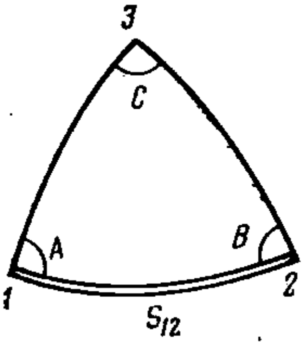
Сферик учбурчакларни ечиш; тўгри ва тескари геодезик масалаларни ечиш; геодезик координаталардан ясси тўгри бурчакли Гаусс-Крюгер координаталарига ўтиш ва аксинча тўгри бурчакли Гаусс-Крюгер координаталаридан геодезик координаталарга ўтиш;

Гаусс-Крюгер тўгри бурчакли координаталрини бир зонадан бошқазонага қайта ҳисоблаш бўйича топшириқлар

A, B, C - учбурчак ички бурчаклари,

B_1, L_1 – A нуқтанинг геодезик координатаси

A_{12} -берилган томоннинг бошланғич азимути



3,4,5,6 - топшириқлар

Вариант	**Номи**	**Берилган қийматлар**			**S,м**
1	2	3			4
1	A	52°	50'	22,29"	
	B	53	24	0,18	
	C	73	45	39,11	30750,425
	B_1	50	7	55,97	
	A_{12}	303	38	30,39	
	L_1	24	25	31,55	
2	A	62	12	45,11	
	B	50	20	19,98	
	C	67	26	59,00	46765,064
	B_1	47	39	3,24	

	A_{12}	354	13	22,19	
	L_1	36	18	32,44	
3	A	56	46	4,64	
	B	75	10	39,57	
	C	48	3	16,75	18565,404
	B_1	50	15	48,84	
	A_{12}	49	51	24,15	
	L_1	54	0	19,09	
4	A	54	25	1,25	
	B	62	35	42,05	
	C	62	59	18,45	29081,36
	B_1	53	54	26,49	
	A_{12}	174	12	58,81	
	L_1	24	3	21,16	
5	A	57	15	11,79	
	B	54	15	0,93	
	C	68	29	48,97	30256,481
	B_1	51	28	2,90	
	A_{12}	48	58	11,55	
	L_1	23	42	26,08	
6	A	42	38	55,10	
	B	76	19	3,73	
	C	61	2	2,29	24177,151
	B_1	49	58	47,66	
	A_{12}	204	52	31,62	
	L_1	48	16	54,00	
7	A	74	58	50,81	
	B	51	0	59,63	
	C	54	0	11,08	25442,157
	B_1	50	28	49,99	
	A_{12}	357	31	51,80	
	L_1	24	7	1,34	
8	A	48	3	16,75	
	B	56	46	4,64	
	C	75	10	39,57	24130,217
	B_1	50	12	2,33	
	A_{12}	287	12	0,02	
	L_1	54	7	4,63	
9	A	59	44	1,21	
	B	62	45	44,75	
	C	57	30	15,92	28568,384
	B_1	50	22	31,22	

	A_{12}	249	30	18,93	
	L_1	24	26	30,14	
10	A	56	46	0,85	37366,352
	B	57	51	0,95	
	C	65	22	59,80	
	B_1	50	17	5,32	
	A_{12}	218	31	57,85	
	L_1	24	23	58,47	
11	A	71	24	57,83	25454,709
	B	54	4	1,89	
	C	54	31	1,82	
	B_1	50	15	27,79	
	A_{12}	83	3	51,32	
	L_1	24	2	42,13	
12	A	71	0	2,67	23582,559
	B	56	30	15,40	
	C	52	29	43,33	
	B_1	52	10	2,62	
	A_{12}	296	36	25,15	
	L_1	24	18	11,12	
13	A	67	26	59,00	38981,591
	B	62	12	45,11	
	C	50	20	19,98	
	B_1	47	46	52,65	
	A_{12}	111	39	12,67	
	L_1	35	49	36,33	
14	A	76	19	3,73	18722,009
	B	61	2	2,29	
	C	42	33	55,10	
	B_1	49	46	57,43	
	A_{12}	308	26	59,13	
	L_1	48	8	25,64	
15	A	65	37	27,62	22473,056
	B	60	25	50,58	
	C	53	56	43,05	
	B_1	55	26	6,82	
	A_{12}	304	21	56,92	
	L_1	41	58	32,24	
16	A	59	26	55,31	25771,104
	B	62	1	5,08	
	C	58	32	1,12	
	B_1	51	46	19,06	
	A_{12}	304	17	0,75	

	L_1	24	21	11,31	
17	A	58	28	9,90	
	B	58	0	50,01	
	C	63	31	1,61	27219,043
	B_1	52	15	42,87	
	A_{12}	0	6	41,83	
	L_1	23	55	39,38	
18	A	44	35	11,51	
	B	49	47	4,32	
	C	85	37	46,09	22746,726
	B_1	55	30	0,31	
	A_{12}	190	30	0,82	
	L_1	52	7	9,00	
19	A	63	26	16,97	
	B	59	20	17,74	
	C	57	13	27,86	24299,431
	B_1	54	37	0,00	
	A_{12}	29	19	16,97	
	L_1	50	17	10,99	
20	A	60	25	50,01	
	B	53	56	42,57	
	C	65	37	27,03	23523,243
	B_1	55	39	10,90	
	A_{12}	107	19	16,30	
	L_1	73	10	10,01	
21	A	58	1	0,03	
	B	65	33	40,52	
	C	56	25	20,19	24076,619
	B_1	54	59	9,00	
	A_{12}	278	13	14,14	
	L_1	47	46	0,91	
22	A	53	52	44,90	
	B	60	48	5,30	
	C	65	19	10,19	22232,986
	B_1	56	11	11,27	
	A_{12}	181	59	21,00	
	L_1	49	7	1,01	
23	A	63	26	8,83	
	B	61	34	11,41	
	C	54	59	41,17	23671,616
	B_1	56	7	0,00	
	A_{12}	171	57	51,51	
	L_1	49	49	51,17	

24	A	51	54	33,69	
	B	56	5	5,47	
	C	72	0	22,15	24209,059
	B_1	55	49	37,18	
	A_{12}	101	39	42,10	
	L_1	95	45	0,00	
25	A	61	2	2,35	
	B	42	38	55,05	
	C	76	19	3,80	24076,796
	B_1	54	59	11,02	
	A_{12}	186	41	49,99	
	L_1	61	41	7,17	
26	A	54	20	5,60	
	B	56	37	25,55	
	C	69	2	26,91	22340,850
	B_1	55	19	0,17	
	A_{12}	276	4	1,01	
	L_1	39	36	37,87	
27	A	57	14	26,63	
	B	37	26	0,84	
	C	85	19	34,17	23988,219
	B_1	56	0	9,99	
	A_{12}	17	17	17,17	
	L_1	51	54	54,00	
28	A	44	7	21,41	
	B	82	13	28,24	
	C	53	39	13,03	23926,518
	B_1	56	0	27,72	
	A_{12}	79	19	1,11	
	L_1	69	0	47,74	
29	A	43	13	58,30	
	B	80	18	48,51	
	C	56	27	12,41	23654,142
	B_1	54	37	0,01	
	A_{12}	10	59	60,00	
	L_1	59	56	19,00	
30	A	24	4	59,61	
	B	12	54	3,01	
	C	34	0	52,40	23426,904
	B_1	55	19	16,17	
	A_{12}	192	0	1,00	

	L_1	61	17	19,00	
31	A	32	22	35,40	
	B	70	22	31,09	
	C	77	14	50,40	24305,323
	B_1	54	18	0,73	
	A_{12}	11	29	47,30	
	L_1	30	31	30,00	
32	A	47	56	13,10	
	B	51	31	32,01	
	C	80	32	12,07	23333,447
	B_1	54	59	9,10	
	A_{12}	99	17	19,01	
	L_1	75	33	31,33	
33	A	56	4	7,10	
	B	39	45	48,21	
	C	84	10	19,31	23856,520
	B_1	55	1	0,99	
	A_{12}	185	0	0,94	
	L_1	39	18	19,71	
34	A	53	2	28,11	
	B	52	5	2,97	
	C	74	52	31,01	19994,829
	B_1	55	3	4,00	
	A_{12}	279	1	3,11	
	L_1	67	17	49,49	
35	A	41	7	33,03	
	B	30	43	17,04	
	C	108	9	10,10	20406,142
	B_1	54	31	0,99	
	A_{12}	0	57	59,60	
	L_1	49	49	9,00	
36	A	43	2	36,07	
	B	44	9	14,42	
	C	92	48	16,21	21260,604
	B_1	54	31	0,99	
	A_{12}	0	57	59,60	
	L_1	49	49	9,00	
37	A	47	2	11,40	
	B	65	55	0,81	
	C	67	2	49,01	20322,625
	B_1	55	9	17,17	
	A_{12}	339	30	0,30	

	L_1	66	48	0,41	
38	A	46	38	56,40	21368,769
	B	66	34	54,71	
	C	66	46	8,01	
	B_1	54	54	0,60	
	A_{12}	272	40	41,00	
	L_1	41	3	7,78	
39	A	28	59	28,40	21409,982
	B	37	23	28,11	
	C	113	37	5,98	
	B_1	54	50	40,18	
	A_{12}	31	30	30,17	
	L_1	29	0	0,91	
40	A	38	3	20,97	22380,630
	B	29	22	39,99	
	C	112	33	57,01	
	B_1	55	17	17,98	
	A_{12}	201	1	4,98	
	L_1	91	0	30,07	
41	A	29	27	15,61	22231,512
	B	55	51	22,31	
	C	94	41	21,02	
	B_1	54	34	1,21	
	A_{12}	301	18	19,00	
	L_1	40	41	4,00	
42	A	51	26	52,70	22709,005
	B	49	0	24,97	
	C	79	32	45,71	
	B_1	55	7	9,17	
	A_{12}	45	0	9,11	
	L_1	77	10	10,97	
43	A	49	15	3,41	23988,368
	B	52	17	15,53	
	C	78	27	40,59	
	B_1	54	21	21,11	
	A_{12}	204	40	41,00	
	L_1	41	0	7,07	
44	A	45	26	17,79	23442,132
	B	27	15	30,28	
	C	107	18	15,00	
	B_1	55	0	1,18	
	A_{12}	301	10	11,93	

	L_1	80	16	0,08	
45	A	56	37	18,16	
	B	61	0	15,79	
	C	62	22	23,10	22896,911
	B_1	54	0	0,72	
	A_{12}	45	39	0,09	
	L_1	69	10	11,31	
46	A	72	17	0,97	
	B	81	59	39,01	
	C	25	43	22,13	25119,512
	B_1	56	55	17,11	
	A_{12}	159	20	11,19	
	L_1	31	30	0,00	
47	A	44	7	21,40	
	B	82	13	28,24	
	C	53	39	13,02	23755,124
	B_1	55	30	1,65	
	A_{12}	40	40	31,78	
	L_1	61	17	10,96	
48	A	37	19	14,04	
	B	94	55	55,96	
	C	47	47	48,02	19961,157
	B_1	55	10	11,18	
	A_{12}	101	1	32,05	
	L_1	81	1	16,07	
49	A	37	49	36,01	
	B	113	51	35,91	
	C	28	18	51,04	20128,875
	B_1	54	56	9,01	
	A_{12}	10	59	58,20	
	L_1	59	26	5,06	
50	A	39	3	30,01	
	B	83	53	11,87	
	C	57	3	20,05	20156,527
	B_1	54	58	10,07	
	A_{12}	217	20	2,23	
	L_1	61	29	19,26	

Назорат ишларини бажариш тартиб қоидалари

Талабанинг назорат иши варианти қуйидагича аниқланади:

- Ўқув шифрининг охирги икки рақами 00 бўлса, 50 вариант;
- 01 дан 50 гача бўлса, мос вариантлар;
- агар 50 дан юқори бўлса, шу икки рақам ташкил қилган сондан 50 айирилади ва қолган сон вариант қилиб олинади.

Масалан, охирги икки рақам 67 бўлсин, у ҳолда 67-50=17, демак 17 вариант олинади.

Назорат ишларини бажариш ва расмийлаштиришда қуйидаги қоидаларга риоя қилиш керак:

- ишнинг сарлавҳасида талабанинг фамилияси ва исми-шарифи, назорат ишининг рақами, шифри, институт ва факультетнинг номи, иши;
- назорат иши алоҳида дафтарда, сиёҳ билан (қизил рангдан ташқари), тақризчининг изоҳи учун дафтарнинг четида ҳошия қолдириб, бажарилади;
- назорат ишидаги масалаларни ечиш назорат ишларида кўрсатилган рақамлар тартибида жойлаштирилади. Ҳар бир масалани ечишдан аввал вариантига мос келувчи масаланинг шарти тўлиқ ёзилиши керак. Бир нечта масалаларнинг шарти умумий ҳолда берилган бўлса, берилган маълумотларни тегишли вариантга мослаб ёзиш керак;
- масала ечимининг ҳар бир босқичи тушунтиришлар билан муфассал изоҳланиб борилиши, сўзларни қисқартириб ёзмасдан, озода бажарилиши керак, чизмалар қаламда чизиш лозим.

Юқорида баён қилинган қоидалар бузилиб бажарилган ёки талаба ўз вариантин бажарилмаган бўлса назорат ишлари ҳисобга олинмайди ва текширилмасдан қайтарилади.

Тақриз қилинган ишни олгандан сўнг талаба ундаги хато ва камчиликларни тузатиши лозим.

Агар иш ҳисобга олинмаса, у қисқа вақт ичида бутунлай қайта ишланиши ёки тақризчи томонидан кўрсатилган камчиликлар тузатилиши зарур. Тузатилган иш, синовдан ўтмаган иш билан бирга кафедрага қайтарилиши керак.

ГЛОССАРИЙ

Аддитамента	Аддитамента	Addition	Сферик учбурчак томонига тузатма
Айланма эллипсоид	Эллипсоид вращения	The ellipsoid of rotation	Эллипсни ўз кичик ўқи атрофида айланиши натижасида ҳосил бўлган шакл
Биринчи вертикал	Первый вертикал	The first vertical	Меридианга перпендикуляр бўлган текислик.
Бош геодезик масала	Главная геодезическая задача	Main geodetic problem	Тўгри ва тескари геодезик масалалар
Бош нормал кесимлар	Главные нормальные сечения	The main normal cross-section	Нормал кесимлар орасида ўзаро перпендикуляр бўлган, бири энг катта, иккинчиси энг кичик эгрилик радиусига эга бўлган кесимлар
Геодезик чизиқ	Геодезическая линия	Geodetic line	Сатҳни ҳар бир нуқтасидан ўтган нормалда ётувчи ёпишма уринувчи текислик ҳосил қилган эгри чизиқ (сатҳдаги икки нуқтани бирлаштирувчи энг қисқа чизиқ (масофа).
Коллимацион текислик	Коллимационная плоскость	Collimation plane	Теодолит қараш трубасини горизонтал ўқ атрофида айлантириш натижасида визир ўқи ҳосил қиладиган текислик.
Қутб сиқилиши	Полярное сжатие	Polar compression	Эллипсоиднинг катта *а* ва кичик *в* ярим ўқлари узунликларини функцияси, *α* ҳарифи билан белгиланади.
Нормал кесим	Нормальное сечение	The normal cross-section	Нормал текислик эллипсоид сатҳини кесиши натижасида ҳосил бўлган кесим.
Нормал текислик	Нормальная плоскость	The normal plane	Нормаль туширилган нуқтага уринма бўлган текисликка перпендикуляр текислик.
Редукцион муаммо	Редукционная проблема	Reduction challenge	Ер сатҳидан эллипсоид сатҳига ўтишдаги ҳисоблаш ишлари.
Редукциялаш	Редукцирование	Reduction	Чизиқни, бурчакни ва ҳ.к.ни бир сатҳдан иккинчи бир

			сатҳга ўтказиш
Референц эллипсоид	Референц эллипсоид	The reference ellipsoid	Маълум ўлчамга эга бўлган ва геоид ичида ориентирланган, геодезик ўлчашларни қайта ишлаш учун давлат томонидан қабул қилинган эллипсоид.
Тескари геодезик масала	Обратная геодезическая задача	Inverse geodetic problem	Икки пунктни геодезик координатлари берилганда, бу пунктлар орасидаги масофа ва чизиқни тўғри ва тескари азимутларини аниқлаш.
Тўғри геодезик масала	Прямая геодезическая задача	Direct geodetic problem	Бошланғич нуқтанинг геодезик координаталари, чизиқнинг бошланғич азимути, пунктлар орасидаги масофа берилганда, иккинчи пунктни геодезик координаталарини ва чизиқни тескари азимутини аниқлаш.
Ўқ меридиани	Осевой меридиан	Axial meridian	Зона ўртасидан ўтувчи меридиан.
Ўртача эгрилик радиуси	Средний радиус кривизны	Average radius of curve	Нормал кесимлар сони берилган нуқтада чексизликка интиланда ўрта арифметик эгрилик радиуси
Эллипсоид бириннчи эксцентриситети	Первый эксцентриситет эллипсоида	The first eccentricity of ellipsoid	Эллипсоиднинг катта a ва кичик $в$ ярим ўқлари узунликларини функцияси, e ҳарифи билан белгиланади.
Эллипсоид иккиннчи эксцентриситети	Второй эксцентриситет эллипсоида	The second eccentricity of ellipsoid	Эллипсоиднинг катта a ва кичик $в$ ярим ўқлари узунликларини функцияси, e' ҳарифи билан белгиланади.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. Закатов П.С. – Курс высшей геодезии. М., «Недра», 1976, 511 с.

2. Яковлев Н.В., Беспалов Н.А.,Глумов В.П. Практикум по высшей геодезии, М., Недра 1982 г.

3. Морозов Н.П. Курс сфероидической геодезии М., Недра 1979 г.

4. Ташпулатов С.А., Авчиев Ш.К. Сфероидик геодезия Т., 2002 й.

5. Ташпулатов С.А., Махсудов Б.Ю. Сфероидик геодезиядан масалалар тўплами Т., 2003 й.

Интернетмаълумотлари:

1. Geocentric Dat of Australia Technical Manual. http://www.anzlik.org.ou/icsm gdatm/xyzcd.htm

2. Transformation from local ellipsoidal coordinate system to global ellipsoidal coordinate system. http://www.Isgi.polyu.edu.hk/cyber-class/geodesy4.htm

3. Conversion of ellipsoidal coordinate to Cartesian coordinates. http://www.Isgi.polyu.edu.hk/cyber-class/geodesy/geodesy5.htm

4. Geocentric Datum of Australia Technical Manual. http://www.anzlik.au/icsm/molodens.htm

5. Referece Ellipsoisds and Geodetic Datum Transtomation Paramerer (Local to WGS-84). http://www.utexas.edu/depts/grg/gcraft/notes/datum/edlist/html.

М У Н Д А Р И Ж А

Аннотация

Изложены основные вопросы геометрии земного эллипсоида и способы решения геодезических задач на поверхности земного эллипсоида, а также теория и практика применения системы координат Гаусса-Крюгера.

Учебник предназначен для студентов, обучающихся по специальности «Геодезия и картография»(прикладная геодезия)

Annotation

This textbook discusses the main issues of geometry and methods for solving geodesic problems on the surface of the earth ellipsoid and the theory and practice of applying the Gauss-Krueger coordinate system.

The textbook is intended for students studying in the specialty "Geodesy and Cartography" (applied geodesy)