

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА УРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

САМАТОВ Ғ.Б., НИЁЗОВ Ш.К.

НАЗАРИЙ ФИЗИКАДАН МАСАЛАЛАР Тўплами
(Квант механика, термодинамика ва статистик физика)

Гулистон – 2017 йил

А н н о т а ц и я

Услубий кўрсатмада назарий физика курсининг квант механика, термодинамика ва статистик физика бўлимлари бўйича, 5140200 “Физика” бакалаврият таълим йўналишининг намунавий ўқув дастурига мос танланган масалалар жамланган. Ҳар бир мавзунинг бошланишида қисқача назарий қисм, сўнгра масалалар ечиш намуналари ва аудиторияда ҳамда талабаларнинг мустақил ишлаши учун масалалар келтирилган.

Услубий кўрсатма университетларнинг 5140200 “Физика” бакалаврият таълим йўналиши талабалари учун мўлжалланган. Услубий кўрсатмадан педагогика университетлари ва институтларининг “ Физика – астрономия” бакалаврият таълим йўналиши талабалари ҳам фойдаланиши мумкин.

Такризчилар: Низомий номидаги Тошкент давлат педагогика университети профессори, педагогика фанлари доктори М. Джораев,

Гулистон давлат университети доценти, физика- математика фанлари номзоди Т.Р. Рисбоев.

Масъул муҳаррир: Гулистон давлат университети доценти, техника фанлари номзоди М.Исроилов.

Сўз боши

Назарий физикадан масалалар тўплами (Квант механика, термодинамика ва статистик физика) университетларнинг 5140200 ”Физика” бакалавриат таълим йўналишида таълим олувчи талабалари томонидан назарий физика курсининг квант механика, термодинамика ва статистик физика бўлимларидан амалий (масала ечиш) ўқув машғулотида фойдаланиши учун мўлжалланган.

Услубий кўрсатма университетларнинг “Физика” таълим йўналишининг 2015 ва 2016 йилларда тасдиқланган намунавий ўқув дастурларига асосан тайёрланган. Услубий кўрсатмада квант механика, термодинамика ва статистик физика фанлари бўйича намунавий ўқув дастурида тавсия этилган асосий услубий кўрсатмалари ва масалалар тўплamlаридан ҳамда муаллифларнинг кўп йиллик педагогик тажрибаси асосида тайёрланган масалалардан фойдаланилган.

Квант механика, термодинамика ва статистик физика фанлари учун намунавий ўқув дастурида тавсия этилган услубий кўрсатмалари ва масала тўплamlарининг асосий қисми рус тилида ёзилган. Ҳозирги кунда университетлар учун квант механика, термодинамика ва статистик физика фанларидан намунавий дастурда тавсия этилган ва ўзбек тилида ёзилган ягона дарслик ва масала тўплами мавжуд. Ушбу услубий кўрсатма квант механика, термодинамика ва статистик физика фанларидан ўзбек тилида тайёрланган кам сондаги масала тўплamlаридан бири ҳисобланади ва ўқув жараёнида фойдаланиш учун мўлжалланган.

Услубий кўрсатмада танланган масалаларнинг мазмуни назарий (маъруза) курси мазмуни билан узвий боғланишга эга, мавзулар ўқув дастурида белгиланган тартиб билан жойлаштирилган. Услубий кўрсатмада фойдаланилган математик аппарат талабаларнинг олий математика курси ўқув дастури бўйича ўрганилган материалларга мос келишига алоҳида эътибор қаратилган.

Масалаларни танлашда қуйидагиларга асосланилган; 1) квант механика, термодинамика ва статистик физиканинг назарий (маъруза) курси дастури

билан боғланган, маъруза мавзуларига мос масалалар танланиб, ўқитилиш кетма- кетлиги мослаштирилган;

2) амалий (масала ечиш) мавзулари дастурга мос кетма-кетликда жойлаштирилган; 3) математик аппаратнинг масала ечиш талабларига ҳамда математика курси программасига мослиги таъминланган.

Услубий кўрсатманинг ҳар бир параграфида қисқа ҳажмда, асосий формулалар ва таърифлардан иборат мавзуга оид назарий материаллар келтирилган, масала тўпламида физик катталикларнинг ҳарфлар билан белгиланиши ҳам тавсия этилган асосий адабиётларга ва маъруза материалларига тўла мос келади, ундан ташқари ҳар бир параграфда бир неча масала намуна сифатида тўла ишлаб кўрсатилган.

Масалаларнинг кўпчилиги қисми 5140200 “Физика” бакалариат таълим йўналиши учун квант механика, термодинамика ва статистик физика фанлари намунавий ўқув дастурида келтирилган масала тўпламларидан олинган, бир қисми муаллифлар томонидан тузилган.

Ҳар бир мавзуга оид бир неча масаланинг ечилиши кўрсатилган, лекин масалаларни ечишда талабаларнинг мустақил ишлаш кўникмаларини шакллантириш ва ривожлантириш мақсадида асосий формулаларини келтириб чиқаришдаги оралиқ математик операциялар мустақил ишлашга қолдирилган.

Услубий кўрсатмада ҳар бир мавзудан сўнг аудиторияда ишланадиган ва талабаларга уйга вазифа сифатида мустақил бажариш учун тавсия этиладиган масалалар келтирилган.

Муаллифлар масъул муҳаррир, Гулистон давлат университети доценти, техника фанлари номзоди М.Исроилов, тақризчилар, педагогика фанлари доктори, профессор М. Джораев, физика- математика фанлари номзоди, доцент Т.Рисбоевларга услубий кўрсатмани кўриб чиқиш ва тақриз ёзишда берган қимматли таклифлари ҳамда қўлланманинг сифатини янада яхшилаш мақсадида, бартараф этилиши зарур бўлган, камчиликларни кўрсатганликлари ва бартараф этишга оид маслаҳатлари учун миннатдорчилик билдирадилар.

Услубий кўрсатма университет Илмий кенгашининг 2016 йил 10 ноябрдаги 2- сонли йиғилишининг қарори билан нашр этишга ва ўқув машғулотларида фойдаланишга тавсия этилган.

Услубий кўрсатма тўғрисидаги фикр - мулоҳазаларингизни қуйидаги манзилга юборишингизни сўраймиз.

Манзилимиз : 707012 Гулистон шаҳри, ГулДУ “Физика“ кафедраси, муаллифга.

1- қисм: Квант механика

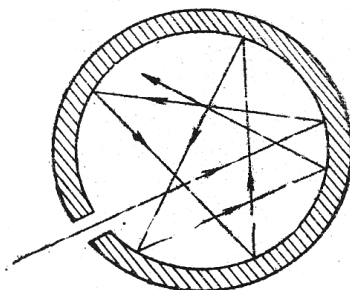
1. Абсолют қора жисм. Релей-Джинс, Вин ва Планк формулалари, Стефан - Больцман қонуни

Ўтган асрнинг охирларида классик физикада энг кўп муҳокама этилган масалаларидан бири - қора жисмнинг иссиқлик нурланишини экспериментал ва назарий текшириш масаласи ҳисобланар эди.

Абсолют қора жисм сифатида ёруғликни акслантирмасдан тўла ютувчи жисм қаралади.

Идеал акслантирувчи деворлар билан ўралган ковакда етарлича кичик тирқиш (тирқишнинг ўлчами $d \approx \lambda$) очилса ва тирқиш орқали нурланиш ташқарига чиқиб турган ҳолда ҳам ковак ичида мувозанат бузилмайди, ташқаридан тирқиш орқали ковак ичига тушувчи нурланиш эса кўп марта аксланиш ҳисобига тўла ютилади.

Жуда кичик тирқишли ковак абсолют ютувчи жисмнинг модели сифатида қаралади ва бу жисм абсолют қора жисм дейилади.



1- расм. Абсолют қора жисм модели

Абсолют қора жисмнинг нурланиши, нурланиш энергиясининг зичлиги фақат температурага боғлиқ бўлганлиги учун мувозанатли нурланиш деб аталади. Мувозанатли нурланиш энергиясини ҳисоблашда иссиқлик нурланиши электромагнит майдон нурланиши сифатида қаралади. Электромагнит майдон маълум йўналиш бўйича кутбланувчи ва ҳар қил частотага эга бўлган турғун тўлқинлар системасига ажратилади, турғун тўлқин ҳам худди тебранувчи атом ёки осциллятор тенгламасига ўхшаш тенглама билан ифодаланади.

Ҳар бир турғун тўлқин (ёки осцилляторга) kT энергия мос келади ва $\omega, \omega + d\omega$ частоталар интервалидаги турғун тўлқинлар сони dN ни қуйидагича аниқланади:

$$dN = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} V d\omega \quad (1.1.1)$$

$\omega, \omega + d\omega$ частота интервалидаги мувозанатли нурланиш энергияси

$$dE_\omega = V \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT d\omega \quad (1.1.2)$$

Нурланиш энергиясининг спектрал зичлиги тушунчаси киритилади ва у қуйидагича аниқланади:

$$\rho_\omega = \frac{dE_\omega}{V d\omega} = \frac{dU}{d\omega} \quad (1.1.3)$$

Нурланиш энергиясининг спектрал зичлиги деб бирлик частота интервалига мос келувчи нурланиш энергияси зичлиги dU -га айтилади. (1.1.2) ва (1.1.3) ифодалардан фойдаланиб, ρ_ω учун қуйидаги ифодани оламиз.

$$\rho_\omega(T) d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT d\omega \quad (1.1.4)$$

(1.1.4) ифода **Релей-Джинс** қонуни дейилади.

V -хажмга мос келувчи мувозанатли нурланишнинг тўла энергияси (1.1.2) ифодасини частота ω бўйича 0 дан ∞ гача интервалда интеграллаймиз .

$$E_{nur} = \int_0^\infty dE_\omega = \frac{kT}{\pi^2 c^3} V \int_0^\infty \omega^2 d\omega \Rightarrow \infty \quad (1.1.5)$$

Бу хулоса тажрибада олинadиган натижаларга зид ва П.С. Эренфест таъбири бўйича "Ультрабинафша ҳалокат" деб аталади.

Юқори частотали нурланиш соҳасида экспериментал эгри чизик Вин формуласи билан ифодаланади.

$$\rho_\omega(T) d\omega = A \omega^3 \exp(-c \cdot \omega) d\omega \quad (1.1.6)$$

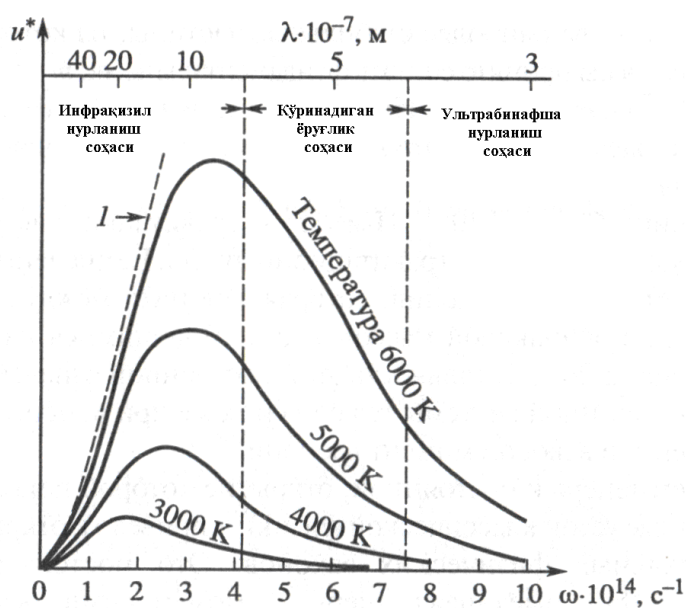
бу ерда, A, c - доимий катталиклар,

$\rho_\omega(T)$ -нинг ω -га боғланишини ифодаловчи экспериментал эгри чизик (1.1.- расмга қаранг) ни нолдан ∞ гача частота интервалида тушунтирувчи

формула 1900 йилда квант тасаввурлар асосида М.Планк томонидан тавсия этилган.

$$\rho_{\omega}(T)d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1\right)}d\omega \quad (1.1.7)$$

(1.1.7) формулада $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ жс Планк доимийси дейилади. Баъзи эски адабиётларда Планк доимийси сифатида $\hbar = 6,62 \cdot 10^{-34}$ ж.с га тенг бўлган катталиқ ҳам келтирилади, лекин $\hbar$ - ва h орасида принципиал фарқ йўқ, $h = 2\pi\hbar$. (1.1.7) формула юқори частоталар соҳасида Вин формуласига, паст частоталар соҳасида эса Релей-Джинс формуласига ўтади. 1- расмда турли температураларда абсолют қора жисм нурланиш спектрининг энергетик тақсимоти.



2-расм

Абсолют қора жисм нурланиш спектрининг энергетик тақсимоти

Планк формуласи асосида нурланиш энергияси зичлиги қуйидагича аниқланади.

$$U = \int_0^{\infty} \rho_{\omega}(T)d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{\pi^2c^3\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1\right)} = kT^4 \quad (1.1.8)$$

(1.1.8) ифодага асосан нурланиш энергиясининг зичлиги абсолют температуранинг тўртинчи даражасига пропорционалдир, (1.1.8) ифода Стефан-Больцман формуласи дейилади.

1.1 Масалалар ечиш намуналари

1.1.1 Абсолют қора жисм учун Планк формуласидан фойдаланиб қуйидаги $\hbar\omega \gg KT$ (а) $\hbar\omega \ll KT$ (б) чегаравий ҳоллар учун мувозанатли нурланиш энергияси спектрал зичлигининг тақрибий ифодаларини аниқланг.

Ечиш:

Абсолют қора жисмнинг мувозанатли нурланиш энергияси спектрал зичлигини Планк формуласи (1.1.8) дан аниқлаймиз.

$$\rho_{\omega}(T)d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 \left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1 \right)} d\omega \quad (1.1.1.1)$$

а) $\hbar\omega \gg KT$ шарт бажарилган ҳолда Планк формуласи ифодасида махраждаги $\exp(\hbar\omega / KT) \gg 1$ бўлганлиги учун бирни ташлаб юбориш мумкин ва натижада мувозанатли нурланиш энергиясининг спектрал зичлиги учун

$$\rho_{\omega}(T)d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{c^3} e^{-\hbar\omega / KT} d\omega \quad (1.1.1.2)$$

кўринишдаги Вин формуласини оламиз:

б) Иккинчи чегаравий ҳолда $\hbar\omega \ll KT$ шунинг учун $\exp(\hbar\omega / KT)$ экспонентани $\hbar\omega / KT$ бўйича даражали қаторга ёямиз ва биринчи даражали ҳадлар билан чегараланамиз:

$$\exp(\hbar\omega / KT) = 1 + \hbar\omega / KT$$

у ҳолда (1.1.7) дан Релей-Жинс формуласи ҳосил бўлади:

$$\rho_{\omega}(T)d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} KT d\omega \quad (1.1.1.3)$$

1.1.2 Планк формуласи ёрдамида абсолют қора жисм учун Стефан-Больцман қонунидаги σ доимийнинг қийматини ҳисобланг ?

Ечиш:

Стефан-Больцман қонуни абсолют қора жисмнинг нурланиш энергияси зичлигини температурага боғланишини ифодалайди.

$$U = \sigma T^4 \quad (1.1.2.1)$$

Бу ерда σ -Стефан-Больцман доимийси.

Нурланиш энергияси нурланишнинг спектрал зичлиги билан (1.1.3) формула орқали боғланган,ундан U ни интеграллаш орқай аниқлаб, ρ_ω (Т) ни Планк формуласи (1.1.7) орқай ифодаласак қуйидаги ифодани оламиз.

$$U = \int_0^\infty \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1} \quad (1.1.2.2)$$

Ушбу интегралда $x = \frac{\hbar \omega}{kT}$ белгилашни киритиб янги ўзгарувчига ўтамиз:

$$U = \frac{k^4 T^4}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

Олий математика курсидан $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$ эканлигини эътиборга олсак

$$U = \frac{\pi^2 k^4}{15 \hbar^3 c^3} T^4 = \sigma T^4 \quad (1.1.2.3)$$

ифода ҳосил бўлади, ушбу ифодага $k, \hbar, c$ доимийларнинг қийматларини қўйиб σ -доимийнинг қийматини аниқлаймиз.

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{15 \hbar^3 c^3} = 7,56 \cdot 10^{-16} \frac{\text{Ж}}{\text{м}^3 \text{К}^4}$$

1.1.3 Планк формуласидан фойдаланиб Виннинг силжиш қонунидаги доимий катталикини ҳисобланг

Ечиш:

Виннинг силжиш қонуни абсолют қора жисмнинг спектрининг максимумига мос келувчи тўлқин узунлиги λ_m нинг абсолют температура билан боғланишини аниқлайди.

$$\lambda_m T = b \quad (1.1.3.1)$$

Бу ердаги b - доимийни Планк формуласидан фойдаланиб аниқлаймиз.

Планк формуласи қуйидагича ёзилади.

$$\rho_{\omega}(T)d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1\right)}d\omega, (1.1.3.2)$$

бу формулани λ орқали ёзамиз.

Бу формулани $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ боғланишдан фойдаланиб тўлқин узунлиги орқали ёзамиз.

$$\rho_{\lambda}(T)d\lambda = \frac{8\pi\hbar}{\lambda^3\left(\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right)-1\right)}d\lambda (1.1.3.3)$$

Абсолют қора жисмнинг спектрининг максимумига мос келувчи тўлқин узунлиги λ_m ни аниқлаш учун $\frac{d\rho_{\lambda}(T)}{d\lambda} = 0$ тенгламани ечамиз ва λ_m ни аниқлаймиз.

$$b = \frac{2\pi\hbar c}{4,965k} = 0,29 \text{ см.К}$$

1.1.4 Планк формуласидан фойдаланиб: а) тўлқин узунлиги λ ва $\lambda + d\lambda$ интервалда бўлган мувозанатли нурланишнинг бирлик ҳажмидаги фотонлар сонини; б) T температурадаги мувозанатли нурланишнинг бирлик ҳажмидаги фотонлар сонини ҳисобланг.

Ечиш:

Частоталари $\omega, \omega + d\omega$ интервалда жойлашган мувозанатли нурланишнинг бирлик ҳажмидаги фотонлар сони $\rho_{\omega}d\omega$ ни битта фотоннинг энергияси $\hbar\omega$ га нисбати орқали аниқланади.

$$n_{\omega}d\omega = \frac{\rho_{\omega}d\omega}{\hbar\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2c^3} \frac{d\omega}{\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1\right)} (1.1.3.4)$$

Тўлқин узунлиги λ ва $\lambda + d\lambda$ интервалда бўлган мувозанатли нурланишнинг бирлик ҳажмидаги фотонлар сонини аниқлаш учун частота бўйича тақсимотдан тўлқин узунлиги бўйича тақсимотга ўтамиз.

$$n_{\lambda}d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{d\lambda}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right)-1} (1.1.3.5)$$

Бирлик ҳажмдаги фотонларнинг тўлиқ сони - n қуйидагича аниқланади.

$$n = \int_0^{\infty} n_{\omega} d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{d\omega}{\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1\right)} \quad (1.1.3.6)$$

Бу интеграл математикада осон ҳисобланади, бунинг учун $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$ деб

белгилаймиз, $dx = \frac{\hbar}{kT} d\omega$ ни топиб ҳамда $\omega = \frac{kT}{\hbar} x$ ни эътиборга олиб интегрални жадвалдаги интегралларга келтирамиз.

Натижада $n = 2,405 \cdot 8\pi \left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^3$ ифодани оламиз.

1.2 Масалалар

1.2.1 Абсолют қора жисмнинг бошланғич температураси 2000°K . Агар унинг спектридаги энг катта эҳтимолли тўлқин узунлиги $0,5 \text{ мкм}$ га ўзгарган бўлса, нурланиш температураси неча градусга ўзгарган? (Жавоб: 510°K га камаяди)

1.2.2 Қуёш сиртининг температураси 6000°K . Нурланиш зичлигининг максимумига тўғри келган яшил нурнинг тўлқин узунлиги $\lambda_m = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$. Планк формуласидан фойдаланиб $\hbar$ -ни ҳисобланг.

1.2.3 Нурланиш қобиляти $5,7 \text{ Вт/с}^2$ бўлган иссиқлик нурланиши спектридаги энг катта эҳтимолли тўлқин узунлигини аниқланг. (Жавоб: $2,9 \text{ мкм}$)

1.2.4 Вин формуласидан фойдаланиб $T = 2000^\circ\text{K}$ да: а) энг катта-эҳтимолли нурланиш частотасини; б) нурланишнинг ўртача частотасини; в) энг катта эҳтимолли тўлқин узунлигини; г) ўртача тўлқин узунлигини ҳисобланг. Вин формуласи: $u_{\omega} = A\omega^3 \exp\left(-\frac{a\omega}{T}\right)$, $a = 7,64 \cdot 10^{-12} \frac{\text{с} \cdot \text{град}}{\text{рад}}$ кўринишда олинади.

(Жавоб: а) $\omega_{\text{эxm}} = \frac{2T}{a} = 5,24 \cdot 10^{23} \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, б) $\bar{\omega} = 2\omega_{\text{эxm}}$ в) $\lambda_{\text{эxm}} = \frac{2\pi a}{5T} = 1,44 \text{ мкм}$

г) $\bar{\lambda} = \left(\frac{5}{3}\right) \lambda_{\text{эxm}}$

1.2.5 Планк формуласидан фойдаланиб: а) тўлқин узунлиги λ ва $\lambda + d\lambda$ интервалда бўлган мувозанатли нурланишнинг бирлик ҳажмидаги фотонлар

сонини; б) T температурадаги мувозанатли нурланишнинг бирлик ҳажмидаги

фотонлар сонини топинг. (Жавоб: а) $n_{\omega}d\omega = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$; $n_{\lambda}d\lambda = \frac{8\pi}{\pi^2 c^3} \frac{\lambda^{-4} d\lambda}{e^{\frac{2\pi \hbar c}{kT\lambda}} - 1}$

Б) $n = 0,243 \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3$

1.2.6 Релей-Джинс формуласидан фойдаланиб $T = 300^0 \text{ K}$ да: а) энг катта-эхтимолли нурланиш частотасини; б) энг катта эхтимолли тўлқин узунлигини ҳисобланг.

1.2.7 Планк формуласидан фойдаланиб $T = 300^0 \text{ K}$ да: а) энг катта-эхтимолли нурланиш частотасини; б) энг катта эхтимолли тўлқин узунлигини топинг.

1.2.8 Планк формуласидан фойдаланиб $T = 1200^0 \text{ K}$ да: а) энг катта-эхтимолли нурланиш частотасини; б) энг катта эхтимолли тўлқин узунлигини топинг.

2. Ёруғликнинг элементар квант назарияси, Фотоэффект, Комптон эффекти, Бор постулатлари, Водород атоми учун Бор назарияси

Ташқи фотоэффект ходисаси ω частотали монохроматик электромагнит нурланиш оқимини энергияси $\varepsilon = \hbar\omega$ ва импульси $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ бўлган фотонлар оқими каби тасаввур этиш асосида тушунтирилади.

Фотоэффект деб, ёруғлик тўлқинлари таъсирида металлдан ёки моддалардан электронларнинг ажралиб чиқиш ходисасига айтилади.

Фотоэффект Г.Герц томонидан очилган, рус физиги А.Г.Столетов томонидан экспериментал текширилган ва учта қонуни очилган.

1. Фотоэффектнинг чегараланганлик характери. Фотоэлектронлар ажралиб чиқиши учун, металлга таъсир қилувчи ёруғликнинг тўлқин узунлиги қаралаётган металл учун ҳарактерли бўлган чегаравий қийматдан кичик бўлиши керак.

2. Металлдан ажралиб чиқувчи электронларнинг сони унга таъсир қилаётган нурланишнинг интенсивлигига пропорционалдир.

3. Металлдан ажралиб чиқувчи фотоэлектронларнинг максимал кинетик энергияси нурланиш частотасига чизикли боғланган ҳолда ортиб боради ва интенсивликка боғлиқ эмас.

Бу қонунлар классик тасаввурлар асосида тушунтирилмайди. Ёруглик ҳақидаги квант тасаввурлар асосида фотоэффектнинг асосий қонунлари тўла тушунтирилади.

Нурланишни фотонлар тўплами сифатида қаровчи тасаввурларга асосан, атомдаги боғланган электрон билан ўзаро таъсирида ютилган битта фотон учун ёзилган Эйнштейн тенгламаси (1905 й.) қуйидагича ёзилади.

$$\hbar\omega = A + \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.1)$$

Фотоннинг ютилиш жараёни оний жараён ҳисобланади, яъни жисм сиртига фотонларнинг тушиши ва фотоэлектронларнинг ажралиб чиқиши орасида вақт фарқи жуда кичик бўлганлигидан деярли сезилмайди.

Электромагнит нурланишнинг корпускуляр хоссалари тўлалигича 1922 йилда Америкалик физик А.Комптон томонидан очилган эффектда намоён бўлади.

Комптон эффекти деб, электромагнит нурланишнинг эркин (ёки қучсиз боғланган) электронларда тўлқин узунлиги ўзгарган ҳолда эластик сочилишига айтилади.

Комптон эффекти кичик тўлқин узунлиги (катта частотага) га эга бўлган, рентген ва гамма нурланишларининг кристалларда сочилиш процессини ифодаловчи экспериментларда кузатилади.

Комптон эффектини классик тасаввурлар асосида тушунтиришга уриниш экспериментал натижалар билан мос келмайдиган хулосаларга олиб келади.

Квант тасаввурлар асосида, энергияси $\hbar\omega$ ва импульси $\frac{\hbar\omega}{c}$ бўлган фотоннинг тинч ҳолатдаги эркин электрон билан ўзаро тўқнашиш жараёни учун энергия ва импульснинг сақланиш қонунлари қуйидагича ёзилади .

$$\begin{cases} \hbar\omega_0 + m_0c^2 = \hbar\omega + mc^2 \\ \frac{\hbar\vec{\omega}_0}{c} = \frac{\hbar\vec{\omega}}{c} + m\vec{v} \end{cases} \quad (2.2)$$

(2.2) тенгламалар системасини ечиб, мос алмаштиришлар ўтказиш натижасида фотоннинг тўлқин узунлигининг ўзгариши учун қуйидаги ифода олинади:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{2\pi \hbar}{m_0 c} \cdot 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (2.3)$$

(2.3) ифодада $\Delta = 2\pi \hbar / m_0 c$ - узунлик ўлчамига эга катталиқ, электрон (тинч ҳолатдаги массаси m_0) учун Комптон тўлқин узунлиги дейилади:

$$\Lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0 c} = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м} \quad (2.4)$$

Комптон эффектида тўлқин узунлигининг силжишининг қиймати жуда кичик, ҳаттоки $\theta = 180$ га сочилганда ҳам 2Λ га тенг.

2.1 Масалалар ечиш намуналари

2.1.1 Цезий ва платина металлари учун фотоэффектнинг қизил чегарасига мос келадиган тўлқин узунликларини ҳисобланг. Бу металллар учун электронларнинг чиқиш иши $A_{Cs} = 1,89$ эВ, $A_{Pt} = 5,29$ эВ.

Ечиш:

Фотоэффект учун Эйнштейн тенгламасини ёзамиз.

$$\hbar\omega - A = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.1.1.1)$$

Электромагнит нурланиш частотаси ω - ва тўлқин узунлиги λ - ўзаро қуйидагича боғланган: $\omega = 2\pi c / \lambda$

Шу асосда қуйидаги ифодани оламиз:

$$\frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = A + \frac{mv^2}{2} \quad (2.1.1.2)$$

Фотоэффектнинг қизил чегарасида $\frac{mv^2}{2} = 0$ кинетик энергия нолга тенг бўлиши керак

$$\frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = A \quad (2.1.1.3)$$

ифода ҳосил бўлади. Бундан фотоэффектнинг қизил чегарасига мос тўлқин узунлиги

$$\lambda_K = \frac{2\pi\hbar c}{A} \quad (2.1.1.4)$$

а) Цезий учун

$$\lambda_K = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 10^8 \frac{м}{с} \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Жс}}{1,89 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Жс}} = 6,57 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

б) Платина учун

$$\lambda_K = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 10^8 \frac{м}{с} \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Жс} \cdot c}{5,29 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Жс}} = 2,35 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

2.1.2 Энергияси $E=0,35 \text{ МэВ}$ бўлган фотон эркин электронда $\theta = 60^\circ$ га сочилади. Электроннинг бошланғич кинетик энергиясини ҳисобга олмаган ҳолда, сочилган фотоннинг энергиясини аниқланг.

Ечиш:

Фотоннинг эркин электронда тўлқин узунлиги ўзгарган ҳолда сочилиши ходисаси Комптон эффекти дейилади. Комптон эффектида фотоннинг тўлқин узунлигининг ўзгариши қуйидагича аниқланади.

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0c} \cdot 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (2.1.2.1)$$

Фотоннинг тўлқин узунлиги билан энергияси орасидаги боғланиш

$$\varepsilon = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} \quad (2.1.2.2)$$

Юқоридаги (2.1.2.1.) ва (2.1.2.2.) ифодалар асосида алмаштириш ўтказиб, қуйидаги ифодани оламиз:

$$\frac{2\pi\hbar c}{\varepsilon'} - \frac{2\pi\hbar c}{\varepsilon} = \frac{4\pi\hbar c}{m_0c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (2.1.2.3)$$

Бу ифодани соддалаштириб ε' - учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1 + 2 \frac{\varepsilon}{m_0c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (2.1.2.4)$$

Барча қийматларни ўз ўрнига қўйсак,

$$\varepsilon' = 0,26 \text{ МэВ}$$

2.1.3 Моддани монохроматик рентген нурлари билан нурлантирилганда

Комптон электронларининг максимал кинетик энергияси $T_{\max} = 0,44 \text{ МэВ}$ га

тенглиги маълум бўлса, таъсир этувчи нурланишнинг тўлқин узунлигини ҳисобланг.

Ечиш:

Комптон эффектида сочилган фотоннинг энергияси формуласи

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1 + 2 \frac{\varepsilon}{m_0 c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (2.1.3.1)$$

дан фойдаланиб. Комптон эффекти учун энергиянинг сақланиш қонунини қуйидагича

$$\varepsilon = \varepsilon' + T_{kin}$$

ёзиб, электроннинг кинетик энергияси учун қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз.

$$T_{kin} = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{1 + \frac{2\varepsilon}{m_0 c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (2.1.3.2)$$

ифодани соддалаштириб:

$$T_{kin} = \frac{2\varepsilon^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{m_0 c^2 \left(1 + \frac{2\varepsilon}{m c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)} \quad (2.1.3.3)$$

ифодада $\theta = \pi$ бўлганда $T_{kin} = T_{max}$ бўлади. У ҳолда

$$T_{max} = \frac{2\varepsilon^2}{m_0 c^2 + 2\varepsilon} \quad (2.1.3.4)$$

Бу тенгламани ε га нисбатан ечсак ε учун квадрат тенглама ҳосил бўлади.

$$2\varepsilon^2 - 2\varepsilon T_{max} - T_{max} m_0 c^2 = 0$$

Тенгламанинг ечими

$$\varepsilon_{12} = T_{max} \pm \sqrt{T_{max}^2 + 2T_{max} m_0 c^2} \quad (2.1.3.5)$$

Фотоннинг энергияси ва тўлқин узунлиги орасидаги боғланишни эътиборга олиб, моддага таъсир қилувчи нурланишнинг тўлқин узунлиги учун ифодани аниқлаймиз.

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{T_{\max} \left(1 + \sqrt{1 + 2 \frac{m_0 c^2}{T_{\max}}} \right)} = 10^{-12} \text{ м.} \quad (2.1.3.6)$$

2.1.4 Литий метали сиртини тўлқин узунлиги λ_0 бўлган ёруғлик билан ёритишда ҳосил бўладиган фототок, тўхтатувчи потенциаллар фарқининг маълум бир максимал қийматида тўхтади. Ёруғликнинг тўлқин узунлигини $n=1,5$ марта ўзгартирилганда токни тўхтатиш учун зарур бўлган потенциаллар фарқини $\eta = 2$ марта орттириш зарурлиги исботланган. Ёруғликнинг тўлқин узунлиги λ_0 ни ҳисобланг.

Ечиш:

Фотоэффект учун Эйнштейн формуласини ёзамиз.

$$\hbar\omega = A + \frac{\mu v^2}{2} \quad (2.1.4.1)$$

Бу ерда μ – электрон массаси. $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ дан фойдаланиб частотадан тўлқин узунлигига ўтамиз ва Эйнштейн тенгламасини қуйидагича ёзамиз.

$$\frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = A + \frac{\mu v^2}{2} \quad (2.1.4.2)$$

Тўхтатувчи потенциаллар фарқи $eU = \frac{\mu v_m^2}{2}$ дан аниқланади. Масала шартига асосан Эйнштейн тенгламасини 2-ҳол учун ёзамиз.

$$\frac{2\pi\hbar c}{\lambda_0} = A + eU_0 \quad (2.1.4.3)$$

$$\frac{2\pi\hbar c n}{\lambda_0} = A + \eta eU_0 \quad (2.1.4.4)$$

Иккинчи тенгламадан биринчисини айирамиз, алмаштиришлар ўтказамиз.

$$\frac{n-1}{\lambda_0} = \frac{eU}{2\pi\hbar c} (\eta - 1), \quad (2.1.4.5)$$

(2.1.4.4) дан λ_0 ни аниқласак:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi\hbar c}{eU} \left(\frac{n-1}{\eta-1} \right) = 2,6 \cdot 10^{-7} \text{ м. (2.1.4.6)}$$

2.1.5 Фотон эркин электронда $\theta = 60^\circ$ га сочилган. Тўқнашишда сочилган фотоннинг энергияси $\varepsilon' = 0,26 \text{ МэВ}$ бўлса, электронга таъсир қилувчи фотоннинг энергиясини ҳисобланг.

Ечиш:

Сочилган фотоннинг энергияси ва тўлқин узунлиги орасидаги боғланишдан фойдаланиб Комптон формуласига биноан $\Delta\lambda$ ни топиш мумкин. Фотоннинг тўлқин узунлиги билан энергияси орасидаги боғланиш

$$\varepsilon = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} \quad (2.1.5.1)$$

Юқоридаги ифодалар асосида алмаштириш ўтказиб, қуйидаги ифодани оламиз:

$$\frac{2\pi\hbar c}{\varepsilon'} - \frac{2\pi\hbar c}{\varepsilon} = \frac{4\pi\hbar c}{m_0 c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (2.1.5.2)$$

Бу ифодани соддалаштириб ε' - учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{1 - 2 \frac{\varepsilon'}{m_0 c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{0,26}{1 - 2 \frac{0,26}{0,5} \sin^2 30^\circ} = \frac{0,26}{0,74} = 0,35 \text{ МэВ}$$

Барча қийматларни ўз ўрнига қўйсак,

$$\varepsilon = 0,35 \text{ МэВ} \text{ натижани оламиз.}$$

2.2 Масалалар

2.2.1 Литий метали сиртини тўлқин узунлиги λ_0 бўлган ёруғлик билан ёритишда ҳосил бўладиган фототок тўхтатувчи потенциаллар фарқининг маълум бир максимал қийматида тўхтайди. Ёруғликнинг тўлқин узунлиги $n = 2$ марта ўзгарганда токни тўхтатиш учун зарур бўлган потенциаллар фарқини $\eta = 3,5$ марта орттириш лозимлиги исботланган. Ёруғликнинг тўлқин узунлиги λ_0 ни ҳисобланг. (Жавоб: $\lambda_0 = \frac{2\pi\hbar c}{A} \cdot \frac{\eta - n}{\eta - 1}$)

2.2.2 Кумуш ва висмут металлари сиртидан тўлқин узунлиги $\lambda = 0,25 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ бўлган нурланиш таъсирида ажралиб чиқадиган фотоэлектронларнинг

максимал кинетик энергияларини ва тезлигини топинг. Кумуш ва висмут металларида электронларнинг чиқиш иши мос равишда 4,28 ва 4,62 эВ га тенг.

2.2. 3 Энергияси $E=0,46$ МэВ бўлган фотон тинч ҳолатдаги эркин электронда $\theta = 120^\circ$ га сочилади. а) сочилган квант энергияси; б) электронга берилган энергияни топинг.

2.2. 4 Агар фотон тинч ҳолатдаги эркин электронда $\theta = 60^\circ$ га сочилганда электрон $T=0,45$ МэВ кинетик энергия олган бўлса, электронга таъсир қилувчи фотоннинг энергиясини топинг.

2.2.5 0,51 МэВ энергияли фотон релятивистик электрон билан тўқнашиш жараёнида 60° бурчакга сочилган, электрон эса кинетик энергиясини деярли тўла йўқотган. Сочилишда фотоннинг тўлқин узунлигининг ўзгаришини аниқланг.

2.2.6 Сақланиш қонунлари ёрдамида эркин электронда фотоннинг ютилмаслигини исботланг.

2.2.7 Импульси $p = 60$ кН/с бўлган фотон тинч ҳолатдаги эркин электронда $\theta = 120^\circ$ бурчакка сочилиб, молибден атомидан боғланиш энергияси 20 кэВ бўлган электронни уриб чиқаради. Фотоэлектроннинг кинетик энергиясини топинг.

2.2 8 Агар фотон тинч ҳолатдаги эркин электронда $\theta = 45^\circ$ га сочилганда электрон $T=0,4$ МэВ кинетик энергия олган бўлса, электронга таъсир қилувчи фотоннинг энергиясини топинг.

2.2.9 Агар фотон тинч ҳолатдаги эркин электронда $\theta = 30^\circ$ га сочилганда электрон $T=0,5$ МэВ кинетик энергия олган бўлса, электронга таъсир қилувчи фотоннинг энергиясини топинг

2.2.10 Импульси $P = 90$ КэВ/с бўлган фотон тинч ҳолатдаги эркин электронда $\theta = 60^\circ$ бурчакка сочилиб, молибден атомидан боғланиш энергияси 20 кэВ бўлган электронни уриб чиқаради. Фотоэлектроннинг кинетик энергиясини топинг.

3. Де-Бройл тўлқинлари, Гейзенбергнинг ноаниқликлар муносабати

Табиатдаги микрозаррачалар бир вақтнинг ўзида классик тўлқин ва классик корпускула (заррача) хусусиятларини намоён қиладиган квантомеханик микрообъектлар ҳисобланади.

Француз физиги Луи Де-Бройл энергияси E ва импульси $\vec{P}$ бўлган эркин ҳаракатланувчи заррачанинг ҳаракати билан

$$\varphi(\vec{r}; t) = Ce^{i(\omega t - k\vec{r})} \quad (3.1)$$

ясси тўлқиннинг ҳаракатини ўзаро мос келади деган ғояни олға суради. Фазонинг ихтиёрий нуқтасининг радиус вектори $\vec{r}$. Тўлқин частотаси ω ва тўлқин вектори $\vec{k}$ нинг заррача энергияси E ва импульси $\vec{P}$ билан боланиши ёруғлик квантлари учун ёзилган тенгламага ўхшаш тенглама билан ифодаланади:

$$\begin{cases} E = \hbar\omega \\ \vec{P} = \hbar\vec{k} \end{cases} \quad (3.2.)$$

Агар (3.2),ни (3.1) га қўйсак, (3.3) Де-Бройл тўлқини ифодаси олинади:

$$\varphi(\vec{r}; t) = ce^{i\left(\frac{Et}{\hbar} - \frac{\vec{P}\vec{r}}{\hbar}\right)} \quad (3.3)$$

Бир ўлчамли ҳаракат учун (3.1) ифода қуйидаги шаклга келади:

$$\varphi(x; t) = ce^{i(\omega t - kx)} \quad (3.4)$$

(3.4) ифодада $(\omega t - kx)$ тўлқин фазаси, фараз қиламиз x координатали нуқтада фазанинг қиймати $\alpha = const$ га тенг бўлсин.

$$\alpha = \omega t - kx = const \quad (3.5)$$

(3.5) га асосан, α нинг қиймати вақт ўтиши билан фазода u тезлик билан силжиб боради, Де-Бройл тўлқинининг фаза тезлиги $u = \frac{\omega}{k}$ (3.6)

(3.6.) ифодадан u -нинг қиймати, тўлқин сони $k = 2\pi/\lambda$ га ҳам боғлиқ. Де-Бройл тўлқини фаза тезлигининг тўлқин узунлигига боғланишидан тўлқин дисперсиясининг мавжудлиги кўринади, лекин электромагнит тўлқинларидан фарқли холда Де-Бройл тўлқини учун ҳаттоки вакуумда (ҳавосиз бўшлиқда) ҳам дисперсия мавжуддир.

Микрозаррачанинг ҳаракати билан тўлқин ҳаракати орасидаги боғланиш тўлқин группаси –яъни, бир-биридан тўлқин узунлиги ва тарқалиш йўналиши бўйича фарқ қилувчи тўлқинлар суперпозицияси асосида текширилади

$$\varphi(x,t) = \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} c(k) e^{i(\omega t - kx)} dk \quad (3.7)$$

Бу ерда $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ - тўлқин группаси марказига мос тўлқин сони. Алмаштиришлар асосида, (3.7) дан (3.8.) ифода олинади, (3.8.) да

$$\varphi(x;t) = c(k_0) \int \exp \left[i \left[\left(\frac{d\omega}{dk} \right) t - x \right] \right] \xi d\xi \quad (3.8.)$$

(3.8.) да $\varphi(x;t)$ функция $x = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t$ нуқтада максимал қийматга эришади, бу нуқта эса тўлқин группасининг маркази ва тўлқин группаси марказининг тезлиги эса группавий тезлик $V = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0$ дейилади.

Де-Бройл тўлқин узунлиги λ билан релятивистик микрозаррачанинг кинетик энергияси E_k орасидаги боғланиш

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{E_k(E_k + 2m_0c^2)}} \quad (3.9)$$

Норелятивистик микрозаррача ($E_k \ll m_0c^2$ ва $v \ll c$) ҳаракати учун

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{2m_0E_k}} \quad (3.10)$$

$E_k \gg m_0c^2$ - ультрарелятивистик заррачанинг ҳаракати қуйидаги ифода олинади

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{E_k} \quad (3.11)$$

Электроннинг кинетик энергиясини тезлатувчи потенциаллар фарқи билан боғловчи $E = eU$ ифодадан фойдаланиб, қуйидаги ифодани оламиз:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2meU}} \quad (3.12)$$

(3.12) га $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$, $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ ва $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ жс} \cdot \text{с}$ қийматларни

қўйиб, $\lambda = \sqrt{\frac{150}{U}} \cdot 10^{-10} \text{ м.}$ ифодани оламиз.

Микродунёда заррачанинг маълум x -нуқтадаги импульси p_x -га тенг деган фикр маънога эга эмас, яъни микрозаррачаларнинг импульси ва мос координатаси бир вақтда аниқ қийматга эга бўлган квант ансамбллари мавжуд эмас:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x = \pi \hbar \quad (3.13)$$

(3.13) ифода Гейзенбергнинг микрозаррачанинг p_x -импульси ва унга мос x -координатаси учун ёзилган ноаниқлик муносабати дейилади.

$$(\overline{\Delta p_x})^2 (\overline{\Delta x})^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \quad (3.15)$$

(3.15) ифода Гейзенбергнинг ноаниқликлар муносабати дейилади. Гейзенбергнинг ноаниқликлар муносабати классик ва квант механикаларининг ўринли бўлиш чегарасини кўрсатади.

3.1 Масалалар ечиш намуналари

3.1.1 Электрон учун Де-Бройль тўлқини узунлиги кинетик энергиянинг қандай қийматида Комптон тўлқини узунлигига тенг бўлади?

Ечиш:

Релятивистик электрон учун Де-Бройль тўлқини узунлиги билан кинетик энергия орасидаги боғланишни ифодаловчи (3.12) формуладан фойдаланамиз:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{E_k(E_k + 2m_0c^2)}} \quad (3.1.1.1)$$

Электрон учун Комптон тўлқини узунлиги

$$\lambda_k = \frac{2\pi\hbar c}{m_0c^2} \quad (3.1.1.2)$$

масаланинг шартига кўра $\lambda = \lambda_k$: Юқоридаги ифодаларни ўзаро тенглаштирсак:

$$\frac{2\pi\hbar c}{m_0c^2} = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{E_k(E_k + 2m_0c^2)}} \quad (3.1.1.3)$$

тенгликни соддалаштирсак:

$$E_K^2 + 2m_0c^2E_K = m_0c^4$$

Ушбу E_K га нисбатан квадрат тенгламанинг ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$E_K = m_0c^2(\sqrt{2} - 1) \quad (3.1.1.4)$$

агар $m_0c^2 = 0,51 \text{ МэВ}$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$E_K = 0,212 \text{ МэВ}$$

3.1.2. Идеал газ молекулалари тезликларининг абсолют қиймати учун Максвелл тақсимот функциясидан фойдаланиб, иссиқлик мувозанати ҳолатидаги молекулаларнинг де-Бройль тўлкини узунликлари бўйича тақсимотини топинг. Водород молекуласи учун $T=300 \text{ К}$ температурада энг катта эҳтимолли Де-Бройль тўлкини узунлигини ҳисобланг.

Ечиш:

Идеал газ молекулалари тезликларининг абсолют қиймати учун Максвелл тақсимот функцияси:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot v^2 \quad (3.1.2.1)$$

молекулаларнинг Де-Бройль тўлкини узунликлари ва тезликлари орасидаги боғланиш формула билан ифодаланади.

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_e U}} \quad (3.1.2.2)$$

Кинетик энергия формуласидан фойдаланамиз ва тўлқин узунлигининг тезликга боғланишини ишлатамиз. λ - нинг v - га функционал боғланиши

$$f(\lambda) = f(v) \left| \frac{dv}{d\lambda} \right| \quad (3.1.2.3)$$

Юқоридаги ифодадан v -ни аниқлаб, λ - бўйича дифференциалласак,

$$\frac{dv}{d\lambda} = -\frac{2\pi\hbar}{m_0 \lambda^2} \quad (3.1.2.4)$$

Алмаштиришлар ўтказиб, $f(\lambda)$ учун қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$f(\lambda) = 32\pi^4 \hbar^3 (2\pi m_0 kT)^{-3/2} \lambda^{-4} e^{-\frac{2\pi^2 \hbar^2}{m_0 kT \lambda^2}} \quad (3.1.2.5)$$

$df(\lambda)/d\lambda = 0$ шартдан фойдаланиб, юқоридаги ифодадан энг катта эхтимолий тезликни аниқлаймиз.

$$\lambda_{ke} = \frac{\pi \hbar}{\sqrt{m_0 kT}} = 1,2610^{-10} \text{ м.}$$

3.1.3 Электроннинг кинетик энергиясининг қандай қийматида де-Бройль тўлқин узунлиги Комптон тўлқин узунлигининг ярмига тенг бўлади.

Ечиш:

Релятивистик электрон учун Де-Бройль тўлқини узунлиги билан кинетик энергия орасидаги боғланишни ифодаловчи (3.12) формуладан фойдаланамиз:

$$\lambda = \frac{2\pi \hbar c}{\sqrt{E_k(E_k + 2m_0 c^2)}} \quad (3.1.3.1)$$

Электрон учун Комптон тўлқини узунлиги

$$\lambda_k = \frac{2\pi \hbar}{m_0 c^2} \quad (3.1.2.2)$$

масаланинг шартига кўра $\lambda = \frac{1}{2} \lambda_k$: Юқоридаги ифодаларни ўзаро тенглаштирсак:

$$\frac{1}{2} \frac{2\pi \hbar}{m_0 c^2} = \frac{2\pi \hbar c}{\sqrt{E_k(E_k + 2m_0 c^2)}} \quad (3.1.2.3)$$

тенгликни соддалаштирсак:

$$E_k^2 + 2m_0 c^2 E_k = 4m_0^2 c^4$$

$$E_k^2 + 2m_0 c^2 E_k - 4m_0^2 c^4 = 0$$

Ушбу E_k га нисбатан квадрат тенгламанинг ечими қуйидаги кўринишда бўлади:
агар $m_0 c^2 = 0,51 \text{ МэВ}$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$E_k = m_0 c^2 (\sqrt{5} - 1) = 2,23 m_0 c^2 = 2,23 \cdot 0,51 = 1,115 \text{ МэВ}$$

агар $m_0 c^2 = 0,51 \text{ МэВ}$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$E_k = 1,115 \text{ МэВ}$$

3.1.4 Электроннинг кинетик энергиясини 200 эВ га орттирганда унинг де-Бройль тўлкини узунлиги 2 марта ўзгаради. Электроннинг дастлабки де-Бройль тўлкини узунлигини топинг.

Ечиш:

Де-Бройль тўлқин узунлигининг электроннинг кинетик энергиясига норелятивистик ҳолдаги боғланишини ифодаловчи (3.11.) формуладан фойдаланамиз.

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE_k}} \quad (3.1.4.1)$$

Электроннинг кинетик энергияси $\Delta E_k = 200$ эВ га орттирилганда масала шартига асосан λ икки марта камаяди.

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{2} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m(E_k + \Delta E_k)}} \quad (3.1.4.2)$$

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m(E_k + \Delta E_k)}}$$

Бу формуладан λ ни аниқлаймиз.

$$\lambda = \frac{4\pi\hbar}{\sqrt{2m(E_k + \Delta E_k)}} \quad (3.1.4.3)$$

$$\lambda^2 = \frac{16\pi^2\hbar^2}{2mE_k + 2m\Delta E_k} = \frac{16\pi^2\hbar^2}{2m\frac{4\pi^2\hbar^2}{2m\lambda^2} + 2m\Delta E_k}$$

$$4\pi^2\hbar^2 + 2m\Delta E_k\lambda^2 = 16\pi^2\hbar^2$$

$$2m\Delta E_k\lambda^2 = 12\pi^2\hbar^2$$

$$\lambda^2 = \frac{12\pi^2\hbar^2}{2m\Delta E_k} = \frac{6\pi^2\hbar^2}{m\Delta E_k} \quad (3.1.4.4)$$

$$\lambda = 1,41 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

3.1.5 Кинетик энергияси 7,7 МэВ бўлган α заррачанинг де-Бройль тўлқин узунлиги аниқлансин.

Ечиш.

Де-Бройль тўлқин узунлигининг электроннинг кинетик энергиясига норелятивистик ҳолдаги боғланишидан фойдаланамиз.

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE_k}} \quad (3.1.5.1)$$

λ ни ҳисоблаймиз.

$$\lambda = 4.3 \cdot 10^{-14} \text{ м.}$$

3.2. Масалалар

3. 2.1 Электроннинг кинетик энергиясининг қандай қийматида де-Бройль тўлқин узунлиги Комптон тўлқин узунлигининг $\frac{1}{3}$ қисмига тенг бўлади.

3. 2.2 Электроннинг кинетик энергиясининг қандай қийматида Комптон тўлқин узунлиги де-Бройль тўлқин узунлигининг $\frac{1}{3}$ қисмига тенг бўлади.

3.2.3 $T=300 \text{ К}$ температурада ўртача арифметик тезлик билан ҳаракатланувчи кислород молекуласининг де-Бройль тўлқини узунлигини ҳисобланг.

3.2.4 Электроннинг кинетик энергиясини 200 эВ га орттирганда унинг де-Бройль тўлқини узунлиги 2 марта ўзгаради. Электроннинг дастлабки де-Бройль тўлқини узунлигини топинг.

3.2.5 $T=0^\circ\text{C}$ ҳароратда энг катта эҳтимолий тезликка тенг тезлик билан ҳаракатланувчи водород молекуласининг де-Бройль тўлқини узунлигини топинг.

3.2.6 Де-Бройль тўлқини узунлиги $(\lambda) = 0,2 \text{ нм}$ бўлган нейтроннинг энергиясини топинг.

3.2.7 Массаси $m = I_2$ бўлган ва $v = 10 \text{ м/с}$ тезлик билан ҳаракатланувчи заррача учун де-Бройль тўлқини узунлиги қанчага тенг? Қаралаётган ҳолда заррачанинг тўлқин хусусиятини ҳисобга олиш шартми?

3.2.8 Кинетик энергияси $7,7 \text{ МэВ}$ бўлган α заррачанинг де-Бройль тўлқин узунлиги аниқлансин.

3.2..9 Де-Бройль тўлқин узунлиги $\lambda = 0,3 \text{ нм}$ бўлган протоннинг энергиясини аниқланг.

3.2.10 Кинетик энергияси 6.3 МэВ бўлган Гелий ядросининг де-Бройль тўлқин узунлиги аниқлансин.

3.2.11 Электрон учун де-Бройль тўлқин узунлиги кинетик энергиянинг қандай қийматида Комптон тўлқин узунлигидан 2 марта катта бўлади.

3.2.12 (3.2.8) масалада аниқланган α заррача учун Де-Бройл тўлқин узунлиги қиймати асосида α зарраларнинг сочилишини ўрганиш бўйича Резерфорд тажрибаларида α зарраларнинг тўлқин хусусиятлари эътиборга олинмаганлигини исботланг.

3.2.13 Микрзарраларнинг импульсини сочилган ёруғликнинг частотаси бўйича аниқлашда координатага қуйидаги $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$ тенгсизлик билан аниқланувчи ноаниқлик киритилишини исботланг.

3.2.14 Ноаниқлик муносабатларидан фойдаланиб атом ядролари таркибида электронлар жойлашаолмаслигини исботланг.

3.2.15 Де-Бройл тўлқин узунлиги ихтиёрий Бор орбитаси узунлигида бутун сон қаррали жойлашишини исботланг.

4. Чизикли ва ўз-ўзига қўшма операторлар. Операторларнинг хусусий қийматлари ва хусусий функциялари

Квант механиканинг математик аппарати классик механика аппаратидан кескин фарқ қилади ва механик катталиклар орасидаги ўзаро муносабатлар **операторлар** тилида ифодаланади.

Таъриф: Конкрет кўринишидан қатъий назар оператор деб, $u(x)$ функциялар синфига $v(x)$ функциялар синфини мос қўядиган математик амалга айтилади.

$$\hat{L}u(x) = v(x) \quad (4.1)$$

Квант механикада механик катталиклар чизикли, ўз-ўзига қўшма операторлар орқали ифодаланади.

Таъриф; Оператор чизикли оператор бўлиши учун қуйидаги шартни қаноатлантириш зарур:

$$\hat{L}(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 \hat{L} u_1 + c_2 \hat{L} u_2 \quad (4.2)$$

Бу ерда u_1 ва u_2 - ихтиёрий функциялар, c_1 ва c_2 - ихтиёрий доимийлар.

Таъриф: $\hat{L}$ оператор ўз-ўзига қўшма оператор бўлиши учун қуйидаги тенглик ўринли бўлиши керак.

$$\int u_1^*(x) \hat{L} u_2(x) dx = \int u_2(x) \hat{L}^* u_1^*(x) dx \quad (4.3)$$

(4.3) да интеграл x -ўзгарувчининг тўла ўзгариш соҳаси бўйича олинади, u_1 ва u_2 эса интегралланувчи, интегралланиш чегараларида нолга тенг бўлмаган хосиллага эга ихтиёрий функциялар. Мураккаброқ операторлар алгебраик қоидалар асосида амалга оширилади. $\hat{A}$ ва $\hat{B}$ чизиқли ва ўз-ўзига қўшма операторларни йиғиндиси (айирмаси) $\hat{C}\varphi = \hat{A}\varphi \pm \hat{B}\varphi$ қоида асосида аниқланади ва $\hat{C} = \hat{A} \pm \hat{B}$ кўринишда ёзилади.

$$\hat{A} \text{ ва } \hat{B} \text{ операторлар кўпайтмаси } \hat{C}\varphi = \hat{A}(\hat{B}\varphi), \text{ бўлинмаси } \hat{C}\varphi = \left(\frac{\hat{A}}{\hat{B}} \right) \varphi$$

қоидалар асосида бажарилади ва $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$, $\hat{C} = \frac{\hat{A}}{\hat{B}}$ кўринишида ёзилади.

Кўпайтмада кўпайтувчиларни алмаштиришга имкон бермайдиган алгебра-нокоммутатив катталиклар алгебраси дейилади. Катталиклар нокоммутатив (ўрни алмаштирилмайдиган) катталиклар дейилади.

Агар $\hat{C}_1$ ва $\hat{C}_2$ - ўзаро тенг бўлса, $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$ бу ҳолда $\hat{A}$ ва $\hat{B}$ операторлар коммутатив операторлар дейилади. $\hat{F} = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ катталик $\hat{A}$ ва $\hat{B}$ операторларнинг коммутатори дейилади. Ҳар бир оператор ўзига коммутатив $\hat{A}^n = \underbrace{\hat{A} \cdot \hat{A} \cdot \dots \cdot \hat{A}}_n$ оператордир.

Квант механикада ҳар қандай $\bar{L}$ - механик катталикка квант механикада чизиқли ва ўз-ўзига қўшма $\hat{L}$ -оператор $L \Rightarrow \hat{L}$ мос қўйилади.

Операторлар ва мос ўлчанувчи катталиклар орасидаги боғланиш физикавий катталикнинг ўртача қиймати асосида аниқланади ва $\hat{L}$ нинг ўз-ўзига қўшмалигидан

$$\bar{L} = \int \psi^* \hat{L} \psi dx, \quad \bar{L}^* = \int \psi \hat{L}^* \psi^* dx \text{ ва } \bar{L} = \bar{L}^* \quad (4.4)$$

Чизиқли ва ўз-ўзига қўшма операторлар билан ифодаланувчи физик катталикнинг ўртача қиймати, ҳақиқийдир;

Ўртача квадратик оғиш формуласи қуйидагича ёзилади.:

$$(\bar{L})^2 = \int \psi^*(x)(\Delta \hat{L})^2 \psi(x) dx, \quad (\overline{\Delta L})^2 = \int \psi^*(\Delta \hat{L})^2 \psi dx, \quad (\overline{\Delta L})^2 \geq 0$$

$\bar{L}$ ва $\bar{L}^2$ - нинг ифодаларидан, L - катталиқ қийматлар тўпламидаги ҳар бир қиймат ҳақида тушунча олинмайди. Ψ_L - ҳолатда L -катталиқ фақат битта қийматга эга бўлса $\Delta \bar{L}^2 = 0, \int |\Delta \hat{L} \Psi_L|^2 dx = 0$ бу ифодадан $|\Delta \hat{L} \Psi_L|^2 = 0$ ва $\Delta \hat{L} \Psi_L = 0$, бу тенглама фақат битта L -қийматга эга бўлган катталиқни ифодаловчи оператор учун Ψ_L - ҳолат тўлқин функциясини аниқлаш тенгламаси бўлади. Берилган чегаравий шартларда дифференциал тенглама нолдан фарқли нотривиал ечимга $L = L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$ қийматларда эга бўлади. Мос ечимлар $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n, \dots$ бўлади. Ушбу катталиқлар хусусий қийматлар, мос функциялар эса хусусий функциялар дейилади. Квант механикада операторнинг хусусий қийматлари $L_1 \leq L \leq L_2, L_3 \leq L \leq L_4$ лар $\hat{L}$ оператор орқали ифодаланган механик катталиқларнинг ҳамма мумкин бўлган ўлчанадиган катталиқлари билан мос тушади. Хусусий қийматлар тўплами алоҳида қийматлардан иборат бўлса, спектр дискрет дейилади, акс ҳолда спектр узлуксиз дейилади.

Операторларнинг хусусий функциялари ва хусусий қийматлари қуйидаги тенгламадан аниқланади.

$$\hat{L} \psi_n = L_n \psi_n \quad (\text{бу ерда } L_n = \text{const})$$

Стандарт (чеклилик, узлуксизлик ва бир қийматлилик) талабларга бўйсинувчи хусусий функциялар тўплами ортонормал функцияларнинг тўла тўпламини ҳосил қилади. L_n -хусусий қийматларнинг дискрет спектри учун

$$\int \psi_m \psi_n^* dV = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases}$$

L ва M катталиқлар бир вақтда аниқ қийматга эга бўлиши учун мос $\hat{L}$ ва $\hat{M}$ операторлар ўзаро коммутатив бўлиши керак. $\hat{L}\hat{M} = \hat{M}\hat{L}$, акс ҳолда $\hat{L}\hat{M} \neq \hat{M}\hat{L}$ ва $\hat{L}$ ва $\hat{M}$ операторлар ўзаро коммутатив операторлар бўлади.

4.1 Масалалар ечиш намуналари

4.1.1 Қуйидаги оператор тенгликларни текширинг:

$$a) \left(\frac{d}{dx} \right)^2 = 1 + 3x \frac{d}{dx} + x^2 \frac{d^2}{dx^2} \quad b) \left(x^2 \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{x} = x \frac{d}{dx} - 1 \right)$$

Ечиш;

a) Оператор тенгликларни исботлашда $\widehat{L}^2\psi = \widehat{L}(\widehat{L}\psi)$ тенгликдан фойдаланилади.

$$\left(\frac{d}{dx} \cdot x\right)^2 \psi = \left(\frac{d}{dx} \cdot x\right) \left(\frac{d}{dx} \cdot x \psi\right) = \left(\frac{d}{dx} x\right) \left(\psi + x \frac{d\psi}{dx}\right) = \psi + x \frac{d\psi}{dx} + 2x \frac{d\psi}{dx} + x^2 \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

Тенглик исботланди.

$$b) \left(x^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{x}\right) \psi = x^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \psi\right) = x^2 \left(-\frac{1}{x^2} \psi + \frac{1}{x} \frac{d\psi}{dx}\right) = -\psi + x \frac{d\psi}{dx} = \left(x \frac{d}{dx} - 1\right) \psi$$

тенглик исботланди.

4.1.2 Импульснинг проекциясини ифодаловчи оператор $\widehat{P}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ нинг чизиқли ва ўз-ўзига қўшма оператор эканлигини исботланг. $(-\infty < x < +\infty)$

Исбот:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x) \widehat{L} \psi_2(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x) \widehat{P}_x \psi_2(x) dx = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \left(-\frac{d\psi_2(x)}{dx}\right) dx = \\ &= [-i\hbar \psi_1^* \psi_2]_{-\infty}^{\infty} + i \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2 \frac{\partial \psi_1^*}{\partial x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(x) \widehat{P}_x^* \psi_1(x) dx \end{aligned}$$

Бу ерда $\psi_1^*(\pm\infty) = \psi_2(\pm\infty) = 0$ эканлигидан фойданилди. Шундай қилиб, $\widehat{P}_x$ - оператор чизиқли ва ўз-ўзига қўшма оператордир.

4.1.3 Қуйидаги кўринишлардаги L операторнинг ψ функцияга таъсирини аниқланг. $\widehat{L} = \frac{d}{dx}$, $\widehat{L} = x^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{x}$

Ечиш:

Масалани ечишда операторнинг хусусий функция ва хусусий қийматлари орасидаги боғланиш тенграмасидан фойдаланамиз.

$$\widehat{L}\psi(x) = L\psi(x); \quad \widehat{L}\psi(x) = x^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \psi(x).$$

$$\widehat{L} = x^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \text{ операторнинг } \psi \text{ функцияга таъсири қуйидаги } x^2, \frac{d}{dx}, \frac{1}{x} \text{ уқта}$$

операторнинг ψ функцияга таъсири орқали ифодаланади.

$$\begin{aligned}\widehat{L}\psi(x) &= \left(x^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{x}\right)\psi = \left(x^2 \frac{d}{dx}\right) \frac{1}{x}\psi = \left(x^2 \frac{d}{dx}\right) \frac{\psi}{x} = (x^2) \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{\psi}{x}\right)\right) = x^2 \left(\frac{1}{x} \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \left(x \frac{d\psi}{dx} - \psi\right) = \left(x \frac{d}{dx} - 1\right)\psi\end{aligned}$$

Юқоридаги тенглама билан солиштирамиз.

$$\widehat{L}\psi = \left(x \frac{d}{dx} - 1\right)\psi = \varphi$$

Демак $\widehat{L}$ операторнинг ψ функцияга таъсири, операторнинг таърифига мос ҳолда янги $\varphi = \left(x \frac{d}{dx} - 1\right)\psi$ функцияни ҳосил қилади.

4.1.4 Куйидаги кўринишлардаги $\widehat{L}$ операторнинг ψ функцияга таъсирини аниқланг. $\widehat{L} = \left(1 + \frac{d}{dx}\right)^2$.

Ечиш:

Бу масалани ечишда ҳам операторнинг хусусий функция ва хусусий қийматлари орасидаги боғланиш тенгламасидан фойдаланамиз.

$$\widehat{L}\psi(x) = L\psi(x)$$

$$\begin{aligned}\widehat{L}\psi(x) &= \left(1 + \frac{d}{dx}\right)^2 \psi = \left(1 + \frac{d}{dx}\right) \left(1 + \frac{d}{dx}\right) \psi = \left(1 + \frac{d}{dx}\right) \left(\psi + \frac{d\psi}{dx}\right) = \left(\psi + \frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dx} + \frac{d^2\psi}{dx^2}\right) = \\ &= \left(1 + 2\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}\right)\psi\end{aligned}$$

Натижани операторнинг хусусий функция ва хусусий қийматлари орасидаги боғланиш тенгламаси билан таққосласак:

$$\widehat{L}\psi(x) = \left(1 + 2\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}\right)\psi$$

4.1.5 $\widehat{L} = \frac{d^2}{dx^2} x^2$ операторнинг $\psi(x) = \sin x$ функцияга таъсири натижасини аниқланг.

Ечиш:

Масалани ечишда $\widehat{L}\psi(x) = L\psi(x)$ дан фойдаланиш мумкин.

$$\hat{L}\psi(x) = \frac{d^2}{dx^2} x^2 \sin x = \frac{d}{dx} x^2 \sin x = \frac{d}{dx} (2x \sin x + x^2 \cos x)$$

$$\hat{L}\psi(x) = \frac{d^2}{dx^2} x^2 \sin x = 2 \sin x + 2x \cos x + 2x \cos x - x^2 \sin x = 4x \cos x + (2 - x^2) \sin x$$

$$\frac{d^2}{dx^2} x^2 (\sin x) = (2 - x^2) \sin x + 4x \cos x$$

4.1.6 $\hat{L} = -\frac{d^2}{dx^2}$ операторнинг $\varphi_L(x=0) = \varphi_L(x=a)$ чегаравий шартларни

қаноатлантирувчи функциялари ва хусусий қийматларини аниқланг.

Ечиш.

$\hat{L}\psi(x) = L\psi(x)$ тенгламани ёзамиз.

$$-\frac{d^2 \varphi_L}{dx^2} = L\varphi_L \quad (4.1.7.1)$$

Иккинчи тартибли дифференциал тенгламанинг ечимини $\varphi_L = \exp(ikx)$ кўринишида қидирамиз ва икки марта ҳосила олиб (4.1.7.1) тенгламага қўямиз ва тенгламанинг ечимини умумий кўринишда ёзамиз.

$$\varphi(x) = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx \quad (4.1.7.2)$$

Масалада берилган чегаравий шартларни ишлатамиз.

$$\varphi(x=0) = c_2 = 0, \quad \varphi(x=a) = c_1 \sin ka = 0$$

$$c_1 \sin ka = 0 \quad \text{дан} \quad ka = n\pi \quad k^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad (4.1.7.3)$$

$\hat{L}$ – операторнинг хусусий функцияси $\varphi_T(x) = c_1 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ га тенг бўлади.

4.1.8 $\hat{L}$ - операторнинг қуйидаги хусусий функциясига мос хусусий қийматини аниқланг.

$$\hat{L} = -\frac{d^2}{dx^2}$$

$$\psi(\varphi) = \sin(2x)$$

Ечиш.

Операторларнинг хусусий қийматлари ва хусусий функцияларини ўзаро боғловчи тенгламани ёзамиз.

$$\hat{L}\psi(x) = L\psi(x)$$

$$-\frac{d^2}{dx^2}(\sin(2x)) = L\sin(2x)$$

$$4\sin(2x) = L\sin(2x)$$

Бу ифодадан $L = 4$ га тенг эканлигини аниқлаймиз.

4.1.9. $\hat{L}$ операторнинг қуйидаги хусусий функциясига мос хусусий қийматини аниқланг.

$$\hat{L} = \frac{2}{x} \frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}$$

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha x}{x}$$

Ечиш.

Операторларнинг хусусий қийматлари ва хусусий функцияларини ўзаро боғловчи тенгламани ёзамиз.

$$\hat{L}\psi(x) = L\psi(x)$$

$$\left(\frac{2}{x} \frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2} \right) \frac{\sin \alpha x}{x} = L \frac{\sin \alpha x}{x}$$

$\hat{L}$ операторни берилган функцияга таъсирини ҳисоблаш учун тегишли амалларни бажарамиз.

$$\frac{2}{x}(\alpha x \cos(\alpha x) - \sin(\alpha x)) + \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x^2}(\alpha x \cos(\alpha x) - \sin(\alpha x)) \right] = L \frac{\sin(\alpha x)}{x}$$

ҳисоблашни давом эттириб $L = \alpha^2$ га тенг эканлигини аниқлаймиз.

4.1.10. Берилган операторнинг қуйидаги хусусий функциясига мос хусусий қийматини аниқланг.

$$\hat{L} = x^2 - \frac{d^2}{dx^2}$$

$$\varphi(x) = \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\}$$

Ечиш.

Операторларнинг хусусий қийматлари ва хусусий функцияларини ўзаро боғловчи тенгламани ёзамиз.

$$\hat{L}\psi(x) = L \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$$

$$\left(x^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right) \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} = L \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$$

Тегишли амалларни бажариб $L = 1$ га тенг эканлигини аниқлаймиз.

4.2. Масалалар

4.2.1 Қуйидаги оператор тенгликларни текширинг:

$$a) \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \cdot x\right)^2 = \frac{d^2}{dx^2} + 2/x \frac{d}{dx}$$

$$4.2.2 \quad \hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} x^2, \quad \hat{L} = \left(\frac{d}{dx} x\right)^2 \quad \text{операторларнинг}$$

$$a) \psi_1(x) = \sin x$$

$$b) \psi_2(x) = e^x \quad \text{функцияларга таъсирини аниқланг.}$$

4.2.3 Қуйидаги $\hat{L}$ операторнинг ψ хусусий функциясига мос келган хусусий қийматларини топинг:

$$a) \hat{L} = -\frac{d^2}{dx^2} \quad \psi = \sin 3x$$

$$b) \hat{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \quad \psi = e^{-x^2}$$

4.2.4 $\hat{L} = i \frac{d}{dx}$ — операторнинг ўз-ўзига қўшма оператор эканлигини исботланг.

4.2.5 $\hat{P}_x, \hat{P}_x^2$ ва $\hat{H}$ операторларнинг ўз-ўзига (эрмит) операторлар эканлигини исботланг.

4.2.6 Қуйидаги оператор тенгликларни текширинг:

$$b) \left(x + \frac{d}{dx}\right)^2 = 1 + x^2 + 2x \frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}$$

$$в) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

4.2.7 Агар $\hat{A}$ ва $\hat{B}$ операторлар чизиқли операторлар бўлса, $\hat{A} + \hat{B}$ операторларнинг ҳам чизиқли операторлар эканлигини исботланг.

4.2.8 Ўз-ўзига қўшма операторлик шарти асосида $\hat{P}_x$ операторнинг ўз-ўзига қўшмаллигини исботланг.

4.2.9 Агар $\hat{L}$ ва $\hat{M}$ операторлар чизикли операторлар бўлса, уларнинг йиғиндисини ифодаловчи $\hat{C} = \hat{L} + \hat{M}$ ва кўпайтмасини ифодаловчи $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$ операторларнинг ҳам чизикли операторлар эканлигини исботланг.

4.2.10 $\hat{L} = \frac{\partial}{\partial x}$ оператор ўз-ўзига қўшма оператор ҳисобланадими? Исботланг.

4.2.11 $\hat{M}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$ операторнинг хусусий қийматини ва хусусий функцияларини топинг

5. Коммутатив ва антикоммутатив операторлар

Коммутатив ва антикоммутатив операторлар тушунчаси операторлар кўпайтмаси қоидалари асосида аниқланади.

$\hat{A}$ ва $\hat{B}$ операторлар кўпайтмаси деб, қуйидаги $\hat{C}\varphi = \hat{A}(\hat{B}\varphi)$ операторга айтилади. Кўпайтмада кўпайтувчиларни алмаштиришга имкон бермайдиган алгебра -нокоммутатив катталиклар алгебраси дейилади. Катталиклар нокоммутатив (ўрни алмаштирилмайдиган) катталиклар дейилади.

Агар $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$ шарт бажарилса $\hat{A}$ ва $\hat{B}$ операторлар коммутатив операторлар дейилади. $\hat{F} = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ катталик $\hat{A}$ ва $\hat{B}$ операторларнинг коммутатори дейилади. Ҳар бир оператор ўзига – ўзи коммутатив оператор ҳисобланади.

Иккита $\hat{L}$ ва $\hat{M}$ механик катталиклар бир вақтда аниқ қийматга эга бўлиши учун уларнинг ҳолат функциялари, яъни тўлқин функциялари $\hat{L}$ ва $\hat{M}$ операторларнинг ҳар бири учун хусусий функция бўлиши керак. $\hat{L}$ ва $\hat{M}$ операторлар учун умумий ҳолда $\Psi_L \neq \Psi_M$ демак, Ψ_L ҳолатда L катталик аниқ қийматга эга $(\Delta L)^2 = 0$, M катталик ноаниқ $(\Delta M)^2 > 0$, акс ҳолда Ψ_m ҳолатда $(\Delta M)^2 = 0$ ва $(\Delta L)^2 > 0$ бўлади. Махсус ҳоллардагина L ва M катталиклар бир вақтда аниқ қийматга эга бўлади.

L ва M катталиклар бир вақтда аниқ қийматга эга бўлиши учун уларга мос $\hat{L}$ ва $\hat{M}$ операторлар ўзаро коммутатив бўлиши керак. $\hat{L}\hat{M} = \hat{M}\hat{L}$

Агар L ва M катталиклар бир вақтда аниқ қийматга эга бўлмаса $\hat{L}\hat{M} \neq \hat{M}\hat{L}$

Коммутатив операторлар билан ифодаланувчи иккита катталиқ бир вақтда аниқ қийматга эга бўлади ва бир вақтда аниқ ўлчанади. Ўзаро антикоммутатив операторлар билан ифодаланувчи иккита катталиқ бир вақтда аниқ ўлчанмайди, яъни бир вақтда аниқ қийматга эга бўлмайди.

5.1. Масалалар ечиш намуналари

5.1.1 Агар $\hat{L}$ ва $\hat{M}$ операторлар коммутатив операторлар бўлса, қуйидаги оператор тенгликни исботланг.

$$(\hat{L} + \hat{M})^2 = \hat{L}^2 + 2\hat{L}\hat{M} + \hat{M}^2$$

Ечиш:

$(\hat{L} + \hat{M})^2 \psi = (\hat{L} + \hat{M})(\hat{L} + \hat{M})\psi = (\hat{L} + \hat{M})(\hat{L}\psi + \hat{M}\psi) = (\hat{L}^2\psi + \hat{L}\hat{M}\psi + \hat{M}\hat{L}\psi + \hat{M}^2\psi)$
 $(\hat{L} + \hat{M})^2 \psi = (\hat{L}^2\psi + 2\hat{L}\hat{M}\psi + \hat{M}^2\psi) = (\hat{L}^2 + \hat{L}\hat{M} + \hat{M}\hat{L} + \hat{M}^2)\psi$ га тенглиги аниқланади. Бу ерда $\hat{L}\hat{M} = \hat{M}\hat{L}$ шарт эътиборга олинди. Юқоридаги тенгликнинг ҳар икки томонидан ψ ни ташлаб юборсак, масала шартидаги $(\hat{L} + \hat{M})^2 = \hat{L}^2 + 2\hat{L}\hat{M} + \hat{M}^2$ тенгликнинг тўғри эканлиги исботланади.

5.1.2 Агар $[\hat{L}, \hat{M}] = (\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L}) = 1$ оператор тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $[\hat{L}, \hat{M}^2]$ нинг нолга тенг эмаслиги исботлансин.

Ечиш:

$$[\hat{L}, \hat{M}^2] = \hat{L}\hat{M}^2 - \hat{M}^2\hat{L} = (\hat{L}\hat{M}^2 - \hat{L}\hat{M}\hat{L}) - (\hat{M}^2\hat{L} - \hat{M}\hat{L}\hat{M}) = \hat{M}(\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L}) - \hat{M}(\hat{M}\hat{L} - \hat{L}\hat{M}) =$$

$$= \hat{M} + \hat{M} = 2\hat{M}$$

5.1.3 Агар $\hat{L}$ ва $\hat{M}$ операторлар учун $[\hat{L}, \hat{M}] = 1$ бўлса, $[\hat{L}^3, \hat{M}] = 3\hat{L}^2$ эканлигини исботланг.

Ечиш:

$$[\widehat{L}^3, \widehat{M}] = \widehat{L}^3 \widehat{M} - \widehat{M} \widehat{L}^3 = L(L^2 M) - M L^3 = \widehat{L} (2\widehat{L} + \widehat{M} \widehat{L}^2) - \widehat{M} \widehat{L}^3 = 2\widehat{L}^2 + (\widehat{L} \widehat{M}) \widehat{L}^2 - (\widehat{M} \widehat{L}) \widehat{L}^2 \\ = 2\widehat{L}^2 + (\widehat{L} \widehat{M} - \widehat{M} \widehat{L}) \widehat{L}^2$$

$(\widehat{L} \widehat{M} - \widehat{M} \widehat{L}) = 1$ эканлигини ҳисобга олсак, $[\widehat{L}^3, \widehat{M}] = 3\widehat{L}^2$ тенглик исботланади.

5.2. Масалалар

5.2.1 Агар $\widehat{L}$ ва $\widehat{M}$ операторлар коммутатив операторлар бўлса, қуйидаги оператор тенгликни исботланг.

$$(\widehat{L} + \widehat{M})(\widehat{L} - \widehat{M}) = \widehat{L}^2 - \widehat{M}^2$$

5.2.2 Агар $\widehat{L}$ ва $\widehat{M}$ операторлар коммутатив операторлар бўлса, қуйидаги оператор тенгликни исботланг.

$$[\widehat{L}, \widehat{M}] = [(\widehat{L} + \widehat{M}), (\widehat{L} - \widehat{M})] = 0$$

5.2.3 Агар $[\widehat{L}, \widehat{M}] = (\widehat{L} \widehat{M} - \widehat{M} \widehat{L}) = 1$ оператор тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $[\widehat{L}^2, \widehat{M}] = 2\widehat{L}$ эканлиги исботлансин.

5.2.4 Агар $[\widehat{L}, \widehat{M}] = (\widehat{L} \widehat{M} - \widehat{M} \widehat{L}) = 1$ оператор тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $[\widehat{L}, \widehat{M}^3] = 3\widehat{M}^2$ эканлиги исботлансин.

5.2.5 Агар $[\widehat{L}, \widehat{M}] = (\widehat{L} \widehat{M} - \widehat{M} \widehat{L}) = 1$ оператор тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $[\widehat{L}^2, \widehat{M}^3] = 2(\widehat{L} \widehat{M} - \widehat{M} \widehat{L})$ эканлиги исботлансин.

5.2.6 Агар $\widehat{L}$ оператор $\widehat{M}$ ва $\widehat{N}$ операторлар билан коммутатив бўлса, $\widehat{M}$ ва $\widehat{N}$ операторлар ҳам ўзаро коммутатив оператор бўладими ?

5.2.7 Агар $\widehat{L}_i$ операторлар $\widehat{M}$ оператор билан коммутатив бўлса, бу оператор билан $\widehat{L} = \sum L_i^2$ оператор коммутатив бўладими ?

6. Заррачаларнинг координата, импульс ва импульс моменти оператори

Тўлқин функция заррача координатаси функцияси бўлгани учун, координата оператори $\widehat{x}$ – нинг қиймати x сонга тенг. Координата функцияси

бўлган $\hat{F}(x, y, z)$ операторнинг $\psi(x, y, z)$ функцияга таъсири, $\hat{F}(x, y, z)$ операторнинг хусусий қийматини $\Psi(x, y, z)$ га кўпайтириш натижасига тенг.

$$\hat{F}(x, y, z)\Psi(x, y, z) = F(x, y, z)\Psi(x, y, z) \quad (6.1)$$

Микрозаррачаларнинг импульсининг мос координата ўқларига проекциялари операторлари қуйидаги кўринишда бўлади.

$$\hat{P}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}; \quad \hat{P}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}; \quad \hat{P}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}, \quad \hat{P} = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) = -i\hbar \nabla$$

Импульс операторининг вектор кўриниши $\vec{P} = -i\hbar \vec{\nabla}$, $\vec{\nabla}$ -оператори (набла оператор). Координата ва импульс проекцияси операторлари мос ўрин-алмаштириш қоидаларига бўйсунди.

$$\hat{P}_x(x, \psi) = i\hbar \frac{\partial}{\partial x}(x, \psi) = -i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} - i\hbar \psi \quad (6.2)$$

Бу ифодалардан қуйидагиларни оламиз.

$$\left. \begin{aligned} x\hat{P}_x - \hat{P}_x x &= i\hbar \\ y\hat{P}_y - \hat{P}_y y &= i\hbar \\ z\hat{P}_z - \hat{P}_z z &= i\hbar \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Бу Гейзенберг ўрин алмаштириш ифодалари дейилади. Худди шундай

$$\left. \begin{aligned} x\hat{P}_x - \hat{P}_x x &= 0 \\ y\hat{P}_y - \hat{P}_y y &= 0 \\ z\hat{P}_z - \hat{P}_z z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

каби ифодаларни олиш мумкин.

Квант механикасида импульс моменти оператори деб $\vec{M} = [\vec{r}\vec{P}]$ га айтилади.

Импульс моментининг координата ўқларига проекцияларини ифодаловчи операторлар

$$\hat{M}_x = i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \hat{M}_y = i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad \hat{M}_z = i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (6.5)$$

кўринишда бўлади. Импульс моменти квадрати оператори

$$\hat{M}_x^2 = \hbar^2 \left\{ \left(z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + \left(x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (6.6)$$

бўлади. Импульс моменти учун ўрин алмаштириш ифодалари қуйидагича бўлади.

$$\hat{M}_y \hat{M}_z - \hat{M}_z \hat{M}_y = i\hbar \hat{M}_x, \quad \hat{M}_z \hat{M}_x - \hat{M}_x \hat{M}_z = i\hbar \hat{M}_y, \quad \hat{M}_x \hat{M}_y - \hat{M}_y \hat{M}_x = i\hbar \hat{M}_z \quad (6.7)$$

Шундай қилиб, импульс моменти компоненталарини ифодаловчи операторлар антикоммутатив операторлар ҳисобланади. Импульс моменти компоненталари операторлари импульс моменти квадрати оператори билан коммутатив бўлади:

$$\hat{M}_x \hat{M}^2 - \hat{M}^2 \hat{M}_x = 0 \quad (6.7)$$

$$\hat{M}_y \hat{M}^2 - \hat{M}^2 \hat{M}_y = 0 \quad (6.8)$$

$$\hat{M}_z \hat{M}^2 - \hat{M}^2 \hat{M}_z = 0 \quad (6.9)$$

Импульс моменти квадрати операторининг хусусий қийматлари

$$M_\ell^2 = \hbar^2 l(l+1) \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (6.10)$$

Хусусий функциялари эса

$$\psi_{\ell m}(\theta, \varphi) = Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (6.11) \text{ бу ерда: } m = 0, \pm 1, \dots, \pm \ell$$

Бу ерда $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ - шар функцияси. Импульс моментининг z - ўқиға проекцияси оператори M_z - нинг хусусий қийматлари, хусусий функциялари қуйидаги тенгламадан аниқланади.

$$\hat{M}_z \psi = M_z \psi - i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = M_\lambda \psi \quad (6.12) \text{ Тенгламани ечсак қуйидаги } M_z = \hbar m \text{ натижани}$$

оламир.

6.1. Масалалар ечиш намуналари

6.1.1 Импульснинг, x ўқиға проекцияси оператори $\hat{P}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ ни хусусий қийматлари ва хусусий функцияларини аниқланг.

Ечиш.

Импульс операторининг хусусий қиймати ва хусусий функциясини боғловчи тенглама қуйидагича ёзилади.

$$\hat{P}_x \psi = P_x \psi \quad (6.1.1.1)$$

$\hat{L}$ операторнинг хусусий функциялари ва хусусий қийматларини ўзаро боғловчи тенглама $-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} = P_x \cdot \psi$ (6.1.1.2)

Биринчи тартибли дифференциал тенгламани ўзгарувчиларни ажратиш методи билан ечими топамиз.

$$\psi_{p_x}(x) = Ne^{i \frac{P_x \cdot x}{\hbar}} \quad (6.1.1.3)$$

N - доимий сон. Бу ечим чекли, узлуксиз ва бир қийматли бўлиши учун, P_x - ҳақиқий сон бўлиши керак, $-\infty < P_x < +\infty$. N - доимий ψ_{p_x} функцияни нормалаш шартидан аниқланади.

$$\psi_{p_x}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i \frac{P_x \cdot x}{\hbar}} \quad (6.1.1.4)$$

Импульснинг координата ўқларига проекцияси оператори $\hat{P}_x$ нинг хусусий функцияси Де-Бройл тўлқини кўринишида ифодаланади.

6.1.2 x -координата ва импульснинг шу координатага мос проекцияси $\hat{p}_x$ орасидаги ўрин алмаштириш қоидаларини исботланг.

$$[x, [x, \hat{p}_x]] = 0$$

Ечиш.

$$[x, [x, \hat{p}_x]] = x[x, \hat{p}_x] - [x, \hat{p}_x]x = x(x\hat{p}_x - \hat{p}_x x) - (x\hat{p}_x - \hat{p}_x x)x = x^2 \hat{p}_x - 2x(\hat{p}_x x) + \hat{p}_x x^2$$

$$\hat{p}_x x^2 - x^2 \hat{p}_x = -2i\hbar x \text{ эканлигини эътиборга оламиз.}$$

$$[x, [x, \hat{p}_x]] = 2(i\hbar x + (\hat{p}_x x - x\hat{p}_x)x)$$

$$(\hat{p}_x x - x\hat{p}_x) = -i\hbar$$

$$[x, [x, \hat{p}_x]] = 2(i\hbar x - i\hbar x) = 0 \text{ га тенглиги исботланди.}$$

6.1.3 x координата ва импульснинг шу координатага мос проекцияси $\hat{p}_x$ орасидаги ўрин алмаштириш қоидаларини исботланг.

$$[x, [x, \hat{p}_x^2]] = -2\hbar^2$$

Ечиш.

$$[x, [x, \hat{p}_x^2]] = x(x\hat{p}_x^2 - \hat{p}_x^2 x) - (x\hat{p}_x^2 - \hat{p}_x^2 x)x \quad (6.1.3.1)$$

$$(x\hat{p}_x^2 - \hat{p}_x^2 x) = 2i\hbar \hat{p}_x \text{ тенгликдан фойдаланамиз.}$$

$$[x, [\hat{p}_x^2]] = 2i\hbar(x\hat{p}_x - \hat{p}_x x) = 2i\hbar(i\hbar) = -2\hbar^2 \quad (6.1.3.2)$$

6.1.4 $\varphi(x) = A \exp\left[ik_0 x - \left(\frac{x^2}{2a^2}\right)\right]$ тўлқин функция билан ифодаланувчи заррачанинг импульс ва координатасининг ўртача қийматини ва ўртача квадратик флуктуацияларини аниқланг.

Ечиш.

Тўлқин функция координата тасаввурида берилган. Координатанинг ўртача қиймати қуйидагича аниқланади.

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^* x \varphi dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left[-\frac{x^2}{a^2}\right] dx \quad (6.1.4.1)$$

Бу интегрални қуйидаги интегралдан фойдаланиб ҳисоблаймиз.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m \exp(-\alpha x^n) dx = \frac{2}{n} \alpha^{-\frac{m+1}{n}} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

Юқоридаги интегралда $m = 1, n = 2, \alpha = \frac{1}{a^2}$ бўлганидан

$$\bar{x} = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left[-\frac{x^2}{a^2}\right] dx = |A|^2 a^2 \quad (6.1.4.2)$$

Нормировка коэффиценти A қуйидаги интегралдан топилади.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi|^2 dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{x^2}{a^2}\right] dx = |A|^2 a \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad (6.1.4.3)$$

$$|A|^2 a \sqrt{\pi} = 1 \quad |A|^2 = \frac{1}{a \sqrt{\pi}}$$

$$\bar{x} = |A|^2 a^2 = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \quad (6.1.4.4) \text{ га тенг бўлади.}$$

$$\bar{p}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^* p_x \varphi dx = \hbar k_0 \quad (6.1.4.5) \text{ га тенг бўлади.}$$

Координатанинг ўртача квадратик флуктуациясини ҳисоблаймиз.

$$\overline{\Delta x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\varphi|^2 dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^3 |A|^2 = \frac{a^2}{2} \quad (6.1.4.6)$$

Худди шундай $\overline{(\Delta p_x)^2} = \frac{\hbar^2}{2a^2}$ ни ҳисоблаймиз.

6.1.5 L_z операторнинг хусусий қийматларини ва $\psi(\varphi) = A(1 + \cos \varphi)^2$ ҳолатда жойлашган система учун эҳтимолликларини аниқланг?.

Ечиш:

Дастлаб нормировка шартидан A доимийни қуйидагини интегрални ҳисоблаб аниқлаймиз.

$$A^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi)^4 d\varphi = 1 \quad (6.1.5.1)$$

Бу ифодадан тригонометрик функцияларни интеграллаш қоидалари асосида интегрални ҳисоблаб қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$A^2 = \frac{1}{\int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi)^4 d\varphi} = \frac{4}{35\pi}$$

A^2 ни масала шартидаги $\psi(\varphi)$ нинг ифодасига қўямиз:

$$\psi(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{35\pi}} (1 + \cos \varphi)^2 \quad (6.1.5.2)$$

Бу $\psi(\varphi)$ функциянинг нормаллашган ифодаси, бу функцияни $\hat{L}_z$ операторнинг нормаллашган хусусий функциялари $\psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) бўйича қаторга ёямиз ва бунда қуйидагиларни эътиборга оламиз.

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \cos 2\varphi = \frac{1}{2}(e^{i2\varphi} + e^{-i2\varphi}), \quad (6.1.5.3)$$

Юқорида айтилган операцияларни бажарамиз:

$$\psi(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{35\pi}} \left(\frac{3}{2} + 2\cos \varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi \right) = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{35}} \psi_0 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{35}} (\psi_{+1} + \psi_{-1}) + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{35}} (\psi_{+2} + \psi_{-2})$$

Бу ерда $\psi_0, \psi_{\pm 1}, \psi_{\pm 2}$ лар L_z операторнинг нормаллашган хусусий функциялари. L_z операторнинг хусусий қийматларини $L_z = m\hbar$ ифодадан $m = 0, \pm 1, \pm 2$ қийматлари учун ёзиб қуйидагини оламиз. $L_z = 0, \pm\hbar, \pm 2\hbar$

Хусусий қийматларнинг эҳтимолликлари мос хусусий функциялардаги коэффициентларнинг модулининг квадратлари билан аниқланишини эътиборга оламиз.

Натижада мос эҳтимолликлар ыуйидагига тенг.

$$W_0 = \frac{18}{35}, W_{+1} = W_{-1} = \frac{8}{35}, W_{+2} = W_{-2} = \frac{1}{70}$$

6.1.6 $\hat{M}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$ операторнинг хусусий қийматларини ва нормаллашган хусусий функцияларини аниқланг.

Ечиш:

$\hat{M}_z$ операторнинг хусусий функциялари ва хусусий қийматлари орасидаги боғланиш тенгламасини ёзамиз.

$$-i\hbar \frac{d\psi}{d\varphi} = \hat{M}_z \psi \quad (6.1.6.1)$$

Биринчи тартибли дифференциал тенгламани шзгарувчиларни ажратиш методи билан ечамиз. Тенгламанинг ечими $\psi(\alpha) = A \exp\left(\frac{iM_z}{\hbar}\right)$ кўринишда бўлади.

Ечимнинг бир қийматлилигидан $\psi(\alpha) = \psi(\alpha + 2\pi)$, $\hat{M}_z = m\hbar$ бу ерда $m = 0, +1, +2, \dots$

Нормировка шартидан. $\int_0^{2\pi} \psi \psi^* dx = 1$, Интегрални ҳисоблаймиз.

$$\int_0^{2\pi} A^2 d\alpha = 1, \text{ интегрални ҳисоблаймиз, } A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ га тенг.}$$

$\hat{M}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$ операторнинг нормаллашган хусусий функцияси

$$\psi_m = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp(im\varphi)$$

6.2. Масалалар

6.2.1 x координата шу координатага мос импульснинг проекцияси p_x учун Гейзенбергнинг ўрин алмаштириш муносабатларини исботланг.

6.2.2 x координата шу координатага мос бўлмаган импульснинг проекцияси p_y учун Гейзенбергнинг ўрин алмаштириш муносабатларини исботланг.

6.2.3 $\hat{p}_x$ операторнинг хусусий функциялари ва хусусий қийматларини аниқланг.

6.2.4 Заррачанинг ҳолати $\varphi(x) = A \exp \left[\frac{i}{\hbar} x p_0 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} \right]$ тўлқин функция билан ифодаланади. Заррачанинг координата ва импульс операторининг ўртача қийматини аниқланг.

6.2.5 f- физик катталиқ координата ва унга мос импульс проекцияси комбинациясидан иборат $\hat{f} = \alpha x + \beta \hat{p}_x$ оператор билан ифодаланади, ушбу операторнинг хусусий функциясини аниқланг.

6.2.6 Импульс ва импульс моменти операторларининг проекциялари учун ўрин алмаштириш қоидаларини исботланг.

6.2.7 Стационар ҳолатда дискрет спектр учун заррачанинг импульси проекциясининг ўртача қиймати нолга тенглигини исботланг.

6.2.8 Гамильтониан ва координата оператори проекциялари учун ўрин алмаштириш қоидаларини исботланг.

6.2.9 Импульс моменти операторининг $\varphi(\theta, \varphi) = A \sin^2 \varphi$ ушбу хусусий функцияга мос хусусий қийматларини аниқланг.

6.2.10 Импульс моменти операторининг $\varphi(\theta, \varphi) = A (1 + \cos \varphi)^2$ ушбу хусусий функцияга мос хусусий қийматларини аниқланг.

6.2.10 Импульс моменти операторининг $\varphi(\theta, \varphi) = A (\cos \theta + 2 \sin \theta \cos \varphi)$ ушбу хусусий функцияга мос хусусий қийматларини аниқланг.

6.2.11. φ_m ҳолатда импульс моментининг проекциясининг хусусий қиймати $M_z = \hbar m$ га тенг. Шу асосда $\bar{M}_x = \bar{M}_y = 0$ ва $(\overline{M_x M_y}) = (\overline{M_y M_x}) = i \frac{\hbar^2}{2} m$, $\bar{M}_x^2 = \bar{M}_y^2$ эканлигини исботланг.

7. Импульс моменти квадрати оператори, кинетик ва потенциал энергия оператори, Гамильтон оператори.

Квант механикада импульс моменти квадрати оператори проекциялари орқали қуйидагича ифодаланади.

$$\hat{M}^2 = \hat{M}_x^2 + \hat{M}_y^2 + \hat{M}_z^2$$

Импульс моменти квадратининг операторининг сферик координат системасидаги ифодаси қуйидагича ёзилади.

$$\widehat{M}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

$\widehat{M}^2$ операторнинг ифодасини Лаплас оператори $\nabla_{\theta, \varphi}^2$ орқали ёзишда, сферик координаталар системасини θ, φ компоненталари учун Лаплас оператори $\nabla_{\theta, \varphi}^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ ифодасидан фойдалансак,

$\widehat{M}^2 = -\hbar^2 \nabla_{\theta, \varphi}^2$ га тенг бўлади.

Кинетик энергия оператори қуйидагича аниқланади

$$\widehat{T} = \frac{\widehat{P}^2}{2\mu} = \frac{1}{2\mu} (\widehat{P}_x^2 + \widehat{P}_y^2 + \widehat{P}_z^2), \quad \widehat{T} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2$$

Кинетик энергия операторининг хусусий функцияси ва хусусий қийматлар тенгламаси $\widehat{T}\psi = T\psi$, Бу тенгламанинг ечими

$$\psi_T(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} e^{i \frac{P_x x + P_y y + P_z z}{\hbar}}$$

Заррачаларнинг эгри чизиqli ҳаракати учун, сферик системада $\widehat{T}$ – операторнинг ифодасини ёзамиз.

$$\widehat{T} = \widehat{T}_r + \frac{\widehat{M}^2}{2\mu r^2}, \quad \widehat{O}_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) \right),$$

Гамильтон оператори ифодаси қуйидагича ёзилади

$$\widehat{I} = \widehat{O} + U(x, y, z)$$

7.1. Масалалар ечиш намуналари.

7.1.1 $\widehat{L}_z^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ оператор билан ифодаланувчи механик катталикнинг

$\psi(\varphi) = A \cos^2 \varphi$ ҳолатдаги ўртача қийматини аниқланг.

Ечиш: Механик катталикнинг ўртача қиймати қуйидагича ҳисобланади:

$$\overline{L_z^2} = \int \psi^*(\varphi) \widehat{L}_z^2 \psi(\varphi) d\varphi \quad (7.1.1.1)$$

масала шартига кўра

$$\psi(\varphi) = \psi^*(\varphi) = A \cos^2 \varphi, \quad (7.1.1.1) \text{ Бу ерда : } 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\bar{L}_z^2 = A^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \left(-\hbar^2 \frac{\partial}{\partial \varphi^2} \right) \cos^2 \varphi d\varphi = 2A^2 \hbar^2 \left[-\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi + 2 \int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi d\varphi \right] = \pi A^2 \hbar^2$$

А доимий нормировка шартидан топилади:

$$A^2 \int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi d\varphi = 1$$

$$A^2 = 4/3\pi \quad \text{Демак,}$$

$$A = 2/\sqrt{3\pi}$$

$$\bar{L}_z^2 = \pi A^2 \hbar^2 = 4/3 \hbar^2 \quad (7.1.1.3)$$

7.1.2 $\hat{L}_z^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ оператор билан ифодаланувчи механик катталикнинг

$\psi(\varphi) = A \sin^2 \varphi$ ҳолатдаги ўртача қийматини аниқланг.

Ечиш: Механик катталикнинг ўртача қиймати қуйидагича ҳисобланади:

$$\bar{L}_z^2 = \int \psi^*(\varphi) \hat{L}_z^2 \psi(\varphi) d\varphi \quad (7.1.2.1)$$

масала шартига кўра

$$\psi(\varphi) = \psi^*(\varphi) = A \sin^2 \varphi$$

бу ерда $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\bar{L}_z^2 = A^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \left(-\hbar^2 \frac{\partial}{\partial \varphi^2} \right) \sin^2 \varphi d\varphi = 2A^2 \hbar^2 \left[\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi - 2 \int_0^{2\pi} \sin^4 \varphi d\varphi \right] = \pi A^2 \hbar^2 \quad (7.1.2.2)$$

А доимий нормировка шартидан топилади:

$$A^2 \int_0^{2\pi} \sin^4 \varphi d\varphi = 1$$

$$A^2 = 4/3\pi \quad (7.1.2.3)$$

$$A = 2/\sqrt{3\pi}$$

Демак,

$$\bar{L}_z^2 = \pi A^2 \hbar^2 = 4/3 \hbar^2 \quad (7.1.2.4)$$

7.1.3 $\hat{M}_z^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ оператор билан ифодаланувчи импульс моменти

квадратининг $\varphi(\theta, \varphi) = A \sin \theta \cos \varphi$ ҳолатдаги ўртача қийматини аниқланг.

Ечиш.

Механик катталикнинг ўртача қиймати қуйидагича ҳисобланади:

$$\bar{M}^2 = \int \varphi^* \hat{M}^2 \varphi dy \quad (7.1.3.1)$$

Бу ерда $dy = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$

A – доимий нормировка шартидан аниқланади.

$$\int |\varphi(\theta, \varphi)|^2 dy = A^2 \iint \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \, d\varphi \, d\theta = 1 \quad (7.1.3.2)$$

Интегрални ҳисоблаш натижаси қуйидагича бўлади.

$$A^2 = \frac{3}{4\pi}$$

$$\hat{M}^2 = -\hbar^2 \nabla_{\theta, \varphi}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2}{d\varphi^2} \right] \quad (7.1.3.3.)$$

Икки қаррали интегрални ҳисоблаб $\overline{M^2} = 2\hbar^2$ натижани оламиз.

7.1.4 φ_{lm} ҳолатда M^2 ва M_z лар аниқ қийматларга эга бўлганда $\overline{M_x^2}$ ва $\overline{M_y^2}$ ларнинг ўртача қийматини аниқланг.

Ечиш.

$$\hat{M}^2 = \hat{M}_x^2 + \hat{M}_y^2 + \hat{M}_z^2 \quad (7.1.4.1)$$

бўлгани учун

$$\hat{M}_x^2 + \hat{M}_y^2 = \hat{M}^2 - \hat{M}_z^2 \quad (7.1.4.2)$$

қўринишда ёзамиз.

$$\hat{M}^2 \varphi_{lm} = \hbar^2 l(l+1) \varphi_{lm} \quad (7.1.4.3)$$

$$\hat{M}_x^2 + \hat{M}_y^2 = \hbar^2 [l(l+1) - m^2]$$

$$\hat{M}_z^2 \varphi_{lm} = \hbar m \varphi_{lm} \text{ ифодаларни эътиборга олиб,}$$

лекин, $\overline{M_x^2} = \overline{M_y^2}$ эканлигини ҳисобга олиб

$$\overline{M_x^2} = \overline{M_y^2} = \frac{1}{2} \hbar^2 [l(l+1) - m^2] \quad (7.1.4.4)$$

7.1.5 Заррачанинг ҳолати қуйидаги тўлқин функция билан ифодаланган.

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{x p_0}{\hbar}\right)$$

Заррачанинг кинетик энергия операторининг хусусий қийматини аниқланг.

Ечиш.

Операторларнинг хусусий функциялари ва хусусий қийматлари орасидаги боғланиш тенгламасини ёзамиз.

$$\hat{T}_x \psi_{p_x} = T_x \psi_{p_x}$$

$$-\hbar^2 \frac{1}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} \left[A \sin \left(\frac{x p_0}{\hbar} \right) \right] = \left[A \left(\frac{p_0^2}{2\mu} \right) \sin \left(\frac{x p_0}{\hbar} \right) \right] \quad (7.1.5.1)$$

Кинетик энергия операторининг хусусий қиймати $T = \frac{p_0^2}{2\mu}$ (7.1.5.2)

Бу ифода p_0 нинг ихтиёрий қийматлари учун узлуксиз бўлганидан кинетик энергия операторининг спектри узлуксиз бўлади.

7.2. Масалалар

7.2.1 Импульс моменти квадрати оператори $\hat{M}^2$ нинг хусусий функцияси

$$Y(\theta\varphi) = A(\cos\theta + 2\sin\theta \cos\varphi)$$

кўринишида берилса, $\hat{M}^2$ операторнинг хусусий қийматини ҳисобланг. Бу ерда θ -кутб бурчаги, φ – азимутал бурчак ($0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

7.2.2 Қуйидаги операторларнинг хусусий қийматларини ва нормаллашган

хусусий функцияларини топинг. а) $\hat{M}_z^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$

7.2.3 $\hat{M}_z^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ оператор билан ифодаланувчи механик катталикнинг

$\psi(\varphi) = A \sin^2 2\varphi$ ҳолатдаги ўртача қийматини ҳисобланг.

7.2.4 Импульс моменти квадрати оператори $\hat{M}^2$ нинг хусусий функцияси

$Y(\theta\varphi) = A(2\sin\theta \cos\varphi)$ кўринишда берилса, $\hat{M}^2$ операторнинг хусусий қийматини ҳисобланг

7.2.5 Импульс моменти квадрати оператори $\hat{M}^2$ нинг хусусий функцияси

$Y(\varphi) = A(\cos 2\varphi)$ кўринишда берилса, $\hat{M}^2$ операторнинг хусусий қийматини ҳисобланг

7.2.6 Кинетик энергия операторининг $\psi = A \sin^2 \varphi$ ҳолатдаги ўртача қийматини ҳисобланг

7.2.7 Кинетик энергия операторининг $\psi = A \sin^2 2\varphi$ ҳолатдаги ўртача қийматини ҳисобланг

7.2.8 Кинетик энергия операторининг $\psi = A \sin \varphi$ ҳолатдаги ўртача

қийматини ҳисобланг

7.2.9 Кинетик энергия операторининг $\psi = A \sin 2\varphi$ ҳолатдаги ўртача

қийматини ҳисобланг

7.2.10 $\hat{M}^2$ импульс моменти квадрати оператори ва координата оператори проекциялари учун ўрин алмаштириш муносабатларини исботланг.

7.2.11 Импульс оператори проекциялари ва импульс моменти квадрати операторининг коммутаторини аниқланг.

7.2.12 Кинетик энергия ва импульс моменти квадрати операторининг коммутаторини аниқланг.

7.2.13 Импульс моменти квадрати оператори билан импульс моменти проекциялари операторларининг коммутаторини аниқланг.

8. Шредингер тенгламаси, Стационар ҳолатлар учун

Шредингер тенгламаси,

Де-Бройл гипотезасига асосан ҳар бир заррачага $\psi(x,t)$ тўлқин мос қўйилади. $\psi(x,t)$ - тўлқин функция дейилади ва бу функциянинг модулининг квадрати $|\psi(x,t)|^2$ заррачани t - вақт моментида $x, x+dx$ нуқталар орасида топиш эҳтимоллиги зичлигини кўрсатади.

Квант механикада ҳар бир микрозаррачанинг ҳолати, ҳар бир вақт моментида ва фазонинг ҳар бир нуқтасида тўла аниқланувчи умумий ҳолда комплекс функция бўлган, тўлқин функция билан аниқланади.

Квант механикасида ҳаракат тенгламаси Шредингер тенгламасидир. Шредингер тенгламасининг умумий кўриниши қуйидагича ёзилади.

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(x,t) \quad (8.1)$$

Бу ерда $\hat{H}$ – Гамильтон оператори, қуйидагича ифодаланади:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + U(x,y,z) \quad (8.2)$$

Шредингер тенгламаси табиатнинг моҳирлик билан кашф этилган функционал қонуни бўлиб, келтириб чиқарилмайди.

Квантомеханик системага ташқи майдонлар таъсир этмаган ҳолларда Гамильтон оператори $\hat{H}$ – вақтга боғлиқ бўлмайди ва тўла энергия оператори $\hat{H}(x)$ билан мос тушади.

Микрозаррачанинг бир ўлчамли ҳаракати учун Шредингер тенгламаси x ва t ўзгарувчиларни ажратиш йўли билан олинадиган муҳим ечимларига эга бўлади.

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = H(\partial)\psi(x,t) \quad (8.3)$$

Тенгламанинг ечимини $\psi(x,t)$ ни $\psi(x,t) = \varphi(x) \cdot f(t)$ кўринишда қидирамиз ва тенгламада ўзгарувчиларни ажратиб, C доимийни сақланувчи катталиқ E (тўла энергия) деб белгилаб, тенгламани қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{df(t)}{dt} = Ef(t) \\ \hat{H}(x)\varphi(x) = E\varphi(x) \end{cases} \quad (8.4)$$

Тенглама аниқ ечимга эга.

$$f(t) = ce^{-i\frac{Et}{\hbar}} \quad (8.5)$$

$\hat{H}\psi(x) = E_n\psi(x)$ мстационар Шредингер тенгламаси, Гамильтон операторининг хусусий функциялари ва хусусий қийматларини ўзаро боғловчи тенглама, E_n -энергияли ҳолатларнинг вақтга боғланиши ω_n частотали гармоник боғланиш бўлади.

$$\omega_n = E_n / \hbar \quad (8.6)$$

8.1. Масалалар ечиш намуналари

8.1.1 Шредингер тенгламасининг эркин ҳаракатланаётган заррача учун умумий ечимини топинг

Ечиш.

ОХ ўқи йўналишида эркин ҳаракатланаётган микрозаррача учун Гамильтон оператори

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (8.1.1.1)$$

кўринишда ифодаланади. Шредингер тенгламаси эса қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} \quad (8.1.1.2)$$

Тенгламани ечимини қуйидаги кўринишда қидирамиз:

$$\psi(x) = A e^{i\left(-i \frac{Et}{\hbar}\right)} \quad (8.1.1.3)$$

$\psi(x)$ учун қуйидаги тенгламани оламиз:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} = E \psi(x) \quad (8.1.1.4)$$

Тенгламанинг ечими

$$\psi(x) = A e^{-ikx} \quad (8.1.1.5)$$

кўринишда бўлиб, бу ерда

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (8.1.1.6)$$

Шундай қилиб, эркин ҳаракатланувчи микрочастица учун тўлқин функция Де-Бройл тўлқини каби ифодаланади.

$$\psi(x,t) = A \exp[-i(\omega t - kx)] \quad (8.1.1.7)$$

Агар $E = \hbar \omega$, $P = \hbar k$ эканлигини ҳисобга олсак

$$\psi(x,t) = A \exp[-i(\hat{A}t - px)/\hbar] \quad (8.1.1.8)$$

Шредингер тенгламасининг умумий ечими Де-Бройл тўлқинлари суперпозицияси кўринишида ифодаланади.

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

8.1.2 Шредингер тенгламаси стационар ечимга эга бўлса, потенциал энергиянинг вақтга ошқор ҳолда боғлиқ бўлмаслигини исбот қилинг.

Ечиш.

Шредингер тенгламаси қуйидагича ёзилади.

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \hat{H} \varphi \quad (8.1.2.1)$$

Бу тенглама ўзгарувчиларни ажратиш йўли билан ечилади.

$$\varphi(x, t) = \varphi(x)f(t) \quad (8.1.2.2)$$

Бу функцияни Шредингер тенгламасига қўйиб, содда алмаштиришлар бажариб қуйидагини оламиз.

$$\frac{ih \frac{\partial f}{\partial t}}{f} = \frac{H \varphi(x)}{\varphi(x)} = E \quad (8.1.2.3)$$

Ушбу тенгламани иккита мустақил тенглама кўринишида ёзамиз.

$$ih \frac{\partial f}{\partial t} = T f(t) \quad (8.1.2.4)$$

$$\hat{H}(x) = E \varphi(x) \quad (8.1.2.5)$$

Тенгламанинг умумий ечими $\varphi(x, t) = \varphi_n(x) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right)$ кўринишида ёзилади, тенгламада Гамильтон оператори вақтга ошкор боғлиқ бўлмагани учун потенциал энергия оператори ҳам вақтга ошкор боғлиқ бўлмайди.

8.1.3 Ротаторнинг ҳолати бошланғич вақт моментида

$$\varphi(x, 0) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} + ik_0 x\right)$$

тўлқин функция билан ифодаланса, унинг ҳолати вақт ўтиши билан қандай ўзгаради.

Ечиш.

Ротатор деб текисликда инерция маркази атрофида айланма ҳаракат қилувчи мустаҳкам боғланган системага айтилади. Ротаторнинг энергия оператори $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2J} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$, бу ерда J – системанинг инерция моменти.

Шредингер тенгламаси қуйидагича ёзилади.

$$ih \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \hat{H} \varphi \quad (8.1.3.1)$$

Бу тенглама ўзгарувчиларни ажратиш йўли билан ечилади.

$$\varphi(x, t) = \varphi(x)f(t) \quad (8.1.3.2)$$

Тенгламанинг умумий ечими $\varphi(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp i(m\alpha - \omega_m t) \quad (8.1.3.3)$

$$\text{Бу ерда} \quad \omega_m = \frac{E_m}{\hbar} = \frac{\hbar}{2J} m^2 \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Қидирилаётган $\varphi(\alpha, t)$ ни $\varphi_m(\alpha, t)$ функция бщйича ыаторга ёямиз.

$$\varphi(\alpha, t) = \sum_m C_m \varphi_m(\alpha, t) \quad (8.1.3.4)$$

C_m коэффициентлар бошланғич шартдан аниқланади.

$$\varphi(\alpha, 0) = \sum_m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} C_m \exp(im\varphi) \quad (8.1.3.5)$$

Куйидаги натижани оламиз.

$$\varphi(\alpha, t) = \frac{A}{2} \left(1 - \exp \left(-i \frac{2\hbar t}{I} \cos(2\varphi) \right) \right) \quad (8.1.3.6)$$

8.1.4 $t = 0$ вақт моментида эркин заррачанинг ҳолат функцияси

$$\varphi(x, 0) = A \exp \left(-\frac{x^2}{2a^2} + ik_0 x \right)$$

кўринишда бўлса A коэффициент ва жойлашиш соҳасини аниқланг.

Эҳтимоллик оқими зичлигини аниқланг.

Ечиш.

Нормировка коэффициенти A куйидаги шартдан аниқланади.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, 0) \varphi^*(x, 0) dx = 1 \quad (8.1.4.1)$$

Интегралга масала шартдан $\varphi(x, 0)$ ва $\varphi^*(x, 0)$ ларни қўйиб, интегрални ҳисоблаймиз.

$$|A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{x^2}{a^2} \right) dx = |A|^2 a \sqrt{\pi} = 1 \text{ бундан } |A|^2 = \frac{1}{a \sqrt{\pi}} \quad (8.1.4.2)$$

Энди заррачанинг жойлашиш соҳасини аниқлаймиз.

$$|\varphi(x, 0)|^2 = |A|^2 \exp \left(-\frac{x^2}{a^2} \right) \quad (8.1.4.3)$$

Бу функция $x = 0$ нуқтада максимал қийматга эга ва $|x| > a$ да кескин, тез камаяди. Тўлқин пакетининг кенглиги a тартибида бўлади.

Эҳтимоллар оқими зичлиги умумий формуласида ҳисобланади.

$$J_x = |A|^2 \frac{\hbar k_0}{m_0} \exp \left(-\frac{x^2}{a^2} \right) = \frac{\hbar k_0}{m_0} \omega \quad (8.1.4.4)$$

Бу ерда ω эҳтимоллик зичлиги. $\frac{\hbar k_0}{m_0}$ бу классик заррача тезлиги билан мос тушади.

8.2. Масалалар

8.2.1 Стационар ҳолатларда эҳтимоллик оқими зичлиги ва эҳтимоллик зичлигининг вақтга боғлиқ бўлмаслигини исботланг.

8.2.2 Эркин заррачанинг $t = 0$ вақт моментидаги ҳолати қуйидаги тўлқин функция билан ифодаланади.

$$\varphi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi h}} \sin\left(\frac{x p_0}{h}\right)$$

$t = 0$ дан кейинги вақт моментларида заррачанинг тўлқин функцияларини аниқланг.

8.2.3 Эркин заррачанинг $t = 0$ вақт моментидаги ҳолати қуйидаги тўлқин функция билан ифодаланади.

$$\varphi(x, 0) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} + i k_0 x\right)$$

Шу функция учун Фурье коэффициентларини, тўлқин пакетнинг кенглигини аниқланг.

8.2.4 Қуйидаги оператор формасидаги ҳаракат тенгламаларининг ўринлилигини исботланг.

$$a) \frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{p_x}{m} \quad b) \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

8.2.5 $U(x)$ потенциал майдонда ҳаракатланаётган заррача учун қуйидаги оператор тенгликларнинг ўринли эканлини исботланг.

$$a) \frac{d}{dt}(x^2) = \frac{1}{m_0} (x\hat{p}_x + \hat{p}_x x) \quad b) \frac{d}{dt}(x\hat{p}_x) = x \frac{\partial U}{\partial x}$$

8.2.6 Эркин заррачанинг $t = 0$ вақт моментидаги ҳолати қуйидаги тўлқин функция билан ифодаланади.

$$\varphi(x, 0) = (2\pi h)^{-\frac{1}{2}} \sin\left(i \frac{x p_0}{h}\right)$$

$t = 0$ дан кейинги вақт моментларида заррачанинг тўлқин функцияларини аниқланг.

9. Заррачанинг чексиз чуқур потенциал ўра (чуқурлик) даги ҳаракати

Содда потенциал майдонлар учун Шредингер тенгламаси аниқ ечимга эга бўлади. Шредингер тенгламаси математик аппаратини талабаларга

мукаммалроқ ўргатиш мақсадида заррачанинг бир ўлчовли оддий ҳаракатини кўриб чиқамиз.

Заррачанинг потенциал майдондаги бир ўлчамли ҳаракатида потенциал энергияси қуйидагича ифодаланади.

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{агар } 0 < x < l \\ \infty & \text{агар } x < 0 \text{ ва } x > l \end{cases} \quad (9.1)$$

. Бу потенциал майдон чексиз потенциал ўра дейилади ва заррача фақат $0 < x < l$ ораликда ҳаракатланади. Бу масалани ечишда қуйидагиларга эътибор қаратамиз.

- 1). Заррачанинг чекланган ҳаракати учун Шредингер тенгламасини ечишни ўрганиш;
- 2). Тенглама ечимининг характерли хоссаларини аниқлаш ва ўрганиш;
- 3). Масаланинг квант механика ҳамда классик механика методлари ёрдамида олинган ечимларини ўзаро таққослаш ва таҳлил қилиш.

Агар заррачанинг тўла энергияси $0 < E < U(x)$ ораликда жойлашган бўлса, заррача потенциал ўрадан чиқиб кета олмайди.

Квант механикага бўйсунадиган заррачанинг потенциал ўрадаги ҳаракатида квантланиш шартига кўра, заррача ҳаракатининг тўлқин функцияси узлуксиз ва бир қийматли бўлиши керак.

Потенциал ўрадаги заррачанинг ҳаракатига оид Шредингер тенгламасини ечишда дастлаб чегаравий шартлар аниқлаштирилади.

Узлуксизлик шартидан $x = 0$ ва $x = l$ нуқталарда тўлқин функцияси нолга тенг бўлади $\psi(0) = \psi(l) = 0$, бу чегаравий шарт дейилади.

Чегараланган соҳада бир ўлчамли стационар Шредингер тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi, \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \quad (9.2) \text{ бу ерда: } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Бу тенгламанинг умумий ечими турғун тўлқин характерига эга ва қуйидаги кўринишда бўлади .

$$\psi = A \sin(kx + \alpha) \quad (9.3)$$

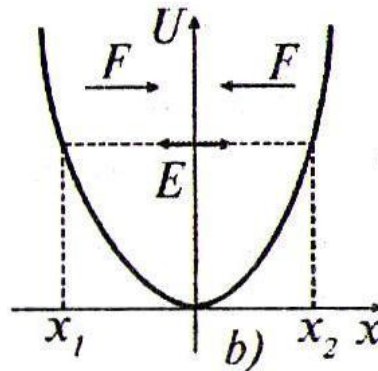
α ва A катталиклар чегаравий шартлардан аниқланади.

9.1 Масалалар ечиш намуналари

9.1.1 Массаси m_0 бўлган заррача абсолют ўтказмас деворли, тўғри бурчакли, кенглиги ℓ – га тенг бўлган қўйидаги кўринишдаги

$$U(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq \ell \\ \infty & x > \ell \end{cases}$$

потенциал чуқурликда жойлашган. Заррача энергиясининг хусусий қийматларини ва нормаллашган хусусий функцияларини топинг.



3-Расм. Чексиз чуқур потенциал ўра (чуқурлик) даги ҳаракат.

Ечиш:

x ўзгарувчининг тўла ўзгариш соҳасини уч қисмга ажратамиз ва ҳар бир соҳа учун Шредингернинг стационар тенгламасини ёзамиз. Умумий ҳолда

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi = E\psi \quad (9.1.1.1)$$

I ва III соҳаларда, яъни $x < 0$, $x > \ell$ ҳолларда (9.1.1.1), тенгламанинг ечимлари нолга тенг деб олинади, чунки бу соҳаларда $U = \infty$.

$$\psi_1 = \psi_3 = 0$$

II соҳа учун (9.1.1.1) стационар Шредингер тенгламаси қўйидаги кўринишда бўлади:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2\psi_2}{dx^2} = E\psi_2 \quad (9.1.1.2)$$

Агар $\kappa^2 = 2m_0 E / \hbar^2$ деб белгиласак, (9.1.1.2) тенглама куйидаги кўринишда ифодаланади:

$$\psi_2'' + k^2 \psi_2 = 0 \quad (9.1.1.3)$$

Бу тенгламанинг умумий ечими

$$\psi_2 = B \cos kx + A \sin kx \quad (9.1.1.4)$$

(9.1.1.4) тенгламанинг потенциал чуқурликдаги ечими учун чегаравий шартлар куйидагича бўлади:

$$x=0 \text{ нуктада } \psi_2 = 0$$

$$x=\ell \text{ нуктада } \psi_2 = 0$$

Бу шартнинг биринчисига асосан (9.1.1.4) ифодада $B=0$ бўлади, иккинчи шартга асосан эса

$$\sin k\ell = 0 \quad (9.1.1.5)$$

Бундай оддий тенгламанинг ечими

$$k\ell = n\pi \quad (9.1.1.6)$$

кўринишда бўлади; бу ерда $n=1,2,\dots$

k – Коэффициентни заррачанинг тўлиқ энергияси E орқали ифодаласак,

$$k^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2} E \quad (9.1.1.7)$$

кўринишда олади. (9.1.1.6) дан k нинг қийматини (9.1.1.7) га қўйсак, микроразрачанинг энергетик спектрини аниқловчи ифодани топамиз:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0} \frac{n^2}{\ell^2} \quad (9.1.1.8)$$

бу ерда $n=0,1,2,\dots$ Микроразрача энергиясининг (9.1.1.8) қийматларига мос келган хусусий тўлқин функциялар

$$\psi_n = A_n \sin\left(n \frac{\pi x}{\ell}\right) \quad (9.1.1.9)$$

кўринишда ифодаланади.

(9.1.1.9) ифодадаги A_n коэффициент нормалаш шартидан топилади:

$$\int_0^\ell \psi_n^2(x) dx = A_n^2 \int_0^\ell \sin^2\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right) dx = 1 \quad (9.1.1.10)$$

Интегрални ҳисобласак, $A_n = \sqrt{2/\ell}$ келиб чиқади. Натижада абсолют ўтказмас деворли тўғри бурчакли потенциал чуқурликда m_0 массали заррачанинг ҳаракати учун стационар Шредингер тенгламасининг умумий ечимини оламиз.

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right) \quad (9.1.1.11)$$

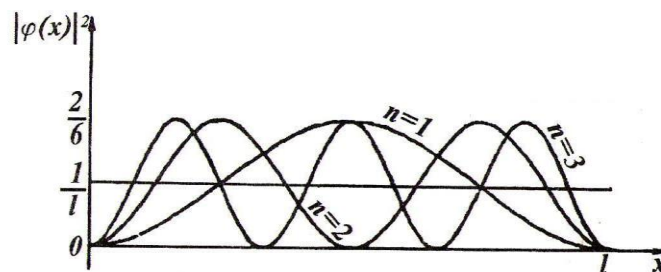
$\psi_n(x)$ нинг ҳар бир қийматига мос келадиган энергиялар (9.1.1.8) ифодадан аниқланади.

(9.1.1.8) ва (9.1.1.11) ифодаларни $n=1,2,3$ ҳоллар учун қуйидаги кўринишда ёзамиз: $|\psi_n(x)|^2$ нинг x га боғланиши ($n=1,2,3$) да 4- расмда кўрсатилган.

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad (9.1.1.12)$$

$$E_2 = 4E_1 = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{m_0 \ell^2} \quad \psi_2 = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(2\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad (9.1.1.13)$$

$$E_3 = 9E_1 = \frac{9\pi^2 \hbar^2}{2m_0 \ell^2} \quad \psi_3 = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(3\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad (9.1.1.14)$$



4-расм.

9.1.2 Массаси m_0 бўлган заррача қуйидаги кўринишдаги потенциал чуқурликда жойлашган:

$$U(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < a \\ U_0 & x > a \end{cases}$$

Стационар Шредингер тенгламасининг ечимини топинг.

Ечиш:

Потенциал майдоннинг кўринишини чизиб, x тўла ўзгариш соҳасини 3 та қисмга ажратамиз. 1-қисмда $x < 0$, 2-қисмда $0 \leq x \leq a$, 3-қисмда $x > a$

Шу 3-та қисм учун Шредингернинг стационар тенгламасини ёзамиз: 1-қисм учун Шредингер тенгламасининг ечими $\psi_1 = 0$ бўлади, чунки бу қисмда $U \Rightarrow \infty$;

2-қисмда Шредингернинг стационар тенгламаси ($0 \leq x \leq a$)

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + k^2\psi_2 = 0 \quad (9.1.2.1)$$

Бу ерда $k^2 = \frac{2m_0E}{\hbar^2}$

3-қисмда Шредингернинг стационар тенгламаси:

$$\frac{d^2\psi_3}{dx^2} - \beta^2\psi_3 = 0 \quad (9.1.2.2)$$

Бу ерда $\beta^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2}(U_0 - E)$. 2-Қисм учун Шредингер тенгламасининг ечими

$\psi_2 \approx e^{\mu x}$ кўринишида қидирилади. Тенгламага мос характеристик тенглама

$$\mu^2 + k^2 = 0, \text{ унинг ечими } \mu_{1,2} = \pm ik$$

Характеристик тенгламанинг ечимини эътиборга олган ҳолда 2-қисм учун стационар Шредингер тенгламасининг ечими қуйидаги кўринишда ёзилади.

$$\psi_2 = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx} = (c_1 + c_2) \cos kx + i(c_1 - c_2) \sin kx \quad (9.1.2.3)$$

Агар тенгламада $\{c_1 + c_2 = A \sin \alpha$ ва $i(c_1 - c_2) = A \cos \alpha$ (A - амплитуда ва α - бошлангич фаза) белгилашларни киритсак тенглама ечининг кўриниши

қуйидагича бўлади.

$$\psi_2 = A \sin(kx + \alpha) \quad (9.1.2.4)$$

Узлуксизлик шартлари асосида ψ_2, ψ_3 функцияларни тенглаштириб трансцендент тенглама оламиз ва тенгламани ечиб k ва a орасидаги боғланиш олинади ва сифатий ечилади.

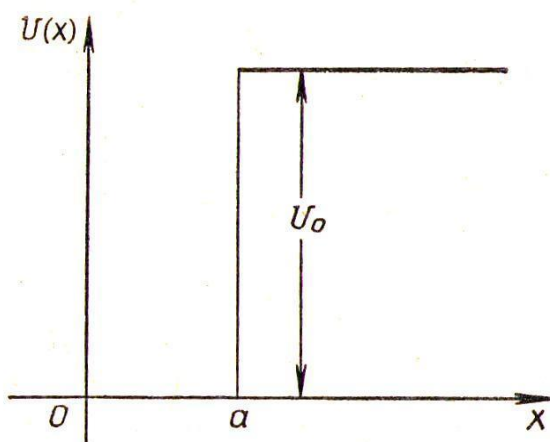
9.1.3 m_0 массали заррача қуйидаги кўринишдаги потенциал чуқурликда жойлашган. (5-расм)

$$U(x) \begin{cases} \infty, x < 0 \\ 0, 0 < x < a \\ U_0, x > a \end{cases}$$

Заррачанинг $E < U_0$ соҳадаги энергиясининг хусусий қийматлар спектрини аниқловчи тенгламани олинг ва уни қуйидаги

$$\sin ka = \pm \frac{\hbar k}{\sqrt{2m_0 U_0}}, k = \frac{\sqrt{2m_0 E}}{\hbar}$$

кўринишга келтириб $E \geq \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$ ҳол учун энергетик спектрнинг дискретлигини асосланг.



5- расм

Ечиш:

Шредингер тенгламасини иккита соҳа учун ёзамиз, чунки $x < 0$ соҳада соҳада потенциал чексиз, тенглама ечимга эга эмас, яъни бу соҳада заррача мавжуд эмас. Тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича.

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + U(x) \varphi = E \varphi \quad (9.1.3.1)$$

$0 < x < a$ соҳа учун Шредингер тенгламаси

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} + k^2 \varphi_1 = 0, \text{ бу ерда: } k^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2} E \quad (9.1.3.2)$$

$$x > a \text{ да } \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} - \kappa^2 \varphi_1 = 0, \kappa^2 = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2} \quad (9.1.3.3)$$

Тенгламаларни ечамиз, уларнинг табиий ва чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимлари қуйидагича ёзилади.

$$\varphi_1(x) = A \sin kx, 0 < x < a \quad (9.1.3.4)$$

$$\varphi_2(x) = B \exp(-kx), x \geq a \quad (9.1.3.5)$$

Тўлқин функциянинг ва унинг биринчи тартибли ҳосиласининг $x = a$ нуқтадаги узлуксизлик шартидан қуйидагиларни оламиз.

$$A \sin ka = B \exp(ka), \quad (9.1.3.5)$$

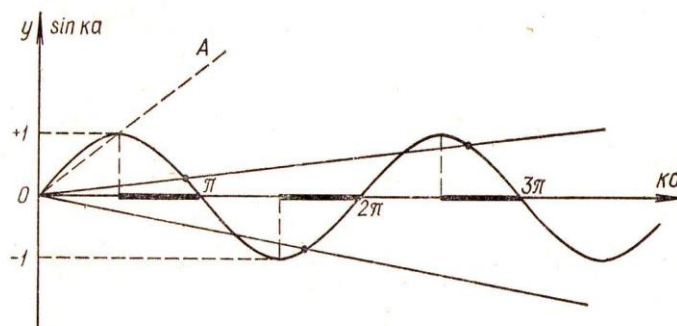
$$Ak \cos ka = -B \exp(-ka) \quad (9.1.3.6)$$

(9.1.3.5) ва (9.1.3.6) тенгламаларни бўлиб юборсак қуйидаги натижани оламиз.

$$\operatorname{tg} ka = -\frac{k}{\kappa} \text{ ёки } \sin ka = \pm \sqrt{\frac{\hbar^2}{2ma^2 U_0}} ka \quad (9.1.3.7)$$

Тенгламанинг бу график ечими (5- расм) энергиянинг дискрет спектрини аниқловчи ечимларини беради. Тенгламанинг ечимлари синусоида ва $\operatorname{tg} ka < 0$ га мос келувчи тўғри чизиқларнинг кесишадиган нуқталарига мос келади. Тенгламанинг энг кичик ечими $ka = \frac{\pi}{2}$ бўлиб, энергиянинг

$$E_{\min} = \frac{\pi^2}{8ma^2} \hbar^2 \quad (6\text{-расм}) \quad (9.1.3.8)$$



6- расм

9.2 Масалалар

9.2.1 Кенглиги 10^{-14} м. бўлган абсолют ўтказмас деворли, тўғри бурчакли потенциал чуқурликда жойлашган нейтроннинг энергиясининг энг кичик қийматини ҳисобланг.

9.2.2 Абсолют ўтказмас деворли, тўғри бурчакли, бир ўлчамли потенциал чуқурликнинг n - сатҳида жойлашган заррача учун $\bar{x}, \bar{p}_x, \overline{\Delta x^2}, \overline{\Delta p_x^2}$ ларни ҳисобланг.

9.2.3 Массаси m_0 бўлган заррача абсолют ўтказмас деворли, тўғри бурчакли, кенглиги ℓ –га тенг бўлган потенциал чуқурликда жойлашган ва қуйидаги кўринишдаги

$$\varphi(x) = A \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

тўлқин функция билан ифодаланади. Заррачанинг асосий ҳолатда жойлашиш эҳтимоллиги ва ўртача кинетик энергияси ҳисоблансин.

9.2.4 Массаси m_0 бўлган заррача икки ўлчамли абсолют ўтказмас деворли, тўғри бурчакли, потенциал чуқурликда жойлашган $(0 < x < a), 0 < (y < b)$. Заррачанинг энергиясининг хусусий қийматлар спектр ва хусусий функциялари аниқлансин.

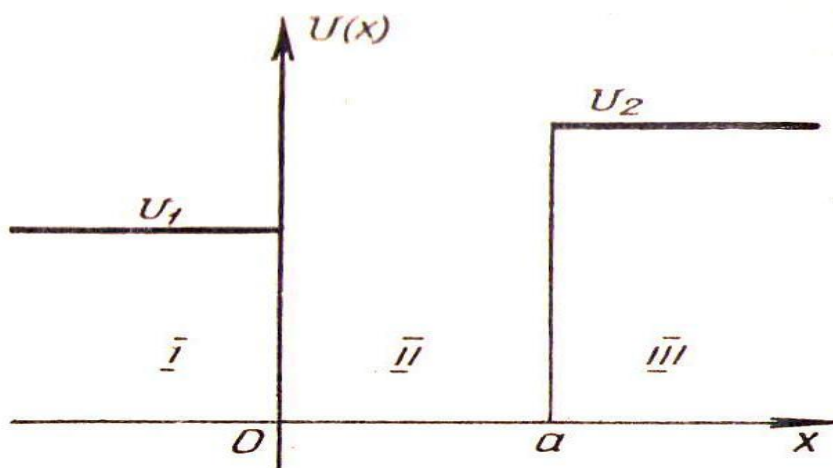
9.2.5 Массаси m_0 бўлган заррача икки ўлчамли абсолют ўтказмас деворли, тўғри бурчакли, потенциал чуқурликда жойлашган. Заррачанинг асосий ҳолатда $(0 \leq x \leq a), 0 \leq (y \leq b)$ соҳада жойлашиш эҳтимоллиги ҳисоблансин.

9.2.6 Юқоридаги 9.1.3. масаланинг ечимларидан фойдаланиб қуйидагиларни аниқланг. 1. Заррачанинг асосий ҳолат энергияси $E_1 = \frac{3}{4} U_0$ бўлган ҳол учун $a^2 U_0$ нинг қийматини аниқланг. 2. Учинчи сатҳ намоён бўлаётган ҳолдаги $a^2 U_0$ нинг қийматини аниқланг. 3. $a^2 U_0 = 125 \frac{h^2}{m_0}$ га тенг бўлса потенциал чуқурликдаги сатҳлар сонини аниқланг.

9.2.7 Массаси m_0 бўлган заррача қуйидаги кўринишдаги потенциал чуқурликда жойлашган:

$$U(x) = \begin{cases} U_1, \text{ агар } x < 0 \\ U_2, \text{ агар } 0 < x < a \\ U_2, \text{ агар } x > a \end{cases}$$

$E < U_1$ ҳолда заррачанинг энергиясининг хусусий қийматлар спектрини аниқловчи тенгламани олинг.



7- расм.

9. 2.8 Кенглиги a га тенг бўлган, абсолют ўтказмас деворли бир ўлчамли тўғри бурчакли потенциал чуқурликда жойлашган заррачанинг бошлангич $t = 0$ вақт моментидаги тўлқин функциясининг кўриниши $\Psi(x,0) = Ax(a - x)$.

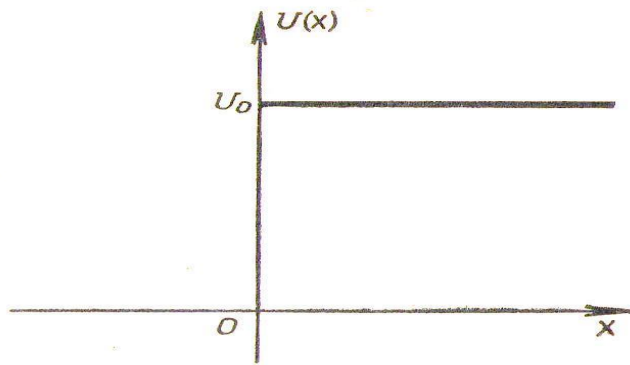
Ихтиёрий t вақт моментидаги тўлқин функциянинг кўринишини аниқланг.

10. Заррачаларнинг потенциал тўсиқ орқали ҳаракати

Тўғри бурчакли чексиз узунликдаги бир ўлчамли потенциал тўсиқдан заррачанинг ҳаракатини ўрганамиз. Бу мавзу амалиёт машғулотида конкрет масалаларни ечиш орқали кўриб чиқилади, шу сабабли бу ерда асосий тенгламалар ва формулаларни келтирамиз.

Шредингер тенгламасини ечишни $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ U_0, & x > 0 \end{cases}$ (10.1) кўринишдаги

потенциал майдонларда заррачанинг ҳаракати мисолида ўрганамиз



8- расм.

Иккита соҳада Шредингер тенгласининг ечимлари, яъни ψ_1 , ва ψ_2 лар аниқланади, иккита ечим ва ечимларнинг биринчи тартибли хосилалари учун $x = 0$ нуқтада ёзилган чегаравий шартларни ёзамиз:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0), \quad \psi_1'(0) = \psi_2'(0) \quad (10.2)$$

Стационар ҳолат учун Шредингер тенгламаси қуйидаги кўринишга эга

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + k^2 \psi_1 &= 0, \quad x < 0 \\ \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + q^2 \psi_2 &= 0, \quad x > 0 \end{aligned}$$

Бу тенгламаларда

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{ва} \quad q^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0) \quad (10.3)$$

Тенгламанинг ечимлари қуйидагича ёзилади.

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A_1 \exp(ikx) + B_1 \exp(-ikx), \\ \psi_2 &= A_2 \exp(ikx) + B_2 \exp(-ikx). \end{aligned} \quad (10.4)$$

Потенциал тўсиқга тушаётган заррачаларнинг оқими зичлигини J_0 орқали белгилаймиз. $J_0 = \frac{\hbar k}{m} |A_1|^2$

B_1, A_2 , амплитудаларни аниқлаймиз:

$$B_1 = \frac{k - q}{k + q}, \quad A_2 = \frac{2k}{k + q} \quad (10.5)$$

Потенциал тўсиқдан қайтган заррачалар оқимининг зичлигини тушаётган заррачалар оқимининг зичлигига нисбати қайтариш коэффиценти дейилади ва R орқали белгиланади. Қайтган заррачалар оқимининг зичлиги $J_R = \frac{\hbar k}{m} |B_1|^2$

Потенциал тўсиқнинг қайтариш коэффиценти

$$R = \left(\frac{k - q}{k + q} \right)^2 \quad (10.6)$$

Потенциал тўсиқнинг қайтариш коэффиценти қайтаётган ва тушаётган тўлқинлар амплитудалари квадратининг нисбатига тенг бўлади, Потенциал тўсиқдан ўтаётган заррачалар оқимининг зичлиги

$$J_D = \frac{\hbar k}{m} |A_2|^2 \quad (10.7)$$

Потенциал тўсиқдан ўтаётган заррачалар оқимининг зичлигининг потенциал тўсиқга тушаётган заррачалар оқимининг зичлигига нисбати потенциал тўсиқдан ўтиш (Потенциал тўсиқнинг ўтказиш) коэффиценти D дейилади D .

$$D = \frac{4kq}{(k + q)^2}, \quad (10.7)$$

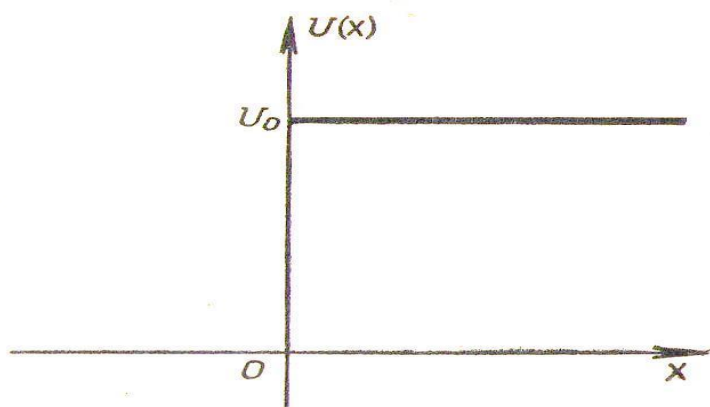
$D + R = 1$ ва заррачалар сонини сақланиш қонуни ҳисобланади.

10.1 Масалалар ечиш намуналари

10.1.1. m — массали заррача қуйидаги кўринишдаги потенциал майдонда ҳаракатланмоқда.

$$U(x) = \begin{cases} U_0, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$E > U_0$ энергия соҳасида тўлқин функцияни аниқланг.



9- расм

Қайтариш коэффициентини R ва ўтказиш (шаффофлик) коэффициентини D ни аниқланг.

Ечиш.

Шредингер тенгламаси
$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + U(x)\varphi = E\varphi \quad (10.1.1.1)$$

Тенгламани биринчи ва иккинчи соҳа учун ёзамиз.

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + k_1^2 \varphi = 0, \quad x < 0 \quad (10.1.1.2)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + k_2^2 \varphi = 0, \quad x > 0 \quad (10.1.1.3)$$

Ушбу тенгламаларининг ечими қуйидаги кўринишни олади.

$$\varphi_1 = A_1 \exp(ik_1 x) + B_1 \exp(-ik_1 x), \quad x < 0 \quad (10.1.1.4)$$

$$\varphi_2 = A_2 \exp(ik_2 x) + B_2 \exp(-ik_2 x), \quad x > 0 \quad (10.1.1.5)$$

Бу ерда: $k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$, $k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - U_0)}$

Тушаётган тўлқин A_1 , сочилган тўлқин эса B_1 амплитудага эга. $x > 0$ соҳада фақат ўтувчи тўлқин мавжудлигидан $B_2 = 0$ деб оламиз.

Қайтариш ёки акслантириш коэффициентини $R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}$ га тенг.

$x = 0$ нуқтада φ ва $\frac{d\varphi}{dx}$ ларнинг узлуксизлик шартидан $A_1 + B_1 = A_2$

$A_1 - B_1 = \frac{k_2}{k_1} A_2$ тенгламалар олинади. Содда алмаштиришлар ўтказиб

$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \quad (10.1.1.6)$$

$$D = \frac{4 k_1}{(k_1 + k_2)^2} k_2 \quad (10.1.1.1)$$

ларни аниқлаймиз.

10.1.2 $E > 0$ энергияли m массали заррача потенциал майдонда чапдан ўнгга қараб ҳаракатланмоқда.

$$U(x) = \begin{cases} -U_0, & 0 < x < a \\ 0, & x < 0 \text{ ва } x > a \end{cases}$$

Ўтказиш (шаффофлик) коэффиценти D ва қайтариш (акслантириш) коэффиценти R аниқлансин.

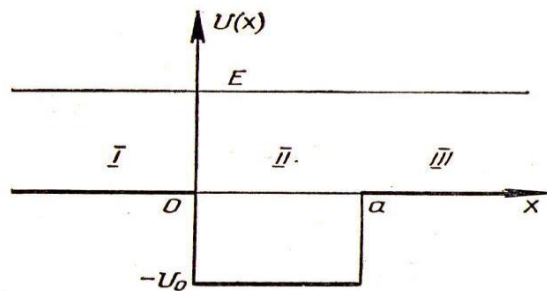
Ечиш.

Шредингер тенгламаси $-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + U(x) \varphi = E \varphi \quad (10.1.2.1)$

Тенгламани биринчи ва иккинчи ҳамда учинчи соҳа учун ёзамиз.

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + k_1^2 \varphi = 0, \quad x < 0 \quad (10.1.2.2)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + k_2^2 \varphi = 0, \quad x > 0 \quad (10.1.2.3)$$



10 - расм

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + k_3^2 \varphi = 0, \quad x > a \quad (10.1.2.4)$$

Бу ерда $k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E + U_0)}$, $k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$, $k_3 = k_2$

Тенгламаларнинг ечимлари

$$\varphi_1 = A_1 \exp(ik_1 x) + B_1 \exp(-ik_1 x), \quad x < 0$$

$$\varphi_2 = A_2 \exp(ik_2 x) + B_2 \exp(-ik_2 x), \quad x > 0$$

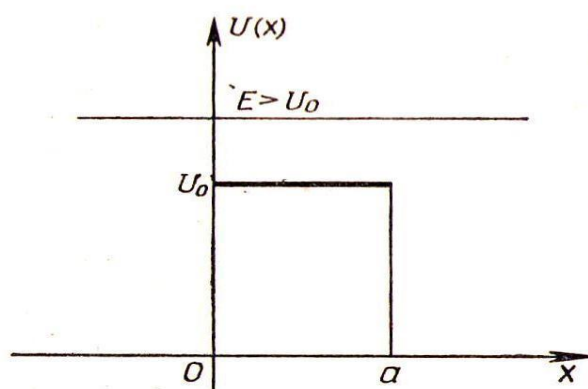
$$\varphi_2 = A_3 \exp(ik_2 x) + B_3 \exp(-ik_2 x), x > 0$$

Потенциал ўрнинг чегараларида, яъни $x = 0$ ва $x = a$ нукталарда φ ва $\frac{d\varphi}{dx}$ ларнинг узлуксизлик шартидан коэффицентлар учун тегишли тенгламалар олинади ва D ҳамда R аниқланади.

$$D = \left[1 + \frac{U_0^2 \sin^2 k_1 a}{4E(E + U_0)} \right]^{-1} \quad (10.1.2.5)$$

$$R = \left[1 + \frac{4E(E + U_0)}{U_0^2 \sin^2 k_1 a} \right]^{-1} \quad (10.1.2.6)$$

E энергияли m массали заррачалар 11- расмда кўрсатилган тўғри



11 - расм

$$U(x) = \begin{cases} U_0, & 0 < x < a \\ 0, & x < 0 \text{ ва } x > a \end{cases}$$

бурчакли потенциал тўсикга тушмоқда. $E > U_0$, ҳолда ўтказиш (шаффофлик) коэффиценти D ва қайтариш (акслантириш) коэффиценти R аниқлансин.

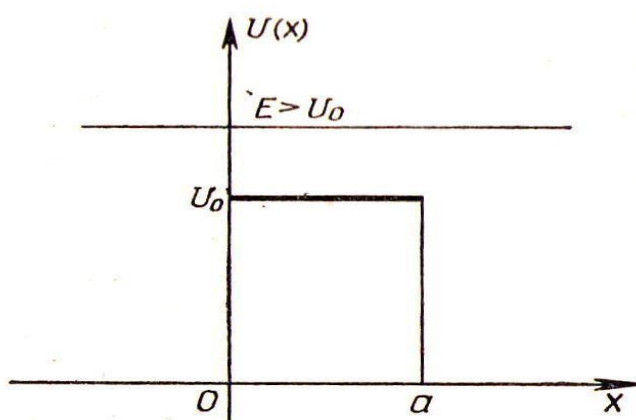
10.2.2 m массали заррача 10.2.1 масаладаги расмда ифодаланган тўғри бурчакли кенглиги a ва баландлиги U_0 , бўлган потенциал тўсикга тушмоқда.

$$U(x) = \begin{cases} U_0, & 0 < x < a \\ 0, & x < 0 \text{ ва } x > a \end{cases}$$

$E < U_0$, ҳолда ўтказиш (шаффофлик) коэффициенти D ва қайтариш (акслантириш) коэффициенти R аниқлансин

10.2.3 Тўғри бурчакли кенлиги $a = 10^{-10}$ м. ва баландлиги $U_0 = 20$ эВ бўлган потенциал тўсиқга тушаётган энергияси 10 эВ бўлган электрон ва протон учун тўсиқнинг шаффофлик (ўтказиш) коэффициенти ҳисоблансин.

10.2.4 m массали заррача қуйидаги расмда ифодаланган потенциал тўсиқга тушмоқда. $E < U_0$, ҳолда тўсиқнинг ўтказиш (шаффофлик) коэффициенти D ҳисоблансин.



12 - расм

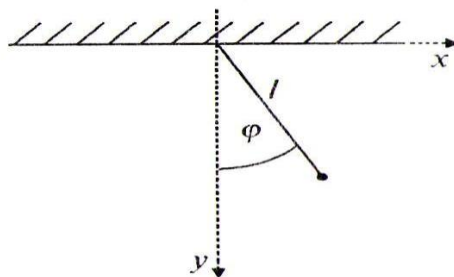
10.2.5 m массали заррача расмда ифодаланган потенциал тўсиқга тушмоқда. $E < U_0$, ҳолда тўсиқнинг ўтказиш (шаффофлик) коэффициенти D ҳисоблансин. $U(x) = U_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$

11. Чизиқли гармоник осциллятор

Мувозанат ҳолати атрофида квазиэластик куч таъсирида тебранма ҳаракат қилувчи системага **гармоник осциллятор** дейилади. Қуйидаги 13- расмда тасвирланган математик маятник классик механикадаги классик осцилляторга мос келади.

Квант механикада эса чизиқли гармоник осциллятор сифатида

$$U = \frac{m_0 \omega_0^2}{2} x^2 \quad (11.1)$$



13- расм

(11.1) формула билан аниқланувчи потенциал чуқурлик ичида (чуқурлик ичида $E < U$, ташқарисида эса $E > U$) тебранма ҳаракат қилувчи. физикавий система қаралади.

Квант осциллятор учун стационар Шредингер тенгламаси қуйидагича ёзилади.:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2} (E - \frac{m_0\omega^2 x^2}{2})\psi = 0, \quad r = x\sqrt{\frac{m_0\omega_0}{\hbar}} \quad (11.2)$$

Тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda - r^2)\psi = 0 \quad (11.3)$$

n - сатҳда жойлашган гармоник осциллятор энергияси:

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_0, \quad n=0\text{-да } E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} \quad (11.4)$$

Стационар Шредингер тенгламаси ечими қуйидагича ёзилади:

$$\psi_n = C_n e^{-r^2/2} H_n(r), \quad \text{бу ерда } C_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \left(\frac{m_0\omega_0}{\hbar}\right)^{1/4}, \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m_0\omega}}$$

Бу ерда $-H_n(r) = (-1)^n e^{r^2} \frac{d^n}{dr^n} (e^{-r^2})$ -Чебишев-Эрмит полиноми.

11.1 Масалалар ечиш намуналари

11.1.1 n - энергетик сатҳида жойлашган чизикли гармоник осцилляторнинг ўртача потенциал энергиясини ҳисобланг.

Ечиш: n -сатҳда жойлашган ва частотаси ω -га тенг бўлган гармоник осцилляторнинг ўртача потенциал энергияси

$$\bar{U}_n = \frac{m_0 \omega^2}{2} (\bar{x}^2)_n \quad (11.1.1.1)$$

n – стационар ҳолатдаги осцилляторнинг тўлқин функцияси ифодасини дан $\tilde{N}_n$ – коэффициентларни эса дан олиб, га қўйсак, $(\bar{x}^2)_n$ учун қуйидаги ифодани оламыз:

$$(\bar{x}^2)_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi_n|^2 dx = C_n^2 \left(\frac{\hbar}{m_0 \omega} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_n^2(\xi) \xi^2 d\xi \quad (11.1.1.2)$$

бу ерда

$$\xi = \left(\frac{m_0 \omega}{\hbar} \right)^{1/2} x; \quad C_n = \left(\frac{m_0 \omega}{\hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n \cdot n! \sqrt{\pi}}}$$

интегралга Эрмит полиномлари $H_n(\xi)$ нинг ифодасини га қўйсак ва интегрални n – марта бўлаклаб интегралласак, $(\bar{x}^2)_n$ учун қуйидаги ифода ҳосил бўлади.

$$(\bar{x}^2)_n = C_n^2 \left(\frac{\hbar}{m_0 \omega} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} (\xi^2 H_n(\xi)) d\xi \quad (11.1.1.3)$$

даги интегрални умумлашган Пуассон интегралига келтириш учун қуйидаги формуладан фойдаланиш зарур

$$\frac{d^n}{d\xi^n} (\xi^2 H_n(\xi)) = \frac{2^n (n+r)!}{2!} \xi^2 - 2^{n-2} n(n-1)n! \quad (11.1.1.4)$$

ни га қўйиб, Пуассон интегрални формулаларидан фойдаланиб ҳисоблаймиз ва натижада $(\bar{x}^2)_n$ учун қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$(\bar{x}^2)_n = \frac{\hbar}{m_0 \omega} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (11.1.1.5)$$

ни қўйсак, масала шартида талаб этилган, n – сатҳида жойлашган осцилляторнинг ўртача потенциал энергияси ифодасини оламыз:

$$\bar{U}_n = \frac{1}{2} \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} E_n \quad (11.1.1.6)$$

11.1.2 $n=1$ ҳолатда жойлашган гармоник осцилляторнинг ўртача потенциал энергиясини ҳисобланг.

Ечиш:

$n=1$ сатҳда жойлашган ва частотаси ω -га тенг бўлган гармоник осцилляторнинг ўртача потенциал энергияси

$$\bar{U}_1 = \frac{m_0 \omega^2}{2} (\bar{x}^2)_1 \quad (11.1.2.1)$$

n – стационар ҳолатдаги осцилляторнинг тўлқин функцияси ифодасини дан $\tilde{N}_n$ – коэффициентларни қўямиз, $(\bar{x}^2)_1$ учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$(\bar{x}^2)_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi_1|^2 dx = C_1^2 \left(\frac{\hbar}{m_0 \omega} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_1^2(\xi) \xi^2 d\xi \quad (11.1.2.2)$$

бу ерда

$$\xi = \left(\frac{m_0 \omega}{\hbar} \right)^{1/2} x; \quad C_n = \left(\frac{m_0 \omega}{\hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n \cdot n! \sqrt{\pi}}}$$

$$n=1 \text{ ҳол учун } C_1 \text{ ни ҳисоблаймиз: } C_1 = \left(\frac{m_0 \omega}{\hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}} = \frac{1}{\sqrt{2x_0\sqrt{\pi}}}$$

$(\bar{x}^2)_{1_n}$ учун қуйидаги ифода ҳосил бўлади.

$$(\bar{x}^2)_1 = C_1 \left(\frac{\hbar}{m_0 \omega} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \frac{d}{d\xi} (\xi^2 H_1(\xi)) d\xi \quad (11.1.2.3)$$

Бу интегрални умумлашган Пуассон интегралига келтириш учун қуйидаги формуладан фойдаланиш зарур

$$\frac{d}{d\xi} (\xi^2 H_1(\xi)) = \frac{2(1+r)!}{2!} \xi^2 - 2^{-1}(1-1) \quad (11.1.2.4)$$

$(\bar{x}^2)_{1_n}$ учун қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$(\bar{x}^2)_1 = \frac{\hbar}{m_0 \omega} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} \frac{\hbar}{m_0 \omega} \quad (11.1.2.5)$$

Бу ифодани ўртача потенциал энергия формуласига қўйсак $n=1$ да осцилляторнинг ўртача потенциал энергия ифодасини оламиз .

$$\bar{U}_1 = \frac{m_0 \omega^2}{2} (\bar{x}^2)_1 = \frac{m_0 \omega^2}{2} \frac{3}{2} \frac{\hbar}{m_0 \omega} = \frac{3}{4} \hbar \omega \quad (11.1.2.6)$$

11.2 Масалалар

11.2.1 $n = 1$ ҳолатда жойлашган гармоник осцилляторнинг ўртача потенциал энергиясини ҳисобланг.

11.2.2 $n = 2$ ҳолатда жойлашган осцилляторнинг ўртача кинетик энергиясини ҳисобланг.

11.2.3 Энергия формуласи асосида $n = 2$ ҳолатдан $n = 4$ ҳолатга ўтишида чиқазиладиган тўлқин частотаси ва тўлқин узунлигини ҳисобланг

11.2.4 Энергия формуласи асосида $n = 1$ ҳолатдан $n = 3$ ҳолатга ўтишида чиқазиладиган тўлқин частотаси ва тўлқин узунлигини ҳисобланг

11.2.5 $n = 2$ ҳолатда жойлашган гармоник осцилляторнинг ўртача потенциал энергиясини ҳисобланг.

11.2.6 $n = 2$ ҳолатда жойлашган осцилляторнинг ўртача кинетик энергиясини ҳисобланг.

11.2.7 Энергия формуласи асосида $n = 1$ ҳолатдан $n = 3$ ҳолатга ўтишида чиқазиладиган тўлқин частотаси ва тўлқин узунлигини ҳисобланг.

11.2.8 Энергия формуласи асосида осциллятор энергия сатҳларининг эквидистантлик шартини исботланг.

11.2.9 Энергияси $\frac{5}{2}\hbar\omega$ бўлган чизиқли гармоник осцилляторнинг ўртача кинетик энергиясини ҳисобланг.

11.2.10 Чизиқли гармоник осциллятор учун импульснинг ҳар қил қийматлари эҳтимоллигини топинг.

11.2.11 Потенциал энергияси $U(x, y, z) = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2y^2 + \frac{1}{2}k_3z^2$ бўлган уч ўлчамли гармоник осцилляторнинг энергия сатҳлари ва хусусий функцияларини аниқланг.

11.2.12 Уч ўлчамли изотроп гармоник осциллятор энергиясининг хусусий қийматлари $\hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right)$ (бу ерда $n = 0, 1, 2, \dots$) Квант энергетик сатҳнинг айниш даражасини топинг.

11.2.13 Потенциал энергияси $\frac{5}{4}\hbar\omega$ бўлган чизиқли гармоник осцилляторнинг ўртача энергиясини ҳисобланг.

11.2.14 Энергияси $\frac{7}{2}\hbar\omega$ бўлган чизикли гармоник осцилляторнинг ўртача

потенциал энергиясини ҳисобланг.

12. Квазиклассик яқинлашиш. ВКБ методи.

Квант механикада заррачанинг ҳаракатини тасвирловчи Шредингер тенгламасини вақтга боғлиқ бўлган кўриниши, яъни

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad (12.1)$$

Энди $\hbar \Rightarrow 0$ интилганда Шредингер тенгламаси классик механиканинг асосий тенгламасига ўтишини кўриб чиқамиз.

Классик механикада заррачанинг ҳаракатини ифодаловчи асосий тенглама, иккинчи даражали биринчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламани классик механикада Гамильтон -Якоби тенгламаси дейилади.

Квант механикасининг асосий динамик тенгламаси Шредингер тенгламаси бўлиб, ўзининг структураси, характери ва аниқланиш усули билан Гамильтон -Якоби тенгламасига яқин туради.

Гамильтон -Якоби тенгламаси

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + U = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (12.2)$$

кўринишда, ёки компакт кўринишда,

$$\frac{1}{2m} (\text{grad} S)^2 + U = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (12.3)$$

Бу ерда S - координата ва вақтнинг функцияси бўлган таъсир функцияси.

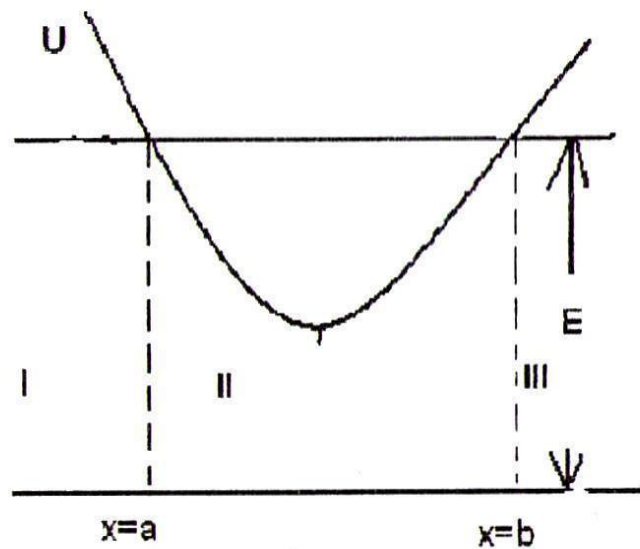
$\hbar \Rightarrow 0$ да Шредингер тенгламаси Гамильтон-Якоби тенгламасига ўтади, лекин Шредингер тенгламасида $\hbar = 0$ деб олинса, тенгламанинг маъноси йўқолади, шунинг учун Шредингер тенгламасида $\hbar \Rightarrow 0$ лимитга ўтилади ва тегишли алмаштиришлар бажарилади.

Маърузаларда Вентцель-Крамерс-Бриллюэн (ёки қисқача ВКБ) яқинлашиш методи ёки, квазиклассик яқинлашишда Шредингер тенгламасининг Гамильтон-Якоби тенгламасига ўтиши кўрсатилади.

Амалий машғулотда оддий масалаларни ечиш орқали бу методни тўлароқ тушунтиришга ҳаракат қиламиз.

12.1 Масалалар ечиш намуналари

12.1.1 Квазиклассик яқинлашиш методи асосида заррачанинг потенциал ўра ичидаги ҳаракати тўғрисидаги масалани ечинг.



14 -расм

Ечиш.

Заррачаларнинг бир ўлчамли потенциал ўрадаги ҳаракати масаласига квазиклассик яқинлашиш (ВКБ) методини тадбиқ этамиз. Бир ўлчамли потенциал ўра 14 расмда тасвирланган. Ҳаракат соҳаси, x — ўқининг $(-\infty \div +\infty)$ оралигини шартли учта соҳага ажратамиз. $(a \leq x \leq b)$ оралиқ, яъни 2- соҳада заррачанинг тўла энергияси потенциал энергиядан катта бўлган ҳолда, заррачанинг ҳаракати финит ҳаракат бўлади ва заррачанинг энергияси квантланади. Бир ўлчамли ҳаракатнинг умумий ҳоссасига асосан заррачанинг энергиясига битта энергетик сатҳ мос келади. Ушбу энергетик сатҳнинг

потенциал эгри чизик билан кесишган нуқталари , $x = a$ ва $x = b$ нуқталар ўра ичидаги заррачанинг классик бурилиш нуқталари дейилади.

Бу нуқталарда кинетик энергия нолга тенг, тўла энергия потенциал энергияга тенг бўлади, заррача шу нуқтадан қарама қарши томонга ҳаракатланади.

Квант механикада $|x| > a$ бўлганда потенциал энергия кинетик энергиядан катта бўлади, яъни $U > E$ да заррачанинг импульси мавҳум катталик бўлади.

$$p = \sqrt{2m(E - U)} = i\sqrt{2m(U - E)} \quad (12.1.1.1)$$

$$\varphi(x) = \frac{c_0}{\sqrt{p}} \exp\left\{\frac{i}{h} \int p dx\right\} + \frac{c_1}{\sqrt{p}} \exp\left\{-\frac{i}{h} \int p dx\right\} \quad (12.1.1.2)$$

() формулада $x \rightarrow \infty$ экспоненциал катталикларнинг биттаси чексиз камаяди, иккинчиси эса чексиз ўсади. $|p| = \sqrt{2m(E - U)}$ ни ҳақиқий катталик деб олиб, $x \rightarrow \infty$ да ўсувчи ҳадни ташлаб юборамиз, 1- соҳа учун ечимни қуйидагича ёзамиз.

$$\varphi_1(x) = \frac{c_1}{\sqrt{p}} \exp\left\{-\frac{i}{h} \int p dx\right\} \quad (12.1.1.3)$$

Худди шундай 3- соҳа учун ечимни қуйидагича ёзамиз.

$$\varphi_3(x) = \frac{c_3}{\sqrt{p}} \exp\left\{-\frac{i}{h} \int p dx\right\} \quad (12.1.1.4)$$

2- соҳа учун ечим эса қуйидагича ёзилади.

$$\varphi_2(x) = \frac{c_2}{\sqrt{p}} \exp\left\{-\frac{i}{h} \int p dx + \theta\right\} \quad (12.1.1.5)$$

Биринчи ва учинчи соҳалардаги ечимлар $x = a$ ва $x = b$ нуқталарда Шредингер тенгламасининг иккинчи соҳадаги хусусий ечимига мос келиши керак.

Бор-Зоммерфельд квантлаш шартидан келиб чикувчи натижаларни олинган ечимлар билан таққосласак, улар ўзаро мос келиши зарур. Ҳисоблашлар натижасида

$$J = \int p dx = 2\pi\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) \text{ келиб чиқади.}$$

12.2 Масалалар

12.2.1 $U(x) = -U_0 \left(1 - \frac{|x|}{a} \right)$ ($E < 0$) потенциал энергияли майдонда ҳаракатланаётган m — массали заррачанинг энергетик спектрини квазиклассик метод билан ҳисобланг.

12.2.2 $U(x) = U_0 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{a}$ потенциал энергияли майдонда ҳаракатланаётган m — массали заррачанинг энергетик спектрини квазиклассик метод билан ҳисобланг.

12.2.3 Квазиклассик метод асосида водородсимон атомнинг спектрини ҳисобланг.

12.2.4 $U(x) = U_0 ch^2 \frac{x}{a}$ потенциал энергияли майдонда ҳаракатланаётган m — массали заррачанинг энергетик спектрини квазиклассик метод билан ҳисобланг

13. Марказий симметрик куч майдонидаги ҳаракат.

Радиал Шредингер тенгламасини ечиш

Марказий симметрик куч майдонида ҳаракатланаётган заррачанинг потенциал энергияси куч майдони марказидан заррача жойлашган нуқтагача бўлган масофагагина боғлиқ бўлади. Марказий симметрик куч майдонидаги ҳаракат қонунлари атом механикаси асосини ташкил этади, яъни атомдаги электронларнинг ҳаракати тўғрисидаги умумий масаланинг ечими у ёки бу маънода марказий куч майдонида битта заррачанинг ҳаракати масаласининг ечимига асосланади. Заррачанинг потенциал энергияси $U(r)$ бўлса, Гамильтон оператори $\hat{H}$ ни ифодаси қуйидагича ёзилади.

$$\hat{H} = \hat{T}_r + \frac{\hat{M}^2}{2\mu r^2} + U(r) \quad (13.1)$$

Бу ерда $\hat{M}^2$ - импульс моменти квадрати оператори, $\hat{T}_r$ -эса радиал \аракат учун кинетик энергия оператори. Марказий симметрик куч майдонида тўла энергия E ва импульс моменти - M^2, M_x, M_y, M_z лар ҳаракат интеграллари ҳисобланади.

Стационар ҳолатлар учун Шредингер тенгламаси қуйидагича ёзилади.

$$\hat{T}_r \psi + \frac{\hat{M}^2}{2\mu r^2} \psi + U(r)\psi = E\psi \quad (13.2)$$

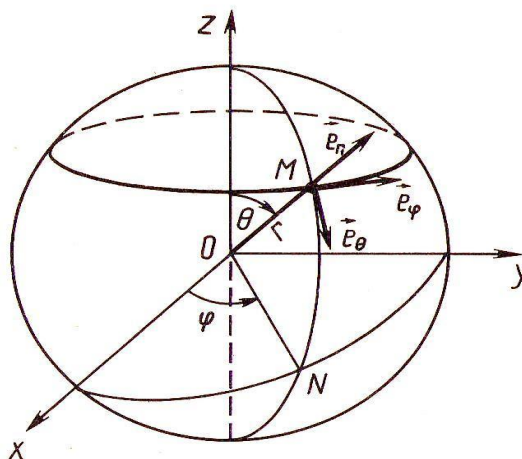
Тўлқин функция ψ кутб координалари r, θ, φ нинг функцияси ҳисобланади ва тенглама r, θ, φ ўзгарувчиларнинг тўла ўзгариш соҳаси ($0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$)да бир қийматли, узлуксиз, чекли ечимга эга бўлади.

$\hat{H}$ ва $\hat{M}^2$ ўзаро коммутатив операторлар бўлганлигидан улар умумий хусусий функцияларга эга бўлади ва $\hat{M}^2 \psi = M^2 \psi$ тенглама ёзилади. ($M^2 = \hbar^2 l(l+1)$) бўлганлигидан $\hat{M}^2 \psi = \hbar^2 l(l+1)\psi$ га тенг бўлади. Шредингер тенгламаси қуйидагича ёзилади..

$$\hat{T}_r \psi + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \psi + U(r)\psi = E\psi \quad (13.3)$$

Бу тенглама фақат r га ошкор боғланади.

Тўлқин функция $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$ кўринишда қидирилади, $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ - $\hat{M}^2$ операторнинг хусусий функцияси. Сферик симметрик координаталар системасида r, θ, φ лар боғланиши қуйидаги расмда кўрсатилган.



15- расм

Радиал Шредингер тенгламаси қуйидагича ёзилади .

$$\hat{T}_r R + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} R + U(r)R = ER \quad (13.4)$$

Тенгламанинг ечими $R(r) = \frac{u(r)}{r}$ кўринишида қидирилади, тенгламанинг

асимтотик ечими қуйидагича ёзилади. $R = C_1 \frac{e^{ikr}}{r} + C_2 \frac{e^{-ikr}}{r}$, ($E > 0$) (13.5)

$$R = C_1 \frac{e^{-\lambda r}}{r} + C_2 \frac{e^{\lambda r}}{r} , \quad (E < 0) \quad (13.6)$$

($E > 0$) ҳолда R ечим доимийларнинг ихтиёрий қийматларида чекли ва узлуксиз. ($E < 0$) ҳолда энергия спектри дисерет, яъни $E = E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$, бу ҳолда квант сатҳлар системасини оламиз.

13.1. Масалалар ечиш намуналари

13.1.1 Абсолют ўтказмас деворлар билан ўралган r –радиусли сферик-симметрик потенциал чуқурликда жойлашган орбитал моменти нол бўлган μ – массаси заррачанинг энергетик спектри ва тўлқин функциялари аниқлансин:

Ечиш:

Орбитал моменти нол бўлган заррачанинг $R(r)$ радиал функцияси учун Шредингер тенгламаси.

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} R = 0 \quad (0 \leq r \leq r_0) \quad (13.1.1.1)$$

Тенгламада $R(r) = \frac{x(r)}{r}$ алмаштириш ўтказиб, $x(r)$ функция учун қуйидаги

тенгламани оламиз:

$$\ddot{x}(z) + k^2 x(r) = 0 \quad (13.1.1.2)$$

бу ерда

$$k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2} \quad (13.1.1.3)$$

Натижада қуйидаги ечимни оламиз:

$$x(r) = A \sin(kr + \alpha) \quad (13.1.1.4)$$

А ва α интеграллаш доимийлари $R(r)$ функциясининг чеклигидан $r \Rightarrow 0$ да $\alpha = 0$ бўлади.

Чегаравий шартлар асосида

$$R(r) = \frac{A \sin kr_0}{r_0} = 0 \quad (13.1.1.5)$$

бу ифодадан $kr_0 = n\pi$, ($n = 1, 2, 3, \dots$):

Энергия учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2\mu r_0^2} n^2 \quad (13.1.1.6)$$

S – ҳолатларда заррачанинг тўлқин функциялари.

$$\psi_{noo}(\vec{r}) = R_{no}(r) Y_{oo}(\theta, \varphi) = c \frac{1}{r} \sin\left(\frac{n\pi}{r_0} r\right) \quad (13.1.1.7)$$

Нормировка шarti асосида

$$2\pi c^2 \int_0^{r_0} \frac{1}{r^2} \left(\sin^2\left(\frac{n\pi}{r_0} r\right) r \right) r^2 dr = 1 \quad (13.1.1.8)$$

шу асосда c – учун $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0}}$

Натижада, заррачанинг S – ҳолатлардаги тўлқин функцияси

$$\psi_{noo}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0}} \frac{1}{r} \sin\left(\frac{n\pi}{r_0} r\right) \quad (13.1.1.9)$$

13.1.2 μ – массали заррача $U(r) = \begin{cases} (0), \text{ агар } r < r_0 \\ U_0, \text{ агар } r > r_0 \end{cases}$

s – ҳолатда ($l=0$) жойлашган $E < U_0$ ҳолатдаги энергиясининг хусусий қийматлари қуйидаги кўринишда бўлишини исботланг.

$$\sin kr_0 = \pm \sqrt{\frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2 U_0}} kr_0. \text{ Бу ерда } k = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}.$$

Ечиш .

Радиал Шредингер тенгламасини ёзамиз.

$$\hat{T}_r R + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} R + U(r)R = ER \quad (13.1.2.1)$$

Тенгламада $R(r) = \frac{\chi(r)}{r}$ белгилаш киритамиз, ушбу белгилашни радиал Шредингер тенгламасига қўйиб ва тегишли алмаштиришларни ўтказиб қуйидаги тенгламаларни оламиз.

$$\chi_1'' + k^2 \chi_1 = 0 \quad (r < r_0) \text{ ва } k = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar} \quad (13.1.2.2)$$

$$\chi_2'' - \beta^2 \chi_2 = 0 \quad (r > r_0) \text{ ва } \beta = \frac{\sqrt{2\mu(u_0 - E)}}{\hbar} \quad (13.1.2.3)$$

Ушбу тенгламаларнинг ечими иккинчи тартибли бир жинсли дифференциал тенгламаларни ечиш методи асосида топилади.

$$\chi_1 = A \sin kr + B \cos kr \quad (r < r_0) \quad (13.1.2.4)$$

$$\chi_2 = C_1 e^{-\beta r} + C_2 e^{\beta r} \quad (r > r_0) \quad (13.1.2.5)$$

$\psi(r)$ функцияларнинг чеклилигидан $B = 0$, $C_2 = 0$, Шундай қилиб

$$\psi_1 = A \frac{\sin kr}{r}, \quad \psi_2 = C_1 \frac{e^{-\beta r}}{r} \quad (13.1.2.6)$$

$r = r_0$ нуктада функциянинг ва унинг биринчи тартибли ҳосиласининг узлуксизлик шартидан қуйидагиларни топамиз.

$$A \sin kr_0 = C_1 e^{-\beta r_0} \quad (13.1.2.7)$$

$$A \cos kr_0 = -C_1 \frac{\beta}{k} e^{-\beta r_0} \quad (13.1.2.8)$$

$$\text{Бундан. } \sin kr_0 = \pm \sqrt{\frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2 U_0}} kr_0, \quad (13.1.2.9)$$

ушбу транстендент тенглама заррачанинг дискрет энергетик спектрини ифодалайди.

13.1.3 Радиуси r_0 ва чуқурлиги чекли, ҳамда U_0 га тенг бўлган сферик симметрик потенциал чуқурликда жойлашган, орбитал моменти нолга тенг бўлган ($l = 0$) заррачаларнинг энергетик спектри, ($E > U_0$) шарт бажарилган ҳолда, узлуксиз эканлигини исботланг.

Ечиш .

Радиал Шредингер тенгламасига

$$\hat{T}_r R + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} R + U(r)R = ER \quad (13.1.3.1)$$

$R(r) = \frac{\chi(r)}{r}$ белгилашни киритиб ($E > U_0$) иккита бир жинсли дифференциал тенгламани оламиз.

$$\chi_1'' + k^2 \chi_1 = 0, \quad (r < r_0), \quad k = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar} \quad (13.1.3.2)$$

$$\chi_2'' - \beta^2 \chi_2 = 0, \quad (r > r_0), \quad \beta = \frac{\sqrt{2\mu(u_0 - E)}}{\hbar} \quad (13.1.3.3)$$

Мос ($r < r_0$) ва ($r > r_0$) тўлқин функциялар кўриниши қуйидагича бўлади.

$$\psi_1 = A \frac{\sin kr}{r} + B \frac{\cos kr}{r}, \quad (r < r_0) \quad (13.1.3.4)$$

$$\psi_1 = A \frac{\sin \alpha r}{r} + B \frac{\cos \alpha r}{r}, \quad (r > r_0) \quad (13.1.3.5)$$

$r \Rightarrow 0$ да $\psi_1(r)$ функциянинг чеклилик шартига бўйсинишидан $B = 0$ бўлади. $\psi(r)$ ва $\psi'(r)$ функцияларнинг $r = r_0$ нуқтада узлуксизлик шартига бўйсинишидан қуйидаги тенгламаларни аниқлаймиз.

$$A \sin kr_0 = C_1 \sin \alpha r_0 + C_2 \cos \alpha r_0, \quad (13.1.3.6)$$

$$Ak \cos kr_0 = C_1 \alpha \cos \alpha r_0 - C_2 \alpha \sin \alpha r_0, \quad (13.1.3.7)$$

Ушбу 2-та тенглама ёрдамида иккита доимийни, масалан C_1 ва C_2 ларни учинчи A доимий орқали ифодаalayмиз, k катталикига ҳеч қандай шарт қўйилмаганлиги сабабли заррачанинг энергетик спектри узлуксиз бўлади.

13.1.4 Сферик-симметрик потенциал чуқурликнинг характеристик параметрини $\frac{2\mu r_0^2 U_0}{\hbar^2} = \frac{16\pi^2}{27}$ га тенг ҳисоблаб, (бу ерда U_0 -чуқурлик, r_0 -радиус)

Заррача учун нормал s – ҳолатда r нинг энг катта эҳтимолли қиймати r_{ke} ни ҳамда заррачанинг ($r > r_0$) соҳада бўлиш эҳтимоллигини ҳисобланг.

Ечиш .

$R(r)$ радиал функция учун s – ҳолатда , яъни $l = 0$ да стационар Шредингер тенгламаси қуйидаги кўринишни олади.

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} = 0, \quad (0 < r < r_0) \quad (13.1.4.1)$$

Тенгламада $R(r) = \frac{\chi(r)}{r}$ белгилашни киритиб $\chi(r)$ учун қуйидаги дифференциал тенгламани оламиз.

$$\chi_1'' + k^2 \chi_1 = 0, \quad k = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar} \quad (13.1.4.2)$$

Тенгламанинг ечими $\chi(r) = A \sin(kr + \alpha)$, A ва α -доимийлар. Чегаравий шартларни ишлатамиз ва масалада берилган шартлар асосида ягона энергетик сатҳни қуйидаги тенгламадан аниқлаймиз. $R(r)$ функциянинг $r \Rightarrow 0$ да чеклилик шартидан $\alpha = 0$ эканлиги келиб чиқади.

$$\sin kr_0 = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} kr_0 \quad (13.1.4.3)$$

Бундан $kr_0 = \frac{2}{3}\pi$ эканлигини аниқлаймиз.

Асосий s – ҳолатда заррачанинг энг катта эҳтимолли масофаси r_{ke} эҳтимоллик зичлиги максимуми шarti $\omega(r) = r^2 |\psi_{1s}|^2 = A^2 \sin^2 kr$ дан аниқланади.

$$\frac{d}{dr} (A^2 \sin^2 kr) = 0 \quad (13.1.4.4)$$

Шунинг учун $r_{\text{ver}} = \frac{\pi}{2k} = \frac{3}{4}r_0$

Заррачанинг ($r > r_0$) соҳада жойлашиш эҳтимоллигини ҳисоблашда

$\psi_2 = C_1 \frac{e^{-\beta r}}{r}$ тўлқин функциядан фойдаланамиз. C_1 ни $\psi_1 = A \frac{\sin kr}{r}$ ва ψ_2 тўлқин

фунлцияларнинг $r = r_0$ нуқтада тенглаштирилиш шартидан аниқлаймиз.

$$C_1 = \left[2\pi r_0 \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \sin kr_0 e^{\beta r_0}, \quad (13.1.4.5)$$

Қидирилаётган эҳтимоллик

$$dW_{r>r_0} = 4\pi \int_0^\infty |\psi_2|^2 r^2 dr = \frac{9\sqrt{3}}{4(2\pi + 3\sqrt{3})} \approx 0,34 = 34\%$$

13. 2 Масалалар

13.2.1 Заррача $V(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{c}{r^2}$ потенциал майдонда жойлашган. Заррачанинг

энергия сатҳлари ва унга мос тўлқин функцияларни аниқланг.

13.2.2 $V(r) = -V_0 \exp\left(-\frac{r}{\alpha}\right)$ майдонда, импульс моменти нол бўлган ($\ell = 0$) заррача

учун Шредингер тенгламасини ечинг.

13.2.3 Заррача $V(r) = -\frac{e^2}{r}$ потенциал майдонда жойлашган. Заррачанинг энергия

сатҳлари ва унга мос тўлқин функцияларни аниқланг

13.2.4 Заррача $V(r) = \frac{c}{r^2}$ потенциал майдонда жойлашган. Заррачанинг энергия

сатҳлари ва унга мос тўлқин функцияларни аниқланг

13.2.5 Сферик координалардан фойдаланиб, импульс моменти квадрати оператори $\hat{M}^2$ нинг Лаплас оператори $\Delta = \nabla^2$ ва кинетик энергия операторлари билан боғланишини аниқланг.

13. 2.6 Радиуси r_0 ва чуқурлиги чекли, ҳамда U_0 га тенг бўлган сферик симметрик потенциал чуқурликда жойлашган, орбитал моменти нолга тенг

бўлган ($l = 0$), заррачаларнинг энергетик спектри ($E > U_0$) шарт бажарилган ҳолда узлуксиз эканлигини исботланг.

14. Кулон майдонида ҳаракат. Водородсимон атомлар назарияси

Атом механикасининг содда масалаларидан бири электроннинг ядронинг Кулон майдонидаги ҳаракати тўғрисидаги масала ҳисобланади. Бу масала билан водород н ва гелий иони He^+ , икки қаррали литий иони Li^{++} каби водородсимон атомларни ўрганишда танишамиз.

Ядронинг Кулон майдонида ҳаракатланаётган электроннинг потенциал энергияси

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{r} \quad (14.1)$$

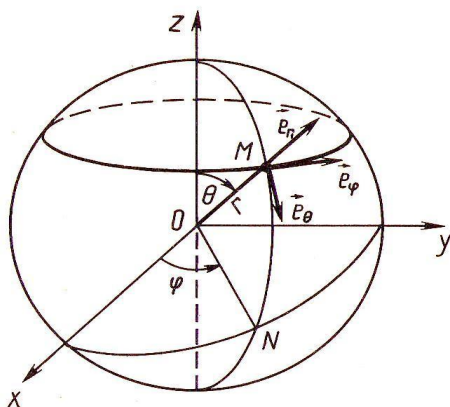
Электроннинг қаралаётган ҳаракати учун квант сатҳларни топиш учун радиал R функция учун Шредингер тенгламаси ечилади.

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} = 0 \quad (14.2)$$

Тегишли алмаштиришлар ўтказилиб радиал Шредингер тенгламаси ечими топилади. Водородсимон атом электронининг ҳолат функцияси марказий симметрик майдон учун ёзилган Шредингер тенгламасининг ечими

$$\psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi) = R_{n\ell}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) \quad (14.3)$$

кўринишда аниқланади. $\psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi) = R_{n\ell}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$



16-расм.

Бош квант сони n -нинг ҳар бир қийматига алоҳида энергия E_n - тўғри келади. Аммо берилган n -нинг ҳар бир қиймати m ва ℓ билан фарқ қилувчи $N_n = n^2$ та турлангандир ва $N_n = \sum_0^{n-1} (2\ell + 1) = n^2$.

Бош квант сони n -қуйидаги қийматларни олади: $n=1, 2, 3, 4, 5, \dots, \infty$ ва водородсимон атомда электроннинг энергиясини аниқлайди:

$$E_n = -\frac{z^2 e^4 m_0}{2\hbar^2 n^2} \quad (14.4)$$

Орбитал квант сони ℓ -қуйидаги қийматларни олади: $\ell=1, 2, 3, \dots, n-1$

ва водородсимон атомда электроннинг импульс миқдори моментини аниқлайди:

$$M_\ell = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1)} \quad (14.5)$$

магнит квант сони m - қуйидаги қийматларни олади:

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \ell \quad (14.6)$$

ва электрон импульс миқдори моментининг Z ўқиға проекциясини аниқлайди:

$$M_z = m\hbar \quad (14.7)$$

Шундай қилиб, учта E_n, M_ℓ, M_z катталиклар тўплами тўлқин функцияси $\psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi)$ ни аниқлайди. Квант сонлари n, ℓ, m нинг аниқ қийматларига мос келган тўлқин функцияси абсолют қийматининг квадрати фазонинг (r, θ, φ) координатали нуқтаси атрофида электроннинг топилиш эҳтимоллигини аниқлайди:

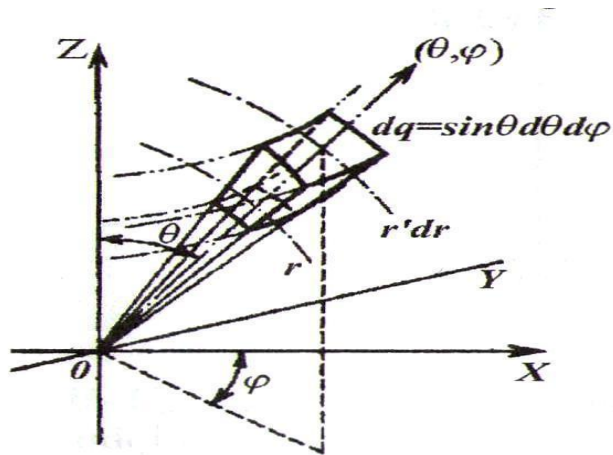
$$dW_{n,\ell,m}(r, \theta, \varphi) = |\psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi)|^2 r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi \quad (14.8)$$

Маълумки, $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ учи координаталар марказида жойлашган мужассам бурчакдир.

Буни эътиборга олиб, ифодани (θ, φ) бўйича интегралласак электронни радиуси $r+dr$ бўлган сфералар орасида топилиш эҳтимоллигини аниқлаймиз.

$$dw_{n\ell}(r) = R_{n\ell}^2(r) r^2 dr \quad (14.9)$$

Демак, электронни сферанинг dr - қатлами орасида топилиш эҳтимоллиги радиал функцияга боғлиқ. (Қуйидаги 16- расмга қаранг)



17- расм.

Водород атомининг нурланиш спектрлари, унинг структураси, назарияси маълум бўлмасдан туриб тажрибада (1885-1908 й.) аниқланган. Улар шу спектр қонуниятини аниқлаган олимлар номлари билан юритилади:

Лейман серияси: $w_n = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right); n=2, 3, 4, 5, 6, \dots$

Бальмер серияси: $w_B = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right); n=3, 4, 5, 6, 7, \dots$

Пашен серияси: $w_{II} = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right); n=4, 5, 6, 7, 8, \dots$

Брэкет серияси: $w_{BP} = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right); n=5, 6, 7, 8, \dots$

Пфунд серияси: $w_{PF} = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right); n=6, 7, 8, \dots$

Бу формулаларда R доимий катталиқ ($R=109677,6 \text{ см}^{-1}$), уни Ридберг тажриба йўли билан аниқлаган ва ярим классик ва ярим квант Бор назарияси ёрдамида исботланган ва Ридберг доимийси $R = \frac{m_0 e^4}{2\hbar^3}$ кўринишдаги ифода билан аниқланади.

Радиал функциянинг тақрибий ифодалари r , ($\rho = \frac{r}{a} \Rightarrow \infty$) қуйидагича ифодаланади. Бу ерда $a = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ М}$ - водород атомида биринчи Бор орбитаси радиуси.

$$R_{nl}(\rho) = N_{nl} e^{-\frac{Zr}{na}} \left(\frac{2Zr}{na} \right)^{n-1} + \dots \quad (14.10)$$

$n = 1$ да ЭНГ пастки квант ҳолат учун

$R_{10}(\rho) = N_{10} e^{-\frac{Zr}{a}}$ кўринишида аниқланади. $Z = 1$ – водород атоми, мос равишда $Z = 2$ - гелий иони ва $Z = 3$ - литийнинг иккиланган иони учун.

14.1. Масалалар ечиш учун намуналар.

14.1.1. Водород атомида $1s$ – сатҳдаги электроннинг майдоннинг классик чегараларидан ташқарида жойлашиш эҳтимоллигини ҳисобланг.

Ечиш.

Водород атомида $1s$ – сатҳдаги электроннинг эффектив потенциал энергияси ифодасини ёзамиз.

$$U_{ef} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (14.1.1.1)$$

Электроннинг энергияси

$$E = -\frac{\mu e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \quad (14.1.1.2)$$

Классик тасаввурларга асосан ҳаракат $E > U_{ef}$ шарт бажарилганда мумкин бўлади, яъни $0 \leq r \leq r^*$ соҳада ўринли, r^* қуйидаги муносабатдан топилади.

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^*} = -\frac{\mu e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \quad (14.1.1.3)$$

Бу тенгликдан $r^* = 2a = \frac{8\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu e^2}$, у ҳолда масала шартида талаб этилаётган

эҳтимоллик қуйидагича ҳисобланади.

$$W_{r>2a} = \frac{4}{a^3} \int_{2a}^{\infty} r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) dr = 13e^{-4} \approx 0,238 = 23,8\%$$

14.1.2 Водород атомида $1s$ – сатҳдаги электрон учун ядродан шу электронгача масофанинг ўртача қийматлари $\bar{r}, \overline{r^2}$ ларни ҳисобланг.

Ечиш .

$1s$ ҳолат сферик симметрия билан ҳарактерланади, яъни эҳтимоллик тақсимооти сферик “булут” кўринишида бўлади. $1s$ ҳолатда импульс моменти нолга тенг ва соф радиал ҳаракат содир бўлади.

$1s$ ҳолатда $\bar{r}, \overline{r^2}$ ларни ҳисоблаймиз. Даставвал шу ҳолатдаги хусусий функцияни нормаллаш, ёки N доимийни ҳисоблаш керак.

$1s$ ҳолатда жойлашган электроннинг радиал тўлқин функцияси қуйидагича ёзилади.

$$R(r) = N \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \quad (14.1.2.1)$$

Нормаллаш шарти . $\int_0^{\infty} |R(r)|^2 dV = 1$, бу ерда $dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$

$$\int_0^{\infty} \left| N \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \right|^2 dV = 1$$

$$|N|^2 \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = |N|^2 4\pi \int_0^{\infty} r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) dr \quad (14.1.2.2)$$

Бу интегрални ҳисоблашда қуйидаги умумлашган интегралдан фойдаланамиз.

$$I_n = \int_0^{\infty} r^n \exp(-\alpha r) dr, \quad (14.1.2.3)$$

$$\text{бу ерда } \alpha = \frac{2}{a}$$

Ушбу типдаги умумлашган интеграллар математикада ҳисобланган ва натижалари қўлланмаларда берилган.

$$I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \quad (14.1.2.4)$$

Ҳисобланиши керак бўлган интеграл юқоридаги формула асосида ҳисобланади.

$$\int_0^{\infty} r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) dr = I_2 = \frac{2}{\alpha^3} = \frac{2a^3}{2^3} = \frac{a^3}{4}$$

Натижада нормировка коэффициентини фазовий коэффициентни ҳам эътиборга олган ҳолда қуйидагича ёзамиз.

$$N = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}}$$

Нормаллашган ҳусусий функция

$$\psi = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \quad (14.1.2.5)$$

Шу формуладан фойдаланиб ўртача катталиклар $\bar{r}, \overline{r^2}$ ларни ҳисоблаймиз.

$$\bar{r} = \frac{1}{\pi a^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} r \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) r^2 dr = \frac{4}{a^3} \int_0^{\infty} r^3 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) dr = \frac{4}{a^3} I_3 = \frac{4}{a^3} \frac{6}{\alpha^4} = \frac{4}{a^3} 6 \frac{a^4}{16} = \frac{3}{2} a$$

Демак $\bar{r} = \frac{3}{2} a$, агар биринчи Бор орбитаси радиуси $a = 0,529 \cdot 10^{-10}$ м.

эканлигини эътиборга олсак, $\bar{r} = 0,793 \cdot 10^{-10}$ м. эканлиги келиб чиқади..

Энди $\overline{r^2}$ ни ҳисоблаймиз.

$$\overline{r^2} = \frac{1}{\pi a^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) r^2 dr = \frac{4}{a^3} \int_0^{\infty} r^4 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) dr = \frac{4}{a^3} I_4 = \frac{4}{a^3} \frac{24}{\alpha^5} = \frac{4}{a^3} 24 \frac{a^5}{32} = 3a^2$$

Демак $\overline{r^2} = 3a^2$, агар биринчи Бор орбитаси радиуси $a = 0,529 \cdot 10^{-10}$ м. эканлигини эътиборга олсак, $\overline{r^2} = 1,587 \cdot 10^{-10}$ м. эканлиги келиб чиқади.

14.1.3 Водород атомида $1s$ – сатҳдаги электрон учун ядродан шу электронгача тескари масофа $\frac{1}{r}$ нинг ўртача қийматини ҳисобланг.

Ечиш.

Бу масалани олдинги масалани ишлаш усулидан фойдаланиб осонгина ҳал этамиз.

$$\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{\pi a^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\infty \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) r^2 dr = \frac{4}{a^3} \int_0^\infty r \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) dr = \frac{4}{a^3} I_1 = \frac{4}{a^3} \frac{1}{\alpha^2} = \frac{4}{a^3} \frac{a^2}{4} = \frac{1}{a}$$

Демак $\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{a}$, агар биринчи Бор орбитаси радиуси $a = 0,529 \cdot 10^{-10}$ м. эканлигини

этиборга олсак, $\frac{1}{r} = 1,89 \cdot 10^{-10} \text{ м}^{-1}$. эканлиги келиб чиқади.

14.1.4 Водород атомида $1s$ – сатҳдаги электрон учун потенциал ва кинетик энергиянинг ўртача қийматини ҳисобланг.

Ечиш

Бу масала ҳам 2 ва 3 масаланинг ечиш усулидан фойдаланиб ҳал этилади.

Потенциал энергия формуласи $U = -\frac{e^2}{r}$ эканлигидан ўртача потенциал энергия

Ўртача потенциал энергия $\bar{U} = -\left(\frac{e^2}{r}\right)$ кўринишида ёзилади, 14.1.3.-масала

ечимига асосан $\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{a}$ эканлигидан $\bar{U} = -\left(\frac{e^2}{a}\right)$, 1-Бор орбитаси радиуси $a = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$

эканлигини этиборга олсак $\bar{U} = -\left(\frac{e^2}{a}\right) = -\frac{e^2 \mu e^2}{\hbar^2} = -\frac{\mu e^4}{\hbar^2} = 2E_{1s}$ га тенглиги келиб

чиқади.

Тўла энергиянинг ўртачаси $E = \bar{T} + \bar{U}$ эканлигидан кинетик энергиянинг ўртачаси $T_{1s} = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2}$ эканлиги келиб чиқади.

14.1.5 Водород атомининг s – сатҳда турғунлигини исботланг.

Ечиш

Ушбу масалани $1s$ сатҳ учун исботлаймиз, фараз қиламиз электрон ядродан ўртача a га тенг масофада жойлашган бўлсин, ҳолатнинг ноаниқлиги

$\Delta r = \frac{a}{2}$ бўлсин. Гейзенбергнинг ноаниқлик муносабатидан $\frac{1}{2} a \Delta p_r \geq \frac{\hbar}{2}$ ундан

$$\Delta p_r \geq \frac{\hbar}{a}$$

$\frac{(\Delta p_r)^2}{2\mu}$ катталиқ энг камида T_{1s} тартибида бўлади.

$$\frac{(\Delta p_r)^2}{2\mu} \geq \frac{\hbar^2}{2\mu a^2}, \quad a = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} \text{ ифодадан фойдалансак}$$

$$\frac{(\Delta p_r)^2}{2\mu} \geq \frac{\mu e^4}{2\hbar^2} \text{ келиб чиқади.. Энди } T_{1s} = -E_{1s} = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2} \text{ ифодани ишлатамиз}$$

$$\frac{(\Delta p_r)^2}{2\mu} \geq T_{1s}$$

$T_{1s} = E_{1s}$ ва E_{1s} водород атомидаги биринчи Бальмер сатҳи энергияси. Демак ҳолатнинг ноаниқлиги электрон жойлашган “сфера”нинг радиусига боғлиқ ва $\frac{a}{2}$ дан кичик бўлаолмайди. Масала исботланди.

14.1.6 Водородсимон атом марказида $1s$ сатҳдаги электрон ҳосил қилган ўртача электростатик потенциални аниқланг.

Ечиш

$1s$ сатҳда электрон булутидаги электр зарядининг ҳажмий зичлигини электродинамикага асосан қуйидагича ҳисоблаймиз.

$$\rho(r) = e|\psi_{100}(r)|^2$$

$$\text{Бу ерда } \psi_{1s}(r) = \psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} \exp\left(-\frac{r}{r_1}\right), \quad \left(r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{Z\mu e^2}\right)$$

$$\text{Бу ҳолда } \varphi_0 = \int_0^\infty \frac{\rho(r)}{4\pi\epsilon_0 r} 4\pi r^2 dr = \int_0^\infty \frac{\frac{e}{\pi r_1^3} \exp\left(-2\frac{r}{r_1}\right)}{4\pi\epsilon_0 r} 4\pi r^2 dr = \int_0^\infty \frac{er \exp\left(-\frac{r}{r_1}\right)}{\pi\epsilon_0 r_1^3} dr$$

14.1.2.-масаладаги умумлашган интеграл формуласидан $n=1$ учун ҳисобласак ва r_1 қицматини қўйсак қуйидаги натижани оламиз. $\varphi_0 = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r_1}$.

14.1.7 Водород атомининг асосий ҳолатида ядро ва электрон томонидан ҳосил қилинаётган майдон электростатик потенциалининг ўртача қийматини аниқланг.

Ечиш

“Электрон булут” нинг ихтиёрий $\vec{r}$ нуқтада ҳосил қилаётган ўртача потенциали $\varphi_e(r)$ Пуассон тенгламасининг сферик-симметрик ечими сифатида аниқланади.

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(r\varphi_e) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$$

Бу ерда электр заряди зичлиги қуйидаги формула билан аниқланади.

$$\rho(r) = e|\psi_{1s}|^2$$

Бу тенгламани икки марта интеграллаб қуйидагини аниқлаймиз.

$$\varphi_e(r) = \frac{e_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a} \right) \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) + \frac{B}{r} + A, \text{ бу ерда } e = -e_0$$

Доимийларни $\varphi_e(\infty) = 0$, $\varphi_e(0)$ эса чекли деб танлаймиз.

У ҳолда $A = 0, B = -\frac{e_0}{4\pi\varepsilon_0}$, топилган ифодага ядро майдони потенциали

$\varphi_{ya} = \frac{e_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$ ни қўшамиз., натижада қуйидаги ифодани оламиз.

$$\varphi(r) = \frac{e_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a} \right) \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$$

14.2 Масалалар

14.2.1 Водород атоми 1s ҳолатда жойлашган электроннинг энергиясини ўртача қийматини ва ўртача квадратик тезлигини топинг.

14.2.2 Водород атомида ядро билан 1s ҳолатдаги электрон орасидаги масофа учун $\vec{r}, \vec{r}^2$ катталикларни ҳисобланг.

14.2.3 2s -ҳолатда Шредингернинг радиал тенгламасининг ечимини топинг.

14.2.4 $n = 4$ ҳол учун ℓ ва m ларнинг мумкин бўлган қийматини топинг.

14.2.5 Водородсимон атомларда 2p ҳолатдаги электронлар учун энг катта эҳтимолли масофани ҳисобланг.

14.2.6 Водородсимон атомларда 1s ҳолатдаги электронлар учун энг катта эҳтимолли масофани ҳисобланг.

14.2. 7 1s ҳолатда Шредингернинг радиал тенгламасининг ечимини топинг.

14.2. 8 $n = 3$ ҳол учун ℓ ва m ларнинг мумкин бўлган қийматини топинг.

14.2. 9 Водород атомида 1s электрон учун $(\Delta r)^2$ ни ҳисобланг.

15. Водородсимон атомларнинг тўлқин функцияси.

Спектрал сериялар

$U(\vec{r})$ марказий симметрик майдонда сферик координаталар системасида Шредингер тенгламаси куйидагича ифодаланади.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \varphi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - U(\vec{r}) - \frac{\vec{M}^2}{2mr^2} \right] \varphi(\vec{r}) = 0 \quad (15.1)$$

Бу тенгламада шзгарувчилар ажралади ва $\varphi(\vec{r})$ ыуйидагича ёзилади.

$$\varphi(\vec{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \alpha) \quad (15.2)$$

Бу ерда орбитал ва магнит квант сонлари куйидаги қийматларни қабул қилади. $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$. $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$

Импульс моментининг ҳар қил қийматларига мос келувчи системанинг ҳолати куйидагича белгиланади. S- ҳолат ($l = 0$) , p- ҳолат ($l = 1$) . Шар функциясининг s-, p-, d,— ҳолатлар тўғрисидаги маълумотлар жадвалда акс эттирилган.

Ҳолатлар	l	m	$Y_{lm}(\theta, \alpha)$
s	0	0	1
p	1	0	$\cos \theta$
	1	± 1	$\pm \sin \theta \exp(\pm i\alpha)$
d	2	0	$3 \cos^2 \theta - 1$
	2	± 1	$\pm \sin \theta \cos \theta \exp(\pm i\alpha)$
	2	± 2	$\sin^2 \theta \exp(\pm i2\alpha)$

Радиал Шредингер тенгламасининг ечими радиал тўлқин функция $R_{nl}(r)$ ҳисобланади.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r R(r) + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - U(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \right] R(r) = 0 \quad (15.3)$$

() тенглама электрон тўлқин функциясининг радиал қисми учун ёзилган,

$$U = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{h^2} \frac{1}{n^2} \quad (15.4)$$

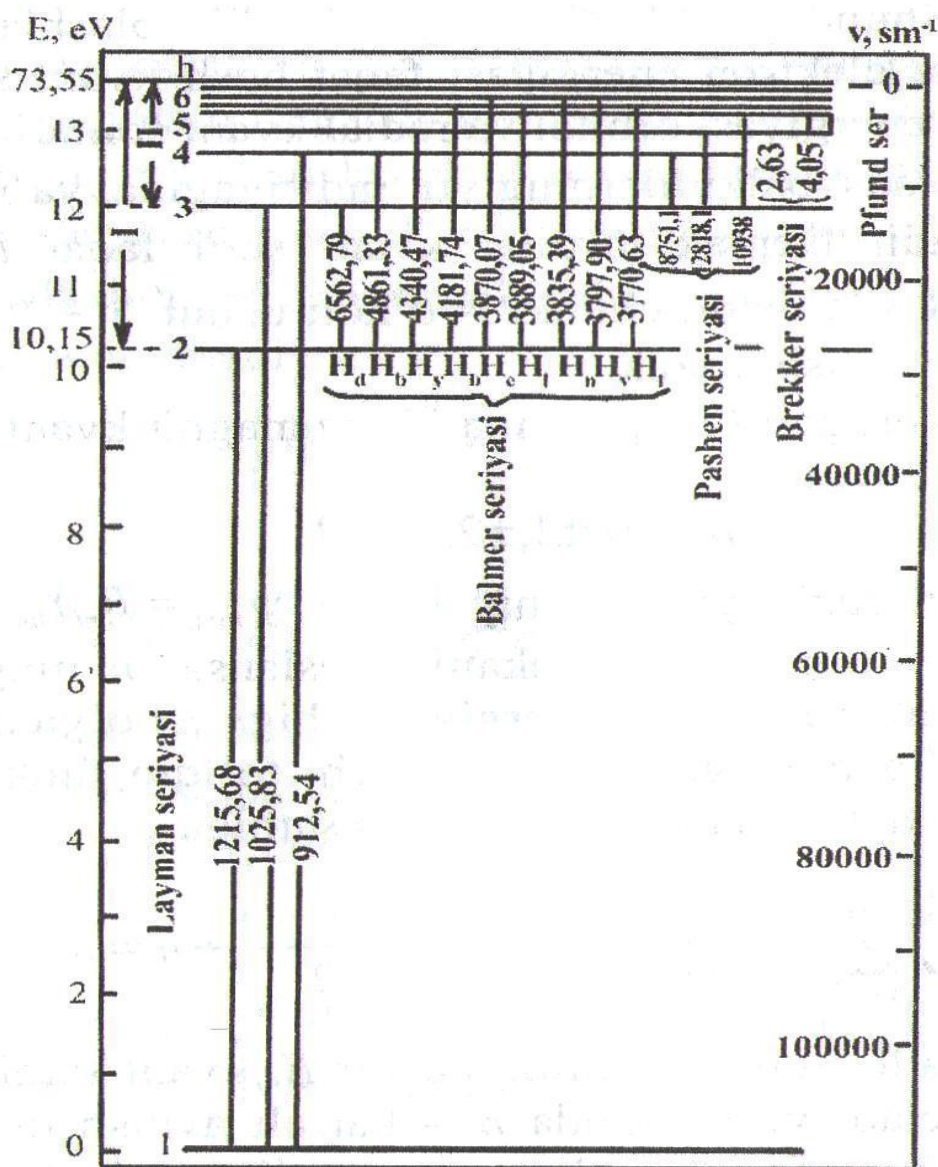
$R_{nl}(r)$ нинг нормировкаловчи кўпайтувчига аниқликда ҳисобланган қийматлари жадвалда келтирилган.

Ҳолатлар	n	l	$R(\rho)$
1s	1	0	$\exp(-\rho)$
2s	2	0	$(2 - \rho)\exp\left(-\frac{\rho}{2}\right)$
2p	2	1	$\rho\exp\left(-\frac{\rho}{2}\right)$
3s	3	0	$(27 - 18\rho + 2\rho^2)\exp\left(-\frac{\rho}{3}\right)$
3p	3	1	$\rho(6 - \rho)\exp\left(-\frac{\rho}{3}\right)$
3d	3	2	$\rho^2\exp\left(-\frac{\rho}{3}\right)$

Бу ерда $\rho = \frac{r}{a}$ = Биринчи Бор орбитаси радиуси.

Водородсимон атомларнинг спектрал сериялари қуйидаги расмда тасвирланган.

$$\omega_{mn} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (15.5.)$$



18-расм. Водород атоми спектри.

15.1 Масалалар ечиш намуналари

15.1.1 $U(r)$ потенциалли марказий симметрик куч майдонида ҳаракатланувчи заррача

$$\varphi(\vec{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \alpha)$$

ҳолатда жойлашган. p ва d ҳолатларда шар функциялари учун нормировка коэффициентларини ҳисобланг.

Ечиш.

Юқорида берилган жадвалдаги маълумотларга асосланиб масалада топилиши керак бўлган катталикларни аниқлаймиз.

$l = 1, m = 0$ ҳолат учун ҳисоблаймиз. $Y_{10}(\theta, \alpha) = C \cos \theta$. C- коэффициент

нормировка шартидан топилади. $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$

Худди шундай ҳолда $Y_{1,\pm 1} = \pm \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \exp(\pm i\alpha)$

, $Y_{2,\pm 1} = \pm \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \exp(\pm i\alpha) \sin \theta \cos \theta$

$$Y_{2,\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \exp(\pm 2i\alpha) \sin^2 \theta$$

15.1.2 r – радиусли чексиз деворли сферик симметрик потенциал чуқурликда жойлашган μ –массали заррачанинг p – ($l = 1$) ҳолатини ифодаловчи тўлқин функцияни аниқланг. Бу ҳолатда энергетик сатҳларни

$tgkr = kr$ бу ерда $k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$ тенглама билан ифодаланишини исботланг.

Ечиш.

μ –массали заррачанинг p – ($l = 1$) ҳолатини ифодаловчи тўлқин функциянинг радиал қисми $R_1(r)$ учун Шредингер тенгламаси

$$\frac{d^2 R_1(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_1(r)}{dr} + \left(k^2 - \frac{2}{r^2}\right) R_1(r) = 0 \quad (15.1.2.1)$$

Бу ерда $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu E}$ га тенг.

μ –массали заррачанинг s – ($l = 0$) ҳолатини ифодаловчи тўлқин функциянинг радиал қисми $R_0(r)$ учун Шредингер тенгламасини дифференциаллаймиз.

$$\frac{d^3 R_0(r)}{dr^3} + \frac{2}{r} \frac{d^2 R_0(r)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{2}{r^2}\right) R_0(r) = 0 \quad (15.1.2.2)$$

() ва () тенгламаларни ўзаро таққослаймиз.

$$R_1(r) = \frac{dR_0(r)}{dr} = \frac{A}{r^2} (kr \cos kr - \sin kr) \quad (15.1.2.3)$$

μ – массали заррачанинг $p - (l = 1)$ ҳолатини ифодаловчи тўлқин функцияларнинг қуйидаги кўринишини топамиз

$$\varphi(r, \theta) = A_1 \frac{\cos \theta}{r^2} (kr \cos kr - \sin kr) \quad (15.1.2.4)$$

$$\varphi(r, \theta, \alpha) = \pm A_2 \frac{\sin \theta}{r^2} (kr \cos kr - \sin kr) \exp(\pm i\alpha) \quad (15.1.2.5)$$

Бу ифодаларда A_1, A_2 лар нормировка шартидан аниқланади.

$R_1(r) = \frac{A}{r^2} (kr \cos kr - \sin kr)$ чегаравий шартлардан энергетик сатҳларнинг $\operatorname{tg} kr = kr$ тенгламасини топамиз.

15.2 Масалалар

15.2.1 Водород атомида $1s, 2s, 3p$ ҳолатларида тўлқин функцияларнинг нормировка коэффициентларини жадвалдаги маълумотлардан фойдаланиб ҳисобланг.

15.2.2 Водород атомидаги электрон $\varphi(r) = A(1 + ar) \exp(-ar)$ сферик – симметрик тўлқин функция ифодаланадиган стационар ҳолатда жойлашган.

Шредингер тенгламаси ёрдамида a, α доимийларни ва электроннинг энергиясини ҳисобланг.

15.2.3 Водород атомидаги $1s$ электроннинг классик майдон чегараларидан ташқарида жойлашиш эҳтимоллигини аниқланг.

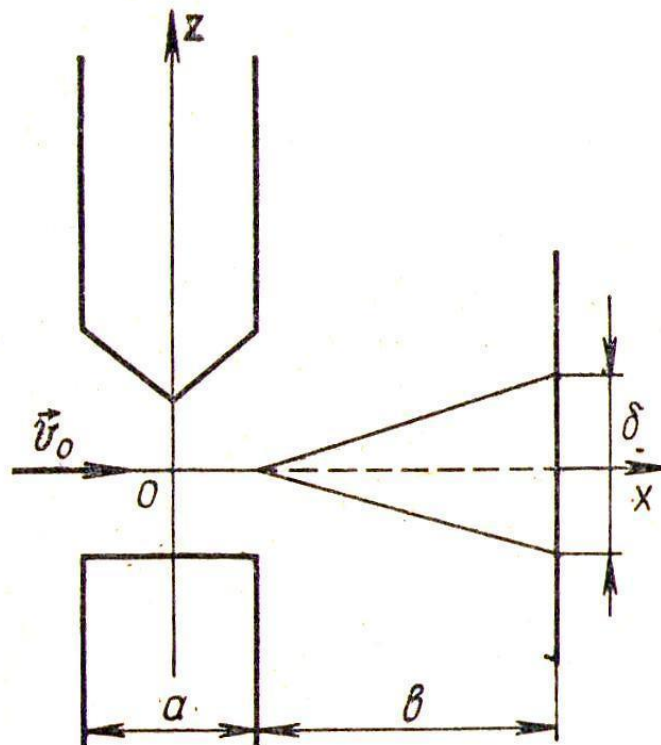
15.2.4 Водородсимон атомда $2p, 3d$ сатҳларда жойлашган электронларнинг ядродан энг катта эҳтимолли масофасини ҳисобланг.

15.2.5 Водородсимон атомда $1s$ электроннинг атом марказида ҳосил қилган ўртача электростатик потенциални аниқланг.

16. Электроннинг спини, спин операторлари ва спин тўлқин функциялари

Спин -заррачалар ҳолатини ифодаловчи, классик ўхшатмаси бўлмаган, заррачанинг ички хусусиятларига боғлиқ бўлган тўртинчи квант сон киритилади. Электроннинг спини $\frac{\hbar}{2}$ га тенг. Электроннинг спини

мавджудлигини тасдиқловчи Штерн-Герлах тажрибаси схематик чизмаси қуйида келтирилган.



19-расм.

Квант механикасидаги ҳар қандай динамик катталиқ каби спин ҳам ўз операторига эга.

Спин оператори - $\hat{S}$ ва унинг координата ўқлари бўйича проекциялари операторлари $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ ҳам квант механикасининг бошқа операторлари каби ўзи-ўзига комплекс қўшма ва чизикли оператор ҳисобланади.

Спин операторининг кўриниши

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \quad (16.1)$$

Бу ерда $\vec{\sigma}$ - векторнинг ташкил этувчилари қуйидагича бўлади:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_x, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_y, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_z, \quad (16.2)$$

Электроннинг хусусий импульс момента (спини) унинг орбитал импульс моментига ўхшаш ва $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$, операторлар ҳам $\hat{M}_x, \hat{M}_y, \hat{M}_z$ операторларга каби ўзаро коммутацияланмайди.

$$\hat{S}_x \hat{S}_y - \hat{S}_y \hat{S}_x = i\hbar \hat{S}_z; \hat{S}_y \hat{S}_z - \hat{S}_z \hat{S}_y = i\hbar \hat{S}_x, \hat{S}_z \hat{S}_x - \hat{S}_x \hat{S}_z = i\hbar \hat{S}_y \quad (16.3)$$

$\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ - икки қаторли матрица, электрон спинининг проекциясининг икки хил қийматига мос келади ва спин матрицалари, бу матрицалар ҳам диагональ матрица ва Паули матрицаларига мос келади.

Спин оператори квадрати қуйидагича аниқланади.

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (16.4)$$

Спин оператори хусусий қиймати. $l_s = \frac{1}{2}$ - спин квант сони.

$$S = \hbar \sqrt{l_s(l_s + 1)} \quad (16.5)$$

Электроннинг тўлқин функцияси координаталар, вақт ва спинга боғлиқ.

$$\psi = \psi(x, y, z, \vec{s}, t) \quad (16.6)$$

Спиннинг икки хил қийматга эгалигидан

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi\left(x, y, z, +\frac{\hbar}{2}, t\right) \\ \psi_2 &= \psi\left(x, y, z, -\frac{\hbar}{2}, t\right) \end{aligned} \quad (16.7)$$

Квант механикасида бу икки функция умумлаштирилган ҳолда бир устунли, ўз-ўзига кўшмаси ψ^+ эса бир қаторли матрица кўринишида ёзилади.

$$\psi = \begin{vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{vmatrix}, \quad \psi^+ = \begin{vmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* \end{vmatrix} \quad (16.8)$$

Спин-орбитал ўзаро таъсир кучсиз бўлганда ҳолат функцияси фазовий ва спин функциялари кўпайтмаси кўринишида ёзилади:

$$\psi_i = \psi(x, y, z, t) \varphi_i(\vec{s}) \quad (16.9)$$

Спин оператори хусусий функциялари ва хусусий қийматлари орасидаги боғланиш тенгламаси

$$\hat{S}_i \varphi_i = S_i \varphi_i \quad (i = x, y, z) \quad (16.10)$$

φ_i эса унинг S_i кийматига мос келган хусусий функция- икки каторли бир устунли матрица:

$$\varphi(\vec{S}) = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} \quad (16.11)$$

Электрон спинга эга бўлганлиги учун магнит моментига ҳам эга, бу ички хусусиятни ҳисобга олувчи квант механика тенгламаси **Паули тенгламаси**. Шредингер тенгламасидан фойдаланиб келтириб чиқарилади ҳамда

матрица кўринишидаги тенгламаларидан иккита қуйидаги оддий тенгламалар системасидан иборат:

$$\begin{aligned} \left[E - \hat{H}_0 - \mu_0 B_z \right] \psi_1 - \mu_0 (B_x - iB_y) \psi_2 &= 0, \\ \left[E - \hat{H}_0 + \mu_0 B_z \right] \psi_2 - \mu_0 (B_x + iB_y) \psi_1 &= 0 \end{aligned} \quad (16.12)$$

16.1. Масалалар ечиш намуналари

16.1.1 Электрон спинининг ихтиёрий йўналишга проекцияси квадратини ҳисобланг.

Ечиш.

Электроннинг спин оператори Паули оператори орқали қуйидагича ёзилади.

$$\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2} \hat{\vec{\sigma}} \quad (16.1.1)$$

Бу ерда $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ - Паули матрицалари ва улар қуйидаги шартни қаноатлантиради.

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = \delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (16.1.2)$$

$$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y = -\hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x, \quad \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z = -\hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_y, \quad \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x = -\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_z$$

Спинининг ихтиёрий $\vec{a}$ йўналишга проекцияси квадрати қуйидагига тенг.

$$\left(\frac{\hat{S}}{a}\vec{a}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{4a^2} \left(\vec{\sigma}\vec{a}\right)^2 =$$

$$\frac{\hbar^2}{4a^2} (\hat{\sigma}_x a_x + \hat{\sigma}_y a_y + \hat{\sigma}_z a_z) X (\hat{\sigma}_x a_x + \hat{\sigma}_y a_y + \hat{\sigma}_z a_z) = \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (16.1.3)$$

Ушбу ҳисоблашлар асосида қуйидаги натижани ёзамиз.

$$S_a^2 = \frac{1}{4} \hbar^2 \quad (16.1.4)$$

16.1.2 Триплет ва синглет ҳолатдаги иккита заррачанинг спинларининг скаляр кўпайтмасини ҳисобланг. Заррачанинг спини $\frac{\hbar}{2}$ га тенг.

Ечиш.

Икки заррачанинг спин операторлари йиғиндисининг квадратини ҳисоблаймиз.

$$\hat{S}^2 = (\hat{S}_1 + \hat{S}_2)^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2(\hat{S}_1 \hat{S}_2) \quad (16.2.1)$$

Триплет ҳолатда ҳам, синглет ҳолатда ҳам $\hat{S}^2, \hat{S}_1^2, \hat{S}_2^2$ операторлар аниқ қийматга эга. Спин квадрати операторининг хусусий қиймати

$$\hat{S}^2 = \hbar^2 S(S+1), \text{ триплет ҳолатда } S = 1, \text{ синглет ҳолатда } S = 0$$

$$\hat{S}_1^2 = \hat{S}_2^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \quad (16.2.2)$$

$\hat{S}_1 \hat{S}_2 = \frac{1}{4} \hbar^2$ - Бу триплет ҳолатдаги натижа. $\hat{S}_1 \hat{S}_2 = -\frac{3}{4} \hbar^2$ эса синглет ҳолатдаги натижа.

16.2 Масалалар

16.2.1 Паули матрицалари билан аниқланадиган операторларнинг хусусийи ва хусусий қийматларини аниқланг.

16.2.2 Асосий ҳолатдаги водород атомининг магнит моментини ҳисобланг.

16.2.3 Паули матрицаларидан фойдаланиб электрон спинининг проекциялари операторининг хусусий қийматлари ва хусусий функцияларини аниқланг.

16.2.4 Паули матрицаларининг бир-бири билан антикоммутатив эканлиги ва ҳар бир матрицанинг квадрати бирга тенглигини исботланг.

17. Заррачаларнинг айнан ўхшашлиги. Бозе-Эйнштейн

ва Ферми-Дирак заррачалари

Заррачаларнинг айнан ўхшашлик принципи микрооламни ўрганишдаги муҳим масалалардан бири,. Айнан ўхшаш заррачалар заряди, массаси, спини ва бошқа катталиклари бир хил бўлган заррачалардир..

N та айнан бир хил заррачаларнинг Гамильтон оператори куйидагича ёзилади.

$$\hat{H}(q_1, q_2, \dots, q_N, t) = \sum_{k=1}^N \left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_k^2 + U(q_k, t) \right] + \sum_{k>j=1}^N W(q_k, q_j) \quad (17.1)$$

Системада k заррача билан j - заррача ўрни алмаштирилса тенгламанинг ўнг томонидаги сумма ўзгармайди, чунки бундай ўрин алмаштириш фақат йиғиндидаги ҳадларнинг ўрнини алмаштиради. (17.1) да N та заррачанинг гамильтониани ($\hat{H}$ - оператор) заррачаларнинг ўрни алмашганида, қийматини ўзгартирмайди

$$\hat{H}(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_j, \dots, q_N, t) = \hat{H}(q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_k, \dots, q_N, t) \quad (17.2)$$

Айнан бир хил заррачалар гамильтониани шу зарралар системасидаги заррачаларнинг ихтиёрий жуфтининг ўрнини алмаштиришга нисбатан инвариант (симметрик) дир. Заррачалар ўринларини алмаштириш $-\hat{P}_{kj}$ - операторини киритамиз. (17.2) га асосан $\hat{P}_{kj}$ билан Гамильтон оператори $\hat{H}$ билан ўзаро коммутатив.

$$\hat{P}_{kj} \hat{H}(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_j, \dots, q_N, t) = \hat{P}_{kj} \hat{H}(q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_k, \dots, q_N, t) \quad (17.3.)$$

ечими бўла олади.

Ўрин алмаштириш оператори $\hat{P}_{kj}$ ёрдамида тенгликни қуйидагича ёзамиз: $\hat{P}_{kj} \psi(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_j, \dots, q_N, t) = \lambda \psi(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_j, \dots, q_N, t)$

Ўрин алмаштириш оператори хусусий қийматлари $\lambda = \pm 1$ га тенг.

Ўрин алмаштириш оператори таъсирида ишорасини ўзгартирувчи ҳолат функциялари антисимметрик ҳолат функциялари дейилади.

$$\hat{P}_{kj} \psi_a(t) = -\psi_a(t) \quad (17.4)$$

Ишорасини ўзгартирмайдиган ҳолат функциялари симметрик функциялар дейилади.

$$\hat{P}_{kj} \psi_c(t) = \psi_c(t) \quad (17.5)$$

Микроолам заррачалари икки хил: антисимметрик ва симметрик ҳолатларининг фақат биттасида бўлиши мумкин.

Спини $\frac{\hbar}{2}$ га бутун қаррали бўлган айнан бир хил заррачалар Ферми ва Дирак статистикасига бўйсинади ва Ферми – Дирак зарралари ёки фермионлар дейилади, уларнинг ҳолати антисимметрик бўлади. Фермионлар Паули принципига бўйсинади, яъни битта квант ҳолатда фермионлардан фақат битта заррача бўлиши мумкин ёки умуман бўлмаслиги мумкин.

$$n_{FD} = \frac{n_0}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) + 1} \quad (17.6)$$

Спини $\hbar$ га бутун қаррали бўлган айнан бир хил заррачалар Бозе ва Эйнштейн статистикасига бўйсинади ва Бозе-Эйнштейн зарралари ёки бозонлар дейилади, уларнинг ҳолати симметрик бўлади.

$$n_{BE} = \frac{n_0}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} \quad (17.7)$$

Бозонларнинг ҳолатлар бўйича тақсимооти эса Паули принципига амал қилмайди, битта ҳолатда бозонлардан бир нечта бўлиши мумкин.

Фермионлар ва бозонларнинг бу хусусиятлари уларнинг ҳолат функциясида ҳам акс этиши керак.

Шундай қилиб, микрооламда заррачалар ҳолати учта фазовий, битта ички эркинлик даража сонига эга бўлиб, айнан бир хил заррачалар фақат битта антисимметрик ёки симметрик ҳолат функцияси билан ифодаланади.

17.1 Масалалар ечиш намуналари

17.1.1 Система спини $S = \frac{1}{2}$ га тенг бўлган иккита заррачадан иборат.

Агар системанинг натижавий спини S ҳаракат интегралли бўлса, системанинг Гамильтон оператори спинларга нисбатан симметрик бўлишини исботланг.

Ечиш

Тўла спин квадрати оператори $\hat{S}^2$ учун ифодани спин ўзгарувчиларининг ўрнини алмаштириш оператори $\hat{P}_{12}$ орқали ёзамиз.

$$\hat{S}^2 = \frac{3}{4} + \hat{P}_{12} \quad (17.1.1.1)$$

$\hat{H}$ – оператор масала шартига асосан спинларга нисбатан симметрик бўлганлигидан унинг $\hat{S}^2$ билан коммутативлигини ёзиш мумкин.

$$\hat{S}^2 \hat{H} = \hat{H} \hat{S}^2 \quad (17.1.1.1)$$

$\hat{S}^2$ – нинг вақтга ҳам боғлиқ эмаслигидан тўла спиннинг катталиги ҳаракат интегралли ҳисобланади.

17.1.2 Спини $s = 0$ иккита айнан бир ҳил бозон $U = k \frac{(r_1 - r_2)^2}{2}$ кўчринишдаги потенциал билан боғланган. Системанинг энергетик спектрини аниқланг.

Ечиш

Нисбий ҳаракат учун Шредингер тенгламаси сферик осциллятор учун Шредингер тенгламаси билан мос келади. Сферик осциллятор учун Шредингер тенгламаси ечими қуйидагича.

$$E_n = \hbar \omega \left(N + \frac{3}{2} \right) \quad (17.1.2.1)$$

$$N = n_1 + n_2 + n_3 \quad \text{Бу ерда } \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$\varphi(n_1 n_2 n_3) = \varphi_{n_1}(x) \varphi_{n_2}(x) \varphi_{n_3}(x) \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Олинган ечимлар заррачаларнинг квантомеханик айнийлик шартларини ҳисобга олаолмайди. Бу шартларга асосан спини $s = 0$ бўлган иккита айнан бир ҳил бозонларнинг тўлқин функциялари заррачаларнинг координаталарини алмаштиришга нисбатан симметрик бўлиши керак.

Бундай алмаштиришда $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ишорасини алмаштиради, осцилятор учун хусусий функцияларнинг жуфтлигини ҳисобга олсак коэффициентга кўпайтириш керак бўлади. Энергетик спектр () фақат $N = 0, 2, 4, \dots$ ларда ўринли бўлади.

17.2 Масалалар

17.2.1 Спини S га тенг бўлган иккита бир ҳил заррачадан иборат системанинг ҳар иккала заррачанинг спинга боғлиқ ўзгарувчиларини алмаштиришга нисбатан симметрик ва антисимметрик бўлган ҳар ҳил спинли ҳолатларининг сонини топинг.

17.2.2 Спинлари $S = 0$ бўлган ўзаро кучсиз таъсирлашувчи учта бир ҳил бозонлар квант сонлари n_r ва l бир ҳил, ундан ташқари $l = 1$ қандайдир марказий майдонда стационар ҳолатда жойлашган. Қаралаётган системанинг ҳар ҳил ҳолатлар сонини аниқланг.

17.2.3 Спинлари $S = 0$ бўлган ўзаро кучсиз таъсирлашувчи учта бир ҳил бозонлар квант сонлари n_r ва l бир ҳил, ундан ташқари $l = 1$ қандайдир марказий майдонда стационар ҳолатда жойлашган. Қаралаётган системанинг учта бозоннинг импульс моменти йиғиндисининг нолга тенг бўлмаслигини исботланг..

17.2.4 Иккита бир ҳил бозонларнинг спинлари S , иккита бозоннинг импульс моменти йиғиндиси L га тенг. Қаралаётган системада иккита бозоннинг спинлари йиғиндиси қандай қийматлар қабул қилади.

18. Д.И. Менделеевнинг элементлар даврий системаси

Мураккаб атомлар электрон қобикларини сифат жиҳатдан тушунтирадиган содда назария - водородсимон атомлар назария бўлиб, бу назарияга асосан атомда ҳар бир электроннинг ҳолати n, l, m, m_s квант сонларининг қийматлари билан аниқланади.

Атом ядроси атрофида ҳаракатланаётган электронларнинг энергетик сатҳлари бош квант сони n ни аниқлайди, n -нинг ҳар бир қийматига мос ҳолатлар электрон қобиклар дейилади:

Электрон қобиклар орбитал квант сони l нинг қийматига қараб қобикчаларга бўлинади, улар ҳолатлар дейилади.

Ҳар бир ҳолат магнит квант сонининг қийматига қараб $2l+1$ «каррали турланади, ҳар бир сатҳ эса электрон спинига қараб яна икки каррали турланади. Ҳар бир ҳолатдаги электронларнинг максимал сони маълум формулалар ёрдамида аниқланади.

Паули принципига биноан n, l, m, m_s нинг аниқ бир қийматига фақат битта электрон тўғри келади. $m_s = \pm \frac{1}{2}$, бўлган қилувчи иккита электрон мос келади. берилган орбитал квант сонининг ҳар бир қийматига (яъни ҳар бир ҳолатга) бир-биридан m ва m_s квант сонлари билан фарқ қилувчи $N_l = 2(2l+1)$ электрон тўғри келади. Ҳар бир электрон қобикдаги электронлар бир-бирларидан албатта, l, m ва m_s квант сонлари билан фарқ қилиши керак. уларнинг умумий сони қуйидаги формула билан аниқланади:

$$N_n = \sum_{l=1}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2 \quad (18.1)$$

Шундай қилиб, идеал қонунга мувофиқ атом ядроси атрофида электронлар учун $1-\infty$ электрон қобиклар бўлиб, уларнинг ҳар бири $2n^2$ микдордаги ҳолатлардан иборат бўлади. Бу ҳолатларнинг электронлар билан тўлдирилиши қуйидаги учта принципга амал қилган ҳолда содир бўлади.

1. Энергиянинг минимумлик принципи. Бу принципга биноан электрон энг аввало кичик энергияли сатҳни тўлдиради. Маълумки, сатҳларнинг энергияси E_n электронларнинг ўзаро таъсирини эътиборга олмаганда, бош квант сони n – га қиймат бериш билан топилади:

$$E_n = -\frac{Z^2 R \hbar}{n^2} \quad (18.2)$$

Демак, электронлар дастлаб бош квант сонининг кичик қийматига мос (келган қобикларни тўлдиради. Қобик ичида эса орбитал квант сонининг кичик қийматларига мос келган ҳолатлардан ($s, p, d, f, \dots$) бошлаб электронлар билан тўлади.

2. Паули принципи. Бу принципга биноан ҳар бир атомда (у қанча мураккаб бўлмасин) тўртта квант сони бир ҳил бўлган иккита электрон бўлиши мумкин эмас.

3. Ҳунд қонуни. Бу қонунга биноан электронлар ҳар бир ҳолатни спинларнинг йиғиндиси максимум бўлишига интилиб жойлашади.

Водородсимон атомлар назарияси асосида даврий системадаги биринчи ва иккинчи даврдаги элементлар (атомлар) да электронлар тақсимоти тушунтирилади, лекин учинчи даврдаги элементларда электронлар тақсимотини тушинтираолмайди. Учинчи ва ундан катта даврлардаги элементларда электронлар тақсимоти Клечковский қонидаси асосида тушунтирилади.

Клечковский қонидасида атомда электрон қобикларнинг тўлиши бош квант сонидан ташқари орбитал квант сонини ҳам эътиборга олиб тушунтирилади.

Атомларда қобикларнинг электронлар билан тўлдирилиши $n+l$ нинг ортиб боришига ўрганилади. $n+l$ нинг ҳар бир қиймати алоҳида ҳолатни ифодалайди. Электронлар $n+l$ йиғиндисининг энг кичик қийматидан бошлаб тўлдирила бошлайди.

$n+l$ йиғинди группалари ичида бир ҳил қийматлилари ҳам учрайди. Бу ҳолда аввало энергетик нуқтаи назаридан бош квант сони кичик бўлган сатҳ тўлдирилиши керак.

Учинчи даврда $3s3p$ тўлгандан сўнг навбатда $n+l = 5$ ҳолат электронлар билан тўлмайди. Чунки ҳали тўлмаган $n+l = 4$ ҳолат мавжуд. Аммо у навбатдаги тўртинчи даврга тегишли.

Шунинг учун учинчи давр $3s^2 3p^6$ билан тугаб тўртинчи давр $4s$ нинг тўлдирилиши билан бошланади. $4s$ дан сўнг $n+l=5$ бўлган $4p$ ҳолат тўлиши керак эди.

Аммо $n+l=5$ бўлган учинчи даврга тегишли $3d$ ҳолат бўш қолган. Унинг бош квант сони эса $4p$ никидан кичик. Шунинг учун $4p$ ҳолатдан аввал илгари бўш қолган $3d$ электронлар билан тўлади, сўнгга $4p$ га навбат келади.

Шундай қилиб, жадвалдан кўринадики, сатҳларнинг электронлар билан тўлиш тартиби Клечковский қоида-сига мувофиқ кўрсатилади ва ҳар бир даврга тўғри келган электронлар сони тажрибада аниқланган натижага мос келади.

18. Масалалар

18.1 Нормал ҳолатларда *a)* K, L қобиклар, $3s$ ва $3p$ ҳолатлар (қобикчалар),

b) K, L, M қобиклар ва $4s, 4p, 4d, 5s$ ҳолатлар (қобикчалар) электронлар билан тўлдирилган атомлардаги электронлар сонини аниқланг.

18.2 Аргон ($Z=18$), криптон ($Z=36$), Цезий ($Z=55$) атомларнинг электрон конфигурациясини ёзинг.

18.3 Қуйидаги квант сонлари бир хил бўлган атомдаги электронларнинг максимал сонини ҳисобланг. *a)* n, l, m . *b)* n, l . *c)* n

18.4 Қуйидаги квант сонлари бир хил бўлган, тўлдирилган $n=4$ қобикдаги электронлар сонини аниқланг. *a)* $m_l = -1$, *b)* $m_l = +1, m_s = -\frac{1}{2}$

18.5 Учта эквивалент p –электронлардан тузилган системанинг мумкин бўлган ҳолатларини аниқланг.

18.6 Тўлдирилмаган ҳолатларда учта p - электронлари бўлган атомлар учун асосий термини Хунд қоида-си асосида аниқланг.

18.7 Қуйидагича тўлдирилмаган ҳолатга эга бўлган атомларнинг асосий термини Хунд қоида-си асосида аниқланг.

a) $n d^3$, *b)* $n d^5$, *c)* $n d^7$.

18.8 Қуйидаги учтадан эквивалент p –электронли системалар учун орбитал тўлқин функцияни аниқланг. *a)* асосий $4s$ ҳолатда.

18.9 Ключковский қойдаси асосида цезий ($Z = 55$) атоми учун электрон конфигурацияни ва электронларнинг қобиклар, ҳолатлар, сатҳлар бўйича тақсимотини ёзинг.

18.10 Ключковский қойдаси асосида палладий ($Z = 46$) атоми учун электрон конфигурацияни ва электронларнинг қобиклар, ҳолатлар, сатҳлар бўйича тақсимотини ёзинг.

19. Квант механиканинг тақрибий методлари.

Вариацион ҳисоб методи.

19.1 $U(x) = U_0 x^4$ потенциал майдонда заррачанинг асосий ҳолат энергиясини вариацион метод асосида тақрибий аниқланг. Мумкин бўлган функциялар сифатида $\varphi(x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2\beta^2}\right)$ функциядан фойдаланинг.

Ечиш.

Асосий ҳолат энергияси қуйидаги функционалнинг минимуми ҳисобланади.

$$\bar{E} = I(\varphi) = \int \varphi^* \hat{H} \varphi(x) dx \quad (19.1.1)$$

Масала шартда берилган мумкин бўлган функцияни нормаллаштирамиз.

$$A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{\beta^2}\right) dx = 1 \quad (19.1.2)$$

Бу типдаги интеграллар қуйидаги умумлашган интеграл орқали ҳисобланади.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \exp(-\alpha x^n) dx = \frac{2}{n} \alpha^{-\frac{m+1}{n}} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \quad (19.1.3)$$

(19.2) да $m = 0, n = 2$. Ҳисоблаш натижасида $A^2 \beta \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$$A^2 \beta \sqrt{\pi} = 1$$

$$A^2 = \frac{1}{\beta \sqrt{\pi}}$$

$$\varphi(x) = (\beta \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\beta^2}\right) \quad (19.1.4)$$

(19.1) ни ҳисоблаймиз. $\bar{E} = I(\varphi) = \int \varphi^* \hat{H} \varphi(x) dx \quad (19.1.5)$

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U_0 x^4 \quad (19.1.6)$$

$$\bar{E} = A^2 \int \exp\left(-\frac{x^2}{2\beta^2}\right) \left(-\frac{h^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U_0 x^4\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\beta^2}\right) dx \quad (19.1.7)$$

(19.7) интегрални $(\pm\infty)$ оралигида ҳисоблаймиз, ҳисоблашда (19.1.3) интегралнинг натижасидан фойдаланамиз.

$$\bar{E} = \frac{h^2}{4m\beta^2} + \frac{3}{4} U_0 \beta^4 \quad (19.1.8)$$

$\bar{E}$ -нинг минимумини $\bar{E}$ ни β нинг функцияси биринчи тартибли ҳосиласини ҳисоблаймиз ва нолга тенглаймиз.

$\frac{d\bar{E}}{d\beta} = 0$ тенгламани ечамиз ва β^2 ни аниқлаймиз.

$$\beta^2 = \left(\frac{h^2}{6mU_0}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (19.1.9)$$

$$E_0 = (\bar{E})_{min} = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} \frac{U_0 h^4}{m^2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (19.1.10)$$

19.2 $U(x) = \frac{m\omega^2}{2} x^2$ (бир ўлчамли гармоник осциллятор) потенциал энергияли майдонда заррачанинг асосий ҳолат энергиясини вариацион метод асосида аниқланг. Мумкин бўлган функциялар сифатида $\varphi(x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2\beta^2}\right)$ функциядан фойдаланинг.

Ечиш.

Асосий ҳолат энергияси қуйидаги функционалнинг минимуми ҳисобланади.

$$\bar{E} = I(\varphi) = \int \varphi^* \hat{H} \varphi(x) dx \quad (19.2.1)$$

Масала шартда берилган мумкин бўлган функцияни нормаллаштирамиз.

$$A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{\beta^2}\right) dx = 1 \quad (19.2.2)$$

Бу типдаги интеграллар қуйидаги умумлашган интеграл орқали ҳисобланади.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \exp(-\alpha x^n) dx = \frac{2}{n} \alpha^{-\frac{m+1}{n}} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \quad (19.2.3)$$

(19.2.2) да $m = 0, n = 2$. Ҳисоблаш натижасида $A^2 \beta \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$$A^2 \beta \sqrt{\pi} = 1$$

$$A^2 = \frac{1}{\beta \sqrt{\pi}}$$

$$\varphi(x) = (\beta \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\beta^2}\right) \quad (19.2.4)$$

(19.2.1) ни ҳисоблаймиз. $\bar{E} = I(\varphi) = \int \varphi^* \hat{H} \varphi(x) dx \quad (19.2.5)$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \quad (19.2.6)$$

$$\bar{E} = A^2 \int \exp\left(-\frac{x^2}{2\beta^2}\right) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\beta^2}\right) dx \quad (19.2.7)$$

(19.7) интегрални $(\pm\infty)$ оралигида ҳисоблаймиз, ҳисоблашда (19.2.3) интегралнинг натижасидан фойдаланамиз.

$$\bar{E} = \frac{\hbar^2}{4m\beta^2} + \frac{m\omega^2}{4} \beta^2 \quad (19.2.8)$$

$\bar{E}$ -нинг минимумини $\bar{E}$ ни β нинг функцияси биринчи тартибли ҳосиласини ҳисоблаймиз ва нолга тенглаймиз.

$\frac{d\bar{E}}{d\beta} = 0$ тенгламани ечамиз ва β^2 ни аниқлаймиз.

$$\beta^2 = \frac{\hbar^2}{m^2 \omega^2} \quad (19.2.9)$$

$$E_0 = (\bar{E})_{min} = \frac{\hbar\omega}{2} \quad (19.2.10)$$

19.2 Масалалар

19.2.1 Потенциал энергияси $U(x) = \frac{m\omega^2}{2} r^2$ га тенг бўлган уч ўлчамли гармоник осцилляторнинг минимал энергиясини вариацион метод асосида аниқланг. Мумкин бўлган функция сифатида $\varphi(r) = A(1 + \alpha r) \exp(-\alpha r)$ (бу ерда α — параметр) функцияни танланг.

19.2.1a Вариацион метод билан қуйидаги $\varphi(r) = A(1 + \alpha r) \exp(-\alpha r)$ (бу ерда α – параметр) функцияни танлаш йўли билан ҳисобланган водородсимон атомнинг асосий ҳолат энергиясини $E_n = -\frac{Z^2}{n^2}$ формула билан ҳисобланган $n = 1$ да олинган натижа билан таққосланг.

19.2.2 $U(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$ (бир ўлчамли гармоник осциллятор) потенциал энергияли майдонда заррачанинг асосий ҳолат энергиясини вариацион метод асосида аниқланг. Мумкин бўлган функциялар сифатида $\varphi(x) = A(1 + \alpha x) \exp(-\alpha x)$ функциядан фойдаланинг.

19.2.3 $U(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$ (бир ўлчамли гармоник осциллятор) потенциал энергияли майдонда осцилляторнинг $n = 1$ ҳолатдаги энергиясини вариацион метод асосида аниқланг. Мумкин бўлган функциялар сифатида $\varphi(x) = 2A \frac{x}{\beta} \exp(-\beta x)$ функциядан фойдаланинг.

19.2.4 $U(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$ (бир ўлчамли гармоник осциллятор) потенциал энергияли майдонда осцилляторнинг $n = 2$ ҳолатдаги энергиясини вариацион метод асосида аниқланг. Мумкин бўлган функциялар сифатида $\varphi(x) = A \left(4 \frac{x^2}{\beta^2} - 2 \right) \exp(-\beta x)$ функциядан фойдаланинг.

2- қисм. Термодинамика ва статистик физика

20: Фазавий фазо. Лиувилл теоремаси.

Макроскопик системанинг ҳар бир мувозанат ҳолатига жуда кўп микроҳолатлар мос келади. Системанинг маълум бир макроҳолатларининг термодинамик эҳтимоллиги деб қаралаётган системанинг ушбу макроҳолатини амалга ошираётган микроҳолатлар сонига айтилади.

Фазавий фазо (ёки фазалар фазоси, ёки Γ –фазо), N –та заррачадан ташкил топган системанинг $3N$ –умумлашган координаталари $-q_j$, $3N$ –умумлашган импульс $-p_i$ ларининг $6N$ –ўлчовли фазавий фазосидир.

Реал система маълум вақт моментида мумкин бўлган микроҳолатларнинг бирида жойлашади, яъни Γ –фазода битта фазавий нукта кўринишида ифодаланади.

Системанинг микроҳолатини ифодаловчи фазавий нукта вақт ўтиши билан Γ –фазода “фазавий траектория” деб аталувчи траектория бўйлаб ҳаракатланади.

Табиати бўйича айнан бир хил бўлган, бир – биридан фақат бошланғич шартлари билан фарқ қилувчи, системалар тўплами Γ –фазода ρ –зичлик билан тақсимланган фазавий нукталар тўпламини ифодаловчи статистик ансамблни ҳосил қилади.

Лиувилл теоремасига асосан, Гамильтон тенгламаларига бўйсинувчи статистик ансамблларда фазавий нукталарининг фазавий траекториялар бўйлаб ҳаракати давомида фазавий нукталарнинг зичлиги ρ – ўзгармайди, яъни фазавий фазодаги элементар ҳажм $d\Gamma = dq_1, dq_2, \dots, dq_{3N}, dp_1, dp_2, \dots, dp_{3N}$ нинг вақт ўтиши билан кўчишида унинг ҳажмининг катталиги сақланиб қолади, фақат (шакли) формаси ўзгариб боради.

$$d\Gamma_{t_0=0} = d\Gamma_t \quad (20.1)$$

Бундан системанинг ҳолати микроҳолатлар бўйича тақсимот функцияси ҳамда унинг энергияси E ёки гамильтониани H билан аниқланади.

$$f(q_1, \dots, q_{3N}, p_1, \dots, p_{3N}) = f(H) \quad (20.2)$$

Фазавий ансамблда $\Phi(q, p)$ – параметрнинг ўртача қиймати- $\bar{\Phi}(q_j, p_j)$, ҳар қил микроҳолатларининг эҳтимоллиги $f(q_j, p_j)$ - кўринишидаги тақсимот функцияси билан қуйидаги кўринишида аниқланади.

$$\bar{\Phi}(q_j, p_j) = \int_{\Gamma} \Phi(q_j, p_j) f(q_j, p_j) d\Gamma. \quad (20.3)$$

20.1 Масала ечиш намуналари

20.1.1 Энергияси E –га тенг бўлган чизикли гармоник осциллятор учун энергия гиперсирти билан чегараланган Γ –фазавий ҳажм ҳисоблансин.

Ечиш:

Чизиқли гармоник осциллятор битта эркинлик даражасига эга, икки ўлчовли (ўқлари q ва p) фазавий фазода ҳаракатланади. Умумлашган координата q -сифатида мувозанат ҳолатидан оғиш чизиғидаги масофани белгилаб оламиз, яъни $q = x = A \sin \omega t$ (20.1.1.1)

У ҳолда умумлашган импульс $p = m \frac{dx}{dt} = mA\omega \cos \omega t$. (20.1.1.2)

Фазавий траектория ярим ўқлари $a = A$ ва $b = mA\omega$ га тенг бўлган эллипсни ифодалайди.

$$\text{Эллипснинг тенгламаси: } \frac{q^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1 \quad (20.1.1.3)$$

Эллипс ярим ўқлари a ва b ларнинг ифодаларини юқоридаги (20.1.1.3) формулага қўямиз.

$$\frac{q^2}{A^2} + \frac{p^2}{(mA\omega)^2} = 1. \quad (20.1.1.4)$$

Гармоник осциллятор учун $\Gamma(E)$ - фазавий ҳажм, доимий $E = \text{const}$ энергияли сиртни ўраб турувчи фазавий траектория билан чегараланган сиртнинг юзасига тенг бўлади. E – энергия тебраниш амплитудаси A орқали, энергиянинг сақланиш қонунига биноан ифодаланади.

Осциллятор траекториясининг энг чекка нуктасида кинетик энергиянинг нолга тенглигидан, тўла энергия потенциал энергияга тенг бўлади ва энергиянинг сақланиш қонунидан, тўла энергия :

$$E = \frac{m\omega^2 A^2}{2}, \quad (20.1.1.5)$$

(20.1.1.5) дан фойдаланиб a ва b ларни E – орқали қуйидагича ифодалаймиз.

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}, \quad b = \sqrt{2mE}. \quad (20.1.1.6)$$

Фазавий ҳажм - $\Gamma(E)$ нинг эллипс юзасига тенглигидан қуйидаги ифодани оламиз.

$$\Gamma(E) = \pi ab = \pi \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \cdot \sqrt{2mE} = \pi \frac{2E}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega} E = \frac{E}{\nu}. \quad (20.1.1.7)$$

20.1.2 Тезланиши $g = \text{const}$ га тенг бўлган оғирлик кучи майдонидаги моддий нукталарнинг бир ўлчамли ҳаракати учун фазавий траектория аниқлансин ва Лиувилл теоремасининг ўринли эканлиги кўрсатилсин.

Ечиш:

Моддий нуктанинг бир ўлчамли ҳаракати учун эркинлик даражалари сони бирга тенг. Фазавий фазо икки ўлчамли ва q - умумлашган координата, p - умумлашган импульсга боғлиқ, q ва p лар вақтга қуйидагича боғланган.

$$q = q_0 + \frac{p_0}{m}t + \frac{gt^2}{2}, \quad p = p_0 + mgt. \quad (20.1.2.1)$$

Бу ерда q_0, p_0 – умумлашган координата ва умумлашган импульснинг бошланғич вақт моментидаги қиймати. Фазавий траектория учи q - ўқда координата бошидан q_0 – масофада жойлашган параболадан иборат.

$$\frac{p^2 - p_0^2}{2m} = mg(q - q_0) \quad (20.1.2.2).$$

Лиувилл теоремасини ўринли эканлигини кўрсатиш учун, статистик ансамбль сифатида ҳар ҳил бошланғич шартларга эга бўлган, тўғри чизиқли текис тезланувчан ҳаракат қилувчи моддий нукталар тўпламини қараймиз. Фазавий ҳажм элементини $\Delta\Gamma_0 = \Delta q_0 \Delta p_0$ кўринишида оламиз, яъни бошланғич вақт моментида $q_0 \div q_0 + dq_0$ ва $p_0 \div p_0 + \Delta p_0$ координаталар интервалида бўлган, ансамбль системаларининг ҳаракатини ифодаловчи фазавий нукталарни қараймиз.

Элементар ҳажм - $\Delta\Gamma_0$ қуйидаги нукталар билан аниқланади:

$$1. q_0, p_0; 2. q_0 + \Delta q; \Delta p_0; 3. q_0; p_0 + \Delta p_0; 4. q_0 + \Delta q_0; p_0 + \Delta p_0; \quad (20.1.2.3)$$

Вақт ўтиши билан нукталарнинг тўғри чизиқли ва текис тезланувчан ҳаракати кузатилади. Натижада фазавий ҳажмнинг, яъни фазавий зичликнинг сақланиши исботланади.

20.1.3 $\gamma \ll \mu_0$ шарт асосида олинган, қуйидаги $\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ тенглама билан ифодаланувчи чизиқли гармоник осцилляторнинг фазавий траекторияси

аниқлансин. Вақт ўтиши билан фазавий ҳажмнинг ўзгариши топилсин. Бу ерда:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

Ечиш:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (20.1.3.1)$$

тенгламани ечиш учун янги- z ўзгарувчини киритамиз ва тенгламанинг ечимини эса $x = z \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)$ кўринишда қидирамиз. Бу ифодадан вақт бўйича биринчи, иккинчи тартибли ҳосилалар олиб (20.1.3.1) ифодага қўямиз, бу тенгламага мос ҳарактеристик тенгламани олиб, уни ечамиз, $\gamma \ll \mu_0$ шартни ишлатгандан сўнг қуйидаги ечим олинади:

$$x = \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\left(x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t\right)\right) \quad (20.1.3.2)$$

Бу ерда v_0 ва x_0 мос ҳолда осцилляторнинг бошланғич вақт моментидаги тезлиги ва координатаси (20.1.3.2) ифодадан фойдаланиб қуйидаги ифодани оламиз.

$$\left(x^2 + \frac{p^2}{\kappa^2}\right) = \left(x_0^2 + \frac{p_0^2}{\kappa^2}\right) \exp(-\gamma t) \quad (20.1.3.3)$$

(20.1.3.3) ифода траектория тенгламаси бўлиб, эллиптик спирални ифодалайди. Бу ерда $\kappa = m\omega_0^2$. Фазавий ҳажмнинг вақтга қараб ўзгариши қуйидаги қонун бўйича юз беради:

$$\Gamma(t) = \iint dp dx = \iint \frac{D(p, x)}{D(p_0, x_0)} dp_0 dx_0 = \exp(-\gamma t) \iint \left| \begin{matrix} \cos \omega t & \frac{1}{m\nu} \sin \omega t \\ -m\nu \sin \omega t & \cos \omega t \end{matrix} \right| dp_0 dx_0 = \exp(-\gamma t) \Gamma(0)$$

яъни, $\Gamma(t) = \exp(-\gamma t) \Gamma(0)$.

20.1.4 Битта тўғри чизиқ бўйича ҳаракатланувчи иккита заррачанинг эластик, марказий тўқнашиш ҳоли учун Лиувилл теоремаси ўринли эканлиги исботлансин.

Ечиш:

Импульс ва энергиянинг сақланиш қонунларини ёзамиз.

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \quad (20.1.4.1)$$

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \quad (20.1.4.2)$$

Бу тенгламаларни биргаликда ечиб, қуйидаги ифодаларни оламир,

$$\vec{p}'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{p}_1 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{p}_2; \quad (20.1.4.3)$$

$$\vec{p}'_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{p}_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{p}_1 \quad (20.1.4.4)$$

Алмаштириш якобианини ҳисоблаймиз:

$$D = \frac{\partial(q'_1, q'_2, p'_1, p'_2)}{\partial(q_1, q_2, p_1, p_2)} = \frac{\partial(p'_1, p'_2)}{\partial(p_1, p_2)} = 1 \quad (20.1.4.5)$$

Демак фазавий ҳажм ўзгармай қолади. Лиувилл теоремаси ўринли эканлиги исботланди.

20.1.5 Борнинг квант постулати $\oint pdq = nh$ бажариладиган чизиқли гармоник осцилляторнинг фазавий траекторияси ифодаси аниқлансин.

Ечиш:

Чизиқли гармоник осцилляторнинг ҳаракат тенграмаси қуйидагича ифодаланади:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q = 0 \quad (1.1.5.1), \quad \text{Бу ерда: } \omega = \sqrt{\frac{\gamma}{m}}.$$

(20.1.5.1) тенглама бир жинсли иккинчи тартибли дифференциал тенглама, уни оддий математик усуллар билан ечиш мумкин. Тенграманинг ечими қуйидагича ифодаланади:

$$q = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (20.1.5.2)$$

$$p = A\omega m \cos(\omega t + \alpha) \quad (20.1.5.3)$$

(20.1.5.2) ва (20.1.5.3) тенграмаларнинг ҳар иккала томонини квадратга кўтариб қўшамиз ва қуйидаги ифодани оламир.

$$\frac{q^2}{A^2} + \frac{p^2}{A^2 \omega^2 m^2} = 1 \quad (20.1.5.4)$$

(20.1.5.4) тенглама эллипсининг тенграмаси, эллипсининг юзаси эса

$$S = \oint pdq = \pi ab = \pi m \omega A^2 \quad (20.1.5.5)$$

Чизикли гармоник осцилляторнинг энергияси:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{\gamma q^2}{2} = \frac{\gamma A^2}{2} = \frac{\gamma}{2\pi m \omega} \oint p dq \quad (20.1.5.6)$$

(20.1.5.6) ифодада $\gamma = m\omega^2$ эканлигини эътиборга олсак қуйидаги тенгликни оламиз.

$$E = \nu \oint p dq \quad (20.1.5.7), \quad (\text{бу ерда: } \nu - \text{частота})$$

Квант механикадан маълумки, чизикли гармоник осцилляторнинг энергияси қуйидагича ёзилади.

$$E_n = h\nu \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (20.1.5.8)$$

(20.1.5.8) ифодада n -нинг катта қийматларида қавс ичида $\frac{1}{2}$ ни ҳисобга олмаслик мумкин. (20.1.5.8) ифода қуйидаги кўринишга келади.

$$E_n = h\nu \left(n + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow h\nu \quad n \quad (20.1.5.9)$$

(20.1.5.7) га асосан $\oint p dq = nh$ шартнинг бажарилишини кўрсатамиз.

Демак, Борнинг квант постулатлари ўринли бўлган ҳолларда чизикли гармоник осцилляторнинг фазавий траекторияси умумий марказга эга бўлган эллипслар тизимидан иборат бўлар экан.

20.2 Масалалар

20.2.1 p, q фазода идеал қайтарувчи қутининг деворларига тик йўналишда, доимий тезлик билан, ҳаракатланувчи заррачанинг фазавий траекторияси аниқлансин ва чизилсин. Қутининг ҳаракат йўналишидаги ўлчамлари $2a$ га тенг.

20.2.2 Қўзғалмас $+e$ заряднинг ва Кулон тортишиш кучи таъсири остида шу зарядга томон ҳаракатланувчи m массали ва $-e$ зарядли заррачанинг фазавий траекторияси аниқлансин. Заррачанинг бошланғич импульси $p_0 = 0$ ва координатаси r_0 .

20.2.3 Иккита шарнинг абсолют ноэластик тўқнашиши учун Лиувилл тенгламаси текшириб кўрилсин.

20.2.4 v ҳажмда ҳаракатланувчи, E энергияли, тинч ҳолатдаги массаси m_0 бўлган релятивистик зарра учун фазавий ҳажм ҳисоблансин.

20.2.5 Потенциал қутбли E -энергияли эркин ҳаракатланувчи заррача учун $E, E + dE$ энергиялар оралигида квант ҳолатлар сони аниқлансин.

20.2.6 m – массали ва инерция бўйича v_0 тезлик билан ҳаракатланувчи заррача учун фазавий траектория аниқлансин.

20.2.7 Тинч ҳолат массаси m_0 , E энергияга эга бўлган, v ҳажмда ҳаракатланувчи релятивистик заррача учун фазавий ҳажм Γ ҳисоблансин.

21. Гиббснинг микроканоник ва каноник тақсимотлари

Замонавий статистик физикада ташқи системалар билан иссиқлик контактида бўлган системанинг микроҳолатларидаги энергия қийматлари Гиббснинг тақсимотлари билан тавсифланади. Мувозанат ҳолатнинг тақсимот функциясини аниқлаш учун Гиббс (1901-йил) термодинамик мувозанатдаги берк системанинг микроҳолатлари тенг эҳтимолларга эга деган фаразни айтади.

Табиийки, системанинг ташқи муҳит билан боғланиш характериға қараб аниқланиши лозим бўлган тақсимот функциялари ҳам ҳар хил (микроканоник, кичик каноник, (баъзи адабиётларда эса, каноник) ва катта каноник тақсимотлар) бўлади.

Берк системанинг берилган энергияли ҳолатлардан бирида бўлиш эҳтимоллиги квант ҳолатлар сони $\Omega(\epsilon_i)$ га пропорционал бўлади, яъни

$$W_i \approx \Omega(\epsilon_i) \quad (21.1)$$

Бу ифода Гиббснинг микроканоник тақсимоти дейилади.

Зарралар сони доимий бўлган мувозанатли система ҳолатини аниқловчи тақсимот Гиббснинг каноник тақсимоти деб юритилади.

$$W_i = \text{const} \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\epsilon_i) \quad (21.2)$$

Бу ерда: $const = \frac{1}{\sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i)}$

Системани $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$ энергия интервалида жойлашиш эҳтимоллиги dW Гиббснинг квазиклассик тақсимоти дейилади

$$dW = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) d\Omega}{\int \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) d\Omega} \quad (21.3)$$

Гиббснинг квазиклассик тақсимотини Γ -фазалар фазосининг ҳажм элементи орқали қуйидагича ёзиш мумкин:

$$dW = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) d\Gamma}{\int \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) d\Gamma} \quad (21.4)$$

Бу ҳолда битта зарра учун ҳолат функцияси (интеграли) ифодаси

$$Z = \int \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\theta}\right) d\Omega = \left(\frac{2\pi m\theta}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} V \quad (21.5)$$

Битта заррадан ташкил топган системанинг тақсимот функцияси қуйидагича ёзилади.

$$dW = \frac{2}{\sqrt{\pi}(\theta)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\theta}\right) \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \quad (21.6)$$

Энергияси $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$ интервалда бўлган идеал газлар учун Максвелл тақсимот функцияси қуйидагича ифодаланади.

$$dW = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\theta}\right) \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \quad (21.7)$$

N та заррадан ташкил топган берк системани V ҳажмга эга бўлган идеал газ деб қаралса, у ҳолда тақсимот функцияси қуйидаги кўринишни олади

$$dW = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right) \sqrt{(\theta)^{3N}}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\theta}\right) \varepsilon^{\frac{3N}{2}-1} d\varepsilon \quad (21.8)$$

бу ерда $\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)$ - Гамма функция.

Катта сондаги ($N \gg 1$) зарралардан ташкил топган системанинг тақсимот функцияси кескин максимумга эга бўлади. Тақсимот функциясининг максимум нуқтаси:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} = \left(\frac{3N}{2} - 1 \right) \theta \quad (21.9)$$

($N \gg 1$) бўлганлиги учун

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_{eh} \approx \frac{3N}{2} \theta \quad (21.10)$$

Тақсимот функциясидан фойдаланган ҳолда энергиянинг ўртача қиймати қуйидагича ҳисобланади

$$\bar{\varepsilon} = \int \varepsilon dW = \frac{3N}{2} \theta \quad (21.11)$$

Демак, N та заррадан ташкил топган идеал газ ички энергияси:

$$\varepsilon_{eh} = \bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} N \theta = \frac{3}{2} N k T \quad (21.12)$$

21.1 Масала ечиш намуналари

21.1.1. V ҳажмда жойлашган N та заррачалар E энергияли микроканоник тақсимотга бўйсинади, у система учун фазавий ҳажм Γ , энтропия S ва температура T ни ҳисобланг. Ҳолат тенгламасини аниқланг.

Ечиш:

Идеал газнинг энергияси E системадаги ҳамма N та заррачаларнинг кинетик энергиясидан иборат бўлиб, фақатгина умумлашган импульсларга боғлиқ бўлади. Шу сабабли $6N$ ўлчовли фазонинг фазавий ҳажми $\Gamma = \Gamma(E, V)$ фақатгина E - энергияга боғлиқ бўлмасдан, ташқи параметр ҳисобланган V - ҳажмга ҳам боғлиқ бўлади.

$$\Gamma(E, V) = \int dq_1 dq_2 dq_3 \int dq_4 \dots dq_{3N} \int d\Gamma_p = V^N \Gamma_p. \quad (21.1.1.1)$$

Бу ерда Γ_p - импульслар фазосидаги $3N$ -ўлчамли шарнинг ҳажми бўлиб E энергиянинг қиймати билан аниқланади ва R^{3N} пропорционал. (Бу ерда шарнинг радиуси $R \approx E^{\frac{1}{2}}$)

Демак,

$$\Gamma(E, V) = A_N V^N E^{\frac{3N}{2}} \quad (21.1.1.2)$$

Бу ерда A_N ҳажмга ва энергияга боғлиқ бўлмаган пропорционаллик коэффициентидир.

Бу ҳолда системанинг энтропияси S фазавий ҳажм орқали, (21.1.1.2) га асосан эса E энергия орқали қуйидагича ифодаланади.

$$S = \kappa \ln \Gamma = \kappa \ln A_N + \kappa N \ln V + \frac{3}{2} \kappa N \ln E \quad (21.1.1.3)$$

Температура ва энтропия орасидаги қуйидаги термодинамик муносабатдан фойдаланиб идеал газнинг температурасини осонлик билан аниқлаш мумкин.

$$T = \frac{1}{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E} = \frac{E}{\frac{3}{2} \kappa N} \quad (21.1.1.4)$$

Ҳажм ташқи параметр бўлганлиги учун босим умумлашган куч ҳисобланади, шу сабабли қуйидагича аниқланади.

$$P = T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E = T \kappa N \frac{1}{V}, \quad (21.1.1.5)$$

$$\text{Бу ифодадан } PV = \kappa NT. \quad (21.1.1.6)$$

21.1.2. Кинетик энергияси E_k , импульси p билан $E_k = \alpha p^l$ ифода орқали боғланган, N та заррачадан иборат система қуйидаги тақсимот функцияси билан характерланувчи идеал газни ҳосил қилади:

$$dW = 4\pi V f(p) p^2 dp$$

Бу ерда V – системанинг ҳажми; $f(p)$ – p импульсининг қандайдир функцияси. Газ босимини энергия зичлиги билан боғловчи умумий ифодани аниқланг.

Ечиш:

Идеал газнинг энергия зичлиги қуйидаги ифода билан аниқланади

$$\frac{E}{V} = \frac{N\bar{E}}{V} = 4\pi N \alpha \int_0^\infty p^l f(p) p^2 dp \quad (21.1.2.1)$$

Бу ерда $\bar{E}$ молекула энергиясининг ўртача қиймати. θ, φ йўналишларда ҳаракатланувчи, p импульсли, бирлик ҳажмдаги зарралар сони

$$dn(p, \theta, \varphi) = \frac{N}{V} dW(p, \theta, \varphi) = Nf(p)p^2 \sin \theta dp d\theta d\varphi \quad (21.1.2.2)$$

Идиш сиртидаги 1 см^2 юза билан бирлик вақтда p, θ, φ катталикларнинг қуйидаги чексиз кичик интервалда қийматлари

$$p \div p + dp$$

$$\theta \div \theta + d\theta$$

$$\varphi, \varphi + d\varphi$$

ҳажми $1 \cdot \nu \cos \theta$ бўлган қийшиқ бурчакли параллелепипедда жойлашади.

$$d\nu(p, \theta, \varphi) = N\nu f(p)p^2 \sin \theta \cos \theta dp d\theta d\varphi \quad (21.1.2.3)$$

Идиш девори ҳар бир урилишда $2p \cos \theta$ импульс берилади, шунинг учун p, θ, φ нинг берилган қийматларидаги заррачалар ҳисобига бериладиган босим

$$dP = 2Nf(p)p^2 \sin \theta \cos \theta dp d\theta d\varphi \quad (21.1.2.4.)$$

Тўлиқ босим формуласи қуйидагича аниқланади.

$$P = 2N \int_0^\infty f(p) \nu p^3 dp \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{4}{3} \pi N \int_0^\infty \nu p f(p) p^2 dp \quad (21.1.2.5)$$

Тезликнинг қийматини $\nu = \frac{\partial E}{\partial p} = \ell \alpha p^{\ell-1}$ кўринишида аниқлаб, тўла босимни

$$\text{топамиз. } P = \frac{\ell}{3} \frac{E}{V}, \quad \ell = 2 \quad \text{ҳолида } P = \frac{2}{3} \frac{E}{V} \quad (21.1.2.6)$$

21.1.3 Термостат сифатида V ҳажмда жойлашган бир атомли идеал газнинг N зарраси қаралади. Термостат моделини тадбиқ этиб, Гиббснинг каноник тақсимооти ифодасини чиқазинг.

Ечиш:

Термостат ва V ҳажмда жойлашган бир атомли идеал газнинг N та заррасидан иборат система ёпиқ системани ҳосил қилади.

Ёпиқ системанинг энергияси:

$$H_0(q'_1, p'_1) + H(q_i, p_i) = E \quad (21.1.3.1)$$

Эҳтимолликларни қўшиш теоремасига асосан,

$$\rho(H) = \int \rho(H_0, H) dp'_1 dq'_1;$$

Гиббснинг микроканоник тақсимоидан системанинг $E, E + dE$ оралиқда бўлиш эҳтимоллиги зичлиги формуласига асосан

$$\rho(H_0, H) = \frac{\delta(H_0 + H - E)}{\Omega(E)} \quad (21.1.3.2)$$

Шунинг учун

$$\rho(H) = \frac{\Omega(E - H)}{\Omega(E)} \quad (21.1.3.3)$$

Бу ерда нормалаштирувчи бўлувчилар:

$$\Omega_0(E - H) = \left(\frac{\partial \Gamma_0}{\partial H_0} \right)_{H_0 = E - H}, \quad \Omega(E) = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial E} \right)_{H = E}$$

Бу ерда Γ_0 – доимий энергияли термостатнинг фазовий ҳажми, $\Gamma - E$ энергияли системанинг фазовий ҳажми.

$$\Omega(E - H) = \frac{3N}{2} \frac{(2\pi m)^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2} + 1\right)} (E - H)^{\frac{3N}{2} - 1} \quad (21.1.3.4)$$

$$\Omega(E) = \frac{3N}{2} \frac{(2\pi m)^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2} + 1\right)} E^{\frac{3N}{2} - 1} \quad (21.1.3.5)$$

Олинган ифодаларда зарралар сонини чексиз катта деб ҳисобласак, $N \Rightarrow \infty$ га интилитирсак,

$$\rho(N) = \text{const} \exp\left(-\frac{H}{kT}\right) \quad (21.1.3.6)$$

21.1.4 Чизикли гармоник осциллятор учун, энергия бўйича классик яқинлашишда, Гиббс тақсимоиди ёзилсин ва гармоник осцилляторнинг энергиясининг ўртача қиймати аниқлансин.

Ечиш:

Гиббс тақсимоиди ифодасини ёзамиз.

$$dW = \frac{\exp\left(-\frac{E}{\theta}\right) d\Gamma}{Z(\theta)} \quad (21.1.4.1)$$

Чизикли гармоник осциллятор учун;

$$dW = \frac{\exp\left(-\frac{E}{\theta}\right)d\Gamma}{Z(\theta)h}, \quad (21.1.4.2) \text{ бу ерда: } Z(\theta) = \int_{\Gamma} \exp\left(-\frac{E}{\theta}\right)dE$$

Демак: $dW(E) = \frac{1}{\kappa T} \exp\left(-\frac{E}{\kappa T}\right)$, Чизикли гармоник осцилляторнинг ўртача энергияси қуйидагича ҳисобланади..

$$\bar{E} = \int_0^{\infty} E dW(E) = \kappa T \quad (21.1.4.3)$$

21.1.5 Чизикли гармоник осциллятор учун классик яқинлашишда энергия бўйича Гиббс тақсимотини ёзинг ва унинг ўртача энергиясини ҳисобланг.

Ечиш:

Гиббснинг каноник тақсимооти қуйидаги формула ифодаланади.

$$dW(E) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E}{\kappa T}\right)d\Gamma, \quad (21.1.5.1)$$

Бу ерда $Z = \int_{\Gamma} \exp\left(-\frac{E}{\kappa T}\right)d\Gamma$ - системанинг ҳолат интегралли.

Чизикли гармоник осциллятор учун $\Gamma(E) = \frac{E}{\nu}$; $d\Gamma = \frac{dE}{\nu}$,

Шунинг учун ҳолат интегралли қуйидагига тенг:

$$Z = \frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{E}{\kappa T}\right)dE = \frac{\kappa T}{\nu} \quad (21.1.5.2)$$

Энергия бўйича Гиббс тақсимооти қуйидаги кўринишни олади:

$$dW(E) = \frac{1}{\kappa T} \exp\left(-\frac{E}{\kappa T}\right)dE \quad (21.1.5.3)$$

Гармоник осцилляторнинг ўртача энергияси қуйидагига тенг:

$$\bar{E} = \frac{1}{\kappa T} \int_0^{\infty} E \exp\left(-\frac{E}{\kappa T}\right)dE \quad (21.1.5.4)$$

21.1.6 Системанинг ҳолат интегралли Z ни энтропия S орқали ифодаланг.

Ечиш:

Статистик термодинамиканинг асосий муносабатига асосан эркин энергия F ҳолат минтегралли Z билан қуйидагича боғланган.

$$F = -\kappa T \ln Z \quad (21.1.6.1.)$$

У ҳолда системанинг энтропияси қуйидагига тенг бўлади:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = k \left(\ln Z + T \frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right) \quad (21.1.6.2.)$$

21. 2 Масалалар

21.2.1 Классик яқинлашишда чизиқли гармоник осциллятор учун Гиббс тақсимотини ёзинг ва унинг энергиясининг ўртача қийматини ҳисобланг.

21.2.2 N та заррачадан ташкил топган идеал газ T температурали термостатда жойлашган. Газнинг $E \div E + \Delta E$ энергия интервалидаги берилган E қийматга эга бўлиш эҳтимоллигини аниқланг.

21.2.3 Зарралари сони жуда катта бўлган системалар учун Гиббснинг каноник тақсимотининг микроканоник тақсимотга ўтишини исботланг.

21.2.4 Қуйидаги, а) N та заррадан иборат бир атомли идеал газ; б) N та ўзаро боғланмаган чизиқли осцилляторлар учун Гиббснинг микро каноник тақсимотидаги $\Omega(E)$ нормалловчи коэффицентни аниқланг.

21.2.5 V – ҳажмли идишда жойлашган ва N та заррадан ташкил топган идеал газ учун энергия ва босимни, ҳар бир заррачанинг энергиясининг импульс $\vec{p}$ га боғланиши а) $H = ap^l$, бу ерда $a > 0$, $l > 0$; б) $H = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$ кўринишда бўлган ҳоллар учун аниқланг.

21.2.6 N та ўзаро таъсирлашмайдиган система учун $E_{экт}$, ΔE - кенгликни, $\frac{\Delta E}{E}$ ва Гиббснинг каноник тақсимотидаги эҳтимоллик зичлигининг максимал қиймати $\omega_{\max}$ ни аниқланг.

21.2.7 N та катта сондаги ўзаро таъсирлашмайдиган зарралар системаси учун энг катта эҳтимолий энергия $E_{экт}$ нинг системанинг ўртача энергияси билан мос тушишини исботланг.

21.2.8 Жуда катта сондаги ($N \Rightarrow \infty$) системалар учун Гиббснинг каноник тақсимотининг микроканоник тақсимотга ўтишини исботланг.

21.2.9 Гиббс тақсимотидан фойдаланиб идеал газ молекулаларининг энергия бўйича тақсимотини олинг.

22. Максвелл тақсимоти. Больцман тақсимоти

Импульслар фазосида dp ҳажмда молекулани аниқлаш эҳтимоллигини берувчи ифода импульснинг координата ўқларига проекциялари бўйича Максвелл тақсимоти дейилади

$$dW_M = \left(\frac{1}{2\pi mkT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mkT} \right) dp_x dp_y dp_z \quad (22.1)$$

Қуйидаги ифода эса молекулани координаталар фазосида dV ҳажмда топиш эҳтимоллигини беради ва Больцман тақсимоти деб юритилади

$$dW_B = \frac{\exp \left(-\frac{U(x, y, z)}{kT} \right) dV}{\int \exp \left(-\frac{U(x, y, z)}{kT} \right) dV} \quad (22.2)$$

Заррачани $p, p + dp$ импульслар интервалида топиш эҳтимоллигини аниқловчи формула, импульс бўйича **Максвелл тақсимоти** дейилади.:

$$dW(p) = 4\pi \left(\frac{1}{2\pi mkT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{p^2}{2mkT} \right) p^2 dp \quad (22.3)$$

Заррача тезлигининг $v, v + dv$ тезлик интервалида бўлиш эҳтимоллигини аниқлаш бўйича формула тезлик компоненталари бўйича Максвелл тақсимоти дейилади.

(22.4)

$$dW(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right) dv_x dv_y dv_z$$

Тезлик модули бўйича Максвелл тақсимоти формуласи қуйидагича ёзилади:

$$dW(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) v^2 dv \quad (22.5)$$

Заррача энергиясининг $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$ энергия интервалида бўлиш эҳтимоллигини аниқловчи энергия бўйича Максвелл тақсимоти формуласи:

$$dW(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{\frac{3}{2}}} \exp \left(-\frac{\varepsilon}{kT} \right) \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon \quad (22.6)$$

Координаталар фазосида заррачани dV ҳажмда топиш эҳтимоллигини аниқловчи тақсимот - **Больцман тақсимои** деб юритилади

$$dW_B = \frac{\exp\left(\frac{U(x, y, z)}{kT}\right) dV}{\int \exp\left(-\frac{U(x, y, z)}{kT}\right) dV} \quad (22.7)$$

Хусусий ҳолда Больцман тақсимои тадбиғи сифатида ер атмосферасида ернинг гравитацион майдони таъсирида ҳаво зарраларининг ҳаракатини қараймиз.

z ўқини вертикал ҳолда юқорига йўналган ҳолда газ молекуласининг потенциал энергияси $U = mgz$ бўлади ва натижада (3.7) қуйидаги кўринишни олади:

$$dW_B = \frac{\exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) dz}{\int \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) dz} \quad (22.8)$$

Худди шундай, $z, z + dz$ интервалдаги зарралар сони

$$dn(z) = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) dz \quad (22.9)$$

z баландликдаги зарралар зичлиги қуйидагига тенг бўлади:

$$n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) \quad (22.10)$$

бу ерда n_0 шартли белгиланган $z = 0$ сатҳда, ҳажм бирлигидаги зарралар сони. Босимни зарралар сонига пропорционал эканлигидан, барометрик формула ифодаси олинади:

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)$$

$z_0 = \delta = \frac{kT}{mg}$ - характеристик баландлик. Характеристик баландликга тенг баландликда газ молекулалар сони $n(\delta) = \frac{n_0}{e}$, яъни $z = 0$ сатҳдагига нисбатан e марта камаяди

22.1 Масала ечиш намуналари

22.1.1 Тезликлари $0 \leq v \leq v_n$ интервалда жойлашган идеал газ заррачаларининг сони $N_{0 \leq v \leq v_n}$ ни ҳисобланг.

Ечиш:

Тезлик модули бўйича Максвелл тақсимооти $dW(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv$

(22.1.1.1)

формуласида $\alpha = \frac{m}{2kT}$ белгилашни киритиб, ифоданинг ҳар иккала томонини N га кўпайтирсак, тезликлари $v, v + dv$ интервалда бўлган зарралар сонини аниқлаймиз.

$$dN(v) = 4\pi N \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp(-\alpha v^2) v^2 dv \quad (22.1.1.2)$$

Газ заррачаларининг қидирилаётган сони :

$$N_{0 \leq v \leq v_n} = 4\pi N \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{v_n} \exp(-\alpha v^2) v^2 dv \quad (22.1.1.3)$$

Бу ерда $v_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \left(\frac{2kT}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Интегрални бўлаклаб интеграллаб, $t = \sqrt{\alpha}v$ кўринишидаги янги ўзгарувчига ўтиб, қуйидаги ифодани оламиз:

$$N_{0 \leq v \leq v_n} = N \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \exp(-t^2) dt - \frac{2}{e\sqrt{\pi}} \right] = N \left[\operatorname{erf}(1) - \frac{2}{e\sqrt{\pi}} \right] \quad (22.1.1.4)$$

Бу ерда e – натурал логарифм асоси. Ҳатолик интеграл деб аталувчи $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt = \operatorname{erf}(x)$ интегралнинг қиймати эса тегишли жадвалларда берилади ва (3.1.1.4) нинг қиймати жадвалдан фойдаланиб ҳисобланади.

22.1.2 Газ молекулаларининг қанча қисмининг илгариланма ҳаракат кинетик энергияси ўртача кинетик энергия $\bar{E} = \frac{3}{2} kT$ дан катта бўлади ?

Ечиш:

Идеал газ молекулалари тезликлари бўйича Максвелл тақсимоти:

$$dW(v) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp(-\alpha v^2) v^2 dv \quad (22.1.2.1)$$

Молекуланинг илгариланма ҳаракат кинетик энергияси ифодаси $E = \frac{mv^2}{2}$ эканлигини эътиборга олиб, E энергия бўйича тақсимот функциясини қуйидагича ёзамиз:

$$dW(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi(\kappa T)^3}} \exp\left(-\frac{E}{\kappa T}\right) E^{\frac{1}{2}} dE \quad (22.1.2.2)$$

Энергияси $E \geq \frac{3}{2}\kappa T$ дан катта бўлган газ молекулаларининг сони N_1 қуйидагига тенг:

$$N_1 = \frac{2N}{\sqrt{\pi(\kappa T)^3}} \int_{\frac{3}{2}\kappa T}^{\infty} \exp\left(-\frac{E}{\kappa T}\right) E^{\frac{1}{2}} dE \quad (22.1.2.3)$$

Бу ерда N – газ молекулаларининг тўла сони. Газ молекулаларининг қидирилаётган қисми қуйидаги муносабатдан аниқланади.

$$\frac{N_1}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi(\kappa T)^3}} \int_{\frac{3}{2}\kappa T}^{\infty} \exp\left(-\frac{E}{\kappa T}\right) E^{\frac{1}{2}} dE \quad (22.1.2.4)$$

$x = \sqrt{E}$ янги ўзгарувчига ўтиб, бўлаклаб интеграллаб ва алмаштиришлар ўтказиб қуйидагини оламиз.

$$\frac{N_1}{N} = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \exp\left(-\frac{3}{2}\right) + 1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \approx 0,31 + 1 - 0,92 = 0,39 = 39\% \quad (22.1.2.5)$$

22.1.3. Газ молекулаларининг 1-секунд ичида идиш сиртидаги бирлик юзага урилишлар сонининг $\nu = \frac{n\bar{v}}{4}$ кўринишида ёзилиши мумкин эканлигини исботланг. (n – бирлик ҳажмдаги молекулаларнинг сони).

Ечиш:

Газ молекулаларининг тезлик компонентаси v_x нинг $v_x \div v_x + dv_x$ интервалда бўлган бирлик ҳажмдаги молекулалари сони қуйидаги функция билан ифодаланади.

$$dn(v_x) = n \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(-\alpha v_x^2) dv_x \quad (22.1.3.1)$$

Шу молекулалардан бирлик вақт ичида идиш сиртидаги 1 см^2 юза билан dv таси тўқнашади.

$$dv(v_x) = v_x dn(v_x) \quad (22.1.3.2)$$

Шундай қилиб, бирлик вақт ичида юқорида кўрсатилган бирлик юза билан тўқнашувларнинг тўла сони;

$$\nu = n \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty v_x \exp(-\alpha v_x^2) dv_x = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \frac{n}{4} \quad (22.1.3.3)$$

Идеал газ молекулаларининг ўртача арифметик тезлиги $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ га тенг эканлигини эътиборга олсак, исботланиши зарур бўлган ифодани оламиз.

$$\nu = \frac{n\bar{v}}{4} \quad (22.1.3.4)$$

22.1.4 Молекулалар оқими жуда тор тирқиш орқали ҳавоси сўриб олинган идишга киритилмоқда. Оқимдаги зарраларнинг ўртача тезлиги ва ўртача квадратик тезлигини ҳисобланг.

Ечиш:

Масалани ечиш учун Максвелл тақсимот функциясининг сферик координат системасида ёзилган ифодасидан фойдаланамиз:

$$dn(v, \theta, \varphi) = \frac{dN(v, \theta, \varphi)}{V} = n \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp(-\alpha v^2) v^2 \sin \theta d\theta dv d\varphi \quad (22.1.4.1)$$

Идиш деворининг 1 см^2 юзаси билан 1 секунд ичида тўқнашадиган ва тезликларининг қиймати берилган интервалда бўлган молекулалар сони қуйидагича аниқланади.

$$dv(v) = \pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^3 dv \quad (22.1.4.2)$$

Оқимда тезлиги юқоридаги талабга жавоб берувчи молекулани учратиш эҳтимоллиги қуйидагича ифодаланади.

$$dW(v) = \frac{dv(v)}{v} \quad (22.1.4.3)$$

Бу ерда: $v = \frac{n\bar{v}}{4}$

Шу сабабли оқимдаги молекулаларнинг ўртача тезлиги ва ўртача квадратик тезлиги қуйидагича ифодаланади.

$$\bar{v} = \int v dW(v) = \frac{4}{n} \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}} \pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^4 dv = \sqrt{\frac{9kT}{8m}} \quad (22.1.4.4)$$

$$\sqrt{v^2} = \left[\int v^2 dW(v) \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4kT}{m}} \quad (22.1.4.5)$$

Молекулаларнинг ўртача ва ўртача квадратик тезликлари ифодасидаги интеграллар умумлашган Пуассон интеграллари $\int_{-\infty}^{\infty} x^m \exp(-\alpha x^n) dx = \frac{2}{n} \alpha^{-\frac{m+1}{n}} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$ (22.1.4.6) ёрдамида ҳисобланади.

22.1.5 Газ T температурада g –тезланишга эга бўлган бир жинсли оғирлик кучи майдонида жойлашган. Бalandлиги h га тенг бўлган мувозанатдаги газ устунидаги битта молекуланинг ўртача потенциал энергиясини аниқланг.

Ечиш:

Бир жинсли оғирлик кучи майдонида жойлашган молекуланинг потенциал энергияси $u = mgz$. Молекула потенциал энергиясининг ўртача қиймати $\bar{u} = mg \bar{z}$ га тенг. Больцман тақсимотидан фойдаланамиз.

$$dW(z) = B e^{-\frac{mgz}{kT}} dz \quad (22.1.5.1)$$

$$\bar{u} = \frac{mg \int_0^h \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) z dz}{\int_0^h \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) dz} \quad (22.1.5.2)$$

Бу ерда: $Z = \int_0^H \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) dz$ - ҳолат интегралли. Бу интегрални қаралаётган

ҳол учун ҳисоблаймиз.

$$Z = \frac{kT}{mg} \left(1 - \exp\left(-\frac{mgH}{kT}\right) \right) \quad (22.1.5.3)$$

Бу ифодада $\beta = \frac{mg}{kT}$ параметрни киритамиз ва $\bar{u}$ ни Z орқали ифодаalayмиз.

$$\bar{u} = -mg \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

У ҳолда (3.1.5.3) дан фойдаланиб қуйидагини аниқлаймиз.

$$\bar{u} = kT \left(1 - \frac{mgH}{kT} \frac{1}{\exp\left(\frac{mgH}{kT} - 1\right)} \right)$$

22.1.6. Ўзгармас ω бурчак тезлик билан айланаётган R радиусли центрифугада жойлашган идеал газ молекуласининг ўртача потенциал энергиясини аниқланг.

Ечиш:

Айланаётган R радиусли центрифугада жойлашган идеал газ ташқи майдонда жойлашган идеал газга эквивалент. Таъсир қилувчи инерция кучи

$$|\vec{F}_{ин}| = m\omega^2 r, \text{ бу ерда } r - \text{айланиш ўқидан молекулагача бўлган масофа.}$$

Шундай майдонда жойлашган молекуланинг потенциал энергиясини ҳисоблаймиз. $m\omega^2 r = -\frac{du}{dr}$ бу ифодани интеграллаб молекуланинг потенциал

энергияси учун қуйидаги ифодани оламиз.

$$u = -\frac{m\omega^2 r^2}{2} \quad (22.1.6.1)$$

Больцман тақсимотига асосан молекулани цилиндрик координата системасида координаталари r, φ, z бўлган нуқтада мавжудлик эҳтимоллиги

$$dW(r, \varphi, z) = B \exp\left(-\frac{u}{kT}\right) dV = B \exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}\right) r dr d\varphi dz \quad (22.1.6.2)$$

(22.1.6.2) дан r бўйича тақсимот функциясини оламиз

$$dW(r) = A \exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}\right) r dr \quad (22.1.6.3)$$

(22.1.6.3) ни r бўйича $0-R$ оралигида интегралласак қуйидаги ифодани оламыз.

$$\bar{u} = -kT \frac{1 + \left(\frac{m\omega^2 R^2}{2kT} - 1\right) \exp\left(\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}\right)}{\exp\left(\frac{m\omega^2 R^2}{2kT} - 1\right)} \quad (22.1.6.4)$$

22.2 Масалалар

22.2.1 Идеал газнинг идиш деворларига берадиган босими ҳисоблансин.

22.2.2 Мувозанат ҳолатида газ молекулалари тезлигига тескари катталиқнинг ўртача қиймати ҳисоблансин.

22.2.3 Қандай температурада кислород молекулаларининг ўртача квадратик тезлиги ,азот молекулаларининг 100^0 С температурадаги ўртача квадратик тезлигига тенг бўлади.?

22.2.4 Газ молекулаларининг қанча қисмининг тезлиги,ўртача иссиқлик ҳаракат тезлигидан катта бўлади ?.

22.2.5 Газ молекулаларининг қанча қисмининг тезлиги,энг катта эҳтимолли тезликларнинг $\frac{v_n}{2}$ ва v_n қийматлари оралигида бўлади ?.

22.2.6 Бир атомли молекулалардан ташкил топган қуйидаги идеал системалар учун $E, E + dE$ энергия оралигида Максвелл тақсимотининг кўриниши олинсин.

А). Битта заррадан ташкил топган.система учун

Б). N – та заррадан ташкил топган система учун.

22.2.7 N – та ўзаро таъсирлашмайдиган жуда катта сондаги зарралардан ташкил топган система учун E ва $\bar{E}$ аниқлансин.

22.2.8 1- моль бир атомли идеал газ T температурада баландлиги h га тенг бўлган вертикал цилиндр идишда жойлашган. Бир жинсли оғирлик кучи

майдонининг таъсирини ҳисобга олиб, қуйидаги иккита $\mu gH \ll RT$ ва $\mu gH \gg RT$ чегаравий ҳолларда газнинг энергиясини ва иссиқлик сиғимини аниқланг.

22.2.9 ω бурчак тезлик билан текис айланаётган R радиусли центрифугада, m – массали, N – та молекуладан ташкил топган мувозанатдаги бир атомли газ, жойлашган. Газнинг энергияси ва иссиқлик сиғимини аниқланг.

22.2.10 T температурада g – тезланишга эга бўлган бир жинсли оғирлик кучи майдонида жойлашган ва ω – бурчак тезлик билан ўз ўқи атрофида айланаётган баландлиги h ва радиуси R бўлган вертикал цилиндрда жойлашган газ молекулаларининг тақсимотин аниқланг.

22.2.11 ω доимий бурчак тезлик билан текис айланаётган R радиусли центрифуга ўқидан m массали молекуланинг ўртача квадратик масофасини аниқланг. Центрифуга ўқидан энг катта эҳтимолли масофанинг мавжуд эмаслигини исботланг. Центрифугадаги газнинг температураси T га тенг.

22.2.12 ω доимий бурчак тезлик билан айланаётган R радиусли центрифугада массалари m_1 ва m_2 бўлган газлар аралашмасини ажратиш амалга оширилмоқда.

Ажратиш коэффициенти $q = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)_{r=R}}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)_{r=0}}$ ни аниқланг.

23. Термодинамиканинг асосий тушунчалари. Термодинамиканинг биринчи қонуни

Термодинамика - дедуктив фан. Умумий эмпирик қонунлар ҳисобланган, термодинамика қонунлари жисмларнинг ҳолатини аниқловчи катталиклар орасидаги ҳар қил муносабатлар тўпламини олишга имкон беради. Масалан, C_p ва C_v орасидаги боғланишни ҳамда уларнинг эластиклик модули билан боғланишини аниқлайди ва ҳ.к.

Термодинамика, лекин иссиқлик сиғимининг температурага боғланишини аниқлай олмайди, шунингдек ҳолат тенгламаларини ифодаларини олишга имкон беролмайди.

Термодинамикада олинган натижаларнинг энг катта ютуғи, улар умумий эмпирик қонунларга асосланиши ва зарраларнинг табиати тўғрисидаги тасаввурларнинг ўзгаришига боғлиқ эмаслиги ҳамда термодинамик муносабатлар унинг бошланғич тасаввурларини қаноатлантирувчи ихтиёрий статистик системалар учун ўринлигида.

Термодинамиканинг биринчи қонуни энергиянинг сақланиш ва айланиш қонунининг термодинамик системаларга татбиқининг миқдорий томонларини ифодалайди.

Термодинамиканинг биринчи қонуни: Системанинг ички энергияси унинг ҳолатининг бир қийматли функцияси ҳисобланади ва фақат ташқи таъсирлар туфайли ўзгаради.

Системанинг бир ҳолатдан иккинчисига ўтишида ички энергиянинг ўзгариши $\Delta U = U_2 - U_1$, иссиқлик миқдори ва термодинамик ишнинг алгебраик йиғиндисига тенг.

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q - w \quad (23.1)$$

Элементар жараён учун термодинамиканинг биринчи қонуни қуйидагича ёзилади:

$$\delta Q = dU + \delta W \quad (23.2)$$

Ички энергия ҳолат функцияси ҳисобланади ва системанинг 1-ҳолатдан 2- ҳолатга ўтишида йўлнинг шаклига боғлиқ эмас.

Q - иссиқлик миқдори ва w - термодинамик иш системада ўтаётган жараёнларга боғлиқ ва жараёнларнинг функцияси.

Мувозанатдаги системанинг ички параметрлари ташқи параметрлар ва температуранинг функцияси бўлиб, қандайдир мувозанатлашган ички параметр b_k нинг ташқи параметрлар λ_i , температура T -га боғланиши система ҳолатининг термик ва калорик тенгламаларига олиб келади.

Агар ички параметр b_k ташқи параметр λ_i га қўшма бўлган умумлашган кучга - f_i га тенг , яъни $b_k = f_i$ бўлса, қуйидаги тенглама олинади.

$$f_i = f_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n, T) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (23.3)$$

Бу тенглама ҳолатнинг термик тенгламаси дейилади ва унинг ёрдамида температурани аниқлаш мумкин.

Температура T ни ташқи параметр λ_i , қандайдир мувозанатдаги ички параметр b_k билан боғловчи тенглама система ҳолатининг калорик тенгламаси дейилади.

$$b_k = f(\lambda_1, \dots, \lambda_n, T), \quad (23.4)$$

Масалан: ички параметр - системанинг ички энергияси E , $b_k = E$, бўлган ҳолда системанинг калорик тенгламаси қуйидагича бўлади.

$$E = E(\lambda_1, \dots, \lambda_n, T) \quad (23.5)$$

Агар система учун термик ва калорик тенгламалар маълум бўлса, термодинамиканинг биринчи қонуни билан биргаликда термодинамик системанинг хусусиятларини ҳам аниқлаш мумкин. Термик ва калорик тенгламалар сони системанинг эркинлик даражалари сонига тенг бўлади.

23.1. Масала ечиш намуналари

23.1.1 Нормал босимда жойлашган бир моль сувни 100°C температурада буғланиш ишини ҳисобланг. Бу ҳолда берилаётган иссиқлик миқдорини аниқланг .

Ечиш :

Босим кучига қарши бажарилган элементар иш $\delta W = p dV$, агар $p = \text{const}$, яъни босим ўзгармас бўлса;

$$W = p(V_2 - V_1) \quad (23.1.1.1)$$

Бу ерда V_1 - бир моль сувнинг, V_2 бир моль буғнинг ҳажми. $V_2 \gg V_1$ бўлганидан

$$W = pV_2 = p \frac{RT}{p} = RT = 3125,7 \text{ Дж.} \quad (23.1.1.2)$$

Бир моль сувнинг буғланиш иссиқлиги ;

$$Q = \Lambda m = 40632 \text{ Дж. (23.1.1.2)}$$

Бу ерда Λ - буғ ҳосил бўлиш солиштирма иссиқлиги, $539 \frac{\text{ккал}}{г}$ га тенг.

$Q - A$ фарқ A га нисбатан катта, иссиқлик миқдори ва ишнинг фарқи, суюқликнинг буғга айланишида суюқлик молекулалари орасидаги боғланиш кучларига қарши иш бажаришга сарфланади.

23.1.2 Ташқи λ параметрга қўшма бўлган, умумлашган f куч таъсирида бўлган ихтиёрий содда система учун қуйидаги муносабат ўринли эканлигини исботланг :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial f}\right)_a \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_T \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T}\right)_A = -1$$

Ечиш :

Термодинамика қонунларига асосан, ҳолатнинг термик тенгламаси $f = f(T, \lambda)$ маълум. $f = f(T, \lambda)$ нинг тўла дифференциалини оламыз.

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_T d\lambda + \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_A dT \quad (23.1.2.1)$$

$df = 0$ ёки $f = \text{const}$ бўлганда, $d\lambda = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T}\right)_f dT$ бўлишини эътиборга олиб, dT

ни қавсдан чиқазамиз ва қуйида ёзилган тенгликни оламыз.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial f}\right)_A \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_T \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T}\right)_f = -1 \text{ тенглама олинди, бу ифодани қуйидагича ёзамиз.}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_T \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T}\right)_f = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_A \quad (23.1.2.2)$$

(23.1.2.2) ифодани $\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_A$ га бўлиб юборсак, талаб этилаётган тенглик

исботланади.

Демак, $\left(\frac{\partial T}{\partial f}\right)_A \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_T \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T}\right)_f = -1$ ўринли эканлиги исботланди.

Агар $f = p$ ва $\lambda = V$ бўлса, тенглик қуйидаги кўринишни олади.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -1 \quad (23.1.2.3)$$

23.1.3 α , β ва γ термик коэффицентлар орасидаги боғланиш ифодасини олинг.

Ечиш :

Термик коэффицентлар таърифига асосан улар қуйидаги формулалар билан ифодаланади.

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p ; \beta = -\frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T , \gamma = \frac{1}{p_0} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V . \quad (23.1.3.1)$$

Бу ифодалардан қуйидагини аниқлаймиз.

$$\frac{\alpha}{\beta\gamma} = -p_0 \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_V \quad (23.1.3.2)$$

Юқоридаги масалада олинган айниятга асосан:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -1 \quad (23.1.3.3)$$

Бу ифодадан $\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$ эканлигини топиб, дастлабки ифодага қўямиз.

Айниятни юқоридаги ифодага қўйсак термик коэффицентлар орасидаги боғланишни оламиз.

$$\alpha = p_0 \beta \gamma \quad (23.1.3.4)$$

23.1.4 Қандайдир $T = T_k$ температура ва $p = p_k$ босимда суюқликнинг солиштира ҳажми V_c ва газнинг солиштира ҳажми V_g орасидаги фарк йўқолади. ($V_c = V_g = V_k$)- модданинг бундай ҳолати критик ҳолат дейилади ва мос термодинамик катталиклар критик параметрлар дейилади. Ван-дер-Ваальс газини учун критик параметрлар Ван-дер-Ваальс доимийлари a ва b орқали ифодалансин ҳамда критик коэффицент ҳисоблансин.

Ечиш :

Ван-дер-ваальс тенгламаси $\left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT$ ни қуйидагича ёзамиз:

$$V^3 - \left(\frac{RT}{p} + b \right) V^2 + \frac{a}{p} V - \frac{ab}{p} = 0 \quad (23.1.4.1)$$

Критик нуқта координаталари p_k, V_k, T_k каноатлантиради ва бу нуқтада қуйидаги шартлар бажарилади.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0, \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T = 0 \quad (23.1.4.2)$$

Иккита тенгламани ва Ван-дер-Ваальс тенгламасини биргаликда ечиб критик параметрлар учун қуйидаги ифодалар олинади.

$$V_k = 3b, \quad p_k = \frac{a}{27b^2}, \quad T_k = \frac{8a}{27Rb} \quad (23.1.4.3)$$

Критик коэффициент $s = \frac{RT_k^2}{p_k V_k}$ нинг қиймати Ван-дер-Ваальс гази учун

$s = 2,67$ ҳамма моддалар учун бир ҳил. Лекин ҳамма газлар ҳам Ван-дер –Ваальс тенгламасини ҳар доим каноатлантирмаслигидан, критик коэффициентнинг қиймати 2,67 дан катта, ўртача $s = 3,7$ га тенг бўлади.

23.2 Масалалар

23.2.1 Бир киломоль кислород $T = 300^\circ\text{K}$ температура ва $p = 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}$ босим

остида жойлашган. Кислороднинг ҳолати берилган шароитда Ван-дер-Ваальс тенгламаси билан ифодаланишини эътиборга олиб, газнинг ҳажмини ҳисобланг. Кислород учун Ван-дер-Ваальс тенгламаси доимийлари

$$a = 1,35 \frac{\text{л}^2 \text{атм}}{\text{моль}^2}, \quad b = 0,03 \frac{\text{л}}{\text{моль}}$$

23.2.2 Ван-дер-Ваальс гази учун биринчи ва иккинчи вириал коэффициентларни ва биринчи вириал коэффициент нолга тенг бўладиган нуқта, яъни Бойл нуқтасига мос температурани топинг.

23.2.3 Газлар учун ҳажм кенгайиш коэффициенти α ва изотермик сиқилувчанлик коэффициенти β ни Ван-дер-Ваальс тенгламаси ва Бертло тенгламаси $\left(p + \frac{a}{TV^2}\right)(V - b = RT)$ учун аниқланг.

23.2.4 Критик параметрлардан фойдаланган ҳолда келтирилган Ван-дер-Ваальс тенгламасини чиқаринг.

23.2.5 Газнинг ҳажми критик ҳажмга нисбатан жуда катта бўлган ҳолларда келтирилган Ван-дер-Ваальс тенгламасидан фойдаланиб, Ван-дер-Ваальснинг ҳолат тенгламасининг Клапейрон-Менделеев тенгламасига ўтишини исботланг.

23.2.6. Мос ҳолатлар қонунига бўйсинадиган ҳамма моддалар учун ҳажм кенгайиш коэффициентларининг критик температураларга тескари пропорционал эканлигини исботланг.

24 . Иссиқлик сиғими. Асосий термодинамик жараёнлар ва тенгламалари

Термодинамикада ўрганиладиган системалар ҳамда системанинг шу ҳоссаларни характерловчи мос катталиклар иккита синфга - термик ва калорик системаларга ажралади.

Системаларнинг термик ҳолат тенгламалари билан аниқланадиган ҳоссалари унинг термик ҳоссалари, системаларнинг калорик ҳолат тенгламалари билан аниқланадиган ҳоссалари системаларнинг калорик ҳоссалари ёки калорик ва термик ҳолат тенгламалар билан аниқланадиган ҳоссалари дейилади.

Калорик ҳоссаларга ёки катталикларга даставвал иссиқлик сиғими ва яширин иссиқлик киради.

Иссиқлик сиғими деб системанинг температурасини 1°C ўзгартириш учун зарур бўлган иссиқлик миқдорига айтилади.

Системанинг иссиқлик сиғими система ҳолатининг эмас, балки системада ўтаётган жараённинг функцияси бўлади.

Иссиқлик сиғими C $-\infty$ дан $+\infty$ гача ораликда ўзгаради, иссиқлик сиғимининг аниқланиши термодинамикада кўп ишлатиладиган термостат тушунчаси билан боғлиқ .

Термостат деб бирор система билан иссиқлик алмашиш жараёнида температураси ўзгармайдиган, яъни иссиқлик сиғими ($C \Rightarrow \infty$) жуда катта

бўлган жисмга айтилади. Амалиётда C_p -ўзгармас босимдаги ва C_v - ўзгармас ҳажмдаги иссиқлик сиғимлари кўпроқ ишлатилади.

Содда системалар учун C_p ва C_v орасидаги боғланиш қуйидагича ифодаланади.

$$C_p - C_v = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (24.1)$$

Идеал (бир атомли) газлар учун C_v ни доимий деб ҳисоблаб, улар учун ҳолатнинг калорик тенгламасини қуйидагича аниқлаймиз.

$$U = C_v T + U_0 \quad (24.2)$$

Идеал газ учун Клапейрон тенгламаси ва Джоуль қонунига асосан

$$C_p - C_v = \nu R \quad (24.3)$$

Молекуляр иссиқлик сиғимлари учун $C_p - C_v = R$, солиштирма иссиқлик сиғимлари учун $C_p - C_v = \frac{R}{\mu}$, газнинг битта молекуласи учун иссиқлик

сиғимлари фарқи- $C_p - C_v = \frac{R}{N_A} = \kappa$:

Содда ёки мураккаб, яъни ҳар қандай термодинамик системада асосан уч ҳил жараён содир бўлади: изотермик ($T = \text{const}$), адиабатик ($\delta Q = 0$), политропик ($C = \text{const}$).

Булардан ташқари изохорик $V = \text{const}$, изобарик $p = \text{const}$ жараёнлар тўғрисида ҳам гапирилади.

Бу бешта жараён термодинамикада асосий жараёнлар дейилади. Таъкидлаб ўтамиз, адиабатик жараён аслида политропик жараённинг хусусий холи ҳисобланади.

Умумий ҳолда термодинамиканинг биринчи қонуни содда системалар учун қуйидагича ёзилади. $\delta Q = dE + fd\lambda$, $f = p$, $\lambda = V$ бўлган ҳолда $\delta Q = dE + pdV$ бўлади.

Политропа тенгламаси: $pV^n = \text{const}$, $n = \frac{C_p - C}{C_v - C}$ - политропа кўрсаткичи.

Адиабата тенгламаси, Пуассон тенгламаси $pV^\gamma = const, \gamma = \frac{C_p}{C_v}$ - эса

адиабата кўрсаткичи. Идеал газ учун v, T ўзгарувчиларда адиабата тенгламаси

$TV^{\gamma-1} = const$, бир атомли идеал газ учун эса $TV^{\frac{5}{3}} = const$ кўринишида ёзилади.

24.1 Масала ечиш намуналари

24.1.1 Термодинамиканинг биринчи қонунидан фойдаланиб физикавий бир жинсли ва изотроп системалар учун $c_p - c_v$ нинг умумий ифодасини аниқланг.

Ечиш:

Термодинамиканинг биринчи қонунига асосан,

$$\delta Q = dE + pdV \quad (24.1.1.1)$$

$E = E(T, V)$ деб ҳисоблаб ички энергиядан тўла дифференциал оламиз ва δQ ни қуйидагича алмаштирамиз.

$$\delta Q = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p \right] dV \quad (24.1.1.2)$$

$$\text{Бундан: } c_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V, \quad c_p = \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p; \quad (24.1.1.3)$$

$c_p - c_v$ иссиқлик сиғимлари фарқи учун қуйидаги ифодани оламиз.

$$c_p - c_v = \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (24.1.1.4)$$

24.1.2 Агар Ван-дер-Ваальс гази учун $\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T = \frac{a}{V^2}$ бўлса, шу газ учун моляр

иссиқлик сиғимлари $C_p - C_v$ ни аниқланг.

Ечиш:

Масаланинг шартида берилган $\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T = \frac{a}{V^2}$ ифодани, юқоридаги (24.1.1)

масалада олинган натижага қўямиз.

$$C_p - C_v = \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \left[\frac{a}{V^2} + p \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (24.1.2.1)$$

$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ ҳосилани Ван-дер-Ваальс тенгламасини дифференциаллаш орқали ҳисоблаймиз.

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{V-b}{T} \frac{1}{1 - \frac{2a(V-b)^2}{RTV^3}} \quad (24.1.2.2)$$

Қуйидаги натижани оламиз:

$$C_p - C_v = \frac{R}{1 - \frac{2a(V-b)^2}{RTV^3}} \quad (24.1.2.3)$$

24.1.3 Термодинамиканинг биринчи қонунидан фойдаланиб, ихтиёрий биржинсли изотроп системалар учун V ва T ўзгарувчиларда адиабатанинг дифференциал тенгламасини олинг.

Ечиш:

Термодинамиканинг биринчи қонунини қуйидаги кўринишда ёзамиз.

$$\delta Q = c_v dT + (c_p - c_v) \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV \quad (24.1.3.1)$$

Адиабатик жараён учун $\delta Q = 0$ бўлганлигидан,

$$dT + \left(\frac{c_p - c_v}{c_v}\right) \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV = 0 \quad (24.1.3.2)$$

ёки $dT + \left(\frac{\gamma - 1}{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}\right) dV = 0$, (24.1.3.3.) Бу ерда: $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$

$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ нинг кўриниши ҳолат тенгламасига боғлиқ, шу сабабли талабаларга системанинг ҳолат тенгламасини Клапейрон - Менделеев ёки Ван – дер - Ваальс тенгламаси кўринишида ифодалаб қаралаётган системалар учун адиабата тенгламасини чиқариш тавсия этилади.

24.1.4 $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ω частотали товушнинг газларда тарқалишини адиабатик жараён деб ҳисоблаш мумкин.

У ҳолда товуш тезлиги $\nu_t = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{AD}}$, ρ -зичлик, p – босим. Шу ҳол учун ν_t -

ни иссиқлик сиғимлари нисбати ва изотермик сиқилувчанлик коэффициенти орқали ифодаланг.

Ечиш:

$\rho = \frac{\mu}{V}$ ифодадан фойдаланиб, $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{ad}$ ни $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{ad}$ кўринишда ёзамиз.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{ad} = -\frac{V^2}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{ad} \quad (24.1.4.1)$$

p ва V ўзгарувчилар орқали адиабатанинг дифференциал тенгламасини ёзамиз.

$$dp + \gamma \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV = 0 \quad (24.1.4.2)$$

Бундан таққослаш йўли билан $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{ad} = \gamma \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ эканлигини топамиз.

Буни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин: $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{ad} = \gamma \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$

Натижада $\nu_t = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{AD}}$ учун қуйидаги натижани оламиз: $\nu_t = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{\rho \beta_T}\right)_{AD}}$, бу

ерда $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$. Товуш тезлиги учун аниқланган ифода экспериментал аниқланган

товуш тезлиги ва изотермик сиқилувчанлик коэффициентини билган ҳолда иссиқлик сиғимлари нисбатини аниқлашга имкон беради.

24.1.5 Термодинамиканинг биринчи қонунидан фойдаланиб ихтиёрий биржинсли система учун T ва V ўзгарувчиларда политропанинг дифференциал тенгламасини аниқланг. Политропанинг дифференциал тенгламасини идеал газ учун интегралланг.

Ечиш:

Термодинамиканинг биринчи қонунини ёзамиз.

$$\delta Q = c_V dT + (c_p - c_V) \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p dV, \quad \delta Q = c dT \quad (24.1.5.1)$$

Иккинчи формулани биринчисига қўйиб ва ҳамма ҳадларни $(c_p - c_V)$, га бўлиб политропанинг тенгламасини оламиз.

$$\frac{c - c_V}{c_p - c_V} dT = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p dV \quad (24.1.5.2)$$

Идеал газ учун :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p = \frac{T}{V} \quad (24.1.5.3)$$

Бўлганлиги учун дифференциал тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{c - c_V}{c_p - c_V} \frac{dT}{T} = \frac{dV}{V} \quad (24.1.5.4)$$

Биринчи тартибли дифференциал тенгламани интеграллаб, логарифмларни ташлаб юбориб, қуйидаги тенгламани оламиз.

$$TV^{n-1} = \text{const} \quad (24.1.5.5)$$

Худди шунга ўхшаш тенгламани p ва V ўзгарувчиларда оламиз.

$$pV^n = \text{const}, \quad \text{бу ерда : } n = \frac{c - c_p}{c - c_V} \quad (24.1.5.6)$$

24.1.6 Икки атомли идеал газнинг кенгайиш жараёни кўрсаткичи $n = 1,32$ га тенг бўлган политропа бўйича содир бўлади. Газнинг бажарган иши ва ютилган иссиқлик миқдори орасидаги муносабатни аниқланг.

Ечиш:

c ни c_V орқали ифодалаб, қуйидаги муносабатни оламиз:

$$\frac{c(n)}{c_V} = \frac{n - \lambda}{n - 1} \quad (24.1.6.1)$$

Қаралаётган ҳолда, $\lambda = 1,4$

$$\frac{c}{c_V} = -\frac{1}{4} \quad (24.1.6.2)$$

Масала шартига асосан, $TV^{n-1} = \text{const}$ формулада $n = 1,32$ эканлигини эътиборга олиб, қуйидаги тенгламани оламиз, $TV^{0,32} = \text{const}$ ва $\Delta T < 0$

эканлигини аниқлаймиз. Бу жараёнда ички энергия камайиб борганлиги сабабли;

$$\frac{|\Delta E|}{Q} = 4, \text{ ва } A = Q - \Delta E = 5Q, \text{ шундай қилиб, } \frac{E}{Q} = 5.$$

Бу жараёнда газ ютилган иссиқлик микдорига нисбатан 5 марта кўп иш бажаради. Бажарилган ишнинг катта (асосий) қисми газнинг ички энергиясининг камайиши ҳисобига бажарилади.

24.1.7 Узунлиги l бўлган стержен f куч билан чўзилмоқда. Деформацияни эластик деб ҳисоблаб, доимий узунликдаги c_l ва доимий чўзилишдаги c_f иссиқлик сиғимлари фарқини ҳисобланг. Эластик деформацияларда стерженнинг узунлиги таранглик кучи ва абсолют температуранинг функцияси ҳисобланади.

Ечиш:

Термодинамиканинг биринчи қонунига асосан,

$$\delta Q = dE - f dl \quad (24.1.7.1)$$

Ички энергиянинг l ва T ларнинг функцияси эканлигини эътиборга олиб, тўла дифференциалини ёзамиз ва юқоридаги тенгламани ўзгартирамиз.

$$\delta Q = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_l dT + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial l} \right)_T - f \right] dl \quad (24.1.7.2)$$

$$\text{Бундан: } c_l = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_l.$$

Стерженнинг узунлиги l ни температура ва кучнинг функцияси деб ҳисоблаб, $l = l(T, f)$ нинг тўлиқ дифференциалини ҳисоблаймиз.

$$dl = \left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)_f dT + \left(\frac{\partial l}{\partial f} \right)_T df \quad (24.1.7.3)$$

Қуйидаги белгилашни киритамиз: $\chi = \left(\frac{\partial E}{\partial l} \right)_T - f$ ва dl нинг ифодасини δQ га қўйиб қуйидагини оламиз.

$$\delta Q = \left[\left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_l + \chi \left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)_f \right] dT + \left(\frac{\partial l}{\partial f} \right)_T df \quad (24.1.7.4)$$

$$c_f = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_f + \chi \left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)_f \quad (24.1.7.5)$$

$$\text{У ҳолда: } c_f - c_l = \chi \left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)_f = \left[\left(\frac{\partial E}{\partial l} \right)_T - f \right] \left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)_f \quad (24.1.7.6)$$

ифода олинади.

24.1.8 Қуйидаги жараёнларда идеал газнинг иссиқлик сифими аниқлансин:

1. $pV^2 = \text{const}$; 2. $p^2V = \text{const}$.

Ечиш:

Термодинамиканинг биринчи қонуни қуйидагича ёзилади.

$$\delta Q = dE + p dV \quad (24.1.8.1)$$

Иссиқлик сифими $C = \frac{\delta Q}{dT}$ лардан фойдаланиб ички энергия ва ҳажмнинг функционал боғланишини эътиборга олиб иссиқлик сифими учун қуйидагини оламиз.

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dE + p dV}{dT} = \frac{dE}{dT} + \frac{p dV}{dT} \quad (24.1.8.2)$$

$$C_x = C_V + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_x \quad (24.1.8.3)$$

Идеал газнинг ички энергияси $E = C_V T + E_0$, ҳар қандай доимий x да идеал газнинг иссиқлик сифими C_V га тенг бўлади.

1. $x = pV^2 = \text{const}$ идеал газнинг ҳолат тенгламаси $pV = RT$, бундан $pV^2 = RTV = \text{const}$, бу ифодадан $V = \frac{x}{RT}$ ва $\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_x = -\frac{x}{RT^2} = -\frac{V}{T}$ ни ҳосил қиламиз.

$$(4.1.8.3) \text{га асосан } C_{pV^2} = C_V - \frac{pV}{T} = C_V - \frac{RT}{T} = C_V - R \text{ ҳосил бўлади.}$$

2. Бу ҳолда ҳам юқоридаги ҳисоблашларни бажарамиз ва

$$C_{p^2V} = C_V + 2R \text{ ни ҳосил қиламиз.}$$

24.1.9 Бир жинсли оғирлик кучи майдонида цилиндрда жойлашган, юқоридан чегараланмаган идеал газ устунининг иссиқлик сифими C_p га тенглиги исботлансин.

Ечиш:

Устундаги идеал газ иссиқлик мувозанатида бўлганлигидан устуннинг ҳамма нуқтасида газнинг температураси бир хил, газнинг босими эса баландлик ортиб борган сари пасайиб боради, яъни $dp = -\rho g dh$ бу ерда ρ – газнинг зичлиги.

Идеал газнинг ҳолат тенгламасини ёзамиз.

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \text{ дан } p = \frac{m}{V} \frac{1}{\mu} RT = \frac{\rho}{\mu} RT \quad (24.1.9.1)$$

$$dp = \frac{1}{\mu} RT d\rho = -\rho g dh \text{ Ушбу тенгликдан:}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\mu g}{RT} dh, \quad \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right), \quad (24.1.9.2)$$

Худди шундай босим учун ҳам

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right) \quad (24.1.9.3) \text{ ифода олинади.}$$

Цилиндрда жойлашган идеал газнинг потенциал энергияси

$$U = \int_0^{\infty} \rho g S h dh = RT, \quad (24.1.9.4) \text{ бу ерда: } S - \text{кўндаланг кесим юзаси}$$

Газ устунининг тўла энергияси ички ва потенциал энергияларнинг йиғиндисига тенг.

$$E_t = E + U = E(T) + RT \quad (24.1.9.5)$$

Иссиқлик сиғими эса қуйидагича аниқланади:

$$C = \left(\frac{\partial E_t}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = C_V + R = C_p \quad (24.1.9.6)$$

24.2 Масалалар

24.2.1 Агар кислород учун доимий босимдаги моляр иссиқлик сиғими

$20,8 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кмоль град.}}$ га тақрибан тенглигига асосланиб, кислород гази учун

доимий босимдаги ва доимий ҳажмдаги солиштирма иссиқлик сиғимларини топинг.

24.2.2 Уч киломоль неон ва икки киломоль азотдан ташкил топган газ

аралашмасининг доимий босимдаги солиштирма иссиқлик сиғимини топинг.

24.2.3 Икки атомли газнинг кенгайиши $pV^{\frac{1}{2}} = const$ тенглама билан ифодаланади. Шу жараён учун моляр иссиқлик сиғимини аниқланг. Агар бу жараён иссиқлик ютилиши билан ўтадиган бўлса газнинг температураси қандай ўзгаради.

24.2.4 Агар идеал газ учун $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = 0$ бўлса солиштира иссиқлик сиғимлари фарқи $c_p - c_v$ ни аниқланг.

24.2.5 T ва V ўзгарувчиларда идеал газ учун адиабата тенгламасини келтириб чиқаринг.

24.2.6 T ва V ўзгарувчиларда Ван-дер-Ваальс тенгламасига бўйсинувчи газ учун адиабата тенгламасини келтириб чиқаринг.

24.2.7 Идеал газда товушнинг тезлиги v_t температурага $\sqrt{T}$ кўринишида тўғри пропорционал эканлигини исботланг.

24.2.8 $p = aV, a = const$ тенглама билан ифодаланадиган жараён учун идеал газнинг моляр иссиқлик сиғимини аниқланг. Доимий босим остидаги иссиқлик сиғими температурага ва босимга боғлиқ эмас.

24.2.9 Ҳажм ўзгармас ҳолдаги иссиқлик сиғими c_v температурага боғлиқ бўлмаган ҳолда, политропик жараён учун иссиқлик сиғими c бўлган ҳол учун Ван-дер-Ваальс тенгламасига бўйсинувчи газ учун политропа тенгламасини аниқланг.

24.2.10 Ҳаво политропа кўрсаткичи $n = 1,45$ бўлган политропа жараёнида сиқилмоқда. Газнинг температураси қандай ўзгаради.?

24.2.11 Газ $pV^2 = const$ политропа бўйича сиқилмоқда..Агар $\gamma = \frac{5}{3}$ га тенг бўлса,моляр иссиқлик сиғимини ва босимнинг температурага боғланишини аниқланг.

24.2.12 Газни политропа кўрсаткичи $n = 0,9$ бўлган политропик жараёнда сиқилмоқда .Агар $\gamma = \frac{5}{3}$ га тенг бўлса,газнинг ички энергияси қандай ўзгаради?

24.2.13. Газ политропа кўрсаткичи $n = 0,8$ бўлган политропик жараёнда кенгаймоқда..Моляр иссиқлик сиғимини ва ички энергиянинг орттирилиши учун кетадиган ички энергияни аниқланг.Агар $\gamma = 1,4$ га тенг бўлса, температура қандай ўзгаради ?.

24.2.14. Газни политропик қисиш жараёнида газ устида $1,96 \cdot 10^5$ дж иш бажарилади ва 60 ккал иссиқлик узатилади.. $\gamma = 1,4$ деб ҳисоблаб политропа кўрсаткичини ҳисобланг.

24.2.15. Идеал газ учун иссиқлик сиғими $c = \alpha T, (\alpha = const)$ кўзринишда ўзгарса, идеал газ учун жараён тенгламасини топинг.

25. Термодинамиканинг II – қонуни, энтропия, термодинамиканинг асосий тенгламаси.

Термодинамиканинг иккинчи қонуни асосида ҳар қандай мувозанатдаги система учун янги бир қийматли ҳолат функцияси - энтропия киритилади.

Энтропия ностатик жараёнларда ҳар доим ўсувчи, яккаланган системалардаги квазистатик жараёнларда ўзгармайдиган ҳолат функцияси ҳисобланади.

Мувозанатдаги системалар учун энтропиянинг мавжудлиги математик кўринишда қуйидагича ёзилади:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (25.1)$$

Бу ифодани термодинамиканинг биринчи қонуни билан бирлаштирсак;

$$\delta Q = dU + \sum_i f_i d\lambda_i \quad (25.2)$$

Бу ифода квастатик жараёнлар учун термодинамиканинг асосий тенгламасига ўтади:

$$TdS = dU + \sum_i f_i d\lambda_i \quad (25.3)$$

Бир моль идеал газ учун энтропия ифодаси:

$$S = C_v \ln T + R \ln V + S_0 \quad (25.4)$$

Термодинамикада дастлабки ҳолатига қайтадиган жараёнлар, яъни ёпиқ ёки циклик жараёнлар муҳим аҳамиятга эга.

Иссиқлик машинасининг фойдали иш коэффициенти (ф.и.к.): $\eta = \frac{A}{Q_1}$, бу ерда A – машина томонидан цикл давомида бажарилган иш, Q_1 – машинанинг иситгичдан олган иссиқлик миқдори.

Иккита изотермик ва иккита адиабатик жараёнлардан тузилган Карно цикли учун ф.и.к. $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ га тенг, бу ерда Q_2 – совутгичга берилган иссиқлик миқдори. Қайтувчан Карно цикли учун ф.и.к. $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ ишчи жисмга боғлиқ бўлмасдан, фақат иситгич ва совутгичнинг температуралари билан аниқланади. Бу ерда T_1 - иситгичнинг T_2 - эса совутгичнинг температураси.

Термодинамиканинг биринчи ва иккинчи қонунларини қўллаб физикавий масалаларни ечиш иккита метод билан амалга оширилади:

1. Цикллар методи .

2. Термодинамик потенциаллар ёки характеристик функциялар методи.

Цикллар методида қаралаётган ҳодисани ўрганишда дастлаб қайтувчан цикл танланади, унга термодинамиканинг биринчи ва иккинчи қонунлари татбиқ этилади. Бу метод тўғри натижаларни олишга имкон берса ҳам баъзан ҳар бир конкрет ҳолда зарур циклни танлаш мураккаблигидан маълум қийинчиликларга олиб келади.

Кўп ҳолларда Гиббс томонидан ишлаб чиқилган термодинамик потенциаллар ёки характеристик функциялар методи қўлланилади.

Гиббснинг аналитик методида термодинамиканинг асосий тенгламасидан фойдаланиб, характеристик ҳолат функцияси аниқланади.

Асосий характеристик функциялар: ички энергия, энтропия, эркин энергия, Гиббснинг термодинамик потенциали, энтальпия.

Эркин энергия: $F = E - TS$, Гиббснинг термодинамик потенциали: $\Phi = E - TS + pV$, $\Phi = F + pV$, Энтальпия: $J = E + pV$

Содда системалар учун термодинамиканинг асосий тенгламасидан фойдаланиб, эркин энергияни T ва V нинг функцияси сифатида қараб қуйидаги муносабатни оламиз.

$$dF = -SdT - pdV \quad (25.5)$$

$F = F(T, V)$ - эркин энергиянинг биринчи тартибли ҳосиласи ҳолатнинг термик тенгламасини. $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$ ҳамда энтропияни аниқлайди $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$.

Эркин энергиядан олинган иккинчи тартибли ҳосилалар калорик катталикларни, масалан доимий ҳажмдаги иссиқлик сиғими $c_v = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$ ни ва изотермик сиқилувчанлик коэффициенти $\beta = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2} \right)$ ни аниқлайди.

$F = F(T, V)$ - эркин энергияни билган ҳолда системанинг калорик ҳолат тенгламасини олиш мумкин.

$$E(T, V) = F(T, V) - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \quad (25.6)$$

Ҳамма термодинамик потенциаллар система ҳолатининг бир қийматли ва аддитив функциялари ҳисобланади, уларнинг камайиши мос ҳолатларда бажарилган ишни аниқлайди. Термодинамик потенциаллар ўзаро боғланган ва улардан бири маълум бўлса бошқаларини аниқлаш мумкин.

25.1 Масала ечиш намуналари

25.1.1 Жисмнинг доимий босим остида кенгайиш ҳоли учун энтропиянинг ўзгаришини ҳисобланг.

Ечиш:

Энтропияни босим ва ҳажмнинг функцияси $S = S(V, p)$ сифатида қараб тўла дифференциалини қуйидагича ёзамиз.

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_p dV + \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_V dp, \quad (25.1.1.1)$$

Бу ерда $p = \text{const}$ ҳолида

$$(dS)_p = \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_p dV = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p dV, \quad (25.1.1.2)$$

Термодинамиканинг иккинчи қонуни ифодасини ёзамиз, бу ерда энтропияни температура ва босимнинг функцияси сифатида қараймиз.

$$\delta Q = T dS = T \left[\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_p dp \right] \quad (25.1.1.3)$$

Доимий босимдаги C_p иссиқлик сифимини $\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p$ ҳосила орқали ифодалаймиз .

$$(\delta Q)_p = T \left[\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p dT \right] \quad (25.1.1.4)$$

Бу ифодада юқоридаги ифодада,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p = \frac{C_p}{T} \quad (25.1.1.5)$$

Энтропия дифференциалининг босим ўзгармаган ҳолдаги ифодасида ҳажм кенгайиш коэффиценти ифодасини эътиборга олиш мақсадида ёзамиз.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p = \frac{1}{\alpha V}, \quad (25.1.1.6)$$

Энтропия дифференциалининг босим ўзгармаган ҳолдаги ифодаси юқоридагиларни эътиборга олган ҳолда қуйидагича ёзилади.

$$(dS)_p = \frac{C_p}{T \alpha V} dV, \quad (25.1.1.7)$$

α нинг ишорасига қараб изобарик кенгайишда энтропия ортиши ҳамда камайиши мумкин.

25.1.2 Бир моль идеал газнинг политропа $pV^n = \text{const}$ бўйича V_1 ҳажмдан V_2 ҳажмгача кенгайишида энтропиянинг ўзгаришини ҳисобланг. Изотермик, адиабатик ва изобарик жараёнлар каби ҳусусий ҳолларни қабаб чиқинг. Жараёнларни қайтувчан деб ҳисобланг.

Ечиш:

Бу ҳолда идеал газнинг энтропиясини p ва V ўзгарувчилар орқали ифодалаш мақсадга мувофиқ.

$$S = C_V \ln p + C_p \ln V + S'_0 \quad (25.1.2.1)$$

Энтропиянинг ўзгариши қуйидагича ифодаланади:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = C_p \ln \frac{V_2}{V_1} + C_V \ln \frac{p_2}{p_1}, \quad (25.1.2.2)$$

p ва V ўзгарувчилар орқали ифодаланган политропа тенгламасидан фойдаланиб:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{-n} \quad (25.1.2.3)$$

Шу сабабли энтропиянинг ўзгариши:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = (C_p - nC_V) \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (25.1.2.4)$$

1. Изотермик жараёнда $n = 1$,

$$C_p - nC_V = R, \quad (\Delta S)_{izot} = R \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (25.1.2.5)$$

2. Адиабатик жараёнда $n = \gamma$,

$$C_p - nC_V = 0, \quad (\Delta S)_{ad} = 0 \quad (25.1.2.6)$$

3. Изобарик жараёнда $n = 0$,

$$(\Delta S)_{izob} = C_p \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (25.1.2.7)$$

25.1.3 Энтропия ҳолатнинг бир қийматли функцияси эканлигига асосланиб, ихтиёрий бир жинсли система учун қуйидаги муносабатнинг ўринли эканлигини исботланг.

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \lambda} \right)_T = T \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_\lambda - f, \quad (25.1.3.1)$$

бу ерда f – ташқи λ – параметрга мос келувчи умумлашган куч.

Ечиш:

Термодинамиканинг биринчи ва иккинчи қонунларидан;

$$dS = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_\lambda dT + \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial E}{\partial \lambda} \right)_T + f \right] d\lambda \quad (25.1.3.2)$$

Энтропияни T ва λ – нинг функцияси сифатида қараб, энтропиянинг тўла дифференциалини қуйидагича ёзамиз.

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_\lambda dT + \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda} \right)_T d\lambda \quad (25.1.3.3)$$

Бу иккита тенгламадан :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_\lambda = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_\lambda, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda} \right)_T = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial E}{\partial \lambda} \right)_T + f \right]. \quad (25.1.3.4)$$

Аралаш ҳосилаларнинг тенглигидан юқоридаги муносабат исботини топади.

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \lambda} \right)_T = T \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_\lambda - f \quad (25.1.3.5)$$

25.1.4 C_v доимий бўлган Ван-дер-Ваальс тенгламасига бўйсинувчи 1-моль газнинг энтропиясини топинг. Шу газ учун адиабата тенгламасини олинг.

Ечиш:

Термодинамиканинг иккинчи қонунидан;

$$dS = \frac{\delta Q}{T}, \quad (25.1.4.1)$$

δQ ни термик ва калорик тенгламаларнинг дифференциал боғланишидан фойдаланиб қуйидагича ёзамиз:

$$\delta Q = C_v dT + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dV = C_v dT + \frac{RT}{V-b} dV \quad (25.1.4.2)$$

$$\text{У ҳолда : } dS = C_v \frac{dT}{T} + \frac{R}{V-b} dV \quad (25.1.4.3)$$

Тенгламани интеграллаймиз:

$$S = C_v \ln T + R \ln(V-b) + S_0 \quad (25.1.4.4)$$

Қайтувчан адиабатик жараённинг тенгламаси энтропиянинг доимийлиги билан характерланади.

$$C_v \ln T + R \ln(V-b) = \text{const}, \quad T^{C_v} (V-b)^R = \text{const} \quad (25.1.4.5)$$

25.1.5 Ҳолат тенгламаси $p = p_0(1 + \alpha T - bV)$; $C_v = \text{const}$ кўринишда бўлган газ учун адиабата тенгламаси топилсин.

Ечиш:

Энтропияни аниқлаш формуласи ва термодинамиканинг 1-қонуни ифодасидан

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dE + pdV}{T} = \frac{C_v dT + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p \right] dV}{T} = \frac{C_v dT}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV \quad (25.1.5.1)$$

Энтропия формуласини ёзамиз.

$$S = S_0 + \int C_v \frac{dT}{T} + \int \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV = S_0 + C_v \ln T + \alpha p_0 V \quad (25.1.5.2)$$

Адиабатик жараёнда $S - S_0 = \Delta S = \text{const}$

Шунга кўра $\ln T = \frac{\Delta S - \alpha p_0 V}{C_v}$, бундан температурани аниқлаймиз

$$T = \exp \left(\frac{\Delta S - \alpha p_0 V}{C_v} \right) = \text{const} \quad (25.1.5.3)$$

25.2 Масалалар

25.2.1 Мувозанатдаги изотермик нурланишнинг энтропиясини ҳисобланг.

25.2.2 100 г. водород газининг V_1 ҳажмдан $V_2 = 10 V_1$ ҳажмгача изотермик кенгайишида энтропиянинг ўзгаришини ҳисобланг.

25.2.3 Бир киломоль бир атомли идеал газнинг $pV^3 = \text{const}$ тенглама бўйича политропик кенгайишида энтропиянинг ўзгаришини ҳисобланг. $V_1 = 1 \text{ м}^3$, $V_2 = 2,718 \text{ м}^3$. $C_v = \frac{3}{2} R$.

25.2.4 Бир килограмм ҳавонинг температураси 15° С дан 150° С гача ўзгариб изобарик кенгайишида энтропиянинг ўзгаришини ҳисобланг.

$$c_p = 0,24 \frac{\text{kkal}}{\text{kggrad}}.$$

26. Қайтувчи ва қайтмас жараёнлар, термодинамиканинг асосий тенграмаси. Карно цикли

Иссиқлик машинасининг фойдали иш коэффициенти (ф.и.к.): $\eta = \frac{A}{Q_1}$, бу ерда A – машина томонидан цикл давомида бажарилган иш, Q_1 – машинанинг иситгичдан олган иссиқлик миқдори.

Иккита изотермик ва иккита адиабатик жараёнлардан тузилган Карно цикли учун ф.и.к. $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ га тенг. Q_2 – совутгичга берилган иссиқлик миқдори.

Қайтувчан Карно цикли учун ф.и.к. $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ ишчи жисмга боғлиқ бўлмасдан, фақат температуралар билан аниқланади. Бу ерда T_1 -иситгичнинг T_2 -эса совутгичнинг температураси.

Термодинамиканинг биринчи ва иккинчи қонунларини қўллаб физикавий масалаларни ечиш иккита метод билан амалга оширилади:

1. Цикллар методи . 2. Термодинамик потенциаллар ёки характеристик функциялар методи.

Цикллар методида қаралаётган ҳодисани ўрганишда дастлаб қайтувчан цикл танланади ва унга термодинамиканинг биринчи ва иккинчи қонунлари татбиқ этилади. Бу метод тўғри натижаларни олишга имкон берса ҳам баъзан ҳар бир конкрет ҳолда зарур циклни танлаш мураккаблигидан маълум қийинчиликларга олиб келади.

26.1 Масала ечиш намуналари

26.1.1 Азотнинг маълум бир массаси 1 атм. босимда 10 л.ҳажм эгаллаган, 3 атм. босимда эса 4 л. ҳажм эгаллаган. Биринчи ҳолатдан 2-ҳолатга ўтиш икки этапда дастлаб изобара бўйича сўнгра эса изохора бўйича амалга оширилган.

Ички энергиянинг ўзгаришини, бажарилган ишни ва ютилган иссиқлик миқдорини аниқланг. Худди шундай ҳисоблашларни тескари жараён учун ҳам, яъни дастлаб изохора ва сўнгра изобара бўйича ҳам ўтказинг, ҳар иккала ҳолдаги ҳисоблашларни солиштиринг.

Ечиш:

Ҳар иккала ўтишни p, V диаграммада тасвирлаймиз. Ички энергиянинг ўзгаришини, газни идеал газ ва $c_v = \frac{5}{2} \nu R$ ни кўринишда ҳисоблаган ҳолда аниқлаймиз.

$$\Delta E_1 = \frac{5}{2} \nu R [(T_A - T_1) + (T_2 - T_A)]. \quad (26.1.1.1)$$

Абсолют температури босим ва ҳажм орқали ифодалаб, юқоридаги ифодани қуйидагича ёзамиз.

$$\Delta E_1 = \frac{5}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) \quad (26.1.1.2)$$

Сон қийматларни қўйиб, ҳисоблаб қуйидагиларни оламиз.

$$\Delta E_1 = 5,065 \cdot 10^2 \text{ Дж.}$$

Қаралаётган ҳолда системанинг бажарган иши:

$$A_1 = p_1 (V_2 - V_1) = -605,8 \text{ Дж.}$$

Иссиқлик миқдори: $Q_1 = \nu c_p (T_A - T_1) + \nu c_v (T_2 - T_A)$, (26.1.1.3)

$$c_p = \frac{7}{2} \nu R \text{ бўлганлигидан}$$

$$Q_1 = \frac{7}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) + \frac{5}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1), \quad Q_1 = -101,3 \text{ Дж.} \quad (26.1.1.4)$$

Масалани иккинчи ҳолат учун мустақил ҳисоблаш таклиф этилади..

26.1.2 Цикли қуйидаги жараёнлардан иборат бўлган карбюраторли ички ёнув двигателининг ф.и.к. ҳисоблансин: а) Ёнувчи аралашмани сўриш: $p_0 = \text{const}$, ҳажм V_1 дан V_2 га ортади. б) V_1 ҳажм ва p_1 босимгача адиабатик сиқилади. в) Ёнилғи учқундан ёндирилади; Доимий ҳажмда босим p_2 гача, T_2 температурагача ортади. г) Ёниш маҳсулотларининг адиабатик кенгайиши (ишчи ҳаракат) -ҳажм V_2 гача ортади, температура эса T_3 гача пасаяди. д) Чиқариш клапани очилади, босим p_0 гача, температура T_0 гача пасаяди. е) Ёниш маҳсулотларининг атмосферага чиқариш жараёни.

Ечиш:

Фараз қилайлик $1 \Rightarrow 2$ ўтишда, изохорик жараёнда ишчи жисмнинг олган иссиқлик миқдори - Q_1 .

$$Q_1 = c_v(T_2 - T_1) \quad (26.1.2.1)$$

$3 \Rightarrow 0$ изохорик жараёнда берилаётган иссиқлик миқдори - $Q_2 = c_v(T_3 - T_0)$

Q_1 ва Q_2 ни фойдали иш коэффициентининг формуласига қўямиз.

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_3 - T_0}{T_2 - T_1} \quad (26.1.2.2)$$

Келгусидаги алмаштиришларда идеал газ учун адиабата тенгламасидан фойдаланамиз.

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_0 V_2^{\gamma-1} \quad (26.1.2.3)$$

$$T_1 = T_0 \varepsilon^{\gamma-1} \quad (26.1.2.4)$$

Бу ерда: $\varepsilon = \frac{V_2}{V_1}$ - сиқилиш даражаси, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$. Худди шундай T_2 ни T_3 орқали ифодалаймиз.

$$T_2 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_2^{\gamma-1}, \quad (26.1.2.5)$$

$$\text{Агар } \varepsilon = \frac{V_2}{V_1} \text{ дан фойдалансак, бу ҳолда : } T_2 = T_3 \varepsilon^{\gamma-1} \quad (26.1.2.6)$$

Қаралаётган цикл учун ф.и.к. нинг қуйидаги ифодасини оламиз

$$\eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}} \quad (26.1.2.7)$$

26.1.3 Иккита изохора ва иккита изотермадан ташкил топган Стирлинг цикли бўйича ишловчи, идеал газли иссиқлик машинасининг ф.и.к. сини ҳисобланг. Ф.и.к. нинг қийматини, шундай T_1 ва T_2 температураларда Карно цикли бўйича ишловчи машинанинг ф.и.к. си билан солиштиринг.

Ечиш:

Циклни p, V диаграммада тасаввур қиламиз.

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (26.1.3.1)$$

$$\text{Бу ерда: } Q_1 = RT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} + c_v(T_1 - T_2); \quad (26.1.3.2)$$

$$Q_2 = RT_2 \ln \frac{V_1}{V_2} + c_v (T_1 - T_2) \quad (26.1.3.3)$$

Q_1 ва Q_2 ларни η нинг ифодасига қўямиз, алмаштиришлар ўтказамиз.

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + c_v \frac{T_1 - T_2}{R \ln \frac{V_1}{V_2}}} \quad (26.1.3.4)$$

$$\eta_{\text{карно}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (26.1.3.4)$$

Бу иккала ифодани солиштирсак, $\eta < \eta_{\text{карно}}$ (Бу ерда $\eta_{\text{карно}}$ - Карно цикли учун Ф.И.К.) эканлиги келиб чиқади.

26.1.4. Сувни адиабатик совутиш ёрдамида 4°C температурага эришиб бўлмаслигини исботланг.

Ечиш:

Сувдан ишчи жисм сифатида фойдаланиб, S, T диаграммада Карнонинг қайтувчан циклини қараб чиқамиз. Фараз қиламиз иситгичнинг температураси $T_1 = 280^\circ\text{K} = 7^\circ\text{C}$ ва совутгичнинг температураси $T_2 = 277^\circ\text{K} = 4^\circ\text{C}$, Термодинамиканинг иккинчи қонунига асосан

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0, \quad (26.1.4.1) \text{ ёки}$$

$$\Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41} = 0 \quad (26.1.4.2)$$

Изотермик кенгайиш жараёнида 1- 2 (расмга қаранг) энтропиянинг ўзгариши қуйидагича.

$$\Delta S_{12} = \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_1}{280} > 0 \quad (26.1.4.3)$$

Адиабатик жараёнлар учун $\Delta S_{23} = \Delta S_{41} = 0$

Термодинамиканинг 1-қонуни ва термик ва калорик тенгламалар орасидаги дифференциал боғланишдан фойдаланиб қуйидагини оламиз:

$$\delta Q = c_v dT + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dV \quad (26.1.4.4)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \text{ ҳосилани қуйидаги } \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -1 \quad (26.1.4.5)$$

айниятдан ҳисоблаймиз ва ҳажмий кенгайиш α ва изотермик сиқилувчанлик β коэффициентлари ифодаларини эътиборга олиб, қуйидагини топамиз:

$$\delta Q = c_V dT + \frac{T\alpha}{\beta} dV \quad (26.1.4.5)$$

Изотермик сиқилиш жараёнида 4^0C да $\alpha = 0$ бўлганда $\delta Q = 0$ бўлади, шунинг учун $\Delta S_{34} = 0$, демак $\oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_1}{280} \neq 0$, бу термодинамиканинг иккинчи қонунига зид бўлади. Демак 2-3 жараёни сув билан амалга ошириш мумкин эмас, демак 4^0C температурага сувни адиабатик кенгайтириш ёрдамида эришиб бўлмайди.

26.1.5 Чексиз кичик Карно циклини қараймиз. Карно теоремасидан фойдаланиб физикавий бир жинсли, изотроп жисм учун ички энергия ва иссиқлик сифими учун қуйидаги муносабатларнинг қаноатлантирилишини исботланг.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p; \quad \left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V$$

Ечиш:

p, V диаграммада иккита чексиз кичик BC ва AD адиабата ва AB ва CD изотермаларни ифодалаймиз. Системанинг AB изотермада олган Q_1 иссиқлик миқдори

$$Q_1 = A_1 + \Delta U \quad (26.1.5.1)$$

бу ерда: $A_1 = p\Delta V$ -системанинг AB изотерма бўйлаб бажарган иши,

$$\Delta U = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \Delta V - \text{эса қаралаётган жараёнда ички энергиянинг ўзгариши. } ABCDA$$

циклда бажарилган иш, катта аниқлик билан паралеллограмм деб ҳисоблаш

мумкин бўлган фигуранинг юзи билан ифодаланади. Шу сабабли

$$A = S_{ABCD} \approx S_{ABC^1D^1} = \Delta p \Delta V \quad (26.1.5.2)$$

$$\text{Ундан ташкари : } \Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \Delta T, \Delta T = T_1 - T_2 \quad (26.1.5.3)$$

$$\text{Карно теоремасига асосан: } \frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (26.1.5.4)$$

$$\text{Бу тенгламага: } Q_1 = \left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right] \Delta V \quad (26.1.5.5)$$

$$A = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \Delta V \Delta T \quad (26.1.5.6)$$

ларни қўйиб қуйидагини оламиз:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \quad (26.1.5.7)$$

(26.1.5.7) дан қуйидаги ифодани оламиз

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_V = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p$$

Охирги тенгликнинг ҳар иккала томонидан T бўйича ҳосила оламиз ва

$$\text{қуйидаги } \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} = \left(\frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T \quad (26.1.5.8)$$

(26.1.5.8) ни эътиборга олган ҳолда (26.1.5.9) ни аниқлаймиз.

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right)_V \quad (26.1.5.9)$$

26.2 Масалалар

26.2.1 Идеал иссиқлик машинаси Карно цикли бўйича ишлайди. Агар бир цикл давомида 500 кГм иш бажарилганлиги ва совутгичга 5,4 ккал иссиқлик берилганлиги маълум бўлса циклнинг ф.и.к. сини аниқланг.

26.2.2 Карно цикли бўйича ишловчи иссиқлик машинаси бир цикл давомида $8 \cdot 10^4$ дж. Иш бажаради. Термостатларнинг температуралари 100°C ва 0°C . Топиш керак: 1. Бир циклда ишчи жисмнинг иситгичдан олаётган иссиқлик миқдорини. 2. Ҳар циклда совутгичга бериладиган иссиқлик миқдорини; 3. Циклнинг ф.и.к. сини.

26.2.3 Изохорик, адиабатик ва изобарик жараёнлардан ташкил топган Ленуар циклининг ф.и.к. сани топинг. Цикл параметри бу сиқиш даражаси $\delta = \frac{P_2}{P_1}$ ҳисобланади.

26.2.4 Иккита изобара ва иккита адиабатик жараёнлардан ташкил топган газ трубинали қурилма цикли учун ф.и.к. топилсин. Адиабатик жараёнда босимнинг кўтарилиш даражаси $\delta = \frac{P_2}{P_1}$.

26.2.5 Карно цикли бўйича ишловчи иссиқлик машинаси бир цикл давомида $10 \cdot 10^4$ Дж. иш бажаради. Термостатларнинг температуралари 200°C ва 50°C . Топиш керак: 1. Бир циклда ишчи жисмнинг иситгичдан олаётган иссиқлик миқдорини. 2. Ҳар циклда совутгичга бериладиган иссиқлик миқдорини; 3. Циклнинг ф.и.к. сани.

26.2.6 Идеал иссиқлик машинаси Карно цикли бўйича ишлайди. Агар бир цикл давомида 300 кГм иш бажарилганлиги ва совутгичга 7,4 ккал иссиқлик берилганлиги маълум бўлса циклнинг ф.и.к. сани аниқланг.

27. Ҳолатнинг термик ва калорик тенгламалари, Термодинамиканинг III – қонуни, Нернст теоремаси.

Квазистатик жараёнда система томонидан олинган ёки берилган иссиқлик миқдорини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\delta Q = \theta dS \quad (27.1)$$

бу ерда $dS = d\left(\frac{E}{\theta} + \ln Z\right)$ тўлиқ дифференциал. $S = d\left(\frac{E}{\theta} + \ln Z\right)$ системанинг Гиббснинг кичик каноник тақсимотини чиқаришда киритилган, (ўлчамсиз) энтропияси. (27.1) термодинамика иккинчи қонунининг миқдорий ифодаси дейилади.

Термостат билан мувозанат ҳолатда бўлган макроскопик системада қандайдир квазистатик жараён ўтаётган бўлса, энергия ўзгариши қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$dE = \delta A + \delta Q = -\Lambda d\lambda + \theta d\left(\frac{E}{\theta} + \ln Z\right) = -\Lambda d\lambda + \theta dS \quad (27.2)$$

$$\theta dS = dE + \Lambda d\lambda \quad (27.3)$$

Оддий система учун $\Lambda = p, \lambda = V$ эканлигини ҳисобга олиб, ифодани қайта ёзамиз:

$$\theta dS = dE + p dV \quad (27.4)$$

(27.3) ва (27.4) термодинамиканинг асосий тенгламалари деб юритилади.

$$\text{Энергиянинг ўзгариши ифодаси } dE = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_\lambda dS + \left(\frac{\partial E}{\partial \lambda}\right)_S d\lambda \quad (27.5)$$

$$\theta = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_\lambda \quad (27.6), \quad \theta > 0 \text{ шартидан, ички энергия энтропиянинг монотон}$$

функцияси эканлиги келиб чиқади. Бу ифодадан $dS = \frac{\delta Q}{\theta}$, dS – тўлиқ дифференциал бўлганлиги учун $\frac{\delta Q}{\theta}$ ҳам тўлиқ дифференциал бўлади.

$$\text{Клаузиус тенгсизлиги : } \oint dS = \oint \frac{\delta Q}{\theta} = 0 \quad (27.7)$$

Энтропия қуйидаги $S = \frac{E}{\theta} + \ln Z$ кўринишни олади. Система ҳолат функциясининг кўринишини ўзгартирамиз. Система статистик мувозанат ҳолатида ягона битта $\varepsilon_{eh} = \bar{\varepsilon}$ энергияли ҳолатда бўлиши мумкинлигини ҳисобга олсак:

$$Z = \sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i) = \exp\left(-\frac{\bar{\varepsilon}}{\theta}\right) \Omega(\bar{\varepsilon}) = \exp\left(-\frac{E}{\theta}\right) \Omega(\bar{\varepsilon}) \quad (27.8.)$$

Бу ерда йиғиндида энг катта ҳаддан бошқаларини ташлаб юбордик.

Макроскопик квазиберк системанинг энтропияси мувозанат ҳолатда ётган системанинг, мультипликативлик қонунига бўйсинувчи, квант ҳолатлар сони $\Omega(\bar{\varepsilon})$ нинг логарифмига тенглиги олинади

$$S = \frac{E}{\theta} + \ln\left[\exp\left(-\frac{E}{\theta}\right) \Omega(\bar{\varepsilon})\right] = \ln \Omega(\bar{\varepsilon}) \quad (27.9.)$$

Мураккаб система энтропияси система қисмларининг энтропияларининг йиғиндисига тенг, $S = \ln \Omega = \sum_n \ln \Omega_n = \sum_n S_n$ (27.10.) дейилган аддитивлик қонунияти келиб чиқади

Мураккаб система ҳолатининг термик ва калорик тенгламалари орасидаги боғланиш. $\left(\frac{\partial f_i}{\partial T}\right)_{\lambda_i} = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial E}{\partial \lambda_i}\right) + f_i \right]$ (27.11)

Оддий система учун бундай боғланиш қуйидагича ёзилади:

$$T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + p \quad (27.12)$$

Энтропияни ҳисоблаш формуласи қуйидаги ёзилади:

$$S - S_0 = \int \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{\lambda_i} dT + T \sum_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial T}\right)_{\lambda_i} d\lambda_i \right] \quad (27.13.)$$

Термодинамиканинг учинчи қонуни (Нернст, 1906 йил) тўғридан-тўғри паст температураларда ўтадиган жараёнларга татбиқ қилинади. Аммо, учинчи қонунни кенг температура интервалида татбиқ қилиш ҳам мумкин.

Учинчи қонун бўйича: нол изотерма нол изоэнтропия ва адиабата билан мос тушади $\lim[S(T, \chi_2) - S(T, \chi_1)] \rightarrow 0$ (27.14) , Бу Нернстнинг иссиқлик теоремаси деб юритилади. Термодинамиканинг учинчи қонундан қуйидаги натижалар келиб чиқади:

1. Абсолют нол температурага етишиш мумкин эмас.
2. $T \Rightarrow 0 \text{ K}$ да термик коэффициентлар нолга интилади.
3. $T \Rightarrow 0 \text{ K}$ да иссиқлик сиғимлари нолга тенг бўлади.
4. $T \Rightarrow 0 \text{ K}$ да система энтропиясини ҳисоблаш фақат иссиқлик сиғимларининг температурага боғлиқлигини топишга олиб келади, яъни

$$S(T, V) = \int_0^T \frac{C_V}{T} dT, S(T, p) = \int_0^T \frac{C_p}{T} dT \quad (27.16.)$$

Учинчи қонунга асосан, $T \Rightarrow 0$ да энтропия $S \rightarrow 0$ га интилади. Термодинамиканинг учинчи қонуни системанинг квант хусусиятидан келиб чиқади ва барча уринишларга қарамасдан классик физика доирасида уни назарий исбот қилиб бўлмайди.

27.1. Масала ечиш намуналари

27.1.1. Термик тенгламасида босим температуранинг чизикли функцияси моддалар учун иссиқлик сиғими c_v ҳажмга боғлиқ эмаслигини исботланг.

Ечиш:

Иккита эркинлик даражасига эга бўлган бир жинсли системалар учун

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{c_v dT + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dV}{T} \quad (27.1.1.1)$$

Аралаш ҳосилаларнинг тенглигидан фойдаланиб қуйидаги ифодани ёзамиз.

$$\frac{c_v}{T} = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \quad (27.1.1.2)$$

бу ифодадан аралаш ҳосила оламиз;

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{c_v}{T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \quad (27.1.1.3)$$

T -температура ҳажмга боғлиқ эмаслигидан юқоридаги ифодани

$$\frac{\partial c_v}{\partial V} = T \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \quad (27.1.1.4)$$

Бу ифодадан кўринадики босим p температурага боғлиқ эмас у ҳолда

$$\left(\frac{\partial c_v}{\partial V} \right)_T = 0, \text{ демак } c_v \text{ ҳажмга боғлиқ эмас.}$$

Идеал газнинг ва Ван-Дер-Ваальс газининг солиштирма иссиқлик сиғими c_v шундай хусусиятларга эга ва ҳар иккала ҳолда ҳам босим температуранинг чизикли функцияси ҳисобланади.

27.1.2 Мувозанатли изотермик нурланишнинг энтропияси S ҳисоблансин.

Ечиш:

Мувозанатли изотермик нурланишнинг босими $p = \frac{u}{3}$, бу ерда u -энергия зичлиги, Стефан-Больцман қонунига асосан

$$u = \sigma T^4 \quad (27.1.2.1)$$

Термодинамиканинг 2-қонунига асосан

$$dS = \frac{1}{T} d(uV) + \frac{p}{V} dV, \quad (27.1.2.2)$$

Бу ерда uV – мувозанатли нурланишнинг ички энергияси

$$dS = \frac{1}{T} d(\sigma T^4 V) + \frac{\sigma T^4}{3V} dV = 4\sigma T^3 V dT + \sigma T^3 dV + \frac{\sigma T^4}{3V} dV = d\left(\frac{4}{3} \sigma T^3 V\right) \quad (27.1.2.3)$$

Бу ифодада $V = 0$, бўлганда $S = 0$ бўлишидан қуйидагини топамиз.

$$S = \frac{4}{3} \sigma T^3 V \quad (27.1.2.4)$$

27.1.3 Нернст теоремасидан фойдаланиб қаттиқ жисм билан мувозанатда жойлашган газ учун энтропия доимийси S_0 аниқлансин.

Ечиш:

Мувозанат ҳолатда газ ва қаттиқ жисмнинг химиявий потенциаллари

$$\mu_1 = \mu_2 \quad (27.1.3.1)$$

Газнинг химиявий потенциалли

$$\mu_1 = U_1 - TS_1 + p\nu_1 \quad (27.1.3.2)$$

Бу ерда S_1 – бир моль газнинг энтропияси ва қуйидагича кўринишда ифодаланади.

$$S_1 = C_p^{(1)} \ln T - R \ln p + S_0 \quad (27.1.3.2)$$

Шунинг учун :

$$\mu_1 = U_1 - T(C_p^{(1)} \ln T - R \ln P + S_0) + p\nu_1 \quad (27.1.3.3)$$

Қаттиқ жисмнинг μ_2 химиявий потенциалли

$$\mu_2 = U_2 - T \int_0^T \frac{C_p^{(2)}}{T} dT + p\nu_2 \quad (27.1.3.4)$$

27.1.4 Паст температуралар соҳасида Ван-Дер-Ваальс тенгламасининг яроқсизлиги исботлансин.

Ечиш:

$$\text{Ван-Дер-Ваальс тенгламаси} \left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT \quad (27.1.4.1)$$

дан қуйидагини ҳисоблаймиз.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b} \quad (27.1.4.2)$$

Бу ифода $T \rightarrow 0$ да нолга интилмайди. Бу Нернст теоремасининг

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = 0 \quad \text{натижасига асосан Ван-Дер-Ваальс тенгламасининг } T \rightarrow 0 \text{ да}$$

ўринли эмаслигини кўришимиз керак.

28. Термодинамик потенциаллар. Идеал газ учун термодинамик потенциаллар. Гиббс-Гельмгольц тенгламаси

Термодинамик потенциаллар ёки характеристик функциялар методи Гиббс томонидан ишлаб чиқилган, унинг аналитик методида термодинамиканинг асосий тенгламасидан фойдаланиб, характеристик ҳолат функцияси аниқланади.

Асосий характеристик функциялар ёки термодинамик потенциаллар: ички энергия, энтропия, эркин энергия, Гиббснинг термодинамик потенциалли, энтальпия.

Эркин энергия: $F = E - TS$, (28.1), Гиббснинг термодинамик потенциалли:

$$\Phi = E - TS + pV, \quad \Phi = F + pV \quad (28.2.), \quad \text{Энтальпия: } \chi = E + pV \quad (28.3)$$

Содда системалар учун термодинамиканинг асосий тенгламасидан фойдаланиб, эркин энергияни T ва V нинг функцияси сифатида қараб қуйидаги муносабатни оламиз.

$$dF = -SdT - pdV \quad (28.4)$$

$F = F(T, V)$ - эркин энергиянинг биринчи тартибли ҳосиласи ҳолатнинг

$$\text{термик тенгламасини } p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \text{ ҳамда энтропияни аниқлайди } S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V.$$

Эркин энергиядан олинган иккинчи тартибли ҳосилалар калорик катталикларни, масалан доимий ҳажмдаги иссиқлик сиғимини $c_v = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$ ва изотермик сиқилувчанлик коэффициентини аниқлайди $\beta = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2} \right)$

$F = F(T, V)$ - эркин энергияни билган ҳолда системанинг калорик ҳолат тенгламасини олиш мумкин.

$$E(T, V) = F(T, V) - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \quad (28.5)$$

Ҳамма термодинамик потенциаллар система ҳолатининг бир қийматли ва аддитив функциялари ҳисобланади, уларнинг камайиши мос ҳолатларда бажарилган ишни аниқлайди. Термодинамик потенциаллар ўзаро боғланган ва улардан бири маълум бўлса бошқаларини аниқлаш мумкин.

28.1 Масала ечиш намуналари

28.1.1 Қандай ўзгарувчиларга нисбатан бир жинсли изотроп система учун ички энергия E термодинамик потенциал ҳисобланади. Бу функциянинг характеристик ҳоссаларини аниқланг.

Ечиш:

Термодинамиканинг асосий тенгламасидан

$$dE = TdS - pdV \quad (28.1.1.1)$$

кўринадик, ички энергия E энтропия S , ҳажм V ўзгарувчиларга нисбатан термодинамик потенциал ҳисобланади. $E(S, V)$ деб ҳисоблаб тўла дифференциалини ҳисоблаймиз.

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V dS + \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S dV \quad (28.1.1.2)$$

Иккита тенгламани ўзаро солиштириб,

$$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V \quad (28.1.1.3)$$

$$\text{Адиабата тенгламаси } p = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S \quad (28.1.1.4)$$

$E(S,V)$ дан иккинчи тартибли ҳосила оламиз ва солиштириш йўли билан қуйидагиларни аниқлаймиз.

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2}\right)_V = \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S, \quad (28.1.1.5)$$

Бу ифодалардан иссиқлик сифими c_V ва адиабатик сиқилувчанлик коэффиценти қуйидагига тенглиги кўринади:

$$c_V = \frac{T}{\left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2}\right)_V} \quad (28.1.1.6)$$

$$\beta_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = \frac{1}{V \left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\right)_S} \quad (28.1.1.7)$$

Иккинчи тартибли ҳосилаларнинг тенглиги асосида қуйидаги тенгламага келамиз

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V \quad (28.1.1.8)$$

28.1.2 Мувозанатдаги нурланиш учун қуйидаги характеристик функцияларни ҳисобланг: Ички энергия – E , Эркин энергия – F , Термодинамик потенциал – Φ , Энтальпия – χ .

Ечиш:

E, F, Φ, χ функциялар қуйидаги ўзгарувчилар орқали ифодаланганда характеристик функциялар (термодинамик потенциаллар) ҳисобланади.

$$E = E(S, V), \quad F = F(T, V), \quad \Phi = \Phi(T, p), \quad \chi = \chi(S, p) \quad (28.1.2.1)$$

Стефан-Больцман қонунига асосан мувозанатли нурланишнинг энергия зичлиги температуранинг тўртинчи даражасига пропорционал, шунинг учун ички энергия u қуйидагига тенг.

$$u = \sigma T^4 V \quad (28.1.2.2)$$

Лекин, бу ифода характеристик функция ҳисобланмайди, унда T ни S ва V орқали ифодалаш керак. Нурланиш энтропияси ифодасидан

$$S = \frac{4}{3} \sigma T^3 V \quad \text{дан} \quad T = \sqrt[3]{\frac{3S}{4\sigma V}} \quad (28.1.2.3)$$

$$\text{У ҳолда } u = \sigma V \left(\frac{3S}{4\sigma V} \right)^{\frac{4}{3}} \quad (28.1.2.4)$$

$$\text{Эркин энергия: } F = E - TS = \sigma T^4 V - T \frac{4}{3} \sigma T^3 V = -\frac{1}{3} \sigma T^4 V \quad (28.1.2.5)$$

$$\text{Термодинамик потенциал : } \Phi = F + pV = -\frac{1}{3} \sigma T^4 V + \frac{1}{3} \sigma T^4 V = 0 \quad (28.1.2.6)$$

$$\text{Энтальпия } \chi = E + pV = \frac{4}{3} \sigma T^4 V = TS = S \left(\frac{3p}{\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (28.1.2.7)$$

Мувозанатдаги нурланиш учун Гиббснинг термодинамик потенциали характеристик функция бўлмайди, чунки нурланиш учун T ва p ўзаро мустақил ўзгарувчилар ҳисобланмайди. $p = \frac{1}{3} \sigma T^4$.

28.1.3 S ва V ўзгарувчиларда ифодаланган характеристик функциялардан фойдаланиб жисмларнинг адиабатик кенгайиши ва сиқилишида температуранинг ўзгаришини аниқланг.

Ечиш:

Жисмларнинг адиабатик кенгайишида ёки сиқилишида температуранинг ўзгариши $\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S$ катталики билан ҳарактерланади. S ва V ўзгарувчилар ички энергия учун характеристик катталиклар ҳисобланади, $E = E(S, V)$. Бунда $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V$ ва $p = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S$, бу ифодалардан иккинчи тартибли аралаш ҳосилалар олиб, уларнинг тенглигини эътиборга олсак,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = - \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V = -T \left(\frac{\partial p}{\partial Q} \right)_V = -\frac{T}{c_V} \left(\frac{\partial p}{\partial Q} \right)_V = \frac{T}{c_V} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad (28.1.3.1)$$

Қуйидаги айниятдан фойдаланамиз.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = -1 \quad (28.1.3.2)$$

Натижада қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = \frac{T}{c_V} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (28.1.3.3)$$

$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T < 0$, бўлгани учун $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S$ катталигининг ишораси ҳажмий кенгайиш

коэффициенти $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ га ишораси қарама қарши бўлади.

Идеал газ учун $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V}$ (9.1.3.4), $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\frac{p}{c_V}$ (28.1.3.5) бўлади.

28.1.4 Характеристик функциялар методи билан суюқ пленкалар учун сирт таранглигининг температура T га боғланишини олинг.

Ечиш:

Системанинг параметрлари сифатида температура T ва пленканинг сирт юзаси Σ ни олиш мақсадга мувофиқ. У ҳолда эркин энергия $F = F(T, \Sigma)$.

Термодинамиканинг асосий тенгламаси эркин энергиянинг дифференциали учун қуйидаги ифодани оламиз.

$$TdS = dE + \delta A, \quad d(E - TS) = -\delta A - SdT, \quad (28.1.4.1)$$

Лекин $\delta A = -\sigma \, d\Sigma$ (28.1.4.2)

Шунинг учун $dF = -SdT + \sigma \, d\Sigma$ (28.1.4.3)

Шундан $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_\Sigma$, $\sigma = \left(\frac{\partial F}{\partial \Sigma}\right)_T$ ва $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_\Sigma = -\left(\frac{\partial S}{\partial \Sigma}\right)_T = -\frac{1}{T} \left(\frac{\partial Q}{\partial \Sigma}\right)_T$ (28.1.4.4)

Суюқ пленкани бирлик юзасини ҳосил қилишнинг яширин иссиқлиги $r = \left(\frac{\partial Q}{\partial \Sigma}\right)_T$ эканлигини эътиборга олсак (28.1.4.4) қуйидагича ифодаланади.

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_\Sigma = -\frac{r}{T} \quad (28.1.4.5)$$

Сирт таранглигининг температура ортиши билан ўзгариши абсолют температурага тесқари пропорционал.

28.1.5 Цикллар методидан фойдаланиб сирт таранглигининг температурага боғланишини аниқланг.

Ечиш:

Масалада пленка сирти Σ ва сирт таранглиги γ ўзгарувчилар бўйича цикл чизилади. Циклнинг фойдали иш коэффициенти

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{-(\Sigma_2 - \Sigma_1)d\gamma}{Q_1} = \frac{dT}{T} \quad (28.1.5.1)$$

$$\text{Бундан} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right)_{\Sigma} = \frac{Q_1}{\Sigma_2 - \Sigma_1} \frac{1}{T} = -\frac{\gamma}{T} \quad (28.1.5.2)$$

Бу ерда γ -пленка сиртини бир бирликга ошириш учун сарфланадиган иссиқлик миқдори, сирт таранглиги.

29. Зарралар сони ўзгарувчан системалар. Гиббснинг катта каноник тақсимооти.

Табиатда кўпчилик ҳодисаларда ўзаро таъсирлашув жараёнида энергия алмашиш билан бир қаторда зарралар алмашилиши юз беради. Зарралар сони ўзгарувчи системаларнинг хоссаларини термодинамик методлар билан текширамыз ва таҳлил қиламыз.

Мувозанатдаги системалар ўрганилади ва системада зарралар сони ўзгарувчи бўлса ҳам, система мувозанат ҳолатдан чиқиб кетмайди.

Бундай системанинг ҳолати температура T , параметрлар ва берилган турдаги зарралар сони $N_1, N_2, \dots, N_r$ ёки бунга тўғри келувчи концентрация

$$c_i = \frac{N_i}{\sum N_k} \text{ билан аниқланади.}$$

Қайтувчи ва қайтмас жараёнлар учун термодинамиканинг асосий тенгсизлиги қуйидагича ёзилади:

$$TdS \geq dE + \sum_i f_i d\lambda_i - \sum_k \mu_k dN_k \quad (29.1)$$

Бу ерда μ_k — k турдаги зарраларнинг кимёвий потенциаллари. Юқоридаги ифодадаги охириги ҳад зарралар сонининг ўзгаришини акс этдиради.

Зарралар сони ўзгарувчи оддий система учун термодинамиканинг асосий тенгламаси қуйидагича ёзилади.

$$dE = TdS - pdV + \mu dN \quad (29.2)$$

$$\mu = \frac{E - TS + pV}{N} - \text{кимёвий потенциал.}$$

Зарралар сони ўзгарувчан бўлган системаларни ўрганишда, одатда, катта термодинамик потенциал

$$B(T, V, \mu_i) = E - TS - \sum_i N_i \mu_i = F - \Phi = -pV$$

киритилади ва унинг ёрдамида системадаги ҳар бир турдаги зарралар сони N_i ни топилади.

Зарралар сони ўзгарувчи система мувозанатда бўлиши учун уларнинг кимёвий потенциаллари тенг бўлиши керак. Энергияси ва зарралар сони ўзгарувчан ва термостат билан мувозанатда бўлган система учун Гиббснинг катта каноник тақсимооти қуйидагича бўлади:

$$W_{i,n} = \frac{\exp\left(\frac{\mu n - \varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i, n)}{\sum_i \sum_n \exp\left(\frac{\mu n - \varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i, n)} = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i, n)}{\tilde{Z}}$$

Бу ерда: $\tilde{Z} = \sum_i \sum_n \exp\left(\frac{\mu n - \varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i, n)$, $\mu = -\theta \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{n=0}$ - кимёвий потенциал ёки парциал потенциал, $\Omega(\varepsilon_i, n)$ - энергияси ε_i ва зарралар сони n бўлган ҳолатлар сони ёки оддийгина ҳолатлар сони деб юритилади.

$\tilde{Z}$ эса энергияси ва зарралар сони ўзгарувчан система ҳолат функцияси ёки катта статистик йиғинди дейилади.

Гиббс катта каноник тақсимотидан фойдаланиб бир атомли N заррадан ташкил топган идеал газ ҳолатини характерловчи катталиклар ҳисобланади.

Ҳолат функцияси, $\tilde{Z}$ учун қуйидаги ифода олинади.

$$\tilde{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{\frac{3n}{2}} V^n \exp\left(\frac{\mu n}{kT}\right)$$

Ҳолат функциясидан фойдаланиб, идеал газ учун термодинамик катталиклар ҳисобланади.

1. v ҳажмдаги ўртача зарралар сони топилади.

$$\bar{n} = N = kT \frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial \mu} = \frac{V}{\lambda^3} \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right)$$

2. Идеал газ босими ҳисобланади: $p = kT \frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial V} = \frac{kT \bar{n}}{V}$

3. Идеал газнинг ички энергияси ҳисобланади: $E = kT^2 \frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial T} = \frac{3}{2} kT \bar{n}$,

4. Идеал газнинг энтропияси аниқланади.: $S = \frac{E}{T} + k \ln \tilde{Z} = \frac{5}{2} k \bar{n}$

29.1 Масала ечиш намуналари

29.1.1 Гиббснинг катта каноник тақсимоидан фойдаланиб N та заррадан ташкил топган бир атомли идеал газ учун босим p , ички энергия E , энтропия S , кимёвий потенциал μ ҳисоблансин.

Ечиш:

Идеал газнинг ҳолатини ҳарактерловчи физикавий катталикларни ҳисоблаш учун дастлаб, ҳолат функцияси z ни ҳисоблаш талаб этилади.

Гиббснинг катта каноник тақсимоиди :

$$\tilde{Z} = \sum_i \sum_N \exp\left(\frac{\mu N - E_i}{kT}\right) \Omega(E_i, N) \quad (29.1.1.1)$$

(29.1.1.1) ифодани икки қисмга ажратамиз ва энергия бўйича статистик йиғиндини идеал газ учун ифодасини қўямиз.

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= \sum_N \exp\left(\frac{\mu N}{kT}\right) \int \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) d\Omega' = \sum_N \exp\left(\frac{\mu N}{kT}\right) \frac{1}{N!} \int \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \frac{d\Gamma}{h^{3N}} = \\ &= \sum_N \exp\left(\frac{\mu N}{kT}\right) \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{\frac{3N}{2}} V^N = \sum_N \exp\left(\frac{\mu N}{kT}\right) \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N \end{aligned}$$

Бу ерда $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$ де Бройлнинг “иссиқлик” тўлқин узунлиги

дейлади. Натижада $\tilde{Z}$ учун қуйидаги ифода олинади.

$$\tilde{Z} = \sum_N \exp\left(\frac{\mu N}{kT}\right) \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N$$

Идеал газда заррачаларнинг ўртача сонини ҳисоблаймиз.

$$N = \int \exp\left(\frac{\mu - E}{kT}\right) \frac{dp_x dp_y dp_z dV}{h^3} = V \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right)$$

Худди шундай тартибда идеал газ босими, ички энергияси, энтропияси кимёвий потенциални ҳисобланади.

$$P = kT \frac{\partial \ln Z}{\partial V}, \quad E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = \frac{3}{2} kT,$$

$$S = \frac{E}{T} + k \ln Z = \frac{3}{2} Nk + Nk \ln \frac{eV}{N\lambda^3}, \quad \mu = kT \ln \frac{N\lambda^3}{V}.$$

29.1.2 Доимий T_0 температурали ва p_0 босимли муҳитга туширилган бир жинсли жисмнинг мувозанат шarti термодинамик потенциалнинг минимуми эканлигини исботланг.

Ечиш:

Жисм термостат (муҳит) билан биргаликда яккаланган (изолированный) системани ҳосил қилади, унинг мувозанат шarti қуйидаги тенгсизлик билан аниқланади.

$$\Delta S + \Delta S_0 < 0 \quad (29.1.2.1)$$

Бу ерда S – жисмнинг, S_0 – эса муҳитнинг энтропияси. Жисм устида бажарилган иш $p_0 \Delta V_0$, унга берилган иссиқлик миқдори $T_0 \Delta S_0$. Муҳитдан берилган иссиқликни жисм қабул қилади. Шу сабабли жисмнинг ички энергиясининг ўзгариши термодинамиканинг 1-қонунига асосан.

$$\Delta U = -T_0 \Delta S_0 + p_0 \Delta V_0 \quad (29.1.2.2)$$

Термостат ва жисмнинг ҳажми биргаликда ўзгармас бўлади $\Delta V_0 = -\Delta V$, у ҳолда

$$\Delta U = -T_0 \Delta S_0 - p_0 \Delta V \quad (29.1.2.3)$$

Бу ифодадан ΔS_0 ни топиб ва уни биринчи тенгсизликка қўямиз, унчалик мураккаб бўлмаган алмаштиришлар натижасида қуйидагини оламиз:

$$\Delta U + p_0 \Delta V - T_0 \Delta S > 0 \quad (29.1.2.4)$$

Яъни $\Delta \Phi > 0$, бу ерда $\Phi = U + p_0 V - T_0 S$

Муҳитнинг босими ва температураси жисмнинг босими ва температурасига тенг бўлади. Шу сабабли олинган тенгсизлик $\Delta \Phi > 0$ мувозанат ҳолатида жисмнинг термодинамик потенциали минимал қиймат қабул қилишини кўрсатади.

29.1.3 Физикавий биржинсли ва изотроп системада термодинамик мувозанат ҳолатида, системанинг ҳамма қисмларида температура ва босим бир ҳил бўлишини исботланг.

Ечиш:

Биржинсли жисм ичида кичикроқ ҳажмни фикран ажратиб оламиз ва уни температураси T_0 ва босими p_0 бўлган муҳитга туширилган системанинг бир қисми каби қараймиз. Системанинг ажратилган қисми учун мувозанат шартини ёзамиз.

$$\delta\Phi = 0, \delta^2\Phi > 0 \quad (29.1.3.1)$$

Биринчи ифода мувозанатнинг зарурий шартини ифодалайди, иккинчиси эса унинг турғунлигини таъминлайди. Ички параметрлар сифатида энтропия S ва ҳажм V ни олиб биринчи шартни улар орқали ёзамиз.

$$\Delta\Phi = \Delta U - T_0\Delta S + p_0\Delta V \quad (29.1.3.2)$$

Ажратиб олинган системанинг температурасини T ва босимини p деб белгилаб, ΔU ни ΔS ва ΔV бўйича қаторга ёямиз ва $\left(\frac{dU}{dV}\right)_v = T$, $\left(\frac{dU}{dV}\right)_s = -p$, эканлигини эътиборга олиб $\delta\Phi$ учун қуйидагини оламиз.

$$\delta\Phi = (T - T_0)\delta S + (p_0 - p)\delta V \quad (29.1.3.3)$$

Агар $\delta\Phi = 0$ десак δS ва δV нинг ихтиёрий қийматларида қуйидагини оламиз.

$$T = T_0 \text{ ва } p = p_0 \text{ ни оламиз. Исботланди.}$$

29.1.4 Доимий ташқи босим остидаги термостатда жойлашган бир компонентали системада иккита фазанинг мувозанат шартини аниқланг.

Ечиш:

Ташқи босим остида жойлашган термостатдаги системанинг мувозанат ҳолатининг умумий шарти термодинамик потенциал Φ нинг минимуми ҳисобланади, яъни $\delta\Phi = 0$, $\delta^2\Phi > 0$.

Икки фазали биркомпонентали система учун $\Phi = \nu_1 \eta_1(T, p) + \nu_2 \eta_2(T, p)$ (29.1.4.1)

Шу жумладан, $\nu_1 + \nu_2 = \nu = \text{const}$, яъни $\delta \nu_1 = -\delta \nu_2$,

η_1 ва η_2 мос равишда биринчи ва иккинчи компоненталарнинг кимёвий потенциаллари, ν - моллар сони. У ҳолда

$$\delta \Phi = (\eta_1 - \eta_2) \delta \nu_1 = 0, \quad (29.1.4.2)$$

Шу ифодадан:

$$\eta_1(T, p) = \eta_2(T, p) \quad (29.1.4.3)$$

29.1.5 Идеал газ адиабатик яккаланган (изоляцияланган) цилиндрда p_0 доимий ташқи босим остида жойлашган. Мувозанат ҳолатда энтропиянинг ҳақиқатда максимал, яъни $\delta S = 0$, $\delta^2 S < 0$ эканлигини исботланг.

Ечиш:

Идеал газ учун

$$S = c_v \ln T + R \ln V + S_0 \quad (29.1.5.1)$$

$$dS = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \quad (29.1.5.2)$$

Адиабатик изоляцияланган ҳолда

$$c_v dT = -p_0 dV \quad (29.1.5.3)$$

У ҳолда :

$$dS = \frac{1}{T} (p - p_0) dV \quad (29.1.5.4)$$

Мувозанат ҳолатда ($p = p_0$) ва $dS = 0$, яъни энтропия экстремал қийматларни қабул қилади ва $\delta^2 S < 0$ бўлганлигидан энтропиянинг максимал қиймат қабул қилиши исботланади.

29.2 Масалалар

29.2.1 $V = \text{const}$ ва $S = \text{const}$ бўлган системанинг мувозанат шарти ички энергиянинг минимум бўлиши эканлигини исботланг.

29. 2.2 $S = \text{const}$ ва $p = \text{const}$ бўлган системада системанинг мувозанат шарти энтальпиянинг минимум бўлиши эканлигини исботланг.

30. Сирт ходисалари термодинамикаси. I ва II – тур фазавий ўтишлар

Сирт ходисалар термодинамикаси Гиббс томонидан ишлаб чиқилган. Гиббс сирт катламини янги «сирт фаза» деб қабул қилади.

Фазалар мувозанатини ўрганишда сиртда мавжуд бўлган иккита фактор:

- 1) иккита фазанинг ўзаро таъсир энергиясини,
- 2) фазаларни чегараловчи сирт яқинида модданинг ҳолати модда ичидаги ҳолатидан фарқ қилишлиги ҳисобга олинмаган.

Бу иккала факторнинг таъсири, фазаларни чегараловчи сиртнинг кўпайиши билан янада ошади. Шунинг учун чегаравий сиртни яна бир фаза деб ҳисоблаган ҳолда мувозанат шартларини чиқарамиз.

Агар сирт ўзгариши изотермик-изохорик жараён остида содир бўлса, у ҳолда сиртни ўзгартиришдаги иш эркин энергиянинг камайиши ҳисобига бажарилади,

$$dF = -SdT + pdV + \gamma d\Sigma \text{ дан } \delta A = -(dF_\Sigma)_{T,Y} = -\gamma d\Sigma \quad (30.1)$$

келиб чиқади. Бу ерда $\gamma = \frac{dF_\Sigma}{d\Sigma}$ бирлик сиртга тўғри келган эркин энергия бўлиб, сирт таранглиги дейилади.

$$\text{Сиртдаги эркин энергия } F_\Sigma = \gamma \Sigma \quad (30.2)$$

бу ерда Σ — чегаравий сиртнинг юзаси.

Агар сирт фазасини ҳисобга олган ҳолда, бир компонентли икки фазали (сув-буғ) системаси учун мувозанат шартини ёзсак, у ҳолда қуйидаги ифодани оламиз:

$$T' = T'', \mu' = \mu'' \text{ аммо } p' = p'' \quad (30.3.)$$

Мувозанат ҳолатда эркин энергия минимум бўлишидан ($\delta F = 0$), изотермик жараёнда

$$-p'dV - p''dV + \gamma d\Sigma = 0 \quad (30.4.)$$

бўлади. Система берк бўлганлиги учун $V' + V'' = V$; $dV' = -dV''$ бўлади, натижада

$$p' = p'' + \gamma \frac{d\Sigma}{dV} \quad (30.5.)$$

$\frac{d\Sigma}{dV}$ - чегаравий сиртнинг эгрилигини аниқлайди. Агар чегаравий сирт сфера

$$\text{кўринишида бўлса, у ҳолда } p' = p'' + \frac{2\gamma}{r} \quad (30.6.)$$

$$\text{Агар сирт ихтиёрий бўлса, } p' = p'' + \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (30.7.)$$

Бу ерда r_1, r_2 - чегаравий сиртнинг асосий эгрилик радиуслари. Бу формулалар Лаплас формуласи, $\frac{2\gamma}{r}$ - Лаплас босими дейилади.

Ўша вақтда модданинг бир агрегат ҳолатдан иккинчисига ўтиши фаза ўтиши ёки фазавий ўтиш деган ном олган. Турли системалар устида олиб борилган тадқиқотлар фаза ўтиш газ ҳолатдан суюқлик ҳолатига ўтиш билан чегараланган, жуда кўп қиррали эканлиги намоён бўлди.

Агар Гиббс термодинамик потенциалдан олинган биринчи тартибли ҳосила узилишга дучор бўлса, иккинчи тартибли ҳосила эса узлуксиз бўлса, бундай фаза ўтиш биринчи хил фаза ўтишлар деб юритилади. Агар аксинча бўлса, у ҳолда иккинчи хил фаза ўтишлар деб юритилади.

Биринчи хил фаза ўтишларда солиштирма ҳажм, солиштирма энтропия ўтиш нуқтасида узилишга дучор бўлади. Биринчи хил фаза ўтишларда яширин иссиқликнинг ютилиши ёки ажралиши кузатилади. Биринчи хил фаза ўтишлар тенгламаси Клапейрон-Клаузиус тенгламаси билан тушунтирилади. s ва v - битта заррага тўғри келган энтропия ва ҳажм.

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s'' - s'}{v'' - v'} : (30.8.)$$

бу тенглама қуйидаги кўринишларда ҳам ёзилади:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(v'' - v')} \quad (30.9), \quad \frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V'' - V')} \quad (30.10)$$

30.1 Масала ечиш намуналари

30.1.1 Клапейрон-Клаузиус тенгламасидан фойдаланиб 101^0 С температурада тўйинган сув буғининг босимини аниқланг. Буғни идеал газ деб қабул қилиш мумкин.

Ечиш:

$p = p(T)$ ни қуйидаги қатор кўринишида ифодаalayмиз.

$$p(T) = p(T_0) + \left(\frac{dp}{dT} \right)_{T_0} (T - T_0) + \dots \quad (30.1.1.1)$$

Агар $\Delta t = T - T_0$ етарлича кичик бўлса, катта аниқликда қуйидагича ёзиш мумкин.

$$p(T) = p(T_0) + \left(\frac{dp}{dT} \right)_{T_0} \Delta t; \quad (30.1.1.2)$$

Клайперон-Клаузиус тенгламасидан

$$\left(\frac{dp}{dT} \right)_{T_0} = \frac{\lambda}{T_0(\nu_\delta - \nu_c)} \quad (30.1.1.3)$$

ν_δ – буғнинг солиштирма ҳажми, ν_c – суюқликнинг солиштирма ҳажми., $\nu_\delta \gg \nu_c$ эканлигидан

$$\left(\frac{dp}{dT} \right)_{T_0} = \frac{\lambda}{T_0(\nu_\delta)} \quad (30.1.1.4)$$

Буғнинг солиштирма ҳажмини Клапейрон-Менделеев тенгламасидан аниқлаймиз.

$$\nu_\delta = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{p} \quad (30.1.1.5)$$

Шу сабабли

$$p(T) = p_0 \left[1 + \frac{\lambda \Delta t}{\frac{m}{\mu} RT_0^2} \right] \quad (30.1.1.6)$$

Зарурий катталикларни қўйиб ҳисобласак: $p = p_0(1 + 0,035)$ ифодани оламиз.

30.1.2 Ҳажми 5 л бўлган ёпиқ идишда 1 кг сув 100°C температурада жойлашган. Сув устидаги фаза сувнинг тўйинган буғи билан қопланган. (ҳаво сўриб олинган). Температура 1°C га кўтарилганда тўйинган буғ массаси Δm нинг ортишини аниқланг. Буғ- идеал газ, буғ ҳосил бўлиш иссиқлиги $539 \frac{\text{kal}}{\text{g}}$.

Ечиш:

Бўғнинг босимини Клапейрон-Менделеев тенгламасидан аниқлаймиз

$$p_p = \rho \frac{RT}{\mu} \quad (\rho - \text{зичлик}) \quad (30.1.2.1)$$

$$\Delta m = V \Delta \rho, \quad \Delta \rho = \frac{\mu}{R} \left(\frac{1}{T} \frac{dp_p}{dT} \Delta T - p_p \frac{\Delta T}{T^2} \right) \quad (30.1.2.2)$$

Бўғ босимининг температура бўйича ўзгаришини Клапейрон-Клаузиус тенгламасидан аниқлаймиз.

$$\frac{dp}{dT} \equiv \frac{\lambda}{TV_p} = \frac{\mu \lambda}{RT^2} p_p \quad (30.1.2.3)$$

$$\text{Бу ҳолда: } \Delta m \approx \frac{\mu V p_p}{RT^2} \left(\frac{\mu \lambda}{RT} - 1 \right) \Delta T. \quad (30.1.2.4)$$

Ҳисоблаш натижасида $\Delta m = 7,5 \cdot 10^{-5}$ кг. га тенглигини аниқлаймиз.

30.1.3 Бўғи суюқлиги билан ҳар доим мувозанатда бўладиган, яъни суюқлик ва унинг бўғининг мувозанат эгри чизиғи бўйлаб юз берадиган жараёнлар учун бўғнинг солиштира ҳажмининг температура бўйича ўзгаришини аниқланг.

Ечиш:

$\frac{dv}{dT}$ ҳосилани мувозанат эгри чизиғи бўйлаб аниқлаймиз.

$$\frac{dv}{dT} = \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p + \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dT} \quad (30.1.3.1)$$

Агар бўғни идеал газ деб қабул қилсак, Менделев-Клапейрон тенгламасига асосан, $v = \frac{RT}{\mu p}$, шунинг учун

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{v}{T}; \quad \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = -\frac{v}{p}; \quad \frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{Tv}. \quad (30.1.3.2)$$

$$\text{У ҳолда: } \frac{dv}{dp} = \frac{v}{T} - \frac{vT}{Tv} \frac{1}{p} = \frac{R}{\mu} \frac{1}{p} \left(1 - \frac{\lambda \mu}{RT} \right) \quad (30.1.3.3)$$

30.1.4 Клапейрон-Клаузиус тенгламасидан фойдаланиб бир фазадан бошқа фазага ўтиш иссиқлигининг температурага боғланишини аниқланг.

Ечиш:

Системанинг доимий босим остида 1- ҳолатдан 2 – ҳолатга ўтишида ҳолатининг қайтувчан ўзгаришида ютилаётган иссиқлик миқдори Q ни энтальпияларнинг фарқи сифатида аниқлаш мумкин.

$$Q = I_2 - I_1 = \nu_2 \chi_2 - \nu_1 \chi_1 \quad (30.1.4.1)$$

χ – бир молга нисбатан энтальпия, ν – моллар сони.

Термодинамик функцияларнинг характеристик хоссаларига асосланиб, қуйидагича ёзамиз.

$$d\chi = C_p dT + \left[\nu - T \left(\frac{\partial \nu}{\partial T} \right)_p \right] dp \quad (30.1.4.2)$$

(30.1.4.1) ни дифференциаллаймиз ва ҳосил бўлган ифодани (30.1.4.2) га қўямиз, $\nu_1 = \nu_2 = 1$ да қуйидагини топамиз.

$$d\lambda = [C_p^{(2)} - C_p^{(1)}] dT + \left\{ (\nu_2 - \nu_1) - T \left[\frac{\partial}{\partial T} (\nu_2 - \nu_1) \right]_p \right\} dp, \quad (30.1.4.3)$$

$$\text{Яъни, } \frac{d\lambda}{dT} = \Delta C_p + \left[\Delta \nu - T \left(\frac{\partial \Delta \nu}{\partial T} \right)_p \right] \frac{dp}{dT} \quad (30.1.4.4)$$

Лекин, $\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T \Delta \nu}$ эканлигидан, натижавий ифодани оламиз.

$$\frac{d\lambda}{dT} = \Delta C_p + \left[\frac{\lambda}{T} - \lambda \left(\frac{\partial \ln \Delta \nu}{\partial T} \right)_p \right] \quad (30.1.4.5)$$

30.1.5 Икки фазанинг мувозанат шартидан фойдаланиб, Кюри нуқтасида иссиқлик сиғими C_p нинг сакрашини $\Delta \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$ ва $\Delta \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ орқали ифодаланг.

Ечиш:

Икки фазанинг мувозанат шарти уларнинг химиявий потенциалларнинг тенглиги ҳисобланади:

$$\eta_1(T, p) = \eta_2(T, p). \quad (30.1.5.1)$$

Шу асосда қуйидаги муносабат ҳосил бўлади.

$$\frac{dp}{dT} = \frac{S_2 - S_1}{V_2 - V_1} = \frac{\Delta S}{\Delta V} \quad (30.1.5.2)$$

S_i ва V_i - i -фазанинг моляр энтропия ва моляр ҳажм. 2-тур фазавий ўтишларда

(2) тенгликнинг ўнг томони $\frac{0}{0}$ кўринишидаги ноаниқликга айланади.

Ноаниқликни Лопитал қондаси бўйича очиқ қуйидагини оламиз.

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p}{\Delta \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p}, \quad (30.1.5.3)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p = \frac{C_p}{T} \quad (30.1.5.4)$$

(30.1.5.3) ва (30.1.5.4) ифодаларни (30.1.5.2) муносабатга қўйиб қуйидаги тенгликга келамиз.

$$\Delta C_p = T \Delta \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{dp}{dT} \quad (30.1.5.5)$$

$\frac{dp}{dT}$ ҳосила 2-тартибли фазавий мувозанат эгри чизиғи бўйича

$V = \text{const}$ ҳолда олинади.

$\Delta V = 0$ шартдан қуйидагини

$$\frac{dp}{dT} = - \frac{\Delta \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p}{\Delta \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T} \quad (30.1.5.6)$$

$$\Delta C_p = -T \frac{\left[\Delta \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \right]^2}{\Delta \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T} \quad (30.1.5.7)$$

Олинган ифодалар Эренфест тенгламалари дейилади

30.2 Масалалар

30.2.1 Сирт таранглигининг температурага боғлиқлигини билган ҳолда, парданинг адиабатик кенгайишида температура ўзгариши ва унинг изотермик кенгайишида ютилган иссиқлик миқдори топилсин.

30.2.2 Жуда кичик зарядланган томчининг фақат ўта тўйинган буғда ўсиб қолмасдан, балки тўйинишга етмаган буғда ҳам ўсиб бориши кўрсатилсин.

30.2.3 Паст температурада металлларнинг иссиқлик сиғими C_p температурага пропорционал. Агар металл ўта ўтказувчанлик ҳолатига ўтса, унинг иссиқлик сиғими C_s температуранинг кубига пропорционал. Критик температурада $C_s = 3C_p$ бўлиши кўрсатилсин.

30.2.4 Паст температурада металлларнинг иссиқлик сиғими C_p температурага пропорционал. Агар металл ўта ўтказувчанлик ҳолатига ўтса, унинг иссиқлик сиғими C_s температуранинг кубига пропорционал. Критик температурада $C_s = 3C_p$ бўлиши кўрсатилсин.

30.2.5 Томчи устидаги тўйинган буғ босимнинг томчи радиусига боғлиқлиги аниқлансин.

30.2.6 Критик нуқтада Жоул-Томсон коэффиценти ҳисоблансин.

31. Бир атомли квант идеал газлар

Квант статистик физика - фазавий фазода нуқталар эволюциясининг Шредингер тенгламасига бўйсинишига асосланади.

Термостат билан контактда жойлашган системалар учун квант каноник тақсимот қуйидагича ифодаланади.

$$W_n = \exp\left(\frac{F - \varepsilon_n}{\kappa T}\right) \quad (31.1)$$

Бу ерда F – эркин энергия, ε_n - системанинг n – квант ҳолат энергияси. Ҳолат интегралининг квант аналоги бу ҳолатлар йиғиндиси Z ёки статистик сумма ҳисобланади.

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{\kappa T}\right) \quad (31.2)$$

Айниш ёки битта E_n энергетик сатҳга g_n та ҳар хил физикавий ҳолатлар мос келса статистик йиғинди қуйидагича кўринишни олади.

$$W_n = g_n \exp\left(\frac{F - \varepsilon_n}{\kappa T}\right) \quad (31.3)$$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{\kappa T}\right) \quad (31.4)$$

Бу ерда g_n -айниш карралиги (даражаси)

Системанинг ўртача энергияси статистик йиғинди орқали қуйидагича ифодаланади.

$$E = \kappa T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z \quad (31.5)$$

Дискрет энергетик спектрга эга бўлган квант гармоник осциллятор учун

$$E_n = h\nu \left(\frac{1}{2} + n\right) \quad (31.6)$$

Бу ерда $n=0,1,2, \dots$, статистик йиғинди эса қуйидагига тенг.

$$Z = \frac{\exp\left[-\left(\frac{h\nu}{2\kappa T}\right)\right]}{1 - \exp\left[-\left(\frac{h\nu}{\kappa T}\right)\right]}, \quad (31.7)$$

Ўртача энергия учун классик осцилляторнинг ўртача энергиясидан тубдан фарқланувчи ифодани оламиз $\bar{E} = \kappa T$

$$\bar{E} = \frac{h\nu}{2} + \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{\kappa T}\right) - 1} \quad (31.8)$$

31.1. Масалалар ечиш бўйича намуналар:

31.1.1 Икки ўлчамли осциллятор $(n+1)$ -каррали айниган энергетик сатҳларга эга.

$$\varepsilon_n = h\nu(n+1),$$

Бу ерда $n = 0,1,2,\dots$ n -та ўзаро боғлиқ бўлмаган икки ўлчамли гармоник осцилляторлардан ташкил топган системанинг ўртача энергиясини ҳисобланг.

Ечиш:

N та ўзаро мустақил икки ўлчамли гармоник осцилляторлардан ташкил топган системанинг статистик йиғиндиси Z қуйидагига тенг.

$$Z = \frac{1}{N!} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{h\nu(n+1)}{\kappa T}\right) (n+1) \right]^N \quad (31.1.1.1)$$

(31.1.1.1) да $\beta = \frac{h\nu}{\kappa T}$ кўринишида белгилаш киритиб, қуйидагини оламиз:

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{h\nu(n+1)}{\kappa T}\right) (n+1) \right] = -\frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta(n+1)) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{\exp \beta - 1}$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{h\nu(n+1)}{\kappa T}\right) (n+1) \right] = \frac{\exp\left(\frac{h\nu}{\kappa T}\right)}{\left(\exp\left(\frac{h\nu}{\kappa T}\right) - 1\right)^2} \quad (31.1.1.2)$$

(31.1.1.2.) ни (31.1.1.1.) га қўйиб статистик йиғинди учун қуйидаги натижавий ифодани оламиз:

$$Z = \left[\frac{\exp\left(-\frac{h\nu}{\kappa T}\right)}{\left(1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{\kappa T}\right)\right)^2} \right]^N \quad (31.1.1.3)$$

(31.1.1.3) дан фойдаланиб системанинг ўртача энергияси учун қуйидаги ифодани оламиз.

$$E = \kappa T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = N \left(h\nu + \frac{2h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{\kappa T}\right) - 1} \right) \quad (12.1.1.4)$$

31.1.2 Система айнимаган эквидистант (бир –биридан тенг масофада жойлашган) энергетик сатҳларга эга.

$$\varepsilon_p = p\varepsilon \quad (p = 1, 2, 3, \dots, n;)$$

Энг юқори энергетик сатҳ энергияси ҳам иссиқлик энергияси κT га нисбатан жуда кичик. Системанинг ўртача энергияси ва статистик йиғиндисини ҳисобланг.

Ечиш:

Масаланинг шартига асосан $\varepsilon_n \ll kT$ бўлгани учун $\varepsilon_p \ll kT$ шарт ҳам ўринли. Демак статистик йиғиндининг формуласида экспоненциал функцияни кичик параметр бўйича қаторга ёйиш мумкин ва иккинчи тартибли кичикликдаги ҳадлар билан чекланиб қуйидаги ифодани оламиз.

$$Z = \sum_{p=1}^n \exp\left(-\frac{p\varepsilon}{kT}\right) \cong \sum_{p=1}^n \left(1 - \frac{p\varepsilon}{kT} + \frac{p^2}{2k^2T^2}\right) = n - \frac{n(n+1)\varepsilon}{2kT} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 6} \frac{\varepsilon^2}{(kT^2)} \quad (31.1.2.1)$$

Бу ерда: $\ln Z = \ln n - \frac{(n+1)}{2kT} \varepsilon + \frac{(n+1)(n-1)}{24} \left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^2 \quad (31.1.2.2)$

эканлигини эътиборга олиб, системанинг ўртача энергияси учун қуйидаги формулани оламиз.

$$\bar{E} = \frac{(n+1)}{2} \varepsilon + \frac{(n+1)(n-1)}{24} (\varepsilon)^2 \quad (31.1.2.3)$$

31.1.3 Иккита айнамаган $(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ квант сатҳларда жойлашиши мумкин бўлган n та ўзаро таъсирлашмайдиган системанинг ўртача энергияси ва иссиқлик сиғими топилсин.

Ечиш:

Битта заррачанинг статистик йиғиндисини қуйидагича ёзилади.

$$z = \exp\left(-\frac{\varepsilon_0}{kT}\right) \left(1 + \exp\left(-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{kT}\right)\right) = \exp\left(-\frac{\varepsilon_0}{kT}\right) \left(1 + \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right)\right) \quad (31.1.3.1)$$

Бу ерда $T_c = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{k}$ -характеристик температура дейилади.

T_c ни эътиборга олиб, n та ўзаро таъсирлашмайдиган бир хил зарралар системаси учун статистик йиғинди- Z ни қуйидагича ёзамиз.

$$Z = \frac{1}{N!} \left[\exp\left(-\frac{\varepsilon_0}{kT}\right) \left(1 + \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right)\right) \right]^N \quad (31.1.3.2)$$

У ҳолда системанинг ўртача энергияси учун қуйидаги ифодани оламиз;

$$\bar{E} = NE_0 + \frac{NkT_c \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right)} \quad (31.1.3.3)$$

Системанинг доимий ҳажмдаги иссиқлик сиғими учун қуйидаги формулани оламиз.

$$C_v = N\kappa \left(\frac{T_c}{T}\right)^2 \frac{\exp\left(-\frac{T_c}{T}\right)}{\left(1 + \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right)\right)^2} \quad (31.1.3.4)$$

Температура ортиши билан иссиқлик сиғими ортиб боради ва $T = T_c$ да характеристик максимумга эга бўлади ва кейин нолгача камайиб боради.

31.1.4 Энергияси импульси билан $\varepsilon = cp^4$ муносабат орқали боғланган зарралардан ташкил топган бир атомли идеал газнинг ҳолат тенгламаси келтириб чиқарилсин.

Ечиш:

Битта зарранинг ҳолат функцияси қуйидагича ҳисобланади.

$$z = \int \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\kappa T}\right) \frac{d\Gamma}{h^3} = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\kappa T}\right) p^2 dp = \sqrt[3]{c^4} \frac{\pi V}{h^3} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\kappa T}\right) \varepsilon^{-\frac{1}{4}} d\varepsilon$$

(31.1.4.1)

- учун интегрални ҳисоблаб, қуйидаги натижани оламиз.

$$z = \sqrt[4]{c^3} \frac{\pi V}{h^3} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) (\kappa T)^{\frac{3}{4}} \quad (31.1.4.2)$$

Интегрални ҳисоблашда стандарт интеграл ҳисоблаш формулаларидан фойдаландик. N -заррачадан ташкил топган идеал газнинг ҳолат функцияси учун қуйидаги ифодани оламиз.

$$Z = \frac{z^N}{N!} = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{h^3}\right)^N (\kappa T)^{\frac{3}{4}} \left[\sqrt[4]{c^3} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^N \quad (31.1.4.3)$$

Ушбу ҳолат функциясининг босим билан ўзаро боғланиш формуласидан фойдаланиб қаралаётган ҳоллар учун ҳолат тенгламасини ёзамиз.

$$p = \kappa T \frac{\partial \ln Z}{N} = \frac{N\kappa T}{N} \quad (31.1.4.4)$$

Бу натижа идеал газларнинг ҳолат тенгламаси, яъни Менделеев-Клайпейрон формуласи билан мос тушади.

31.1.5 Икки ўлчамли (қатламли) структурага эга бўлган қаттиқ жисмлар учун иссиқлик сиғими C_v нинг температуравий боғланишини аниқланг. Паст температуралар $T \ll \theta_D$ учун ҳисоблаб кўринг.

Ечиш:

Қаттиқ жисмларда атомлар мувозанат ҳолатлари атрофида нормал тебранма ҳаракат қилади. Бир ўлчамли кристаллда, тўлқин сонлари $q, q + dq$ интервалда ётган нормал тебранишлар сони $\frac{L}{2\pi} dq$, бу ерда: L – кристаллнинг узунлиги.

Икки ўлчамли кристалл ҳолида нормал тебранишлар сони қуйидагича ифодаланади.

$$\iint \frac{L^2}{(2\pi)^2} dq_x dq_y = 2 \frac{L^2}{(2\pi)^2} \pi q dq, \quad (31.1.5.1)$$

$$\text{бу ерда: } q < (q_x^2 + q_y^2)^{\frac{1}{2}} < q + dq$$

Бўйлама ва кўндаланг тебранишлар тезлигини бир хил v – деб ҳисоблаб ва тўлқин сонини $v = \frac{vq}{2\pi}$ деб олсак, частоталари $v, v + dv$ интервалда бўлган нормал тебранишлар сони қуйидагига тенг бўлади.

$$dN(v)dv = \frac{6\pi L^2}{v^2} v dv = 6N \frac{v dv}{v_{\max}^2} \quad (31.1.5.2)$$

Бу ерда $v_{\max}$ – қуйидаги муносабатдан аниқланадиган чегаравий частота.

$$\int_0^{v_{\max}} dN(v)dv = 2N \quad (31.1.5.3)$$

v – частотали гармоник осцилляторнинг ўртача энергияси формуласидан фойдаланиб,

$$E(v, T) = \frac{h\nu}{2} + \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}, \quad (31.1.5.4)$$

Кристаллнинг ички энергияси учун қуйидаги ифодани оламиз.

$$\bar{E} = \int_0^{\nu_{\max}} E(\nu, T) dN(\nu) d\nu \quad (31.1.5.5)$$

Доимий ҳажмдаги иссиқлик сиғими қуйидагига тенг бўлади.

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{V, N} = 6Nk \int_0^{\nu_{\max}} \frac{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}{\left(\exp\frac{h\nu}{kT} - 1\right)^2} \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{\nu d\nu}{\nu_{\max}^2} = 6Nk \left(\frac{T}{T_D}\right) \int_0^{\frac{T_D}{T}} \frac{x^3 \exp(x)}{(e^x - 1)^2} dx$$

Паст температуралар $T \ll T_D$ да C_V ни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$C_V \approx 6Nk \left(\frac{T}{T_D}\right)^2 \int_0^{\infty} \frac{x^3 \exp(x)}{(\exp(x) - 1)^2} dx \quad (31.1.5.6)$$

(31.1.5.6) ифодадан иссиқлик сиғимининг температуранинг квадратига боғлиқлиги аниқланади.

31.2 Масалалар

31.2.1 N та молекуладан ташкил топган квант идеал газ учун эркин энергия, босим, энтропия ва Гиббс термодинамик потенциали топилсин.

31.2.2 Энергияси импульси билан $\varepsilon = c p^2$ муносабат орқали боғланган зарралардан ташкил топган бир атомли идеал газнинг ҳолат тенгламаси келтириб чиқарилсин.

31.2.3 N та заррадан ташкил топган бир атомли идеал газ энтропияси, ички энергияси ва ҳажмга қандай боғланганлиги топилсин.

31.2.4 Икки ўлчамли гармоник осциллятор $(n+1)$ каррали айниган энергетик сатҳларга эга $E_4 = h\nu(n+1)$, бу ерда: $n = 0, 1, \dots, N$ та ўзаро боғланмаган икки ўлчамли гармоник осцилляторлардан ташкил топган системанинг ўртача энергияси ҳисоблансин.

31.2.5 Система эквидистант, айнамаган энергетик сатҳларга эга.

$$E_p = pE$$

Бу ерда $p = 1, 2, 3, \dots, n$. Бу ҳолда юқори сатҳнинг энергияси иссиқлик энергияси kT га нисбатан кичик. Системанинг статистик йиғиндисини ва ўртача энергиясини ҳисобланг.

31.2. 6 N та заррадан ташкил топган икки атомли идеал газ энтропияси ички энергияси ва ҳажмга қандай боғланганлиги топилсин.

31.2.7 Энергияси импульси билан $\varepsilon = cp^2$ муносабат орқали боғланган зарралардан ташкил топган бир атомли идеал ультрарелятивистик газнинг эркин энергияси ва ҳолат тенгламаси келтириб чиқарилсин.

32. Квант тақсимотлар. Бозе-Эйнштейн ва Ферми-Дирак тақсимотлари

Етарлича паст температураларда газнинг берилган зичликларида квант ҳолатлар орасидаги энергия фарқи иссиқлик энергиясидан етарлича кичик бўлмаганлиги сабабли классик тақсимот функциясидан фойдаланиб бўлмайди. Тақсимот функциясининг кўриниши N та заррадан ташкил топган статистик системанинг тўлқин функциясининг кўринишига боғлиқ.

Зарраларнинг айнийлик принципига асосан, тўлқин функцияси ихтиёрий иккита зарранинг ўрнини алмаштиришга нисбатан симметрик ёки антисимметрик бўлади. Симметрик тўлқин функция билан аниқланувчи система зарраларининг спинлари бутун, антисимметрик тўлқин функция ҳолида эса Планк доимийсининг ярим қийматига тоқ қаррали бўлади.

Иккинчи ҳолдаги зарралар Паули принципига бўйсунди, яъни битта квант ҳолатда фақат битта зарра жойлашиши мумкин. Демак бундай статистик системаларнинг ҳолати квант статистикаси асосида ўрганилади.

Бир атомли квант идеал газлар учун статистик тақсимотлар зарраларнинг айнийлик принципи асосида чиқарилади. Бунинг учун газ ҳолатини турли хил энергетик сатҳларда ётган зарраларни номерлаб кўрсатиш ўрнига берилган ҳолатлардаги зарралар сонини кўрсатиш зарур деб ҳисобланади, яъни ε_1 энергияли ҳолатда n_1 та зарра, ε_2 энергияли ҳолатда n_2 та зарра ва ҳ.к. зарра бўлишлиги кўрсатилади, яъни ҳар бир ҳолат тенг статистик вазнга эга бўлади.

$$d\Omega(n_k) = 1 \quad (32.1)$$

Тақсимот функцияси қуйидаги кўринишни олади:

$$\bar{n}_k = \kappa T \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_{n_k} \left[\exp \left(\frac{\mu - \varepsilon_k}{\kappa T} \right) \right]^{n_k} \quad (32.2)$$

Квант механика қонунларига кўра элементар зарралар, шу жумладан, атом ёки молекулалар, спин моменти қийматига қараб икки хил тоифага бўлинади, шу сабабли юқоридаги ифодадаги йиғинди шу икки хил тоифадаги зарралар яъни, Паулининг таъқиқлаш принципига бўйсунмайдиган (спинлари бутун) ва Паули принципига бўйсунувчи (спинлари $\frac{1}{2}$ га тоқ қаррали) зарралар учун турлича ҳисобланади.

Таъқиқлаш принципига бўйсунувчи зарралар учун ҳар бир ҳолатдаги зарралар сонига ҳеч қандай шарт қўйилмайди.

Шу сабабли юқоридаги) ифодада йиғинди одан N гача бўлган қийматларни қабул қилади, яъни

$$\bar{n}_\kappa = \kappa T \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{n_\kappa} \left[\exp \left(\frac{\mu - \varepsilon_\kappa}{\kappa T} \right) \right]^{n_\kappa} \quad (32.3)$$

бу ерда $N \gg 1$ бўлганлиги учун йиғиндининг юқори чегараси ∞ билан алмаштирилди.

k энергетик ҳолатдаги зарраларнинг ўртача сони қуйидагича ҳисобланади:

$$\bar{n}_\kappa = \frac{1}{\exp \left(\frac{\varepsilon_\kappa - \mu}{\kappa T} \right) - 1} \quad (32.4)$$

(13.4) ифода Бозе-Эйнштейн зарралари (бозонлар) дан иборат идеал газда ε_κ энергияли зарраларнинг ўрта сони ифодаси, Бозе-Эйнштейн тақсимои дейилади ва спинлари $s = 0, 1, 2, \dots$ бўлган, симметрик тўлқин функцияси билан ифодаланувчи зарралар учун ўринли. Паули принципига бўйсунувчи, ҳар бир энергетик сатҳдаги зарралар сони «0» ёки «1» қийматларни қабул қилувчи, спинлари $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ бўлган, зарралар статистик тақсимои –Ферми- Дирак тақсимои қуйидагича ифодаланади.

$$\bar{n}_\kappa = \frac{1}{\exp \left(\frac{\varepsilon_\kappa - \mu}{\kappa T} \right) + 1}$$

Бу зарралар - фермионлар ва антисимметрик тўлқин функция билан ифодаланади..

32.1. Масала ечиш намуналари

32.1.1. Абсолют нол температурада Ферми газидаги норелятивистик заррачанинг ўртача энергияси ҳисоблансин.

Ечиш:

Бирлик ҳажмда жойлашган фермионларнинг йиғинди энергияси қуйидаги интеграл билан ифодаланади.

$$E_0 = 2 \int_0^{\eta_0} \varepsilon D(\varepsilon) d\varepsilon \quad (32.1.1.1)$$

Ҳолатлар зичлиги ифодасини қуйидагича оламиз.

$$D(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \quad (32.1.1.2)$$

(32.1.1.2) ни (32.1.1.1) га қўйиб қуйидаги интегрални оламиз ва уни ҳисоблаймиз.

$$E_0 = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\eta_0} \varepsilon^{\frac{3}{2}} d\varepsilon = \frac{1}{5\pi^2} \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \mu_0^{\frac{5}{2}} \quad (32.1.1.3)$$

$\mu_0^{\frac{3}{2}}$ нинг ўрнига $\mu_0^{\frac{3}{2}} = 3\pi^2 n h^3 (2m)^{-\frac{3}{2}}$ ни қўйиб қуйидагини оламиз.

$$E_0 = \frac{3}{5} n \mu_0 \quad (32.1.1.4)$$

(32.1.1.4) дан фойдаланиб битта норелятивистик заррачанинг ўртача энергияси учун қуйидаги ифодани оламиз.

$$\bar{E} = \frac{3}{5} \mu_0 \quad (32.1.1.5)$$

32.1.2 Энергия бўйича тақсимот функциясидан фойдаланиб ярим спинли норелятивистик фермионлар учун тезлик бўйича тақсимот функцияси ифодасини олинг.

Ечиш:

$p, p + dp$ импульслар интервалидаги бирлик ҳажмга нисбатан ҳолатлар сони спиннинг икки ориентациясини эътиборга олганда қуйидаги тенглик билан аниқланади.

$$c(p)dp = \frac{2.4\pi}{h^3} p^2 dp \quad (32.1.2.1)$$

Импульс билан тезлик орасидаги норелятивистик ифода $p = m\nu$ ни эътибога олиб, тезликлари $\nu, \nu + d\nu$ оралигида бўлган зарралар учун ҳолатлар сони учун қуйидаги ифодани ёзамиз.

$$c(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{h^3} m^3 \nu^2 d\nu \quad (32.1.2.2)$$

(32.1.2.2) ни Ферми тақсимот функцияси $n_\kappa = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_\kappa - \eta}{\kappa T}\right) + 1}$ га қўйиб,

норелятивистик зарралар учун кинетик энергия тезлиكنинг квадратига пропорционаллиги $E = \frac{m\nu^2}{2}$ дан фойдаланиб, қуйидаги ифодани оламиз.

$$dn(\nu) = \frac{8\pi m^3}{h^3} \frac{\nu^2 d\nu}{\exp\left(\frac{1}{\kappa T} \left(\frac{m\nu^2}{2} - \eta\right)\right) + 1} \quad (32.1.2.3)$$

Абсолют нол температурада, яъни $T \Rightarrow 0$ да (32.1.2.3) да экспоненциаль функция нолга интилганлигидан қуйидаги тақсимотни оламиз.

$$dn(\nu) = \begin{cases} \frac{8\pi m^3}{h^3} \nu^2 d\nu & \text{агар } \nu < \nu_m \\ 0, & \text{агар } \nu > \nu_m \end{cases} \quad (32.1.2.4)$$

Бу ерда: $\nu_m = \sqrt{\frac{2\eta_0}{m}}$

32.1.3 Норелятивистик фермионларнинг тезликлар бўйича тақсимот функциясидан фойдаланиб, фермионларнинг ўртача тезлигини ҳисобланг.

Ечиш:

Ўртача қийматларни ҳисоблаш қоидаларидан фойдаланиб қуйидаги ифодани оламиз.

$$\bar{v} = \frac{\int_0^{v_m} v dn_0(v)}{\int_0^{v_m} dn_0(v)} \quad (32.1.3.1)$$

(32.1.3.1) га $v < v_m$ шарт бажарилгандаги $dn(v) = \begin{cases} \frac{8\pi m^3}{h^3} v^2 dv & \text{агар } v < v_m \\ 0, & \text{агар } v > v_m \end{cases}$ ни

қўямиз.

$$\bar{v} = \frac{\int_0^{v_m} v dn_0(v)}{\int_0^{v_m} dn_0(v)} = \frac{\int_0^{v_m} v^3 dv}{\int_0^{v_m} v^2 dv} = \frac{3}{4} v_m \quad (32.1.3.2)$$

32.1.4 Нерелятивистик фермионларнинг тезликлар бўйича тақсимот функциясидан фойдаланиб, фермионларнинг ўртача квадратик тезлигини ҳисобланг.

Ечиш:

Ўртача қийматларни ҳисоблаш қоидаларидан фойдаланиб қуйидаги ифодани оламиз.

$$\overline{v^2} = \frac{\int_0^{v_m} v^2 dn_0(v)}{\int_0^{v_m} dn_0(v)} = \frac{\int_0^{v_m} v^4 dv}{\int_0^{v_m} v^2 dv} = \frac{3}{5} v_m^2 \quad (32.1.4.1)$$

32.1.5 Нерелятивистик фермионларнинг тезликлар бўйича тақсимот функциясидан фойдаланиб, фермионлар тезлигини тескари қийматининг ўртачасини ҳисобланг.

Ечиш:

Ўртача қийматларни ҳисоблаш қоидаларидан фойдаланиб қуйидаги ифодани оламиз.

$$\overline{\left(\frac{1}{\nu}\right)} = \frac{\int_0^{\nu_m} \nu dn_0(\nu)}{\int_0^{\nu_m} dn_0(\nu)} = \frac{\int_0^{\nu_m} \nu d\nu}{\int_0^{\nu_m} \nu^2 d\nu} = \frac{3}{2} \frac{1}{\nu_m} \quad (32.1.5.1)$$

32.1.6 2000°K температурада 1 см^3 ҳажмдаги мувозанатли нурланишдаги фотонларнинг тўлиқ сонини ҳисобланг.

Ечиш:

Частоталари ν ва $\nu + d\nu$ интервалида жойлашган, бирлик ҳажмга тўғри келувчи фотонлар сони

$$dn(\nu) = 8\pi\nu^2 c^{-3} d\nu \left(\exp\left(\frac{h\nu}{\kappa T}\right) - 1 \right)^{-1} \quad (32.1.6.1)$$

Фотонларнинг тўлиқ сони (32.1.6.1) ни частоталарнинг тўла интервалида интеграллаш йўли билан аниқланади.

$$n = \int_0^\infty dn(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{\kappa T}\right) - 1} \quad (32.1.6.2)$$

(32.1.6.2) да $z = \frac{h\nu}{\kappa T}$ деб белгилаб қуйидаги ифодаларни оламиз.

$$n = \frac{8\pi\kappa^3 T^3}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{\exp(z) - 1} \quad (32.1.6.3)$$

(32.1.6.3) даги интегралнинг қиймати $\int_0^\infty \frac{z^2 dz}{\exp(z) - 1} = 2,404$ га тенг.

Бу ҳолда: $n = 19,24\pi(\kappa T)^3 (hc)^{-3}$ (32.1.6.4)

$T = 2000^\circ\text{K}$ да (32.1.6.4.) га асосан $n \approx 1,6 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$ га тенг.

32.1.7 Корпускуляр тасаввурлар асосида мувозанатли нурланиш босими

$P = \frac{u}{3}$ га тенглиги исботлансин. Бу ерда u – нурланиш энергиясининг ҳажмий зичлиги.

Ечиш:

Частоталари ν ва $\nu + d\nu$ интервалида жойлашган, бирлик вақт ичида бирлик юза билан тўқнашувчи фотонлар сони $d\kappa_\nu$ - қуйидагига тенг:

$$d\kappa_\nu = c \cos \theta \frac{d\Omega}{4\pi} dn(\nu) \quad (32.1.7.1)$$

Бу ерда: $\frac{d\Omega}{4\pi}$ - фазовий бурчак ичида ҳаракатланувчи квантларнинг нисбий сони, $d\Omega$ - эса $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ га тенг.

$$dn(\nu) = 8\pi\nu^2 c^{-3} d\nu \left(\exp\left(\frac{h\nu}{\kappa T}\right) - 1 \right)^{-1} \quad (32.1.7.2)$$

θ – фотоннинг ҳаракатланиш йўналиши билан юзага ўтказилган нормаль орасидаги бурчак.

Битта фотоннинг импульси $\frac{h\nu}{\kappa T}$ бўлганлигидан, босимни θ, φ - бурчаклар ва ν – частота бўйича интеграллаб қуйидагини аниқлаймиз.

$$P = 2 \int \frac{h\nu}{c} \cos \theta d\kappa_\nu = \frac{2}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^\infty \frac{8\pi h \nu^3 d\nu}{c^3 \left(\exp\left(\frac{h\nu}{\kappa T}\right) - 1 \right)} \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (32.1.7.3)$$

Мувозанатли нурланишнинг ҳажмий энергия зичлиги u нинг ифодаси қуйидагича:

$$u = \int_0^\infty \frac{8\pi h \nu^3 d\nu}{c^3 \left(\exp\left(\frac{h\nu}{\kappa T}\right) - 1 \right)} \quad (32.1.7.4)$$

эканлигини ҳисобга олсак, $P = \frac{u}{3}$ га тенг эканлиги исботланади.

32.2 Масалалар.

32.2 .1. Гиббснинг катта каноник тақсимоидан фойдаланиб Ферми-Дирак ва Бозе-Эйнштейн тақсимот функциялари олинсин.

32.2 .2. Ферми-Дирак ва Бозе~Эйнштейн статистикасига бўйсунувчи $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$

энергияли эркин зарралар учун $\tilde{Z} = -\frac{2}{3}E$ муносабат ўринли эканлиги

исботланси. Бу ерда $\tilde{Z}$ - катта термодинамик потенциал...

32.2 .3. Энергия бўйича тақсимот функциясига асосланиб ярим спинли фермионлар учун тезликлар бўйича тақсимот функцияси аниқлансин..

32.2 .4. Абсолют нол температурада электрон газнинг зарралар сони, босими ва ички Энергияси топилсин.

32.2 .5. Энергия бўйича тақсимот функциясига асосланиб бутун спинли бозонлар учун тезликлар бўйича тақсимот функцияси аниқлансин..

32.2 .6. Абсолют нол температурада фотон газининг зарралар сони, босими ва ички энергияси топилсин.

32.2 .7. Ферми –Дирак тақсимотига бўйсунувчи электронлар гази учун $\bar{v}$. $\bar{v}^2$ каби катталиклар ҳисоблансин.

33. Паст температураларда Бозе-газ. Ҳолат тенгламалари. Бозе-Эйнштейн конденсацияси

Паст температураларда Бозе-газ хусусиятидан Ферми-газ хусусияти тубдан фарқ қилади. Бозе-газ табиатини ўрганиш учун зарралар сонини ва энергиясини ҳисоблаш формулаларини ёзамиз

$$\frac{N}{V} = A \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right) - 1} \quad (14.1) \quad E = AV \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon^3} d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right) - 1} \quad (33.2)$$

Бу ерда: $A = 2\pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}$, $g = 1$, V - Бозе газ эгаллаган ҳажм, $\mu \leq 0$

Агар газ зичлигини ўзгармас сақлаб, унинг температурасини пасайтирсак, Зарралар сони ифодасига асосан μ манфий бўлган ҳолда абсолют қиймати камая боради ва маълум $T = T_0$ температурада у нолга тенг бўлади. Бу температурани аниқлаш учун юқоридаги ифодада $n = 0$ деб олиб, интегрални

ҳисоблаймиз ва Гамма функция орқали ифода оламиз, бу ифодани таҳлил этиб $T = T_0$ даги температура қийматини аниқлаймиз.

$$T_0 = 0,084 \frac{\hbar^2}{\kappa m} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (33.3.)$$

Одатда, T_0 температурани **конденсация температураси** деб юритилади. Газнинг температурасини T_0 дан ҳам пасайтириш натижасида юқоридаги ифодага га кўра $\mu > 0$ бўлиб қолади, лекин Бозе статистикасида $\mu \leq 0$ бўлиши керак. Шу вақтда температурани пасайтириш натижасида зарралар энг кичик энергияли ҳолатга $T_0 = 0$ да уларнинг ҳаммаси тушгунча йиғила боради. $\mu \Rightarrow 0$ йиғиндидаги барча ҳадлар чекли қиймат қабул қилади, лекин биринчи ҳад ($\epsilon = 0$) чексизга интилади. Чексиздан қутилиш учун μ ни нолга эмас, балки қандайдир чекли жуда кичик қийматга интилтириш керак. Бу эса мумкин эмас. Бу ҳолатни қуйидагича таҳлил қиламиз. Энергияси $\epsilon > 0$ зарралар $\mu = 0$ да

қуйидагича тақсимланган бўлади: (33.4.)
$$dN_\epsilon = AV \frac{\sqrt{\epsilon} d\epsilon}{\exp\left(\frac{\epsilon}{\kappa T}\right) - 1}$$

Демак, энергияси нолдан катта бўлган зарраларнинг тўлиқ сони

$$N_{\epsilon > 0} = \int dN_\epsilon = N \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (33.5.)$$

Қолган қисми $\epsilon = 0$ қуйидагига тенг бўлади: $N = const$ - Бозе-газ ички энергияси фақат $\epsilon > 0$ энергетик сатҳлардаги зарралар билан аниқланади. Демак, T_0 шундай чегаравий кичик температураки, $T < T_0$ температурадан бошлаб зарралар $\epsilon > 0$ ҳолатлардан $\epsilon = 0$ ҳолатга ўта бошлайди. Яъни, шу нарса кўринадики $T = 0$ да ҳамма бозонлар $\epsilon = 0$ энергетик сатҳда тўпланар экан. Бу ҳодиса газ-суюқлик конденсацияси каби Бозе-Эйнштейн конденсацияси деб юритилади. Бундай конденсация фазалар фазосида юз беради. $\epsilon = 0$ ҳолатдаги зарралар «конденсат», кўзғалган ҳолатдагилари эса «конденсат усти» деб юритилади. Бозе-Эйнштейн газининг энергияси

$$E^{boze} = 1,78 AV (\kappa T)^{\frac{5}{2}} = 31,6 \frac{m^{\frac{3}{2}} (\kappa T)^{\frac{5}{2}} V}{\hbar^3} \quad (33.6)$$

$$\text{иссиқлик сиғими } C_V^{boze} = \frac{5}{2} \frac{E}{T} = 4,45AV(\kappa T)^{\frac{3}{2}} = 79 \frac{m^{\frac{3}{2}}(\kappa T)^{\frac{3}{2}}V}{\hbar^3} \quad (33.7)$$

Бозе- ва Ферми-газларининг термодинамик характеристикаси - ҳолат тенгламасидир.

Гиббснинг микроканоник тақсимои ёрдамида ҳолат функцияси аниқланади. $\tilde{Z} = \prod_{\kappa=0}^{\infty} \sum_n \exp\left(\frac{(\mu_{\kappa} - \varepsilon_{\kappa})n}{\kappa T}\right)$ (33.8)

Бу ерда n_{κ} - κ ҳолатда бўлиши мумкин бўлган зарралар сони.

Ферми-газ учун $n_{\kappa} = 0, 1$ қийматларни қабул қилишини ҳисобга олсак,

$$\tilde{Z} = \prod_{\kappa=0}^{\infty} \left\{ 1 + \exp\left(\frac{\mu_{\kappa} - \varepsilon_{\kappa}}{\kappa T}\right) \right\}^{-1}$$

Бозе газ учун $n_{\kappa} = 0, 1, 2, \dots$ қийматларни қабул қилишини инобатга олиб, қуйидагини оламиз:

$$\tilde{Z} = \prod_{\kappa=0}^{\infty} \left\{ 1 - \exp\left(\frac{\mu_{\kappa} - \varepsilon_{\kappa}}{\kappa T}\right) \right\}^{-1}$$

Ферми ва Бозе-газлар

учун олинган ҳолат функциясининг ифодалари асосида ҳолат тенгламасини ёзамиз. «+» ишора Ферми-газга, «—» ишора Бозе газга тегишли.

$$PV = \pm \kappa T \sum_{\kappa=0}^{\infty} \ln \left\{ 1 \pm \exp\left|\frac{\mu_{\kappa} - \varepsilon_{\kappa}}{\kappa T}\right| \right\} \quad (33.9)$$

Масофани узлуксиз десак йиғинди интеграл билан алмашади.

$$PV = \pm \kappa T g \int \ln \left\{ 1 \pm \exp\left(\frac{\mu_{\kappa} - \varepsilon_{\kappa}}{\kappa T}\right) \right\} d\Omega \quad (33.10.)$$

33.1 Масала ечиш намуналари

33.1.1 Бозе заррачаларидан иборат газнинг кимёвий потенциали

$$\frac{N}{V} = 2(2S+1) \left(2m\kappa T h^{-2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{z} dz}{\exp\left(z - \frac{\eta}{\kappa T}\right) - 1}$$

ифодасидан фойдаланиб конденсация температураси аниқлансин..

Ечиш:

Бозе зарраларидан иборат газнинг кимёвий потенциали ифодасидан

қидирилатган температура T_0 қуйидаги тенгламадан топилади.

$$\frac{N}{V} = 2(2S+1)\pi(2m\kappa T)^{\frac{3}{2}}h^{-3} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{z}dz}{\exp(z)-1} \quad (33.1.1.1)$$

$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{z}dz}{\exp(z)-1} = 1,306$ интегралнинг бу қийматини (33.1.1.1) га қўямиз,

$$T_0 = \frac{3,31h^2}{m\kappa} \left[\frac{N}{V(2S+1)} \right]^{\frac{2}{3}} \quad (33.1.1.2)$$

ифодани оламиз.

33.1.2. $T < T_0$ температураларда мусбат энергия ($E > 0$)ли ҳолатларидаги Бозе зарралари сони қуйидаги тақсимот функцияси билан аниқланади.

$$dN(E) = \frac{(2s+1)Vm^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}\pi^2 h^3} \frac{\sqrt{E}dE}{\exp\left(\frac{E}{\kappa T}\right)-1}$$

Энергияси нолга тенг ҳолатдаги зарралар сонини аниқланг. Зарраларнинг тўла сони N .

Ечиш:

Энергияси $E > 0$ бўлган зарраларнинг жами сони N' қуйидаги тенгликдан топилади.

$$N' = 2\pi(2S+1)(2m)^{\frac{3}{2}}h^{-3}V \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{E}dE}{\exp\left(\frac{E}{\kappa T}\right)-1} \quad (33.1.2.1)$$

(33.1.2.1) тенгликда $Z = \frac{E}{\kappa T}$ деб белгилаб, N' ни қуйидагича алмаштирамиз.

$$N' = 2(2S+1)\pi(2m\kappa T)^{\frac{3}{2}}h^{-3} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{z}dz}{\exp(z)-1} \quad (33.1.2.2)$$

Аввалги масалага асосан N ва T_0 қуйидагича боғланган.

$$N = 2(2S+1)\pi(2m\kappa T_0)^{\frac{3}{2}}h^{-3}V \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{z}dz}{\exp(z)-1} \quad (33.1.2.2)$$

$$\text{Натижада: } \frac{N'}{N} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (33.1.2.3)$$

Нолинчи энергияли ҳолатдаги қидирилаётган зарралар сони $N'' = N - N'$ га тенг бўлади.

$$N'' = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (33.1.2.4)$$

33.1.3. Температураси конденция температураси T_0 дан кичик температураларда бозе-газнинг иссиқлик сиғими ва тўла энергияси E_0 ни аниқланг.

Ечиш:

$T < T_0$ температураларда тўлиқ энергия E_0 қуйидаги интеграл билан ифодаланади.

$$E_0 = \int_0^{\infty} E dN_{E>0} = 2\pi(2S+1)(2m)^{\frac{3}{2}} h^{-3} V \int_0^{\infty} \frac{E^{\frac{3}{2}} dE}{\exp\left(\frac{E}{\kappa T}\right) - 1} \quad (33.1.3.1)$$

$E = \kappa T z$ белгилаш ёрдамида (33.1.3.1) ифодани қуйидаги кўринишга келтирамиз.

$$E_0 = 2\pi(2S+1)(2m\kappa T)^{\frac{3}{2}} \kappa T h^{-3} V \int_0^{\infty} \frac{z^{\frac{3}{2}} dz}{\exp(z) - 1} \quad (33.1.3.2)$$

$$(33.1.3.2) \text{ га } \int_0^{\infty} \frac{z^{\frac{3}{2}} dz}{\exp(z) - 1} = 1,005\sqrt{\pi} \text{ ни қўйиб қуйидагини оламиз.}$$

$$E_0 = 0,128(2S+1)(m)^{\frac{3}{2}} (\kappa T)^{\frac{5}{2}} h^{-3} V \quad (33.1.3.3)$$

Бундан иссиқлик сиғими учун қуйидаги ифода олинади.

$$C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_v = 0,32(2S+1)(m)^{\frac{3}{2}} (\kappa)^{\frac{5}{2}} T^{\frac{3}{2}} h^{-3} V \quad (33.1.3.4.)$$

Демак, Бозе-Эйнштейн гази иссиқлик сиғими температурага $T^{\frac{3}{2}}$ тартибида пропорционал бўлади.

33.2 Масалалар

33.2.1 $T > T_0$ деб ҳисоблаб Бозе газининг конденсация температураси яқинидаги температурасини топинг.

33.2.2 $T < T_0$ ҳолда бозе газининг энтропиянинг температурага боғланиши аниқлансин.

33.2.3 $T < T_0$ ҳолда бозе газининг термодинамик потенциалнинг температурага боғланиши аниқлансин.

33.2.4 $T < T_0$ ҳолда бозе газининг эркин энергиянинг температурага боғланиши аниқлансин.

33.2.5 $T < T_0$ ҳолда бозе газининг босимнинг температурага боғланиши аниқлансин.

34. Қаттиқ жисмларнинг иссиқлик сиғими

Қаттиқ жисмларда атомлар кристалл панжаралари тугунларида жойлашган ва ўзларининг мувозанат ҳолати атрофида тебранма ҳаракатда бўладилар. Гармоник осциллятор деб моделлаштириладиган атомларнинг потенциал энергияси мувозанат ҳолатига нисбатан силжишнинг квадратига пропорционал бўлади. Қаттиқ жисм энергияси гармоник осцилляторлар энергиясига тенг бўлади. N та атомлардан иборат кристаллнинг эркинлик даражаси сони $(3N - 6) \approx 3N$ га тенг бўлади, классик назария бўйича энергияси $E = 3NkT$ ва иссиқлик сиғими эса $C_V = 3Nk = 6$ кал/мол • град га тенг, бу Дюлонг-Пти қонуни.

Эйнштейн қаттиқ жисмлар иссиқлик сиғими (1906 й.) ни паст температураларда Дюлонг-Пти қонунидан четга чиқишини таҳлил этади .

Кристалл панжара тугунларидаги ҳар бир атом учта эркинлик даражали квант осциллятор, ҳамма атомлар тенг ҳуқуқли ва мувозанат ҳолат атрофида бир хил ν частота билан тебранади деб қаралади.

N та атомдан ташкил топган қаттиқ жисмнинг ўртача энергияси

$$E = 3N \frac{\hbar \nu}{2} + \frac{3N\hbar \nu}{\exp\left(\frac{\hbar \nu}{\kappa T}\right) - 1} \quad (34.1)$$

Бу ерда $E_0 = \frac{3N\hbar \nu}{2}$ нолинчи энергия.

(34.1) кичик частоталар соҳасида Дюлонг-Пти қонунига ўтади, катта частота ва паст температуралар соҳасида энергия ва иссиқлик сиғими

$$E = E_0 + 3N\hbar \nu \exp\left(-\frac{\hbar \nu}{\kappa T}\right), \quad C_v^\kappa = 3N\kappa \left(\frac{\hbar \nu}{\kappa T}\right)^2 \exp\left(-\frac{\hbar \nu}{\kappa T}\right) \quad (34.2)$$

Тажриба натижалари паст температуралар соҳасида иссиқлик сиғимининг температурага боғланиши $C_v \approx T^3$ бўлишини кўрсатади.

Дебай назариясига кўра, қаттиқ жисмда иккита кўндаланг ва битта бўйлама тўлқин тарқалади деб қаралади, тўлқинларнинг тарқалиш тезлиги кристалл панжаранинг дискретлигидан частота бўйича чегараланган бўлади.

Қаттиқ жисмда частоталари $\nu = 0$ ва $\nu = \nu_{\max}$ интервалда бўлган тўлқинлар тарқала олади. Қаттиқ жисм V ҳажмда N та атомдан ташкил топган бўлса, уни $3N$ та гармоник ν_κ частота билан тебранувчи квант осцилляторлар тўпламидан иборат деб қаралади. Квант осцилляторнинг ўртача энергияси ва V ҳажмдаги қаттиқ жисмнинг ўртача энергияси қуйидагича ифодаланади.

$$E_\kappa = \frac{\hbar \nu_\kappa}{2} + \frac{\hbar \nu_\kappa}{\exp\left(\frac{\hbar \nu_\kappa}{\kappa T}\right) - 1}; \quad E = E_0 + \sum_{\kappa=1}^{3N} \frac{\hbar \nu_\kappa \kappa}{\exp\left(\frac{\hbar \nu_\kappa}{\kappa T}\right) - 1}; \quad E_0 = \sum_{\kappa=1}^{3N} \frac{\hbar \nu_\kappa}{2} \quad (34.3)$$

N жуда катта бўлса, $\nu, \nu + d\nu$ частота интервалидаги квант осцилляторлар учун энергия қуйидаги кўринишни, олади:

$$E = E_0 + \int_0^{\nu_{\max}} \frac{\hbar \nu}{\exp\left(\frac{\hbar \nu}{\kappa T}\right) - 1} g(\nu) d\nu \quad (34.4)$$

$g(\nu)d\nu$ - частота интервалидаги квант осцилляторлар сони $3N = \sum_{\kappa} g(\nu_\kappa)$ ёки кўндаланг ва бўйланма тебранишлар сони. $g(\nu)$ маълум бўлса, бу тенгликдан

$\nu_{\max}$ частота ҳисобланади. Вазифа $g(\nu_k)$ кўндаланг ва бўйланма тебранишлар

$$\text{сони } 3N = \int_0^{\nu_{\max}} 4\pi V \left(\frac{2}{c_t^3} + \frac{1}{c_l^3} \right) \nu^2 d\nu \quad (34.5)$$

Қаттиқ жисм энергияси учун қуйидаги ифодани оламиз

$$E = E_0 + \frac{12\pi V}{c^3} \int_0^{\nu_{\max}} \frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{\kappa T}\right) - 1} d\nu \quad (34.6)$$

Паст температуралар соҳасида, яъни $T \ll h\nu_{\max} / \kappa$ да қаттиқ жисмларнинг энергияси $E = E_0 + \alpha T^4$ бўлади. $\alpha = 4\pi^5 \kappa^4 V / 5c^3 h^3$ га тенг.

Паст температураларда қаттиқ жисмнинг иссиқлик сиғими $C_V = \beta T^3$ (34.7)

Ошкора ҳолда $C_V = \frac{12\pi^4 N \kappa T^3}{5T_D^3}$ бу формула тажриба натижалари билан миқдорий жиҳатдан тўла мос келади.

34.1 Масалалар

34.1.1 Икки ўлчамли (қатламли) структурага эга бўлган қаттиқ жисмлар учун иссиқлик сиғими C_V нинг температуравий боғланишини аниқланг. Паст температуралар $T \ll \theta_D$ учун ҳисоблаб кўринг.

Ечиш:

Қаттиқ жисмларда атомлар мувозанат ҳолатлари атрофида нормал тебранма ҳаракат қилади.

Бир ўлчамли кристаллда, тўлқин сонлари $q, q + dq$ интервалда ётган нормал тебранишлар сони $\frac{L}{2\pi} dq$, бу ерда L – кристаллнинг узунлиги.

Икки ўлчамли кристалл ҳолида нормал тебранишлар сони қуйидагича ифодаланади.

$$\iint \frac{L^2}{(2\pi)^2} dq_x dq_y = 2 \frac{L^2}{(2\pi)^2} \pi q dq \quad (34.1.1)$$

бу ерда: $q < (q_x^2 + q_y^2)^{\frac{1}{2}} < q + dq$

Бўйлама ва кўндаланг тебранишлар тезлигини бир хил ν – деб ҳисоблаб ва тўлқин сонини $\nu = \frac{\nu q}{2\pi}$ деб олсак, частоталари $\nu, \nu + d\nu$ интервалда бўлган нормал тебранишлар сони қуйидагига тенг бўлади.

$$dN(\nu)d\nu = \frac{6\pi L^2}{\nu^2} \nu d\nu = 6N \frac{\nu d\nu}{\nu_{\max}^2} \quad (34.1.2)$$

Бу ерда $\nu_{\max}$ – қуйидаги муносабатдан аниқланадиган чегаравий частота.

$$\int_0^{\nu_{\max}} dN(\nu)d\nu = 2N \quad (34.1.3)$$

ν – частотали гармоник осцилляторнинг ўртача энергияси формуласидан фойдаланиб,

$$E(\nu, T) = \frac{h\nu}{2} + \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}, \quad (34.1.4)$$

Кристаллнинг ички энергияси учун қуйидаги ифодани оламиз.

$$\bar{E} = \int_0^{\nu_{\max}} E(\nu, T) dN(\nu)d\nu \quad (34.1.5)$$

Доимий ҳажмдаги иссиқлик сиғими қуйидагига тенг бўлади.

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{V, N} = 6Nk \int_0^{\nu_{\max}} \frac{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}{\left(\exp\frac{h\nu}{kT} - 1\right)^2} \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{\nu d\nu}{\nu_{\max}^2} = 6Nk \left(\frac{T}{T_D}\right) \int_0^{\frac{T_D}{T}} \frac{x^3 \exp(x)}{(e^x - 1)^2} dx$$

Паст температуралар $T \ll T_D$ да C_V ни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$C_V \approx 6Nk \left(\frac{T}{T_D}\right)^2 \int_0^{\infty} \frac{x^3 \exp(x)}{(\exp(x) - 1)^2} dx \quad (34.1.6)$$

Яъни C_V температуранинг квадратига пропорционал.

34.1.2 Қаттиқ жисмдаги тебранишларни Дебай моделига асосан Бозе статистикасига бўйсинадиган фононлар гази деб ҳисоблаб энергия ва иссиқлик сиғимини топинг.

Ечиш:

Қаттиқ жисмнинг ҳажми V , бўйлама ва кўндаланг тўлқинларнинг тарқалиш тезликлари мос равишда c_l ва c_t . Қаттиқ жисмлар иссиқлик

сифимининг Дебай назариясига асосан квант осцилляторлар сони: $3N = \sum_{\nu=0}^{\nu_{\max}} g(\nu_l) d\nu_l$

(34.1.2.1)

$$g(\nu_l) d\nu_l = \left[\frac{4\pi\nu_l^2}{c_l^3} d\nu_l + 2 \frac{4\pi\nu_t}{c_t} d\nu_t \right], \quad (34.1.2.2)$$

$g(\nu)$ - частоталари $\nu_l, \nu_l + d\nu_l$ ва $\nu_t, \nu_t + d\nu_t$ ораликдаги бўйлама ва кўндаланг тўлқинлар сони. Агар $\nu_l = \nu_t$ ва $c_l = c_t$ деб фараз қилсак, $g(\nu) d\nu = \frac{12\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu$,

(34.1.2.3)

у ҳолда қаттиқ жисм энергияси

$$E = \int_0^{\nu_{\max}} \varepsilon g(\nu) d\nu = \int_0^{\nu_{\max}} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{\kappa T}\right) - 1} \frac{12\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu = \frac{12\pi V}{c^3} \left(\frac{\kappa T}{h}\right)^4 h \int_0^{\frac{h\nu_{\max}}{\kappa T}} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad (34.1.2.4)$$

бу ерда $x = \frac{h\nu}{\kappa T}$ ва паст температураларда $\frac{h\nu_{\max}}{\kappa T} \Rightarrow \infty$ ва $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$ га

тенг бўлганлигидан ва θ – Дебай температурасини киритиб қуйидагиларни оламиз.

$$E = \frac{4\pi^5 \kappa^4 V}{5c^3 h^3} T^4 = \frac{3\pi^4 N \kappa}{5\theta^3} T^4 \quad (34.1.2.5)$$

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = \frac{12\pi^4 N \kappa}{5\theta^3} T^3 \quad (34.1.2.6)$$

34.1.3 15.1.2. – масаланинг натижасидан фойдаланиб паст температураларда қаттиқ жисмнинг эркин энергияси, энтропияси ва босими аниқлансин. (масала юқоридаги масала ечимидан фойдаланиб тайёр формулалар асосида мустақил ечишга тавсия этилади.)

34.1.4 Қаттиқ жисмлар учун квант ҳолатлар сони $\Omega(E)$ ни $T \ll \theta \frac{h\omega_m}{\kappa}$

шарт бажарилган ҳол учун ҳисобланг.

Ечиш:

$S = \kappa \ln \Omega(E)$ дан $\Omega(E) = e^{\frac{S}{\kappa}}$. Б у ерда S – қаттиқ жисмнинг энтропияси.

(34.1.2) масаладан $E = \frac{3\pi^4 N \kappa}{5\theta^3} T^4$ эканлигидан фойдаланиб қаттиқ жисмнинг эркин энергиясини қуйидагича ҳисоблаймиз.

$$F = -T \int_0^T \frac{E}{T^2} dT \quad (34.1.4.1)$$

$$F = -\frac{\pi^4 N \kappa}{5\theta^3} T^4 \quad (34.1.4.2)$$

Эркин энергия ва энтропиянинг боғланиш формуласидан фойдалансак,

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = \frac{4}{5} \frac{\pi^4 N \kappa}{\theta^3} T^3 \quad (34.1.4.3)$$

(34.1.4.3) дан фойдаланиб, квант ҳолатлар сони учун қуйидаги ифодани оламиз.

$$\Omega(E) = \exp\left(\frac{4N\pi^4}{5} \left(\frac{T}{\theta}\right)^3\right) \quad (34.1.4.4)$$

34.1.5 Электрон газининг иссиқлик сиғими литий кристалл панжарасининг иссиқлик сиғимига тенг бўлгандаги температура аниқлансин.

Ечиш:

Масалани ечишда литий метали учун Дебай температураси $\theta = 404^\circ K$, эркин электронлар концентрацияси $n = 4,66 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ га тенг эканлигини эътиборга оламиз.

Электрон гази учун иссиқлик сиғими: $C_V^{\text{эл}} = \frac{N \kappa \pi^2}{2} \frac{\kappa T}{\varepsilon_{\max}} \quad (34.1.5.1)$

Кристалл панжара учун иссиқлик сиғими $C_V^{\text{панж}} = \frac{12 N \kappa \pi^4}{5\theta^3} T^3 \quad (34.1.5.2)$

Бу ерда $\varepsilon_{\max} = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3n}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$ га тенг.

Электрон гази учун иссиқлик сиғимининг кристалл панжара учун иссиқлик сиғимига тенглиги $C_V^{\text{эл}} = C_V^{\text{панж}}$ дан

$$T = \sqrt{\frac{5\kappa\theta^3}{24\pi^2\varepsilon_{\max}}} = 5^\circ K \quad (34.1.5.3)$$

34.1.6 Электрон газининг иссиқлик сиғими кумуш кристалл панжарасининг иссиқлик сиғимига тенг бўлгандаги температура аниқлансин.

34.1.7 Электрон газининг иссиқлик сиғими кремний кристалл панжарасининг иссиқлик сиғимига тенг бўлгандаги температура аниқлансин

Изоҳ: 34.1.6. ва 34.1.7. масалалар 34.1.5. масала каби ечилади ва талабаларга аудиторияда мустақил ишлаш учун берилади.

34.1.8 Каттик жисмларда атомларнинг тебранишини ангармоник деб ҳисоблаб, моляр иссиқлик сиғимини ҳисобланг.

Ечиш:

Масалада чизикли ангармоник осцилляторнинг Гамильтон функцияси

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \alpha q^2 - \beta q^4, \text{ бу ерда } \beta \ll \frac{\alpha^2}{kT}$$

Бу масала ангармоник осциллятор учун иссиқлик сиғимини энергияга боғланиш формуласидан фойдаланиб ҳисобланади.

35. Икки атомли квант идеал газлар

N та икки атомли молекулалардан иборат квант идеал газнинг ички энергияси ва иссиқлик сиғимини ҳисоблаймиз.

Газнинг ҳолат функцияси $Z = \frac{1}{N!} (z_{i\lg})^N (z_{ayl})^N (z_{teb})^N$ ички энергияси

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = E_{i\lg} + E_{ayl} + E_{teb} \text{ иссиқлик сиғими } C_V = C_V^{i\lg} + C_V^{ayl} + C_V^{teb} \quad (35.1)$$

Асосий масала идеал газнинг тебранма ва айланма ҳаракат ҳолат функцияси ифодаларини аниқлаймиз.

$$z_{teb} = \sum \exp\left(-\frac{\varepsilon_{teb}}{kT}\right) g(\varepsilon_{teb}) \text{ ва } z_{ayl} = \sum \exp\left(-\frac{\varepsilon_{ayl}}{kT}\right) g(\eta_{ayl}) \quad (35.2)$$

Шу асосда икки атомли N та молекуладан ташкил топган газ ички энергияси, иссиқлик сиғими ва термодинамик катталикларни ҳисоблаймиз.

$$z_{teb} = \frac{\exp\left(-\frac{T_c}{2T}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right)} \text{ тебранувчи молекуланинг ҳолат функцияси, } T_c = \frac{h\nu}{\kappa T} -$$

характеристик температура. $E_{teb} = N\bar{\varepsilon}_{teb} = \frac{N\kappa T_c}{2} \frac{T_c}{2T} = \frac{Nh\nu}{2} \frac{h\nu}{2T}$ - газнинг тебранма ҳаракат энергияси.

$$C_v^{teb} = \frac{N\kappa}{4} \left(\frac{T_c}{T}\right)^2 \frac{1}{sh^2 \frac{T_c}{2T}} = \frac{N\kappa}{4} \left(\frac{h\nu}{\kappa T}\right)^2 \frac{1}{sh^2\left(\frac{h\nu}{2\kappa T}\right)} \text{ Тебранма ҳаракатга тўғри келган}$$

иссиқлик сиғими

$$\text{Айланма ҳаракат ҳолат функцияси: } z_{ail} \cong \frac{T}{T_c} \left[1 + \frac{1}{3} \frac{T_c}{T} + \frac{1}{15} \left(\frac{T_c}{T}\right)^2 \right],$$

$$z_{ayl} \cong \frac{T}{T_c} = \frac{8\pi^2 I \kappa T}{h^2}$$

Юқори температурада:

$$E_{ayl} \approx N\kappa T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \left[\left(1 + 3 \exp\left(-\frac{2T_c}{T}\right) \right) \right] \cong 6N\kappa T_c \exp\left(-\frac{2T_c}{T}\right)$$

Айланма ҳаракат энергияси:

$$C_v^{ayl} \approx 12N\kappa \left(\frac{T_c}{T}\right)^2 \exp\left(-\frac{2T_c}{T}\right)$$

Иссиқлик сиғими:

35.1 Масала ишлаш намуналари

35.1.1 N – та икки атомли зарралардан ташкил топган квант идеал газнинг тебранма ҳаракатига тўғри келган иссиқлик сиғими аниқлансин.

Ечиш:

Икки атомли квант идеал газнинг тебранма ҳаракатига тўғри келган иссиқлик сиғимининг тебранма ҳаракатга тўғри келган энергияга боғланиши куйидагича ифодаланади.

$$C_v^{тебр} = \left(\frac{\partial E_{тебр}}{\partial T} \right)_v \quad (35.1.1.1)$$

Тебранма ҳаракатга тўғри келган энергиянинг мос ҳолат йиғиндиси билан боғланиш ифодаси

$$E_{me\delta p} = \kappa T^2 \frac{\partial \ln Z_{me\delta p}}{\partial T} \quad (35.1.1.2)$$

Тебранма ҳаракатга мос ҳолат йиғиндиси ифодаси $Z_{me\delta p} = (z_{me\delta p})^N$;

$$Z_{me\delta p} = \sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_{me\delta p}}{\kappa T}\right) g(\varepsilon_{me\delta p}) \quad (35.1.1.3)$$

$$\text{бу ерда : } \varepsilon_{me\delta p} = h\nu\left(n + \frac{1}{2}\right);$$

$$z_{me\delta p} = \exp\left(-\frac{h\nu}{2\kappa T}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{nh\nu}{\kappa T}\right) = \frac{\exp\left(-\frac{h\nu}{2\kappa T}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{\kappa T}\right)} = \frac{\exp\left(-\frac{T_c}{2T}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right)} \quad (35.1.1.4)$$

бу ерда: $T_c = \frac{h\nu}{\kappa}$, $T_c = \frac{h\nu}{\kappa}$ - характеристик температура.

$$\text{Натижада: } E_{me\delta p} = \frac{N\kappa T_c}{2} \operatorname{cth} \frac{T_c}{2T} \quad (35.1.1.5)$$

$$C_V^{me\delta p} = \frac{N\kappa}{4} \left(\frac{T_c}{T}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{sh}^2\left(\frac{T_c}{2T}\right)} \quad (35.1.1.6)$$

35.1.2 N – та икки атомли зарралардан ташкил топган квант идеал газнинг тебранма ҳаракатига тўғри келган эркин энергия ва энтропия аниқлансин.

Ечиш:

Юқоридаги кетма кетликда эркин энергия ва энтропия ифодалари аниқланади.

$$F_{me\delta p} = \frac{N\kappa T_c}{2} + N\kappa T \ln\left(1 - \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right)\right) \quad (35.1.2.1)$$

$$S_{me\delta p} = N\kappa \left(\frac{T_c}{T}\right) \frac{1}{\exp\left(\frac{T_c}{T}\right) - 1} - N\kappa \ln\left[1 - \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right)\right] \quad (35.1.2.2)$$

35.1.3 Паст температуралар ($T \ll T_c$) да N та икки атомли зарралардан ташкил топган квант идеал газнинг айланма ҳаракатига тўғри келувчи ички энергия ва иссиқлик сиғими аниқлансин.

Ечиш:

$$E_{aiil} = N\kappa T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z_{aiil} \quad (35.1.3.1)$$

$$C_V^{a\ddot{u}l} = \left(\frac{\partial E_{a\ddot{u}l}}{\partial T} \right)_V \quad (35.1.3.2)$$

$$Z_{a\ddot{u}l} = \sum \exp\left(-\frac{\varepsilon_{a\ddot{u}l}}{\kappa T}\right) g(\varepsilon_{a\ddot{u}l}) = \sum (2j+1) \exp\left(-\frac{T_c j(j+1)}{T}\right) \quad (35.1.3.3)$$

$$g(\varepsilon_{a\ddot{u}l}) = 2j+1; \quad \varepsilon_{a\ddot{u}l} = \frac{h^2}{8\pi^2 I} J(J+1) \quad (35.1.3.4)$$

$J = 0, 1, 2, 3, \dots$ - квант сон, $T_c = \frac{\varepsilon_{a\ddot{u}l}}{K}$ - характеристик температура.

$$Z_{a\ddot{u}l} = 1 + 3 \exp\left(-\frac{2T_c}{T}\right) \quad (35.1.3.5)$$

$$E_{a\ddot{u}l} = \frac{3Nh^2}{4\pi^2 I} \exp\left(-2\frac{T_c}{T}\right) \quad (35.1.3.6)$$

$$C_V^{a\ddot{u}l} = 12N\kappa \left(\frac{T_c}{T}\right)^2 \exp\left(-\frac{2T_c}{T}\right) \quad (35.1.3.7)$$

35.1.4 Ҳар бири $n+1$ каррали айниган $\varepsilon = (n+1)h\nu$ энергетик сатҳларга эга бўлган $N - ma$ ўзаро боғланмаган гармоник осцилляторлардан ташкил топган тизимнинг иссиқлик сиғими аниқлансин.

Ечиш:

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V \quad (35.1.4.1)$$

$$E = \kappa T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} \quad (35.1.4.2)$$

$N - ta$ ўзаро боғланмаган гармоник осцилляторлардан ташкил топган тизимнинг статистик йиғиндиси Z - қуйидагича бўлади.

$$Z = \frac{1}{N!} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \exp\left(-\frac{h\nu(n+1)}{\kappa T}\right) \right] = \frac{1}{N!} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta(n+1)) \right] = \frac{1}{N!} \frac{e^{\beta}}{(e^{\beta} - 1)^2}$$

$$\text{Демак: } Z = \frac{1}{N!} \frac{\exp\left(\frac{h\nu}{\kappa T}\right)}{\left(\exp\left(\frac{h\nu}{\kappa T}\right) - 1\right)^2} \quad (35.1.4.3)$$

Юқоридаги формулалар асосида энергия ва иссиқлик сиғими учун натижаларни ҳисоблаймиз.

$$E = \kappa T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = N \left(h\nu + \frac{2h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{\kappa T}\right) - 1} \right) \quad (35.1.4.4)$$

$$C_v = \frac{N\kappa}{2} \left(\frac{h\nu}{\kappa T} \right)^2 \frac{1}{sh^2\left(\frac{h\nu}{\kappa T}\right)} \quad (35.1.4.5)$$

36. Флуктуация назарияси

Физик катталиклар ўртача қийматлари атрофида флуктуация мавжуд ва уларнинг тақсимот функциясини кидирилади. Флуктуацияга дучор бўлган Макроскопик система флуктуацияга учрагандан сўнг ўз ҳолича энг катта эҳтимоллик ҳолатдан энг кам эҳтимоллик ҳолатга ўтади.

Макроскопик системани характерловчи катталикларнинг ўртача қийматларидан тасодифий четланиши флуктуация ҳодисаси дейилади ва берк системаларда флуктуация эҳтимоллиги Больцман формуласи ёрдамида аниқланади.

Флуктуация ҳодисаси амалда икки ҳолда кузатилиши мумкин:

- 1) система ўлчами етарли даражада кичик бўлганда. Бу ҳолда флуктуация тез-тез содир бўлади ва нисбатан катта бўлади.
- 2) ўлчами унча катта бўлмаган системаларда. Бу ҳолда кичик флуктуациялар мавжуд бўлади.

Ёпиқ системанинг $\xi, \xi + d\xi$ интервалдаги ҳолатга тушиш эҳтимоллиги Больцман формуласига асосан

$$dW = \text{const} \exp\left(\frac{\Delta S}{\kappa}\right) d\xi \quad (36.1)$$

Бу ерда const нормировка шартидан топилади; $\Delta S = S(\xi) - S(\xi_0)$ бўлади.

Флуктуация ҳодисаси берк системанинг бир бўлагини ташкил қилган квазиберк система (системача)да қаралади. Квазиберк система сифатида ўзгармас температурали ва ўзгармас босимли термостатга туширилган

системача каралади. Флуктуация туфайли берк системанинг (термостат+система) энтропияси ΔS га ўзгаради, система устида $\Delta A(\lambda) = TdS$ ташқи куч томонидан иш бажарилади.

Системанинг ташқи манба иши таъсирида янги ҳолатга ўтиш эҳтимоллиги:

$$dW = C \exp\left\{\frac{T\Delta S - \Delta E - p\Delta V}{\kappa T}\right\} d\lambda \quad (36.5.)$$

Ички энергия флуктуацияси :

$$\Delta E - T\Delta S + p\Delta V = \frac{1}{2}(\Delta S\Delta T - \Delta p\Delta V), \quad dW = C \exp\left\{\frac{\Delta p\Delta V - \Delta S\Delta T}{2\kappa T}\right\} d\lambda$$

1. Ўзаро боғланмаган ўзгарувчанлар сифатида V ва T ни олилади:

$$dW = C \exp\left\{-\frac{C_V}{2\kappa T^2}(\Delta T)^2 + \frac{1}{2\kappa T}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T(\Delta V)^2\right\} d\lambda \quad (35.9.)$$

Бу ифодада $V = \text{const}$ бўлганда, система температурасининг $T, T + \Delta T$ температура интервалида бўлиш эҳтимоллиги ифодасини олиш мумкин.

$$dW_T = C_1 \exp\left\{-\frac{C_V}{2\kappa T^2}(\Delta T)^2\right\} dT \quad (36.10.)$$

Температура ўзгармас бўлганда система ҳажмининг флуктуацияланиши ва унинг ҳажмини $V, V + dV$ ҳажм интервалида бўлиш эҳтимоллигини беради:

$$dW_T = \sqrt{\frac{C_V}{2\pi\kappa T^2}} \exp\left\{-\frac{C_V}{2\kappa T}(\Delta T)^2\right\} dT, \quad dW_V = \sqrt{\frac{1}{2\pi\kappa T}\left|\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right|} \exp\left\{-\frac{(\Delta V)^2}{2\kappa T}\left|\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right|\right\} dV$$

$$\text{Ўртача квадратик флуктуациялар: } (\Delta T)^2 = \frac{\kappa T^2}{C_V}, \quad (\Delta V)^2 = -\frac{\kappa T}{\left|\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right|},$$

Энтропия ва босимнинг ва заррачалар сонининг квадратик ўртача флуктуациялари:

$$(\Delta S)^2 = \kappa C_p, \quad (\Delta p)^2 = -\kappa T \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S \left(\Delta \frac{V}{N}\right)^2 = \frac{1}{N^2} \frac{\kappa T}{\left|\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right|} = \frac{V^2}{N^4} (\Delta N)^2$$

36.1 Аудиторияда ишлаш учун тавсия этиладиган масалалар

36.1.1 Каноник тақсимотга энергиянинг ўртача қиймати ва каноник тақсимот модули θ орқали бўйсинадиган система учун энергиянинг нисбий флуктуациясини ҳисобланг.

Ечиш:

Ўртача энергия $\bar{E}$ нинг ифодасидан фойдаланамиз.

$$\bar{E} = \frac{\int E \exp\left(-\frac{E}{\theta}\right) d\Gamma}{\int_0 \exp\left(-\frac{E}{\theta}\right) d\Gamma} \quad (36.1.1.1)$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз $K(\beta) = \int \exp(-\beta E) d\Gamma$, бу ерда $\beta = \frac{1}{\theta}$

к ни β бўйича дифференциаллаб қуйидагини аниқлаймиз.

$$\frac{dK}{d\beta} = -\int E \exp(-\beta E) d\Gamma \quad (36.1.1.2)$$

$$\text{У ҳолда : } \bar{E} = -\frac{1}{K} \frac{dK}{d\beta} \quad (36.1.1.3)$$

$$\overline{E^2} = \frac{1}{K} \frac{d^2 K}{d\beta^2} \quad (36.1.1.4)$$

Шу асосда қуйидаги ифодаларни оламиз.

$$\delta_E = \frac{1}{\bar{E}} \sqrt{\overline{E^2} - \bar{E}^2} = \frac{\theta}{\bar{E}} \sqrt{\frac{\partial \bar{E}}{\partial \theta}} \quad (36.1.1.5)$$

36.1.2 Заррачаларнинг сони ўзгарувчан системалар учун Гиббс тақсимоидан фойдаланиб $(\Delta N)^2$ ни $\left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_{T,V}$ орқали ифодаланг. Бу ерда η – кимёвий потенциал.

Ечиш:

Зарралар сони ўзгарувчан системалар учун Гиббс тақсимоиди қуйидаги кўринишга эга .

$$W_n = \exp\left(\frac{\Omega + \mu N - E_n N}{\theta}\right) \quad (36.1.2.1)$$

Бу ерда: E_n - n -сатҳдаги битта заррачанинг энергияси, Ω -нормировка шартидан аниқланади.

$$\exp\left(\frac{\Omega}{\theta}\right) \sum_N \exp\left(\frac{\mu N}{\theta}\right) \sum_n \exp\left(-\frac{E_n N}{\theta}\right) = 1 \quad (36.1.2.2)$$

Заррачалар сони учун ўртача қиймат қуйидаги тенглик билан аниқланади:

$$\bar{N} = \exp\left(\frac{\Omega}{\theta}\right) \sum_N \exp\left(\frac{\mu N}{\theta}\right) \sum_n \exp\left(-\frac{E_n N}{\theta}\right) \quad (36.1.2.3)$$

Охирги тенгликни μ - бўйича дифференциаллаб, Ω нинг μ га боғланишидан фойдаланиб қуйидаги ифодани оламиз.

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,V} = \frac{1}{\theta} \exp\left(\frac{\Omega}{\theta}\right) \sum_N \left(N^2 + N \frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right) \exp\left(\frac{\mu N}{\theta}\right) \sum_n \exp\left(-\frac{E_n N}{\theta}\right) \quad (36.1.2.4)$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,V} = \frac{1}{\theta} \left(\bar{N}^2 + \bar{N} \frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right) \quad (36.1.2.5)$$

Нормировка шартидан фойдаланиб, μ - бўйича дифференциаллаб $\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = -\bar{N}$

$$(36.1.2.5.)$$

ни ҳосил қиламиз.

$$\left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \mu}\right)_{T,V} = \frac{1}{\theta} (\overline{N^2}) - \bar{N}^2 = \frac{\overline{\Delta N^2}}{\theta} \quad (36.1.2.6)$$

$$\text{бундан } \overline{(\Delta N)^2} = \theta \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \mu}\right)_{T,V} \quad (36.1.2.7) \text{ ни аниқлаймиз.}$$

36.1.3 Торнинг узунлиги l ва таранглик кучи F га тенглигини билган ҳолда таранглаштирилган тор нуқталарининг флуктацион оғиши нинг ўртача квадрaтини аниқланг.

Ечиш:

Торнинг маҳкамланган учларидан биридан x масофада жойлашган нуқтани қараймиз. Торнинг кўндаланг кесим юзаси u деб белгиланади.

Торни масаладаги ҳолатга келтириш учун бажариладиган ишни аниқлаймиз:

$$A_{\min} = F \left\{ \left(\sqrt{x^2 + u^2} - x \right) + \sqrt{(l-x)^2 + u^2} - (l-x) \right\} \quad (36.1.3.1)$$

Масалада $\frac{u}{x} \ll 1$ ва $\frac{u}{l-x} \ll 1$ деб ҳисоблаб, қуйидагини оламиз

$$A_{\min} = \frac{Fu^2l}{2x(l-x)} \quad (36.1.3.2)$$

Қаралаётган флуктуациянинг эҳтимоллиги

$$dW(u) = C \exp\left(-\frac{A_{\min}}{\kappa T}\right) du = C \exp\left(-\frac{Flu^2}{2\kappa T x(l-x)}\right) \quad (36.1.3.3)$$

$$\text{Бундан: } \overline{u^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp(-\beta_1 u^2) du}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta_1 u^2) du} = \frac{1}{2\beta_1} \quad (36.1.3.4)$$

бу ерда: $\beta_1 = \frac{Fl}{2\kappa T x(l-x)}$ - нинг қийматини юқоридаги ифодага қўйсак:

$$\overline{u^2} = \frac{\kappa T x(l-x)}{Fl} \quad (36.1.3.5)$$

36.1.4 Броун ҳаракатининг механизми асосида зичлик флуктуацияси асосидаги диффузия эканлигидан фойдаланиб броун заррачасининг t вақт ичидаги ўртача квадратик силжишини топинг.

Ечиш:

Диффузиянинг дифференциал тенгламаси

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad (36.1.4.1)$$

Бу ерда D – диффузия коэффициенти, тенгламанинг хусусий ечими қуйидагича бўлади.

$$n(x, t) = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}\right) \quad (36.1.4.2)$$

Бу ерда x_0 координатали нуқтада бошланғич t_0 вақт моментида зарралар концентрацияси. Соддалик учун x_0 ва t_0 ларни нолга тенг деб ҳисоблаймиз. t

вақт моментида $x_0 = 0$ деб ҳисоблаган ҳолда заррачанинг силжиш координаталари $x, x + dx$ интервалга тушиш эҳтимоллиги қуйидаги формулалар билан аниқланади.

$$dW(x) = \frac{ndx}{n_0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) dx \quad (36.1.4.3)$$

$$\text{У ҳолда : } \overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dW(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) dx \quad (36.1.4.4)$$

$$\text{Пуассон интегралли } \int_{-\infty}^{\infty} x^m \exp(-\alpha x^n) dx = \frac{2}{n} \alpha^{-\frac{m+1}{n}} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \text{ дан фойдаланиб}$$

юқоридаги интегрални ҳисоблаймиз

$$\overline{x^2} = 2Dt \quad (36.1.4.5)$$

$$\text{Ўртача квадратик силжиш: } \sqrt{\overline{\Delta x^2}} = \sqrt{(x - x_0)^2} = \sqrt{2Dt} \quad (36.1.4.6)$$

Агар $x_0 = 0$ бўлса $\overline{(x - x_0)^2} = \overline{x^2}$ га тенг бўлади.

36.1.5 Берилган ҳажмдаги зарралар сони флуктуациясини ҳисобланг.

Ечиш:

$N = \text{const}$ бўлган ҳолда битта заррага тўғри келган $\frac{V}{N}$ нинг ўртача квадратик флуктуацияси қуйидагича ифодаланади.

$$\overline{\left(\Delta \frac{V}{N}\right)^2} = \frac{1}{N^2} \overline{(\Delta V)^2} = \frac{1}{N^2} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right] \quad (36.1.5.1)$$

$V = \text{const}$ деб ҳисоблаб зарралар сони флуктуациясини ҳисоблаймиз.

$$\overline{\left(\Delta \frac{V}{N}\right)^2} = \frac{1}{N^2} \overline{(\Delta V)^2} = \frac{V}{N^4} \overline{(\Delta N)^2} \quad (36.1.5.2)$$

$$\overline{(\Delta N)^2} = \frac{N^4}{V^2} \overline{\left(\Delta \frac{V}{N}\right)^2} = \frac{N^2}{V^2} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right] \quad (36.1.5.3)$$

Идеал газлар учун зарралар сонининг ўртача квадратик флуктуациясини ҳисоблаш учун Клапейрон – Менделеев тенгламасидан фойдаланиб $\left| \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right|$ ни

аниқлаймиз ва

$$\overline{(\Delta N)^2} = \frac{N^4}{V^2} \overline{\left(\Delta \frac{V}{N} \right)^2} = \frac{N^2}{V^2} \frac{\kappa T}{\left| \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right|} = N \quad (36.1.5.4)$$

натижани аниқлаймиз.

36.1.6 Гиббснинг каноник тақсимооти ўринли бўлган системада , яъни термостатда жойлашган системада энергия флуктуациясини ҳисобланг.

Ечиш:

Энергиянинг ўртача квадратик флуктуацияси

$$\overline{(\Delta E)^2} = \overline{E^2} - (\overline{E})^2 \quad (36.1.6.1)$$

$$\text{Бу ерда: } \overline{E} = \frac{1}{Z} \sum E_i \exp\left(-\frac{E_i}{\theta}\right) \Omega(E_i) = \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial \left(-\frac{1}{\theta}\right)} \right)_V = \frac{\theta^2}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial \theta} \right)_V \quad (36.1.6.2)$$

$$\overline{E^2} = \frac{1}{Z} \sum E_i^2 \exp\left(-\frac{E_i}{\theta}\right) \Omega(E_i) = \frac{2\theta^3}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial \theta} \right)_V + \frac{\theta^4}{Z} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} \right)_V \quad (36.1.6.3)$$

Бу ифодаларни $\overline{(\Delta E)^2} = \overline{E^2} - (\overline{E})^2$ га қўйиб қуйидаги ифодани топамиз:

$$\overline{(\Delta E)^2} = \theta^2 \left(\frac{\partial \overline{E}}{\partial \theta} \right)_V = \kappa T^2 C_V \quad (36.1.6.4)$$

$$\text{Энергиянинг нисбий флуктуацияси } \delta_E = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta E)^2}}}{\overline{E}} = \frac{\sqrt{C_V \kappa T^2}}{\overline{E}} \quad (36.1.6.5)$$

Бу ифода классик ҳамда квант системалар учун ҳам ўринли бўлади, масалан классик бир атомли газ учун ўртача энергия $\bar{E} = \frac{3}{2} N \kappa T$ ва $C_V = \frac{3}{2} N \kappa$ ва

нисбий флуктуация $\delta_E = \frac{\sqrt{(\Delta E)^2}}{E} = \frac{\sqrt{C_V \kappa T^2}}{E} = \sqrt{\frac{2}{3N}} = \frac{1}{\sqrt{N}}$ га тенг бўлади.

36.1.7 Термостат ичида жойлашган ва зарраларининг сони ўзгарувчан бўлган системада зарралар сони флуктуациясини топинг.

Ечиш:

Бу масалани ечишда Гиббснинг катта каноник тақсимоидан фойдаланамиз:

$$\bar{N} = \kappa T \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_i \sum_N \exp\left(\frac{\mu N - \varepsilon_i}{\kappa T}\right) \Omega(\varepsilon_i, N) = \frac{\kappa T}{\tilde{Z}} \left(\frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \mu} \right)_{T,V} \quad (36.1.7.1)$$

$$\overline{N^2} = \sum_i \sum_N N^2 \exp\left(\frac{\mu N - \varepsilon_i}{\kappa T}\right) \Omega(\varepsilon_i, N) = \frac{(\kappa T)^2}{\tilde{Z}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{Z}}{\partial \mu^2} \right)_{T,V} \quad (36.1.7.2)$$

$$\text{Бу ерда: } \tilde{Z} = \sum_i \sum_N \exp\left(\frac{\mu N - \varepsilon_i}{\kappa T}\right) \Omega(\varepsilon_i, N) \quad (36.1.7.3)$$

Натижада зарралар сонинг ўртача квадратик флуктуацияси учун қуйидаги кўринишдаги ифодани оламиз:

$$\overline{(\Delta N)^2} = \overline{N^2} - (\bar{N})^2 = \kappa T \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \mu} \right)_{T,V} \quad (36.1.7.4)$$

Бу ифодалар классик ҳамда квант системалар учун ўринли бўлади. Бир атомли идеал газ учун

$$\bar{N} = \left(\frac{2\pi m \kappa T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} V \exp\left(\frac{\mu}{\kappa T}\right) \quad (36.1.7.5)$$

Идеал газ учун $\overline{(\Delta N)^2} = \bar{N}$ бўлади ва нисбий флуктуация

$$\delta_N = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta N)^2}}}{\bar{N}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{N}}} \quad (36.1.7.6)$$

га тенг бўлади.

36.1.8 Квант идеал газларда зарралар сони флуктуацияси ва нисбий флуктуацияни ҳисобланг.

Ечиш:

Фараз қилайлик n_κ билан ε_κ -энергияли κ -квант ҳолатдаги зарралар сони ни $\bar{n}_\kappa$ билан эса ўртача сонини белгилайлик. Зарралар сонининг ўртача квадратик флуктуацияси қуйидагича ҳисобланади.

$$\overline{(\Delta n_\kappa)^2} = \kappa T \frac{\partial \bar{n}_\kappa}{\partial \mu} \quad (36.1.8.1)$$

Ферми-Дирак статистикасига бўйсинувчи Ферми газини қараймиз.

$$\bar{n}_\kappa = \frac{1}{\exp\left(\frac{(\varepsilon_\kappa - \mu)}{\kappa T}\right) + 1} \quad (36.1.8.2)$$

Ўртача квадратик флуктуация қуйидагига тенг : $\overline{(\Delta n_\kappa)^2} = \bar{n}_\kappa(1 - \bar{n}_\kappa)$, нисбий флуктуация эса

$$\delta_N = \sqrt{\frac{1}{\bar{n}_\kappa} - 1} \quad (36.1.8.3)$$

Бозе газ учун ҳисоблаймиз:

$$\bar{n}_\kappa = \frac{1}{\exp\left(\frac{(\varepsilon_\kappa - \mu)}{\kappa T}\right) - 1} \quad (36.1.8.4)$$

Ўртача квадратик флуктуация қуйидагига тенг : $\overline{(\Delta n_\kappa)^2} = \bar{n}_\kappa(1 + \bar{n}_\kappa)$, нисбий флуктуация эса

$$\delta_N = \sqrt{\frac{1}{\bar{n}_\kappa} + 1} \quad (36.1.8.5)$$

Максвелл –Больцман гази учун ҳисоблаймиз.

$$\bar{n}_\kappa = \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_\kappa}{\kappa T}\right) \quad (36.1.8.6)$$

Ўртача квадратик флуктуация қуйидагига тенг : $\overline{(\Delta n_\kappa)^2} = \bar{n}_\kappa$, нисбий флуктуация эса

$$\delta_N = \sqrt{\frac{1}{\bar{n}_\kappa}} \quad (36.1.8.7)$$

37. Ноидеал системаларнинг статистик назарияси

Ўзаро таъсирлашувчи зарралар системаси яъни реал газларнинг статистик назариясини қараб чиқамиз.

Реал газни яна етарлича сийрак деб олиб, фақат жуфт ўзаро таъсирларни эътиборга оламиз

Газ энергияси молекулаларнинг кинетик ва ўзаро таъсир потенциал энергияларидан иборат бўлади:

$$\varepsilon = \varepsilon_{kin} + U \quad (37.1)$$

N та молекуладан ташкил топган сийрак газнинг ҳолат функцияси

$$Z = \frac{1}{N!h^{3N}} \left[\int \exp\left(-\frac{p^2}{2m\kappa T}\right) d^3p \right]^N \int \exp\left(-\frac{U}{\kappa T}\right) dV_1 dV_2 \dots dV_N \quad (37.2)$$

$$Z = \frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi m \kappa T}{h^2} \right)^{\frac{3N}{2}} I, \text{ бу ерда } I = \int \exp\left(-\frac{U}{\kappa T}\right) dV_1, dV_2, \dots, dV_N$$

I -конфигурация интеграл деб юритилади.

Бир атомли реал газнинг ҳолат функцияси қуйидагича аниқланади.

$$Z = Z_{id} \left(1 + \frac{N^2}{2V} \beta \right) \quad (37.3)$$

$$\text{бу ерда: } Z_{id} = \frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi m \kappa T}{h^2} \right)^{\frac{3N}{2}} V^N$$

Реал газларнинг газ босимини ифодасини топамиз:

$$p = p_{id} + \kappa T \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{N^2 \beta}{2V} \right) - \frac{N \kappa T}{V} - \frac{N^2 \kappa T \beta}{2V^2} \quad (37.4)$$

N та бир атомли молекулалардан ташкил топган ноидеал газ -Ван-дер-Ваальс газини кўриб чиқамиз. Ван-дер-Ваальс газининг ҳолат тенгламаси

$$\left(p + \frac{\alpha N^2}{V^2} \right) (V - Nb) = N \kappa T \quad (37.5), \quad \frac{\beta}{2} = \frac{a}{\kappa T} - b$$

$$\text{Бундан: } p = \frac{N \kappa T}{V} + \frac{N^2 \kappa T b}{V^2} - \frac{\alpha N^2}{V^2}$$

Ван-дер-Ваальс газ ҳолат тенгламаси қуйидаги кўринишни олади:

$$p = \frac{N \kappa T}{V} \left(1 + \frac{4v_0 N}{V} - \frac{2\pi N}{V \kappa T} \int_d^\infty |u(r)| r^2 dr \right) \quad (37.6)$$

Агарда сийрак реал газларда учталаб, тўртталаб ва ҳ.к. тўқнашишлар ҳисобга олинса, у ҳолда ҳолат тенгламаси

$$p = \frac{N\kappa T}{V} \left(1 + \frac{B(T)}{V} + \frac{C(T)}{V^2} + \dots \right) \quad (37.7)$$

кўринишни олади.

37.1 Масалалар ечиш бўйича намуналар.

37.1.1 N – молекуладан ташкил топган сийраклаштирилган газнинг иссиқлик
сигими аниқлансин.

Ечиш:

N – молекуладан ташкил топган сийраклаштирилган газ зарраларининг
ўзаро таъсир потенциали.

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq d \\ -U_0, & d < r < \rho \\ 0, & r > \rho \end{cases} \quad (37.1.1.1)$$

Иссиқлик сигими формуласи $C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V$, ички энергия: $E = \kappa T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}$

Реал газнинг ҳолат функцияси:

$$Z = Z_{id} \left(1 + \frac{N^2 \beta}{2V} \right) \quad (37.1.1.2) \text{ бу ерда: } \beta = -8\nu_0 + \frac{8\nu_0 U_0}{\kappa T}$$

$$\nu_0 = \frac{4\pi r_0^3}{3}, \quad r_0 = \frac{d}{2}, \quad n = \frac{N}{V}, \quad b = 4\nu_0 N \text{ ларни эътиборга олсак.}$$

$$E = \kappa T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = E_{id} - \frac{nbU_0}{1 + nb \left(\frac{U_0}{\kappa T} - 1 \right)} \quad (37.1.1.3)$$

$$C_V = C_{V_{id}} - \kappa \left(\frac{nbU_0}{\kappa T} \right)^2 \frac{1}{\left(1 + nb \left(\frac{U_0}{\kappa T} - 1 \right) \right)^2} \quad (37.1.1.4)$$

Сийраклаштирилган реал газларда температура ортиши билан иссиқлик
сигими камайар экан.

37.1.2 N – молекуладан ташкил топган сийраклаштирилган газ- Ван-дер-Ваальс
гази учун эркин энергия ифодасини олинг.

Ечиш:

Ван-дер-Ваальс газнинг ҳолат функцияси $Z = Z_{id} \left(1 + \frac{N^2 \beta}{2V} \right)$, ифодасини юқоридаги масала асосида ўзгартирамиз ва қуйидаги кўринишга келтирамиз.

$$Z = Z_{id} \left(1 + \frac{N^2 \beta}{2V} \right) = Z_{id} \left[1 + 4\nu_0 n N \left(\frac{U_0}{\kappa T} - 1 \right) \right] \quad (37.1.2.1)$$

кўринишни олади .

$$F = -\kappa T \ln Z_{id} - \kappa T \ln \left[1 + 4\nu_0 n N \left(\frac{U}{\kappa T} - 1 \right) \right] = F_{id} - \kappa T \ln \left[1 + Nb \left(\frac{U}{\kappa T} - 1 \right) \right] \quad (37.1.2.2)$$

Ифодани соддалаштирамиз. $\left[Nb \left(\frac{U}{\kappa T} - 1 \right) \right] \ll 1$ шарт бажарилса,

$$F = F_{id} + nb(\kappa T - U) \quad (37.1.2.3)$$

37.1.3 N – молекуладан ташкил топган сийраклаштирилган газ- Ван-дер-Ваальс гази учун Гиббснинг термодинамик потенциали ифодасини олинг.

Ечиш:

Ван-дер-Ваальс газнинг ҳолат функцияси $Z = Z_{id} \left(1 + \frac{N^2 \beta}{2V} \right)$, ифодасини юқоридаги масала асосида ўзгартирамиз ва қуйидаги кўринишга келтирамиз.

$$Z = Z_{id} \left(1 + \frac{N^2 \beta}{2V} \right) = Z_{id} \left[1 + 4\nu_0 n N \left(\frac{U_0}{\kappa T} - 1 \right) \right] \quad (37.1.3.1)$$

кўринишни олади .

Алмаштиришлар ўтказиб Гиббснинг термодинамик потенциали учун қуйидаги ифодани оламиз.

$$\Phi = F + pV = F_{id} + nb(\kappa T - U) + pV \quad (37.1.3.2)$$

37.1.4 N – молекуладан ташкил топган сийраклаштирилган газ- Ван-дер-Ваальс гази учун энтропия ифодасини олинг.

Ечиш:

37.1.2, 37.1.3 масалаларнинг ечимидан фойдаланиб, энтропия учун қуйидаги ифодаларни оламиз

$$S = S_{id} + \kappa \ln \left[1 + nb \left(\frac{U}{\kappa T} - 1 \right) \right] - \frac{1}{T} \frac{nbU}{1 + nb \left(\frac{U}{\kappa T} - 1 \right)} \quad (37.1.4.1)$$

Агар $\left[nb \left(\frac{U}{\kappa T} - 1 \right) \right] \ll 1$ ўринли бўлса, (19.1.4.1) даги $\ln \left[1 + nb \left(\frac{U}{\kappa T} - 1 \right) \right]$ хадни қаторга ёйиб, биринчи тартибли хадларни сақлаб қолиб, тегишли алмаштиришлар ўтказамиз ва қуйидаги ифодани оламиз.

$$S = S_{id} - \frac{nbU}{T} \quad (37.1.4.2)$$

Бу энтропиянинг содда кўринишдаги ифодаси ҳисобланади .

38. Физикавий кинетика элементлари

Номувозанат ҳолатдаги бир атомли газнинг ҳолати олти ўлчовли - фазалар фазосида маълум траектория бўйича ҳаракатланувчи N та тасвирий нуқталар тўплами билан характерланади.

Тасвирий нуқталар зичлиги ёки номувозанат ҳолатлар учун координата, импульс ва вақтга боғлиқ бўлган тақсимот функция $f(r, p, t)$ си киритилади. Тақсимот функциясининг нормалаштириш шарти. N - зарралар сони.

$$\iint f(r, p, t) dr dp = N \quad (38.1)$$

Тақсимот функцияси $f(r, p, t)$ ни топиш масаласи физикавий кинетиканинг муҳим масаласи бўлиб, кўчиш ҳодисаларида кинетик коэффицентларни аниқлашга имкон беради. Зичлиги катта бўлган газларда ҳар бир **зарра** бир вақтда жуда кўп сондаги қўшни молекулалар билан ўзаро таъсирда бўлади ва унинг бошқа зарралар тақсимотига таъсири ҳисобга олинмайди.

Марков жараёнида жараённинг тасодифийлик характеристикаси фақат ҳозирги вақт моментидаги жараён характеристикасига боғлиқ бўлади ва бу жараён олдин қандай ўтганлигига боғлиқ бўлмайди. Марков жараёнлари катта зичликдаги газ ва суюқликларда кинетик жараёнларни юқори аниқлик билан тавсифлайди.

Қуйидаги нозичлиқли интеграл тенглама Смолуховский тенгламаси дейилади.

$$W((y, x/t + \tau, t_0)) = \int W(y, z/\tau, t_0 + t) W(z, x/t, t_0) dz \quad (38.2)$$

Бу тенгламаси умумий характерга эга бўлиб, татбиқ қилиш соҳаси анча кенг.

Катта зичликдаги газда номувозанат жараёнларнинг хусусий ҳоли - секин жараёнлар учун Смолуховский тенгламаси Фоккер-Планк дифференциал тенгламасига келтирилади.

$$\frac{\partial W(y, x/t, 0)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_i} [W(y, x/t, 0) a_i(y, t)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} [W(y, x/t, 0) b_{ik}(y, t)] = 0 \quad (38.3)$$

Бу тенглама Фоккер - Планк тенгламаси ёки мономолекулар кинетик тенглама дейилади.

Больцманнинг кинетик тенгламаси интегро-дифференциал тенглама ҳисобланади

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial r} + F \frac{\partial f}{\partial p} = \iint \sigma v_n [f_2 f_3 - f f_1] dp_1 d\Omega \quad (38.4)$$

Математик нуқтайи назардан Больцман тенгламаси хусусий ҳосилали нозикли интегро-дифференциал тенгламадир.

Больцман тенгламасининг энг содда, ташқи майдон $V=0$ бўлган ҳолдаги стационар ечими

$$f(p) = V \exp[b(p - p_0)^2] \quad (38.5)$$

кўринишда бўлади, яъни тезлик билан ҳаракатланувчи санок системасида Максвелл тақсимоти бўлиб ҳисобланади, чунки $b = -\frac{1}{2} m \kappa T$ деб танлаш мумкин, константа V эса нормировка шартидан аниқланади.

$$V = \frac{N}{V} \left(\frac{1}{2\pi m \kappa T} \right)^{\frac{3}{2}} = n \left(\frac{1}{2\pi m \kappa T} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (38.5)$$

дан аниқланилади. Больцман тенгламасининг хусусий стационар ечими бу Максвелл тақсимоти кўринишида бўлади.

Больцман тенгламаси ёрдамида нисбий ҳаракат тезлиги ихтиёрий функциясининг ўртача қийматини қаноатлантирувчи умумий тенгламани яъни , Энског тенгламаси, кўчишнинг умумлашган тенгламасини аниқлаш мумкин

$$\bar{\phi} \frac{\partial N}{\partial t} + N \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial N(v \bar{\phi})}{\partial t} - N \frac{F_\kappa}{m} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial v} \right) = \int \phi dv \quad (38.6)$$

38.1 Масалалар ишлаш бўйича намуналар

38.1.1 Нормал шароитларда молекуланинг эффектив диаметрини $3 \cdot 10^{-7}$ м га тенг ҳисоблаган ҳолда, кислород молекуласининг ўртача эркин югириш йўлини ҳисобланг. Битта молекуланинг бошқа молекулалар билан бир секундда ўртача тўқнашишлар сонини ҳисобланг.

Ечиш:

Нормал шароитда 1 м^3 газда $2,69 \cdot 10^{25}$ та молекула бўлади. Шу сабабли ўртача эркин югириш йўли қуйидаги формула билан аниқланади.

$$l = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} \quad (38.1.1.1) \text{ нормал шароитларда } l = 0,910^{-7} \text{ м.}$$

Битта молекуланинг бошқа молекулалар билан бир секундда ўртача тўқнашишлар сонини молекуланинг ўртача тезлиги $\bar{v}$ ва эркин югириш йўли орқали ифодалаш мумкин.

$$Z = \frac{\bar{v}}{l}; \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \quad (38.1.1.2) \text{ нормал шароитда кислород молекуласи учун}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = 4,2 \cdot 10^2 \text{ м/с}, \quad (38.1.1.3) \text{ Шу сабабли ўртача тўқнашишлар сони}$$

$$Z = \frac{\bar{v}}{l} = 4,7 \cdot 10^9 \text{ 1/сек}$$

38.1.2 Идеал газ адиабатик сиқилмоқда. Шу ҳол учун ўртача эркин югириш йўли ва бир секунддаги тўқнашишлар сонининг босимга боғланишини аниқланг.

Ечиш:

Ўртача эркин югириш йўли қуйидаги формуласини ёзамиз.

$$l = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} \quad (38.1.2.1)$$

Идеал газ учун ҳолат тенгламасини $P = nkT$ кўринишида ёзиб, юқоридаги ифодани ўзгартирамиз.

$$l = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 P} \quad (38.1.2.2)$$

P ва T ўзгарувчиларда қаралаётган адиабатик жараён тенгламасидан температурани босим орқали ифодалаймиз

$$T = \text{const } P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad (38.1.2.3) \text{ бу ерда, } \gamma = \frac{C_p}{C_v} \text{ шу сабабли } l \approx P^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\text{Худди шундай } Z = \frac{\bar{v}}{l}. \quad (38.1.2.4) \text{ Бу ерда } \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

$$Z \approx P^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)} \text{ боғланиш олинали.}$$

38.1.3 Бир жинсли доимий электр майдонида жойлашган металдаги айниган электрон гази учун Больцман тенгламасининг τ – тақрибийлигидан фойдаланиб электрўтказувчанликни релаксация вақти орқали ифодаланг. релаксация вақтини температура ва электрон энергияси билан боғланишини эътиборга олинг.

Ечиш:

Кучланганлиги $\vec{E}$ бўлган биржинсли, доимий электр майдонида жойлашган биржинсли ўтказгич учун стационар Больцман тенгламаси куйидаги кўринишда ёзилади:

$$-e\vec{E} \frac{df}{d\vec{p}} = -\frac{f - f_0}{\tau}, \quad (38.1.3.1)$$

Бу ерда e – электрон заряди. Майдон бўйича биринчи яқинлашишда

$$f = f_0 + e\tau\vec{v}\vec{E} \frac{\partial f_0}{\partial E'}, \quad (38.1.3.2) \text{ чунки } \frac{\partial E'}{\partial \vec{p}} = \vec{v}$$

Электр токи зичлиги куйидаги интеграл орқали ифодаланади.

$$\vec{J} = -e \int \vec{v} f \frac{2d\vec{p}}{h^3} = 2e^2 h^{-3} \int \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E'} \right) \tau \vec{v} (\vec{v}\vec{E}) d\vec{p} \quad (38.1.3.3)$$

$d\vec{p} = dp_x dp_y dp_z$, бу ерда 2 кўпайтувчи электроннинг спинини эътиборга олади.. Интегрални ҳисоблаб кучлик айниган электрон гази учун электрўтказувчанлик σ нинг ифодасини оламиз. $\sigma = \frac{ne^2}{m^*} \tau(\eta)$, бу ерда η – Ферми энергияси. Электронлар концентрацияси $n = (2m^* \eta)^{\frac{3}{2}} \pi^{-2} h^{-3}$

38.1.4 Классик газ учун Больцман тенгламасида тўқнашишларга боғлиқ ҳад формуласидан фойдаланиб ва молекулаларнинг тўқнашишини эластик деб ҳисоблаб релаксация вақти ифодасини олинг.

Ечиш:

Больцман тенгламасида тўқнашишларга боғлиқ ҳад қуйидагича ёзилади.

$$\left[\frac{\partial f(\vec{v})}{\partial t} \right]_{\alpha} = -f(\vec{v}) \int W(\vec{v}, \vec{v}') d\vec{v}' + \int W(\vec{v}', \vec{v}) f(\vec{v}') d\vec{v}' \quad (38.1.4.1)$$

Батафсил мувозанат принциpidан эластик сочилишлар учун қуйидаги тенглик келиб чиқади.

$$W(\vec{v}, \vec{v}') = W(\vec{v}', \vec{v}) \quad (38.1.4.2)$$

Кучсиз номувозанат ҳолат учун тақсимот функциясини қуйидаги кўринишда ёзамиз.

$$f = f_0 + f_1(\vec{v}, \vec{r}) \quad (38.1.4.3)$$

Соддалик учун тақсимот функциясини фазовий координаталарга боғлиқ эмас деб ҳисоблаб, тўқнашиш ҳадини ўзгартириб ёзамиз.

$$\left[\frac{\partial f(\vec{v})}{\partial t} \right] = \int W(\vec{v}', \vec{v}) [f_1(\vec{v}') - f_1(\vec{v})] d\vec{v}' \quad (38.1.4.4)$$

Эластик сочилиш ҳолида релаксация вақти учун қуйидаги ифодани оламиз

$$\frac{1}{\tau(\vec{v})} = \int W(\vec{v}', \vec{v}) \left[1 - \frac{f_1(\vec{v}')}{f_1(\vec{v})} \right] d\vec{v}' \quad (38.1.4.5)$$

38.1.5 Релаксация вақтини тезликнинг даражали функцияси $\tau = A v^S$,

(бу ерда $A > 0, S > -9$) деб ҳисоблаб, τ – яқинлашишда Больцман тенгламасидан фойдаланиб, сийрак газ учун иссиқлик ўтказувчанлик коэффиценти ифодасини аниқланг.

Ечиш:

Локал мувозанат тақсимот функциясини $f_0 = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{-mv^2}{2kT}}$ кўринишда

деб ҳисоблаймиз. $\frac{\partial T}{\partial x}$ кўринишидаги температура градиенти мавжзуд ҳолда

ташқи кучлар бўлмаган ҳолда Больцманнинг стационар тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзамиз.

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{f - f_0}{\tau} \quad (38.1.5.1)$$

Температура градиенти бўйича чизиқли яқинлашишда тақсимот функциясини қуйидагича ифодалаймиз.

$$f = f_0 - \tau v_x \frac{\partial f_0}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (38.1.5.2)$$

Локал мувозанат тақсимот функциясидан температура бўйича олинган ҳосиласини қуйидагига тенглигини эътиборга оламиз.

$$\frac{\partial f_0}{\partial T} = -f_0 \frac{1}{T} \left(\frac{3}{2} - \frac{mv^2}{2kT} \right) \quad (38.1.5.3)$$

x – ўқи йўналишидаги иссиқлик оқими учун қуйидагини оламиз

$$Q_x = \frac{m}{2T} \frac{\partial T}{\partial x} \int \tau v_x v^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{mv^2}{2kT} \right) f_0 d\vec{v} \quad (38.1.5.4)$$

$\tau = Av^s$ га тенг бўлган ҳол учун $Q_x = -\aleph \frac{\partial T}{\partial x}$ муносабат ёрдамида иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти учун қуйидаги ифодани оламиз.

$$\aleph = \frac{2\pi}{3T} mn \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} A \int_0^\infty v^{6+s} \left(\frac{mv^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) dv \quad (38.1.5.5)$$

Алмаштиришлар киритиб элементар алмаштиришлар натижасида қуйидагини оламиз.

$$\aleph = Ank \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1+\frac{s}{2}} \frac{S+4}{3\sqrt{\pi}} \Gamma \left(\frac{S+7}{2} \right) \quad (38.1.5.6)$$

$\tau = const$ бўлган ҳолларда юқоридаги ифода қуйидагига ўтади:

$$\aleph = \frac{1}{m} \pi \tau k^2 T \quad (38.1.5.6)$$

38.1.6 Кучланганлиги $\vec{E}$ бўлган статик биржинсли магнит майдонига жойлаштирилган биржинсли металлдаги электрон гази учун Стационар Больцман тенгламасини ёзинг. Ўтказгичда кучланганлиги $\vec{E}$ бўлган доимий электр майдони ва температура градиенти мавжуд деб ҳисоблансин. Тўқнашишларга боғлиқ ҳадни релаксация вақти орқали ифодаланг.

Ечиш:

Агар бир жинсли ўтказгичга биржинсли электр майдони $\vec{E}$ ва биржинсли магнинг майдони $\vec{H}$ таъсир қилади, у ҳолда Лоренц кучи $\vec{F} = -e(\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}])$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$, бу ерда $\vec{B} = \mu\vec{H}$ магнит индукция вектори, μ – магнит сингдирувчанлик, Стационар ҳолда $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ бўлганлиги учун Больцманнинг кинетик тенгламаси қуйидаги кўринишни олади.

$$(\vec{v}\vec{\nabla}_T)\frac{\partial f}{\partial t} - e(\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}])\vec{\nabla}_p f = -\frac{f - f_0}{\tau} \quad (38.1.6.1)$$

Тақсимот функциясини $f = f_0 + f_1$ кўринишида ифодаalayмиз. (38.1.6.1) нинг ўнг томонида f_1 ганисбатан энг кичик тартибдаги ҳадларни сақлаб қолиб қуйидагини оламиз.

$$-e\vec{v}\vec{E}\frac{\partial f_0}{\partial t} - e([\vec{v}\vec{B}])\vec{\nabla}_p f = -\frac{f_1}{\tau} \quad (38.1.6.2)$$

$$(38.1.6.2) \text{ нинг ечимини } f_1 = -([\vec{v}\vec{\psi}])\frac{df_0}{dE_0} \quad (38.1.6.3) \quad (\text{бу ерда } \vec{\psi} - \text{номаълум}$$

вектор функция). (38.1.6.3) ни (38.1.6.2) га қўйиб ва

$$\vec{\nabla}_p \left[([\vec{v}\vec{\psi}])\frac{\partial f_0}{\partial E_0} \right] = ([\vec{v}\vec{\psi}])\frac{\partial^2 f_0}{\partial E_0^2} \vec{v} + \frac{1}{m} \frac{\partial f_0}{\partial E_0} \vec{\psi} \quad \text{хисобга олган ҳолда қуйидагини}$$

$$\text{аниқлаймиз } -e\vec{E} + [\vec{\omega}\vec{\psi}] = \frac{\vec{\psi}}{\tau}; \quad (38.1.6.4) \quad \vec{\omega} = \frac{e\vec{B}}{m}.$$

$$(38.1.6.4) \text{ тенгламани } \vec{\omega} = \frac{e\vec{B}}{m} \text{ га дастлаб скаляр ва кейин вектор кўпайтириб}$$

иккита тенгламани топамиз ва улардан $\vec{\psi}$ ни аниқлаймиз.

$$\vec{\psi} = -\frac{e\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \left\{ \vec{E} + \tau^2(\vec{\omega}\vec{E})\vec{\omega} + \tau[\vec{\omega}\vec{E}] \right\}$$

Г Л О С С А Р И Й

КВАНТ МЕХАНИКА

- 1. Абсолют қора жисм-** $0 < \omega < \infty$ частота интервалида тушувчи нурланишни тўлиқ ютувчи жисм
- 2. Альфа нурланиш-** Ядро алмашинишларида чиқариладиган альфа заррачалардан ташкил топган корпускуляр нурланиш
- 3. Атом** –химиявий элементларнинг ҳоссаларини сақловчи энг кичик қисм, микроскопик ўлчамли модда қисми (микрозаррача)
- 4. Атом ва молекулалар дифракцияси-** атом ва молекулалар дастасининг газ заррачалари ёки қаттиқ жисм сиртида сочилиш жадаллигининг йўналишга нотекис боғланиши
- 5. Атом ёки молекулани уйғотиш-** Атом ёки молекуланинг фотонларни ютганида (фото уйғотиш) ёки электронлар ва бошқа элементар зарралар билан тўқнашиш натижасида пастки энергия сатҳидан юқориги энергия сатҳига квант ўтиши
- 6. Атом орбиталлари** - атомлардаги ҳар бир электроннинг учта (бош, орбитал, магнит) квант сонларига боғлиқ тўлқин функциялари
- 7. Атом радиуси-** Кристаллар ва молекулаларда атомлараро масофани тақрибан белгиловчи ўлчов
- 8. Атом спектри-** Эркин атомнинг энергия сатҳлари орасида квант ўтишларда вужудга келувчи ютилиш ёки чиқариш спектри
- 9. Атом тўқнашувлари-** атомлар, молекулалар ёки электронларнинг атом ядролари тузилишини ўзгаришга олиб келмайдиган ўзаро тўқнашувлари
- 10. Атомнинг нурланиши** - атомнинг уйғотилган ҳолатдан кичикроқ энергияли ҳолтга ўтиши
- 11. Атомнинг орбитал магнит моменти-** атомнинг магнит моментининг атомдаги электронларнинг атом ичидаги ҳаракатига боғлиқ қисми
- 12. Бальмер серияси** –водород (водородсимон) атомларда кузатиладиган спектрал серия

- 13. Бирликларнинг Планк системаси-** асосий бирликлар сифатида ёруғликнинг вакуумдаги тезлиги, гравитацион доимий, Больцман доимийси, Планк доимийси асос қилиб олинган бирликлар системаси
- 14. Бозонлар** – симметрик тўлқин функциялар билан ифодаланувчи ва спинлари Планк доимийсига бутун қаррали бўлган зарралар
- 15. Бор постулатлари-** Нильс Бор томонидан 1913 йилда атомнинг квант назариясида киритилган, атомнинг турғун ҳолатлари ва нурланишли квант ўтишлари мавжудлиги тўғрисидаги қоидалар
- 16. Бор радиуси** - нормал водород атомида ядродан электронни энг катта эҳтимоллик билан аниқлаш мумкин бўлган нуқтагача бўлган масофа.
($a_0 = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$)
- 17. Бош квант сон-** Атомларда электронларнинг энергиясини белгиловчи квант сон
- 18. Бреккет серияси-** Водород (водородсимон) атомларда спектрнинг инфрақизил соҳасида жойлашган спектрал серия
- 19. Валент электронлар** - Атомнинг ташқи электрон қобиғида жойлашган электронлар
- 20. Вақт бирлигида ўтиш эҳтимоллиги-** квант системаларда системанинг бир энергетик ҳолатдан бошқасига, вақт бирлигида ўтиш тезлигини ифодаловчи катталиқ
- 21. Виннинг нурланиш қонуни-** Абсолют қора жисмнинг мувозанатли нурланиш спектрида энг катта энергияга мос келувчи тўлқин узунликини аниқловчи қонун
- 22. Гамильтониан** – квант системасининг тўла энергия оператори
- 23. Гамильтон функцияси-** Механик системанинг умумлашган координаталар ва умумлашган импульслари орқали ифодаланадиган функция
- 24. Гамма квант-** одатда катта энергияга (10^5 эВ.дан катта) эга бўлган электромагнит майдон кванти
- 25. Гармоник осциллятор** - гармоник қонуният асосида тебранувчи осциллятор

- 26. Гармоник тебранишлар** - Ҳолат ўзгаришлар синус ёки косинус қонуни бўйича юз берувчи тебранишлар
- 27. Гейзенберг тавсифи (тасаввури)** – физикавий система ҳолат векторининг вақт давомида ўзгариши ўрнига физикавий катталикларга мос операторлар эволюциясини қарашга асосланган квантмеханик ҳодисаларни тавсифлашнинг асосий усулларида бири
- 28. Гейзенбергнинг ноаниқлик муносабати** - микрозарраларнинг координатаси ва унга мос импульс проекциясини бир вақтда аниқлаш мумкин эмаслигини ифодаловчи ноаниқлик муносабати
- 29. Глюон (инглизча-елим)** - спини бирга ва тинч ҳолатдаги массаси нолга тенг бўлган, кварклар орасидаги кучлик ўзаро таъсирни ташувчи электронейтрал заррача
- 30. Гравитино-** тинч ҳолатдаги массаси нолга тенг, спини $3/2$ га тенг бўлган майдон кванти (электронейтрал зарра деб фараз қилинади)
- 31. Грамм-атом-** кимёвий элементнинг атом массасига тенг бўлган, граммларлардаги сони
- 32. “Ўзаллик” квант сони**– Адронларни тавсифловчи аддитив квант сон
- 33. Де –Бройл ғояси** – эркин ҳаракатлануви заррачанинг ҳаракати билан ясси тўлқиннинг ҳаракатини ўзаро мос келади деб қаровчи ғоя
- 34. Де-Бройл тўлқини** - ҳаракатланаётган ҳар қандай заррача билан боғлиқ бўлган ва унинг квант табиатини ифодаловчи эҳтимолий ҳарактердаги тўлқин
- 35. Дисперция** – сочилиш, таркибий қисмларга ажралиш
- 36. Дьюлонг ва Пти қонуни-** қаттиқ жисмларнинг ўзгармас ҳажм ва ҳона температура (300 К)ларида иссиқлик сиғимини доимий ва 6 кал/моль К га тенг деб ҳисобловчи эмпирик қоида (қонун)
- 37. Жуфтлик-** микрозаррачанинг фазовий инверсияга нисбатан тўлқин функциясининг симметрия ҳоссаларни акс эттирувчи квант тавсифи
- 38. Зарра** – моддаларнинг элементар бўлаги
- 39. Зарралар оқими-** берилган (муайян) сиртдан вақт бирлигида оқиб (ҳаракатланиб) ўтувчи зарралар сони

- 40. Зарралар оқими зичлиги-** сферанинг кўндаланг қисми бирлигига тўғри келувчи ва вақт бирлигида сферанинг ҳажмига кирувчи зарралар сони
- 41. Изотроп муҳит-** барча танланган йўналишларда физикавий ҳоссалари бир ҳил бўлган модда
- 42. Инвариантлик-** физикавий шароитлар ўзгарганда физикавий катталиқнинг ўзгармаслиги
- 43. Ионланиш-** электрнейтрал атомлар ва молекулалардан ионлар ва эркин электронларнинг ҳосил бўлиши
- 44. Ионланиш энергияси-** асосий энергетик ҳолатда турган атомнинг битта ташқи электрони узиб олиш учун сарфланадиган ишга тенг бўлган энергия миқдори
- 45. Ички фотоэффект-** нурланаётган модданинг электрўтказувчанлиги ўзгарадиган ёки э.ю.к. ҳосил бўладиган фотоэффект
- 46. Квазизарра-** ўзини баъзи жиҳатлардан айнан квант зарра каби тутувчи кўп зарралар системасининг элементар уйғониши
- 47. Квант газ-** зарраларнинг Де-Бройл тўлқин узунлиги уларнинг ўзаро таъсир радиусидан анча катта бўлган сийракланган газ
- 48. Квант механика** – микродунё ходисаларини ўрганувчи, микрозарралар ва уларнинг системалари ҳаракатининг физикавий назарияси
- 49. Квант осциллятор-** энергетик спектри дискрет бўлган осциллятор
- 50. Квант сон-** квант системанинг физикавий катталиқларининг мумкин бўлган дискрет қийматларини белгиловчи бутун ёки ярим бутун сон
- 51. Квант система-** квант механика қонунларига бўйсинувчи бир нечта ёки кўп сонли зарралар системаси
- 52. Квант хромодинамика-** кварк ва глюонлар кучлик ўзаро таъсирининг “ранг” калибрлаш симметриясига асосланиб тузилган майдон квант назарияси
- 53. Квант электродинамика-** майдон квант назариясининг электромагнит майдон ва зарядланган заррачаларнинг ўзаро таъсири ўрганиладиган бўлими
- 54. Квант ўтиш-** квант система (атом ёки молекула)нинг бир ҳолатдан бошқасига сакрашсимон ўтиши

- 55. Квант ҳолат-** ўзаро таъсирлашувчи зарралар системасининг мумкин бўлган дискрет турғун ҳолатларидан бири
- 56. Квантлаш-** физикавий катталиклар қийматларининг квант механика қонунларига мос тарзда танланиши
- 57. Кварклар-** Ҳозирги тасаввурларга асосан барча адронларнинг таркибий қисмларини ташкил этувчи фундаментал зарралар
- 58. Кварконий-** антикварк жуфтидан ташкил топган атомсимон система
- 59. Кирхгофнинг нурланиш қонуни-** муайян температурали жисмнинг электромагнит нурланиш чиқариши ва ютиши орасидаги боғланишни ўрнатувчи иссиқлик нурланиши асосий қонунларидан бири
- 60. Когерент нурланиш-** тебранишлари вақтга боғлиқ бўлмаган доимий фаза фарқига эга бўлган электромагнит тебраниш
- 61. Комптон нурланиши** - фотонларнинг Комптон сочилишида ҳосил бўладиган электронлардан иборат нурланиш
- 62. Комптон эффекти-** Юқори частотали электромагнит нурланишнинг эркин ёки заиф боғланган электронларда сочилишида сочилган нурланишнинг тўлқин узунлиги тушувчи тўлқин узунлигидан катта бўладиган эластик сочилиш
- 63. Комптон тўлқин узунлиги-** релятивистик квант жараёнлар учун ҳос бўлган узунлик ўлчамлигидаги катталик
- 64. . Коммутатив (антикоммутатив) оператор** операторлар кўпайтмасининг операторларнинг ўрнини алмаштиришда натижаси ўзгармайдиган (ўзгарадиган) операторлар
- 65. Корпускуляр нурланиш-** атом ядролари ва космик жисмлар чиқазадиган, массаси нолдан фарқли бўлган зарядланган заррачалардан ташкил топган ионловчи нурланиш
- 66. Кўп зарралар квант назарияси-** иккитадан ортиқ бўлган зарралардан ташкил топган квантомеханик системаларни тавсифлашга мўлжалланган квант назарияси бўлими
- 67. Лептонлар-** кучлик ўзаро таъсирда иштирок этмайдиган элементар зарраларнинг умумий номи

- 68. Майдон квант назарияси**- чексиз кўп сонли эркинлик даражаларига эга бўлган микрозаррачаларни, уларнинг ўзаро таъсири, бир-бирига айланишини тавсифлашга назарий асос бўлувчи релятивистик физикавий системаларнинг квант назарияси
- 69. Майдон кванти**- фундаментал ўзаро таъсирларни бирини ташувчи зарра (масалан, фотон)
- 70. Микрозаррача** - ўрганиш мақсадига қараб структурасиз микрообъект сифатида қаралувчи, тинчлик массаси атом массалари билан таққосланувчи ёки улардан кичик бўлган заррача (Микрозаррачаларга элементар зарралар, атомлар, молекулалар ва атом ядролари киради)
- 71. Микрозаррачаларнинг сочилиши**- заррачаларнинг тўқнашуви натижасида, зарралар импульсининг, ички ҳолатининг ўзгариши ва бошқа зарраларнинг ҳосил бўлиш ҳодисаси
- 72. Микроолам**- ўлчами $10^{-18} \text{ м} < R < 10^{-7} \text{ м}$ бўлган оламнинг соҳаси
- 73. Макроолам** -ўлчами $10^{-7} \text{ м} < R < 10^{24} \text{ м}$ бўлган оламнинг соҳаси
- 74. Мегаолам**- ўлчами $10^{24} \text{ м} < R < \infty$ бўлган оламнинг соҳаси
- 75. Мослик принципи**- квант сонларнинг катта қийматларида квант механиканинг физикавий ҳулосаларининг классик назария натижалари билан мос тушиш талаби
- 76. Мувозанатли нурланиш** –жисмлар орасидаги фазода энергия зичлиги фақат температурага боғлиқ бўлган ўзгармас қийматни қабул қиладиган нурланиш ёки термодинамик мувозанат ҳолатида бўлган физикавий системадан чиқариладиган иссиқлик нурланиши
- 77. Нолинчи энергия**- квант механик системанинг асосий ҳолат энергияси билан системанинг потенциал энергияси минимумига мос келувчи энергия орасидаги айирма
- 78. Нурланиш** - энергиянинг тўлқин ёки заррачалар кўринишида тарқалиши
- 79. Нурланишнинг спектрал зичлиги**- спектрал интервал бирлиги, бирлик частота интервалига тўғри келадиган нурланиш энергияси зичлиги

- 80. Оператор** –конкрет ўринишидан қатъий назар маълум функциялар синфига таъсир этиб бошқа функцияларни ҳосил қилувчи математик амал
- 81. Паули тенгламаси-** норелятивистик квант механиканинг ташқи электромагнит майдонда $\frac{1}{2}$ спинли зарядланган зарраларнинг ҳаракатини тавсифловчи тенглама
- 82. Паули принципи** – фермионлар тизимида битта квант ҳолатда биттадан ортиқ зарра бўлиши мумкин эмас деб таъкидловчи тамойил
- 83. Планк формуласи** – абсолют қора жисм нурланишининг кенг частоталар интервалида тажриба натижаларига мос келувчи, квант тасаввурлари асосида олинган формула
- 84. Планк доимийси** $\hbar$ -элементар таъсир квантини ифодаловчи фундаментал, физикавий доимий ($\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Жс} \cdot \text{с}$)
- 85. Релей –Джинс қонуни** – Нурланишнинг спектрал зичлигини частотанинг квадратига тўғри пропорционал боғланишини ифодалайдиган абсолют қора жисмнинг, паст частоталар интервалида ўринли бўлган классик қонуни
- 86. Ридберг доимийси** – атомларнинг нурланиш частоталари, энергия сатҳлари ифодаларига кирувчи фундаментал физикавий доимий ($R = 1,09 \cdot 10^{-7} \text{ м}^{-1}$)
- 87. Субмикроолам** –ўлчами $0 < R < 10^{-18} \text{ м}$ бўлган оламнинг соҳаси
- 88. Спектрал чизик** –квант системасининг чиқариш ва ютиш спектрида муайян квант ўтишга мос чизик
- 89. Спектрал чизикларнинг ажралиши-** энергетик сатҳларнинг ажралиши натижасида спектрал чизиклар ташкил этувчилари сонининг ортиши
- 90. Спин-** квант табиатига эга бўлган элементар заррачаларнинг хусусий импульс моменти спин дейилади
- 91. Спин квант сони-** элементар заррачаларнинг хусусий импульс моментини белгиловчи квант сон
- 92. Спин-орбитал ўзаро таъсир-**квант система таркибига кирувчи зарраларнинг орбитал ва спин моментлари катталигига ва ўзаро вазиятига боғлиқ ўзаро таъсир

- 93. Спин-орбитал ажралиш-** спин-орбитал ўзаро таъсир натижасида атомнинг энергетик сатҳлари ва спектрал чизиқларининг ажралиши
- 94. Стефан- Больцман қонуни** – абсолют қора жисм нурланиши энергияси зичлигининг абсолют температуранинг тўртинчи даражасига пропорционаллигини ифодаловчи формула
- 95. Стационар ҳолат** –вақтга боғлиқ бўлмаган Гамильтон операторининг хусусий функцияси билан ифодаланувчи ҳолат
- 96. Танлаш қоидалари** - квант системанинг бир ҳолатдан бошқасига ўтишида квант сонларнинг ўзгаришига қўйиладиган шартлар
- 97. Тепки эдектрони** – Комптон эффектида фотон билан тўқнашиш натижасида тезлик (кинетик энергия) олувчи электрон
- 98. Туннел эффекти** –зарраларнинг потенциал тўсиқ ичидан ўтиш ходисаси
- 99. Тўлқин функция** –маълум бир тасаввурда аниқланган микрозарра ёки уларнинг системасининг ҳолат функцияси. Квант системани тавсифловчи параметрларга боғлиқ бўлган ва системанинг турли ҳолатларда бўла олиш эҳтимоллигини белгилаб берувчи физик катталиқ
- 100. Тўлқин группаси** –бир –биридан тўлқин узунлиги ва тарқалиш йўналиши билан фарқ қилувчи тўлқинлар суперпозицияси
- 101. Тўлқин сони-** тўлқин вектори модули,тўлқиннинг тарқалиш йўналишидаги фазовий тўлқин даврини белгилайди
- 102.Тўлқин тенглама-** ечимлари фазода турли табиатли тўлқинларнинг тарқалишини тавсифловчи хусусий ҳосилали дифференциал тенглама
- 103. Уйғонган атом-** атомнинг асосий ҳолатига нисбатан каттароқ энергияга эга бўлган ҳолати
- 104. Уйғонган ҳолат** –квант системасининг асосий ҳолатдан фарқ қилувчи ҳар қандай ҳолатига айтилади
- 105. “Ультрабинафшавий ҳалокат”** –Классик тасаввурлар асосида олинган ва иссиқлик нурланиши энергияси зичлигининг чекли ҳажм ичида чексизга интилишини ифодаловчи, тажриба натижаларига зид бўлган ҳулоса

- 106. Ферми** – узунликнинг 10^{-15} м. Га тенг бўлган бирликлар системасига киритилмаган бирлик
- 107. Фермионлар** –антисимметрик тўлқин функциялар билан ифодаланадиган, спинлари Планк доимийсига ярим каррали зарралар
- 108. Физикавий майдон-** физикавий катталикларнинг фазода узлуксиз тақсимланиши билан тавсифланувчи, чексиз эркинлик даражалари сонига эга бўлган материянинг алоҳида шакли
- 109. Фотон-** электромагнит майдон кванти, тинч ҳолатдаги массаси нолга ва спини бирга тенг нейтрал элементар заррача
- 110.Фотозэффект (ташқи фотозэффект)** –ёруғлик тўлқинлари таъсирида моддалардан электронларнинг ажралиб чиқиш ҳодисасига айтилади
- 111. Фотозэлектронлар** –фотонларнинг модда билан фотозэлектрик ўзаро таъсирида ҳосил бўладиган электронлар нурланиши
- 112. Фотозэффектнинг узун тўлқин чегараси (қизил чегараси)** - муайян модда учун ташқи фотозэффект мавжуд бўлаоладиган ёруғликнинг минимал частотаси (максимал тўлқин узунлиги)
- 113.Франк-Герц тажрибаси-** атомнинг ички энергиясининг узлуксиз ўзгармасдан, балки квантланган қийматлар олишини исботлаган тажриба
- 114. Фундаментал ўзаро таъсирлар-**барча табиий жараёнларнинг асосида ётувчи гравитацион, электромагнит, заиф ва кучлик ўзаро таъсирлар
- 115. Чиқиш иши** –электронни қаттиқ жисм ёки суюқлик атомларидан вакуумга чиқариш учун сарфланадиган энергия
- 116. Шредингер тенгламаси-** норелятивистик квант механиканинг асосий тенгламаси. Ечимлари квант системанинг ҳолатини вақт давомида ўзгаришини ифодаловчи тўлқин функцияларидан иборат
- 117. Штарк эффекти-** электромагнит нурланиш чиқазаётган (ютаётган) моддага электр майдони таъсир этганда модданинг спектрал чизиқларининг ажралиши

118. Штерн-Герлах тажрибаси- атомнинг хусусий магнит моментининг магнит майдон йўналишига проекциясининг дискрет қийматлар қабул қилишини тасдиқловчи тажриба

119. Эйнштейн тенгламаси (формуласи) - фотоэффектда ҳар бир ютилган фотон учун ёзилган энергиянинг сақланиш қонунининг формуласи

120. Электрон қобик –муайян бош квант сони қийматига эга бўлган ва ядродан бир ҳил масофада жойлашган атом электронлари тўплами (мажмуи)

121. Эрмит оператори –чизиқли ва ўз -ўзига қўшма оператор

122. Электрон конфигурация –атомдаги электронларнинг электрон қобиклар бўйича тақсимооти

Термодинамика ва статистик физика

1. Авогадро доимийси – Бир моль моддадаги зарралар сони

2. Авогадро қонуни - Бир ҳил босим ва бир ҳил температурада тенг ҳажмлардаги идеал газларда молекулалар сонининг бир ҳил бўлишини кўрсатувчи идеал газ қонуни

3. Адиабатик жараён – Тўлиқ иссиқлик изоляцияси мавжуд термодинамик системалардаги жараён (Иссиқлик алмашинувисиз ўтадиган жараён)

4. Адиабатик инвариантлар – Система жойлашган ташқи шароитларнинг секин (адиабитик), лекин унча кичик бўлмаган ўзгаришларида амалда ўзгаришсиз қолавчи физикавий катталиклар

5.Адиабатик система - Бошқа системалар билан иссиқлик алмашинувайдиган система

6. Адиабатик қобик – Қаралаётган система билан ташқи муҳит орасида иссиқлик алмашинувиға йўл қўймайдиган қобик

7. Архимед қонуни – Оғирлик кучи майдонида жойлашган суюқлик ёки газ томонидан уларға ботирилган жисмға таъсир қилувчи кучни аниқловчи гидростатика ва аэростатика қонуни

8. Атом –Кимёвий элементларнинг ҳоссаларини ифодаловчи энг кичик қисм, микросколик ўлчамли модда қисми (микрозаррача)

- 9. Барометрик формула** – Оғирлик кучи майдонида жойлашган газ босими ёки зичлигининг баландликга боғланишини ифодаловчи формула
- 10. Биринчи тур фазавий ўтиш** –Ички энергия ёки зичликнинг сакрашсимион ўзгариши билан юз берувчи фазавий ўтиш
- 11. Боголюбов тенгламалари** – Жуфт ўзаро таъсир потенциалли классик заррачалар системасининг бир заррали,икки заррали ва ҳоказо тақсимот функциялари учун тенгламалар занжири
- 12. Бозе-Эйнштейн конденсацияси** – Бозе-Эйнштейн статистикасига бўйсинувчи кўп сонли зарралар системаси (бозе-газ ёки бозе- суюқлик) да айнаш температурасидан пастроқ температураларда система зарралари айрим қисмининг нолинчи импульсли ҳолатда жойлашуvidан иборат квант ҳодиса
- 13. Бозе-Эйнштейн гази тақсимот функцияси-** Спинлари Планк доимийсига бутун қаррали бўлган зарралар учун квант статистик тақсимот
- 14. Бозе-Эйнштейн тақсимоти** – Бир ҳил бозонларнинг энергия сатҳлари бўйича тақсимланиши (тақсимоти)
- 15. Бозе-Эйнштейн статистикаси** – нол ёки бутун сонда ифодаланувчи спинли ($\hbar$ – бирликларида) айний заррачаларга қўлланиладиган квант статистика
- 16. Бозонлар-** Бозе-Эйнштейн статистикасига бўйсинувчи зарралар
- 17. Бойл нуқтаси** - p ва pV координаталар системасида чизилган реал газ изотермасидаги минимум нуқта
- 18. Бойл- Мариотт қонуни** – Газнинг муайян массаси учун ўзгармас температурада идеал газ босимининг газ эгаллаган ҳажмга кўпайтмасининг ўзгармас катталиқга тенглигини ифодаловчи қонун
- 19. Больцман кинетик тенгламаси** – Кўп сонли зарралардан ташкил топган системанинг номувозанат бир заррали тақсимот функцияси каноатлантирадиган интегро-дифференциал тенглама
- 20. Больцман принципи-** Статистик система энтропияси s -нинг ҳолат эҳтимоллиги w - билан $s = \kappa \ln w$ формула билан аниқланувчи боғланиш
- 21. Больцман статистикаси-** Ўзаро таъсирлашмайдиган кўп сонли заррачаларга эга бўлган классик идеал системалар статистикаси

- 22. Больцман тақсимоти** – Идеал газ молекулаларининг баландлик бўйича ўзгаришини ифодаловчи тақсимот
- 23. Броун ҳаракати**- Суюқлик ёки газларда муаллақ жойлашган кичик ўлчамли зарраларнинг узлуксиз тартибсиз ҳаракати
- 24. Ван-дер-Ваальс тенгламаси** - Реал газларнинг ҳолат тенгламаси
- 25. Газ**- 1. Модданинг агрегат ҳолатларидан бири, бу ҳолатда системанинг зарралари орасидаги ўзаро таъсир кучлари заиф ва зарралар деярли эркин ҳаракатланади ва берилган ҳажмни эгаллайди. 2. Ўзаро заиф таъсирлашувчи элементар зарралар ёки квази зарралар мажмуи.
- 26. Газлар кинетик назарияси** – Газларнинг ҳоссаларини уларнинг молекуляр тузилиши, молекулаларнинг муайян қонун асосида таъсирлашишига асосланган, статистик усуллар билан ўрганиладиган назарий физика бўлими
- 27. Гей-Люссак қонуни**- Газнинг муайян массасининг ҳажми, ўзгармас босимда, газ температурасига мутаносиб (пропорционал) лиги тўғрисидаги қонун
- 28. Гетероген система** – Физикавий ҳоссалари ёки кимёвий таркиби турлича бўлган фазалардан ташкил топган термодинамик система
- 29. Гетероген жараён** - Физикавий ҳоссалари ёки кимёвий таркиби турлича бўлган фазалардан ташкил топган термодинамик системада юз берувчи жараён
- 30. Гиббс тақсимоти** – Кўп заррачали ихтиёрий системанинг кичик қисми, системанинг қолган қисми билан заиф таъсирлашиш шароитида статистик мувозанатдаги системанинг кичик қисмининг турли ҳолатларининг эҳтимолликлари тақсимоти
- 31. Гиббснинг микроканоник тақсимоти** – Берк системаларнинг берилган энергияли ҳолатлардан бирида бўлиш эҳтимоллиги w нинг квант квант ҳолатлар сони $\Omega(\varepsilon_i)$ га пропорционаллигини аниқловчи боғланиш
- 32. Гиббснинг кичик каноник тақсимоти** - Зарралар сони доимий бўлган мувозанатдаги системалар ҳолатини аниқловчи статистик тақсимот

- 33. Гиббснинг катта каноник тақсимоти** - Энергияси ва зарралар сони ўзгарувчан ва термостат билан мувозанатда бўлган системалар учун статистик тақсимот
- 34. Гиббснинг фазалар қондаси** – Термодинамик мувозанатдаги гетероген системада фазалар сони системани ташкил этувчилар сонидан иккитан ортиқ бўлиши мумкин эмаслиги тўғрисидаги қонда
- 35. Гиббс-Гельмгольц тенгламаси**–Термодинамик система энтальпиясининг Гиббс термодинамик потенциали ва температурага боғланиш тенгламаси
- 36. Гиббс термодинамик потенциали**- Термодинамик система ҳолатини аниқловчи температура ва босим функцияси бўлган ҳолат функцияси
- 37. Гомоген система**- Бир фазали термодинамик система. (Ҳоссалари фазода узлуксиз ўзгариб борадиган система)
- 38. Дальтон қонунлари** – 1. Кимёвий ўзаро аралашмайдиган, идеал газлар аралашмасининг босими парциал босимлар йиғиндисига тенглиги тўғрисидаги қонун. 2. Доимий температурада муайян суюқликда унинг устидаги газ аралашмасининг ташкил этувчиларидан ҳар бирининг эрувчанлиги унинг парциал босимига пропорционал (мутаносиб)лиги тўғрисидаги қонун.
- 39. Дебай назарияси** – Қаттиқ жисмлар иссиқлик сигимининг назарияси
- 40. Дебай температураси** T_D – Қаттиқ жисм кристалл панжарасининг эластик (қайишқоқ) тебранишларининг энг юқори частотасига мос келувчи температура
- 41. Ёпиқ система** – Боўқа системалар билан модда, шунингдек энергия, импульс алмашилиш имкони бўлмаган система
- 42. Жараён (процесс)** – Система ҳолатларининг кетма-кет алмашилиши
- 43. Жараён иши** – (рабора процесса) – Жисмларнинг ўзаро таъсирида уларнинг температурасига ва бир жисмдан иккинчи жисмга модда кўчишига боғлиқ бўлмаган ҳолда бир жисмдан бошқа жисмга узатиладишан энергия
- 44. Жоуль қонуни** – Идеал газнинг ички энергияси фақат температуранинг функцияси бўлиб, ҳажмга боғлиқ эмаслиги тўғрисидаги термодинамик қонун
- 45. Идеал газ** – Бир молининг мувозанат ҳолати $PV = RT$ тенглама билан ифодаланувчи газ

- 46. Иссиқлик сиғими-** Қандайдир жараёнда системага берилган ёки олинган иссиқлик миқдорининг шунга мос келувчи температура ўзгаришига нисбатига айтилади
- 47. Изотермик жараён** – Ўзгармас температурада содир бўладиган термодинамик жараён
- 48. Изохорик жараён** - Ўзгармас ҳажмда содир бўладиган термодинамик жараён
- 49. Изобарик жараён** – Ўзгармас босимда содир бўладиган термодинамик жараён
- 50. Изотермик сиқилувчанлик-** Изотермик жараёнда система ҳажми ўзгаришининг босимнинг кичик ўзгаришига ва система эгаллаган ҳажмга нисбати
- 51. Изоэнтropic жараён** – Системада ўзгармас энтропияда ўтадиган жараён
- 52. Иккинчи тур фазавий ўтиш-** Ички энергия ёки зичликнинг сакрашсимион ўзгариши юз бермайдиган жараён
- 53. Ички энергия** – Термодинамик системанинг энергияси бу ички энергия дейилади
- 54. Инверсия температураси** – Жоуль-Томсон эффекти ишорасини ўзгартирадиган температура
- 55. Инверсия эгри чизиғи-** Модда ҳолатини ифодаловчи диаграммада дроссел эффекти ўз ишорасини ўзгартирадиган нуқталарнинг геометрик ўрни
- 56. Иссиқлик** –1. Жисмни ташкил қилган микрозарраларнинг тартибсиз ҳаракат тарзида иссиқлик алмашинувида ёки жисмнинг ўзида содир бўлувчи бирор жараёнда олинган ёки узатилган энергия. 2. Жисмни ташкил қилган микрозарраларнинг тартибсиз (иссиқлик) ҳаракати шакли. 3. Жисм ички энергиясининг микрозарраларнинг тартибсиз ҳаракати билан боғлиқ қисми
- 57. Иссиқлик алмашиниш** -1. Жисмни ташкил қилган микрозарраларнинг тартибсиз ҳаракати билан боғлиқ бўлган, энергиянинг бир жисмдан бошқасига микроскопик иш бажармасдан узатилишига олиб келувчи микроскопик

жараёнлар мажмуи. 2. Иссиқлик узатишнинг температура градтенти билан боғлиқ бўлган ўз-ўзидан соджир бўлувчи қайтмас жараёни

58. Иссиқлик миқдори – Иссиқлик алмашинув пайтида бир жисмдан иккинчисига узатилган ички энергиянинг бир қисми

59. Иссиқлик сиғими – Жисмни бир даража (1°C ёки 1°K) иситганда унинг олган иссиқлик миқдори

60. Иссиқлик ҳаракати – Атомлар, молекулалар ва бошқа кичик зарраларнинг жадаллиги температура билан белгиланувчи тартибсиз ҳаракати.

61. Иш - Термодинамик система (физикавий жисм) нинг ўз атрофидаги бошқа жисмлар билан энергия (иссиқлик) алмашилиш шакли

62. Карно теоремаси - Қайтувчи жараёнлар билан ишловчи даврий машиналарнинг ФИК фақат иситгич ва совутгичнинг температураларига боғлиқ бўлиб, ишловчи жисмнинг табиатига ва турига боғлиқ бўлмайди

63. Карно цикли - Бу цикл навбат билан такрорланувчи иккита изотерма ва иккита адиабатадан иборат цикл

64. Квазистатик жараён – Термодинамик системанинг бир мувозанат ҳолатдан бошқасига чексиз секин ўтиши

65. Келтирилган температура – Модда термодинамик температурасининг критик температурага нисбати

66. Кимёвий термодинамика – Модда термодинамик ҳоссаларининг унинг таркибига, тузилишига, ташқи шароитларга боғлиқлигини, ҳамда бошқа физик-кимёвий жараёнларни ўрганувчи термодинамика бўлими

67. Кинетик коэффицент – Номувозанат термодинамиканинг физикавий катталиклар оқимини температура, концентрация, ва башқа катталикларнинг градиентлари билан боғловчи тенгламасидаги пропорционаллик коэффиценти

68. Конденсация – Совитиш ёки сиқиш воситасида моддани газсимон ҳолатдан суюқ ёки қаттиқ ҳолатга ўтиши

69. Конденсация температураси – Модданинг ўзгармас босимда газ ҳолатдан суюқлик ёки қаттиқ ҳолатга мувозанатли фазпвий ўтишидаги температура

70. Критик нуқта – Термодинамик мувозанатда турган икки ёки ундан ортиқ фаза ўзининг хоссалари бўйича бирдай бўлиб қоладиган, моддаларнинг ҳолат диаграммасидаги критик ҳолатга мос нуқта

71. Критик ҳодисалар- Иккинчи тур фазавий ўтишларда критик нуқта (критик температура) лар яқинида кузатиладиган ўзига ҳос ҳодисалар

72. Критик ҳолат – Бир-бири билан мувозанатда (масалан, суюқлик ва унинг буғи, икки суюқлик орасида ва б.) жойлашган фазалар орасидаги фарқнинг йўқолишидан ҳосил бўладиган модда (ёки моддалар аралашмаси) нинг ҳолати

73. Кюри нуқтаси – Муайян доимий термодинамик параметрлар (босим, магнит майдон, электр майдон ва б.) да температуранинг ўзгариши туфайли қаттиқ жисмларда тартибланган ҳолатнинг вужудга келиши (бузилиши) билан боғлиқ иккинчи тур фазавий ўтишлар эгри чизигидаги нуқта

74. Кюри температураси – Ферромагнетикнинг парамагнетикга фазавий ўтиш температураси

75. Локал термодинамик мувозанат – Номувозанат жараёнлар термодинамикаси ва туташ муҳитлар механикасининг асосий тушунчаларидан бири

76. Модда – Ҳозирги замон физикаси тасаввурларига асосан, (кварк – лептон модели) кварклар ва лептонлар каби элементар зарралардан ташкил топган материя тури

77. Модданинг агрегат ҳолатлари – Айни бир модданинг ўтишларида эркин энергияси, энтропияси, зичлиги ва бошқа асосий физикавий хоссаларининг сакраб ўзгариш ҳолатлари

78. Молекула – Муайян модданинг энг кичик кимёвий хоссаларини сақлаган турғун заррачаси

79. Молекуляр физика – Жисмларнинг микроскопик (молекуляр) тузилишини текшириш асосида, уларнинг турли агрегат ҳолатлардаги физикавий хоссаларини ўрганувчи физиканинг бўлими

80. Молекуляр-кинетик назария – Модданинг атом ва молекуляр тузилиши тасвурига асосланган иссиқлик назарияси

- 81. Моляр иссиқлик сиғими** – Жисм иссиқлик сиғимининг шу жисмда мавжуд бўлган модданинг молларда ифодаланган миқдорига нисбатига тенг катталик
- 82. Моляр ҳажм** – Нормал шароитларда бир моль модда эгаллайдиган ҳажм
- 83. Мувассал мувозанат принципи (принцип детального равновесия)** – Мувозанатда жойлашган системадаги ҳар қандай микроскопик жараён худди унга тескари жараён каби тезлик содир бўлишини таъкидловчи фикр
- 84. Номувозанат термодинамика** – Номувозанат ҳолатлардаги системаларда рўй берувчи қайтмас жараёнларни ўрганувчи термодинамика бўлими
- 85. Мустақил системалар** –Агар системаларнинг ўзаро таъсир энергияси шу системанинг ички энергиясидан жуда кичик бўлса бундай системалар мустақил системалар дейилади
- 86.Статистик тақсимот функцияси-Фазалар фазосида эҳтимоллик тақсимотининг зичлиги,** берилган системанинг микроҳолатлари бўйича тақсимот функцияси
- 87. Статистик физика** – Катта сондаги зарралардан ташкил топган макроскопик системанинг хусусиятларини ва унда ўтаётган жараёнларнинг қонуниятларини микроскопик нуқтаи назардан ўрганувчи ва текширувчи физиканинг бўлими
- 88. Термодинамика** – Феноменологик характерга эга бўлган,иссиқлик мувозанатида бўлган системаларда ўтаётган жараёнларни физикавий тасаввурлар ва моделлардан фойдаланиб ўрганувчи физиканинг бўлими
- 89. Термодинамиканинг биринчи қонуни** – иссиқлик жараёнлари учун татбиқ этиладиган энергиянинг айланиш ва сақланиш қонуни
- 90. Термодинамиканинг иккинчи қонуни** –Иссиқликнинг ишга ва ишнинг иссиқликга айланишини ифодаловчи қонун.Таъриф: “Иссиқлик ўз ҳолича совуқ жисмдан иссиқ жисмга ўтаолмайди
- 91. Термодинамиканинг учинчи қонуни-** Абсолют нол температурага яқинлашганда ҳар қандай мувозанатдаги система энтропияси, изотермик жараёнларда ҳолатнинг термодинамик параметрларига боғлиқ бўлмай қолади ва абсолют нол температурада доимий қиймат қабул қилади

- 92. Фазалар фазоси** - $3N$ та умумлашган координата ва $3N$ та умумлашган импульсдан ташкил топган $6N$ ўлчовли фазий фазо
- 93. Термодинамик жараён** –Термодинамик системаларнинг бир мувозанат ҳолатда иккинчи мувозанат ҳолатига ўтиш жараёни
- 94. Температура** –Мувозанатдаги системаларнинг ҳамма нуқталарида бир хил бўлган ,зарраларнинг сонига боғлиқ бўлмаган,энергия ва ташқи параметрларга боғлиқ бўлган ва системанинг ички ҳаракат ҳолатини аниқловчи катталиқ
- 95. Ферми-Дирак тақсимоти** – Спинлари Планк доимийси қийматига ярим қаррали бўлган зарралар системасида энергия тақсимоти
- 96. Ферми газ** – Ферми –Дирак зарраларидан (масалан, электронлар) ташкил топган газ
- 97. Энтропия** – Статистик системаларда мувозанат ҳолатдан номувозанат ҳолатга ўтишни аниқлайдиган ҳолат функцияси
- 98. Ҳолат функцияси** –Макроскопик система ҳолатини аниқловчи аниқ физик маънога эга бўлган катталиқлар

ҲОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

Квант механика фани бўйича

1. Мусахонов М.М., Рахматов А.С. Квант механикаси ,Т.; 2011.- 352 б.
2. Блохинцев Д.И., Основы квантовой механики, М.; Наука, 1986, 663 с.
3. Ҳошимов Г.Х.,Расулов Р.Я.,Ўлдошев Н.Х. Квант механика асослари, Т.; Ўқитувчи,1995,374 б.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика, М.;1974, 367 с.
5. Серова Ф.Г., Янкина А.А. Сборник задач по теоретической физике, М.; 1984, 192 с.
6. Гречко Л.Г. и др. Сборник задач по теоретической физике, М.; ВШ,1984, 320 с.
7. Задачник- практикум по теоретической физике, Квантовая механика, М., Просвещение, 1982 ,120 с.
8. Саматов Ғ.Б. ва бошқалар, Умумий физика курсидан практикум, Квант физика, Т.; Ўқитувчи, 1990, 102 б.

9. Саматов Ғ.Б., Зиёев Ғ.М. Квант механикасининг физикавий асослари, Т.;1991, 62 б.
10. Quantum Mechanics, Fourth edition Alastair I.M. Rae, IOP Publishing Ltd 2002, p.301.
11. Hendrik F. Hameka, Quantum Mechanics, 2004, p,194.

Термодинамика ва статистик физика фани бўйича

1. Абдумаликов А. А., Маматкулов Р. Термодинамика ва статистик физика, Т.: Ворис нашриёт, 2006, 391 б.
2. Левич В.,Г., Курс теоретической физики, Том:1, М.; 1976 , с.325-676
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Статистическая физика, М.;1986 ,523 с.
4. Базаров И.П., Термодинамика, М.; Просвещение, 1991, с. 3-320.
5. Серова Ф. Г., Янкина А.А., Задачник-практикум по термодинамике, М.,Просвещение, 1972 , 136 с.
6. Серова Ф. Г., Янкина А.А., Задачник-практикум по теоретической физике, Статистическая физика, М. ; Просвещение, 1975 , 112 с.
7. Саматов Ғ.Б., Термодинамика ва статистик физикадан масалалар тўплами, Гулистон, 2014, 180 б.
8. Rager D, Blandford and Rip S,Thorne, Applcations of classical Physics, California Institute of Technology, 2003,p. 66-170.

М У Н Д А Р И Ж А

Аннотация.....	2
Сўзбоши	4
1-қисм. Квант механика	
1. Абсолют қора жисм. Релей-Джинс, Вин ва Планк формулалари. Стефан - Больцман қонуни.....	7
2. Фотоэффект. Комптон эффекти. Водород атоми учун Бор назарияси....	15
3. Де-Бройл тўлқинлари. Гейзенбергнинг ноаниқликлар муносабати.....	23
4. Чизиқли ва ўз-ўзига қўшма операторлар. Операторларнинг хусусий қийматлари ва хусусий функциялари.....	31
5. Коммутатив ва антикоммутатив операторлар	39
6. Заррачанинг координата, импульс ва импульс моменти оператори.....	41
7. Импульс моменти квадрати, кинетик ва потенциал энергия оператори, Гамильтон оператори.....	49
8. Шредингер тенгламаси, Стационар ҳолат учун Шредингер тенгламаси	53
9. Заррачанинг чексиз чуқур потенциал ўра (чуқурлик) даги ҳаракати.....	59
10. Заррачаларнинг потенциал тўсиқ орқали ҳаракати.....	68
11. Чизиқли гармоник осциллятор.....	75
12. Квазиклассик яқинлашиш. ВКБ методи.....	79
13. Марказий симметрик куч майдонидаги ҳаракат, Радиал Шредингер тенгламаси..	83
14. Кулон майдонидаги ҳаракат. Водородсимон атомлар назарияси.....	91
15. Водородсимон атомларнинг тўлқин функцияси.Спектрал сериялар..	100
16. Электрон спини, спин операторлари ва спин тўлқин функциялари...	105
17. Заррачаларнинг айнан ўхшашлиги. Бозе-Эйнштейн ва Ферми-Дирак заррачалари.....	109
18. Д.И.Менделеевнинг элементлар даврий системаси.....	113
19. Квант механиканинг тақрибий методлари. Вариацион ҳисоб методи.	117

2-қисм. Термодинамика ва статистик физика

20. Фазавий фазо. Лиувилл теоремаси	121
21. Гиббс тақсимотлари. Микроканоник ва каноник тақсимот	128
22. Максвелл тақсимоти. Больцман тақсимоти.....	136
23. Термодинамиканинг асосий тушунчалари. Термодинамиканинг биринчи қонуни.....	145
24. Иссиқлик сиғими. Асосий термодинамик жараёнлар ва тенгламалари.....	151
25. Термодинамиканинг II – қонуни, энтропия, термодинамиканинг асосий тенграмаси.	161
26. Қайтувчи ва қайтмас жараёнлар. Термодинамиканинг асосий тенграмаси. Карно цикли.....	168
27. Ҳолатнинг термик ва калорик тенгламалари. Термодинамиканинг III – қонуни, Нернст теоремаси.....	175
28. Термодинамик потенциаллар. Идеал газ учун термодинамик потенциаллар. Гиббс-Гельмгольц тенграмаси	180
29. Зарралар сони ўзгарувчан системалар. Гомоген ва гетероген системалар.....	185
30. Сирт ҳодисалари термодинамикаси, 1 ва 2 тур фаза ўтишлари.....	191
31. Бир атомли квант идеал газлар	198
32. Квант тақсимотлар. Бозе-Эйнштейн ва Ферми-Дирак тақсимотлари	205
33. Паст температураларда Бозе-газ. Бозе-Эйнштейн конденсацияси. ...	213
34. Қаттиқ жисмларнинг иссиқлик сиғими.....	218
34. Икки атомли квант идеал газлар	224
36. Флуктуация назарияси	228
37. Ноидеал системаларнинг статистик назарияси	237
38. Физикавий кинетика элементлари	240
Глоссарий.....	248
Фойдаланилган адабиётлар.....	267
Мундарижа	269

О Г Л А В Л Е Н И Е

Аннотация.....	2
Предисловие.....	4

1 – часть. Квантовая механика

1. Абсолютное черное тело, Формулы Релея-Джинса, Вина и Планка, закон Стефана – Больцмана.....	7
2. Фотоэффект. Эффект Комптона. Теория Бора для атома водорода.....	15
3. Волны Де – Бройля. Соотношение неопределенности Гейзенберга...	23
4. Линейные и самосопряженные операторы. Собственные значения и собственные функции операторов.....	31
5. Коммутативные и антикоммутирующие.....	39
6. Операторы координат, импульса и момента импульса.....	41
7. Операторы квадрата момента импульса, кинетической энергии и потенциальной энергии.....	49
8. Уравнение Шредингера. Уравнение Шредингера стационарного состояния	53
9. Движение частицы бесконечно глубокой потенциальной яме.....	59
10. Прохождение частиц сквозь потенциальный барьер.....	68
11. Линейный гармонический осциллятор.....	75
12. Квазиклассическое приближение. Метод ВКБ.....	79
13. Движение в поле центрально – симметричном поле	83
14. Движение в кулоновском поле. Теория водородоподобных атомов	91
15. Волновая функция водородоподобных атомов.Спектральные серии	100
16. Спин электрона. Операторы спина. Спиновые волновые функции	105
17. Тождественность частиц. Частицы Бозе – Эйнштейна и Ферми – Дирака.....	109
18. Периодическая система элементов Менделеева.....	113
19. Приближенные методы квантовой механики. Вариационные методы	117
2 – часть. Термодинамика и статистическая физика	

20. Фазовое пространство. Теорема Лиувилля.....	121
21. Распределения Гиббса. Микроканоническое и каноническое распределение	128
22. Распределение Максвелла. Распределение Больцмана.....	136
23. Основные понятия термодинамики. 1- закон термодинамики .	145
24.Теплоемкость. Уравнение основных термодинамических процессов	151
25. 2- закон термодинамики. Энтропия. Основное уравнение термодинамики	161
26. Обратимые и необратимые процессы. Цикл Карно.....	168
27. Термические и калорические уравнения состояния. 3- закон термодинамики. Теорема Нернста.....	175
28. Термодинамические потенциалы. Термодинамические потенциалы идеального газа	180
29. Системы с переменным числом частиц. Гомогенные и гетерогенные системы.....	185
30. Термодинамика поверхностных событий. Фазовый переход первого и второго рода	191
31. Одноатомные квантовые идеальные газы.....	198
32. Квантовые распределения. Распределения Бозе – Эйнштейна и Ферми – Дирака	205
33. Бозе – газ в низких температурах. Конденсация Бозе - Эйнштейна	213
34. Теплоемкость твердых тел	218
35. Двухатомные квантовые идеальные газы.....	224
36. Теория флуктуации	228
37. Статистическая теория неидеальных систем.....	237
38. Элементы физической кинетики	240
Глоссарий	248
Литература.....	267
Оглавление	269

able of contents

Annotation.....	2
Introduction	4
Chapter 1. Quantum Mechanics.	
1. Absolute blackbody, Formulae of Rele – Jeans, Wien and Planck, Law of Stephan-Boltzmann.....	7
2. Photo effect. Compton's Effect. Bohr's Theory for Hydrogen Atom.....	15
3. De-Broil's Waves. Uncertainty relation of Heisenberg.....	23
4. Linear and self-adjoint operators. Eigen values and Eigen functions of the operator.....	31
5. Commutative and anti-commutative	39
6. Operators of coordinates, impulse and impulse moment.....	41
7. Operators of angular momentum square, kinetic energy and potential energy.....	49
8. Schrodinger's Equation. Schrodinger's Equation for stationary state.....	53
9. Motion of particle towards stationary state.....	59
10. Motion of particles through potential barrier.....	68
11. Linear harmonic oscillator.....	75
12. Quasi-classical approximation. WKB method.....	79
13. Motion in centrally symmetric field.....	83
14. Motion in Coulomb field. Theory of hydrogen like atoms.....	91
15. Wave function hydrogen like atoms. Spectral series.....	100
16. Electron spin. Operators of spin. Spin wave functions.....	105
17. Particle identity. Particles of Bose-Einstein and Fermi- Dirac.....	109
18. Mendeleeev's Periodical system of elements.....	113
19. Approximate methods of quantum mechanics. Variation Methods..	117
Chapter 2. Thermodynamics and statistical physics.	
20. Phase Space. Louis Ville Theorem.....	121
21. Gibbs Distribution. Micro canonic and canonic distributions.....	128
22. Maxwell Distribution. Boltzmann Distribution.....	136
23. Main concepts of thermodynamics. Law-1 of thermodynamics.....	145
24. Thermal capacity. Equation of main thermodynamic processes.....	151
25. Law-2 of thermodynamics. Entropy. Main equation of thermodynamics.....	161
26. Reversible and irreversible processes. Carnot cycle.....	168
27. Thermal and caloric equation of the state. Law-3 of thermodynamics. Nernst's Theorem.....	175

28. Thermodynamic potentials. Thermodynamic potentials of perfect gas.....	180
29. Systems with variable quantity of particles. Homogenous and heterogeneous Systems.....	185
30. Thermodynamics of surface phenomena. Phase transition of first and second type.....	191
31. Mono-atomic quantum perfect gases.....	198
32. Quantum Distributions. Bose-Einstein and Fermi-Dirac Distribution.....	205
33. Bose-gas in low temperatures. Bose-Einstein condensation.....	213
34. Thermal capacity of solid body.....	218
35. Diatomic quantum perfect gases.....	224
36. Fluctuation Theory.....	228
37. Statistical theory of non-ideal systems.....	237
38. Elements of physics kinetics.....	240
Glossary.....	248
Bibliography.....	267
able of contents	269