Практические применения межпредметных связей с помощью дифференциальных уравнений в академических лицеях.

Э.О.Шарипов, старший преподаватель КарМИИ.

Аннотация: В статье рассматриваются задачи физики, экономики, биологии и экологии, приводящие к обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка.

Ключевые слова: задача, дифференциальные уравнения, решение, полураспад, радиоактивные вещества, математическая модель.

The summary: In the paper, we consider problems of physics, economy, biology and the ecology leading to the first order ordinary differential equations.

Keywords: a problem, the differential equations, the decision, half-decay, radioactive substances, mathematical model.

В программе по математике для академических лицеев, разработанной М. Шарахимовым, Ш. Исмаиловым и А. Амановым отмечено, что применение математических понятий занимает основное место при обучении.

Учитывая это обстоятельство, мы предлагаем начинать преподавание элементов дифференциальных уравнений в академических лицеях с объяснения моделирования, так например, обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, описывают такие процессы, как рост численности населения, распад радиоактивных веществ, потепление и похолодание предметов. При этом мы фактически показываем практические применения межпредметных связей с помощью дифференциальных уравнений.

Пусть $y = y(x)$ – некоторая неизвестная функция.

Определение. Если в уравнении участвует неизвестная функция и ее производная $y'(x)$, то это уравнение называют ***дифференциальным уравнением***.

Если $y = \varphi(x)$–функция, имеющая производную, удовлетворяет данному уравнению, то функцию $y = \varphi(x)$ называют ***решением дифференциального уравнения.***

Нахождение решения дифференциального уравнения называют ***интегрированием дифференциального уравнения.***

Простейший пример дифференциального уравнения дает задача о нахождении первообразной $F(x)$ для заданной функции $f(x)$, поскольку ее можно рассматривать как задачу о нахождении функции $F(x)$, удовлетворяющей уравнению: $F'(x) = f(x)$.

Верно следующее

Предложение. Общее решение дифференциального уравнения $y' = f(x)$ определяется по формуле: $y(x) = F(x) + C, (C - const)$.

Доказательство. Во–первых, по правилу дифференцирования $(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$. Значит, функция $y(x)=F(x)+C$ есть решения дифференциального уравнения $y'=f(x)$.

Во–вторых, если $y=y(x)$ – решение дифференциального уравнения $y'=f(x)$, то производная функции $Y(x)=y(x)-F(x)$ тождественно равна нулю: $Y'(x)=y'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$. Значит, функция $Y(x)$ постоянная: $Y(x)=y(x)-F(x)=C$. Отсюда, $y(x)=F(x)+C$. *Предложение доказано.*

Как было отмечено выше к дифференциальным уравнениям приводят ряд задач физики, экономики, биологии, экологии и тому подобные. Приведем некоторые из них.

Пример 1. Из статистических данных известно, что рост численности населения за единицу времени пропорционален численности населения с коэффициентом пропорциональности *k*. Найти закон изменения численности населения с течением времени.

Решение. Пусть $y=y(t)$ – число жителей в момент времени *t*. По условию задачи, получаем уравнение

$$y'=ky,$$

представляющую математическую модель закона изменения численности населения с течением времени.

Решая это уравнение, получим закон изменения численности населения

$$y=Ce^{kt},$$

где C – постоянная, определяемая начальными условиями (численность населения в начальный момент времени).

Пример 2. Описать закон распада радиоактивных веществ с течением времени. Масса радиоактивного вещества, распадающегося за единицу времени пропорционально массу вещества, имеющегося в рассматриваемый момент.

Решение. Пусть $m(t)$ –масса радиоактивного вещества в момент времени *t*. Известно, что скорость распада радиоактивных веществ равна $-m'(t)$ (производная определяет скорость). Если коэффициент пропорциональности обозначим через -*k* (*k*>0), то получаем уравнение

$$m'(t)=-km(t) \text{ или } m'=-km.$$

Решая этого уравнения, имеем $m=Ce^{-kt}$.

Если в начальный момент, то есть при *t*=0, масса вещества равна $m=m_0$ (начальная масса), по последней формуле находим $m=m_0e^{-kt}$. Значит, с течением времени масса радиоактивного вещества уменьшается экспоненциально скорости.

Рассмотрим еще один пример, в котором находится формула по определению возраста умершего организма.

Пример 3. Как известно, в живом организме имеется углерод C^{12} и в малом количестве радиоактивный изотоп C^{14}. Этот изотоп C^{14} в живой организм непрерывно приносят космические лучи. Оказывается, когда организм живой, то по практическим исследованиям известно, что частное масс $\frac{C^{12}}{C^{14}}$ остается неизменным. Когда организм умрет, биологический обменный процесс в организме останавливается, и количество радиоактивного изотопа C^{14} начинает уменьшаться. Относительная скорость этого радиоактивного распада постоянна и, по проверенным данным, равна $\frac{1}{8000}$ (в год). Если обозначим через $m(t)$ частное $\frac{C^{12}}{C^{14}}$ после смерти организма в момент времени *t*, то получаем дифференциальное уравнение $m'(t) = -\frac{1}{8000}m(t)$, решение которого есть $m(t) = m_0 e^{-t/8000}$. Отсюда, находим формулу по определению времени *t*, прошедшего после смерти организма, если известно $m(t)$: $t = 8000 \ln \frac{m_0}{m(t)}$.

Период полураспада. Пусть начальное значение (масса, температура, количество) некоторого вещества равно $Q=Q_0$. Тогда через некоторые времени h это значение уменьшится до $\frac{1}{2}Q_0$. Эта часть времени называется ***периодом полураспада*** вещества.

Если проходит еще время h, то нетрудно видеть, что $Q = \frac{1}{4}Q_0$ и так далее. Таким образом, с течением времени h, значение вещества изменится следующим образом:

$$Q_0,\ Q_0 \cdot \frac{1}{2},\ Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2,\ Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3, \ldots$$

Значит, изменение Q образует геометрическую прогрессию. Отсюда, из формулы периода полураспада найдем формулу, для определения значения вещества через времени *t*: $Q = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$.

Пример 4. Если углерод C^{14} в найденном бревне составляет 25% от углерода в растущих деревев, то когда высохло дерево, из которого распилено это бревно?

Решение. Известно, что период полураспада углерода C^{14} равен 5700 лет. По условию задачи, остатки углерода C^{14} составляют четвертую часть начального значения. Значит, дерево высохло $2 \cdot 5700 = 11400$ лет назад.

Пример 5. Если углерод C^{14} в остатках дерева из древнего костра составляет 35% от углерода в растущих деревев, то когда сгорело это дерево?

Решение. Если Q_0 – начальное значение углерода C^{14}, тогда по формуле упомянутой выше, количество в данный момент равно $Q = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$.

По условию задачи, $Q = 0{,}35Q_0$. С помощью калькулятора найдем $\left(\frac{1}{2}\right)^{1{,}5} \approx 0.35$.

Значит, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}} \approx \left(\frac{1}{2}\right)^{1{,}5}$. Отсюда $t \approx 8550$. Следовательно, костер из этого дерева горел 8550 лет тому назад.

Пример 6. Имеется N_0 штук бактерий в хороших условиях для размножения. Из опытов вытекает, что скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. Найти связь между количеством бактерий и пройденным временем.

Решение. Если $N(t)$–количество бактерий в мемент t, то $N(0) = N_0$. Скорость размножения бактерий равна производной функции $N(t)$ (биологический смысл производной). Поэтому имеем $N'(t) = kN(t), k > 0$, где коэффициент k определяется по типу бактерий и их условиям жизни. Эти данные определяются из опыта. Решение данного дифференциального уравнения с начальным условием $\mathrm{N}(0) = \mathrm{N}_0$ является $N(t) = N_0 e^{kt}$.

Пример 7. За 10 минут температура предмета снизилась от 100° до 60°. Температура окружаюшей среды равна 20°. Через какое время температура предмета будет 40°?

Решение. Из физики известно, что скорость снижения температуры предмета пропорциональна разности температур предмета и температуры окружающей среды.

Обозначим через $T(t)$температуру предмета в мемент t. Тогда скорость снижения температуры есть производная от $T(t)$ по времени: $T'(t)$. Следовательно имеем уравнение $T'(t) = k(T(t) - 20)$. При $t = 0$ температура $T(0) = 100^0$. По формуле из примера 5, решение этого уравнения есть

$$T(t) - 20 = (T(0) - 20) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}.$$

При $t = 10$ имеем $T(10) = 60^0$. Поэтому $T(t) - 20 = (100 - 20) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}, 40 = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{h}}$.

Отсюда, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{h}} = \frac{1}{2}$, то есть h=10. Значит, $T(t) - 2 = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}$. Из условия $T(t) = 40$, найдем t: $40 - 20 = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{t}{10} = 2 \Rightarrow t = 20$.

Ответ: Через 20 минут температура предмета будет 40°.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $x'' + \omega^2 x = 0, \quad x = x(t)$. Это уравнение называется уравнением гармонического оссилятора. Нетрудно проверить, что функция $x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$ является его решением, где C_1, C_2– произвольные постоянные.

Предложение. Функции, определенные по формуле $x(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$ дают общее решение дифференциального уравнения $x''+\omega^2x=0$.

Доказательство. Как сказано выше, для произвольных постоянных C_1, C_2 функция $x(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$ удовлетворяет уравнению $x''+\omega^2x=0$.

Теперь покажем, что общее решение уравнения $x''+\omega^2x=0$ имеет вид $x(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$. Рассмотрим следующие вспомогательные функции:

$$\begin{cases}\varphi_1(t)=x(t)\cos\omega t-\dfrac{1}{\omega}x'(t)\sin\omega t\\ \varphi_2(t)=x(t)\sin\omega t+\dfrac{1}{\omega}x'(t)\cos\omega t\end{cases}$$

Вычислим их производные:

$$\begin{cases}\varphi_1'(t)=x'(t)\cos\omega t-\omega\cdot x(t)\sin\omega(t)-\dfrac{1}{\omega}x''(t)\sin\omega t-x'\cos\omega t=-\dfrac{1}{\omega}\left[x''(t)+\omega^2x(t)\right]\sin\omega t=0\\ \varphi_2'(t)=x'(t)\sin\omega t+\omega\cdot x(t)\cos\omega t+\dfrac{1}{\omega}x''(t)\cos\omega t-x'(t)\sin\omega t=\dfrac{1}{\omega}\left[x''(t)+\omega^2x(t)\right]\cos\omega t=0.\end{cases}$$

Отсюда $\varphi_1'(t)=\varphi_2'(t)=0$. Поэтому $\varphi_1(t)=C_1$, $\varphi_2(t)=C_2$ (C_1, C_2–постоянные). Получается система $\begin{cases}x(t)\cos\omega t-\dfrac{1}{\omega}x'(t)\sin\omega t=C_1\\ x(t)\sin\omega t+\dfrac{1}{\omega}x'(t)\cos\omega t=C_2\end{cases}$. Из этой системы найдем $x=x(t)$: для этого умножим первое уравнение системы на $\cos\omega t$, второе на $\sin\omega t$, и сложим их. Имеем $x(t)(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$ или $x(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$. Следовательно, решение дифференциального уравнения $x''+\omega^2x=0$ имеет вид $x(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$. *Предложение доказано.*

Если произвольные постоянные выберем в следующих видах $C_1=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\sin\varphi_0=a\sin\varphi_0$, $C_2=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\cos\varphi_0=a\cos\varphi_0$, то общее решение $x(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$ имеет вид $x(t)=a\sin(\omega t+\varphi_0)$. Эта функция представляет собой, движение гармонически колеблющегося маятника, период гармонических колебаний которого равно $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

Литература

1. Салахитдинов М.С., Насриддинов Г.Н., Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ташкент. Узбекистан. 1994.

2. Braun M. Differensial equations and their applications, Applied Mathematical Scienses15, 3rd Edition, Springer Verlag, New York, Heildelberg, Berlin, 1983.

3. Дилмуродов Н., Шарипов Э. Об обучении элементов дифференциальных уравнений в академических лицеях и колледжах. Материалы республиканской научно-методической конференции. Карши. Насаф. 2007.

4. DrayverR. Whatmath? New York. 1984.