

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

**NIZOMIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT
PEDAGOGIKA UNIVERSITETI**

**MATEMATIKA VA UNI O'QITISH METODIKASI
KAFEDRASI**

ALGEBRA VA SONLAR NAZARIYASI
(modul texnologiyasiga asoslangan ma'ruzalar matni)
I QISM

TUZUVCHILAR: f.-m.f.n., dotsent A.S.Yunusov

F.-m.f.n.,dotsent D.I.Yunusova

TOSHKENT - 2005

ANNOTASIYA

«Matematika-informatika» yo'nalishi bakalavriati o'quv rejasiga kiritilgan asosiy ixtisoslik fanlaridan biri bo'lgan «algebra va sonlar nazariyasi» kursi 1-5 semestrlar davomida o'qitiladi. Ushbu ma'ruzalar matni 1-kursning 1-semestriga rejalashtirilgan 28 soatlik ma'ruzalar uchun yozilgan bo'lib, unda 4 ta bob-matematik mantiq elementlari, to'plamlar nazariyasi elementlari, algebra va algebraik sistemalar, asosiy sonli sistemalar yoritilgan. Ma'ruzalar matni fanning modul texnologiyasi asosida tuzilgan dasturiga to'la mos keladi. Ma'ruzalarning 4 ta modulga jamlanganligi talabalar bilimini nazorat qilish va baholashni ayrim olingan mavzular bo'yicha emas, balki bir bob bo'yicha amalga oshirish imkoniyatini beradi.

Ma'ruzalar matni «Algebra», «Algebra va sonlar nazariyasi», «Matematika», «Oliy matematika», «Matematik mantiq» fanlari o'qitiladigan oliy o'quv yurtlari; akademik lisey, kasb-hunar kollejlari o'qituvchilari hamda talabalari uchun mo'ljallangan.

Taqrizchilar: f.-m.f.n., dotsent A.Dusumbetov,
F.-m.f.n., katta ilmiy xodim R.Beshimov.

SO'Z BOSHI

Ushbu ma'ruzalar matni pedagogika oliy o'quv yurtlarining "matematika-informatika" yo'nalishi o'quv rejasiga kiritilgan "Algebra va sonlar nazariyasi" fani bo'yicha birinchi kurs talabalariga birinchi semestr davomida o'qitiladigan mavzular uchun tuzilgan. Fanning modul texnologiyasi asosida tuzilgan va tasdiqlangan dasturiga ko'ra tayyorlangan mazkur ma'ruzalar matni 28 soatga rejalashtirilgan.

Ma'ruzalar matni "Algebra va sonlar nazariyasi" fanining "Matematik mantiq elementlari", "To'plamlar va munosabatlar", "Algebra, algebraik sistemalar", "Asosiy sonli sistemalar" boblarini qamrab olgan bo'lib, unda asosiy tushuncha va tasdiqlarni talabalar tomonidan mustaqil o'zlashtirilishiga yordam beruvchi ko'plab misollar keltirilgan. Keng qamrovli tanlangan misol va masalalarni tahlil qilish, o'rganish asosida talabalarda keltirilgan mavzular bo'yicha ma'lum bir bilim, malaka va ko'nikmalar shakllanadi. Fan bo'yicha rejalashtirilgan amaliy mashg'ulotlar davomida nazariy bilimlar mustahkamlanadi.

Tayyorlangan ma'ruzalar matni "Algebra va sonlar nazariyasi" fanini o'qitishda qo'llanilayotgan modul texnologiyasining asosini tashkil etgan talabalarining mustaqil ta'limini o'quv metodik adabiyotlar bilan ta'minlash masalasini hal etishda yordam beradi.

Mazkur ma'ruzalar matni matematika o'qitiladigan oliy o'quv yurtlarining bakalavrlar tayyorlash o'quv rejasiga kiritilgan "Algebra", "Algebra va sonlar nazariyasi", "Oliy matematika", "Matematika" fanlarini o'qitayotgan professor o'qituvchilarga, akademik litsey, kasb-hunar kollejlari matematika o'qituvchilariga, fanni o'rganayotgan talabalarga mo'ljallangan.

1- modul. Matematik mantiq elementlari.

1. Gap. Darak gap. Mulohaza.
2. Mulohazalar ustida mantiq amallari.
3. Mulohazaviy formula.
4. Aynan rost, aynan yolg'on, bajariluvchi formulalar.
5. Matematik mantiqning asosiy qonunlari.
6. Teng kuchli mulohazaviy formulalar.
7. Asosiy tengkuchliliklar.
8. Predikatlar.
9. Predikatning qiymatlar va rostlik sohalari.
10. Predikatlar ustida mantiq amallari.
11. Aynan rost, aynan yolg'on, bajariluvchi predikatlar.
12. Teng kuchli predikatlar.
13. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari.
14. 1, 2, 3 o'rinli predikatlardan kvantorlar yordamida mulohazalar hosil qilish.
15. Predikatli formulalar.
16. Asosiy predikatli mantiq qonunlari.
17. Mulohazalarni predikatlar tilida yozish.
18. Teorema va uning turlari.
19. Teoremlarni isbotlash usullari.

1- ma'ruza. Mulohaza. Mulohazalar ustida amallar

Reja:

1. Mulohaza.
2. Mulohazalar ustida mantiq amallari.
3. Mantiq amallarining bajarilish tartibi.
4. Mulohazalar algebrasi.

Asosiy tushunchalar: mulohaza, rost mulohaza, yolg'on mulohaza, kon'yunksiya, diz'yunksiya, implikasiya, ekvivalensiya, inkor, rostlik jadvali.

Adabiyotlar: [4]: 3-11; [3]: 1-bob, 1,2,3-§.[7]: 1-modul.

Mulohaza matematik mantiqning asosiy tushunchalaridan bo'lib, u rost yoki yolg'onligi bir qiymatli aniqlanadigan darak gapdir. Masalan, «Kvadrat to'g'ri to'rtburchakdir», «7-tub son», « $2 > 5$ » kabi tasdiqlar mulohazalar bo'lib, birinchi va ikkinchi mulohazalar rost, uchinchi mulohaza esa yolg'on mulohazadir.

Demak, biror bir gap mulohaza bo'lishi uchun, u albatta darak gap bo'lishi va rost yoki yolg'onligi bir qiymatli aniqlanishi shart.

Undov, so'roq gaplar mulohaza bo'la olmaydi. Rost mulohazaga 1 qiymatni, yolg'on mulohazaga 0 qiymatni mos qo'yamiz. Mulohazalarni lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilashni kelishib olamiz.

Quyida biz berilgan mulohazalardan mantiq amallari deb ataladigan amallar yordamida boshqa mulohazalar hosil qilish usullarini ko'rib chiqamiz.

1.1-ta'rif. Berilgan A mulohaza rost bo'lganda yolg'on, A mulohaza yolg'on bo'lganda rost bo'ladigan mulohaza A mulohazaning inkori deyiladi va $\neg A$ yoki $\bar{A}$ orqali belgilanadi.

Inkor amali quyidagi jadval yordamida to'liq aniqlanadi:

A	$\neg A$
1	0
0	1

Bunday jadvallarni rostlik jadvali deb ataymiz.

Masalan, A mulohaza - «7-tub son» degan rost mulohaza bo'lsin, u holda $\neg A$ - «7-tub son emas» degan yolg'on mulohazadan iborat.

1.2-ta'rif. A va V mulohazalar rost bo'lgandagina rost bo'lib, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan mulohaza A va V mulohazalarning kon'yunksiyasi deyiladi va $A \wedge V$ yoki $A \& V$ ko'rinishda belgilanadi

Kon'yunksiya amalining rostlik jadvali quyidagichadir:

A	V	$A \wedge V$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

1.3-ta'rif. A va V mulohazalar diz'yunksiyasi deb, A va V mulohazalarning ikkalasi ham yolg'on bo'lgandagina yolg'on, qolgan hollarda rost bo'ladigan $A \vee V$ mulohazaga aytiladi.

1.4-ta'rif. A va V mulohazalar implikasiyasi deb, A mulohaza rost va V mulohaza yolg'on bo'lgandagina yolg'on, qolgan hollarda rost bo'ladigan $A \rightarrow V$ mulohazaga aytiladi.

1.5-ta'rif. A va V mulohazalar ekvivalensiyasi deb, A va V mulohazalarning ikkalasi ham yolg'on yoki rost bo'lganda rost, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan $A \leftrightarrow V$ mulohazaga aytiladi

Bu amallar uchun rostlik jadvallarini keltiramiz:

A	V	$A \vee V$	$A \rightarrow V$	$A \leftrightarrow V$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	0	1	1

$\wedge$ - mantiqiy ko'paytirish, $\vee$ - mantiqiy qo'shish amallari deb yuritiladi. $A \wedge V$ mulohazani A va V ; $A \vee V$ mulohazani A yoki V ; $A \rightarrow V$ mulohazani A mulohazadan V mulohaza kelib chiqadi yoki agar A bo'lsa, u xolda V bo'ladi; $A \leftrightarrow V$ mulohazani A mulohazadan V mulohaza va V mulohazadan A mulohaza kelib chiqadi yoki A bo'ladi, faqat va faqat shu holda-ki, agar V bo'lsa, deb o'qiymiz.

Mulohazalar to'plamini M harfi bilan belgilaylik. U holda M to'plam, unda bajariladigan barcha $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ amallar bilan birgalikda mulohazalar algebrasi deb yuritiladi. Mulohazalar algebrasini qisqacha MA orqali belgilaymiz.

M to'plamda bajariladigan amallarni bajarilish tartibi quyidagicha: avval inkor amali bajariladi, agar inkor amali qavslardan tashqarida bo'lsa, u xolda qavs ichidagi amallar bajariladi. Keyin kon'yunksiya, undan so'ng diz'yunksiya, implikasiya va nihoyat ekvivalensiya amallari bajariladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Mulohaza deb qanday gapga aytiladi?
2. Har qanday o'tgan zamon darak gapi mulohaza bo'la oladimi? Kelasi zamon darak gaplari-chi?
3. Mulohazalar kon'yunksiyasi nima? Qanday o'qiladi? Rost kon'yunksiyaga, yolg'on kon'yunksiyaga misollar keltiring.
4. Mulohazalar diz'yunksiyasi nima? Qanday o'qiladi? Rost diz'yunksiyaga, yolg'on diz'yunksiyaga misollar keltiring.
5. Mulohazalar implikasiyasi nima? Qanday o'qiladi? Rost implikasiya, yolg'on implikasiyaga misollar keltiring.
6. Mulohazalar ekvivalensiyasi nima? Qanday o'qiladi? Rost ekvivalensiyaga, yolg'on ekvivalensiyaga misollar keltiring.
7. Mulohaza inkori nima? Qanday o'qiladi? Rost inkorga, yolg'on inkorgaga misollar keltiring.
8. Mantiqiy amallarning bajarilish tartibini ayting.
9. Rostlik jadvali nima?

2 - ma'ruza. Formula. Teng kuchli formulalar. Mantiq qonunlari.

Reja:

1. Mulohazaviy formula.
2. Formulaosti.
3. Aynan rost, aynan yolg'on, bajariluvchi formulalar.
4. Teng kuchli formulalar. Asosiy tengkuchliliklar.
5. Formulalarni teng kuchli almashtirishlar.

Asosiy tushunchalar: mulohazaviy formula, rostlik qiymatlar tizimi, formulaning rostlik jadvali, teng kuchli formulalar, aynan rost formula, tautologiya, mantiq qonuni, aynan yolg'on formula, ziddiyat, bajariluvchi formula.

Adabiyotlar: [5]: 9-20; [4]: 1-bob, 4,5,6-§.[7]: 1-modul.

Mulohazalar algebrasida formula tushunchasi quyidagicha kiritiladi:

2.1-ta'rif. 1) Har qanday mulohaza M ning formulasidir.

2) Agar A, V lar M ning formulasi bo'lsa, u holda

$(\neg A), (A \wedge V), (A \vee V), (A \rightarrow V), (A \leftrightarrow V)$ lar ham M ning formulasidir.

3) M ning formulalari 1),2)-punktlar yordamida hosil qilinadi.

2.2-misol. $A \wedge (A \rightarrow V), (A \vee V), (A \vee (A \wedge V) \rightarrow V)$ ifodalar formulalardir.

Formula yozuvini ixamlashtirish maqsadida amallarni $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ ketma-ketlik tartibida bajarishni, tashqi qavslarni tashlab yozishni, boshqa qavslarni esa amallarning bajarilish tartibiga mos ravishda tashlab yozishni kelishib olamiz.

Masalan, $((A \wedge V) \rightarrow V)$ formulani $A \wedge V \rightarrow V, ((A \wedge V) \vee (V \rightarrow S))$ formulani esa $A \wedge V \vee (V \rightarrow S)$ ko'rinishida yozamiz.

2.3-misol. Quyidagi formuladan qavslar o'rnini almashtirish yordamida turli formulalar hosil qiling: $\neg P \leftrightarrow \neg Q \vee R \wedge Q$.

Echish:

- | | |
|---|--|
| 1. $(\neg P \leftrightarrow \neg Q) \vee (R \wedge Q)$. | 10. $\neg(P \leftrightarrow \neg((Q \vee R) \wedge Q))$. |
| 2. $(\neg P \leftrightarrow (\neg Q \vee R)) \wedge Q$. | 11. $\neg((P \leftrightarrow \neg Q) \vee (R \wedge Q))$. |
| 3. $(\neg P \leftrightarrow \neg(Q \vee R)) \wedge Q$. | 12. $\neg((P \leftrightarrow \neg(Q \vee R)) \wedge Q)$. |
| 4. $\neg(P \leftrightarrow (\neg Q \vee R)) \wedge Q$. | 13. $\neg(P \leftrightarrow (\neg(Q \vee R) \wedge Q))$. |
| 5. $\neg((P \leftrightarrow \neg Q) \vee R) \wedge Q$. | 14. $\neg(P \leftrightarrow \neg Q) \vee (R \wedge Q)$. |
| 6. $\neg((P \leftrightarrow (\neg Q \vee R)) \wedge Q)$. | 15. $\neg P \leftrightarrow ((\neg Q \vee R) \wedge Q)$. |
| 7. $\neg(P \leftrightarrow ((\neg Q \vee R) \wedge Q))$. | 16. $\neg P \leftrightarrow (\neg(Q \vee R) \wedge Q)$. |
| 8. $\neg(P \leftrightarrow (\neg Q \vee (R \wedge Q)))$. | 17. $\neg(P \leftrightarrow \neg(Q \vee R)) \wedge Q$. |
| 9. $\neg(P \leftrightarrow \neg(Q \vee (R \wedge Q)))$. | |

M ning A formulasi faqat $A_1 \dots A_n$ mulohazalardan hosil qilingan bo'lsin, u holda A formulani $A(A_1 \dots A_n)$ ko'rinishida yozib olamiz va $A_1 \dots A_n$ mulohazalarni elementar mulohazalar deymiz. Har bir $A_k (k=1, n)$ mulohaza 0 yoki 1 qiymatlarni qabul qilishi mumkin. A_k mulohazaning qabul qiladigan qiymati i_k bo'lsin, u holda $(i_1, \dots, i_n)$ - n lik $A_1 \dots A_n$ mulohazalarning qabul qiladigan qiymatlari tizimi deyiladi.

$A(A_1 \dots A_n)$ formula tarkibiga kirgan $A_1 \dots A_n$ mulohazalarning barcha qiymatlari tizimi 2^n ta ekanligini ko'rish qiyin emas. Haqiqatdan $A(A_1)$ formuladagi A_1 mulohazaning qiymatalari tizimi (0), (1) dan iborat. $A(A_1, A_2)$

formuladagi A_1, A_2 - mulohazalarning qiymatlari tizimi $(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)$ lardan tashkil topgan 4 ta ya'ni, 2^2 ta tizimdan iborat. $A(A_1, A_2, A_3)$ formuladagi A_1, A_2, A_3 mulohazalarning barcha qiymatlari tizimini yozish uchun A_1, A_2 mulohazalarning barcha qiymatlari tizimiga 3-koordinata sifatida avval 1 qiymatni yozib chiqamiz, natijada $(1, 1, 1); (1, 0, 1); (0, 1, 1); (0, 0, 1)$ qiymatlar tizimiga ega bo'lamiz. Endi A_1, A_2 - mulohazalarning barcha qiymatlari tizimiga 3 – koordinata sifatida 0 qiymatni yozib chiqsak, $(1, 1, 0); (1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 0)$ qiymatlar tizimlarini hosil qilamiz. SHunday qilib $A(A_1, A_2, A_3)$ formuladagi A_1, A_2, A_3 mulohazalarning barcha qiymatlari tizimi 8 ta, ya'ni 2^3 ta ekan. Xuddi shunday usulda $A(A_1, A_2, A_3, A_4)$ formuladagi A_1, A_2, A_3, A_4 mulohazalarning qiymatlar tizimini ham yozib chiqishimiz mumkin va hokazo.

2.4-misol. $A \wedge V \rightarrow A \wedge S$ – formulaning rostlik jadvalini tuzaylik. Bu formulada faqat A, V, S mulohazalar qatnashib, ularning 8 ta qiymatlari tizimiga formulaning mos qiymatlari quyidagi jadvalda ko'rsatilgan:

A	V	S	$A \wedge V$	$A \wedge S$	$A \wedge V \rightarrow A \wedge S$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1

2.5-ta'rif. MA ning A va V formulalari tarkibiga kirgan barcha mulohazalar $A_1 \dots A_n$ lardan iborat bo'lsin. Agar $A_1 \dots A_n$ mulohazalarning barcha $(i_1, \dots, i_n)$ qiymatlari tizimida A va V formulalar bir xil qiymatlar qabul qilsalar, u holda bu formulalar teng kuchli formulalar deyiladi va $\mathcal{A} \equiv \mathcal{V}$ ko'rinishida belgilanadi.

2.6-misol. $\neg(A \wedge V) \equiv \neg A \vee \neg V$ tengkuchlilikni isbot qilish uchun rost jadvali tuzamiz:

A	V	$A \wedge V$	$\neg(A \wedge V)$	$\neg A$	$\neg V$	$\neg A \vee \neg V$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

Jadvaldan ko'rinib turibdiki $\neg(A \wedge V)$ va $\neg A \vee \neg V$ formulalar, bu formulalarning tarkibiga kirgan barcha mulohazalarning ixtiyoriy qiymatlari tizimida bir xil qiymatlar qabul qiladilar. Demak, $\neg(A \wedge V) \equiv \neg A \vee \neg V$.

2.7-ta'rif. Formulada qatnashgan mantiq amallari soni formulaning rangi deyiladi.

2.8-ta'rif. 1. A formula - A mulohazadan iborat bo'lsa, uning formulaosti faqat uning o'zidan iborat.

2. Agar formulaning ko'rinishi $A * V$ dan iborat bo'lsa, u holda uning formulaostilari A, V, $A * V$ lar hamda A va V larning barcha formulaostilaridan iborat bo'ladi. Bu erda $*$ - $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ amallaridan biri.

Agar formulaning ko'rinishi $\neg A$ bo'lsa, uning formulaostilari A formula, A formulaning barcha formulaostilari va $\neg A$ ning o'zidan iborat.

Boshqa formulaostilari yo'q.

2.9-misol. $(A \wedge V) \Rightarrow \neg A$ formulaning formulaostilari ta'rifga kûra =uyidagilardan iborat :

$A, V, \neg A, A \wedge V, (A \wedge V) \Rightarrow \neg A$.

2.10-ta'rif. Mulohazalar algebrasining A formulasi, shu formula tarkibiga kirgan barcha mulohazalarning qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlari tizimida rost bo'lsa, bu formula aynan rost formula yoki mantiq qonun yoki tovtologiya deyiladi.

2.11-misol. $\neg(A \wedge V) \rightarrow \neg A \vee \neg V$ - formula aynan rost formuladir. 2.5-misoldagi jadval yordamida bu formula A va V mulohazalarning ixtiyoriy qiymatlari tizimida rost qiymat qabul qilishini ko'rish qiyin emas.

2.12-ta'rif. MA ning $A(A_1 \dots A_n)$ formulasi $A_1 \dots A_n$ mulohazalarning kamida bitta qiymatlari tizimida rost qiymat qabul qilsa, bajariluvchi formula, barcha qiymatlari tizimida yolg'on qiymat qabul qilsa, aynan yolg'on formula yoki ziddiyat deyiladi.

2.13-misol. $A \vee V \vee S$ formula bajariluvchi formuladir, chunki A, V, S mulohazalarning (1, 0, 0) qiymatlari tizimida rost bo'ladi.

2.14-misol. $A \wedge \neg A$ - formula ziddiyatdir.

Haqiqatdan ham, A rost bo'lganda ham, A yolg'on bo'lganda ham bu formula yolg'on qiymat qabul qiladi.

2.15-teorema. MA ning A va V formulalari teng kuchli formulalar bo'lishi uchun $A \Leftrightarrow V$ formula aynan rost formula bo'lishi zarur va etarlidir.

Isbot. Haqiqatdan ham $A \equiv V$ bo'lsa, A va V formulalar tarkibiga kirgan barcha mulohazalarning barcha qiymatlari tizimida A va V formulalar bir xil qiymatlar qabul qiladilar, u holda $\Leftrightarrow$ amalining ta'rifiga ko'ra $A \Leftrightarrow V$ aynan rost bo'ladi. Aksincha, $A \Leftrightarrow V$ aynan rost bo'lsa, A va V formulalar $\Leftrightarrow$ amali ta'rifiga ko'ra, bu formulalarga kirgan barcha mulohazalarning barcha qiymatlari tizimida bir xil qiymatlar qabul qiladilar, ya'ni $A \equiv V$ bo'ladi

2.16. MA ning asosiy teng kuchli formulalari quyidagilardan iborat:

1. $A \wedge A \equiv A$
 2. $A \vee A \equiv A$
- } idempotentlik qonunlari.

3. $A \vee 1 \equiv 1$
4. $A \wedge 1 \equiv A$
5. $A \wedge 0 \equiv 0$
6. $A \vee 0 \equiv A$
7. $A \vee \bar{A} \equiv 1$ - uchinchisini inkor qilish qonuni.
8. $A \wedge \bar{A} \equiv 0$ - ziddiyatga keltirish qonuni.
9. $\bar{\bar{A}} \equiv A$ - qo'sh inkor qonuni.
10. $A \wedge (B \vee A) \equiv A$
11. $A \vee (B \wedge A) \equiv A$ } yutilish qonunlari.
12. $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
13. $A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B$
14. $\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$
15. $\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$ } De Morgan formulalari.
16. $A \wedge B \equiv \overline{\bar{A} \vee \bar{B}}$
17. $A \vee B \equiv \overline{\bar{A} \wedge \bar{B}}$
18. $A \wedge B \equiv B \wedge A$
19. $A \vee B \equiv B \vee A$ } kommutativlik qonunlari.
20. $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
21. $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ } assosiativlik qonunlari.
22. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
23. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ } distributivlik qonunlari.

2.17-izohlar. 1°-bu teng kuchlilikda 2.11-teoremaga asosan « $\equiv$ » teng kuchlilik belgisini $\leftrightarrow$ amal bilan almashtirsak, mantiq qonunlari hosil bo'ladi, shuning uchun teng kuchli formulalar berilganda mantiq qonuni berilgan deb hisoblashimiz mumkin.

2°. Mantiq qonunlarining hammasiga ham nom qo'yish mumkin. Lekin biz eng ko'p ishlatiladigan mantiq qonunlarining nomlarinigina yozdik.

YUqorida keltirilgan teng kuchliliklarning isboti rostlik jadvali yordamida bajariladi. Masalan, $A \rightarrow V \equiv \bar{A} \vee V$ tengkuchlilikni isbot qilaylik:

A	V	$A \rightarrow V$	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee V$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Jadvaldan A, V mulohazalarning barcha qiymatlar tizimida $A \rightarrow V$ va $\bar{A} \vee V$ formulalar bir xil qiymatlar qabul qilishi ko'rinib turibdi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Mulohazaviy formula ta'rifini ayting va misol keltiring.
2. Mantiqiy amallarni bajarilish tartibi qanday?
3. Mulohazalarning qabul qiladigan qiymatlar tizimi nima? Ularning soni nimaga bog'liq?
4. Formulaning rostlik jadvali qanday tuziladi?
5. Teng kuchli formulalarga ta'rif bering.
6. Formulalarning teng kuchli ekanligi qanday isbotlanadi?
7. Aynan rost, aynan yolg'on, bajariluvchi formulalar ta'riflarini ayting.
8. Tavtologiya, ziddiyat, mantiq qonuni ta'rifini ayting.
9. Asosiy tengkuchliliklardan qaysilarini eslab qoldingiz?
10. Teng kuchli formula bilan mantiq qonuni orasida qanday bog'lanish bor?

3- ma'ruza. Predikatlar. Kvantorlar. Predikatlar algebrasining formulasi va uning tadbiqi

Reja:

1. Predikat.
2. Predikatlar ustida mantiq amallari.
3. Kvantorlar.
4. Predikatli formulalar, turlari.
5. Teorema va uning turlari.
6. Matematik tasdiqlarni predikatlar tilida yozish.

Asosiy tushunchalar: Predikat, bir o'zgaruvchili predikatning qiymatlar sohasi, predikatning rostlik sohasi, predikatlar kon'yunksiyasi, predikatlar diz'yunksiyasi, predikatlar implikasiyasi, predikatlar ekvivalensiyasi, predikat inkori, umumiylik kvantori, mavjudlik kvantori, predikatli formula, teorema, to'g'ri teorema, to'g'riga teskari teorema, to'g'riga qarama-qarshi teorema, teskariga qarama-qarshi teorema, teorema isboti.

Adabiyotlar: [5]: 67-74; [4]: 3-bob, 1,2-§.[7]: 1-modul.

Predikatlar mantiqining asosiy tushunchalaridan biri predikat tushunchasi bilan tanishib chiqamiz. Birorta bo'sh bo'lmagan M to'plam berilgan bo'lsin. M to'plamning a elementi haqida aytilgan tasdiqni $R(a)$ orqali belgilaymiz. Misol uchun N – natural sonlar to'plami $R(a)$ « a -tub son» degan tasdiq bo'lsin, u holda

$R(1)$ -«1-tub son»- yolg'on mulohaza

$R(2)$ -«2-tub son»- rost mulohaza

$R(3)$ -«3-tub son»- rost mulohaza

$R(4)$ -«4-tub son»- yolg'on mulohaza va hokazo mulohazalarga ega bo'lamiz. Shunday qilib, M to'plamning a elementi haqida aytilgan tasdiq a ning o'rniga M

ning aniq bitta elementini qo'ysak mulohaza bo'lar ekan. Bunday tasdiqlarni bir o'zgaruvchili mulohazaviy formula yoki bir o'zgaruvchili predikat deb ataymiz. Shunga o'xshash ikki, uch o'zgaruvchili predikat tushunchalari kiritilishi mumkin.

Yuqoridagidek n ta $x_1, \dots, x_n$ o'zgaruvchilarga bog'liq $R(x_1, \dots, x_n)$ -tasdiq berilgan bo'lsin. U holda $x_1, \dots, x_n$ o'zgaruvchilarning mazmunga ega bo'ladigan qiymatlar to'plami, shu o'zgaruvchilarning yo'l qo'yiladigan qiymatlari sohasi deyiladi. Agar $R(x_1, \dots, x_n)$ tasdiq $x_1, \dots, x_n$ o'zgaruvchilarning yo'l qo'yilishi mumkin bo'lgan har qanday qiymatlarida mulohazaga aylansa, n - o'zgaruvchili predikat yoki n o'zgaruvchili mulohazaviy formula deyiladi. Bu erda $n = 0, 1, 2$ va hokazo manfiy bo'lmagan butun qiymatlar qabul qiladi. 0 - o'rinli predikat sifatida mulohaza tushuniladi.

3.1-misol. Natural sonlar to'plamida $R(a, b)$ –predikat $a \geq b$ tengsizlikni bildirsin, u holda $R(1, 0) = 1, R(1, 2) = 0, \dots, R(2, 1) = 1, R(2, 2) = 1, R(2, 3) = 0$ va hokazo bo'lishini tushunish qiyin emas.

Predikatlarni P, Q yoki $R(x), R(x, u), A(x, u, z)$ ko'rinishida belgilashni kelishib olamiz.

Bir o'rinli predikatlar bilan to'liqroq tanishib chiqamiz. Predikatlar ustida ham mulohazalar ustida bajarilgan $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ amallarni kiritishimiz mumkin.

3.2-ta'rif. $M \neq \emptyset$ to'plamda aniqlangan bir o'rinli $R(x)$ - predikat berilgan bo'lsin, u holda $R(x)$ - predikatning inkori deb har qanday $x \in M$ element uchun $R(x)$ -predikat rost bo'lganda yolg'on bo'ladigan; $R(x)$ yolg'on bo'lganda rost bo'ladigan $\neg R(x)$ predikatga aytiladi. Ya'ni, M ning ixtiyoriy elementi uchun $(\neg R)(x) = \neg(R(x))$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Xuddi shunday $M \neq \emptyset$ to'plamda aniqlangan $P(x)$ va $Q(x)$ bir o'rinli predikatlar uchun $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ amallari quyidagi tengliklar yordamida aniqlanadi:

$$(R \wedge Q)(x) = R(x) \wedge Q(x);$$

$$(R \vee Q)(x) = R(x) \vee Q(x);$$

$$(R \rightarrow Q)(x) = R(x) \rightarrow Q(x);$$

$$(R \leftrightarrow Q)(x) = R(x) \leftrightarrow Q(x).$$

3.3-misol. N – natural sonlar to'plamida aniqlangan $R(x)$ -« x -toq son»; $Q(x)$ -« x birorta natural sonning kvadratiga teng»-predikatlarni qaraylik. U holda $x=1, 4, 5, 9$ qiymatlar uchun $R \wedge Q, R \vee Q$ predikatlarining qiymatlari quyidagicha bo'ladi:

$$(R \wedge Q)(1) = R(1) \wedge Q(1) = 1 \wedge 1 = 1$$

$$(R \wedge Q)(2) = R(2) \wedge Q(2) = 0 \wedge 0 = 0$$

$$(R \wedge Q)(3) = R(3) \wedge Q(3) = 1 \wedge 0 = 0$$

$$(R \wedge Q)(5) = R(5) \wedge Q(5) = 1 \wedge 0 = 0$$

$$(R \wedge Q)(9) = R(9) \wedge Q(9) = 1 \wedge 1 = 1$$

$$(R \vee Q)(1) = R(1) \vee Q(1) = 1 \vee 1 = 1$$

$$(R \vee Q)(2) = R(2) \vee Q(2) = 0 \vee 0 = 0$$

$$(R \vee Q)(3) = R(3) \vee Q(3) = 1 \vee 0 = 1$$

$$(R \vee Q)(5) = R(5) \vee Q(5) = 1 \vee 0 = 1$$

$$(R \vee Q)(9) = R(9) \vee Q(9) = 1 \vee 1 = 1$$

Shunga o'xshash $R \rightarrow Q$, $R \leftrightarrow Q$, $\neg R$, $\neg Q$ predikatlarning qiymatlarini hisoblab chiqish mumkin.

3.4-ta'rif. $M \neq \emptyset$ to'plamda aniqlangan $R(x)$ predikat berilgan bo'lsin, u holda $R(x)$ predikatni rost mulohazaga aylantiradigan x ning M to'plamga tegishli barcha elementlarini E_r orqali belgilaymiz. E_r - $R(x)$ predikatning rostlik sohasi deyiladi.

Rostlik sohasi quyidagi xossalarga ega.

$$1^\circ. E_{\neg p} = M \setminus E_p$$

$$2^\circ. E_{p \wedge q} = E_p \cap E_q$$

$$3^\circ. E_{p \vee q} = E_p \cup E_q$$

$$4^\circ. E_{p \rightarrow q} = E_{\neg p} \cup E_q$$

M to'plamda aniqlangan bir o'zgaruvchili $R(x)$ -predikat berilgan bo'lsin. U holda $\forall x R(x)$ ifoda, M to'plamning barcha elementlari uchun $R(x)$ rost bo'lganda rost, M to'plamning kamida bitta x_0 elementi uchun $R(x_0)$ yolg'on bo'lganda yolg'on bo'ladigan mulohazadir. Bu erdagi $\forall$ belgi umumiylik kvantorini bildiradi.

Endi umumiylik kvantorining ko'p o'zgaruvchili predikatlarga qo'llanilishi bilan tanishib chiqamiz. M to'plamda aniqlangan $R(x_1, \dots, x_n)$ predikat berilgan bo'lsin. U holda $\forall x_1 R(x_1, \dots, x_n)$ -($n-1$) o'zgaruvchili predikatdir. Haqiqatdan $x_2, \dots, x_n$ lar o'rniga M to'plamning $a_2, \dots, a_{n-1}$ elementlarini qo'ysak, $\forall x_1 R(x_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ - mulohazaga ega bo'lamiz. Bu mulohaza yo rost, yo yolg'on qiymatni qabul qiladi.

3.5-misol. Natural sonlar to'plamida aniqlangan « $x:u$ », ya'ni, « x natural son u natural songa qoldiqsiz bo'linadi» degan predikatni $R(x,u)$ - deb belgilaylik. U holda $\forall x R(x,u)$ - ifoda ixtiyoriy natual son u natural songa bo'linadi, degan bir o'zgaruvchili predikatni bildiradi. Agar $u=1$ bo'lsa, $\forall x R(x,1) = 1$, $u = 2, 3, \dots$ bo'lsa, $\forall x R(x,2) = 0$, $\forall x R(x,3) = 0, \dots$ bo'ladi.

Kelgusida $\forall x_1 R(x_1, \dots, x_n)$ ifoda «barcha x_1 lar uchun $R(x_1, \dots, x_n)$ », yoki «ixtiyoriy x_1 uchun $R(x_1, \dots, x_n)$ » deb o'qiladi. $\forall x_1 R(x_1, \dots, x_n)$ ifodadagi x_1 o'zgaruvchi bog'liq o'zgaruvchi, $x_2, \dots, x_n$ o'zgaruvchilar erkin o'zgaruvchilar deyiladi.

Yana bitta kvantor bilan tanishib chiqamiz. M to'plamda aniqlangan bir o'zgaruvchili $R(x)$ predikat berilgan bo'lsin. U holda $\exists x R(x)$ mulohaza bo'lib, M to'plamning kamida bitta x_0 elementi uchun $R(x_0)$ rost bo'lganda rost qolgan hollarda, ya'ni M to'plamning barcha elementlari uchun $R(x)$ - yolg'on bo'lganda yolg'on bo'ladigan mulohazadir.

M to'plamda aniqlangan $R(x_1, \dots, x_n)$ predikat berilgan bo'lsin, u holda $\exists x_1 R(x_1, \dots, x_n)$ - ifoda $n-1$ o'zgaruvchili predikat bo'lishini ko'rib chiqamiz.

Haqiqatdan, $x_2, \dots, x_n$ o'zgaruvchilar M to'plamdan olingan $a_2, \dots, a_{n-1}$ qiymatlarni qabul qilsin, u holda $\exists x_1 R(x_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ ifodalar x_1 ning M to'plamdan olingan kamida bitta qiymatida rost bo'lsa rost, aks holda yolg'on bo'ladigan mulohazadir. Ko'rinib turibdiki, $\exists x_1 R(x_1, \dots, x_n)$ - predikat $x_2, \dots, x_n$ o'zgaruvchilarning M dagi qiymatlari bilan aniqlanib x_1 ga bog'liq emas ekan. Ya'ni $n-1$ o'zgaruvchili predikat ekan.

$\exists x_1 R(x_1, \dots, x_n)$ - ifoda «Shunday x_1 mavjud-ki, $R(x_1, \dots, x_n)$ bo'ladi» deb o'qiladi. $\exists$ - simvol esa mavjudlik kvantori deyiladi.

3.6-misol. Natural sonlar to'plamida aniqlangan « $x^2+u^2=16$ » - ikki o'zgaruvchili $R(x, u)$ predikat berilgan bo'lsin, u holda:

$$\exists x R(x, 1) = 0; \exists x R(x, 2) = 0; \exists x R(x, 3) = 0;$$

$$\exists x R(x, 4) = 1; \exists x R(x, 5) = 0, \dots, \text{va hokazo.}$$

$\exists x_1 R(x_1, \dots, x_n)$ predikatda x_1 o'zgaruvchi bog'liq o'zgaruvchi, qolgan $x_2, \dots, x_n$ lar erkin o'zgaruvchilar deyiladi.

Amaliyotda predikatlarga kvantorlar ketma-ket bir necha marta qo'llanish hollari uchraydi. Masalan, $\forall x \exists u R(x, u)$ ko'rinishdagi mulohazani $\forall x (\exists u R(x, u))$ deb tushunish kerak.

3.7-misol. $R(x, u)$ - butun sonlar to'plami Z da aniqlangan « $x+u>0$ » mazmunidagi predikat bo'lsin, u holda

$\forall x \forall u R(x, u)$ - «ixtiyoriy ikkita butun son yig'inidisi musbat bo'ladi» - yolg'on mulohaza;

$\forall x \exists u R(x, u)$ -«har qanday butun son x uchun shunday u butun son mavjud bo'lib ulaning yig'inidisi musbat» - rost mulohaza;

$\exists x \forall u R(x, u)$ -«shunday x butun son mavjud bo'lib, uning ixtiyoriy u butun son bilan yig'idisi musbat» - yolg'on mulohaza;

$\exists x \exists u R(x, u)$ -«shunday x va u butun sonlar mavjud-ki, ularning yig'inidisi musbat» - rost mulohaza bo'ladi.

Bizga $R(x)$ $R(x, u) \dots Q(x_1, \dots, x_n)$ A , V ko'rinishdagi predikatlar berilgan bo'lsin. Har qanday $n(n=0, 1, 2)$ o'rinli predikatni elementar formula deb ataymiz. Xususan har qanday mulohaza ham elementar formuladir.

3.8-ta'rif. 1) har qanday elementar formula predikatlar mantiqining formulasidir;

2) agar A va V lar predikatlar mantiqining formulalari bo'lsa, u holda $(\neg A)$, $(A \wedge V)$, $(A \vee V)$, $(A \leftrightarrow V)$, $(\exists x A)$, $(\forall x A)$ ifodalar ham predikatlar mantiqining formulalaridir;

3) boshqa usul bilan predikatlar mantiqining formulalarini hosil qilib bo'lmaydi.

Formula ifodasini ixchamlashtirish tartibi mulohazalar algebrasidek, ya'ni tashqi qavslarni tashlab yozamiz, qolgan qavslar amallarning bajarilish tartibiga mos ravishda tashlab yoziladi. Undan tashqari har doim avval kvantor bilan bog'lash bajariladi deb hisoblaymiz, masalan, $(\forall x A(x)) \rightarrow V$ ko'rinishdagi formulani $\forall x A(x) \rightarrow V$ ko'rinishda yozish mumkin.

Predikatlar mantiqining A formulasi tarkibidagi elementar formulalarni, har qanday predikatlar bilan almashtirish natijasida aynan rost predikat hosil bo'lsa

bunday formula aynan rost formula yoki mantiq qonun yo umumqiymatli formula deyiladi. Predikatlar algebrasining ikkita formulasi ularga kirgan barcha predikatlarni har qanday predikatlar bilan almashtirganimizda bir xil qiymatlar qabul qilsalar, ular teng kuchli deyiladi. A va V formulalar teng kuchliligi $A \equiv V$ ko'rinishida belgilanadi.

Mulohazalar algebrasidagi asosiy teng kuchliliklarda mulohazalarni predikatlar mantiqining formulalari bilan almashtirib predikatlar mantiqining teng kuchli formulalarini hosil qilishimiz mumkin, masalan, $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$ teng kuchlilikdagi A, V mulohazalarni predikatlar mantiqining mos ravishda A va V formulalari bilan almashtirsak $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$ teng kuchlilikka ega bo'lamiz, xususan $\overline{F(x) \wedge F(y)} \equiv \overline{F(x)} \vee \overline{F(y)}$

Bu teng kuchliliklardan tashqari predikatlar mantiqning o'zigagina xos bo'lgan teng kuchli formulalar ham bor. Shunday teng kuchli formulalar namunalarini keltiramiz:

1. $\neg(\forall x R(x)) \equiv \exists x \neg R(x)$.
2. $\neg(\exists x R(x)) \equiv \forall x \neg R(x)$.
3. $\forall x R(x) \equiv \neg(\exists x \neg R(x))$.
4. $\exists x R(x) \equiv \neg(\forall x \neg R(x))$.
5. $\exists x A(x) \vee \exists x V(x) \equiv \exists x (A(x) \vee V(x))$.
6. $\forall x A(x) \wedge \forall x V(x) \equiv \forall x (A(x) \wedge V(x))$.

3.9-misol. $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \equiv \forall x (P(x) \wedge Q(x))$ tengkuchlilikni isbotlang.

Agar $R(x)$ va $Q(x)$ predikatlar bir vaqtda aynan rost bo'lsalar, u holda

$R(x) \wedge Q(x)$ predikat ham aynan rost bo'ladi. Bundan esa

$\forall x R(x)$, $\forall x Q(x)$, $\forall x (R(x) \wedge Q(x))$ mulohazalarning rost qiymat qabul qilishi kelib chiqadi. Ya'ni bu holda tengkuchlilikning ikkala tomoni «rost» qiymat qabul qiladi.

Faraz qilamiz berilgan $R(x)$ va $Q(x)$ predikatlarining kamida bittasi masalan, $R(x)$ aynan rost bo'lmasin. U holda $R(x) \wedge Q(x)$ predikat ham aynan rost bo'lmaydi, bundan esa $\forall x R(x)$, $\forall x R(x) \wedge \forall x Q(x)$, $\forall x (R(x) \wedge Q(x))$ mulohazalar yolg'on bo'ladi. YA'ni bu holda ham tengkuchlilikning ikkala tomoni bir xil (yolg'on) qiymat qabul qiladi.

Mulohazalar algebrasidagidek predikatlar mantiqining teng kuchli formulalarida « $\equiv$ » tengkuchlilik belgisini « $\Leftrightarrow$ » ekvivalensiya amali bilan almashtirsak, aynan rost formulalar, ya'ni mantiq qonunlari hosil bo'ladi. Masalan, $\neg(\forall x R(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg R(x)$; $\neg(\exists x R(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg R(x)$ - formulalar mantiq qonunlardir.

Matematik mantiq elementlari mavzuning o'qitilishidan qo'yilgan asosiy maqsad–matematik mantiq fanining algebra, geometriya, matematik tahlil kabi bir qancha matematik fanlarga tadbiqining eng sodda ko'rinishlaridan biri-matematik jumlar (aksioma, teorema, ta'rif,...)larni mulohazalar va predikatlar algebralari tili orqali ifodalashga o'quvchilarni o'rgatishdir.

Predikatli formulalarga kvantorlarni qo'llash natijasida hosil qilingan mulohazaviy formulalar yordamida ta'rif, teoremlarni ifodalashga bir nechta misollar ko'rib chiqamiz.

3.10-misol. Natural sonlar to'plamida qaralgan tub son tushunchasi uchun quyidagi formulani keltirish mumkin :

$$(\forall n \in \mathbb{N})((n - \text{tub son}) \Leftrightarrow (n \neq 1 \wedge \forall p : p \Rightarrow p=1 \vee p=n)).$$

Yoki quyidagi belgilashlarni kiritsak :

$A(x) - \langle x\text{-tub son} \rangle$, $V(x) - \langle x \neq 1 \rangle$, $S(x) - \langle \forall p : p \Rightarrow p=1 \vee p=x \rangle$, $D(x) - \langle x=1 \rangle$, $P(x) - \langle x=p \rangle$, u holda yuqoridagi formulani quyidagicha ifodalash mumkin :

$$(\forall x \in \mathbb{N}) (A(x) \Leftrightarrow V(x) \wedge S(x) \Rightarrow D(x) \vee P(x)).$$

3.11-misol. Sonli ketma-ketlik limitini ifodalovchi formula :

$$(a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n) \Leftrightarrow \forall (\varepsilon > 0 \wedge \varepsilon \in \mathbb{R}) \exists (n_0 \in \mathbb{N}) \forall (n \in \mathbb{N}) ((n \geq n_0) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

3.12-misol. Monoton o'suvchi funksiyani ifodalovchi formula:

(E to'plamda aniqlangan $u=f(x)$ funksiya-o'suvchi) $\Leftrightarrow$

$$\forall (x_1 \in E) \forall (x_2 \in E) ((x_1 < x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$

Teorema va uning turlari. Har qanday teorema shart va natijadan iborat. Agar A teoremaning sharti V esa uning hullosasi bo'lsa, u holda teoremani $A \Rightarrow V$ (1) ko'rinishda yozishimiz mumkin.

$V \Rightarrow A$ (2) teoreмага (1) teoreмага teskari teorema deyiladi.

$\neg A \Rightarrow \neg V$ (3) teoreмага (1) teoreмага qarama-qarshi teorema deyiladi.

$\neg V \Rightarrow \neg A$ (4) teoreмага berilgan (1) teoremaning teskarisiga qarama-qarshi (yoki berilgan (1) teoremaning qarama-qarshisiga teskari) teorema deyiladi.

Rostlik jadvallari orqali $A \Rightarrow V \equiv \neg V \Rightarrow \neg A$ va $V \Rightarrow A \equiv \neg A \Rightarrow \neg V$ tengkuchliliklarni isbot qilib, quyidagi xulosani chiqaramiz:

$A \Rightarrow V$ teorema o'rniga $\neg V \Rightarrow \neg A$ teoremani isbot qilib, $A \Rightarrow V$ rost, ya'ni to'g'ri deb aytishimiz mumkin.

Isbot tushunchasi. $A_1, A_2, \dots, A_n$ (1) mulohazalar berilgan bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsa:

1. A_1 - aksioma yoki avval isbot qilingan mulohaza bo'lsin.

2. Har bir A_i , $i \geq 2$ yoki o'zidan oldingi mulohazadan keltirib chiqarilsin, yoki avval isbot qilingan mulohaza bo'lsin.

U holda (1) ketma-ketlikni biz A_n mulohazaning isboti deymiz.

Isbot qilish usullari. Isbot qilish usullarini shartli ravishda ikki turga bo'lish mumkin:

1. Bevosita - to'g'ridan-to'g'ri isbot qilish.

2. Mantiq qonunlari (isbot qilish sxemalari) orqali isbot qilish.

Teorema shartining rostligidan, xulosaning rostligini to'g'ridan-to'g'ri keltirib chiqarishni bevosita isbot qilish deb tushunamiz. Mantiq qonunlari orqali isbot qilishga, teskarisidan isbot qilish, uchinchisini inkor qilish qonuni orqali isbot qilish, induksiya yordamida isbot qilish va h.k.lar kiradi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Predikatga ta'rif bering.
2. Predikatning qiymatlar sohasi, rostlik sohasi nima? Misollar yordamida tushuntiring
3. Predikatlar diz'yunksiyasi, kon'yunksiyasi, implikasiyasi, ekvivalentsiyasiga misollar keltiring.
4. Mantiq amallarini qo'llash natijasida hosil bo'ladigan predikat o'zgaruvchilarining soni haqida nima deyish mumkin?
5. Umumiylik va mavjudlik kvantorlarini qo'llashga misollar keltiring.
6. Predikatli formula qanday hosil qilinadi?
7. Predikatli formulaning qanday turlarini bilasiz?
8. Teoremaning qanday turlarini bilasiz?
9. Teoremlarni isbotlash usullari qanday?
10. Matematik tasdiqlarni predikatlar tilida ifodalashga misol keltiring.

2- modul. To'plamlar va munosabatlar

1. To'plam, to'plam elementi. Qism to'plam.
2. Bo'sh to'plam. Universal to'plam. Ikki to'plamning tengligi.
3. To'plamlar ustida amallar.
4. To'plamlar ustida amallarning asosiy xossalari.
5. Eyler-Venn diagrammalari.
6. Tartiblangan juftlik. Ikki to'plamning to'g'ri ko'paytmasi.
7. Uzunligi n ga teng kortejlar. n ta to'plam to'g'ri ko'paytmasi.
8. Binar va n - ar munosabatlar.
9. Binar munosabatning aniqlanish va qiymatlar sohalari.
10. Binar munosabatlar tengligi, kompozitsiyasi va uning xossalari.
11. Binar munosabat inversiyasi, kengaytmasi.
12. Binar munosabatlarning turlari.
13. Binar munosabatlarni graflar yordamida tasvirlash.
14. Akslantirishlar va ular kompozitsiyasi.
15. In'ektiv, syur'ektiv, teskarilantiruvchi akslantirishlar.
16. Ekvivalentlik munosabati.
17. Faktor-to'plam.
18. Tarib munosabati va uning turlari.

4- ma'ruza. To'plam. To'plamlar ustida amallar va ularning xossalari. Eyler-Venn diagrammalari

Reja:

1. To'plam. To'plam elementi.
2. To'plamlarning tengligi.
3. Qismto'plam, universal to'plam.
4. To'plamlar ustida amallar, xossalari.
5. To'plam to'ldiruvchisi.
6. Eyler-Venn diagrammalari.

Asosiy tushunchalar: To'plam, to'plam elementi, to'plamlarning tengligi, qismto'plam, bo'sh to'plam, universal to'plam, to'plamlar birlashmasi, to'plamlar kesishmasi, to'plamlar ayirmasi, to'plamlar simmetrik ayirmasi, idempotentlik xossasi, kommutativ amal, assosiativ amal, distributivlik xossasi, to'plam to'ldiruvchisi, Eyler-Venn diagrammalari.

Adabiyotlar:[1]: 1-qism; [6]: 39-48; [7]: 1-modul.

To'plam tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, misollar yordamida tushuntiriladi.

To'plam ixtiyoriy tabiatli ob'ektlardan tashkil topgan bo'lishi mumkin, masalan, Osiyo qit'asidagi barcha daryolar yoki Toshkent shahridagi barcha ko'chalar to'plam bo'la oladi. To'plamni tashkil qiluvchi ob'ektlar to'plamining elementlari deyiladi. To'plam lotin alifbosining bosh harflari A, V, S,... lar orqali belgilanadi.

4.1-misollar: Barcha natural sonlarni $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ ko'rinishida yozib, natural sonlar to'plami deb ayta olamiz.

$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ to'plam butun sonlar to'plamini bildiradi.

Q-orqali barcha rasional sonlar to'plamini bildiradi, ya'ni $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$, $p, q \in Z$

kasr ko'rinishida yozish mumkin bo'lgan sonlarni belgilaymiz.

R-orqali esa barcha xaqiqiy sonlar to'plamini belgilaymiz.

a ob'ekt A to'plamning elementi bo'lsa, $a \in A$ deb belgilaymiz. Aksincha a ob'ekt A ning elementi bo'lmasa, $a \notin A$ yoki $a \bar{\in} A$ orqali belgilanadi. Agar A to'plamning xar bir elementi V to'plamning ham elementi bo'lsa, $A \subset B$ orqali belgilanadi va A to'plam V to'plamning to'plamostisi deyiladi.

Bir xil elementlardan tashkil topgan to'plamlar teng deyiladi. A, V to'plamlar teng bo'lsa, $A=V$ ko'rinishda belgilaymiz. A va V to'plamlarning teng bo'lishi uchun $A \subset B$ va $B \subset A$ bo'lishi zarur va etarli ekanligini ko'rish qiyin emas. Bitta ham elementi yo'q to'plamni bo'sh to'plam deb ataymiz, ya'ni $\emptyset$ orqali belgilaymiz.

4.2-ta'rif. A va V to'plamlarning kamida biriga tegishli bo'lgan barcha elementlardan tashkil topgan $A \cup B$ to'plam A va V to'plamlarning birlashmasi yoki yig'indisi deyiladi.

4.3-misol. $A = \{1, 2, O, \Delta, \diamond\}$, $B = \{1, O, \Delta, 8, 9\}$ to'plamlarning birlashmasi $A \cup B = \{1, 2, O, \Delta, \diamond, 8, 9\}$ bo'lishi ravshan.

4.4-ta'rif. A va V to'plamlarning kesishmasi yoki ko'paytmasi deb, A va V to'plamlarning barcha umumiy, ya'ni A ga ham, V ga ham tegishli elementlardan tashkil topgan $A \cap B$ to'plamga aytiladi.

4.3-misoldagi A va B lar uchun $A \cap B = \{1, O, \Delta\}$ bo'ladi.

4.5-ta'rif. A va V to'plamlarning ayirmasi deb, A to'plamning V to'plamga kirmagan barcha elementlardan tashkil topgan to'plamga aytiladi. A va V to'plamlarning ayirmasi $A \setminus V$ ko'rinishida belgilanadi.

4.3-misoldagi A va B to'plamlar uchun $A \setminus B = \{2, \diamond\}$, B va A to'plamlar uchun esa $B \setminus A = \{8, 9\}$.

$(A \setminus V) \cup (V \setminus A)$ to'plam A va V to'plamlarning simmetrik ayirmasi deyiladi va $A \Delta B$ orqali belgilanadi. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ bo'lishini isbot qilishni o'quvchilarga havola etamiz.

4.6-ta'rif. Agar $A \subset B$ bo'lsa, $B \setminus A$ to'plam A to'plamning B to'plamgacha to'ldiruvchi to'plam deyiladi va $\subset A$ yoki A' orqali belgilanadi. Shunday qilib, $\subset A = B \setminus A$.

Matematikaning ba'zi sohalarida faqatgina birorta to'plam va uning barcha to'plamostilari bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Masalan, planimetriya tekislik va uning barcha to'plamostilari bilan, stereometriya esa fazo va uning barcha to'plamostilari bilan ish ko'radi.

Agar biror E to'plam va faqat uning to'plamostilari bilan ish ko'rsak, bunday E to'plamni universal to'plam deb ataymiz. Universal to'plamning barcha to'plamostilari to'plamini $\beta(E)$ orqali belgilaymiz.

To'plamlar ustida bajariladigan algebraik amallar quyidagi xossalarga ega.

1^o. $A \cap A = A$ kesishmaning idempotentligi;

2^o. $A \cup A = A$ birlashmaning idempotentligi;

3^o. $A \cap B = B \cap A$
 $A \cup B = B \cup A$ kesishma va birlashmaning kommutativligi;

4^o. 2^o. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ kesishma va birlashmaning assosiativligi

5^o. Kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivligi:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

6^o. Birlashmaning kesishmaga nisbatan distributivligi:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

7^o. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C);$

$A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n \cup \dots$ birlashmani $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n \cap \dots$ kesishmani $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ deb belgilab olsak, yana quyidagi xossalarga ega bo'lamiz. $A_i, i = 1 \dots$ to'plamlar birorta X to'plamning to'plamostilari bo'lsin, u holda

$$8^\circ. X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i);$$

$$9^\circ. X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i).$$

Bu tengliklarni isbotlash uchun, tengliklarning chap tomonidagi to'plamga tegishli ixtiyoriy element, tenglikning o'ng tomonidagi to'plamga tegishli va to'plamning chap tomonidagi to'plamga tegishli ixtiyoriy element chap tomonidagi to'plamga ham tegishli bo'lishini ko'rsatish etarli.

4.7-misol. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; ni isbotlang.

$\forall x \in A \cap (B \cup C)$ bo'lsin, u holda kesishmaning ta'rifiga asosan, $\forall x \in A$ va $\forall x \in B \cup C$ bo'ladi. To'plamlar birlashmasining ta'rifiga asosan $x \in B$ yoki $x \in C$ bo'ladi. Demak, $x \in A$ va $x \in B$ yoki $x \in A$ va $x \in C$ bo'ladi. Bu esa $x \in A \cap B$ yoki $x \in A \cap C$ degani. Nihoyat oxirgi munosabat $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ bo'lishini bildiradi. SHunday qilib, $\forall x \in A \cap (B \cup C)$ bo'lsa, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ bo'lar ekan. Endi $\forall x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ bo'lsin, u holda $\cup$ - amalining ta'rifiga ko'ra $\forall x \in A \cap B$ yoki $x \in A \cap C$ bo'ladi. $\cap$ - amalining ta'rifiga ko'ra $x \in A$ va $x \in B$ yoki $x \in C$ bo'ladi, u holda $x \in A \cap (B \cup C)$.

4.8-misol. $(A \setminus V) \setminus S = (A \setminus S) \setminus V$ tenglikni isbotlang.

1. $\forall x \in ((A \setminus V) \setminus S) \Rightarrow x \in (A \setminus V) \wedge x \notin S \Rightarrow x \in A \wedge x \notin V \wedge x \notin S \Rightarrow x \in (A \setminus S) \wedge x \notin V \Rightarrow x \in ((A \setminus S) \setminus V)$;
2. $\forall u \in ((A \setminus S) \setminus V) \Rightarrow u \in (A \setminus S) \wedge u \notin V \Rightarrow u \in A \wedge u \notin S \wedge u \notin V \Rightarrow u \in (A \setminus V) \wedge u \notin S \Rightarrow u \in ((A \setminus V) \setminus S)$.

4.9-misol. 8° - xossaning isboti: $\forall x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ bo'lsin, u holda $x \in X$

va $x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Demak, $x \notin A_1$ va $x \notin A_2$ va... va $x \notin A_n, \dots$. Bundan $x \in X \setminus A_1$ va

$x \in X \setminus A_2$ va ..., $x \in X \setminus A_n$ va hokazo, ya'ni $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X \setminus A_i$ kelib chiqadi.

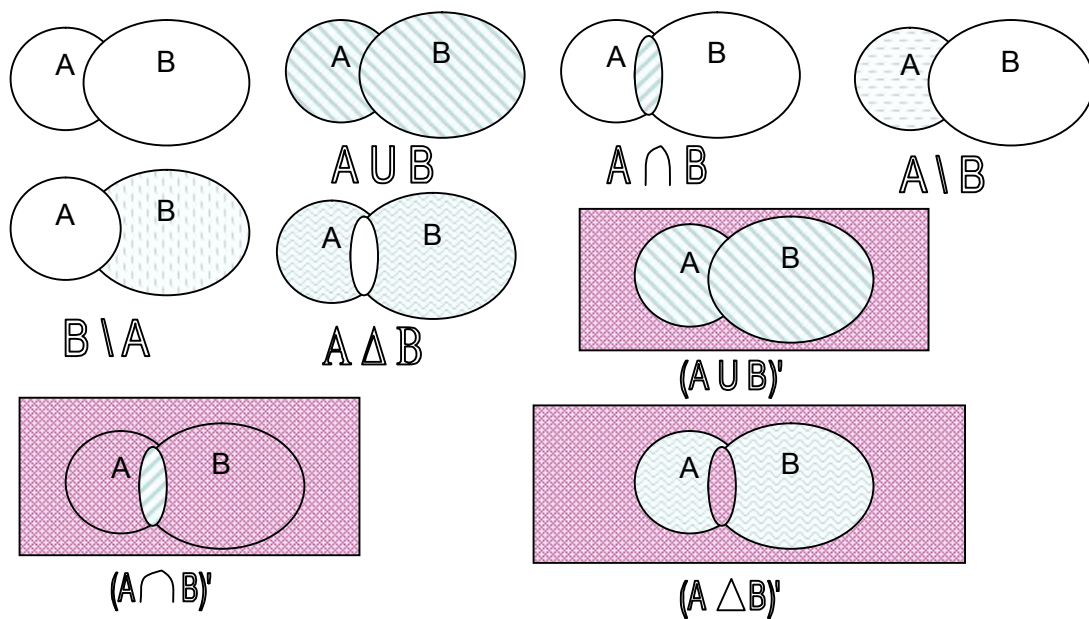
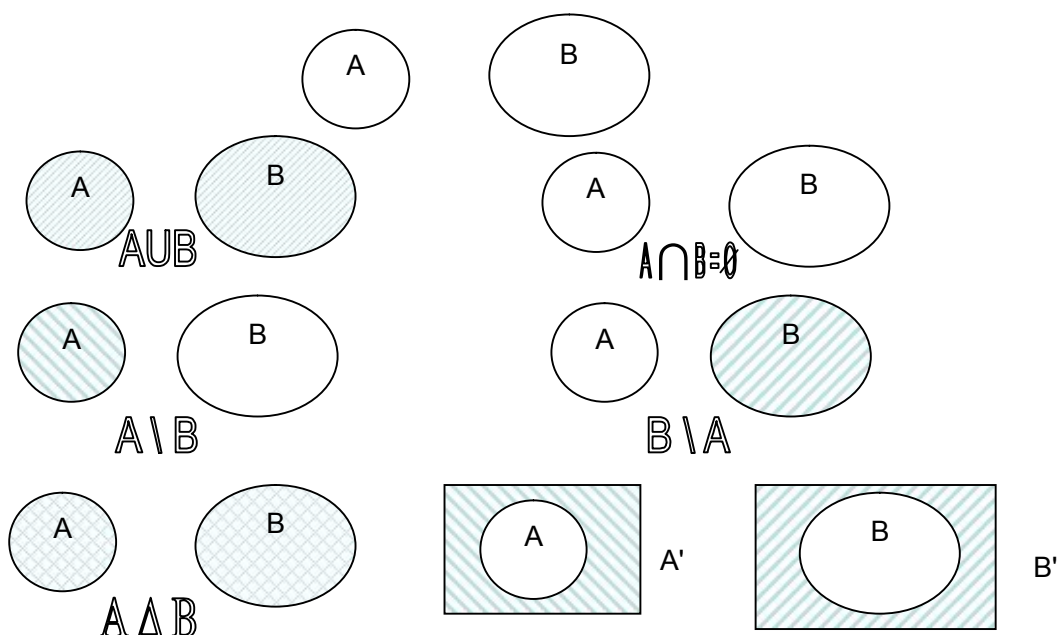
Aksincha, $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X \setminus A_i$ bo'lsin, u holda $\cap$ - amalining ta'rifiga ko'ra $x \in X \setminus A_1$

va $x \in X \setminus A_2$ va ..., $x \in X \setminus A_n$ va hokazo. to'plamlar ayirmasi amalning ta'rifiga

ko'ra $x \in X$ $x \notin A_1$ va $x \notin A_2$ va... va $x \notin A_n, \dots$ bo'ladi. Demak $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X \setminus A_i$.

To'plamlar ustida amallarni Eyler-Venn diagrammalari deb ataladigan quyidagi shakllar yordamida ifoda qilish, amallarning xossalarni isbot qilishni ancha engillashtiradi.

Universal to'plam to'g'ri to'rt burchak shaklida, uning to'plamostilarini to'g'ri to'rtburchak ichidagi doiralar orqali ifoda qilinadi. U xolda, ikki to'plam birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi, to'lduruvchi to'plamlar, ikki to'plamning simmetrik ayirmasi mos ravishda quyidagicha ifodalanadi:



Takrorlash uchun savollar:

1. To'plam tushunchasiga misollar keltiring.
2. To'plam elementi deb nimaga aytiladi?
3. Qism to'plam ta'rifini ayting.
4. Teng to'plamlar tushunchasiga ta'rif bering.
5. Bo'sh to'plam, universal to'plamlar ta'rifini ayting. Misollar keltiring

6. To'plamlar birlashmasi, kesishmasiga ta'rif bering.
7. To'plamlar ayirmasi, simmetrik ayirmasiga ta'rif bering.
8. To'plamlar birlashmasining qanday xossalari bilasiz?
9. To'plamlar kesishmasining qanday xossalari bilasiz?
10. To'plamlar ustida bajariladigan amallarning xossalari qanday tushunchalar yordamida isbotlanadi?
11. Eyler-Venn diagrammalarini tushuntiring.
12. Eyler-Venn diagrammalari yordamida to'plamlarning tengligini isbotlash mumkinmi?

5- ma'ruza. Dekart ko'paytma. Binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati

Reja:

1. Dekart ko'paytma.
2. Binar munosabatlar.
3. Binar munosabatlar kompozitsiyasi.
4. Binar munosabatlar turlari.
5. Ekvivalentlik munosabati.
6. Faktor-to'plam.

Asosiy tushunchalar: tartiblangan juftlik, tartiblangan juftliklarning tengligi, kortejlar, to'plamlarning to'g'ri (Dekart) ko'paytmasi, binar munosabatlar, binar munosabatning aniqlanish sohasi, binar munosabatning qiymatlar sohasi, binar munosabat inversiyasi, binar munosabatlar kompozitsiyasi, refleksiv, antirefleksiv, simmetrik, antirefleksiv, tranzitiv binar munosabatlar, n - ar munosabatlar, ekvivalentlik munosabati, bo'sh bo'lmagan to'plamni bo'laklash, ekvivalentlik sinflari, faktor-to'plam.

Adabiyotlar: [1]: 1-qism; [6]: 48-54; 65-73; [7]: 2-modul.

Bo'sh bo'lmagan A to'plam berilgan bo'lsin. $\forall a, b \in A$ elementlar uchun $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ to'plam a, b elementlardan tuzilgan tartiblangan juftlik deyiladi. Tartiblangan juftlik (a, b) ba'zi adabiyotlarda $\langle a, b \rangle$ ko'rinishida belgilanib, a tartiblangan juftlikning birinchi koordinatasi, b esa tartiblangan juftlikning ikkinchi koordinatasi deyiladi.

5.1-teorema. Ikkita tartiblangan juftliklar (a, b) va (c, d) lar teng bo'lishi uchun ularning mos koordinatalari teng bo'lishi zarur va etarlidir.

Isbot. Haqiqatdan, agar tartiblangan juftliklarning mos koordinatalari teng bo'lsa, tartiblangan juftliklarning teng bo'lishi ravshan. Aksincha, faraz qilaylik $\{a, b\} = \{c, d\}$ bo'lsin, u holda $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. To'plamlarning tengligi ta'rifidan $\{a\} = \{c\}$; $\{a, b\} = \{c, d\}$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $a = c$; $b = d$ bo'ladi.

Tartiblangan juftlik yordamida, uchta a, b, c elementlar uchun $((a, b), c)$ ko'rinishda tartiblangan uchlikni aniqlashimiz mumkin. Tartiblangan n-lik (uzunligi n ga teng kortej) esa tartiblangan $n-1$ lik orqali $((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$ -ko'rinishda aniqlanadi va $(a_1, \dots, a_n)$ orqali belgilanadi. $i = 1, \dots, n$ lar uchun a_i element $(a_1, \dots, a_n)$ – n likning n -koordinatasi deyiladi.

5.2-teorema. Ikkita tartiblangan n liklar teng bo'lishlari uchun ularning mos koordinatalari teng bo'lishlari zarur va etarli, ya'ni $(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow (a_1 = b_1) \wedge \dots \wedge (a_n = b_n)$ mulohaza tautologiyadir.

Isbot. Agar $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$ bo'lsa, $(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n)$ bo'lishi ravshan. $(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n)$ bo'lsin, $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$ bo'lishini isbot qilamiz. Isbotni matematik induksiya usulida olib boramiz. $n=2$ bo'lganda isbot yuqorida keltirilgan. $k < n$ uchun teorema to'g'ri deb faraz qilamiz. U holda $((a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n))$ tenglikdan $((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n) = ((b_1, \dots, b_{n-1}), b_n)$ hosil bo'ladi. 5.1-teoremaga asosan $(a_1, \dots, a_{n-1}) = (b_1, \dots, b_{n-1})$; $a_n = b_n$. Induksiya faraziga ko'ra $a_1 = b_1, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}$. Demak, $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$ bo'ladi.

5.3-ta'rif. $A_1, \dots, A_n$ - bo'sh bo'lmagan to'plamlar $\forall a_1 \in A_1, \dots, \forall a_n \in A_n$ - elementlardan tuzilgan barcha $(a_1, \dots, a_n)$ n -liklar to'plami $A_1, \dots, A_n$ to'plamlarning dekart ko'paytmasi deyiladi. $A_1, \dots, A_n$ to'plamlarning dekart ko'paytmasi $A_1 \times \dots \times A_n$ ko'rinishida belgilanadi.

5.4-misol. $A_1 = \{0, \diamond\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ to'plamlar berilgan bo'lsin, u holda

$$A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (\diamond, 1), (\diamond, 2), (\diamond, 3)\}$$

$$B \times A = \{(1, 0), (1, \diamond), (2, 0), (2, \diamond), (3, 0), (3, \diamond)\}.$$

Bu misoldan $A \times B \neq B \times A$ ekanligini ko'rish mumkin, ya'ni dekart ko'paytma kommutativ emas ekan.

Agar $A_1 \times \dots \times A_n$ dekart ko'paytmada $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ bo'lsa, bunday dekart ko'paytma A^n ko'rinishida yoziladi va A to'plamning n -dekart darajasi deyiladi. Xususan $A^2 = A$ ning dekart kvadrati deyiladi. To'plamlarning birinchi va nolinci darajalarini $A^1 = A$, $A^0 = \emptyset$ tengliklar ko'rinishida aniqlash kelishilgan.

5.5-ta'rif. $A \neq \emptyset$ to'plam berilgan bo'lsin. A^n ning ixtiyoriy ρ to'plamostini A to'plamda aniqlangan n -ar yoki n -o'rinli munosabat deyiladi. Hususan A^2 ning ixtiyoriy to'plamostisi A to'plamida berilgan binar munosabat deyiladi. Agar (a, b) juftliklar ρ binar munosabatga tegishli bo'lsa, $a \rho b$ deb belgilaymiz.

5.6-misol. N^2 ning $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), \dots\}$ to'plamostisi natural sonlar to'plamida aniqlangan tenglik munosabatidir.

5.7-misol. N^2 ning $"<" = \{(1, 2), (1, 3), \dots, (2, 3), (2, 4), \dots, (3, 4), (3, 5), \dots\}$ to'plamostisini qaraylik. Bu munosabat tengsizlik munosabati bo'lib $(a, b) \in "<"$ bo'lishi $a < b$ orqali belgilanadi va a kichik b deb o'qiladi. 5.5-ta'rifdan ko'rinib turibdiki, A da - 0 o'rinli munosabat, bu $A^0 = \{\emptyset\}$ to'plamning to'plamostilari bo'lib, faqat $\emptyset \in \{\emptyset\}$ to'plamlardan iboratdir.

Bir o'rinli munosabat esa A ning ixtiyoriy to'plamostisi bo'lar ekan. Bir o'rinli munosabat unar munosabat deyiladi.

5.8-misol. $A = \{a, b\}$ to'plamda aniqlangan barcha unar munosabatlar

$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ to'plamlardan iborat.

Binar munosabatlar matematikada ko'p uchraydigan munosabatlardan biri bo'lganligi uchun u bilan to'liqroq tanishib chiqamiz.

5.9-ta'rif. Agar R - A to'plamda berilgan binar munosabat bo'lsa, u holda binar munosabatga tegishli barcha juftliklarning, barcha birinchi koordinatalaridan tuzilgan to'plam $Dom R$ orqali, barcha ikkinchi koordinatalaridan tuzilgan to'plam esa $Im R$ orqali belgilanad. Ular mos ravishda R munosabatning aniqlanish va o'zgarish sohalari deyiladi.

5.10-ta'rif. Agar R - ikki o'rinli, ya'ni binar munosabat bo'lsa, u holda $\{(a, b) / \forall (b, a) \in R^{-1}\}$ munosabat R^{-1} -munosabatga teskari munosabat deyiladi va R^{-1} orqali belgilanadi. R^{-1} munosabat R ning inversiyasi deyiladi.

5.11-ta'rif. P va Q binar munosabatlar bo'sh bo'lmagan A to'plamda berilgan bo'lsin. U holda $P \circ Q = \{(a, c) / \exists b \in A, (a, b) \in Q \wedge (b, c) \in P\}$ to'plam P va Q binar munosabatlarning kompozitsiyasi deyiladi.

5.12-teorema. Agar f, h, g lar A to'plamida berilgan binar munosabatlar bo'lsa, u holda $f \circ (h \circ g) = (f \circ h) \circ g$ tenglik o'rinli bo'ladi, ya'ni binar munosabatlar kompozitsiyasi assosiativdir.

Isbot. $\forall (x, t) \in f \circ (g \circ h)$ bo'lsin, u holda kompozitsiya ta'rifga ko'ra shunday $y, z \in A$ elementlar topilib $(x, y) \in f, (y, z) \in g$ va $(z, t) \in L$ bo'ladi. Demak $(x, z) \in f \circ g$ va $(z, t) \in L$ u holda $(x, t) \in (f \circ g) \circ h$ bo'ladi. YA'ni $f \circ (g \circ L) \subseteq (f \circ g) \circ h$. Shunga o'xshash $(f \circ g) \circ h \subseteq f \circ (g \circ h)$ bo'lishi isbotlanadi.

5.13-ta'rif. A to'plamida R -binar munosabat berilgan bo'lsin.

a) Agar $\forall a \in A$ uchun $(a, a) \in R$ bo'lsa, R -binar munosabat refleksiv munosabat deyiladi;

b) Agar $(a, b) \in R$ bo'lishidan $(b, a) \in R$ bo'lishi kelib chiqsa, ya'ni $R^{-1} = R$ shart bajarilsa, R -simmetrik munosabat deyiladi;

c) Agar $\forall (a, b) \in R$ va $(b, a) \in R$ bo'lishidan $(a, c) \in R$ bo'lishi kelib chiqsa, ya'ni $R \circ R \subset R$ shart bajarilsa, R -tranzitiv munosabat deyiladi;

d) refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo'lgan binar munosabat ekvivalentlik munosabati deyiladi.

Ekvivalentlik munosabati ba'zan $\equiv, \sim, \simeq$ kabi ko'rinishlarda ham belgilanadi.

5.14-misol. Z - butun sonlar to'plamida $\forall a, b \in Z$ butun sonlar ayirmasi birdan katta bo'lgan m butun songa qoldiqsiz bo'linsa, a soni b soni bilan, m -modul bo'yicha taqqoslanadi deyiladi va $a \equiv b \pmod{m}$ deb yoziladi. Bu munosabat refleksiv munosabatidir, haqiqatdan $\forall a \in Z$ uchun $a - a = 0 : m$, ya'ni $a \equiv a \pmod{m}$; $\equiv$ -simmetrik munosabatdir, chunki $a \equiv b \pmod{m}$ bo'lsa $a - b : m$, demak $-(b - a) : m$, ya'ni $b \equiv a \pmod{m}$; $\equiv$ -tranzitiv munosabatdir, haqiqatdan

$a \equiv b \pmod{m}$ va $b \equiv c \pmod{m}$ bo'lsa, $(a-b):m$ va $(b-c):m$ bo'ladi, u holda $a-c = ((a-b)+(b-c)):m$, ya'ni $a \equiv c \pmod{m}$ bo'ladi. SHunday qilib $\equiv$ munosabat-refleksiv, simmetrik, tranzitiv ya'ni ekvivalentlik munosabati ekan.

5.15-misol. Tekislikdagi barcha to'g'ri chiziqlar to'plamida to'g'ri chiziqlarning parallel bo'lishi munosabati ekvivalentlik munosabatidir.

5.16-misol. Tekislikdagi barcha uchburchaklar to'plamida uchburchaklarning o'xshashlik munosabati ekvivalentlik munosabatidir.

5.17-ta'rif. A to'plamda aniqlangan R -ekvivalentlik munosabati berilgan bo'lsin. $\forall a \in A$ uchun $\bar{a}$ orqali A to'plamning a ga ekvivalent bo'lgan barcha elementlarini belgilaymiz va to'plamni a element yaratgan ekvivalentlik sinfi deb ataymiz. Ekvivalentlik sinfining ixtiyoriy elementi shu sinfnin vakili deyiladi.

5.18-misol. Z -butun sonlar to'plamida 3 modul bo'yicha taqqoslash munosabati berilgan bo'lsin, u holda $\bar{0} = \{3z / z \in Z\}$ $\bar{1} = \{3z + 1 / z \in Z\}$ $\bar{2} = \{3z + 2 / z \in Z\}$. Bu ekvivalentlik sinflari 3 modul bo'yicha chegirmalar sinflari deyiladi.

5.19-ta'rif. Bo'sh bo'lmagan ixtiyoriy R ekvivalentlik munosabati berilgan bo'lsin, u holda shu R ekvivalentlik munosabati bo'yicha aniqlangan barcha ekvivalent sinflari to'plami A to'plamning R ekvivalentlik munosabati bo'yicha faktor- to'plami deyiladi.

YUqoridagi 5.18-misolda $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ to'plam, ya'ni 3 modul bo'yicha olingan barcha chegirmalar sinflari to'plami faktor to'plamdir. A to'plamning R ekvivalentlik munosabati bo'yicha faktor to'plami A/R orqali belgilanadi.

5.20-ta'rif. A to'plamning bo'sh bo'lmagan to'plamostilaridan tuzilgan $B = \{A_\alpha / \alpha \in \Omega\}$ to'plam berilgan bo'lsin. Agar B ixtiyoriy ikkita elementining kesishmasi bo'sh to'plmadan iborat bo'lib, B ning barcha elementlarining yig'indisi A ga teng bo'lsa, u holda B to'plam A to'plamning bo'laklangani deyiladi.

5.21-teorema. A to'plamda berilgan har bir R ekvivalentlik munosabati uchun A/R faktor to'plam A to'plamning bo'laklanganidir. Aksincha, B to'plam A ning bo'laklangani bo'lsa, u holda A to'plamda shunday $\sim$ ekvivalentlik munosabat mavjud bo'lib, $A/\sim = B$ bo'ladi.

Isboti. Haqiqatdan A/R A ning R ekvivalentlik munosabati bo'yicha faktor to'plami bo'lsin. $\forall \bar{a}, \bar{b} \in A/R$ elementlar uchun $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ deb faraz qilaylik, u holda $\exists c \in \bar{a} \cap \bar{b}$. Demak, cRa va cRb . Endi R ekvivalentlik munosabati tranzitiv munosabatligini hisobga olsak aRb , ya'ni $\bar{a} = \bar{b}$ bo'ladi. A to'plamning har bir elementi, o'zi aniqlagan ekvivalentlik sinfida yotishini, eslasak A to'plamning R munosabat barcha ekvivalentlik sinflari yig'indisiga tengligi kelib chiqadi. SHunday qilib A/R - A ning bo'laklanganidir.

$B = \{A_\alpha / \alpha \in \Omega\}$ - to'plam A ning bo'laklangani bo'lsin. A to'plamning ixtiyotiy ikkita elementi A_α larning faqat bittasigagina tegishli bo'lsa, bu elementlar $\sim$ munosabatda deymiz va $a \sim b$ belgilaymiz, u holda $\forall a \in A$ uchun

$a \sim a$ bo'lishi ravshan, chunki a faqat bitta A_α gagina tegishli. YA'ni $\sim$ refleksiv munosabardir.

Faraz qilaylik $a \sim b$, ya'ni a, b lar A_α larning faqat biriga tegishli bo'lsin. Aniqlik uchun $a, b \in A_\alpha'$ bo'lsin, u holda b, a lar ham A_α' ga tegishli, demak $b \sim a$ bo'ladi. Demak, $\sim$ simmetrik munosabat bo'lar ekan.

$a \sim b$ va $b \sim c$ bo'lsin. Yana aniqlik uchun $a, b \in A_\alpha'$ deylik, u holda $b \sim c$ bo'lgani uchun a, b, c lar ham faqat A_α' to'plamgagina tegishli, demak a, c lar ham shu A_α' gagina tegishli, ya'ni $a \sim c$ bo'ladi. Bu esa $\sim$ munosabatning tranzitivligidir.

Shunday qilib $\sim$ munosabat A to'plamda aniqlangan ekvivalentlik munosabati, A_α lar esa $\sim$ ekvivalentlik munosabati bo'yicha aniqlangan ekvivalentlik sinflari ekan.

Takrorlash uchun savollar:

1. Tartiblangan juftlik nima?
2. Tartiblangan juftliklar qachon teng bo'ladi?
3. To'plamlarning to'g'ri (Dekart) ko'paytmasi nima?
4. Tartiblangan n lik qanday hosil qilinadi?
5. Binar munosabatga ta'rif bering. Misollar keltiring.
6. Binar munosabatning aniqlanish sohasiga misol keltiring.
7. Binar munosabatning o'zgarish sohasiga ta'rif bering.
8. Binar munosabat inversiyai qanday xosil qilinadi?
9. Binar munosabatlar kompozitsiyasini misol yordamida tushuntiring.
10. Refleksiv binar munosabatni ta'riflang va misol keltiring.
11. Simmetrik binar munosabatni ta'riflang va misol keltiring.
12. Tranzitiv binar munosabatni ta'riflang va misol keltiring.
13. Ekvivalentlik binar munosabatini ta'riflang va misol keltiring.
14. To'plamni bo'laklash deganda nimani tushunasiz?
15. Faktor-to'plamni tushuntiring.

6- ma'ruza. Akslantirish (funksiya). Tartib munosabati. Graflar

Reja:

1. Akslantirish (funksiya).
2. Akslantirishlar kompozitsiyasi.
3. Akslantirishlar turlari.
4. Teskari akslantirish.
5. Izomorf to'plamlar.
6. Tartib munosabati va uning turlari.
7. Graf.

Asosiy tushunchalar: Akslantirish (funksiya), akslantirishning aniqlanish sohasi, akslantirish qiymatlar to'plami, akslantirishlar kompozitsiyasi, in'ektiv

akslantirish, sur'ektiv akslantirish, biektiv akslantirish, teskarilanuvchi akslantirish, izomorf to'plamlar, tartib munosabati, qisman tartib, qat'iy tartib, chiziqli tartib, tartiblangan to'plam, to'la tartiblangan to'plam, binar munosabat grafi.

Adabiyotlar: [1]: 1-qism; [6]: 54-68; [7]: 2-modul.

6.1-ta'rif. $f - A$ to'plamda berilgan binar munosabat bo'lsin. Agar $\forall x, y, z \in A$ lar uchun $(x, y) \in f$ va $(x, z) \in f$ bo'lishidan $y = z$ kelib chiqsa, u holda f binar munosabat akslantirish (funksiya) deyiladi.

Boshqacha qilib aytsak, f binar munosabatning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lgan har bir x element uchun, yagona y element topilib, $(x, y) \in f$ bo'lsa, u holda f munosabat funksiya deyiladi. Agar f binar munosabat funksiya bo'lib, $(x, y) \in f$ bo'lsa, u holda $y = f(x)$ deb yozish qabul qilingan. Ba'zan $x \rightarrow f(x)$ yoki $f: x \rightarrow y$ deb ham yoziladi x elementga f funksiya y elementni mos qo'yadi deb va y element x ning obrazi (tasviri), x esa y ning proobrazi (asli) deyiladi. $Dom f = \{x / \exists y(x, y) \in f\}$ to'plam funksiyaning aniqlanish sohasi, $Im f = \{y / \exists x(x, y) \in f\}$ to'plam funksiyaning o'zgarish sohasi deyiladi. Bizga ikkita f va g funksiyalar berilgan bo'lsa, ularning tengligini f va g - juftliklar to'plamining tengligi sifatida tushuniladi. Predikatlar algebrasi tiliga o'tsak, $(f = g) \Leftrightarrow ((\forall(x, y) \in f) \Leftrightarrow (\forall(x, y) \in g))$ formula tautologiyadir.

Har qanday funksiya $\forall x \in Dom f$ elementga yagona $y \in Im f$ elementni mos qo'yganligi sababli, f ni akslantirish deb atash maqsadga muvofiq. Agar $Dom f \subset A$, $Im f \subset B$ bo'lsa, u holda f A to'plamdan B to'plamga akslantirish deyiladi.

Agar $A = Dom f$ $B = Im f$ bo'lsa, u holda f funksiyaning A to'plamni B to'lamga akslantirish deb ataymiz. A to'plamni B to'lamga akslantiradigan barcha funksiyalar to'plamini B^A orqali belgilash qabul qilingan. Faraz qilaylik f A to'plamdan B to'lamga akslantirish bo'lsin. U holda $\forall C \subset A$ uchun $f(C) = \{x / \exists j(x) \in C \cap Im f\}$ to'plam M to'plamning obrazi deyiladi. $f^{-1}(M) = \{x / f(x) \in M \cap Im f\}$ to'plam M to'plamning proobrazi deyiladi.

Bundan keyin agar f A to'plamdan B to'plamga akslantirish bo'lsa, $f: A \rightarrow B$ deb belgilaymiz. Agar A to'plam tartiblangan juftliklar to'plamidan iborat bo'lsa, u holda $f: A \rightarrow B$ akslantirish ikki o'zgaruvchili funksiya, n o'zgaruvchili funksiya sifatida $X \neq \emptyset$ $Y \neq \emptyset$ to'plamlar uchun $f: X^n \rightarrow Y$ akslantirish tushuniladi, bu erda $n=0, 1, \dots$. n - o'zgaruvchili funksiyaning $y = f(x_1, \dots, x_n)$ ko'rinishida belgilaymiz.

6.2-ta'rif. f va g funksiyalar berilgan bo'lsin, u holda $f \circ g = \{(x, z) / \exists t(x, t) \in g \text{ va } (t, z) \in f\}$ to'plam f va g funksiyalarning kompozitsiyasi deyiladi.

6.3-misol. $f = \{(1, 3), (2, 3), (3, 6)\}$ $g = \{(1, 3), (2, 1), (3, 4)\}$ bo'lsa, u holda $f \circ g = \{(1, 6), (2, 3)\}$.

6.4-teorema. Funktsiyalar kompozitsiyasi quyidagi xossalarga ega:

$$1^\circ. \text{Dom } f \circ g = \{x / g(x) \in \text{Dom } f\}$$

$$2^\circ. \forall x \in \text{Dom } f \circ g \text{ uchun } (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$3^\circ. f \circ g = \{(x, f(g(x))) / g(x) \in \text{Dom } f\}$$

$$4^\circ. \text{Dom } f \circ g \subset \text{Dom } g.$$

$$5^\circ. \text{Im } (f \circ g) \subset \text{Im } f$$

$$6^\circ. \text{Agar } \text{Im } g = \text{Dom } f \text{ bo'lsa, } \text{Dom } f \circ g = \text{Dom } g \text{ va } \text{Im } (f \circ g) = \text{Im } f$$

1⁰- xossaning isboti. $\forall x \in \text{Dom } f \circ g$ bo'lsin, u holda $f \circ g$ ning ta'rifiga ko'ra $(x, y) \in f \circ g$ bo'lib, shunday t topiladiki, natijada $(x, t) \in g$ va $(t, z) \in f$ bo'ladi, demak $t = g(x)$ ekanligidan $g(x) \in \text{Dom } f$ bo'ladi. Aksincha, agar $g(x) \in \text{Dom } f$ bo'lsa, shunday z topiladiki, $(g(x), z) \in f$, u holda $(x, g(x)) \in g$ bo'lgani uchun $(x, z) \in f \circ g$ bo'ladi, ya'ni $x \in \text{Dom } f \circ g$.

Qolgan xossalarning isboti mustaqil bajarish uchun o'quvchilarga havola qilinadi.

6.5-teorema. Funktsiyalar kompozitsiyasi assosiativdir.

Bu teoremaning isboti binar munosabatlar kompozitsiyasi assosiativligining bevosita natijasidir.

6.6-ta'rif. $A \neq \emptyset$ to'plamning har bir elementini o'zini o'ziga akslantiradigan akslantirish ayniy akslantirish yoki birlik akslantirish deyiladi. Bunday akslantirishni E_A orqali belgilaymiz.

6.7-teorema. Agar f - akslantirish A to'plamni B to'lamiga akslantirish bo'lsa $f \circ f^v = E_B$ bo'ladi.

Isbot. $\text{Im } f = B$ bo'lganidan $E_B \subset f \circ f^v$ kelib chiqishi ravshan. Faraz qilaylik $(x, y) \in f \circ f^v$, ya'ni shunday $z \in V$ topilib $(x, z) \in f^v$ va $(z, y) \in f$ bo'lsin. U holda inversiyaning ta'rifiga ko'ra $(z, x) \in f$ endi f binar munosabat funksiyaligini etiborga olsak $x = y$. Demak, $f \circ f^v \subset E_B$.

6.8- ta'rif. $f: A \rightarrow B$ akslantirish A to'plamni B to'plamiga akslantirish bo'lsin. U holda, agar $\forall x_1, x_2 \in A$ va $x_1 \neq x_2$ elementlar uchun $f(x_1) \neq f(x_2)$ bo'lsa, f -in'ektiv, $\text{Im } f = B$ bo'lsa, f - syur'ektiv akslantirish deyiladi. Agar f ham syur'ektiv, ham in'ektiv akslantirish bo'lsa, u holda biektiv akslantirish deyiladi.

6.9-misol. Haqiqiy sonlar to'plami R ni o'zini o'ziga akslantiradigan $f(x) = x^2$ funksiya in'ektiv ham emas, biektiv ham emas haqiqatdan ham $+2 \neq -2$. Lekin $(-2)^2 = 2^2 = 4$; $\text{Im } f = R^+ \cup \{0\}$; $[R^+ \cup \{0\}]$ - manfiy bo'lmagan haqiqiy sonlar to'plami.

6.10-misol. $f(x) = x^2$ funksiya barcha haqiqiy sonlar to'plamini $R^+ \cup \{0\}$ to'plamga akslantirsin. U holda $\text{Im } f = R^+ \cup \{0\}$. Demak, f -syur'ektiv akslantirish, lekin in'ektiv akslantirish emas.

6.11-misol. $y = \sqrt{x}$ funksiya $R^+ \cup \{0\}$ to'plamni R - haqiqiy sonlar to'plamiga akslantiradi. Bu funksiya in'ektiv, lekin syur'ektiv emas.

6.12-misol. $y = x^3$ funksiya R - haqiqiy sonlar to'plamini R o'zini o'ziga akslantiradigan biektiv funksiyadir.

6.13-misol. $x = \{a, b\}$ to'plam berilgan bo'lsin, u holda $f(a) = b$; $f(b) = a$; $g(a) = a$; $g(b) = a$ shartlar bilan aniqlangan f va g funksiyalarni qarasak,
 $((f \circ g)(a)) = f(g(a)) = f(a) = b$.
 $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b$; $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a$ $(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(a) = a$ bo'ladi.

Bu misoldan ko'rinadiki, $f \circ g \neq g \circ f$, ya'ni funksiyalar kompozitsiyasi har doim ham kommutativ bo'lavermas ekan.

6.14-ta'rif. $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$ akslantirishlar berilgan bo'lsin, u holda agar $f \circ g = E_B$ bo'lsa f akslantirish g akslantirishga chapdan teskari, akslantirish esa f akslantirishga o'ngdan teskari deyiladi. Agar $f \circ g = E_B$ va $g \circ f = E_A$ shartlar bajarilsa, u holda f va g akslantirishlar bir biriga teskari akslantirishlar deyiladi.

6.15-teorema. Agar $f: A \rightarrow B$; $g: B \rightarrow A$ akslantirishlar berilgan bo'lib, $g \circ f = E_A$ shart bajarilsa, u holda f -in'ektiv, g esa syur'ektiv akslantirishdir.

Isbot. Teorema shartlari bajarilgan deb faraz qilaylik. U holda, $\forall a \in A$ uchun $g \circ f(a) = g(f(a)) = a$. Faraz qilaylik $a_1 \neq a_2$ elementlar uchun $f(a_1) = f(a_2)$ bo'lsin, u holda $a_1 = (g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = a_2$. Bu esa $a_1 \neq a_2$ farazimizga zid.

Endi uchun shunday $b \in B$ topilib, $g(b) = a$ bo'lishini ko'rsataylik. Haqiqatdan teorema shartiga ko'ra $\forall a \in A$ uchun $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = a$ bo'ladi. $f(a)$ ni b orqali belgilasak $g(b) = a$. Demak, g -syur'ektiv akslantirish ekan

6.16-teorema. $f: A \rightarrow B$ akslantirish uchun teskari akslantirish mavjud bo'lishi uchun uning biektiv bo'lishi zarur va etarli.

Isbot. Agar f - biektiv bo'lsa, $\forall b \in B$ uchun shunday yagona $a \in A$ topilib, $f(a) = b$ bo'ladi. U holda $\forall b \in B$ uchun $g(b) = a$ shartni qanoatlantiradigan g akslantirish f akslantirishga teskari akslantirish bo'lishi ravshan.

Faraz qilaylik f akslantirish uchun g - teskari akslantirish bo'lsin, u holda, teskari akslantirish ta'rifiga ko'ra $g \circ f = E_A$, $f \circ g = E_B$, u holda 6.15-teoremaga ko'ra f va g lar biektiv akslantirishlardir.

Kelgusida f akslantirishga teskari akslantirish mavjud bo'lsa, uni f^{-1} orqali belgilaymiz.

6.17-natija. O'zaro teskari akslantirishlar biektiv akslantirishlardir.

To'plamni o'zini o'ziga akslantirish almashtirish deyiladi.

6.18-teorema. Chekli to'plamni almashtirish biektiv bo'lishi uchun, syur'ektiv yoki in'ektiv bo'lishi zarur va etarlidir.

Isbot. X -chekli to'plam berilgan bo'lsin almashtirish biektiv bo'lsa, ham syur'ektiv, ham in'ektiv bo'lishi ravshan. Faraz qilaylik $f: X \rightarrow X$ syur'ektiv bo'lsin, lekin f in'ektiv bo'lmasin. U holda X -chekli to'plam bo'lgani uchun

uning elementlari $x_1, x_2, \dots, x_n$ lardan iborat desak, $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ elementlar $n-1$ tadan ko'p emas. Demak, kamida bitta x_k element uchun proobraz topilmaydi. Bu esa f -syur'ektiv degan farazimizga zid. $f: X \rightarrow X$ syur'ektivligidan f ning in'ektivligini keltirib chiqarishni mustaqil isbot qilish o'quvchilarga havola qilinadi.

6.19-ta'rif. Agar ikkita A va B to'plamlarning birini ikkinchisiga o'zaro bir qiymatli akslantiradigan kamida bitta akslantirish mavjud bo'lsa, to'plamlar teng quvvatli deyiladi va $A \cong B$ ko'rinishida yoki $|A| = |B|$ ko'rinishida belgilanadi.

6.20-ta'rif. A to'plamda berilgan $R \subset A \times A$ antisimmetrik va tranzitiv munosabat A to'plamdagi tartib munosabati deyiladi.

6.21-ta'rif. A to'plamdagi tartib munosabati refleksiv munosabat bo'lsa, bunday munosabat A to'plamdagi noqat'iy tartib munosabat deyiladi.

A to'plamdagi tartib munosabat antirefleksiv munosabat bo'lsin, bunday munosabat A to'plamdagi qat'iy tartib munosabat deyiladi.

6.22-misol. $B(A) - A$ to'plamning barcha to'plamostilari to'plami bo'lsin. $B(A)$ to'plamda to'plamosti bo'lish munosabati noqat'iy tartib munosabatidir.

6.23-misol. $A = \{4, 12, 36, 72\}$ to'plamda bo'linish munosabati noqat'iy tartib munosabatidir.

6.24-ta'rif. A to'plamda R - tartib munosabat berilgan bo'lsin. U holda, agar $\forall a, b \in A$ elementlar uchun xRy yoki $x = y$ yoki yRx munosabatlardan kamida bittasi albatta bajarilsa, bunday munosabat A to'plamdagi chiziqli tartib munosabat deyiladi.

Chiziqli bo'lmagan tartib munosabat, qisman tartib munosabat deyiladi.

6.25-misol. N -natural sonlar to'plamida $R = \{(x, y) \mid \forall x, y \in N \ x : y\}$ munosabat qisman tartib munosabat bo'ladi. " $<$ " = $\{(x, y) \mid \forall x, y \in N \ \exists k \in N \ y = x + k\}$ munosabat esa chiziqli tartib munosabatidir.

6.26-ta'rif. A to'plamda R - tartib munosabat berilgan bo'lsin, (A, R) juftlik tartiblangan to'plam deyiladi. Agar R - qisman tartib munosabati bo'lsa, (A, R) qisman tartiblangan to'plam, R chiziqli tartib munosabati bo'lsa, (A, R) chiziqli tartiblangan to'plam deyiladi.

6.27-misol. $(N, <)$ -juftlik chiziqli tartiblangan to'plamdir. Kelgisida $a < b$ yozuvni odatdagidek $a < b$, $a \leq b$ yozuvni esa a kichik yoki teng b deb o'qiymiz va $a \leq b$ ni $(a < b) \vee (a = b)$ mulohaza ma'nosida tushunamiz. Xususan $4 \leq 4$, $3 \leq 4$ mulohazalar aynan rost mulohazalardir.

$(A, <)$ - tartiblangan to'plam berilgan bo'lsin, u holda $a \in A$ elementdan kichik element mavjud bo'lmasa a - minimal element, agar a dan katta element mavjud bo'lmasa a -maksimal element deyiladi. A dagi o'zidan boshqa barcha elementlaridan kichik bo'lgan a element A ning eng kichik elementi, A dagi o'zidan boshqa barcha elementlaridan katta bo'lgan b element A ning eng katta elementi deyiladi.

6.28-misol. $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ to'plamida, agar $a:b$ bo'lsa, $b < a$ deylik, u holda 1 eng kichik element, 12 eng katta element bo'ladi.

6.29-misol. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ to'plamda ham 6.28 –misoldagi kabi aniqlangan $<$ – tartib munosabatni qaraylik. U holda 1-minimal element, 3, 4-maksimal elementlar bo'lishlari ravshan.

Shunday qilib, maksimal elementlari bir nechta bo'lgan to'plamlar mavjud ekan. Minimal elementlari ham bir nechta bo'ladigan to'plamga misol keltirishni o'quvchilarga havola etamiz.

6.30-ta'rif. Har qanday bo'sh bo'lmagan to'plamostisi minimal elementga ega chiziqli tartiblangan to'plam to'liq tartiblangan to'plam deyiladi.

Chiziqli tartiblangan to'plamlarda minimal element tushunchasi eng kichik element tushunchasi bilan, maksimal element tushunchasi esa eng katta element tushunchasi bilan bir xil bo'lishi ravshan.

6.31-misol. N -natural sonlar to'plamida $<$ - tabiiy tartib munosabati bo'lsin. Ya'ni agar $\forall a, b \in N$ uchun shunday R topilib, $a = b + k$ bo'lsa, $b < a$ deymiz. U holda $(N, <)$ to'plam to'liq tartiblangan to'plamdir.

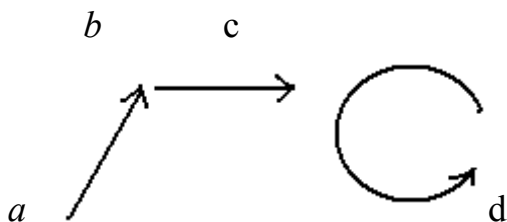
6.32-misol. R -haqiqiy sonlar to'plami tabiiy tartib munosabatga nisbatan to'liq tartiblangan bo'la olmaydi. Chunki R ning eng kichik elementi yo'q.

6.33-ta'rif. Tekislikda chekli sondagi nuqtalardan va shu nuqtalarning ba'zilarini tutashtiruvchi chiziqlardan iborat geometrik figura graf deyiladi. Nuqtalar grafning uchlari, chiziqlar esa grafning qirralari deyiladi.

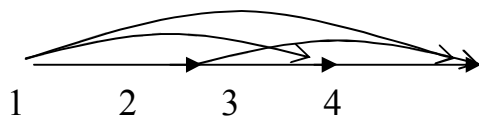
Grafning ba'zi qirralarini kesishish nuqtalari grafning uchlari bo'lmasligi ham mumkin. Agar grafning qirralarini yo'nalishi ko'rsatilgan bo'lsa, bunday graf yo'nalgan graf yoki orietirlangan graf deyiladi.

A to'plamida berilgan R -chekli binar munosabatni graf yordamida ifoda qilish uchun A to'plamning barcha elementlarini tekislikda nuqtalar yordamida belgilab olamiz. Agar $(a, b) \in R$ bo'lsa, bu juftlikni tekislikda a elementni ifoda qilgan nuqtadan b elementni ifoda qilgan nuqtaga qarab yo'nalgan yoy yoki kesma orqali ifoda qilinadi. (a, a) juftlikni esa soat strelkasi yo'nalishiga teskari yo'nalishda yo'nalgan aylana sifatida tasvirlaymiz. Natijada hosil bo'lgan figura R - binar munosabatning grafi deyiladi.

6.34-misol. $R = \{(a, b), (b, c), (d, d)\}$ munosabat ko'rinishda ifoda qilinadi

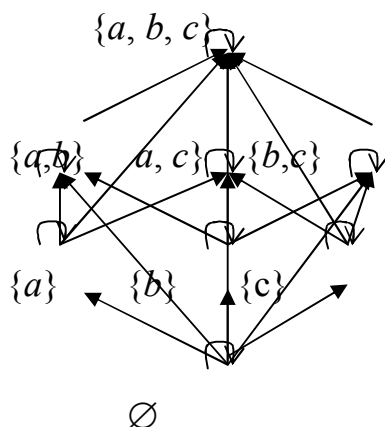


6.35 –misol. R - binar munosabat $A = \{1, 2, 3, 4\}$ to'plamdagi « $<$ » munosabat bo'lsin. U holda « $<$ » munosabatni graf yordamida quyidagi ko'rinishda ifoda qilish mumkin:



6.36 –misol. $A = \{a, b, c\}$ to'plam berilgan bo'lsin.

$\mathcal{B}(A)$ -uning barcha to'plamostilari bo'lsin. U holda to'plamosti bo'lish munosabatini quyidagi graf yordamida ifoda qilish mumkin:



Takrorlash uchun savollar:

1. Akslantirish qanday munosabat?
2. Akslantirishning aniqlanish sohasiga misol keltiring.
3. Akslantirishning qiymatlar to'plmi qanday to'plam?
4. Akslantirishlar kompozitsiyasini tushuntiring.
5. Akslantirishlar kompozitsiyasi xossalarini ayting.
6. In'ektiv akslantirishga maktab matematikasidan misol keltiring.
7. Syur'ektiv akslantirishga maktab matematikasidan misol keltiring.
8. Biektiv akslantirish maktabda qanday nomlangan? Misol keltiring.
9. Ayniy akslantirishni tushuntiring.
10. Tartib munosabatga misollar keltiring.
11. Tartib munosabat turlarini maktab matematikasidan olingan misollar yordamida tushuntiring.
12. Tartiblangan to'plamlarga misollar keltiring.
13. Butun sonlar to'plami to'la tartiblangan to'plam bo'ladi-mi?
14. Qanday binar munosabatni graf yordamida ifodalash mumkin?

3- modul. Algebra. Algebraik sistemalar

1. Binar , n - ar amallar.
2. Binar amallarning turlari.
3. Neytral element va uning xossalari.
4. Simmetrik element va uning xossalari.
5. Regulyar elementlar, xossalari.
6. Amallarga nisbatan yopiq to'plam.
7. Additiv va mul'tiplikativ yozuvlar.
8. Kongruensiya va uning xossalari.
9. Algebra. Algebraning tipi.
10. Algebralar gomomorfizmi va uning turlari.
11. Qismalgebralar.«Qismalgebra» munosabatining xossalari.
12. Faktor - algebra, xossalari.
13. Gruppoid, yarimgruppa, monoid.
14. Gruppa va uning sodda xossalari.
15. Gruppalar gomomorfizmi, xossalari.
16. Qismgruppa, xossalari.
17. Halqa va uning turlari.
18. Halqaning sodda xossalari.
19. Halqalar gomomorfizmi va uning xossalari.
20. Qismhalqa, xossalari.
21. Jism. Maydon. Maydonlar gomomorfizmi.
22. Algebraik sistemalar, qismsistemalar.
22. Algebraik sistemalar gomomorfizmi, xossalari.

7- ma'ruza. Binar algebraik amallar turlari, xossalari. Neytral, simmetrik elementlar. Kongruensiya

Reja:

1. Binar, n -ar algebraik amallar.
2. Gruppoid.
3. Neytral element, xossalari.
4. Regulyar element, xossalari.
5. Simmetrik element, xossalari.
6. Kongruensiya.

Asosiy tushunchalar: Binar algebraik amal, n -ar algebraik amal, algebraik amal rangi, algebraik amalga nisbatan yopiq to'plam, gruppoid, kommutativ binar amal, assosiativ binar amal, distributiv binar amal, neytral element, regulyar element, simmetrik element, additiv yozuv, mul'tiplikativ yozuv, kongruensiya.

Adabiyotlar: [1]: 1-qism; [6]: 75-82; [7]: 3-modul.

7.1-ta'rif. A^n to'plamni A ga akslantiradigan har qanday akslantirish A to'plamda berilgan n -ar yoki n -o'rinli algebraik amal deyiladi. Bu erda n -manfiy bo'lmagan butun son bo'lib, algebraik amalning rangi deyiladi. $n=0$ bo'lsa, $A^0 = \emptyset$ bo'lgani uchun, 0 -ar amal $f: \{\emptyset\} \rightarrow A$ ko'rinishidagi akslantirish bo'lib $\emptyset$ ni A ning birorta elementiga o'tkazadi. Boshqacha qilib aytganda 0 -ar amal A to'plamning ajratilgan elementidan iborat. Bir o'rinli amal $f: A \rightarrow A$ ko'rinishdagi funksiyadan iborat bo'lishi ravshan. Bir o'rinli algebraik amal qisqalik uchun ba'zan unar amal deyiladi.

$n=2$ bo'lganda ikki o'rinli algebraik amal $f: A \times A \rightarrow A$ akslantirishdan iborat bo'lib, binar algebraik amal deyiladi. Uch o'rinli algebraik amal ternar algebraik amal deyiladi. Agar ω A to'plamda berilgan n -ar algebraik amal bo'lsa, A to'plamni ω - n -ar algebraik amalga nisbatan algebraik yopiq deyiladi.

7.2-ta'rif. A^n to'plamdan A to'plamiga akslantirish A da aniqlangan n -o'rinli qisman amal deyiladi.

7.3-misol. $\mathcal{B}(A)$ - A to'plamining barcha to'plamostilaridan tuzilgan to'plam berilgan bo'lsin, u holda $f: \mathcal{B}(A) \rightarrow \mathcal{B}(A), \forall X \in \mathcal{B}(A)$ uchun $f(X) = A \setminus X$ tenglik yordamida aniqlanadigan amal unar algebraik amaldir.

7.4-misol. Q -rasinoal sonlar to'plamida bo'lish amali binar qisman amaldir.

7.5-misol. Natural sonlar to'plamida ixtiyoriy uchta songa ularning eng katta umumiy bo'luvchisini mos qo'yadigan amal, natural sonlar to'plamida aniqlangan ternar algebraik amaldir.

Binar algebraik amallarni $\circ, \bullet, +, *, \odot$ ko'rinishlarida belgilash qabul qilingan.

7.6-misol. $+: Z^2 \rightarrow Z$ amal $+(a, b) = a + b$ tenglik yordamida aniqlangan amal butun sonlar to'plamida qo'shish amali bo'lib, (a, b) butun sonlar juftligiga mos keladigan butun sonni $a + b$ ko'rinishida yozish qabul qilingan.

Shunga o'xshash A to'plamida $*$ binar algebraik amal berilgan bo'lsa, $*(a, b)$ o'rniga $a * b$ yozishni kelishib olamiz.

7.7-ta'rif. $A \neq \emptyset$ to'plam va unda aniqlangan $*$ binar algebraik amal berilgan bo'lsin. U holda $(A, *)$ juftlik gruppoid deb ataladi.

7.8-misol. N -natural sonlar to'plami « $\bullet$ »- N dagi ko'paytirish amali bo'lsa, u holda $(N, \bullet)$ -gruppoiddir.

7.9-ta'rif. $(A, *)$ -gruppoid berilgan bo'lsin, u holda

a) Agar $\forall a, b \in A$ uchun $a * b = b * a$ bo'lsa, u holda $*$ -amali algebraik amal A to'plamida kommutativ deyiladi;

b) Agar $\forall a, b, c \in A$ uchun $a * (b * c) = (c * b) * c$ shart bajarilsa, $*$ - A to'plamida assosiativ algebraik amal deyiladi;

v) Agar $\forall a \in A$ uchun shunday $e \in A$ topilib, $e * a = a$ shart bajarilsa, e element $*$ amalga nisbatan chap neytral element, agar $a * e = a$ shart bajarilsa, o'ng neytral element, agar ikkala shart ham bajarilsa neytral element deyiladi.

7.8-ta'rif. $(A, *)$ -gruppoid berilgan bo'lsin. Agar $e \in A$ element $*$ -amalga nisbatan neytral element bo'lsa, u holda e gruppoidning neytral elementi deyiladi.

7.9-teorema. Agar $(A,*)$ -gruppoidda neytral element mavjud bo'lsa, u yagonadir.

Isbot. Faraz qilaylik $(A,*)$ -gruppoidda ikkita e_1 va e_2 neytral elementlar mavjud bo'lsin, u holda neytral elementning ta'rifiga ko'ra $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$, ya'ni $e_1 = e_2$.

7.10-natija. Agar $(A,*)$ -gruppoidda neytral element mavjud bo'lsa, uning barcha chap, o'ng neytral elementlari neytral elementga teng.

7.11-ta'rif. Agar $(A,*)$ -gruppoidda $*$ amal qo'shish amalidan iborat bo'lsa, gruppoid additiv gruppoid; agar $*$ amal, ko'paytirish amali bo'lsa, gruppoid mul'tiplikativ gruppoid deyiladi.

Odatda qo'shish amali «+» orqali, ko'paytirish amali «•» orqali belgilanadi. Qo'shish amaliga nisbatan neytral elementni nol deb ataymiz va «0» orqali belgilaymiz. Ko'paytirish amaliga nisbatan neytral element birlik element deyilib «1» orqali belgilanadi.

7.12-misol. $(R,+)$ gruppoidning neytral elementi 0; $(R,\bullet)$ - gruppoidning neytral elementi 1. Bu erda R -haqiqiy sonlar to'plami, $+$, $\bullet$ - R dagi qo'shish va ko'paytirish amallaridir.

7.13-misol. $\mathcal{B}(A)$ - A to'plamning barcha to'plamostilari bo'lsin, u holda $\mathcal{B}(A)$ to'plamlarni qo'shish amaliga nisbatan gruppoid bo'lib, uning neytral elementi $\emptyset$ to'plamdir. $\mathcal{B}(A)$ - to'plamlarning kesishmasi amaliga nisbatan ham gruppoid bo'lib, uning neytral elementi A -to'plamdan iborat.

7.14-ta'rif. $(A,*)$ -gruppoid berilgan bo'lsin, u holda $a \in A$ element va $\forall b, c \in A$ elementlar uchun $a * b = a * c$ tenglikdan $b = c$ kelib chiqsa, u holda a element $(A,*)$ gruppoidning chap regulyar elementi, $b * a = c * a$ shartdan $b = c$ kelib chiqsa, a element $(A,*)$ gruppoidning o'ng regulyar elementi deyiladi. Ham chap, ham o'ng regulyar element regulyar element deyiladi.

7.18-misol. $(R,+)$ gruppoidning barcha elementlari regulyar elementlardir.

7.19 -ta'rif. $(A,*)$ -gruppoid neytral elementga ega bo'lsin. U holda $a \in A$ element uchun shunday $a' \in A$ element topilib, $a' * a = e$ bo'lsa, a' element a elementga chap simmetrik element, $a * a' = e$ bo'lsa o'ng simmetrik, ikkala shart ham bajarilsa, simmetrik element deyiladi.

7.20-misol. $(R,+)$ gruppoidda $\forall a \in R$ element uchun a element simmetrik elementdir.

7.21-misol. $(R,\bullet)$ - gruppoidda $\forall a \in R$, $a \neq 0$ element uchun a^{-1} element simmetrik elementdir.

Agar $(A,*)$ -gruppoidda $*$ -amal qo'shish bo'lsa, «simmetrik» termini, «qarama-qarshi» termini bilan; agar $*$ -amali ko'paytirish bo'lsa, «teskari» termini bilan almashtiriladi.

7.22-ta'rif. $(A,*)$ -gruppoid, R esa A to'plamdagi ekvivalentlik munosabati bo'lsin. Agar $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$ elementlar uchun $a_1 R b_1$ va $a_2 R b_2$ shartlardan

$(a_1 * a_2)R(b_1 * b_2)$ kelib chiqsa, u holda R -ekvivalentlik munosabati $(A,*)$ gruppoidda kongruensiya deyiladi.

7.23-misol. $(Z,+)$ gruppoidda $\forall Z_1, Z_2 \in Z$ uchun $(Z_1 R Z_2) \Leftrightarrow (Z_1 - Z_2 : 3)$ qonun bilan aniqlangan ekvivalentlik kongruensiyadir. Haqiqatdan, $x_1 R y_2$ va $x_2 R y_2$ bo'lsin, ya'ni $x_1 - y_1 : 3$ va $x_2 - y_2 : 3$ u holda $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)$ ham 3 ga bo'linishi ravshan.

Takrorlash uchun savollar:

1. Binar algebraik amalga maktab matematikasidan misollar keltiring.
2. n -ar algebraik amal ta'rifini ayting.
3. Unar algebraik amalga misol keltiring.
4. Gruppoid nima?
5. Gruppoidning neytral elementi xossalarini ayting.
6. Gruppoidning regulyar elementi ta'rifini ayting.
7. Gruppoidning simmetrik elementi nima?
8. Neytral, regulyar, simmetrik elementlarga o'rta maxsus ta'lim matematikasidan misollar keltiring.
9. Kongruensiyani misollar yordamida tushuntiring.

8- ma'ruza. Algebra. Algebralar gomomorfizmi. Algebraosti va uning xossalari. Faktor-algebra

Reja:

1. Algebra.
2. Bir xil turli algebralar.
3. Yarimgruppa.
4. Monoid.
5. Algebralar gomomorfizmi.
6. Algebraosti.
7. Faktor-algebra.

Asosiy tushunchalar: yarimgruppa, monoid, gruppoidosti, algebra, algebra turi, gomomorfizm, monomorfizm, epimorfizm, izomorfizm, endomorfizm, avtomorfizm, algebraosti, faktor-algebra.

Adabiyotlar: [1]: 1-qism; [6]: 82-93; [7]: 3-modul.

8.1-ta'rif. $(A,*)$ -gruppoidda $*$ -assosiativ amal bo'lsa, bunday gruppoid yarimgruppa deyiladi.

Neytral elementga ega bo'lgan yarimgruppa monoid deyiladi.

8.2-misol. Natural sonlar to'plami qo'shish amaliga nisbatan yarimgruppadir. Kelgusida bu yarimgruppa $(N,+)$ orqali belgilanadi.

8.3-misol. Natural sonlar to'plami ko'paytirish amaliga nisbatan monoiddir. Bu monoidda $(N, \bullet, 1)$ tartiblangan uchlik ko'rinishida belgilanadi.

8.4-teorema. Monoidda ihtiyoriy element ko'pi bilan bitta simmetrik elementga ega.

Isbot. Faraz qilaylik $(A, *)$ - yarimgruppada a element uchun ikkita a_1 va a_2 simmetrik elementlar mavjud bo'lsin. U holda

$$a_1 = a_1 * e = a_1 * (a * a_2) = (a_1 * a) * a_2 = e * a_2 = a_2.$$

8.5-natija. Monoidda a element uchun simmetrik element mavjud bo'lsa, a elementga chap, o'ng simmetrik elementlar a ga simmetrik bo'lgan elementga teng bo'ladi.

8.6-teorema. $(A, *, e)$ - monoidda $a \in A$ elementga $a', b \in A$ elementga esa b' - simmetrik element bo'lsin, u holda $a * b$ elementga $b' * a'$ simmetrik element bo'ladi.

Isbot. Haqiqatdan $(a * b) * (b' * a') = (a * (b * b')) * a' = (a * e) * a' = a * a' = e$ va $(b' * a')(a * b) = (b' * (a * a)) * b = (b' * e) * b = b' * b = e$

8.7-teorema. $(A, *, e)$ - monoid berilgan bo'lsin, agar $a \in A$ element uchun simmetrik element mavjud bo'lsa, bunday element regulyar elementdir.

Isbot. Haqiqatda $a \in A$ elementga $a' \in A$ element simmetrik bo'lsin, u holda $\forall b, c \in A$ elementlar uchun $a * b = a * c$ shart bajarilsa, $a' * (a * b) = a' * (a * c)$ yoki $(a' * a) * c = (a' * a) * c$ bo'ladi. Agar $a' * a = e$ bo'lishini hisobga olsak, $b = c$ bo'ladi.

8.8-ta'rif. $(A, *)$ -gruppoid va $B \subset A$ bo'lsin. Agar $\forall b_1, b_2 \in B$ elementlar uchun $b_1 * b_2 \in B$ bo'lsa, B to'plam $*$ algebraik amalga nisbatan algebraik yopiq deyiladi. $(B, *)$ juftlik esa $(A, *)$ gruppoidning qism gruppoidi yoki gruppoidosti deyiladi.

8.9-misol $(Z, +)$ gruppoid $(R, +)$ gruppoidning qism gruppoididir.

8.10-ta'rif. $A \neq \emptyset$ to'plam va A da bajariladigan algebraik amallar to'plami Ω berilgan bo'lsin (A, Ω) - juftlik algebra deyiladi. A - to'plam algebraning bosh to'plami, Ω -algebraning bosh amallari to'plami deyiladi.

(A, Ω) to'plam berilgan bo'lsa, A to'plam Ω dagi barcha amallarga nisbatan algebraik yopiq bo'lishi ravshan. Algebradagi Ω -amallar to'plami chekli, ya'ni $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ bo'lsa, $(A, \{\omega_1, \dots, \omega_n\})$ o'rniga yozuvni ichchamlashtirish maqsadida (A, Ω) - deb yozishga kelishib olamiz.

8.11-misol. Har qanday gruppoid algebradir.

8.12-misol. Haqiqiy sonlar to'plami va unda bajariladigan « $\bullet$ », « $+$ » amallari 0-o'rinli amallar 0, 1 lar bilan birga, ya'ni $(R, +, \bullet, 0, 1)$ -to'plam algebradir. Bu algebraning bosh amallari to'plami $(+, \bullet, 0, 1)$ bo'lib, darajaga ko'tarish, ayirish amallarini hosilaviy amallar deb qarashimiz mumkin.

8.13-ta'rif. (A, Ω) va (B, Ω') algebralarning amallari to'plamlari Ω va Ω' lari orasida biektiv moslik o'rnatilgan bo'lib, Ω to'plamidagi har bir ω n-ar amalga

nisbatan Ω' dan ω' n-ar amal mos qo'yilgan bo'lsa, bu algebralar bir hil turli algebralar deyiladi.

Agar (A, Ω) algebra berilgan bo'lsa, Ω -to'plamdagi amallarning ranglaridan iborat to'plam algebraning turi deyiladi. Xususan $(A, \varpi_1, \dots, \omega_n)$ algebraning turi $\{r(\omega_1), \dots, r(\omega_n)\}$ to'plamdan iborat. Bir hil turdagi algebralarning bir-biriga mos keladigan amallarining ranglari bir hil bo'lishi ravshan.

8.14-misol. $(A, *)$ -gruppoidning turi $\{2\}$ to'plamdan, $(A, *, e)$ - monoidning turi esa $\{2, 0\}$ to'plamdan iborat.

Algebradagi amallar to'plami chekli bo'lganda, bu algebraning turini ketma-ketlik sifatida yozish maqsadga muvofiq, ya'ni $(A, \varpi_1, \dots, \omega_n)$ algebraning turi $(r(\omega_1), \dots, r(\omega_n))$ ketma-ketlik ko'rinishida ifoda qilinadi.

8.15-misol. $(R, +, \bullet, 0, 1)$ algebraning turi $(2, 2, 0, 0)$ ketma-ketlikdan iborat.

(A, Ω) va (B, Ω') bir hil turli algebralar berilgan bo'lsin. $\forall \omega \in \Omega$ amalga $\omega' \in \Omega'$ amal mos qo'yilgan deb faraz qilaylik. Agar $\varphi: A \rightarrow B$, akslantirish va $\forall a_1, \dots, a_n \in A$ elementlar uchun $\varphi(\omega(a_1, \dots, a_n)) = \omega'(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))$ tenglik bajarilsa, φ akslantirish ω amalni saqlaydi. ω amal A dagi ajratilgan element, ya'ni nol o'rinli amal bo'lsa, u holda ω ga mos keladigan ω' ham B ning ajratilgan elementi bo'ladi, $\varphi(\omega) = \omega'$.

8.16-ta'rif. (A, Ω) , (B, Ω') algebralar berilgan bo'lsin. Ω dagi barcha amallarni saqlaydigan $\varphi: A \rightarrow B$ akslantirish (A, Ω) algebraning (B, Ω') algebraga gomomorfizmi deyiladi.

8.17-ta'rif. $\varphi: A \rightarrow B$ akslantirish (A, Ω) algebraning (B, Ω') algebraga gomomorfizmi bo'lsin. U holda agar φ - in'ektiv akslantirish bo'lsa, monomorfizm, φ - sur'ektiv akslantirish bo'lsa, epimorfizm, φ - biektiv akslantirish bo'lsa izomorfizm deyiladi. Monomorf akslantirishni izomorf joylashtirish deb ham yuritiladi.

8.18-ta'rif. Algebrani o'zini o'ziga gomomorf akslantirish endomorfizm, algebrani o'zini o'ziga izomorf akslantirish esa avtomorfizm deyiladi.

8.19-ta'rif. (A, Ω) algebrani (B, Ω') algebraga akslantiradigan kamida bitta izomorfizm mavjud bo'lsa, u holda (A, Ω) algebra (B, Ω') algebraga izomorf deyiladi.

8.20-misol. R - haqiqiy sonlar to'plami R^+ musbat haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin $(R^+, \bullet, 1)$ va $(R, +, 0)$ algebralar $(2, 0)$ tipli algebralar bo'lib, $\varphi: R^+ \rightarrow R$, $\varphi(x) = \lg x$ akslantirish birinchi algebraning ikkinchi algebraga izomorf akslantirishdir. Haqiqatdan φ - biektiv akslantirish bo'lib $\varphi(a \bullet b) = \lg(a \bullet b) = \lg a + \lg b = \varphi(a) + \varphi(b)$.

8.21-teorema. (A, Ω_1) , (B, Ω_2) , (C, Ω_3) algebralar berilgan bo'lib, g A to'plamini B to'plamga, φ esa B to'plamini C to'plamga akslantirish, $\varphi \circ g$ esa bu akslantirishlarning kompozitsiyasi bo'lsin. U holda φ va g lar gomomorfizm bo'lishidan $\varphi \circ g$ ning gomomorfizm bo'lishi, φ va g lar epimorfizm bo'lishidan $\varphi \circ g$ ning epimorfizm bo'lishi; φ va g lar monomorfizm bo'lishidan $\varphi \circ g$ ning

monomorfizm bo'lishi, φ va g larning izomorfizm bo'lishidan $\varphi \circ g$ ning izomorfizm bo'lishi kelib chiqadi.

Isbot. $\omega_1 \in \Omega_1$ n -ar algebraik amalga Ω_2 dan ω_2 n -ar algebraik amal mos qo'yilgan, ω_2 ga esa Ω_3 dan ω_3 n -ar algebraik amal mos qo'yilgan bo'lsin, u holda $\forall a_1, \dots, a_n \in A$ uchun teorema shartiga ko'ra φ va g akslantirishlar gomomorfizmlar bo'lishini inobatga olsak,

$$\begin{aligned} (\varphi \circ g)(\omega_1(a_1, \dots, a_n)) &= \varphi(g(\omega_1(a_1, \dots, a_n))) = \varphi(\omega_2(g(a_1), \dots, g(a_n))) = \\ &= \omega_3(\varphi(g(a_1)), \dots, \varphi(g(a_n))) = \omega_3((\varphi \circ g)(a_1), \dots, (\varphi \circ g)(a_n)) \end{aligned}$$

Shunday qilib φ va g lar gomomorfizmlar bo'lishidan $\varphi \circ g$ ning gomomorfizm bo'lishini isbot qildik. Teoremaning qolgan tasdiqlarini funksiyalar kompozitsiyasining xossalaridan bevosita kelib chiqadi.

8.22-teorema. Agar (A, Ω_1) algebraning (B, Ω_2) algebraga izomorfizmi bo'lsa, u holda φ ga teskari bo'lgan φ^{-1} akslantirish (B, Ω_2) algebraning (A, Ω_1) algebraga izomorfizmidir.

Isbot. φ -biektiv akslantirish bo'lganligi sababli φ^{-1} ham biektiv akslantirish bo'lishi 6.16-teoremada isbot qilingandek. SHuning uchun teoremani isbot qilish uchun φ^{-1} akslantirish algebraik amallarni saqlashini ko'rsatish kifoya.

Faraz qilaylik, $\omega_1 \in \Omega$ n -ar algebraik amalga Ω_2 to'plamidan ω_2 amal mos kelsin. $\forall b_1, \dots, b_n \in B$ elementlar uchun $\varphi(a_1) = b_1, \dots, \varphi(a_n) = b_n$ deb olsak, u holda $\varphi^{-1}(b_1) = a_1, \dots, \varphi^{-1}(b_n) = a_n$.

Endi $\varphi^{-1}(\omega_2(b_1, \dots, b_n)) = \omega_1(\varphi^{-1}(b_1), \dots, \varphi^{-1}(b_n))$ bo'lishini ko'rsatamiz. Haqiqatdan agar φ -akslantirish amallarni saqlashini hisobga olsak,

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\omega_2(b_1), \dots, \omega_2(b_n)) &= \varphi^{-1}(\omega_2(\varphi(a_1)), \dots, (\varphi(a_n))) = \varphi^{-1}(\varphi(\omega_1(a_1, \dots, a_n))) = \\ &= (\varphi^{-1} \circ \varphi)(\omega_1(a_1, \dots, a_n)) = \omega_1(a_1, \dots, a_n) = \omega_1(\varphi^{-1}(b_1), \dots, \varphi^{-1}(b_n)) \end{aligned}$$

8.23-natija. Algebralar izomorfizmi ekvivalentlik munosabatidir.

8.24-ta'rif. (A, Ω_1) va (A, Ω_2) bir hil tipli algebralar berilgan bo'lib, $B \subset A$ bo'lsin. Agar $\forall \omega_1 \in \Omega$ n -ar algebraik amalga Ω_2 dan mos keladigan n -ar algebraik amalni ω_2 orqali belgilaymiz. Agar $\forall b_1, \dots, b_n \in B$ uchun $\omega_2(b_1, \dots, b_n) = \omega_1(b_1, \dots, b_n)$ tenglik bajarilsa, u holda ω_2 n -ar algebraik amal ω_1 n -ar algebraik amalning B to'plami bo'yicha cheklangani (B, Ω_1) algebra esa (A, Ω_2) algebraning qism algebrasi yoki algebraosti deyiladi.

8.25-misol. $(Q, +, \bullet, 0, 1)$ algebra $(R, +, \bullet, 0, 1)$ algebraning algebraosti bo'lib, Q dagi amallar R dagi amallarni Q to'plam bo'yicha cheklanganidir.

8.26-teorema. Algebraosti bo'lish munosabati refleksiv, antisimmetrik, tranzitiv munosabat, ya'ni noqat'iy tartib munosabatdir.

Isbot. Haqiqatdan $\forall (A, \Omega_1)$ algebra (B, Ω_2) algebraning algebraostidir. Agar (A, Ω_1) algebra (B, Ω_2) algebraning algebraosti bo'lsa va aksincha (B, Ω_2) algebra (A, Ω_1) algebraning algebraosti bo'lsa, $A \subset B$ va $B \subset A$ bo'ladi, bundan $A = B$ kelib chiqadi. U holda, agar Ω_1 dagi ω_1 n -ar algebraik amalga Ω_2 dan ω_2 n -ar amal mos kelsa, $\forall a_1, \dots, a_n \in A$ uchun $\omega_1(b_1, \dots, b_n) = \omega_2(b_1, \dots, b_n)$ bo'ladi.

Algebraosti munosabati tranzitiv bo'lishi ham bevosita tekshiriladi. Buni mustaqil isbotlash uchun talabalarga qoldiramiz.

Shunday qilib, algebraosti bo'lish munosabati refleksiv, antisimmetrik va tranzitiv munosabat, ya'ni, noqat'iy tartib munosabat ekan.

$\{(A_\alpha, \Omega_\alpha) \mid -\alpha \in M\}$ to'plam (B, Ω) algebraning algebraostilari to'plami bo'lsin. Algebraostining ta'rifiga ko'ra har bir $(A_\alpha, \Omega_\alpha)$ algebra (B, Ω) algebra bilan bir hil turli va $\forall \omega_2$ n -ar algebraik amal Ω dagi qandaydir ω -ar algebraik amalning cheklanganidir.

Faraz qilaylik $\bigcap_{\alpha \in M} A_\alpha \neq \emptyset$ bo'lsin, u holda $\forall a_1, \dots, a_n \in \bigcap_{\alpha \in M} A_\alpha$ uchun $\omega_\alpha(a_1, \dots, a_n) = \omega(a_1, \dots, a_n) \in \bigcap_{\alpha \in M} A_\alpha$ bo'ladi. Demak, $\bigcap_{\alpha \in M} A_\alpha$ - to'plam ω -ar algebraik amalning $\bigcap_{\alpha \in M} A_\alpha$ dagi cheklanganlarini belgilasak: $(\bigcap_{\alpha \in M} A_\alpha, \Omega')$ algebra (B, Ω) algebraning algebraosti bo'lishi ravshan. Bu algebrani $(A_\alpha, \Omega_\alpha)$ -algebraostilarning kesishmasi deb ataymiz.

8.27-teorema. Agar (A, Ω) algebrada hech bo'lmaganda bitta nol o'rinli algebraik amal bo'lsa, bu algebraning algebraostilari ixtiyoriy to'plamidagi algebraostilar kesishmasi yana (A, Ω) ning algebraosti bo'ladi.

Isbot. Nol o'rinli amal ajratilgan element ekanligini hisobga olsak, bu element (A, Ω) algebraning har qanday algebraostining ham ajratilgan elementi bo'lishi kelib chiqadi. Demak, (A, Ω) algebraning algebraostilari ixtiyoriy to'plamidagi algebraostilari kesishmasi bo'sh emas. Natijada bu kesishma yuqorida isbotlaganimizga ko'ra algebraosti bo'ladi.

8.28-natija. (A, Ω) algebra va $B \neq \emptyset$ to'plam A ning to'plamosti berilgan bo'lsin. $\{(A_\alpha, \Omega_\alpha) \mid -\alpha \in M\}$ to'plam esa (A, Ω) algebraning $B \subset A_\alpha$ shartni qanoatlantiradigan barcha algebraostilari bo'lsin. U holda barcha $(A_\alpha, \Omega_\alpha)$ -algebraostilarning kesishmasi (A, Ω) algebraning algebraosti bo'ladi. Bu algebraosti B to'plam yaratgan algebraosti deyiladi.

A to'plam va unda bajarilgan n -ar algebraik amal, $\sim$ -ekvivalentlik munosabati berilgan bo'lsin. Agar $\forall a_1, \dots, a_n \in A$ va $\forall b_1, \dots, b_n \in A$ elementlar uchun $a_i \sim b_i, i = 1, \dots, n$ shartdan $\omega(a_1, \dots, a_n) \sim \omega(b_1, \dots, b_n)$ kelib chiqsa, $\sim$ -ekvivalentlik munosabati ω - n -ar algebraik amalga nisbatan kongruensiya deyiladi. $A/\sim$ to'plam A ning ekvivalentlik munosabatiga nisbatan faktor to'plami bo'lsin. $[a_1], \dots, [a_n]$ lar $A/\sim$ ning ixtiyoriy elementlari bo'lsin. U holda $\forall ([a_1], \dots, [a_n])$ n likga $[\omega(a_1, \dots, a_n)]$ ekvivalentlik sinfini mos qo'yadigan akslantirish $A/\sim$ to'plamda aniqlangan n -ar algebraik amaldir. Haqiqatdan $[\omega(a_1, \dots, a_n)]$ sinf $[a_1], \dots, [a_n]$ ekvivalentlik sinflaridan olingan a_i vakillarga bog'liq emas. Chunki, agar $v = 1, \dots, n$ lar uchun $b_i \in (a_i)$, ya'ni $b_i \sim a_i$ bo'lsa $\sim$ -ekvivalentlik munosabati kongruensiya bo'lgani uchun, $\omega(a_1, \dots, a_n) \sim \omega(b_1, \dots, b_n)$ bo'ladi, u holda $[\omega(a_1, \dots, a_n)] \sim [\omega(b_1, \dots, b_n)]$

$A/\sim$ faktor to'plamda aniqlangan bu amalning $\sim$ -kongruensiya orqali ω - n -ar algebraik amal bilan assosirlangan amal deb ataymiz va ω^* orqali belgilaymiz. SHunday qilib $\forall [a_1], \dots, [a_n] \in A/\sim$ uchun $\omega^*([a_1], \dots, [a_n]) = ([\omega(a_1, \dots, a_n)])$.

8.29-ta'rif. (A, Ω) algebra va $\sim$ Ω dagi har bir amalga nisbatan kongruensiya bo'lsin. Ω^* to'plam esa $A/\sim$ faktor-to'plamda aniqlangan va Ω dagi amallar bilan assosirlangan barcha amallar to'plami bo'lsin. U holda $(A/\sim, \Omega^*)$ - algebra (A, Ω) algebraning $\sim$ -kongruensiya bo'yicha faktor-algebrasi deyiladi.

8.30-misol. Z - butun sonlar to'plami bo'lsin. Z da $a \sim b$ deymiz va a ga $a-b$ juft son bo'lsa, $\sim$ - munosabat kongruensiya bo'lishi ravshan. Bu munosabat bo'yicha ekvivalentlik sinflari faqat ikkita bo'lib, ular $[0], [1]$ sinflardan iborat. Bu sinflar to'plamini $Z/\sim$ orqali belgilaylik, $\forall [a], [b] \in Z/\sim$ uchun $\oplus, \odot$ amallarini $[a] \oplus [b] = [a+b]$, $[a] \odot [b] = [a \bullet b]$ tengliklar orqali aniqlasak, $(\{[0], [1]\}, \oplus, \odot, [0], [1])$ algebra $(Z, \bullet, 0, 1)$ algebraning faktor algebrasi bo'ladi.

8.31-teorema. $\varphi: A \rightarrow B$ akslantirish (A, Ω_1) algebraning (B, Ω_2) algebraga epimorfizmi bo'lsin. U holda A to'plamda aniqlangan $R = \{(x'x'') \mid \forall x', x'' \in A, \varphi(x') = \varphi(x'')\}$ - munosabat Ω_1 to'plamdagi har bir amalga nisbatan kongruensiya bo'lib, A/R to'plam Ω_1^* amallar to'plamiga nisbatan (A, Ω_1) algebraning faktor algebrasi bo'ladi. Bu algebrani $(A/R, \Omega^*)$ orqali belgilaymiz.

Isbot. Teoremani isbot qilish uchun $R - \Omega_1$ dagi har bir ω_1 n -ar amalga nisbatan kongruensiya bo'lishini ko'rsatish etarli. R - ekvivalentlik munosabati bo'lishi isbotlangan edi. SHuning uchun $\forall a_1, \dots, a_n \in A$ va $b_1, \dots, b_n \in A$ elementlar uchun $a_i R b_i, i = 1, \dots, n$ munosabatdan $\omega_1(a_1, \dots, a_n) R \omega_1(b_1, \dots, b_n)$ bo'lishini ko'rsatishimiz etarli.

Shartga ko'ra $\varphi(a_i) = \varphi(b_i), i = 1, \dots, n$, u holda φ -gomomorfizm bo'lishi uchun $\varphi(\omega_1(a_1, \dots, a_n)) = \omega_1(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) = \omega_1(\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)) = \varphi(\omega_1(b_1, \dots, b_n))$.

Demak, $\omega_1(a_1, \dots, a_n) R \omega_1(b_1, \dots, b_n)$.

8.32-teorema. $\varphi: A \rightarrow B$ akslantirish (A, Ω_1) algebraning (B, Ω_2) algebraga epimorfizmi, $R = \{(x'x'') \mid \forall x', x'' \in A, \varphi(x') = \varphi(x'')\}$ -esa A da aniqlangan ekvivalentlik munosabati bo'lsin. U holda $(A/R, \Omega^*)$ faktor algebra (B, Ω_1) algebraga izomorfdir.

Isboti. Har bir $[a] \in A/R$ sinfga $\varphi(a)$ ni mos qo'yadigan $\Phi: A/R \rightarrow B$ akslantirish $(A/R, \Omega_1^*)$ algebrani (B, Ω_2) algebraga akslantiradigan izomorfizmdir. Haqiqatdan 6.16-teoremada bu akslantirish biektiv bo'lishi tasdiqlangan edi. Undan tashqari $\forall [a_1], \dots, [a_n] \in A/R$ elementlar va $\forall \omega_1 \in \Omega_1^*$ n -ar algebraik amal uchun $\Phi(\omega_1^*([a_1], \dots, [a_n])) =$

$$= \Phi([\omega_1(a_1, \dots, a_n)]) = \varphi(\omega_1(a_1, \dots, a_n)) = \omega_1(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) = \omega_1^*(\Phi([a_1]), \dots, \Phi([a_n]))$$

8.33-teorema. $(A, *)$ gruppoid, $\sim$ -esa, A dagi kongruensiya munosabati $A/\sim$ - A to'plamning $\sim$ -ekvivalentlik munosabati bo'yicha faktor-to'plami bo'lsin. U

holda $\forall [a_1], [a_2] \in A/\sim$ ekvivalentlik sinflari uchun $[a_1] * [a_2] = [a_1 * a_2]$ tenglik bilan aniqlanadigan munosabat A/N to'plamda algebraik amal bo'ladi.

Isboti. Teoremani isbot qilish uchun $\forall [a_1], [a_2]$ sinflarga teorema shartida ko'rsatilgan tenglik yagona sinfni mos qo'yishini ko'rsatish etarli.

Faraz qilaylik, $\forall b_1, E[a_1]$ va $\forall b_2, E[a_2]$ bo'lsin, u holda $b_1 \sim a_1$ va $b_2 \sim a_2$. Teorema shartiga ko'ra $\sim$ kongruensiya. Demak, $b_1 * b_2 \sim a_1 * a_2$ ya'ni, $[a_1 * a_2] = [b_1 * b_2]$. Demak, $[a_1] * [a_2]$ ifoda $[a_1]$ va $[a_2]$ ekvivalentlik sinflaridan olingan vakillarga bog'liq bo'lmagan yagona ekvivalentlik sinfi ekan.

SHunday qilib, $A/\sim$ to'plam $*$ - amalga nisbatan gruppoid bo'lishini isbot qildik. Bu gruppoidni $(A, *)$ gruppoidning faktor gruppoidi deb ataymiz va $(A/\sim, \oplus)$ orqali belgilaymiz.

8.34-misol. $(Z, +)$ -gruppoidda $\forall z_1, z_2 \in A$ uchun $(z_1 \sim z_2) \Leftrightarrow ((z_1 - z_2) : 3)$ qonuniyat bilan aniqlangan munosabat kongruensiyabo'lishini yuqorida ko'rdik. Z ning $\sim$ munosabat bo'yicha ekvivalentlik sinflari $Z_3 = \{[0], [1], [2]\}$ to'plamidan iborat. U holda $Z_3, \forall [a], [b] \in Z_3$ uchun $[a] \oplus [b] = [a + b]$ tenglik yordamida aniqlangan amalga nisbatan gruppoid bo'lib, Z ning faktor gruppoididir.

8.35-teorema. $(G_1, \Omega_1), (G_2, \Omega_2), (G, \Omega)$ - bir hil turli algebra berilgan bo'lib, $G_1 \cong G_2, (G_2, \Omega_2)$ - algebra (G, Ω) - algebraning algebraostisi bo'lsin. U holda (G_1, Ω_1) - qism algebradan iborat qism algebraga ega bo'lgan (G, Ω) algebraga izomorf (G_3, Ω_3) algebra mavjud.

Isbot. Faraz qilaylik $\forall \omega_1 \in \Omega_1$ n -ar algebraik amalga $\omega_2 \in \Omega_2$ n -ar algebraik amal, $\omega_2 \in \Omega_2$ algebraik amalga esa $\omega \in \Omega$ n -ar algebraik amal mos kelsin va $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ izomorf akslantirish bo'lsin.

$G_3 = (G/G_2) \cup G_1$ to'plamda har bir $\omega \in \Omega$ n -ar algebraik amalga mos qilib ω_3 n -ar algebraik amalni $\forall a_1, \dots, a_k \in G \setminus G_2, \forall a_{k+1}, \dots, a_n \in G_1$ elementlar uchun, agar $\omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \varphi(a_n)) \in G_2$ bo'lsa,

$$\omega_3(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) = \varphi^{-1}(\omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \dots, \varphi(a_n)));$$

Agar $\omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \varphi(a_n)) \in G \setminus G_2$ bo'lsa,

$\omega_3(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) = \omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \varphi(a_n))$ tengliklar yordamida aniqlaylik. Agar shunday usulda G_3 da aniqlangan barcha amallar to'plamini Ω_3 orqali belgilasak (G_3, Ω_3) - algebra hosil bo'ladi. Bu algebra teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiruvchi algebradir. Algebraning tuzilishiga asosan (G_1, Ω_1) algebra bu algebraning algebraostisi bo'lib, (G_3, Ω_3) va (G, Ω) algebra bir hil turlidir.

$$\forall a_3 \in G_3 \text{ uchun } \psi(a_3) = \begin{cases} a_3, & \text{agar } a_3 \in G_1 \setminus G_2 \\ \varphi(a_3), & \text{agar } a_3 \in G_2 \end{cases}$$

akslantirish (G_3, Ω_3) algebrani (G, Ω) algebraga izomorf akslantiradi.

Haqiqatdan ψ – tuzilishiga asosan biektiv akslantirish bo'lishi ravshan. Shuning uchun ψ Ω_3 dagi amallarni saqlashini ko'rsatish kifoya $\forall \omega_3 \in \Omega, a_1, \dots, a_k \in G \setminus G_2, a_{k+1}, \dots, a_n \in G_1$ uchun $\psi(\omega_3(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)) = \omega(\psi(a_1), \dots, \psi(a_k), \psi(a_{k+1}), \dots, \psi(a_n))$ tenglikni isbot qilamiz va ψ lar ω_3 ning aniqlanishiga ko'ra agar $\omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \varphi(a_n)) \in G_T / G_2$ bo'lsa, $\psi(\omega_3(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)) = \psi(\omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \varphi(a_n))) = \omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \varphi(a_n)) = \omega(\psi(a_1), \dots, \psi(a_k), \psi(a_{k+1}), \dots, \psi(a_n))$, agar $\omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \varphi(a_n)) \in G_2$ bo'lsa yana ω_3 va ψ larning aniqlanishiga va $\varphi^{-1}(\omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \dots, \varphi(a_n))) \in G_1$ bo'lishiga ko'ra $\psi(\omega_3(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)) = \psi(\varphi^{-1}(\omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \dots, \varphi(a_n)))) = \varphi(\varphi^{-1}(\omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \dots, \varphi(a_n)))) = \omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \varphi(a_n)) = \omega(\psi(a_1), \dots, \psi(a_k), \psi(a_{k+1}), \dots, \psi(a_n))$.

Takrorlash uchun savollar:

1. Yarimgrupp deb nimaga aytiladi?
2. Monoidga ta'rif bering va misol keltiring.
3. Algebra tushunchasiga maktab matematikasidan misollar keltiring.
4. Algebraning turi qanday aniqlanadi?
5. Algebralar gomomorfizmini tushuntiring.
6. Monomorfizm, epimorfizmga misollar keltiring.
7. Izomorfizm, avtomorfizm ta'rifidagi umumiy, farqli shartlarni aniqlang.
8. Gomomorfizmlar kompozitsiyasi Y Ana gomomorfizm ekanligini isbotlang.
9. Biektiv akslantirishlar izomorfizm bo'la oladimi?
10. Algebralar izomorfizmi ekvivalentlik munosabati ekanligini asoslang.
11. Algebraostilar kesishmasi yana algebra bo'lishini isbotlang.
12. Faktor-algebra tushunchasini misol yordamida tushuntiring.

9- ma'ruza. Gruppalar. Halqa. Xossalari. Gruppalar, halqalar gomomorfizmi

Reja:

1. Gruppalar va uning sodda xossalari.
2. Gruppalar izomorfizmi.
3. Gruppaoosti, xossalari.
4. Halqa va uning sodda xossalari.
5. Halqalar gomomorfizmi.

Asosiy tushunchalar: gruppalar, abel gruppasi, multiplikativ gruppalar, additiv gruppalar, gruppalar gomomorfizmi, gruppaoosti, halqa, kommutativ halqa, butunlik sohasi, halqalar gomomorfizmi, qismhalqa.

Adabiyotlar: [1]: 1-qism; [6]: 94-102; 104-111 [7]: 3-modul.

9.1-ta'rif. Bizga $(2,1)$ turli $(G,*,1)$ algebra berigan bo'lib quyidagi shartlar bajarilsin.

1. $*$ -binar algebraik amal assosiativ, ya'ni $\forall a,b,c \in G$ uchun $(a*b)*c = a*(b*c)$ bo'lsin.

2. G da neytral element mavjud, ya'ni $\forall a \in G$ uchun shunday $e \in G$ topilib, $e*a = a$ shart bajarilsin.

3. Har qanday $a \in G$ uchun $a'*a = e$ bo'lsin.

U holda $(G,*,')$ - algebra gruppa deyiladi.

Gruppadagi amal kommutativ, ya'ni $\forall a,b \in G$ uchun $a*b = b*a$ shart bajarilsa, bunday gruppa abel gruppasi deyiladi. Bunday gruppalar, gruppalar nazariyasidagi yuqori darajali tenglamalarni echishi muamalarini qo'ygan I. G. Abel sharafiga abel gruppalari deb nomlangan.

Har bir $a \in G$ element uchun $a' \in G$ element a elementga chapdan simmetrik deyiladi. Gruppadagi elementlar soni uning tartibi deyiladi. Agar gruppa tartibi natural sondan iborat bo'lsa, bunday gruppa chekli tartibli gruppa, aks holda cheksiz tartibli gruppa deyiladi.

Gruppada $*$ - binar algebraik amal "+"- qo'shish amali yoki " $\bullet$ "- ko'paytirish amali bo'lishi mumkin. Bu amallarga nisbatan qo'llaniladigan tushunchalar quyidagi jadvalda keltirilgan.

$*$	$\bullet$	$+$
1) binar amal 2) neytral element 3) simmetrik element	ko'paytirish birlik element teskari element	qo'shish nol qarama-qarshi element

Birlik elementni ko'pincha e yoki 1 orqali, nolni "0"- orqali, a ga teskari elementni a^{-1} , a ga qarama-qarshi elementni $-a$ orqali belgilash qabul qilingan.

Gruppadagi binar algebraik amal " $\bullet$ " bo'lsa, bunday gruppani multiplikativ gruppa, "+" bo'lsa additiv gruppa deymiz. Gruppadagi amalni ko'paytirish deb qarash yozuvni ixchamlashtiradi, shu sabab, multiplikativ gruppaning terminlaridan foydalanamiz.

9.2-teorema. Gruppadagi ixtiyoriy elementga chap teskari element, shu elementga o'ngdan ham teskari bo'ladi.

Isbot. Gruppaga tegishli $\forall a$ elementga chapdan teskari a^{-1} element, o'ngdan ham teskari bo'lishini ko'rsatamiz. SHartga ko'ra $a^{-1} \bullet a = e$ undan tashqari $(a^{-1})^{-1}$ element a^{-1} ga chapdan teskari element bo'lsa $(a^{-1})^{-1} \bullet a^{-1} = e$ bo'lishi ham ravshan u holda, gruppa ta'rifining 2 va 3 shartlariga ko'ra $a \bullet a^{-1} = e(a \bullet a^{-1}) = ((a^{-1})^{-1} \bullet a^{-1}) \bullet (a \bullet a^{-1}) = (a^{-1})^{-1} ((a^{-1} \bullet a) a^{-1}) = (a^{-1})^{-1} \bullet (e a^{-1}) = (a^{-1})^{-1} \bullet a^{-1} = e$

SHunday qilib $a \bullet a^{-1} = e$, ya'ni a^{-1} element a elementga o'ngdan teskari element ekan.

9.3-teorema. Gruppada o'ng birlik element, chap birlik element bo'ladi.

Isbot. Gruppa ta'rifi va 9.2-teoremaga ko'ra $a \bullet e = a \bullet (a^{-1} \bullet a) = (a \bullet a^{-1})a = ea = a$.

9.4-teorema. Gruppada birlik element yagonadir.

Isbot. 9.3- teoremada chap birlik element o'ng birlik elementga tengligini ko'rsatdik. Bu elementni gruppaning birlik elementi deb ataymiz. Endi ikkita e_1 va e_2 birlik elementlar mavjud deb faraz qilaylik. U holda $e_1 = e_1 \bullet e_2 = e_2 \bullet e_1 = e_2$

9.5-teorema. Gruppada ixtiyoriy element uchun yagona teskari element mavjud.

Isbot. Haqiqatdan a_1 elementga a_1^{-1} va a_2^{-1} teskari elementlar mavjud bo'lsin, u holda $a_1^{-1} = a_1^{-1} \bullet e = a_1^{-1}(a \bullet a_2^{-1}) = (a_1^{-1} \bullet a) \bullet a_2^{-1} = e \bullet a_2^{-1} = a_2^{-1}$.

9.6-teorema. Gruppaning ixtiyoriy a va b elementlari uchun $ax = b$ va $ya = b$ tenglamalarning har biri yagona echimga ega.

Isbot. $x = a^{-1} \bullet b$ va $y = b \bullet a^{-1}$ elementlar mos ravishda bu tenglamalarning echimi bo'lishi ayon. Faraz qilaylik $ax = b$ tenglamaning ikkita x_1 va x_2 echimlari bo'lsin. U holda $ax_1 = b = ax_2$ yoki $ax_1 = ax_2$. Bu tenglikning ikkila tomonini a^{-1} ga ko'paytirsak $a^{-1} \bullet (ax_1) = a^{-1} \bullet (ax_2)$ yoki $(a^{-1}a)x_1 = (a^{-1}a)x_2$ u holda $ex_1 = ex_2$ demak $x_1 = x_2$ bo'ladi. Ikkinchi tenglama echimi yagona bo'lishi shunga o'xshash isbot qilinadi.

9.7-natija. Gruppaning ixtiyoriy a, b, c elementlar uchun $a \bullet b = a \bullet c$ yoki $b \bullet a = c \bullet a$ bo'lsa $a = c$ bo'ladi.

9.8-natija. Gruppada ixtiyoriy a, b, c elementlar uchun $a \bullet b = e$ yoki $c \bullet b = e$ bo'lsa, $b = e = c$ bo'ladi.

9.9-natija. Gruppada ixtiyoriy e element uchun $(a^{-1})^{-1} = a$, ya'ni a^{-1} elementning teskarisi a elementdir.

9.10-natija. Gruppaning ixtiyoriy a, b elementlar uchun $a \bullet b = e$ bo'lsa a va b elementlar bir-biriga teskari elementlardir.

Bu natijalarning isboti yuqoridagi teoremlardan bevosita kelib chiqadi, shuning uchun ularning isbotini o'quvchilarga mashq sifatida qoldiramiz.

Gruppalar nazariyasida gomomorfizm, izomorfizm, gruppaosti tushunchalari algebradagi mos tushunchalarning xususiy xollari bo'lib, ular quyidagicha kiritiladi: $(G, \bullet, ^{-1})$ va $(H, \bullet, ^{-1})$ gruppalar berilgan bo'lib, $h: G \rightarrow H$, G ni H ga akslantirish bo'lsin. U holda $\forall a, b \in G$ uchun $h(a \bullet b) = h(a) \bullet h(b)$ va $h(a^{-1}) = (h(a))^{-1}$ shartlar bajarilsa, h - gomomorf akslantirish deyiladi. Agar h - in'ektiv bo'lsa, monomorf, sur'ektiv bo'lsa, epimorf, biektiv bo'lsa, izomorf akslantirish deyiladi.

9.9-ta'rif. $(G, \bullet, ^{-1}), (H, \bullet, ^{-1})$ gruppalar berilgan bo'lsin. Agar G ni H ga akslantiradigan kamida bitta izomorf akslantirish mavjud bo'lsa bu gruppalar izomorf deyiladi va $G \cong H$ orqali belgilanadi.

9.10-ta'rif. Gruppni o'zini o'ziga gomomorf akslantirish endomorfizm, o'ziga o'zini izomorf akslantirish automorfizm deyiladi.

9.11-teorema. $(G, \bullet, ^{-1}), (H, \bullet, ^{-1})$ gruppalar berilgan bo'lsin. G ni H ga akslantiradigan $\varphi: G \rightarrow H$ -akslantirish gomomorf akslantirish bo'lishi uchun G dagi binar amalni saqlash etarli, ya'ni $\forall a, b \in G$ uchun $\varphi(a \bullet b) = \varphi(a) \bullet \varphi(b)$ bo'lishi etarli.

Isbot. Berilgan gruppalarining birlik elementlari mos ravishda e va e' bo'lsin, u holda $\varphi(e) = e'$. Haqiqatdan $\varphi(e) = \varphi(e \bullet e) = \varphi(e) \bullet \varphi(e)$.

Demak, $e' = \varphi(e) \bullet \varphi(e)^{-1} = (\varphi(e) \bullet \varphi(e))\varphi(e)^{-1} = \varphi(e) \bullet (\varphi(e) \bullet \varphi(e)^{-1}) = \varphi(e) \quad \forall a \in G$
 uchun $\varphi(e) = \varphi(a \bullet a^{-1}) = \varphi(a) \bullet \varphi(a^{-1})$ u holda
 $\varphi(a^{-1}) = \varphi(e) \bullet \varphi(a)^{-1} = e' \bullet \varphi(a)^{-1} = \varphi(a)^{-1}$, ya'ni $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

9.12-teorema. Gruppalarining izomorfizmi ekvivalentlik munosabatidir.

9.13-misol. R^+ -musbat haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin. R^+ haqiqiy sonlarni ko'paytirish va teskarisini olish amallariga nisbatan multiplikativ gruppaga tashkil qiladi.

R - haqiqiy sonlar to'plami esa qo'shish va qarama-qarshisini olish amallariga nisbatan additiv gruppaga hosil qiladi. Bu gruppalarni mos ravishda $(R^+, \bullet, -1)$ va $(R, +, -)$ orqali belgilaylik. $\varphi: R \rightarrow R^+ \quad \varphi(x) = e^x$ -biektiv akslantirish bo'lib $\forall x_1, x_2 \in R$ uchun $\varphi(x_1 + x_2) = e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} \bullet e^{x_2} = \varphi(x_1) \bullet \varphi(x_2)$.

9.14-ta'rif. Gruppning gruppadagi amallariga nisbatan yopiq bo'sh bo'lmagan to'plamostisi gruppaosti deyiladi.

$(G, \bullet, ^{-1})$ -gruppa berilgan bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra $H \neq \emptyset$ va $H \subset G$ to'plamosti gruppaosti bo'lishi uchun $\forall a, b \in H$ elementlari uchun $a \bullet b \in H$ va $a^{-1} \in H$ bo'lishi etarli. U holda $a \bullet a^{-1} = e \in H$. Ya'ni gruppning neytral elementi gruppaosti uchun ham neytral element ekan. $H \subset G$ bo'lganligi uchun gruppaostida ham " $\bullet$ " binar algebraik amal assosiativdir. SHunday qilib, gruppaosti ham o'z navbatida gruppaga hosil qilar ekan.

9.15-teorema. $(G, \bullet, ^{-1})$ gruppa berilgan bo'lsin $H \neq \emptyset$ $H \subset G$ to'plamosti gruppaosti bo'lishi uchun $\forall a, b \in H$ elementlari uchun $a \bullet b^{-1} \in H$ bo'lishi zarur va etarli.

Isbot. Agar $(H, \bullet, ^{-1})$ gruppaosti bo'lsa, $\forall a, b \in H$ uchun $a \bullet b^{-1} \in H$ bo'lishi ravshan. Faraz qilaylik $\forall a, b \in H$ uchun $a \bullet b^{-1} \in H$ bo'lsin. U holda xususan $a = b$ bo'lsa $a \bullet a^{-1} = e \in H$ bo'lib, bundan $\forall e, b$ elementlar uchun $e \bullet b^{-1} \in H$, ya'ni $\forall b$ uchun $b^{-1} \in H$ bo'lishi kelib chiqadi. Agar $\forall a, b \in H$ uchun $a \bullet b^{-1} \in H$ shartda b ni b^{-1} bilan almashtirsak, $\forall a, b \in H$ uchun $a \bullet b \in H$ bo'lishi kelib chiqadi. Ya'ni H - gruppaosti ekan.

9.16-teorema. Gruppaosti bo'lish munosabati noqat'iy tartib munosabatidir.

9.17-teorema. $(G, \bullet, ^{-1})$ gruppning gruppaostilaridan iborat bo'sh bo'lmagan $\mathcal{B}$ to'plamning barcha elementlarining kisishmasi yana gruppaosti bo'ladi.

$(G, \bullet, ^{-1})$ gruppa va G ning bo'sh bo'lmagan to'plamostisi M birilgan bo'lsin. $M \subset G$ shartni qanoqlantiradigan $(G, \bullet, ^{-1})$ ning barcha $(G\alpha \bullet ^{-1})$ larning kisishmasi

M to'plam yaratgan gruppaoosti deyiladi va bu gruppaoosti $(\langle M \rangle^{-1}, \bullet)$ orqali belgilanadi. Agar M -bir elementli to'plam bo'lsa, bu gruppao siklik gruppao deyiladi.

9.18-misol. $M = \{1, 2, \dots, h\}$ to'plam berilgan bo'lsin. M ni M ga akslantiradigan har qanday biektiv akslantirish M to'plamda aniqlagan o'ringa qo'yish deyiladi. M to'plamda aniqlangan barcha o'rniga qo'yishlar to'plamini S_n orqali belgilaymiz. S_n da ikkita φ va ψ o'rniga qo'yilarning kompozitsiyasini $\forall x \in M$ uchun $\varphi \circ \psi(x) = \varphi(\psi(x))$ ko'rinishda aniqlasak, S_n to'plam « $\circ$ » amalga nisbatan gruppao tashkil etadi.

Xaqiqatdan, ikkita biektiv funksiyalarning kompozitsiyasi yana biektiv funksiya bo'lib, assosiativdir. Har qanday biektiv funksiya teskari funksiya mavjud, $\varphi(x) = x$ tenglik bilan aniqlangan o'rniga qo'yish esa kompozitsiya amaliga nisbatan neytral elementdir.

Bu misolni $n = 3$ uchun ko'rib chiqishni o'quvchilarga havola qilamiz.

9.19-misol. Muntazam k -burchakni diagonallari kesishgan nuqta atrofida $\frac{2\pi}{k} \bullet n, k = 3, 4, \dots, n-1$ burchaklarga burishlar to'plami, burishlarni ketma-ket bajarish amaliga nisbatan gruppao hosil qiladi.

9.20-misol. G -tekislikdagi vektorlar to'plami bo'lsin. U holda G vektorlarni qo'shish amaliga nisbatan gruppao hosil qiladi.

9.21-misol. $(\mathbb{Z}, +, -)$ -butun sonlar additiv gruppao $(\mathbb{Q}, +, -)$ rasional sonlar additiv gruppaoining gruppaoostisidir.

9.22-misol. $(\mathbb{Q}, +, \bullet, ^{-1})$ -musbat rasional sonlar multiplikativ gruppao $(\mathbb{R}^+, \bullet, ^{-1})$ musbat haqiqiy sonlar multiplikativ gruppaoining gruppaoostisidir.

9.23-ta'rif. Agar $(K, +, -, \bullet)$ $(2, 1, 2)$ turli algebra uchun quyidagi shartlar bajarilsa

(1) $(K, +, -,)$ abel' gruppao;

(2) $(K, \bullet)$ -yarim gruppao;

(3) $\forall a, b, c \in K$ uchun $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$ va $(b + c) \bullet a = b \bullet a + c \bullet a$ u holda $(K, +, -, \bullet)$ - algebra halqa deyiladi.

$(K, +, -,)$ additiv gruppaoining neytral elementi halqaning noli deyiladi va 0 orqali belgilanadi.

$\mathbb{Z}$ halqa unda bajarilgan " $\bullet$ "-amalining xossalriga mos ravishda nomlanadi. Agar ko'paytirish amali assosiativ bo'lsa, halqa assosiativ halqa, ko'paytirish amaliga nisbatan birlik element mavjud bo'lsa, halqa birlik elementli halqa deyiladi.

Agar halqada $a \neq 0$ va $b \neq 0$ elementlar uchun $a \bullet b = 0$ bo'lsa, a nolning chap bo'luvchisi, b esa nolning o'ng bo'luvchisi deyiladi. Nolning ham chap, ham o'ng bo'luvchisi bo'lgan element nolning bo'luvchisi deyiladi. Biz asosan birlik elementga ega bo'lgan assosiativ halqalarni o'rganamiz. Halqaning birlik elementini odatda 1 orqali belgilaymiz.

9.24-ta'rif. Nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan assosiativ, kommutativ halqada $1 \neq 0$ shart bajarilsa, bunday halqa butunlik sohasi deyiladi.

9.25-misol. Z -butun sonlar to'plami $+, -, \bullet$ amallariga nisbatan halqa bo'lib, $(Z, +, -, \bullet)$ orqali belgilanadi. Bu halqa butunlik sahasidir.

9.26-misol. $K = \{0, e, a, b\}$ to'plamida $+, -, \bullet$ amallari quyidagi jadvallar orqali berilgan bo'lsin:

$\oplus$	0	e	a	b
0	0	e	0	b
e	e	a	a	a
a	a	b	0	e
b	b	a	a	a

$\odot$	0	e	a	b
0	0	0	0	0
e	0	e	a	b
a	0	a	0	a
b	0	b	a	e

$(K, \oplus, \ominus, \odot)$ algebra kommutativ, assosiativ, birlik elementga ega bo'lgan halqadir. Lekin $a \bullet a = 0$, bo'lib a nolning bo'livchisidir.

9.27-teorema. $(K, +, -, \bullet)$ halqa berilgan bo'lib, a, b, c lar halqaning ixtiyoriy elementlari bo'lsin, u holda

(I) agar $a + b = a$ bo'lsa, $b = 0$.

(II) agar $a + b = 0$ bo'lsa, $a = -b$.

(III) $-(-a) = a$.

(IV) $0 \bullet a = a \bullet 0 = 0$.

(V) $(-a)(-b) = a \bullet b$.

(VI) $(a - b) \bullet c = ca - bc$.

(VII) $c(a - b) = ca - cb$.

Isbot. I, II, III, IV tasdiqlar $(K, +, -, \bullet)$ -kommutativ gruppalligidan bevosita kelib chiqadi. (VI)- xossaning isbotini keltiramiz.

$$a \bullet 0 = a(0 + 0) = a \bullet 0 + a \bullet 0 \Rightarrow a \bullet 0 = a \bullet 0 + a \bullet 0 \Rightarrow a \bullet 0 = 0$$

$0 \bullet a = 0$ tenglik shunga o'xshash isbot qilinadi.

(V) tsadiqning isboti.

$$(-a) \bullet b + a \bullet b = ((-a) + a) \bullet b = 0 \bullet b = 0. \text{ Demak, } (-a) \bullet b = -(a \bullet b);$$

U holda $ab = -(-a) \bullet b$. Endi $(-a) \bullet (-b) + (-a) \bullet b = (-a)(-b + b) = (-a) \bullet 0 = 0$ ni hisobga olsak $(-a)(-b) = -(-a) \bullet b = ab$.

(VII) tasdiq (VI) ga o'xshash isbotlanadi.

9.28-ta'rif. $(K, +, -, \bullet)$ va $(K', +, -, \bullet)$ halqalar berilgan bo'lsin. K ni K' ga akslantiradigan va $(K, +, -, \bullet)$ halqaning hamma amallarini saqlaydigan $\varphi: K \rightarrow K'$ akslantirish gomomorf akslantirish deyiladi.

Odatdagidek φ -in'ektiv bo'lsa, monomorf, suryektiv bo'lsa epimorf, biektiv bo'lsa izomorf akslantirish deyiladi. Halqani o'zini-o'ziga gomomorf akslantirish endomorfizm, izomorf akslantirish esa avtomorfizm deyiladi.

Huddi algebradagidek halqalarning izomorfizmi ekvivalentlik munosabati bo'lib, izomorf halqalar $(K, +, -, \bullet) \cong (K', +, -, \bullet)$ orqali belgilanadi.

9.29-misol $(Z, +, -, \bullet)$ butun sonlar halqasi $(K, \oplus, \ominus, \odot)$ 9.26-misoldagi halqa bo'lsin, u holda $\varphi: Z \rightarrow K$,

$$\varphi(z) = \begin{cases} 0, & \text{agar } z = 4k \\ e, & \text{agar } z = 4k + 1 \\ a, & \text{agar } z = 4k + 2 \\ b, & \text{agar } z = 4k + 3 \end{cases} \text{ akslantirish gomomorfizmdir.}$$

Halqaosti tushunchasi ham, algebraosti tushunchasi kabi kiritiladi.

9.30-ta'rif. $(K, +, -, \bullet)$ halqa berilgan bo'lsin. L esa K ning bo'sh bo'lmagan to'plamostisi bo'lsin.

Agar L to'plam K dagi $+, -, \bullet$ amallariga nisbatan algebraik yopiq bo'lsa, ya'ni $\forall a, b \in L$ uchun $a + b \in L$, $a \bullet b \in L$, $-a \in L$ shartlar bajarilsa $(L, +, -, \bullet)$ -algebra $(K, +, -, \bullet)$ halqaning halqaostisi deyiladi.

Halqaosti o'z navbatida halqa bo'lishi ravshan, chunki halqa ta'rifining qolgan shartlari $L \subset K$ munosabatdan kelib chiqadi.

9.31-teorema. Halqaning noli halqaostining ham noli bo'ladi. Agar halqada ko'paytirishga nisbatan neytral element mavjud bo'lsa, bu element L uchun ham ko'paytirishga nisbatan neytral element bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Gruppa ta'rifini keltiring. Uning asosiy xossalarini ayting.
2. Additiv, multiplikativ gruppalariga algebra, geometriya kursidan misollar keltiring.
3. Gruppalar gomomorfizmining qanday turlarini bilasiz?
4. Har qanday gomomorfizm izomorfizm bo'la oladimi, yoki aksincha?
5. Gruppalar avtomorfizmi nima?
6. Gruppaosti tushunchasiga misollar keltiring.
7. Halqaning qanday turlarini bilasiz?
8. Halqalar gomomorfizmi, izomorfizmiga misollar keltiring.
9. Halqalar avtomorfizmi ta'rifini bayon qiling.
10. Halqaostilar kesishmasi yana halqaosti bo'lishini isbotlang.

10- ma'ruza. Algebraik sistemalar. Sistemaosti. Algebraik sistemalar gomomorfizmi

Reja:

1. Algebraik sistema.
2. Algebraik sistemalar gomomorfizmi.
3. Algebraik sistemaning sistemaosti.

Asosiy tushunchalar: algebraik sistema, algebraik sistema turi, algebraik sistemalar gomomorfizmi, algebraik sistema sistemaosti.

Adabiyotlar: [1]: 1-qism; [6]: 112-115; [7]: 3-modul.

10.1-ta'rif. $A \neq \emptyset$ to'plam uchun $\Omega - A$ dan aniqlangan amallar to'plami $\Omega' - A$ da aniqlangan munosabatlar to'plami bo'lsin. U holda (A, Ω, Ω') - tartiblangan uchlik- algebraik sistema deyiladi.

A -to'plam algebraik sistemaning asosiy to'plami, Ω -algebraik sistemaning bosh amallari to'plami, Ω' - algebraik sistemaning bosh munosabatlari to'plami deyiladi.

Har qanday n -o'rinli algebraik amalni $(n+1)$ - o'rinli algebraik munosabat sifatida qarashimiz mumkinligi ayon. Haqiqatdan ham $\omega : A^n \rightarrow A$ n -ar algebraik amalni $R_\omega = \{(a_1, \dots, a_n); \omega(a_1, \dots, a_n) \mid \forall a_1, \dots, a_n \in A\}$ $n+1$ o'rinli munosabat deyishimiz mumkin. Agar (A, Ω, Ω') algebraik sistema berilgan bo'lsa, uni A to'plam va unda berilgan $\Omega \cup \Omega'$ - munosabatlar to'plamidan iborat $(A, \Omega \cup \Omega')$ - juftlik sifatida qarashimiz mumkin. Aytilganlarni hisobga olsak quyidagilarga ega bo'lamiz.

10.2-ta'rif. $A \neq \emptyset$ to'plam unda aniqlangan Ω - munosabatlar to'plamidan iborat (A, Ω) juftlik algebraik sistema deyiladi.

10.3-ta'rif. (A, Ω_1) va (B, Ω_2) algebraik sistemalar berilgan bo'lsin. Agar Ω_1 va Ω_2 - munosabatlar to'plami orasida biektiv moslik o'rnatilgan bo'lib, natijada Ω_1 dagi har bir n - o'rinli ω_1 munosabatga Ω_2 da ham ω_2 k -o'rinli munosabat mos kelsa, bu algebraik sistemalar bir xil turli sistemalar deyiladi.

10.4-misol. Z - butun sonlar to'plami, unda bajarilgan $+, \bullet, 0, 1$ amallar va $\geq$ munosabatga nisbatan algebraik sistemadir. Uni $(Z, +, \bullet, 0, 1, \geq)$ orqali belgilaymiz va butun sonlar sistemasi deb ataymiz.

10.5-misol. Z - butun sonlar to'plami, $2Z$ esa juft butun sonlar to'plami bo'lsin, u holda $(Z, +, 0, \geq)$ va $(2Z, +, 0, \geq)$ algebraik sistemalar bir xil turli algebraik sistemalardir.

(A, Ω_1) va (B, Ω_2) bir xil turli algebraik sistemalar berilgan bo'lib, $\omega_1 \in \Omega_1$ n - ar munosabatga $\omega_2 \in \Omega_2$ n - ar algebraik munosabat mos qo'yilgan bo'lsin. Agar, A to'plamni B to'plamga akslantiradigan $\varphi : A \rightarrow B$ akslantirish berilgan bo'lib, $\forall a_1, \dots, a_n \in A$ elementlar uchun $(a_1, \dots, a_n) \in \omega_1$ bo'lishidan $(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) \in \omega_2$ bo'lishi kelib chiqsa, φ akslantirish, R_1 munosabatni saqlaydi deb ataymiz. A to'plamni B to'plamga akslantiradigan $\varphi : A \rightarrow B$ akslantirish Ω_1 dagi har bir ω_1 munosabatni saqlasa, bunday akslantirish (A, Ω_1) algebraik sistemani (B, Ω_2)

algebraik sistemaga gomomorf akslantirish deyiladi. Xuddi algebralardagidik φ -syur'ektiv bo'lsa, epimorfizm, in'ektiv bo'lsa monomorfizm, biektiv bo'lsa izomorfizm deyiladi.

Sistemaosti tushunchasi ham algebraosti tushunchasiga o'xshash usulda kiritiladi (A, Ω_1) va (B, Ω_2) bir xil turli algebraik sistemalar berilgan. $A \subset B$, va $\omega_1 \in \Omega_1$ n - ar munosabatga $\omega_2 \in \Omega_2$ n - ar algebraik munosabat mos qo'yilgan bo'lsin. Agar $\forall a_1, \dots, a_n \in A$ uchun $(a_1, \dots, a_n) \in \omega_1$, bo'lishidan $(a_1, \dots, a_n) \in \omega_2$ bo'lishi kelib chiqsa ω_1 munosabat ω_2 munosabatning A to'plam bilan cheklangani deyiladi. Agar (A, Ω_1) sistemadagi har bir $\omega_1 \in \Omega_1$ munosabat bu munosabatga Ω_2 to'plamdan mos bo'lgan ω_2 munosabatning cheklangani bo'lsa, u holda (A, Ω_1) algebraik sistema (B, Ω_2) algebraik sistemaning sistemaostisi deyiladi.

Algebraik sistemaga xos bo'lgan boshqa tushunchalar va ba'zi teoremlar algebraidagilarga mos ravishda ifodalanadi. Algebraik sistemalar haqida to'liqroq ma'lumotlar olishni istagan o'quvchilarga atoqli matematik A.I.Malsevning «Algebraicheskie sistemi» nomli risolasiga murojaat qilishni tavsiya qilamiz.

Takrorlash uchun savollar:

1. Algebraik sistemaga ta'rif bering.
2. Akademik lisey, maktab matematikasidan algebraik sistemaga doir misollar keltiring.
3. Bir xil turli algebralarga misol keltiring.
4. Algebraik sistemalar gomomorfizmini tushuntiring.
5. Algebraik sistemalar izomorfizmiga misol keltiring.
6. Algebraik sistemalar avtomorfizmi deb nimaga aytiladi?
7. Algebraik sistema sistemaosti tushunchasiga ta'rif Bering.
8. Sistemaostiga misollar keltiring.

4- modul. Asosiy sonli sistemalar

- | |
|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Natural sonlar sistemasi. 2. Matematik induksiya prinsipi. 3. Natural sonlar sistemasida qo'shish va ko'paytirish amallarining xossalari. 4. Natural sonlar to'plamida tartib munosabati. 5. Butun sonlar additiv gruppasi. 6. Butun sonlar halqasi. 7. Rasional sonlar maydoni. 8. Tartiblangan maydonlar. 9. Haqiqiy sonlar sistemasi. 10. Maydonning kompleks kengaytmasi. 11. Kompleks sonlar maydoni. |
|---|

- | |
|--|
| 12. Kompleks sonning qo'shmasi, xossalari.
13. Kompleks sonning moduli, xossalari.
14. Kompleks sonning geometrik tasviri.
15. Kompleks sonning trigonometrik shakli.
16. Birdan n - darajali ildizlar.
17. Kompleks sonning kvadrat ildizlari.
18. Ixtiyoriy kompleks sonning n - darajali ildizlari. |
|--|

11- ma'ruza. Natural sonlar sistemasi. Matematik induksiya prinsipi. Tartib munosabat

Reja:

1. Natural sonlar aksiomatik sistemasi.
2. Matematik induksiya metodi.
3. Natural sonlarni qo'shishning xossalari.
4. Natural sonlarni ko'paytirishning xossalari.
5. Natural sonlar to'plamida tartib munosabati.

Asosiy tushunchalar: natural sonlar sistemasi aksiomalari, matematik induksiya prinsipi, induksiya qadami, natural sonlar yarimhalqasi, tartib munosabati.

Adabiyotlar: [1]: 1-qism; [6]: 117-135; [7]: 4-modul.

N to'plami unda bajariladigan $+, \bullet$ binar algebraik amallar, N to'plamining ajratilgan elementlari 0 va 1 lardan iborat $(N, \bullet, +, 0, 1)$ algebra uchun quyidagi aksiomalar (shartlar) bajarilsin:

I. $\forall a, b \in N$ uchun $a + b \neq 1$.

II. $\forall a \in N$ uchun yagona shunday a' element mavjud bo'lib, $a + 1 = a'$.

III. $\forall a, b \in N$ uchun $a + 1 = b + 1$ bo'lsa, $a = b$.

IV. $\forall a, b \in N$ uchun $a + (b + 1) = (a + b) + 1$.

V. $\forall a \in N$ uchun $a \bullet 1 = a$.

VI. $\forall a, b \in N$ uchun $a(b + 1) = ab + a$.

VII. Induksiya aksiomasi. N to'plamning ixtiyoriy M to'plamostisi uchun 1) $1 \in M$;

2) $\forall a \in M$ uchun $a + 1 \in M$ bo'lsa, $M = N$ bo'ladi.

11.1-ta'rif. Agar $(N, \bullet, +, 0, 1)$ algebra uchun yuqorida sanab chiqilgan I-VII shartlar bajarilsa, u holda bu algebra natural sonlar sistemasi deyiladi.

I aksioma 1 soni hech qanday elementlarning yig'indisiga teng emasligini ko'rsatadi;

II aksioma har bir natural son uchun, bu sondan keyin keladigan yagona natural son mavjudligini ko'rsatadi;

III aksioma o'ng tomondan 1 ga qisqartirishni ifodalaydi;

IV aksioma qo'shish amali uchun assosiativlik qonunining engillashtirilgan ko'rinishidir;

V aksioma 1 ko'paytirish amaliga nisbatan o'ng tomondan neytral element ekanligini bildiradi;

VI aksioma ko'paytirish amalining qo'shish amaliga nisbatan distributivligini engillashtirilgan ko'rinishidir;

VII aksioma natural sonlarning asosiy xossalarini isbot qilish imkonini beradigan aksioma bo'lib undan matematik induksiya prinsipi deb ataladigan, quyidagi teorema kelib chiqadi:

11.2-teorema. $A(n)$ natural sonlar to'plamida aniqlangan bir o'rinli predikat bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsin:

1. $A(1)$ -rost mulohaza.

2. $\forall k \in N$ uchun $A(k)$ rost mulohaza bo'lishidan $A(k+1)$ -mulohazaning rost mulohaza bo'lishi kelib chiqsin. U holda $\forall n \in N$ uchun $A(n)$ mulohaza rost mulohaza bo'ladi.

Isbot. M orqali $\{n \mid n \in N \text{ va } A(n) = 1\}$ to'plamni belgilaylik. U holda teorema shartlaridan $1 \in M$ va $k \in M$ bo'lishidan $k+1 \in M$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, induksiya aksiomasiga ko'ra $M = N$, ya'ni $\forall n \in N$ uchun $A(n) = 1$ bo'lar ekan.

Matematik induksiya aksiomasini qisqacha quyidagi ko'rinishda belgilab olamiz:

$$\frac{A(1) \wedge \forall k (A(k) \rightarrow A(k+1))}{\forall n A(n)}.$$

Shunday qilib, matematik induksiya metodi bilan N natural songa bog'liq $A(n)$ predikatni natural sonlar to'plamida aynan rost bo'lishini isbot qilish uchun quyidagi ishlar qilinadi:

1) $A(1) = 1$ bo'lishi, ya'ni 1-shartni qanoatlantirishi ko'rsatiladi;

2) $\forall x \in N$ uchun $A(k) = 1$ bo'lishidan $A(k+1) = 1$ bo'lishi ko'rsatiladi.

$A(1)$ ni induksiya bazisi, $A(k)$ ni induksiya farazi deb ataymiz.

$A(k) = 1$ dan $A(k+1) = 1$ kelib chiqishi induksiya qadami deyiladi.

Yozuvni iychamlashtirish maqsadida A to'plamga tegishli yagona x element mavjud degan tasdiqni $\exists! x \in A$ deb belgilab olishni va xossalarni esa matematik mantiq tilida yozishni kelishib olamiz. Masalan: $(\forall a, b \in N) \rightarrow (\exists! c \in N) \wedge (a + b = c)$ yozuv «ixtiyoriy ikkita natural son uchun ularning yig'indisi bo'lgan yagona natural son mavjud» deb o'qiladi.

Shunday qilib:

11.3-teorema. $(\forall a, b \in N) \Rightarrow (\exists! c \in N) \wedge (a + b = c)$.

Isbot. $b = 1$ bo'lganda II-aksiomaga asosan $\exists! b' \in N \Rightarrow b + 1 = b'$ $b = k$ uchun teorema to'g'ri bo'lsin, ya'ni $(\forall a, k \in N) \Rightarrow (\exists! m \in N) \wedge (a + k = m)$. U holda IV-aksiomaga asosan $a + (k + 1) = (a + k) + 1 = m + 1$; m - yagona bo'lgani uchun II-aksiomaga asosan $m + 1$ ham yagona m' dan iborat. Biz $a \in N$ ga hech qanday shart qo'ymaganimiz uchun uni ixtiyoriy natural son deb qarashimiz

mumkin. Demak, $\forall a, b \in N$ uchun $\exists! c \in N$ bo'lib, $a + b = c$ bo'ladi. Shunday qilib, natural sonlar to'plamida «+» amali binar algebraik amal ekan.

11.4-teorema. $\forall a, b, c \in N \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$.

Isbot. a) $c = 1$ bo'lsa, IV-aksiomaga asosan $a + (b + 1) = (a + b) + 1$.

b) $\forall k \in N$ uchun $(a + b) + k = a + (b + k)$ bo'lsin, u holda IV-aksiomaga asosan $(a + b) + (k + 1) = ((a + b) + k) + 1$. Induksiya faraziga ko'ra $(a + b) + k = a + (b + k)$. U holda yana IV-aksiomaga asosan $((a + b) + k) + 1 = (a + (b + k)) + 1 = a + ((b + k) + 1) = a + (b + (k + 1))$ shunday qilib, $(a + b) + (k + 1) = a + (b + (k + 1))$. Demak, $\forall a, b, c \in N$ uchun $(a + b) + c = a + (b + c)$, ya'ni «+» amal assosiativ ekan.

11.5-teorema. $(\forall a \in N) \Rightarrow (a + 1 = 1 + a)$ bu hossani «+» uchun engillashtirilgan kommutativlik qonuni deymiz.

Isbot. a) $a = 1$ bo'lsa, $1 + 1 = 1 + 1$ -teorema to'g'ri.

b) $a = k$ uchun teorema to'g'ri deb faraz qilaylik, ya'ni $k + 1 = 1 + k$ bo'lsin. U holda induksiya faraziga va 11.4-teoremaga asosan $(k + 1) + 1 = (1 + k) + 1 = 1 + (k + 1)$. Ya'ni $(k + 1) + 1 = 1 + (k + 1)$. Demak, $\forall a \in N$ uchun $a + 1 = 1 + a$.

11.6-teorema. $(\forall a, b \in N) \Rightarrow (a + b = b + a)$. Bu teorema natural sonlar sistemasida qo'shish amalining kommutativlik xossasiga ega bo'lishini tasdiqlaydi.

Isbot. a) $b = 1$ bo'lsa 11.5-teoremaga asosan $a + 1 = 1 + a$.

b) induksiya farazi: $a + k = k + a$, u holda 11.4, 11.5-teoremalarga asosan $a + (k + 1) = (a + k) + 1 = 1 + (a + k) = 1 + (k + a) = (1 + k) + a = (k + 1) + a$. Ya'ni $a + (k + 1) = (k + 1) + a$. Demak, ixtiyoriy $a, b \in N$ uchun $a + b = b + a$. Shunday qilib, natural sonlar sistemasida qo'shish amali kommutativ ekan.

11.7-teorema. $\forall (a, b, c \in N) \wedge (a + c = b + c) \Rightarrow (a = b)$.

Isbot. a) $c = 1$ bo'lsa, III-aksiomaga asosan $(a + 1 = b + 1) \Rightarrow a = b$.

b) $(k = k) = A(a + k = b + k) \Rightarrow (a = b)$ -induksiya farazi, u holda $a + (k + 1) = b + (k + 1) \Rightarrow (a + k) + 1 = (b + k) + 1 \Rightarrow a + k = b + k \Rightarrow a = b$.

11.8-teorema. $(\forall a, b \in N) \Rightarrow \exists! p(a = b = p)$.

Isbot. a) $b = 1$ bo'lsa, V-aksiomaga asosan $a \bullet 1 = a$.

b) $(\forall a, k \in N) \Rightarrow \exists! c \mid (a \bullet k = c)$ -induksiya farazi, u holda VI-aksiomaga asosan va $a \bullet (k + 1) = a \bullet k + 1$ induksiya faraziga ko'ra $a \bullet k = c$ yagona 11.3-teoremaga asosan $ak + 1 = c + 1$ ham yagona.

11.9-teorema. $(\forall a, b, c \in N) \Rightarrow ((a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c)$.

Isbot. a) $c = 1$ bo'lsa, V-aksiomaga asosan $(a + 1) \bullet 1 = a + b = a \bullet 1 + b \bullet 1$.

b) $c = k$ bo'lsin, u holda $(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$ -induksiya farazi.

s) $c = k + 1$ bo'lsa, V-aksiomaga asosan $(a + b)(k + 1) = (a + b) \bullet k + (a + b)$ u holda induksiya farazigi va qo'shishning kommutativligiga asosan $(a + b) \bullet k + (a + b) = (ak + a) + (bk + a)$ V-aksiomani qo'llasak

$$(ak + a) + (bk + a) = a(k + 1) + b(k + 1).$$

Demak,

$$(a + b)(k + 1) = a(k + 1) + b(k + 1).$$

11.10-teorema. $(\forall a \in N) \Rightarrow (a \bullet 1 = 1 \bullet a).$

Isbot. a) $a = 1$ $1 \bullet 1 = 1 \bullet 1$;

b) $a = k$ bo'lsin, u holda $k \bullet 1 = 1 \bullet k$ - induksiya farazi, u holda V, VI-aksiomalarga asosan $(k + 1) \bullet 1 = k + 1 = k \bullet 1 + 1 = 1 \bullet k + 1 = 1(k + 1).$

11.11-teorema. $(\forall a, b \in N) \Rightarrow (a \bullet b = b \bullet a).$

Isbot. a) $b = 1$ bo'lsa, 11.10-teoremaga asosan $a \bullet 1 = 1 \bullet a$. b) $b = k$ bo'lsin, u holda $a \bullet k = k \bullet a$ -induksiya farazi.

$b = k + 1$ bo'lsin, u holda IV-aksioma, induksiya farazi va 11.9-teoremaga asosan $a(k + 1) = ak + a = ka + a = ka + 1a = (k + 1)a$, ya'ni $a(k + 1) = (k + 1)a$.

11.12-teorema. $(\forall a, b, c \in N) \Rightarrow c(a + b) = ca + cb.$

11.13-teorema. $(\forall a, b, c \in N) \Rightarrow (a \bullet b)c = a(b \bullet c).$

Isbot. a) $c = 1$ bo'lsa, V-aksiomaga asosan $(a \bullet b) \bullet 1 = a \bullet b = a \bullet (b \bullet 1).$

b) $c = k$ uchun $(a \bullet b)k = a(b \bullet k)$ bo'lsin.

U holda IV-aksioma, 11.12-teoremaga va induksiya faraziga ko'ra $(ab)(k + 1) = (ab) \bullet k + ab = a(b \bullet k) + ab = a(bk + b) = a \bullet (b(k + 1)).$

Shunday qilib, natural sonlar sistemasida $+$, $\bullet$ amallari bir qiymatli aniqlangan kommutativ, assosiativ amallar bo'lib, ko'paytirish amali qo'shishga nisbatan distributiv amal ekan. Bundan so'ng $1+1$ ni 2 orqali $2+1$ ni 3 orqali va hokazo belgilab olamiz. U holda $2 \bullet 3 = 6$ yoki $2 + 3 = 5$ va hokazo ko'rinishdagi tengliklarni isbot qilish imkoni hosil bo'ladi. Masalan:

$$2 \bullet 2 = 2(1 + 1) = 2 \bullet 1 + 2 \bullet 1 = 2 + 2 = 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4;$$

$$2 \bullet 3 = 2 \bullet (2 + 1) = 2 \bullet 2 + 2 = 2 \bullet 2 + (1 + 1) = 4 + (1 + 1) = (4 + 1) + 1 = 5 + 1 = 6$$

11.14-teorema. $(\forall a \in N) \wedge (a \neq 1) \Rightarrow (\exists n \in N) \wedge (a = 1 + n).$

Isbot. a) Agar $a = 1$ bo'lsa, $(\forall a \in N) a \neq 1$ -yolg'on jumla, u holda mantiq qonunlariga asosan $(\forall a \in N) \wedge (a + 1) \Rightarrow (\exists n \in N) \wedge (a = 1 + n)$ teorema to'g'ri.

b) $a = k$ uchun teorema to'g'ri bo'lsin, ya'ni $(\forall k \in N) \wedge (k \neq 1) \Rightarrow (\exists n \in N) \wedge (k = 1 + n)$, u holda

$$k + 1 = (1 + n) + 1 = 1 + (n + 1) = 1 + n'.$$

11.15-teorema. $(\forall a, b \in N) \Rightarrow a \neq a + b.$

Isbot. a) $a = 1$ bo'lsa, I-aksiomaga asosan $1 \neq 1 + b.$

b) $a = k$ uchun $k \neq k + b$ bo'lsin, u holda $k + 1 = (k + 1) + b$ deb faraz qilsak $k + 1 = (k + b) + 1$ bo'ladi. Bu tenglikka III-aksiomani qo'llasak $k = k + b$ bo'ladi. Bu esa induksiya faraziga zid.

11.16-teorema. $\forall a, b \in N$ uchun quyidagi tengsizliklardan faqat biri o'rinli.

1) $a = b$ 2) $\exists n \in N \quad b = a + n$ 3) $\exists l \in N \quad a = b + l.$

Isbot. 11.15 - teoremadan bu shartlardan ixtiyoriy ikkitasi birga bajarilmasligi kelib chiqadi. Haqiqatdan $a = b$ va $b = a + n$ bo'lsa $a = a + n$ xosil bo'lib, bu 11.15 - teoremaga zid. Agar $b = a + n$ va $a = b + l$ bo'lsa, u holda $a = a + (n + l)$

bo'lib, bu ham 11.15 - teoremaga zid. Nihoyat, $a = b$ va $a = b + l$ bo'lsa, $a = a + l$ bo'lib bu ham 11.15 - teoremaga zid.

Endi teoremada ko'rsatilgan 1) 2) 3) shartlardan biri bajarilishini ko'rsataylik. Isbotni matematik induksiya usuli orqali bajaramiz.

$b = 1$ bo'lsin. U holda $a = 1$ bo'lsa 1)-shart bajarilishi ayon.

Agar $k = a + n$ bo'lsa, $k + 1 = (a + n) + 1 = a + (n + 1)$, ya'ni $k + 1$ uchun 2) - shart bajariladi. Agar k uchun 3) - shart bajarilsa, $a = k + l$ bo'lib, $l = 1$ bo'lsa, $a = k + 1 = b$ bo'lib, 1) - shart bajariladi. Aks holda $\exists n \in N$ $l = 1 + n$ bo'lib, $a = (k + 1) + n$, ya'ni 3) - shart bajariladi.

11.17-ta'rif. $\forall a, b \in N$ natural sonlar uchun shunday $n \in N$ topilib, $a = b + n$ bo'lsa, a natural son b natural sondan katta deymiz va $a > b$ deb belgilaymiz. YOki b natural son a natural sondan kichik deymiz va $b < a$ deb belgilaymiz. $(a > b) \vee (a = b)$ yozuv o'rniga $a \geq b$ deb yozamiz va a natural son b natural sondan katta yoki teng deb ataymiz. Xuddi shunga o'xshash $(a < b) \vee (a = b)$ o'rniga $a \leq b$, $(a > b) \wedge (b > c)$ o'rniga esa $a > b > c$ yozuvlar ishlatiladi.

11.18-teorema. Natural sonlar to'plamida tengsizlik munosabati quyidagi xossalarga ega:

$$1^\circ. (\forall a, b \in N) \wedge (a \neq b) \Rightarrow (a > b) \vee (b > a).$$

$$2^\circ. (\forall a \in N) \text{ ychun } \overline{(a > a)}.$$

$$3^\circ. \forall a, b \in N \quad a > b \Rightarrow \overline{(b > a)}.$$

$$4^\circ. \forall a, b, c \in N \text{ ychun } (a > b) \wedge (b > c) \Rightarrow (a > c).$$

$$5^\circ. \forall a, b, c \in N \text{ ychun } ((a > b) \Rightarrow (a + c) > (b + c)).$$

$$6^\circ. \forall a, b \in N \text{ ychun } a + b > a.$$

$$7^\circ. \forall a, b, c \in N \text{ ychun } (a > b) \Rightarrow ac > bc.$$

11.19-ta'rif. $(A, +, \bullet)$ -algebra uchun quyidagi shartlar bajarilsin:

$$1) \forall a, b, c \text{ uchun } (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$2) \forall a, b \in A \text{ uchun } a + b = b + a$$

$$3) \forall a, b, x \in A \quad ((a + x = b + x) \Rightarrow (a = b)) \wedge ((x + a = x + b) \Rightarrow (a = b))$$

$$4) \forall a, b, c \in A \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$5) \forall a, b, c \in A \Rightarrow ((a + b) \cdot c = ac + bc) \wedge (c(a + b) = ca + cb)$$

U holda $(A, +, \bullet)$ -algebra yarim halqa deyiladi. Yarim halqa « $\bullet$ » amalining xossalari mos nomlanadi. « $\bullet$ » kommutativ bo'lsa, yarim halqa ham kommutativ yarim halqa, agar « $\bullet$ » amaliga nisbatan neytral element mavjud bo'lsa, birlik elementga ega bo'lgan yarim halqa deyiladi.

11.20-natija. $(N, \bullet, +, 1)$ -birlik elementga ega bo'lgan kommutativ yarim halqadir.

Takrorlash uchun savollar:

1. Natural sonlar to'plami yarimhalqa tashkil etishini tushuntiring.
2. Natural sonlar sistemasi deb nimaga aytiladi?
3. Natural sonlar sistemasining aksiomalarini tahlil qiling.
4. Matematik induksiya metodini ifodalovchi teoremani ayting.
5. Induksiya bazisi, induksiya farazi, induksiya qadami tushunchalarini bilasizmi?
6. Natural sonlarni qo'shishni aniqlovchi teoremani predikatlar tilida ifodalang.
7. Natural sonlarni qo'shishning qanday xossalarini bilasiz?
8. Natural sonlarni ko'paytirishni ifodalovchi teoremani bayon qiling.
9. Natural sonlarni ko'paytirishning xossalarini ayting.
10. Natural sonlar to'plamida tartib munosabatini aniqlang.
11. Natural sonlar to'plamidagi tengsizlik munosabatining xossalarini bayon qiling.
12. Natural sonlar to'plami kommutativ yarimhalqa bo'lishini isbotlang.

12- ma'ruza. Butun sonlar halqasi. Rasional sonlar maydoni. Haqiqiy sonlar sistemasi

Reja:

1. Natural sonlar yarimhalqasining kengaytmasi.
2. Butun sonlar halqasi.
3. Butun sonlar halqasida tartib munosabati.
4. Rasional sonlar maydoni.
5. Tartiblangan maydon.
6. Haqiqiy sonlar sistemasi.

Asosiy tushunchalar: yarimhalqa kengaytmasi, butun sonlar additiv gruppasi, butun sonlar halqasi, bo'linish munosabati, tartib munosabati, maydon, rasional sonlar maydoni, tartiblangan maydon, arximedcha tartib munosabati, haqiqiy sonlar sistemasi.

Adabiyotlar: [1]: 1-qism; [6]: 135-156; [7]: 4-modul.

Natural sonlar to'plamida har qanday ikkita natural son uchun ularning ayirmasi mavjud bo'lavermasligi ma'lum. Shuning uchun natural sonlar yarim halqasini qamrab olib, ayirish amali bajariladigan eng kichik algebrani topish masalasini ko'rib chiqamiz.

$N \times N$ ya'ni, koordinatalari natural sonlardan iborat bo'lgan barcha juftliklar to'plami berilgan bo'lsin. Bu to'plamda ixtiyoriy (m_1, n_1) va (m_2, n_2) juftliklar uchun

$$(m_1, n_1) \oplus (m_2, n_2) = (m_1 + m_2, n_1 + n_2)$$

$$(m_1, n_1) \otimes (m_2, n_2) = (m_1 m_2 + n_1 n_2, m_2 n_1 + m_1 n_2)$$

$\Theta (m_1, n_1) = (n_1, m_1) \oplus, \otimes$ va har bir juftlik uchun qarama-qarshisini topish amallarini aniqlaylik. Undan tashqari $\forall (m_1, n_1), (m_2, n_2)$ juftliklar uchun $((m_1, n_1) \sim (m_2, n_2)) \Leftrightarrow (m_1 + n_1 = m_2 + n_2)$ qonuniyat bilan aniqlangan binar munosabatni qaraymiz. Bu munosabat ekvivalentlik munosabatidir. Haqiqatdan $\forall (m_1, n_1), (m_2, n_2)$ juftliklar uchun

$$a) ((m_1, n_1) \sim (m_1, n_1)) \Leftrightarrow (m_1 + n_1 = m_1 + n_1)$$

$$b) ((m_1, n_1) \sim (m_2, n_2)) \Leftrightarrow (m_1 + n_2 = m_2 + n_1) \Leftrightarrow (m_2 + n_1 = m_1 + n_2) = (m_2, n_2) \sim (m_1, n_1)$$

$$s) ((m_1, n_1) \sim (m_2, n_2)) \wedge ((m_2, n_2) \sim (m_3, n_3)) \Leftrightarrow (m_1 + n_2 = m_2 + n_1) \wedge (m_2 + n_3 = m_3 + n_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow (m_1 + n_3 = m_3 + n_1) \Leftrightarrow ((m_1, n_1) \sim (m_3, n_3))$$

$N \times N$ to'plamda aniqlangan $\sim$ ekvivalentlik munosabati $\oplus, \otimes$ amallarga nisbatan kongruensiya bo'lishi bevosita tekshiriladi.

$Z = N \times N / \sim$ faktor to'plamdagi (a, b) juftlik aniqlagan ekvivalentlik sinfini $[a, b]$ orqali belgilasak, $N \times N / \sim$ to'plamda $\forall [m, n], [p, q]$ sinflar uchun $[m, n] + [p, q] = [m + p, n + q], [m, n] \cdot [p, q] = [mp + nq, np + mq], -[m, n] = [n, m]$ -tengliklar faktor to'plamda qo'shish, ko'paytirish, qarama-qarshisini olish amallarini aniqlaydi.

12.1-teorema. $Z_1 = N \times N / \sim$ faktor to'plam yuqorida aniqlangan $+, \bullet$ amallarga nisbatan, natural sonlar yarim halqasiga izomorf bo'lgan yarim halqani qamrab oluvchi eng kichik kommutativ halqadir.

Isbot. $+, \bullet$ amallarining assosiativligi, kommutativligi, ko'paytirishning qo'shishga nisbatan distributivligi bevosita tekshiriladi. $[a, a]$ sinf nol element bo'lishini ko'rsatamiz. Qo'shish amalining aniqlanishiga ko'ra $[m, n] + [a, a] = [m + a, n + a]$. $m + (n + a) = n + (m + a)$ tenglikdan $[m + a, n + a] = [m, n]$ bo'lishi kelib chiqadi. $\forall [m, n] \in Z_1$ uchun $[n, m] \in Z_1$ element qarama-qarshi elementdir. Haqiqatdan $[m, n] + [n, m] = [m + n, n + m]; m + n = n + m$ bo'lgani uchun $[m + n, n + m]$ -nol elementdir. $\forall n \in N$ uchun $[n + 1, n]$ sinf ko'paytirish amaliga nisbatan birlik elementdir. Haqiqatdan ham, $\forall [a, b] \in Z_1$ uchun $[a, b] \cdot [n + 1, n] = [a(n + 1) + bn; an + b(n + 1)] = [a, b]$. Chunki, $a(n + 1) + bn + b = a + an + b(n + 1)$. Shunday qilib, Z_1 birlik elementga ega bo'lgan kommutativ, assosiativ halqa ekan. Endi Z_1 halqaning $A = \{[n, 1] / n \in N \setminus \{1\}\}$ to'plamostisi N -natural sonlar yarim halqasiga izomorf bo'lgan yarim halqa bo'lishini ko'rsatamiz. A to'plamda $+, \bullet$ amallari bajarilishini ko'rsatamiz.

$\forall [n, 1], [m, 1] \in A$ elementlar berilgan bo'lsin. U holda $n \neq 1, m \neq 1$ bo'lgani uchun shunday $\exists k, l \in N$ bo'lib $n = k + 1, m = l + 1$ bo'ladi. U holda $[n, 1] + [m, 1] = [k + 1, 1] + [l + 1, 1] = [k + 1 + l + 1, 2] = [k + l + 1, 1] \in A$.

$[m, 1] \cdot [n, 1] = [k + 1, 1] \cdot [l + 1, 1] = [(k + 1) \cdot (l + 1) + 1, k + 1 + l + 1] = [kl + k + l + 1 + 1, k + l + 1] = [kl + 1, 1] \in A$.

$A \subset Z_1$ bo'lgani uchun yarim halqa ta'rifining 1), 2), 4), 5)-shartlarning bajarilishi ravshan.

3) shartni tekshiramiz. $\forall [n+1,1], [m+1,1], [x+1,1] \in A$ elementlar berilgan bo'lib, $[n+1,1] + [x+1,1] = [m+1,1] + [x+1,1]$ shart bajarilsin, u holda $[n+1+x+1,1+1] = [m+1+x+1,1+1]$ yoki $[n+x+1,1] = [m+x+1,1]$, u holda $n+x+1+1 = 1+m+x+1$ yoki $n = m$ kelib chiqadi. Demak, $[m+1,1] = [n+1,1]$ bo'ladi. Agar A to'plamda qo'shish kommutativligini hisobga olsak, 3-shart to'liq bajariladi.

Endi $\varphi : M \rightarrow A$ $\varphi(m) = [n+1,1]$ asklantirish izomorf bo'lishini isbotlaymiz.

φ aniqlanishiga ko'ra biektiv bo'lishi ravshan. Amallarning saqlanishini ko'rsataylik. $\forall m, n \in N$ uchun

$$\varphi(m+n) = [m+n+1,1] = [(m+1)+(n+1),1+1] = [m+1,1] + [n+1,1] = \varphi(m) + \varphi(n)$$

$$\varphi(m \cdot n) = [mn+1,1] = [mn+m+n+1+1, m+n+1+1] = [m+1,1] \cdot [n+1,1] = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$$

Demak, $(A, +, \bullet)$ algebra natural sonlar yarim halqasiga izomorf bo'lgan yarim halqadir.

$(k, +, \bullet)$ halqa $(Z_1, +, \bullet)$ halqaning $A \subset K$ shartni qanoatlantiradigan ixtiyoriy halqaostisi bo'lsin, u holda $-K = Z_1$ bo'lishini ko'rsatsak, $(Z_1, +, \bullet)$ halqa $(A, +, \bullet)$ -yarim halqani qamrab olgan eng kichik halqa bo'lishini isbot qilgan bo'lamiz. $[m,1], [n,1]$ elementlar A ning elementlari bo'lsa, $[1,n] \in R$ bo'lishi ravshan. U holda $[m,1] + [1,n] = [m+1,1+n] = [m,n] \in K$, ya'ni $\forall [m,n] \in Z$ uchun $[m,n] \in K$ kelib chiqar ekan. U holda $Z_1 = K$.

Biz yuqorida Z_1 ning $\forall [m,n]$ elementi $[m,1] + [1,n]$ ko'rinishida ifoda qilinishi mumkinligini ko'rsatdik. Agar $[1,n]$ ni $-[n,1]$ orqali belgilasak $[m,n] = [m,1] + (-[n,1])$ hosil bo'ladi.

12.2-ta'rif. $\forall [m,n], [p,q] \in Z_1$ elementlar uchun $[m,n] + [p,q]$ yig'indini $[m,n]$ va $[p,q]$ elementlarning ayirmasi deb ataymiz va $[m,n] + (-[p,q])$ yoki $[m,n] - [p,q]$ ko'rinishida yozamiz.

Shunday qilib, Z_1 ning ixtiyoriy elementi A ning ikkita elementi ayirmasi ko'rinishida ifoda qilinar ekan.

$(Z_1, +, \bullet)$ algebraga izomorf $(Z, +, \bullet)$ algebra mavjud bo'lib $(N, +, \bullet)$ yarim halqa $(Z, +, \bullet)$ algebraning $(A, +, \bullet)$ -yarim halqaga izomorf bo'lgan algebraosti bo'ladi. $(Z, +, \bullet)$ va $(Z_1, +, \bullet)$ algebralar izomorf bo'lgani uchun algebraik nuqtai nazardan ikkalasi bir hil, ya'ni $(Z, +, \bullet)$ qanday xossalarga ega bo'lsa, $(Z_1, +, \bullet)$ ham o'sha xossalarga ega. Xususan $\forall z \in Z$ element ikkita natural son ayirmasi ko'rinishida ifoda qilinadi. Kelgusida $\forall n \in N$ uchun $n - n$ ko'rinishida ifoda qilinadigan sonni nol orqali $\forall n \in N$ natural songa qarama-qarshi sonni $-n$ orqali belgilab olamiz. $(Z, +, \bullet)$ halqani butun sonlar halqasi deb ataymiz.

12.3-teorema. Har qanday butun son yo natural son yoki «0» yoki natural songa qarama-qarshi bo'lgan sonidir.

Isbot. Har qanday butun son ikkita natural son ayirmasi ko'rinishida ifoda qilinishini yuqorida isbot qilgan edik. $\forall z \in Z$ uchun $\exists n, m \in Z$ bo'lib $z = n - m$,

agar $n = m$ bo'lsa, $z = 0$, $n > m$ bo'lsa $\exists k \in N$ bo'lib, $n = m + k$ bo'lib, $z = k \in N$, agar $m > n$ bo'lsa, $m = n + k$ bo'lib, $z = -k$, k natural songa qarama-qarshi son bo'lishi ko'rinib turibdi.

12.4-ta'rif. $\forall m, n \in Z$ uchun agar $m - n \in N$ bo'lsa, $m > n$ deymiz. Agar $m > n$ yoki $n = m$ bo'lsa, u holda $m \geq n$ bo'ladi.

12.5-teorema. Butun sonlar halqasida quyidagi tasdiqlar o'rinli:

a) butun sonlar halqasida «>»-munosabat, qat'iy tartib munosabatdir.

b) ixtiyoriy a, b butun sonlar uchun $a > b$ yoki $a = b$ yo $b > a$ shartlardan faqat bittasi o'rinli;

v) $\forall a, b, c \in Z$ uchun $a > b$ bo'lsa, $a + c > b + c$;

g) $\forall a, b \in Z, \forall c \in N$ uchun $a > b$ bo'lsa, $ac > bc$.

12.6-teorema. $\forall a \in Z, b \in N$ sonlar uchun (*) $a = bq + r$ va $0 \leq r < b$ shartlarni qanoatlantiradigan faqat bir juft q va r butun sonlar mavjud.

Isbot. Avval teoremani a, b sonlar natural sonlar bo'lgan hol uchun isbot qilamiz. Isbotni matematik induksiya metodi orqali olib boramiz.

1. $a = 1$ bo'lsin, u holda $b = 1$ bo'lsa, $a = b \cdot 1 + 0$; agar $b > 1$ bo'lsa, $a = b \cdot 0 + 0$, $0 \leq 1 < b$.

2. $a = k$ uchun teorema to'g'ri bo'lsin. Ya'ni $k = bq + r$ va $0 \leq r < b$. U holda $k + 1 = bq + r + 1$. Agar $r + 1 < b$ bo'lsa, teorema o'rinli, agar $r + 1 \geq b$ bo'lsa $k + 1 = bq + b - b + r + 1 = b(q + 1) + (r - b + 1)$, $0 \leq r - b + 1 < b$ bo'lib $(q + 1)$, $(r - b + 1)$ butun sonlar teorema xulosasidagi sonlardir.

Endi teoremani $\forall a \in Z, b \in N$ sonlar uchun to'g'ri bo'lishini ko'rsatamiz. $a = 0$ bo'lsa, $a = b \cdot 0 + 0$; agar $a < 0$ bo'lsa, $-a > 0$ bo'lib, shunday q va r butun sonlar mavjud bo'lib, $-a = bq + r$, $0 \leq r < b$. U holda $a = b(-q - 1) + (b - r)$, $0 \leq b - r < b$.

Faraz qilaylik (*) shartlarni qanoatlantiradigan (q_1, r_1) va (q_2, r_2) ikkita juftlik mavjud bo'lsin, ya'ni $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$, $0 \leq r_1 < b$, $0 \leq r_2 < b$. Aniqlik uchun $r_1 < r_2$ bo'lsin. U holda $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$. Demak, $q_1 \neq q_2$ aks holda $r_1 = r_2$. $r_2 > r_1$ va $b > 0$ bo'lishini e'tiborga olsak, $q_1 > q_2$ bo'ladi. Natijada $r_2 - r_1 > b$ yoki $r_2 > b$ kelib chiqadi. Bu esa $r_2 < b$ degan farazimizga zid. Demak, $r_1 < r_2$ bo'lishi mumkin emas. Xuddi shunday $r_2 < r_1$ ham bo'lishi mumkin emasligi ko'rsatiladi. Shunday qilib $r_1 = r_2$ ekan. U holda $q_1 = q_2$.

12.7-ta'rif. Agar a, b $b \neq 0$ butun sonlar uchun shunday q butun son topilib $a = bq$ tenglik o'rinli bo'lsa, a butun son b butun songa bo'linadi yoki b butun son a butun sonni bo'ladi deyiladi va mos ravishda $a:b$ yoki $b \setminus a$ ko'rinishda belgilanadi.

12.8-teorema. Butun sonlar halqasida bo'linish munosabati quyidagi xossalarga ega:

1°. $\forall a \in Z, a \neq 0$ uchun $a:a$

2°. $\forall a \in Z, a \neq 0$ uchun $0:a$

$$3^\circ. \forall a \in Z, \quad a:0 \text{ va } a:(-1)$$

4°. $:$ munosabati tranzitiv munosabatdir, ya'ni $\forall a, b, c \in Z$, uchun $a:b$ va $b:c$ bo'lsa $a:c$

$$5^\circ. \forall a, b, c \in Z \text{ uchun } a:c \text{ bo'lsa } a \cdot b:c$$

$$6^\circ. \forall a, b, c \in Z \text{ uchun } a:c \text{ va } b:c \text{ bo'lsa } (a+b):c$$

$$7^\circ. \forall a, b, c \in Z \text{ va } c \neq 0 \text{ uchun } bc:ac \text{ bo'lsa, } b:a$$

$$8^\circ. \forall a, b, c \in Z \text{ uchun } a:c \text{ va } b:d \text{ bo'lsa } (a \cdot b):(c \cdot d)$$

$$9^\circ. \forall a, b, c \in Z \text{ va } a:b \text{ bo'lsa } a \cdot c:b \cdot c$$

$$10^\circ. \forall a, b, c, m, n \in Z \text{ uchun } a:c \text{ va } b:c \text{ bo'lsa } (ma+nb):c$$

Bu xossalarning isboti : munosabatining ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

12.9-teorema. Agar butun sonlar halqasida $1:a$ bo'lsa, $a=1$ yo $a=-1$.

Isbot. Teorema shartiga ko'ra $\exists q \in Z, \quad 1 = aq$. U holda $q \neq 0$. Faraz qilaylik $q > 0$ bo'lsin. Agar $q=1$ bo'lsa, $a=1$. Agar $q > 1$ bo'lsa, shunday $m \in N$ topilib $q = m + 1$. U holda $aq = a(m+1) = am + q > 1$. Teorema shartiga zid. Xuddi shu usulda $q < 0$ bo'lgan holda $a = -1$ bo'lishi isbotlanadi.

12.10-ta'rif. $\forall a, b \in Z$ sonlar uchun $a:b$ va $b:a$ shartlar bajarilsa a va b sonlar assosiirlangan deyiladi.

12.11-teorema. $\forall a, b \in Z$ sonlar assosirlangan butun sonlar bo'lsalar $a = b$ yo $a = -b$.

Isbot. Teorema shartiga asosan shunday $c, d \in Z$ topilib $a = bc$ va $b = ad$ u holda $a = a(cd)$. Demak, $cd = 1e$. YUqorida isbot qilingan teoremaga asosan $cd = 1$ dan $c = d = 1$ yoki $c = d = -1$ kelib chiqadi.

12.12-ta'rif. K halqaning a elementi uchun shunday $a' \in K$ bo'lib, $aa' = a'a = 1$ shart bajarilsa, u holda a teskarilanuvchi element deyiladi. Kelgusida a' o'rniga a^{-1} deb yozamiz.

12.13-ta'rif. Assosiativ, kommutativ, birlik elementga ega, noldan farqli har bir element teskarilanuvchi bo'lgan va $1 \neq 0$ shart bajariladigan halqa maydon deyiladi.

12.14-ta'rif. Maydonning noldan farqli har qanday elementi teskarilanuvchi bo'lgan halqaosti maydonosti deyiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, har qanday maydonosti o'z navbatida yana maydon bo'lar ekan. Undan tashqari har qanday maydon o'zi-o'zining maydonostisi bo'lib, bu maydonosti xos maydonosti deyiladi. Agar maydonning boshqa maydonostisi bo'lmasa, bunday maydon tub maydon deyiladi.

12.15-misol. $Z_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ to'plamda qo'shish, ko'paytirish amallari quyidagi jadvallarda berilgan.

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

$(Z_2, +, \bullet)$ -maydon tub maydon bo'lishi ko'rinib turibdi. Agar a, b elementlar P -maydonning elementlari bo'lib, $b \neq 0$ bo'lsa, ab^{-1} o'rniga $\frac{a}{b}$ deb yozamiz.

12.16-teorema. $(P, +, -, \bullet, 1)$ maydonning ixtiyoriy a, b, c elementlari uchun quyidagi munosabatlar o'rinli.

$$1^\circ. 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$$

$$2^\circ. \text{ Agar } ab = 1 \text{ bo'lsa, u holda } b = a^{-1}$$

$$3^\circ. c \neq 0 \text{ bo'lib, } ac = bc \text{ bo'lsa, } a = b$$

$$4^\circ. ab = 0 \text{ bo'lsa, } a = 0 \text{ yoki } b = 0$$

$$5^\circ. a \neq 0 \text{ va } b \neq 0 \text{ bo'lsa, } ab \neq a$$

$$6^\circ. \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ bo'lsa, } ad = bc$$

$$7^\circ. \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$8^\circ. \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$9^\circ. \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

$$10^\circ. \text{ noldan farqli } a, b \text{ elementlar uchun } \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

$$11^\circ. c \neq 0 \text{ element uchun } \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{ac^{-1}}{bc^{-1}}$$

Isbot.

$$1^\circ\text{-xossaning isboti: } 0 \cdot a = (0 + 0)a = 0 \cdot a + 0 \cdot a \Rightarrow 0 \cdot a = 0.$$

$2^\circ\text{-xossaning isboti: } ab = 1, \text{ u holda } 1^\circ\text{-ga asosan } a \neq 0. \text{ Demak, } a^{-1}(ab) = a^{-1}1 \text{ u holda } b = a^{-1}.$

$3^\circ\text{-xossaning isboti: } ac = bc \text{ tenglikni o'ng tomonidan } c^{-1} \text{ ga ko'paytirsak, } (ac)c^{-1} = (bc)c^{-1}, \text{ ya'ni } a = b.$

$4^\circ\text{-xossaning isboti: } ab = 0, a \neq 0 \text{ bo'lsin. U holda } 0 \cdot a^{-1} = 0 = a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1 \cdot b = 0, \text{ ya'ni } b = 0.$

$5^\circ\text{-xossaning isboti: } a \neq 0 \text{ va } b \neq 0, ab = 0 \text{ bo'lsin, u holda } 0 = a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1 \cdot b = 0. \text{ Bu esa } b \neq 0 \text{ sharga zid.}$

$6^\circ\text{-xossaning isboti: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ tenglikning ikkala tomonini } bd \text{ ga ko'paytirsak } ad = bc \text{ xosil bo'ladi.}$

Qolgan xossalarning isbotini mashq sifatida o'quvchilarga qoldiramiz.

12.17-ta'rif. K -butunlik sohasi P -maydonning halqaostisi bo'lsin. P -maydonning ixtiyoriy p elementi uchun R -butunlik sohasining m, n elementlari topilib, $P = mn^{-1}$ tenglik o'rinli bo'lsa, P -maydon K -butunlik sohasining nisbatlar maydoni deyiladi. p element esa m, n elementlarning nisbati deb yuritiladi.

12.18-teorema. Har qanday butunlik sohasi uchun izomorfizmga aniqlikda yagona nisbatlar maydoni mavjud.

Isbot. K -butunlik sohasi berilgan bo'lsin, K^* orqali odatdagidek, $K \setminus \{0\}$ to'plamni belgilaymiz. $K \times K^*$ to'plamda $\forall (a,b); (c,d) \in K \times K^*$ elementlar uchun $(a,b) + (c,d) = (ad + bc, bd)$, $(a,b) \cdot (c,d) = (ac, bd)$ tengliklar orqali qo'shish va ko'paytirish amallarini aniqlaymiz. $K \times K^*$ to'plamda $((a,b) \sim (c,d)) \Leftrightarrow (ad = bc)$ formula bilan aniqlangan $\sim$ - munosabat ekvivalentlik munosabatidir (isbot qiling).

$K \times K^* / \sim$ - faktor to'plamni P - orqali belgilaymiz. P ning ixtiyoriy $[(a,b)], [(c,d)]$ - elementlari uchun $[(a,b)] + [(c,d)] = [(ad + bc, bd)]$; $[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [ac, bd]$ tengliklar P da algebraik amallarni aniqlaydi. Haqiqatdan shunday $l \in N$ topilib, $a = 1 + l = b + l$ 3)-shart bajariladi. Faraz qilaylik $b = k$ uchun 1) 2) 3) shartlardan bittasi bajarilsin. Agar 1)-shart bajarilsa $a = b = k$, bo'lib $b = k + 1$ uchun $k + 1 = a + 1$ xosil bo'ladi. Demak, $k + 1$ uchun 2)-shart bajariladi.

Haqiqatdan $\forall (a_1, b_1) \in [(a,b)]$ $(c_1, d_1) \in [(c,d)]$ bo'lsa, $a_1 \cdot b = b_1 \cdot a$ va $c_1 \cdot d = d_1 \cdot c$ bo'ladi. U holda bu tenglamalikni mos ravishda dd_1 va bb_1 larga ko'paytirib hadma-had qo'shsak, $b_1d_1 \cdot (ad + bc) = bd(a_1d_1 + b_1c_1)$ tenglikka ega bo'lamiz. Demak $(ad + bc, bd) \sim (a_1d_1 + b_1c_1, b_1d_1)$.

Shunga o'xshash sinflarni ko'paytirish amali sinflardan olingan vakillarga bog'liq bo'lmasligi ko'rsatiladi. P to'plamda olingan $+$ va $\cdot$ amallariga nisbatan P to'plam maydon hosil qiladi. Haqiqatdan $+$ va $\cdot$ amallari K da kommutativ, assosiativ, ko'paytirish amali, qo'shish amaliga nisbatan distributiv bo'lganligidan R da ham kommutativ assosiativ ko'paytirish amali qo'shish amaliga nisbatan distributiv bo'lishi kelib chiqadi. R da $[(1,1)]$ sinf birlik element, $[(0,1)]$ sinf 0 element bo'ladi. Ular bir-biridan farqli bo'lishi ravshan. $-[(a,b)] = [(-a,b)]$, $[(a,b)] \neq [(0,1)]$ element uchun $[(a,b)]^{-1} = [(a,b)]$ bo'lishini ko'rsatish qiyinchilik tug'dirmaydi. SHunday qilib P -maydon bo'lar ekan.

Endi $\kappa^1 = \{[(k,1)] / \forall k \in K\}$ - to'plam P -ning k butunlik sohasiga izomorf bo'lgan xalqaostisi bo'lishini ko'rsatamiz. k^1 to'plam $+$, $\cdot$ amallariga nisbatan yopiq to'plamdir. Haqiqatan $\forall a, b \in k$ uchun $[(a,1)] + [(b,1)] = [(a+b,1)]$; $[(a,1)] \cdot [(b,1)] = [(a,b), 1]$ k^1 nolning bo'luvchisi yo'q, ya'ni $[(a,1)] \cdot [(b,1)] = [(0,1)]$ bo'lsa, $a \cdot b = 0$ bo'lib, $a = 0$ yoki $b = 0$. U holda $[(a,1)] = [(0,1)]$ yo $[(b,1)] = [(0,1)]$ bo'ladi. $-[a,1] = [(-a,1)]$, $[(1,1)] \in k^1[1,1] - k^1$ ning birlik elementidir. Butunlik sohasi ta'rifining boshqa shartlarining bajarilishi k^1P ning to'plamostisi bo'lishidan kelib chiqadi.

$\varphi: k \rightarrow k^1$, $\varphi(a) = [(a,1)]$ akslantirish k ni k^1 ga izomorf akslantirishdir. Haqiqatan φ - biektiv akslantirish bo'lishi φ - ning aniqlashidan bevosita kelib chiqadi, $\forall [(a,1)], [(b,1)] \in k^1$ elementlar uchun $\varphi(a+b) = [(a+b,1)] = [(a,1)] + [(b,1)] = \varphi(a) + \varphi(b)$; $\varphi(a \cdot b) = [(a \cdot b, 1)] = [(a,1)] \cdot [(b,1)] = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

P maydon k' butunlik sohasining nisbatlar maydonidir. Haqiqatan $\forall [(a,b)] \in P$ uchun $[(a,b)] = [(0,1)] \cdot [(1,b)] = [(a,1)] \cdot [(b,1)]^{-1}$.

Shunday qilib, $k \cong k'$ va P maydon k' ning nisbatlar maydonidir. Bu hossamizga yuqoridagi teoremani qo'llasak, k butunlik sohasining P ga izomrf bo'lgan F nisbatlar maydon mavjud bo'lishi kelib chiqadi.

Faraz qilaylik F_1, F_2 - maydonlar k butunlik sohasining ikkita nisbatlar maydoni bo'lsin. U holda $F_1 \cong F_2$. Haqiqatdan shunday $\forall a, b \in k, b \neq 0$ elementlar topilib, $f_1 = a \cdot b^{-1}$, $k - F_1$ ning halqaostisi bo'lgani uchun $\forall a, b \in k, b \neq 0$ uchun $a \cdot b^{-1} \in F_1$.

F_2 maydon uchun ham yuqoridagi munosabatlar o'rinli bo'lib, $f_2 \in F_2$ u shunday $a, b \in k$ topilib, $f_2 \in F_2$ uchun shunday $a, b \in k$ topilib, $f_2 = a \cdot b^{-1}$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu erda " $\cdot$ " F_2 dagi ko'paytirish amali F_1 ga tegishli $a \cdot b^{-1}$ elementni mos qo'yuvchi $\Phi: F_1 \rightarrow F_2$ akslantirish izomorf akslantirishdir.

12.19-ta'rif. Butun sonlar xalqasining nisbatlar maydoni rasional sonlar maydoni deyiladi.

Rasional sonlar maydoni Q orqali belgilaymiz. Bu maydonning har bir $p \cdot q^{-1}$ elementi $\frac{p}{q}$ orqali belgilanadi.

$Z \frac{p}{q}$ o'rniga ba'zan p/q yozuv ishlatiladi.

12.20-teorema. $\forall a, b, c, d \in Z \quad c > 0, d > 0$ butun sonlar berilgan bo'lib, $a/b, c/d$ rasional sonlar uchun $(a/b > c/d) \Leftrightarrow (ad - bc > 0)$ formula bilan aniqlanadigan " $>$ " munosabat rasional sonlar to'plamidagi tartib munosabatidir.

Isbot. $\forall a, b, c, d \in Z \quad c > 0, d > 0$ butun sonlar berilgan bo'lsin. U holda $a/b > c/d$ bo'lsa, $c/d > a/b$ bo'lishi mumkin emas, chunki aks holda $bc - ad > 0$ bo'lib (1) munosabatga zid. Demak $>$ munosabat antisimmetrik munosabatdir. Bu munosabat tranzitiv munosabat bo'lishini ko'rsatamiz. $a/b > c/d; c/d > m/n$ bo'lsin, u holda $a \cdot d - bc > 0$ va $c \cdot n - md > 0$. U holda ma va bn musbat butun sonlar ekanini hisobga olsak, $adn = bcn > 0$ va $cnb - mdb > 0$ tengsizliklar kelib chiqadi. Bularni hadma-had qo'shib, $adn - mdb > 0$ yoki $an - m \cdot b > 0$ tengsizlikka ega bo'lamiz. U holda $a/b > m/n$. Shunday qilib " $>$ " munosabat antisimmetrik va tranzitiv munosabat ekan. Bu munosabat antirefleksiv munosabat bo'lishi ravshan. Demak " $>$ " munosabat qat'iy tartib munosabatidir.

12.21-natija. $\forall r_1, r_2 \in Q$ rasional sonlar uchun $(r_1 \geq r_2) \Leftrightarrow (r_1 \neq r_2) \vee (r_1 = r_2)$ formula yordamida aniqlangan munosabat noqat'iy tartib munosabatidir.

12.22-ta'rif. $\forall r_1, r_2 \in Q$ rasional sonlar uchun $a \geq b$ bo'lsa, $b \leq a$ deyiladi.

12.23-ta'rif. Agar $(F, <)$ algebraik sistema uchun

1) $\forall a, b, c \in F$ uchun $a < b$ va $b < c$ bo'lsa, $a < c$.

1) $\forall a, b, c \in F$ uchun $a < b$ yo $b < a$ yoki $a = b$ shartlardan faqat bittasi bajariladi.

SHartlar o'rinli bo'lsa, $[F, <)$ sistema chiziqli tartiblangan sistema deyiladi.

12.24-ta'rif. Q rasional sonlar to'plamida $<$ tartib munosabat chiziqli tartib munosabatdir.

Isbot. Haqiqatdan ihtiyoriy r_1, r_2 lar uchun $r_1 < r_2$ yoki $r_2 < r_1$ $r_2 = r_1$ munosabatlardan faqat bittasi o'rinlidir.

12.25-ta'rif. $(F, +, -, \cdot, 1, <)$ algebraik sistema uchun

- 1) $(F, +, -, \cdot, 1, <)$ - algebra maydon;
- 2) $(F, <)$ - sistema chiziqli tartiblangan to'plam;
- 3) $\forall a, b, c \in F$ uchun $a < b$ bo'lsa, $a + c < b + c$ bo'ladi.
- 4) $\forall a, b, c \in F$ elementlar uchun $a < b$ va $0 > c$ bo'lsa, $a \cdot c < bc$ bo'ladi.

Bu shartlar bajarilsa, $(F, +, -, \cdot, 1, <)$ algebraik sistema tartiblangan maydon deyiladi. Tartiblangan maydonning $a > 0$ elementlari musbat elementlar deyiladi. Odatdagidek $a \leq b$ munosabat $(a \leq b) \Leftrightarrow ((a < b) \vee (a = b))$ formula bilan aniqlanadi. Agar $a < b$ bo'lsa $b - a > 0$ deb yozishni kelishib olamiz.

12.26-misol. $(Q, +, -, \cdot, 1)$ rasional sonlar maydoni $<$ munosabatga nisbatan tartiblangan maydondir. $(Q, +, -, \cdot, 1, <)$ algebraik sistema rasional sonlar sistemasi deyiladi.

12.27-teorema. $(F, +, -, \cdot, 1, <)$ tartiblangan maydon quyidagi hossalarga ega:

- 1°. $\forall a, b \in F$ uchun $a < b$ bo'lishi uchun $b - a > 0$ bo'lishi zarur va etarli;
- 2°. $\forall a \in F$ uchun $a < 0, 0 < a \Rightarrow 0 = a$ shartlardan bir vaqtda faqat biri o'rinli;
- 3°. agar $a \geq 0$ va $b \geq 0$ bo'lsa, u holda $ab \geq 0$ va $a + b \geq 0$ bo'ladi;
- 4°. $a \leq b$ va $c \leq d$ bo'lsa, $a + c \leq b + d$;
- 5°. Agar $a < b$ va $c < 0$ bo'lsa $ac > bc$.
- 6°. $\forall a \in F$ element uchun $a^2 \geq 0$. Xususan $a \neq 0$ bo'lsa, $a^2 > 0$;
- 7°. $\forall n \in N$ uchun $n \cdot 1 > 0$ xususan $1 > 0$;
- 8°. Tartiblangan maydon butunlik sohasidir.

Isbot: 1°. Tartiblangan maydon ta'rifiga ko'ra $a < b$ bo'lsa, $a + (-a) < b + (-a)$ yoki $0 < b - a$ ya'ni $b - a > 0$ bo'ladi.

2°. $(F, <)$ chiziqli tartiblanishdan bevosita kelib chiqadi.

3°. xossa tartiblangan maydon ta'rifining 3-4 shartlaridan bevosita kelib chiqadi. Haqiqatdan $a \geq 0$ va $b \geq 0$ bo'lsa, u holda $a + b \geq 0 + 0$ va $a \cdot b \geq 0$ yoki $a + b \geq 0, a \cdot b \geq 0$. Xususan, agar $a > 0$ va $b > 0$, $a \cdot b > 0$ bo'lishi kelib chiqadi.

4°. $a \leq b$ va $c \leq d$ bo'lsa, $a + c \leq b + c$ va $b + c \leq d + c$ yoki $a + c \leq b + c$.

5°. $a < b$ va $c < 0$ bo'lsa, $-c > 0$, u holda $-ac < -bc$ ya'ni $ac - bc > 0$.

Demak $ac > bc$.

6°. $a \neq 0$ bo'lsin. U holda $a > 0$ yoki $0 > a$ shartlardan faqat biri bajariladi. Agar $a > 0$ bo'lsa, u holda 3°-ga ko'ra $(-a)^2 > 0$ yoki $a^2 > 0$ bo'ladi. Agar $a = 0$ bo'lsa, $a^2 = 0$ bo'ladi. Demak $\forall a \in F$ uchun $a^2 \geq 0$.

7°. Maydonda $1 \neq 0$ bo'lgani uchun $1^2 > 0$ yo $1 > 0$, u holda $n \cdot 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = n \cdot 1 > 0$.

8°. - hossa maydonning bevosita ta'rifidan kelib chiqadi.

12.28-ta'rif. Tartiblangan maydonning ixtiyoriy elementi uchun.

$$|a| = \begin{cases} a_1 \text{ azap } -a > 0 \\ -a_1 \text{ azap } a < 0 \\ 0_1 \text{ azap } a = 0 \end{cases} \text{ tenglik bilan aniqlanadigan } |a| \text{ - element } a \text{ ning - absolyut}$$

qiymati yoki moduli deyiladi.

12.29-teorema. $(F, +, -, \cdot, 1, <)$ tartiblangan maydonning $\forall a, b$ elementlari uchun quyidagi munosabatlar o'rinli:

1°. $|a| = |-a|$.

2°. $|a| \geq a$ va $|a| \geq -a$;

3°. $|a + b| \leq |a| + |b|$;

4°. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

5°. $|b| > 0$.

6°. $\forall a \in F, a^2 \geq 0$ element uchun $|b| < a$ bo'lishi uchun $-a < b < a$ bo'lishi zarur va etarli.

$\forall a, b, c \in F, a > 0$ elementlar uchun $|b| > a$ bo'lishi uchun $b > a$ yoki $b < -a$ bo'lishi zarur va etarli.

Isbot: 1°, 2°, 5° - xossalr absolyut qiymat ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

3° Agar $|a + b| = a + b$ bo'lsa, 2° - hossaga asosan $|a| \geq a, |b| \geq b$ bu tengsizliklarni hadma-had qo'shsak, $|a| + |b| \geq a + b, |a| + |b| \geq a + b$ hosil bo'ladi.

4°, 6° - hossalarning isboti o'quvchilarga mashq sifatida qoldiriladi.

12.30-ta'rif. Tartiblangan maydonning ixtiyoriy musbat a, b elementlari uchun shunday n - natural son mavjud bo'lib $n \cdot a > b$ shart bajarilsa, bu maydon Arximedcha tartiblangan maydon deyiladi.

Bundan buyog'iga chalkashlik tug'dirmaydigan hollarda, $(F, +, -, \cdot, 1, >)$ tartiblangan maydon berilgan degan gapni ishlatishni kelishib olamiz.

12.31-ta'rif. Elementlari F -tartiblangan maydonga tegishli bo'lgan $a_1, \dots, a_n$ elementlardan tuzilgan $a_1, \dots, a_n \dots (1)$ ketma-ketlik va $a \in F$ element berilgan bo'lsin. Agar F ga tegishli $\forall \varepsilon > 0$ element uchun shunday $n_0 \in N$ natural son topilib, barcha $k > n_0$ natural sonlar uchun $|a_k - a| < \varepsilon$ shart bajarilsa, a element (1) ketma-ketlikning limiti deyiladi. F -maydonda limitga ega bo'lgan ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

12.32-ta'rif. Elementlari F - tartiblangan maydondan olingan $a_1, \dots, a_n$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. F - maydonning ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ elementi uchun shunday n_0 natural son topilib, har qanday n_0 dan katta bo'lgan m, k natural sonlar uchun

$|a_m - a_k| < \varepsilon$ shart bajarilsa, u holda bunday ketma-ketlik fundamental ketma-ketlik deyiladi.

12.33-ta’rif. F tartiblangan maydondagi har qanday fundamental ketma-ketlik shu maydonda yaqinlashuvchi bo’lsa, bunday maydon to’liq deyiladi.

12.34-ta’rif. Arximedcha tartiblangan rasional sonlar sistemasini o’z ichiga olgan eng kichik to’liq maydon haqiqiy sonlar sistemasi deyiladi.

Agar $([R, +, -, \cdot, <])$ agebraik sistema, xaqiqiy sonlar sistemasi bo’lsa, $([R, +, -, \cdot])$ - maydon xaqiqiy sonlar maydoni, $[R]$ - to’plam – haqiqiy sonlar to’plami deyiladi.

Endi xaqiqiy sonlar maydonini ko’rib chiqamiz.

$a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ hadlari rasional sonlardan iborat ketma-ketlikni qisqalik uchun (a_n) orqali belgilaymiz.

Hadlari rasional sonlardan iborat barcha (a_n) ketma-ketliklar to’plami Q^N da quyida $+$, $-$ amallarni kiritamiz:

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n), \quad -(a_n) = (-a_n), \quad (a_k) \cdot (b_k) = (a_k \cdot b_k).$$

Hamma elementlari 1dan iborat (1) ketma-ketlikni 1 orqali belgilaymiz.

Q^N - to’plamdagi barcha fundamental ketma-ketliklar to’plamini P orqali belgilaymiz.

$(P, +, -, \cdot, 1)$ - algebra birlik elementga ega bo’lgan kommutativ halqa bo’lishi bevosita tekshiriladi.

P - to’plamda $(a_n) \vee (b_n)$ ketma-ketliklar limitlari teng bo’lsa, ular teng kuchli deyiladi va $(a_n) \cong (b_n)$ deb belgilanadi.

$\equiv$ munosabat P to’plamda ekvivalentlik munosabatidir.

Agar shunday n_0 natural son va $\varepsilon > 0$ element topilib, barcha $k > n_0$ natural sonlar uchun $b_k - a_k \geq \varepsilon$ shart bajarilsa, $(a_k) < (b_k)$ deymiz.

R to’plamda $\equiv$ munosabat $+$, $-$, $\cdot$ amallari va $<$ - munosabatga nisbatan kongruensiyadir. U holda $P/\equiv$ faktor to’plamda $[(a_n)] + [(b_n)] = [(a_n + b_n)]$;

$[(a_n)] \cdot [(b_n)] = [(a_n \cdot b_n)]$; $-[(a_n)] = [(-a_n)]$ tengliklar orqali $+$, $-$ amallarni aniqlash mumkin.

1 orqali $[(1)]$ ketma-ketlikni belgilaymiz.

$(a_n) < (b_n)$ bo’lsa, $[(a_n)] < [(b_n)]$ deymiz. $(P/\equiv, +, -, \cdot, 1, <)$ sistema rasional sonlar sistemasini qamrab olgan eng kichik arximedcha tartiblangan to’liq maydon ya’ni haqiqiy sonlar sistemasidir.

Takrorlash uchun savollar:

1. Natural sonlar yarimhalqasini qamrab olgan eng kichik kommutativ halqani quring.
2. Butun sonlar halqasi qanday aniqlanadi?
3. Butun sonlar halqasida tartib munosabatini aniqlang.
4. Butun sonlar halqasida bo’linish munosabatining xossalarini ayting.

5. Maydon tushunchasiga ta'rif bering.
6. Maydonning soda xossalari ayting.
7. Butunlik sohasining nisbatlar maydonini tuzing.
8. Maydonlar izomorfizmiga misol keltiring.
9. Rasional sonlar maydonida tartib munosabatini aniqlang.
10. Tartiblangan maydon xossalari isbotlang.
11. To'liq maydon nima?
12. Haqiqiy sonlar sistemasini quring.

13- ma'ruza. Kompleks sonlar maydoni. Kompleks son qo'shmasi va moduli, ularning xossalari

Reja:

1. Kompleks kengaytma.
2. Kompleks sonlar maydoni.
3. Qo'shma kompleks sonlar.
4. Kompleks son moduli.

Asosiy tushunchalar: haqiqiy sonlar maydonining kompleks kengaytmasi, kompleks son, kompleks sonlar maydoni, sonli maydon, o'zaro qo'shma kompleks sonlar, kompleks son moduli.

Adabiyotlar: [1]: 1-qism; [6]: 157-164; [7]: 4-modul.

Ma'lumki, haqiqiy sonlar maydonida $x^2 + 1 = 0$ tenglama echimga ega emas. Bu tenglama echimga ega bo'ladigan, haqiqiy sonlar maydonining eng kichik kengaytmasi bo'lgan maydonni quramiz.

$\sqrt{-1}$ ni i orqali belgilab olamiz.

$C = \{b + bi / a, b \in \mathbb{R}\}$ - to'plamni qaraylik. C - da $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$; $(a + bi) \cdot c + di = (ac - bd) + (ad + bc)i$; $-(a + bi) = (-a) + (-b)i$ tengliklar orqali qo'shish, ko'paytirish, qarama-qarshisini olish amallarini aniqlaymiz.

C to'plam yuqorida aniqlangan amallarga nisbatan maydon hosil qilishini ko'rsatamiz. Haqiqatda, qo'shish, ko'paytirish amallarining kommutativligi, assosiativligi, ko'paytirishning qo'shishga nisbatan distributivligi bevosita tekshiriladi. $0 + 0i$ element C da qo'shishga nisbatan neytral element bo'lib, uni 0 orqali belgilaymiz. $1 + 0i$ esa birlik elementdir. Ixtiyoriy $a + bi \neq 0$ element uchun

teskari element $(a + bi)^{-1} \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$ formula bilan aniqlanadi. Haqiqatdan

ham, $a + bi \neq 0$ bo'lsa, $a^2 + b^2 \neq 0$ bo'lib, $\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2}i$ element mavjud va

$$(a + bi)\left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i\right) = \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} - \frac{b^2}{a^2 + b^2}\right) + \left(\frac{-ab}{a^2 + b^2} - \frac{ba}{a^2 + b^2}\right)i = 1 + 0i = 1.$$

Shunday qilib, $(C, +, -, \cdot, 1)$ algebra maydon ekan.

Bu maydonni kompleks sonlar maydoni deb ataymiz.

13.1.-ta'rif. Kompleks sonlar maydonining har qanday maydonostisi sonli maydon deyiladi. Kompleks sonlar maydonining har qanday xalqaostisi sonli maydondir.

13.2.-misol. $Z[i] = \{a + bi / \forall a, b \in \mathbb{Z}\}$ to'plam sonli xalqadir.

13.3.-ta'rif. $Z = a + bi$ kompleks son uchun $Z = a - bi$ - qo'shma kompleks son deyiladi.

13.4.-teorema. Har qanday Z_1, Z_2 - kompleks sonlar uchun quyidagi hossalari o'rinli:

$$1^0. \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

$$2^0. \overline{(-z_1)} = -\overline{z_1}.$$

$$3^0. \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

$$4^0. \overline{(\overline{z})} = z.$$

$$5^0. z_2 \neq 0, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

$$6^0. z = \overline{z} \text{ bo'lishi uchun } z \in \mathbb{R} \text{ bo'lishi zarur va etarli.}$$

$$7^0. \text{Agar } z = a + bi \text{ bo'lsa, u holda } z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$$

Isbot. Bu hossalari bevosita tekshirib chiqish orqali isbotlanadi.

3^o-hossaning isbotini keltiramiz. $Z_1 = a_1 + b_1i$, $Z_2 = a_2 + b_2i$ bo'lsin. U holda $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 + b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i = (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + b_1a_2)i = (a_1a_2 + b_1b_2) + (-a_1b_2 + b_1a_2)i = (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$.

13.5.-ta'rif. $\sqrt{a^2 + b^2}$ son $a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ kompleks sonining moduli deyiladi. Kompleks sonning moduli $|z|$ orqali belgilanadi.

13.6.-teorema. Har qanday Z_1, Z_2 kompleks sonlar uchun quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$1^0. |z|^2 = z \cdot \overline{z}.$$

$$2^0. |z| = 0 \text{ faqat va faqat shu holdaki, agar } z = 0 \text{ bo'lsa.}$$

$$3^0. |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

$$4^0. |z^{-1}| = |z|^{-1} (z \neq 0).$$

$$5^0. |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

$$6^0. ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|.$$

$$7^0. ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

Isbot: $z_1 = a_1 + b_1i \cdot z_2 = a_2 + b_2i$, $(a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$ bo'lsin, u holda:

$$1^0. |z_1|^2 = (\sqrt{a_1^2 + b_1^2})^2 = a_1^2 + b_1^2 = (a_1 + b_1i)(a_1 - b_1i) = Z_1 \cdot \overline{Z_1}$$

- 2°. $Z_1 = 0$ bo'lsa, $a_1 = 0, b_1 = 0$ bo'lib, $(\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = |Z_1| = 0)$ aksincha $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 0$ bo'lsa, bo'lsa $a_1 = 0$ va $b_1 = 0$.
- 3°. $|Z_1 \cdot Z_2| = |(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i)| = |(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i| =$
 $= \sqrt{(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)^2} = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = |Z_1| \cdot |Z_2|.$
- 4°. $Z_1 \neq 0$ bo'lsa, $1 = |Z_1 \cdot Z_2^{-1}| = |Z_1| \cdot |Z_1^{-1}|$ u holda $|Z_1^{-1}| = \frac{1}{|Z_1|}.$
- 5°. $\forall Z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ uchun $|z + 1|^2 \leq (|Z| + 1)^2$. Demak, $|z + 1| \leq |z| + 1 - y$
 holda $|z_1 + z_2| = |z_2| \cdot \left| \frac{z_1}{z_2} + 1 \right| \leq |z_2| \cdot \left(\left| \frac{z_1}{z_2} \right| + 1 \right) = |z_2| \cdot \left| \frac{z_1}{z_2} \right| + |z_2| = |z_1| + |z_2|$
- 6°. 5°. tengsizlikda $U = z_1 + z_2$ belgilashni kiritsak, $|U| \leq |U - Z_2| + |Z_2|$ yoki $|U - Z_2| \geq |U| - |Z_2|$ hosil bo'ladi.
- 7°. - ning isboti 6° -dan bevosita kelib chiqadi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Haqiqiy sonlar maydonining kengaytmasini quring.
2. Kompleks son qanday hosil qilingan?
3. Kompleks sonlar ustida arifmetik amallarni aniqlang.
4. Kompleks sonlar to'plami maydon tashkil etishini isbotlang.
5. Kompleks sonning qo'shmasi xossalarini isbotlang.
6. Kompleks son moduliga ta'rif Bering.
7. Kompleks son moduli xossalarini isbotlang.

14- ma'ruza. Kompleks sonning geometrik tasviri, trigonometrik shakli. Kompleks sondan ildiz chiqarish

Reja:

1. Kompleks sonning geometrik tasviri.
2. Kompleks sonning trigonometrik shakli.
3. Birinchi n- darajali ildizlari.
4. Kompleks sonning n- darajali ildizlari.

Asosiy tushunchalar: vektor, kompleks tekislik, mavhum o'q, vektorlarni qo'shish, vektor uzunligi, boshlang'ich argument, kompleks son argumenti, kompleks sonning trigonometrik shakli, Muavr formulalari, n- darajali ildizlar.

Adabiyotlar: [1]: 1-qism; [6]: 164-172; [7]: 4-modul.

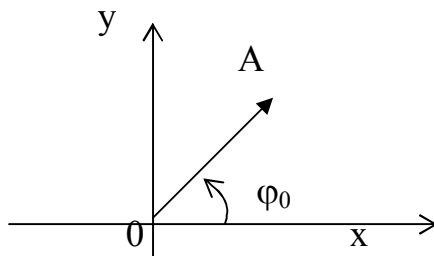
Har bir $a + bi$ kompleks songa tekislikda (a, b) nuqtani mos qo'ysak, kompleks sonlar maydoni bilan tekislik orasida biektiv moslik o'rnatiladi. (tekshiring) Shunday qilib, har bir kompleks songa tekislikdagi yagona nuqta mos

qo'yiladi. Bu nuqta kompleks sonning geometrik tasviri deyiladi. Bu nuqtani koordinatalar boshi bilan tutashtirsak, boshi koordinatalar boshida, uchi esa (a,b) koordinatali nuqtada bo'lgan $\overrightarrow{OA}$ vektor hosil bo'ladi. Bu vektorning uzunligi esa $a+bi$ kompleks sonning moduliga tengligi ayon.

Har bir bi kompleks songa Oy o'qida $(0,b)$ nuqta mos keladi. Bu o'qni mavxum o'q deb ataymiz. Ox o'qni xaqiqiy o'q deymiz. Qo'shma kompleks sonlar Ox o'qiga nisbatan simmetrik nuqtalar orqali ifoda qilinadi, qarama-qarshi kompleks sonlar esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik nuqtalar orqali ifoda qilinadi.

Moduli r ga teng bo'lgan barcha kompleks sonlarning geometrik o'rni, radiusi r ga teng, markazi koordinata boshida yotuvchi aylanadan iboratdir.

Kompleks sonlarni qo'shish vektorlarni qo'shishdagi parallelogramm qoidasi bilan bajarilishini ko'rish qiyin emas.



OA vektorning Ox o'qini musbat yo'nalishi soat strelkasi qarama-qarshi yo'nalishida hosil qilgan φ_q burchagi $a+bi$ kompleks sonning boshlang'ich argumenti deyiladi. Agar kompleks son birinchi chorakda bo'lsa, $\varphi_0 = \arctg b/a$; II-chorakda bo'lsa, $\varphi_0 = \pi - \arctg |b/a|$; III-chorakda bo'lsa, $\pi + \arctg |b/a|$, IV-chorakda bo'lsa, $\varphi_0 = 2\pi - \arctg |b/a|$ tengliklar bilan hisoblanadi. (1-rasmga qarang).

$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$ burchaklar kompleks sonining argumentlari deyiladi. $a+bi$ kompleks son berilgan bo'lib, r uning moduli φ esa argumenti bo'lsin, u holda $b = r \sin \varphi$, $a = r \cos \varphi$ tengliklarni ko'rsatish qiyin emas. Demak, $a+bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ tenglik o'rnili. Bu esa kompleks sonning trigonometrik ko'rinishi deyiladi.

14.1-teorema. $Z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ kompleks sonlar berilgan bo'lsin. U holda quyidagilar o'rinli:

$$1^\circ z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$2^\circ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Isbot: $1^\circ. z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 \cdot r_2$

$$((\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_1)) =$$

$$= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

2° ni isbotini o'quvchilarga mustaqil isbotlash uchun mashq sifatida qoldiramiz.

14.2-natija. $z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ bu formula Muavr formulasi deyiladi.

14.3-teorema. $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ kompleks son berilgan bo'lsin. Bundan r - kompleks sonning moduli $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$ kompleks sonning argumenti, φ_0 - boshlang'ich argumenti bo'lsin. U holda z - kompleks son n ta xar hil n - darajali kompleks ildizlarga ega bo'ladi va bu ildizlar quyidagi formula yordamida topiladi:

$$U_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} \right), k = 1, \dots, n-1$$

Isbot: Faraz qilaylik, $T = v(\cos \theta + i \sin \theta)Z$ berilgan kompleks ildiz bo'lsin. U holda $v(\cos \theta + i \sin \theta)^n = v^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, Bundan $v = \sqrt[n]{r}$; $\theta/n = \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}$ va $U_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} \right)$ kelib chiqadi.

$n = 0, 1, \dots, n-1$. bo'lgandagina xar hil n ta ildizni beradi.

14.5-misol. 1ning 4-darajali kompleks ildizlarini toping.

$$\text{Echish. } \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} = \cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4}, k = 0, 1, 2, 3.$$

$$u_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1;$$

$$u_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i;$$

$$u_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1;$$

$$u_3 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.$$

14.6-misol. $\sqrt[3]{2+3i}$ ni hisoblang.

Echish. Avval $2+3i$ ni trigonometrik shaklga keltirib olamiz:

$$r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \quad \varphi_0 = \arctg \frac{3}{2} \quad 2+3i = \sqrt{13} \left(\cos \left(\arctg \frac{3}{2} \right) + i \sin \left(\arctg \frac{3}{2} \right) \right).$$

Hosil bo'lgan trigonometrik shakldagi kompleks sondan 3-darajali ildizlarni formula yordamida topamiz:

$$\sqrt[3]{\sqrt{13} \left(\cos \left(\arctg \frac{3}{2} \right) + i \sin \left(\arctg \frac{3}{2} \right) \right)} = \sqrt[3]{13} \left(\cos \frac{\arctg \frac{3}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\arctg \frac{3}{2} + 2k\pi}{3} \right), k = 0, 1, 2.$$

Xar bir ildizni alohida ifodalaymiz:

$$v_0 = \sqrt[6]{13} \left(\cos \frac{\operatorname{arctg} \frac{3}{2}}{3} + i \sin \frac{\operatorname{arctg} \frac{3}{2}}{3} \right);$$

$$v_1 = \sqrt[6]{13} \left(\cos \frac{\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + 2\pi}{3} \right);$$

$$v_2 = \sqrt[6]{13} \left(\cos \frac{\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + 4\pi}{3} \right).$$

Takrorlash uchun savollar:

1. Kompleks sonning geometrik tasviri nimadan iborat?
2. Kompleks tekislik deganda qanday tekislikni tushunasiz?
3. Haqiqiy o'q, mavhum o'qlarni farqi nimada?
4. Kompleks sonlarni vektor ko'rinishida ifodalash mumkin-mi?
5. Geometrik ko'rinishdagi kompleks sonlarni qo'shish qanday bajariladi?
6. Kompleks sonning argumenti qanday aniqlanadi?
7. Kompleks son modulining geometrik ma'nosi nima?
8. Trigonometrik ko'rinishda berilgan kompleks sonlarni ko'paytirish, bo'lish amallari qanday bajariladi?
9. Kompleks sonning trigonometrik shaklga keltirish qanday amalga oshiriladi?
10. Birning n-darajali ildiziga ta'rif bering.
11. Birning n-darajali ildizlari soni nechta? Javobingizni asoslang.
12. Ixtiyoriy kompleks sondan n-darajali ildiz topish formulasini ifodalang.

ADABIYOTLAR:

1. ASOSIY ADABIYOTLAR:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T, Dusumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. T.,I qism,1993 y.,II qism, 1995 y.
- 2.Toshpo'latov B.T., Dusumbetov A.D., Qulmatov A.Q. Algebra va sonlar nazariyasi. Ma'ruzalar matni. T., 2001 1-5- qismlar.
- 3.Yunusov A.S.,Yunusova D.I. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi. Ma'ruzalar matni. T., 2001 y.
4. Yunusov A.S, D.I.Yunusova. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari. O'quv qo'llanma. Elektron versiyasi. TDPU sayti.
- 5.R.Iskandarov, R.Nazarov. Algebra va sonlar nazariyasi. I-II qismlar.T., O'qituvchi, 1979 y.
- 6.Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M., Visshaya shkola. 1979 g.
7. Yunusov A.S., Yunusova D.I. Algebra va sonlar nazariyasidan modul texnologiyasi asosida tayyorlangan nazorat topshiriqlari to'plami. TDPU. 2004.
8. N.Ya.Vilenkin. Algebra i teoriya chisel. M. 1984.
9. Petrova V.T. Leksii po algebre i geometrii. CH.1,2. Moskva, 1999g.
10. Shneperman L.B. Sbornik zadach po algebre i teorii chisel. Minsk. Visheyshaya shkola. 1982 g.
11. Zavalo S.T. i dr. Algebra I teoriya chisel.CH. I,II.Kiiv. Visa shkola.1983g.