O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

NIZOMIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI

ALGEBRA VA SONLAR NAZARIYASI

I I QISM

TOSHKENT – 2006

ANNOTATSIYA

Ushbu uslubiy qo'llanma «Matematika–informatika» yo'nalishi bakalavriati o'quv rejasiga kiritilgan «algebra va sonlar nazariyasi» kursidan 2–semestrga rejalashtirilgan ma'ruzalar uchun yozilgan. Uslubiy qo'llanma fanning modul texnologiyasi asosida tuzilgan dasturiga to'la mos keladi va unda dasturdagi 5–8–modullar: arifmetik vektorlar fazosi, chiziqli tenglamalar sistemasi, matritsalar, determinantlar yoritilgan. Ma'ruzalarning 4 ta modulga jamlanganligi talabalar bilimini nazorat qilish va baholashni ayrim olingan mavzular bo'yicha emas, balki bir bob bo'yicha amalga oshirish imkoniyatini beradi.

Uslubiy qo'llanma «Algebra», «Algebra va sonlar nazariyasi», «Matematika», «Oliy matematika», «Geometriya», «Matematik analiz», «Algebra va matematik analiz asoslari» fanlari o'qitiladigan oliy o'quv yurtlari, akademik litsey, kasb–hunar kollejlari o'qituvchilari hamda talabalari uchun mo'ljallangan.

TUZUVCHILAR: f.–m.f.n.,dotsent D.I.Yunusova,
f.–m.f.n., dotsent A.S.Yunusov.

TAQRIZCHI: f.–m.f.n., katta ilmiy xodim R.Beshimov.

SO'Z BOSHI

Ushbu uslubiy qo'llanma pedagogika oliy o'quv yurtlarining "matematika–informatika" yo'nalishi o'quv rejasiga kiritilgan "Algebra va sonlar nazariyasi" fani bo'yicha birinchi kurs talabalariga ikkinchi semestr davomida o'qitiladigan mavzular uchun tayyorlangan bo'lib, fanning modul texnologiyasi asosida tuzilgan va tasdiqlangan dasturiga to'la mos keladi.

Uslubiy qo'llanma "Algebra va sonlar nazariyasi" fanining "Arifmetik vektorlar fazosi», «Chiziqli tenglamalar sistemasi», «Matritsalar», «Determinantlar" boblarini qamrab olgan bo'lib, unda asosiy tushuncha va tasdiqlarni talabalar tomonidan mustaqil o'zlashtirilishiga yordam beruvchi misollar keltirilgan. Fan bo'yicha rejalashtirilgan amaliy mashg'ulotlar davomida nazariy bilimlar mustahkamlanadi. Keng qamrovli tanlangan misol va masalalarni tahlil qilish, o'rganish asosida talabalarda keltirilgan mavzular bo'yicha ma'lum bir bilim, malaka va ko'nikmalar shakllanadi.

Tayyorlangan uslubiy qo'llanma "Algebra va sonlar nazariyasi" fanini o'qitishda qo'llanilayotgan modul texnologiyasining asosini tashkil etgan talabalarning mustaqil ta'limini o'quv metodik adabiyotlar bilan ta'minlash masalasini hal etishda yordam beradi.

Mazkur uslubiy qo'llanma "Algebra", "Algebra va sonlar nazariyasi", "Oliy matematika", "Matematika" «Geometriya», «Matematik analiz», «Algebra va matematik analiz asoslari» fanlarini o'qitayotgan professor–o'qituvchilarga, akademik litsey, kasb–hunar kollejlari matematika o'qituvchilariga, fanni o'rganayotgan talabalarga mo'ljallangan.

5- modul. Arifmetik vektorlar fazosi

1. n – o'lchovli arifmetik vektor fazo.
2. Arifmetik vektor fazo xossalari.
3. Vektorlar chekli sistemasining chiziqli kombinatsiyasi.
4. Vektorlar chekli sistemasining chiziqli bog'liqligi, xossalari.
5. Vektorlar chekli sistemasining chiziqli erkliligi, xossalari.
6. Vektorlar chekli sistemasining chiziqli qobig'i, xossalari.
7. Vektorlar chekli sistemalarining ekvivalentligi, xossalari.
8. Vektorlar sistemasini elementar almashtirishlar.
9. Vektorlar chekli sistemasining bazisi, xossalari.
10. Vektorlar chekli sistemasining rangi, xossalari.

1-ma'ruza. Arifmetik vektor fazo. Asosiy xossalari. Fazoosti

Reja:
1. n – o'lchovli arifmetik vektor.
2. n – o'lchovli arifmetik vektorlar ustida amallar.
3. n – o'lchovli arifmetik vektor fazo.
4. n – o'lchovli arifmetik vektor fazo asosiy xossalari.
5. Chiziqli vektor fazo.
6. Fazoosti.

Asosiy tushunchalar: n – o'lchovli arifmetik vektor, n – o'lchovli arifmetik vektorlar yig'indisi, skalyarni vektorga ko'paytirish, n – o'lchovli arifmetik vektor fazo, chiziqli vektor fazo, fazoosti.

Adabiyotlar: [1]: 116-118 bb., [4]: 174-176 bb., [7]: 5-modul.

1.1-ta'rif. $F = < F;+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ ixtiyoriy maydon bo'lib, F uning asosiy
to'plami bo'lsin. F^n to'g'ri ko'paytmaning ixtiyoriy $\vec{a} = \left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$ elementi n – o'lchovli arifmetik vektor deyiladi.

$a_1, a_2, ..., a_n$-sonlar $\vec{a}$ vektorning mos ravishda 1-,2-. . . n- koordinatalari, n natural son esa uning o'lchovi deyiladi.

1.1-мисол. Maktab geometriya kursidan ma'lumki, tekislikdagi vektor $\vec{a} = (a_1, a_2)$ va fazodagi vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ko'rinishda bo'lib, ularning koordinatalari haqiqiy sonlardan iborat. Haqiqiy sonlar to'plami maydon tashkil etadi. Demak, Dekart koordinatalar sistemasi yordamida ifodalanuvchi tekislikda olingan vektorlar 2 o'lchovli, fazoda olingan vektorlar 3 o'lchovli arifmetik vektorga misol bo'ladi.

1.2–ta'rif. F^nning ixtiyoriy ikkita $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ va $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ vektorlari uchun $a_1=b_1, a_2=b_2,...,a_n=b_n$ bo'lsa, berilgan vektorlar teng deyiladi.

1.2–мисол. $\vec{a}=(2,3,-1,4)$ va $\vec{b}=(2,3,-1,4)$ vektorlar teng.

1.3–ta'rif. F^nning ixtiyoriy ikkita $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ va $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ vektorlarining yig'indisi deb $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n)$ vektorga aytiladi.

Agar $a_i+b_i=c_i, i=1,...,n$ va $\vec{c}=(c_1,...,c_n)$ belgilashlarni qo'llasak, u holda $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ hosil bo'ladi. F to'plam qo'shishga nisbatan yopiq ekanligidan, arifmetik vektorlarning yig'indisi arifmetik vektor bo'ladi. Ya'ni F^n qo'shish amaliga nisbatan yopiq to'plam.

1.3–мисол. $\vec{a}=(2,3,-1,4)$ va $\vec{b}=(3,5,4,2)$ vektorlarning yig'indisi $\vec{a}+\vec{b}=(2+3,3+5,-1+4,4+2)=(5,8,3,6)$ ga teng.

1.4–ta'rif. $\forall\lambda\in F$ skalyarni $\forall\vec{a}\in F^n$ vektorga ko'paytirish deb $\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,...,\lambda a_n)$ vektorga aytiladi.

F to'plam ko'paytirish amaliga nisbatan yopiq ekanligidan, F^n to'plamning skalyarni vektorga ko'paytirish amaliga nisbatan yopiq to'plam ekanligi kelib chiqadi. Skalyarni vektorga ko'paytirish amali odatda $\omega_\lambda(\vec{a})=\lambda\vec{a}$ ko'rinishda yoziladi. $\forall\vec{a}\in F^n$ vektorga $\exists\lambda\vec{a}\in F^n$ vektor mos qo'yilganligi uchun, skalyarni vektorga ko'paytirish amali F^nda unar amal bo'ladi.

1.4–мисол. $\lambda=-2$ skalyarni $\vec{a}=(2,3,-1,4)$ vektorga ko'paytirish natijasida $\omega_{-2}(\vec{a})=(-2)(2,3,-1,4)=(-4,-6,2,-8)$ vektor hosil bo'ladi.

1.5–ta'rif. F^n to'plam, unda aniqlangan qo'shish binar amali va skalyarni vektorga ko'paytirish unar amallari yordamida hosil qilingan $F^n=<F^n;+,\{\omega_\lambda\mid\lambda\in F\}>$ algebra F maydon ustida qurilgan n – o'lchovli arifmetik vektor fazo deyiladi.

1.1–teorema. F^nda aniqlangan qo'shish va skalyarni vektorga ko'paytirish amallari quyidagi xossalarga ega:

1°. $\forall(\vec{a},\vec{b}\in F^n)(\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a})$ – qo'shishning kommutativlik xossasi;

2°. $\forall(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in F^n)((\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}))$ – qo'shishning assotsiativlik xossasi;

3°. $\forall(\vec{a}\in F^n)(\vec{a}+\vec{0}=\vec{a})$ (qo'shishga nisbatan neytral element mavjud);

4°. $\forall(\vec{a}\in F^n)(\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0})$ (qo'shish amaliga nisbatan simmetrik element mavjud);

$5^0.\forall(\lambda\in F)\wedge\forall(\vec{a}\in F^n)(\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b})$ (skalyarni vektorlar yig'indisiga ko'paytirish distributiv);

$6^0.\forall(\lambda,\mu\in F)\wedge\forall(\vec{a}\in F^n)((\lambda\cdot\mu)\vec{a}=\lambda(\mu(\vec{a})))$ (skalyarlar ko'paytmasini vektorga ko'paytirish assotsiativ);

$7^0.\forall(\lambda,\mu\in F)\wedge\forall(\vec{a}\in F^n)((\lambda+\mu)(\vec{a})=(\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}))$ (skalyarlar yig'indisini vektorga ko'paytirish distributiv;

$8^0.\forall(\vec{a}\in F^n)(1\cdot\vec{a}=\vec{a})$.

1.6-ta'rif. F = < F; +, •, -, $^{-1}$, 0,1 > maydon ustida V≠∅ to'plam berilgan bo'lib, unda quyidagi shartlar bajarilsa,
V = < V; +, $\{\omega_\alpha \mid \alpha\in F\}$ > algebraga F maydon ustida qurilgan chiziqli fazo deyiladi:

1. $\forall a,b\in V\Rightarrow a+b\in V$;
2. $\forall a,b\in V\Rightarrow a+b=b+a$;
3. $\forall a,b,s\in V\Rightarrow (a+b)+s=a+(b+s)$;
4. $\forall a\in V\wedge\exists e\in V\Rightarrow a+e=a$ ($e=0$);
5. $\forall a\in V\wedge\exists a'\in V\Rightarrow a+a'=0$ ($a'=-a$);
6. $\forall a\in V\wedge\forall\alpha\in F\Rightarrow\omega_\alpha(a)=\alpha a\in V$;
7. $\forall a,b\in V\wedge\forall\alpha\in F\Rightarrow\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$;
8. $\forall a\in V\wedge\forall\alpha,\beta\in F\Rightarrow(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$;
9. $\forall a\in V\wedge\forall\alpha,\beta\in F\Rightarrow(\alpha\beta)a=\alpha(\beta a)$;
10. $\forall a\in V\Rightarrow 1\cdot a=a$.

1.7-ta'rif. $F^n=<F^n;+,\{\omega_\lambda\mid\lambda\in F\}>$ n - o'lchovli arifmetik vektor fazo berilgan bo'lsin. F^nning ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan qism to'plami $F^k(k\le n)$ arifmetik vektor fazo tashkil qilsa, F^k arifmetik vektor fazoga F^n arifmetik vetor fazoning fazoostisi (qismfazosi) deyiladi.

1.5-мисол. R^1, R^2, R^3 lar haqiqiy sonlar maydoni ustida qurilgan arifmetik vektor fazolar va R^1 fazo R^2, R^3 fazolarga; R^1, R^2 fazolar R^3 fazoga fazoosti bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. n-o'lchovli vektor deb nimaga aytiladi?
2. n-o'lchovli vektorlarning tengligi ta'rifini aytib bering.
3. n-o'lchovli vektorlarning yig'indisi va vektorning skalyarga ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
4. n-o'lchovli arifmetik vektor fazo deb nimaga aytiladi?
5. n-o'lchovli arifmetik vektor fazoning qanday xossalarini bilasiz?
6. Vektorlar sistemasining chiziqli qobig'iga ta'rif bering.
7. Ekvivalent sistemalarga ta'rif bering.
8. Chiziqli vekto fazoga ta'rif bering.

2-ma'ruza. Vektorlarning chiziqli bog'liq, chiziqli bog'liq bo'lmagan sistemalari, xossalari

Reja:
1. Vektorlar sistemasi.
2. Vektorlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi.
3. Vektorlarning chiziqli bog'liq sistemasi.
4. Vektorlarning chiziqli bog'liq bo'lmagan sistemasi.
5. Vektorlarning chiziqli bog'liq, chiziqli bog'liq bo'lmagan sistemalari xossalari.

Asosiy tushunchalar: vektorlar sistemasi, chiziqli kombinatsiya, chiziqli bog'liq sistema, chiziqli bog'lanmagan sistema.

Adabiyotlar: [1]: 121-124 bb., [4]: 176-180 bb., [7]: 5-modul.

$F=<F;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ maydon ustida qurilgan $F^n=<F^n;+,\{\omega_\lambda \mid \lambda\in F\}>$ arifmetik vektor fazo berilgan bo'lsin.

2.1-ta'rif. F^n vektor fazoning vektorlaridan iborat $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n,...$ sistemaga vektorlarning cheksiz sistemasi; $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ sistemaga vektorlarning chekli sistemasi deyiladi.

2.2-ta'rif. F^n vektor fazoning $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n,...$ sistemasi va F maydonning $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n,...$ skalyarlari berilgan bo'lsin. $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+...+\lambda_n\vec{a}_n+...$ ifodaga $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n,...$ vektorlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi deyiladi. Chiziqli kombinatsiyadagi $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n,...$ skalyarlar chiziqli kombinatsiyaning koeffitsientlari deyiladi.

2.1-misol. $\vec{a}=(1,2,3),\vec{b}=(-1,2,4),\vec{c}=(7,-5,2)$ vektorlar va $\alpha=-2,\beta=5,\gamma=9$ skalyarlar berilgan bo'lsa, ularning chiziqli kombinatsiyasini quyidagicha aniqlaymiz: $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=$
$=(-2)(1,2,3)+5(-1,2,4)+9(7,-5,2)=(-2,-4,-6)+(-5,10,20)+$
$+(63,-45,18)=(56,-39,32).$

2.3-ta'rif. F sonlar maydoni ustida qurilgan F^n arifmetik vektor fazoning chekli sondagi

$$\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n \qquad (1)$$

vektorlari uchun F maydonda kamida bittasi noldan farqli shunday $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ skalyarlar topilib, ular uchun ushbu

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+...+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0} \qquad (2)$$

tenglik bajarilsa, u holda (1) sistema vektorlarning chiziqli bog'langan sistemasi deyiladi. Agar (2) tenglik $\lambda_1=0,\lambda_2=0,...,\lambda_n=0$ bo'lganda bajarilsa, u holda (1) vektorlarning chiziqli bog'lanmagan (chiziqli erkli) sistemasi deyiladi.

Vektorlarning bo'sh sistemasi chiziqli bog'lanmagan sistema hisoblanadi.

2.4–ta'rif. Agar istalgan $\lambda_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ sonlar uchun ushbu

$$\vec{a}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+...+\lambda_n\vec{a}_n \qquad (3)$$

tenglik bajarilsa, u holda $\vec{a}$ vektor $\vec{a}_i(i=\overline{1,n})$ vektorlar orqali chiziqli ifodalanadi ($\vec{a}$ vektor $\vec{a}_i(i=\overline{1,n})$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat) deyiladi.

2.2–misol. $\vec{e}_1=(1,0,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$, $\vec{e}_3=(0,0,1)$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli vektorlar sistemasi ekanligini isbotlang.

Haqiqatdan ham, $\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\alpha_3\vec{e}_3=\alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(0,0,1)= =(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,0)$ bo'lib, bundan $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$ kelib chiqadi. Demak, $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'lanmagan sistema bo'ladi.

2.2–misol. F^n arifmetik vektor fazoning $\vec{e}_1=(1,0,...,0),\vec{e}_2=(0,1,0,...,0),...,\vec{e}_n(0,...,0,1)$ vektorlaridan iborat sistema chiziqli bog'lanmagan. Bu sistema n–o'lchovli birlik vektorlardan iborat sistema.

2.1–teorema. Kamida bitta nol vektorga ega vektorlarning $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ chekli sistemasi chiziqli bog'langan sistema bo'ladi.

Isbot. $\vec{a}_i$ vektor nol vektor bo'lsin. U holda har qanday noldan farqli

λ_i skalyar uchun $0\cdot\vec{a}_1+0\cdot\vec{a}_2+...+\lambda_i\cdot\vec{0}+...+0\cdot\vec{a}_m=\vec{0}$ tenglik bajariladi. Demak, $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ sistema chiziqli bog'langan sistema.

2.2–teorema. Chekli vektorlar sistemasining biror–bir qismi chiziqli bog'langan bo'lsa, sistemaning o'zi ham chiziqli bog'langan bo'ladi.

2.3–teorema. Vektorlarning chiziqli bog'lanmagan sistemasining har qanday qism sistemasi chiziqli bog'lanmagan sistema bo'ladi.

2.4–teorema. Agar $\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorlardan kamida bittasi o'zidan oldingi vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsa, u holda $\vec{a}_1\neq\vec{0}$ bo'lgan $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorlardan iborat sistema chiziqli bog'langan bo'ladi.

2.5–teorema. Agar $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorlarning sistemasi chiziqli bog'lanmagan bo'lib, $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n,\vec{b}$ sistema chiziqli bog'langan bo'lsa, u holda $\vec{b}$ vektor $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorlar sistemasi orqali yagona usulda chiziqli ifodalanadi.

2.6–teorema. Agar $\vec{a}$ vektor $\vec{b}_1,\vec{b}_2,...,\vec{b}_n$ orqali va $\vec{b}_i(i=\overline{1,n})$ vektorlar $\vec{c}_1,\vec{c}_2,...,\vec{c}_m$ vektorlar orqali chiziqli ifodalansa, u holda $\vec{a}$ vektor $\vec{c}_1,\vec{c}_2,...,\vec{c}_m$ vektorlar orqali chiziqli ifodalanadi.

2.7-teorema. Agar $\vec{a}_1,...,\vec{a}_{n+1}$ vektorlar $\vec{b}_1,\vec{b}_2,...,\vec{b}_n$ vektorlar orqali chiziqli ifodalansa, u holda $\vec{a}_1,...,\vec{a}_{n+1}$ sistema chiziqli bog'langan bo'ladi.

2.3-misol. $\vec{a}_1=(2,4,7), \vec{a}_2=(3,6,11), \vec{a}_3=(4,8,13)$ vektorlar $\vec{b}_1=(1,2,3), \vec{b}_2=(1,2,4)$ orqali chiziqli ifodalanadi: $\vec{a}_1=\vec{b}_1+\vec{b}_2, \vec{a}_2=\vec{b}_1+2\vec{b}_2, \vec{a}_3=3\vec{b}_1+\vec{b}_2$.

$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ vektorlar sistemasining chiziqli bog'liqligini ko'rsatamiz:

$$\begin{array}{c}\vec{a}_1\\ \vec{a}_2\\ \vec{a}_3\end{array}\begin{pmatrix}2&4&7\\3&6&11\\4&8&13\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}\vec{a}_1\\ 2\vec{a}_2-3\vec{a}_1\\ \vec{a}_3-2\vec{a}_1\end{array}\begin{pmatrix}2&4&7\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}\vec{a}_1\\ 2\vec{a}_2-3\vec{a}_1\\ \vec{a}_3-2\vec{a}_1-(2\vec{a}_2-3\vec{a}_1)\end{array}\begin{pmatrix}2&4&7\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Hosil bo'lgan pog'onasimon matritsada nol satr mavjud. Bundan $\vec{a}_3-2\vec{a}_1-(2\vec{a}_2-3\vec{a}_1)=\vec{0}$ ifoda yordamida $\vec{a}_3=2\vec{a}_1+(2\vec{a}_2-3\vec{a}_1)=-\vec{a}_1+2\vec{a}_2$ tenglikni, ya'ni $\vec{a}_3$ vektorning $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ vektorlar yordamidagi ifodasini keltirib chiqaramiz. Demak, $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'langan.

2.1-natija. Agar $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorlar $\vec{b}_1,\vec{b}_2,...,\vec{b}_m$ sistema orqali chiziqli ifodalansa va $n>m$ bo'lsa, u holda $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ sistema chiziqli bog'langan bo'ladi.

2.2-natija. Agar $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorlar $\vec{b}_1,\vec{b}_2,...,\vec{b}_m$ sistema orqali chiziqli ifodalansa va $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ sistema chiziqli bog'lanmagan bo'lsa, u holda $n\le m$ bo'ladi.

2.3-natija. n-o'lchovli arifmetik vektor fazoning har qanday n dan ortiq vektorlardan iborat sistemasi chiziqli bog'langan bo'ladi.

2.4-misol. R^3 da $\vec{a}$(1; 2; 3), $\vec{b}$(-1; 0; 3), $\vec{c}$(2; 1; -1) ,$\vec{d}$(3; 2; 2) vektorlar sistemasi berilgan. Uning chiziqli bog'langan yoki chiziqli bog'lanmaganligini tekshiramiz.

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}=\vec{0}$ tenglamadan $\alpha=-\frac{1}{4};\beta=\frac{7}{4};\gamma=\frac{5}{2};\delta=-1$ ekanligini topamiz. Demak, ta'rifga ko'ra berilgan sistema chiziqli bog'langan. Haqiqatdan ham, $\vec{d}=-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{7}{4}\vec{b}+\frac{5}{2}\vec{c}$, ya'ni sistemaning bitta vektori qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalanadi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Vektorlar sistemasi deganda nimani tushunasiz?.
2. Vektorlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasiga ta'rif bering.
3. Vektorlarning chiziqli bog'liq sistemasi deb nimaga aytiladi?.

4. Vektorlarning chiziqli bog'liq bo'lmagan sistemasi ta'rifini ayting.

5. Vektorlarning chiziqli bog'liq sistemasi xossalarini ayting.

6. Vektorlarning chiziqli bog'liq bo'lmagan sistemalari xossalarini ayting.

3-ma'ruza. Vektorlarning ekvivalent sistemalari. Vektorlar chekli sistemasining bazisi va rangi

Reja:

1. Vektorlarning ekvivalent sistemalari.
2. Vektorlarning chekli sistemasini elementar almashtirishlar.
3. Vektorlar chekli sistemasining bazisi.
4. Vektorlar chekli sistemasining rangi.

Asosiy tushunchalar: vektorlarning ekvivalent sistemalari, vektorlar sistemasini elementar almashtirishlar, vektorlar sistemasining bazisi, vektorlar sistemasining rangi.

Adabiyotlar: [1]: 124–125 bb., [4]: 182–184 bb., [7]: 5–modul.

$F = < F;+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ maydon ustida qurilgan $F^n = < F^n;+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in F\} >$ arifmetik vektor fazo va shu fazo vektorlaridan tuzilgan R va T chekli sistemalar berilgan bo'lsin.

3.1–ta'rif. Agar R va T sistemalarning ixtiyoriy biridan olingan har qanday noldan farqli vektorni ikkinchi sistema vektorlarining chiziqli kombinatsiyasi sifatida ifodalash mumkin bo'lsa, bunday sistemalar ekvivalent sistemalar deyiladi va $R \sim T$ ko'rinishda belgilanadi.

Vektorlarning chekli sistemalari to'plamida aniqlangan ~ binar munosabat refleksivlik, simmetriklik, tranzitivlik xossalariga ega bo'lganligi uchun ekvivalentlik binar munosabati bo'ladi.

3.1–misol. Vektorlarning bo'sh sistemasi o'ziga hamda nol vektorlardan iborat sistemaga ekvivalent.

3.1–teorema. Agar vektorlarning har qanday chiziqli erkli ikkita chekli sistemalari ekvivalent bo'lsa, ulardagi vektorlar soni teng bo'ladi.

3.2–ta'rif. Vektorlar chekli sistemasini elementar almashtirishlar deb quyidagi almashtirishlarga aytiladi:

1) sistemaning qandaydir bir vektorini noldan farqli skalyarga ko'paytirish;

2) sistemaning skalyarga ko'paytirilgan bir vektorini ikkinchi vektoriga qo'shish yoki ayirish;

3) nol vektorni sistemadan chiqarish yoki sistemaga kiritish.

3.2–teorema. Agar vektorlarning bir chekli sistemasi ikkinchi sistemani elementar alamashtirishlar natijasida hosil qilingan bo'lsa, bunday sistemalar ekvivalent bo'ladi.

3.3–ta'rif. Vektorlar chekli sistemasining chiziqli erkli, bo'sh bo'lmagan qism sistemasi yordamida sistemaning har qanday vektorini chiziqli ifodalash mumkin bo'lsa, bunday qism sistemaga berilgan sistemaning bazisi deyiladi.

3.3–teorema. Kamida bitta noldan farqli vektorga ega bo'lgan har qanday chekli sistema bazisga ega. Vektorlar chekli sistemasining har qanday ikkita bazisi bir hil sondagi vektorlardan iborat bo'ladi.

3.4–ta'rif. Vektorlar chekli sistemasining ixtiyoriy bazisidagi vektorlar soniga uning rangi deyiladi.

Nol vektorlardan iborat sistemaning va bo'sh sistemaning rangi nolga teng deb hisoblanadi.

3.2–misol. $\vec{a}$ (1; 2; 3), $\vec{b}$ (–1; 0; 3), $\vec{c}$ (2; 1; –1), $\vec{d}$ (3; 2; 2) vektorlardan iborat sistemaning bazislaridan biri $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlardan tashkil topgan. Demak, berilgan sistemaning rangi 3 ga teng.

3.4–teorema. $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ vektorlar sistemasi $\vec{b}_1,\vec{b}_2,...,\vec{b}_m$ vektorlar sistemasi orqali chiziqli ifodalansa, u holda $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ sistemaning rangi $\vec{b}_1,\vec{b}_2,...,\vec{b}_m$ sistemaning rangidan katta emas.

3.3–misol. $\vec{a}$ (1; 2; 3), $\vec{b}$ (–1; 0; 3), $\vec{c}$ (2; 1; –1), $\vec{d}$ (3; 2; 2) vektorlardan iborat sistemaning rangi 3 ga teng. Uning qism sistemasi sifatida $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlardan tashkil topgan sistemani olsak, u chiziqli bog'lanmagan bo'lganligi sababli rangi 3 ga teng. Berilgan sistemaning ixtiyoriy bitta vektoridan iborat sistema chiziqli bog'lanmagan va rangi 1 ga teng qism sistema bo'ladi.

3.5–teorema. Vektorlar chekli sistemasining har qanday qism sistemasining rangi sistema rangidan katta emas.

3.6–teorema. Vektorlar ekvivalent chekli sistemalarining ranglari teng.

3.7–teorema. n–o'lchovli arifmetik vektor fazoni har qanday chekli sistemasining rangi n dan katta emas.

3.8–teorema. Agar vektorlar chekli sistemasining rangi n ga teng bo'lsa, u holda uning k ta vektordan iborat har qanday qism sistemasi $k > n$ bo'lganda chiziqli bog'langan bo'ladi.

Vektorlar sistemasining rangi ta'rifiga ko'ra, agar sistemaning rangi n ga teng bo'lsa, u holda sistemadagi chiziqli erkli vektorlarning maksimal soni n ga teng. Bundan $k > n$ ta vektordan tuzilgan har qanday qism sistemada $k - n$ ta vektor n ta vektor yordamida chiziqli ifodalanadi.

3.9–teorema. Agar $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ vektorlar sistemasining rangi $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n,\vec{b}$ vektorlar sistemasining rangiga teng bo'lsa, u holda $\vec{b}$ vektorni $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$

vektorlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalash mumkin.

Takrorlash uchun savollar:

1. Vektorlarning ekvivalent sistemalari deb nimaga aytiladi?
2. Ekvivalent sistemalar xossalarini ayting.
3. Vektorlarning sistemasida qanday elementar almashtirishlar bajariladi?
4. Elementar almashtirishlar natijasida qanday sistema hosil bo'ladi?
5. Vektorlar chekli sistemasining bazisiga ta'rif bering.
6. Sistema bazisining asosiy xossalarini bayon qiling.
7. Vektorlar chekli sistemasining rangi deb nimaga aytiladi?
8. Sistema rangining qanday xossalarini bilasiz?

4-ma'ruza. Chiziqli qobiq. Chiziqli ko'pxillik

Reja:
1. Vektorlar sistemasining chiziqli qobig'i.
2. Chiziqli qobiqning asosiy xossalari.
3. Chiziqli ko'pxillik.
4. Chiziqli ko'pxillikning asosiy xossalari.

Asosiy tushunchalar: vektorlar sistemasining chiziqli qobig'i, chiziqli ko'pxillik.

Adabiyotlar: [1]: 133–139 bb., [4]: 250–255 bb., [7]: 5-modul.

$F = < F;+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ maydon ustida qurilgan $F^n = < F^n;+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in F\} >$ arifmetik vektor fazo va shu fazo vektorlaridan tuzilgan $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ vektorlarning chekli sistemasi berilgan bo'lsin.

4.1-ta'rif. $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_n\vec{a}_n$ ($\alpha_i \in F$) ko'rinishdagi barcha chiziqli kombinatsiyalar to'plamiga $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorlarning chiziqli qobig'i deyiladi va u $L(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n)$ ko'rinishda belgilanadi.

$\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorlarning chiziqli qobig'i qo'shish va skalyarni vektorga ko'paytirish amallariga nisbatan yopiqligi bevosita tekshirish tekshirish orqali aniqlanadi.

4.1-teorema. $L(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n)$ chiziqli qobiq vektor fazo tashkil etadi.

4.2-ta'rif. F^n vektor fazoning $L(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n)$ fazoostisiga $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorlarga tortilgan yoki $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorlar orqali hosil qilingan fazoosti deyiladi.

Bo'sh to'plamning chiziqli qobig'i nol vektordan iborat to'plam bo'ladi.

4.1-misol. $\vec{a}_1=(2,3,1), \vec{a}_2=(-1,2,0), \vec{a}_3=(1,5,1)$ vektorlar sistemasining chiziqli qobig'i $L(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)=\{\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\vec{a}_3 \mid \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in R\}$ tashkil etgan chiziqli vektor fazoning bazisi berilgan vektorlar sistemasining bazisi (masalan, $\vec{a}_1, \vec{a}_2$)dan iborat bo'lib, o'lchovi vektorlar sistemasining rangi 2 ga teng.

4.2-teorema. Agar $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_m$ sistemaning har bir vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$
sistema orqali chiziqli ifodalansa, u holda $L(\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_m)\subset L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n)$ bo'ladi.

4.3-teorema. Agar $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ sistemaning rangi k bo'lsa, u holda $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n)$ chiziqli qobiq k o'lchovli bo'ladi.

F maydon ustida n-o'lchovli F^n fazoning W qism fazosi va $\vec{x}_0\in F^n$ vektor berilgan bo'lsin. $\forall\vec{y}\in W$ uchun $\vec{z}=\vec{x}_0+\vec{y}$ ko'rinishdagi vektorlar to'plamini H orqali belgilaylik.

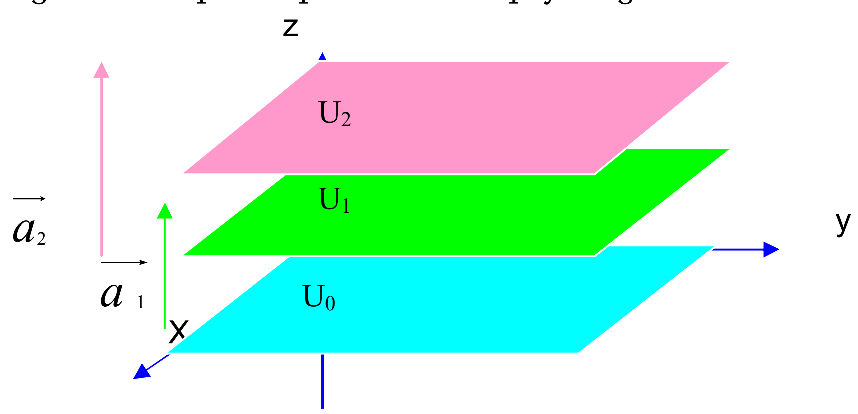
4.3-ta'rif. $\vec{x}_0+W=\{\vec{x}_0+\vec{y} \mid \vec{x}_0\in F^n\}$ to'plamga W qism fazoning $\vec{x}_0$ vektorga siljitishdan hosil bo'lgan chiziqli ko'pxillik deyiladi va u $H=\vec{x}_0+W$ orqali belgilanadi.

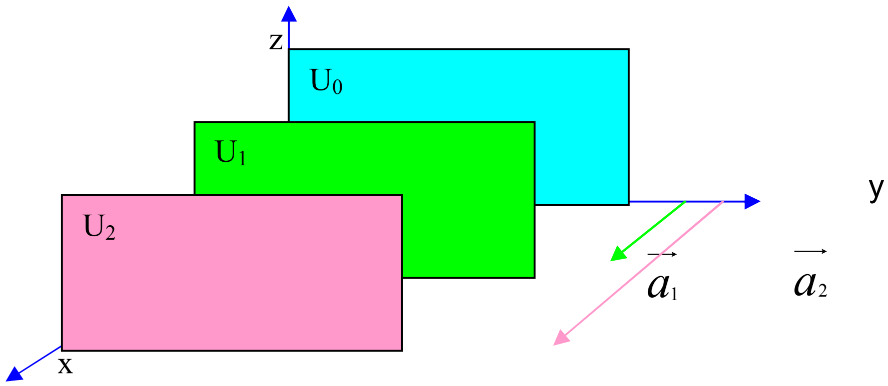
$H=\vec{x}_0+W$ tenglik, W qismfazoning barcha vektorlariga $\vec{x}_0$ vektorni qo'shishdan H ning $\vec{z}$ vektorlari hosil bo'lishini ko'rsatadi.

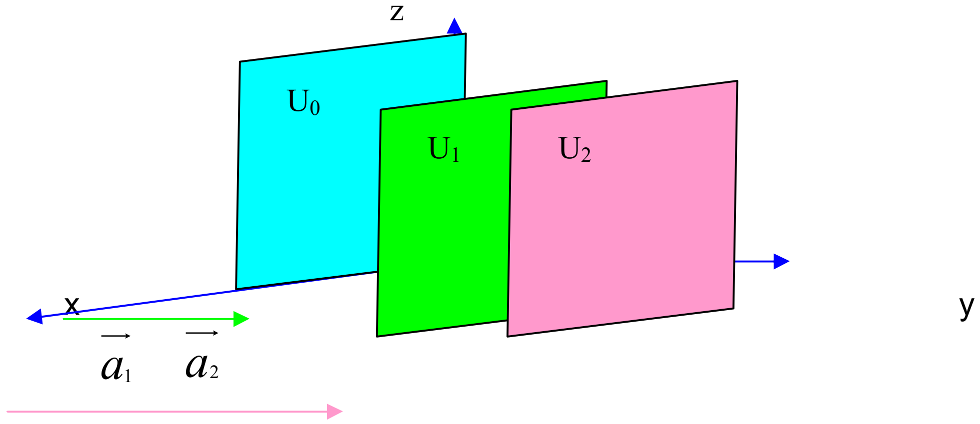
4.2-misol. Dekart koordinatalar tekisligini ikki o'lchovli arifmetik vektor fazo ekanligi ma'lum. Uning qismfazosi sifatida koordinatalar boshidan o'tgan har qanday to'g'ri chiziqda yotuvchi vektorlar to'plamini olish mumkin. U holda chiziqli ko'pxillik sifatida qismfazo sifatida olingan to'g'ri chiziqni biror $\vec{x}_0$ vektorga parallel ko'chirishdan hosil bo'lgan to'g'ri chiziqni qarash mumkin.

4.3-misol. R^3 da koordinatalar boshidan o'tgan har qanday tekislik qismfazo bo'ladi. Uni biror bir o'qda olingan noldan farqli vektorga parallel ko'shirish natijasida hosil bo'lgan tekislik chiziqli ko'pxillik bo'ladi.

(XOU), (YOZ), (XOZ) tekisliklarini parallel ko'chirishlardan hosil bo'lgan chiziqli ko'pxilliklarni quyidagi chizmalarda ko'rish mumkin:







4.4-teorema. H chiziqli ko'pxillik F^n fazoning qismfazosini ifodalashi uchun $\vec{x}_0 \in W$, ya'ni $H=W$ munosabat bajarilishi zarur va yetarli.

Isboti. 1. Zarurligi. N ko'pxillik qismfazoni ifodalasa, u holda unda $\vec{0}$ vektor mavjud bo'lib, qandaydir z vektor uchun $\vec{z} = \vec{x}_0 + \vec{y} = \vec{0}$ bo'ladi. Bundan, $\vec{x}_0 = -\vec{y} \in W$ kelib chiqadi. Demak, W qismfazo qo'shish amaliga nisbatan gruppa ekanini nazarga olsak, gruppaning ta'rifiga ko'ra $H=\vec{x}_0+W=W$, ya'ni $H=W$ hosil bo'ladi.

2. Yetarliligi. $\vec{x}_0 \in W$ bo'lsa, u holda H qismfazo ekanligi ravshan, chunki gruppaning xossalariga asosan $H=\vec{x}_0+W=W$, ya'ni $H=W$ bo'ladi.

4.5-teorema. Ixtiyoriy ikkita $\vec{x}_0+W$ va $\vec{y}_0+W$ chiziqli ko'pxilliklar umumiy elementga ega bo'lmaydi yoki ular ustma-ust tushadi. Barcha W qismfazo yordamida hosil qilingan chiziqli ko'pxilliklar birlashmasi V to'plamdan iborat.

4.6-teorema. F^n vektor fazoning qismfazolari W , W' va $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ vektorlari berilgan bo'lsin. Agar $\vec{x}_1-\vec{x}_2 \in W'$ va $W \subset W'$ bo'lsa, u holda $\vec{x}_1+W \subset \vec{x}_2+W'$ bo'ladi.

4.7-teorema. $H=\vec{x}_0+W$ chiziqli ko'pxillikning o'lchovi W qismfazoning o'lchovi bilan bir xil bo'ladi.

4.4-misol. R^3 arifmetik vektor fazoning R^2 qismfazosi yordamida hosil qilingan chiziqli ko'pxillik $H=\vec{x}_0+R^2$ vektor fazo tashkil etishi uchun $\vec{x}_0=\vec{0}$ bo'lishi kerak. U holda $H=\vec{0}+R^2 = R^2$ bo'ladi va chiziqli ko'pxillikning o'lchovi qismfazo o'lchoviga teng bo'ladi: $\dim R^2=\dim H$.

Takrorlash uchun savollar:

1. Vektorlar sistemasining chiziqli qobig'i deb nimaga aytiladi?
2. Chiziqli qobiqning asosiy xossalarini bayon eting.
3. Chiziqli ko'pxillikka ta'rif bering.
4. Chiziqli ko'pxillikning asosiy xossalarini ayting.
5. Chiziqli ko'pxillikka maktab matematikasidan misol keltiring.

5-ma'ruza. Matritsa va uning rangi. Matritsaning ustun va qator (satr) ranglarining tengligi

Reja:
1. Matritsa.
2. Nomdosh matritsalar.
3. Matritsalar tengligi.
4. Matritsaning satr (ustun) vektorlari sistemasi.
5. Matritsaning satr (ustun) rangi.
6. Matritsani elementar almashtirishlar.
7. Pog'onasimon matritsa.
8. Transponirlangan matritsa.
9. Matritsaning satr va ustun ranglarining tengligi.

Asosiy tushunchalar: matritsa, nomdosh matritsa, teng matritsalar, satr vektor, ustun vektor, matritsaning satr rangi, matritsaning ustun rangi, transponirlangan matritsa, matritsani elementar almashtirishlar, pog'onasimon matritsa.

Adabiyotlar: [1]: 153–159 bb., [4]: 188–191 bb., [7]: 6–modul.

$F=<F;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ maydon berilgan bo'lsin.

5.1–ta'rif. F maydonning mn ta a_{ij} $(i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n})$ elementlaridan tuzilgan ushbu
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
ko'rinishdagi jadval F maydon ustidagi $m\times n$ tartibli matritsa deyiladi.

Matritsa A,B,S,... harflar orqali belgilanadi. a_{ij} lar matritsaning elementlari deyiladi. a_{ij} element, matritsaning i–satri, j–ustuni kesishmasidagi element. Matritsada m>n, m<n, m=n bo'lishi mumkin. Agar matritsada m=n bo'lsa, u holda bunday matritsa n–tartibli kvadrat matritsa deyiladi.

5.2–ta'rif. A va B matritsalar berilgan bo'lib, ularning mos ravishda satrlari va ustunlari soni teng bo'lsa, u holda A va B matritsalarni nomdosh matritsalar deb yuritiladi.

Masalan, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 22 & 6 \\ 6 & -3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsalar 4×5 tartibli matritsalar, ya'ni ular nomdosh matritsalar.

5.3–ta'rif. A matritsaning har bir a_{ij} elementi B matritsaning unga mos b_{ij} elementiga teng bo'lsa, u holda A va B nomdosh matritsalar teng (aks holda teng emas) matritsalar deyiladi.

$A^i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$ matritsaga n ta satrli, 1 ta ustunli, $A_j = \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \end{pmatrix}$ matritsaga 1 ta satrli, n ta ustunli matritsa deyiladi. Bitta satrli matritsalarni satr vektorlar, bitta ustunli matritsalarni ustun vektorlar deb qarash mumkin.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsada $\overline{A}_1,...,\overline{A}_m$ satr vektorlar va $\overline{A}^1,...,\overline{A}^n$ ustun vektorlar mavjud.

5.4–ta'rif. Matritsadagi satr vektorlar sistemasining rangiga matritsaning satr rangi, ustun vektorlar sistemasining rangiga uning ustun rangi deyiladi. A matritsaning satr rangini $r(A)$, ustun rangini $\rho(A)$ ko'rinishda belgilaymiz.

Matritsa rangini aniqlash uchun matritsa ustida elementar almashtirishlar bajariladi. Ular quyidagilar:

1. Matritsadagi ixtiyoriy ikkita satr yoki ustun o'rinlarini almashtirish.
2. Matritsadagi ixtiyoriy satr yoki ustun elementlarini noldan farqli songa ko'paytirish.

3. Matritsaning satr yoki ustun elementlarini noldan farqli songa ko'paytirib, boshqa satr yoki ustunning mos elementlariga qo'shish.

4. Barcha elementlari nollardan iborat bo'lgan satr yoki ustunni matritsadan chiqarish.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix};$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix};$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & 6 \end{pmatrix};$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$

5.1-teorema. Elementar almashtirishlar matritsa rangini o'zgartirmaydi.

Matritsani elementar almashtirishlar natijasida uning satr (ustun) vektorlari sistemasida elementar almashtirishlar bajariladi. Ma'lumki, vektorlarning chekli sistemasini elementar almashtirishlar natijasida undagi chiziqli erkli vektorlar soni o'zgarmaydi, ya'ni vektorlar sistemasining rangi o'zgarmaydi. Shuning uchun matritsani elementar almashtirishlar natijasida uning rangi o'zgarmaydi.

5.5-ta'rif. Matritsa satrining boshlovchi elementi deb uning birinchi (chapdan o'ngga qaraganda) noldan farqli elementiga aytiladi.

5.6-ta'rif. Matritsa pog'onasimon deyiladi, agar uning nol qatorlari barcha nolmas qatorlardan keyin joylashgan va $\alpha_{1k_1}, \alpha_{2k_2}, ..., \alpha_{rk_r}$ boshlovchi elementlari uchun $k_1 < k_2 < ... < k_r$ bo'lsa.

Masalan, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ matritsa pog'onasimon matritsa emas.

Chunki, 3–, 4– satrlaridagi noldan farqli (chapdan o'ngga) birinchi elementlar 3–ustunda joylashgan. Bu matritsaning 3–satrini (–2) ga ko'paytirib, 5 ga ko'paytirilgan 4–satrga qo'shamiz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4–, 5–satrlarning boshlovchi elementlari 4–ustunda bo'lganligi uchun yana elementar almashtirish bajaramiz. 4–ustunni 3ga, 5–ustunni 11ga ko'paytirib, ularni qo'shamiz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 112 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Hosil bo'lgan matritsaning 5–satrini 112ga bo'lamiz va uni (–4)ga ko'paytirib, 6–satrga ko'shamiz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 112 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hosil bo'lgan oxirgi matritsa pog'onasimon matritsa.

5.2–teorema. Har qanday $m \times n$ tartibli matritsa satr elementar almashtirishlar natijasida $m \times n$ tartibli pog'onasimon matritsaga ekvivalent bo'ladi.

5.1–misol. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$ matritsaning rangini topish uchun uning uchta satr vektorlaridan iborat vektorlar sistemaning rangini aniqlaymiz. Nol vektor chiziqli bog'liq bo'lganligi va vektorlar sistemasidan nol vektorni chiqarish uning rangini o'zgartirmaganligi uchun, ikkinchi qatorni matritsadan chiqaramiz. Vektorlar sistemasini elementar almashtirish natijasida berilgan sistemaga ekvivalent sistema hosil bo'lishini e'tiborga olsak, berilgan matritsaga ekvivalent $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$ matritsa hosil bo'ladi. Ustun nol vektorlarni matritsadan chiqarib $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$ matritsaga ega bo'lamiz. Matritsa rangini aniqlash jarayonida ustun va satr vektorlar sistemasida elementar almashtirishlarni bajarish mumkin. Hosil qilingan matritsada ikkita chiziqli bog'lanmagan satr hamda ustun vektorlar sistemalari kelib chiqdi. Demak berilgan matritsaning satr rangi $r(A)=2$ va uning ustun rangi $\rho(A)=2$.

5.2-misol. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ ~ (birinchi va ikkinchi satrlarni qo'shib, birinchi

satr o'rniga yozamiz) ~ $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ ~ (birinchi satr elementlari $\frac{1}{4}$ ga

ko'paytirilgan) ~ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ ~ (birinchi va ikkinchi satrlar teng

bo'lganligi uchun birini qoldiramiz) ~ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Berilgan matritsani satr vektorlar sistemasini elementar almashtirishlar natijasida uning satr rangi $r(A)=2$ ekanligi kelib chiqadi.

5.7-ta'rif. A^t matritsa A matritsaning transponirlangani deyiladi, agar A^t matritsa A matritsa satrlarini ustunlar orqali yozishdan hosil bo'lgan bo'lsa, ya'ni

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

5.3-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaning transponirlash natijasida

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ hosil bo'ladi.

5.3-teorema. Matritsaning satr rangi uning ustun rangiga teng.

Takrorlash uchun savollar:

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Nomdosh matritsalarga ta'rif bering.
3. Qanday matritsalar teng deyiladi?
4. Matritsaning satr (ustun) vektorlari sistemasi nima?
5. Matritsaning satr (ustun) rangi deb nimaga aytiladi?
6. Matritsani elementar almashtirishlar deb qanday almashtirishlarga aytiladi?
7. Matritsaning satr va ustun ranglari haqidagi asosiy teoremani ayting.

6-ma'ruza. Chiziqli tenglamalar sistemasi. Teng kuchli CHTS. CHTSning natijasi haqidagi teoremalar

Reja:

1. n ta noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi (CHTS).
2. CHTSning yechimi.
3. Hamjoyli, hamjoyli bo'lmagan CHTS.
4. CHTSning natijasi.
5. CHTSning chiziqli kombinatsiyasi.
6. Teng kuchli CHTSlari.
7. CHTSni elementar almashtirishlar.

Asosiy tushunchalar: chiziqli tenglamalar sistemasi, CHTSning yechimi, hamjoyli CHTS, hamjoyli bo'lmagan CHTS, CHTSning natijasi, CHTSning chiziqli kombinatsiyasi, teng kuchli CHTSlari, CHTSni elementar almashtirishlar.

Adabiyotlar: [1]: 145-151 bb., [4]: 185-188 bb., [7]: 6-modul.

$F = < F;+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ maydon berilgan bo'lsin.

6.1-ta'rif. Barcha noma'lumlarining darajasi birdan katta bo'lmagan tenglamaga chiziqli tenglama deyiladi.

6.2-ta'rif. $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ tenglamani to'g'ri sonli tenglikka aylantiruvchi $\vec{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_n), \xi_i \in F, i = \overline{1,n}$ vektorga berilgan tenglamaning yechimi deyiladi.

6.3–ta'rif. Ushbu $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ (1) sistemaga F maydon ustida berilgan n ta noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda $a_{ij}, b_i \in F \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ sistemaning koeffitsientlari, a_{ij} no'malumlar koeffitsientlari, b_j ozod hadlar bo'lib, x_i lar esa no'malumlardan iborat.

6.4–ta'rif. n ta noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi deb shunday $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n), \xi_i \in F, i = \overline{1,n}$ vektorga aytiladiki, u sistemaning barcha tenglamalarini to'g'ri tenglikka aylantiradi.

6.5–ta'rif. CHTS kamida bitta yechimga ega bo'lsa, u hamjoyli, yechimga ega bo'lmasa, hamjoyli bo'lmagan CHTS deyiladi.

6.6–ta'rif. Yagona yechimga ega bo'lgan sistema aniq sistema, cheksiz ko'p yechimga ega bo'lgan sistema aniqmas sistema deyiladi.

6.1–misol. $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi yagona x $=1$; y = 2; z = 3, ya'ni (1,2,3) yechimga ega bo'lganligi uchun aniq sistemaga misol bo'ladi.

$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$ sistema yechimlar to'plami bo'sh to'plam bo'lganligi uchun u hamjoysiz tenglamalar sistemasiga misol bo'ladi.

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega. Demak, berilgan sistema aniqmas.

6.7–ta'rif. Berilgan ikkita CHTS uchun birinchisining har bir yechimi ikkinchisi uchun ham yechim bo'lsa, ikkinchi CHTS birinchi CHTSning natijasi deyiladi.

Ta'rifga ko'ra birinchi chiziqli tenglamalar sistemasining yechimlar to'plami, natija sistema yechimlar to'plamiga qism to'plam bo'ladi.

6.2–misol. Har qanday n noma'lumli CHTSga n noma'lumli hamjoyli bo'lmagan CHTS natija bo'ladi. CHunki, bo'sh to'plam har qanday to'plamga qism to'plam bo'ladi.

6.7–ta'rif. $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F$ skalyarlar yordamida hosil qilingan

$(\lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_m a_{m1})x_1 + \ldots + (\lambda_1 a_{1n} + \ldots + \lambda_m a_{mn})x_n = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m$ chiziqli tenglama (1) sistemaning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi.

6.1-teorema. CHTSning har qanday chiziqli kombinatsiyasi berilgan sistemaning natijasi bo'ladi.

6.8-ta'rif. Ikkita CHTS teng kuchli deyiladi, agar birinchisining har bir yechimi ikkinchisiga yechim bo'lsa va aksincha.

6.3-misol. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}$ tenglamalar sistemasiga teng kuchli.

6.2-teorema. Ikkita CHTS teng kuchli bo'lishi uchun, har bir sistema ikkinchisining natijasi bo'lishi zarur va yetarli.

6.3-teorema. Ikkita CHTS teng kuchli bo'lishi uchun, ularning yechimlar to'plamlari teng bo'lishi zarur va yetarli.

6.9-ta'rif. Quyidagilar CHTSni elementar almashtirishlar deyiladi:

1) sistemani qandaydir tenglamasining ikkala qismini noldan farqli skalyarga ko'paytirish:

2) bir tenglamaning ikkala qismiga skalyarga ko'paytirilgan boshqa tenglamaning mos qismlarini qo'shish yoki ayirish:

3) sistemaga nol tenglamani kiritish yoki uni sistemadan chiqarish.

6.4-teorema. CHTSni elementar almashtirishlar natijasida unga ekvivalent bo'lgan CHTS hosil bo'ladi.

6.4-misol. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -2x_1 + 8x_2 - 2x_3 = -2, \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

Takrorlash uchun savollar:

1. Chiziqli tenglama deb nimaga aytiladi?
2. Tenglamaning yechimiga ta'rif bering.
3. n ta noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi nima?
4. CHTSning yechimi deb nimaga aytiladi?
5. Hamjoyli, hamjoyli bo'lmagan CHTSga ta'rif bering.
6. CHTSni qachon aniq, aniqmas deyiladi?
7. CHTSning natijasiga ta'rif bering.
8. CHTSning chiziqli kombinatsiyasi nima?
9. Teng kuchli CHTSlariga ta'rif bering.

7-ma'ruza. Chiziqli tenglamalar sistemasining hamjoylilik sharti. Bir jinsli CHTS

Reja:
1. n ta noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasining asosiy va kengaytirilgan matritsalari.
2. Kroneker-Kapelli teoremasi.
3. CHTSning hamjoylilik shartlari.
4. Bir jinsli CHTS.

Asosiy tushunchalar: CHTSning asosiy matritsasi, CHTSning kengaytirilgan matritsasi, bir jinsli CHTS.

Adabiyotlar: [1]: 162-163 bb., [4]: 191-193 bb., [7]: 6-modul.

$F = < F;+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ maydon va maydon ustida

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

7.1-ta'rif. (1) chiziqli tenglamalar sistemasining noma'lumlari oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa (1) ning asosiy matritsasi, noma'lumlar oldidagi koeffitsientlar va ozod hadlardan iborat

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

matritsa (1) ning kengaytirilgan matritsasi deyiladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

sistema uchun quyidagi belgilashlarni qo'llaymiz:

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \; A^2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \; A^n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Natijada, $x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + , + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ tenglamani, ya'ni

$x_1A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n = \vec{b}$ (2) tenglamani hosil qilamiz.

7.1-teorema. (1) sistema (2) sistemaga teng kuchli.

7.2-teorema (Kroneker-Kapelli teoremasi).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasi hamjoyli bo'lishi uchun uning asosiy va kengaytirilgan matritsalari ranglarining teng bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. 1. Zarurligi. (1) sistema hamjoyli, ya'ni kamida bitta $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ yechimga ega bo'lsin. U holda

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right) \qquad (3)$$

to'g'ri sonli tengliklar hosil bo'ladi. (2) tenglikdan ko'rinadiki B matritsaning oxirgi $\vec{b}_i = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ ustun vektori o'zidan oldingi n ta ustunlarni ifodalovchi $\vec{a}^1, \vec{a}^2, \dots, \vec{a}^n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat, ya'ni

$$\alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_n A^n = \vec{b}$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, A va B matritsalarning

$$A^1, A^2, \dots, A^n, \qquad (4)$$

$$A^1, A^2, \dots, A^n, \vec{b} \qquad (5)$$

vertikal vektorlari sistemalari ekvivalentdir. Ekvivalent vektorlar sistemalari bir xil rangga ega degan mulohazaga ko'ra A va B matritsalar bir xil rangga ega, ya'ni r(A)=r(B) bo'ladi.

2. Yetarliligi. (1) sistema uchun r(A)=r(B)=k bo'lsin. A matritsaning, ya'ni (5) vertikal vektorlarning rangini aniqlovchi qism sistemani

$A^1, A^2, \dots, A^k$ (6)

deylik. B matritsaning rangi ham k ga teng bo'lganidan, (6) sistema (5)sistemaning rangini aniqlovchi sistema bo'ladi. U holda (5) sistemaning $\vec{b}$ vektori (6) sistema orqali va demak, (4) sistema orqali ham chiziqli ifodalanadi, ya'ni $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n \in F$ sonlar mavjud bo'lib, $\alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + ... + \alpha_n A^n = \vec{b}$ tenglik bajariladi. Bundan ikkita vektorlarning tenglik shartiga ko'ra $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n = b_i \ (i = \overline{1,m})$ tengliklarga ega bo'lamiz. Shunday qilib, (1) sistema $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ yechimga ega, ya'ni (1) sistema hamjoyli sistema bo'ladi.

7.3-teorema. A va B lar mos ravishda $F = < F;+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ maydon ustida berilgan (1)chiziqli tenglamalar sistemasining asosiy va kengaytirilgan matritsalari bo'lsin. U holda quyidagi shartlar teng kuchli:

1. (1) sistema hamjoyli.
2. F maydon ustida (2) sistema yechimga ega.
3. $\vec{b}$ vektor A matritsaning ustun vektorlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat, ya'ni, $\vec{b} \in L(A^1,...,A^n)$.
4. A va B matritsalarning ustun (satr) ranglari teng.

7.1-misol. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$ tenglamalar sistemasining hamjoyli yoki hamjoysiz ekanligini aniqlang.

Yechish: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix}.$$

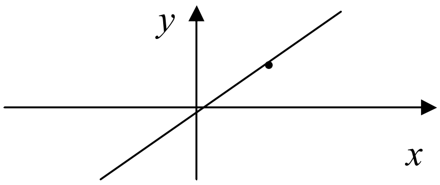
Bundan, $r(A) = 2$ va $r(B) = 3$.

Demak, berilgan chiziqli tenglamalar sistemasining asosiy va kengaytirilgan matritsalarining satr ranglari teng emas. Bundan berilgan CHTSning hamjoysiz ekanligi kelib chiqadi.

7.2-ta'rif. $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ chiziqli tenglamalar sistemasiga bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi (BCHTS) deyiladi.

7.4-teorema. $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ ko'rinishdagi n noma'lumli m ta BCHTS, m<n bo'lganda nolmas yechimga ega bo'ladi.

Masalan, $ax - by = 0$ ikki o'zgaruvchili chiziqli tenglama. Uning yechimlari cheksiz ko'p bo'lib, ulardan bittasi nol yechim, qolganlari nolmas yechimlar. Yechimlar to'plami Dekart koordinatalar tekisligida quyidagi to'g'ri chiziqni ifodalaydi: $y = \frac{a}{b}x$



7.5-teorema. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasida asosiy matritsasining ustun vektorlari sistemasi chiziqli bog'liq bo'lsa, u nolmas yechimga ega bo'ladi.

7.6-teorema. n noma'lumli BCHTSning rangi n dan kichik bo'lsa, u holda sistema nolmas yechimlarga ega bo'ladi.

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining tenglamalarini elementar almashtirishlar natijasida sistemaning qolgan tenglamalar orqali chiziqli ifodalanuvchi tenglamasi nol tenglamaga aylanadi. Agar n noma'lumli BCHTSning rangi n dan kichik bo'lsa, demak kamida bitta tenglama qolganlari orqali chiziqli ifodalanadi. U holda berilgan BCHTSga teng kuchli BCHTSda kamida bitta erkli o'zgaruvchilar mavjud bo'lib, natijada cheksiz ko'p yechimlar hosil bo'ladi. Bu yechimlarni topishda erkli o'zgaruvchilarga noldan farqli kamida bitta qiymat berish bilan nolmas yechim hosil qilinadi.

Takrorlash uchun savollar:

1. n ta noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasining asosiy va kengaytirilgan matritsalarining farqini ayting.
2. Kroneker-Kapelli teoremasini bayon eting.
3. CHTSning hamjoylilik shartlarini ayting.
4. Bir jinsli CHTS deb qanday sistemaga aytiladi?

8-ma'ruza. Chiziqli tenglamalar sistemasi va uning bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi yechimlari orasidagi bog'lanishlar

Reja:
1. n ta noma'lumli m ta CHTSga assotsirlangan BCHTS.
2. Yechimlar yig'indisi.
3. Yechimlar fazosi..
4. Yechimlar hosil qilgan chiziqli ko'pxillik.

Asosiy tushunchalar: CHTSga assotsirlangan BCHTS, BCHTS yechimlari fazosi.

Adabiyotlar: [1]: 170-172 bb., [4]: 193-195 bb., [7]: 6-modul.

$F=<F;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ maydon va maydon ustida

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad (1)$$

chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

8.1-ta'rif.
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$
bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasiga (1) sistemaga assotsirlangan BCHTS deyiladi.

8.1-teorema. Bir jinsli bo'lmagan CHTSning yechimiga unga assotsirlangan BCHTSning yechimi qo'shilsa, bir jinsli bo'lmagan CHTSning yechimi hosil bo'ladi.

8.2-teorema. Bir jinsli bo'lmagan CHTSning ikkita yechimining ayirmasi unga assotsirlangan BCHTSning yechimi bo'ladi.

8.3-teorema. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining yechimlari to'plami chiziqli fazo tashkil qiladi.

Agar berilgan BCHTSning yechimi yagona nol vektordan iborat bo'lsa, u holda nol vektordan iborat to'plam chiziqli fazo ta'rifiga bo'ysunishini tekshirish oson.

Agar BCHTSning yechimlari cheksiz ko'p bo'lsa, u holda umumiy yechimni ifodalovchi vektor koordinatalari kamida bitta erkli o'zgaruvchi orqali ifodalanadi.

Masalan, $(2x_3+x_4;-x_3-3x_4;x_3;x_4), x_3, x_4 \in R$ biror-bir BCHTSning yechimlarini ifodalovchi vektorlar bo'lsa, u holda x_3, x_4 o'zgaruvchilarning kamida bittasiga noldan farqli qiymat berib, ikkita noldan farqli yechim hosil qilamiz: $x_3=1, x_4=2; x_3=2, x_4=3$

$\vec{a}_1=(4;-7;1;2), \vec{a}_2=(7;-11;2;3)$. Bu vektorlarning yig'indisi $x_3=3, x_4=5$ bo'lganda umumiy yechimdan hosil bo'ladigan $(11;-18;3;5)$ vektor bo'ladi. Xuddi shunday, noldan farqli skalyar $\lambda=3$ni $\vec{a}_1=(4;-7;1;2)$ yechimga ko'paytirish natijasida $x_3=3, x_4=6$ qiymatlar yordamida hosil qilingan $(12;-21;3;6)$ yechimga ega bo'lamiz.

8.4-teorema. $\vec{a}$ bir jinsli bo'lmagan CHTSning yechimi va L- unga assotsirlangan BCHTSning yechimlari to'plami bo'lsin. U holda $\vec{a}+L$ to'plam berilgan CHTSning yechimlar to'plamidan iborat bo'ladi.

8.2-ta'rif. 8.4-teoremada keltirilgan $\vec{a}+L$ to'plamga BCHTS yechimlar to'plami yordamida hosil qilingan chiziqli ko'pxillik deyiladi.

8.5-teorema. Hamjoyli bir jinsli bo'lmagan CHTS yagona yechimga ega bo'lishi uchun unga assotsirlangan BCHTSning yagona nol yechimga ega bo'lishi zarur va yetarli.

8.1-misol. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=5 \\ x_1-2x_2+3x_3=-3 \\ 7x_1+x_2-x_3=10 \end{cases}$ chiziqli tenglamalar sistemasiga

assotsirlangan $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0 \\ x_1-2x_2+3x_3=0 \\ 7x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$ bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining yechimlarini topamiz.

Hosil qilingan $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0 \\ x_1-2x_2+3x_3=0 \\ 7x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasiga Gauss usulini qo'llasak, unga teng kuchli bo'lgan $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=0 \\ 5x_2-7x_3=0 \\ -x_3=0 \end{cases}$ sistemaga ega bo'lamiz. Bundan, BCHTSning yagona nol yechimga ega ekanligi kelib chiqadi.

Berilgan bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasini elementar almashtirishlar natijasida unga teng kuchli bo'lgan $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=-3 \\ 5x_2-7x_3=11 \\ -x_3=-2 \end{cases}$ sistemaga ega bo'lamiz. Bundan sistemaning yagona $x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$ yechimga ega ekanligi kelib chiqadi.

8.6-teorema. Agar F maydon ustida berilgan n noma'lumli ikkita bir jinsli bo'lmagan CHTS teng kuchli bo'lsa, u holda ularga assotsirlangan BCHTSlari ham teng kuchli bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. n ta noma'lumli m ta CHTSga assotsirlangan BSTS qanday hosil qilinadi?
2. CHTS va unga assotsirlangan BCHTS yechimlar yig'indisi, ayirmasi qanday sistemaga yechim bo'ladi?
3. BCHTS yechimlar to'plami vektor fazo tashkil etishini tushuntiring.
4. Yechimlar fazosi hosil qilgan chiziqli ko'pxillikka misol keltiring.

9,10-ma'ruzalar. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi yechimlarining fundamental sistemasi. CHTSni yechishning Gauss usuli

Reja:
1. BCHTS yechimlarining fundamental sistemasi.
2. CHTSni yechishning Gauss usuli.
3. BCHTS yechimlarining fundamental sistemasini topish.

Asosiy tushunchalar: BCHTSning fundamental yechimlar sistemasi, CHTSni yechishning Gauss usuli.

Adabiyotlar: [1]: 172-177 bb., [4]: 203-208 bb., [7]: 6-modul.

$F=<F;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ maydon va maydon ustida

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad (1)$$

chiziqli tenglamalar sistemasi hamda unga assotsirlangan

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \quad (1^1)$$

BCHTS berilgan bo'lsin.

Yuqorida ta'kidlanganidek, (1^1) sistemaning yechimlari to'plami F^n arifmetik vektor fazoning biror W qism fazosini tashkil etadi.

9.1-ta'rif. F^n arifmetik vektor fazoning W qism fazosining bazisini tashkil etuvchi istalgan vektorlar sistemasi (1^1) sistemaning fundamental (asosiy) yechimlari sistemasi deyiladi.

Bazis vektorlar sistemasining ta'rifiga asosan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r$ sistema (1^1) ning fundamental yechimlari sistemasi bo'lishi uchun quyidagi ikkita shart bajarilishi lozim:

1. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r$ sistema chiziqli bog'lanmagan sistema bo'ladi;

2. (1) sistemaning ixtiyoriy yechimi $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r$ sistema vektorlari orqali chiziqli ifodalanadi.

(1) sistemaning umumiy yechimi ushbu

$$\vec{a} = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \dots + k_r\vec{a}_r \ (k_i \in F,\ i = \overline{1,r})$$

ko'rinishda ifodalanadi. Endi (1) yechimlarining fundamental sistemasini topaylik. Buning uchun (1) da bir necha marta elementar almashtirishlar bajargandan so'ng o'ziga ekvivalent bo'lgan ushbu

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + c_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = 0, \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + c_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r + c_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1^*)$$

ko'rinishdagi sistemaga ega bo'lamiz. (1^*) da $c_{kk} \neq 0$ $(k = \overline{1,r})$, $r < n$ bo'ladi. Aks holda (1^*) sistema nolmas yechimlarga ega bo'lmas edi. (1) da elementar almashtirishlar natijasida $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b$ $(b \neq 0)$ ko'rinishdaga tenglamalar hosil bo'lishi mumkin. U holda bunday tenglamalar bitta ham yechimga ega bo'lmaydi. Shu sababli berilgan sistema yechimga ega bo'lmaydi. Biz qarayotgan CHTS hamjoyli bo'lganligi sababli bunday holat kelib chiqmaydi. Tenglamalar sistemasini bu usul bilan yechish Gauss usuli deyiladi.

(1^*) sistema r ta tenglama va n-r ta noma'lumlardan iborat. Shuning uchun biz $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ larni erkin (ozod) noma'lumlar deb, ularga ixtiyoriy sonli (kamida bittasi noldan farqli) qiymatlarni berib, (1^*) dan ularga mos $x_r, x_{r-1}, \dots, x_1$ noma'lumlar qiymatlarini topamiz. Aytaylik (1^*) da $x_{r+1} = 1$, $x_{r+2} = x_{r+3} = \dots = x_n = 0$ bo'lsin. Unda (1^*)dan $x_r, x_{r-1}, \dots, x_1$ noma'lumlar qiymatlarini topamiz. Parametrlarning yuqoridagi qiymatlariga mos keluvchi (4) sistemaning yechimi $\vec{a}_{r+1} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, 1, 0, \dots, 0)$ bo'ladi. Bundan keyin $x_{r+1} = x_{r+3} = \dots = x_n = 0$, $x_{r+2} = 1$ deb olaylik. U holda (4) sistemadan $x_i (i = \overline{1,r})$ qiymatlarga mos keluvchi qandaydir $\beta_i (i = \overline{1,r})$ sonlarni topamiz. Natijada (1^*) sistemaning $\vec{a}_{r+2} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ikkinchi yechimini topamiz. SHu jarayonni davom ettirib, n-r qadamdan so'ng (1^*) sistema (demak, (1) sistema) ning

$$\begin{cases} \vec{a}_{r+1} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, 1, 0, \ldots, 0), \\ \vec{a}_{r+2} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r, 0, 1, \ldots, 0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{a}_n = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r, 0, 0, \ldots, 1) \end{cases}$$

yechimlari sistemasini topamiz. Hosil bo'lgan sistema (1) sistemaning fundamental yechimlari sistemasi bo'ladi.

9.1-misol. BCHTS $2x_1 + x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 0$ tenglamadan iborat bo'lsin. Bitta tenglama va 4 ta noma'lum bo'lganligi uchun berilgan sistema yechimlar to'plamining fundamental sistemasi 3 ta yechimdan iborat bo'ladi. Ularni aniqlash uchun $x_1 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{7}{2}x_4$ belgilashdagi x_2, x_3, x_4 noma'lumlarga mos ravishda 2,0,0; 0,2.0; 0,0,2 qiymatlarni beramiz. Hosil bo'lgan (-1,2,0,0); (3,0,2,0); (-7,0,0,2) yechimlar berilgan BCHTSning yechimlar to'plamining fundamental sistemasi bo'ladi.

9.2-misol. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 8 \end{cases}$ chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechamiz. Buning uchun chiziqli tenglamalar sistemasini elementar almashtirishlar yordamida tanlab olingan tenglamasidan boshqa tenglamalarida biror bir o'zgaruvchi oldidagi koeffisientni nolga aylantiramiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 8 \\ 16x_2 + 24x_3 = -22 \\ 14x_2 + 9x_3 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 8 \\ 8x_2 + 12x_3 = -11 \\ -96x_3 = 58 \end{cases}.$$

Hosil bo'lgan tenglamalar sistemasi berilgan tenglamalar sistemasiga teng kuchli bo'lib, uning yechimi $(69\frac{19}{48}; 13\frac{1}{8}; -\frac{29}{48})$ vektordan iborat.

Takrorlash uchun savollar:

1. BCHTSning fundamental yechimlari sistemasiga ta'rif bering.
2. CHTSni yechishning Gauss usulini tushuntiring.
3. BCHTSning fundamental yechimlari sistemasi qanday topiladi?

11-ma'ruza. Matritsalar va ular ustida amallar

Reja:
1. Kvadrat matritsa va uning turlari.
2. Matritsalarni qo'shish va uning xossalari.
3. Skalyarni matritsaga ko'paytirish va uning xossalari.
4. Matritsalarni ko'paytirish va uning xossalari.

Asosiy tushunchalar: CHTSga assotsirlangan BCHTS, BCHTS yechimlari fazosi.

Adabiyotlar: [1]: 178-183 bb., [4]: 210-215 bb., [7]: 7-modul.

$F = < F;+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ maydon va maydon ustida matritsalar to'plami berilgan bo'lsin.

11.1-ta'rif. Matritsaning satr va ustunlari soni teng bo'lsa, bunday matritsaga kvadrat matritsa deyiladi.

11.2-ta'rif. $\forall A,B \in F^{mxn} \Rightarrow A=B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ $i=1,...,m; j=1,,,n$.
11.3-ta'rif. $\forall$ $A,B \in F^{mxn}$, $\square+B=C$, $C \in F^{mxn}$.
11.1-teorema. Matritsalarni qo'shish amali quyidagi xossalarga ega:
1. $\forall$ $A,B \in F^{mxn} \Rightarrow A + B = B + A$ (kommutativlik).
2. $\forall$ $A,B,C \in F^{mxn} \Rightarrow (A+B)+C = A + (B + C)$(assotsiativlik).
3. $A \in F^{mxn}$, $\exists$ $X \in F^{mxn} \Rightarrow A + X = A$ ($X=O$-neytral).
4. $\forall$ $A \in F^{mxn}$, $\exists A' \in F^{mxn} \Rightarrow A+A' = O$ ($A'=-A$ - simmetrik).

11.4-ta'rif. $\forall A \in F^{mxn} \wedge \forall$ $\alpha \in F \Rightarrow \omega_{\alpha}(A) = \alpha A = B \in F^{mxn}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \ldots & \alpha a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \ldots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} = B \in F^{mxn}.$$

11.2-teorema. Skalyarni matritsaga ko'paytirish quyidagi xossalarga ega:

1. $\forall A \in F^{mxn} \wedge \forall\ \alpha,\beta \in F \Rightarrow (\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A$.
2. $\forall A \in F^{mxn} \wedge \forall\ \alpha,\beta \in F \Rightarrow (\alpha \cdot \beta)A = \alpha(\beta A)$.
3. $\forall A,\ B \in F^{mxn} \wedge \forall\ \alpha \in F \Rightarrow \alpha(A+B) = \alpha \cdot A+\alpha \cdot B$.
4. $\forall A \in F^{mxn} \wedge \forall\ \alpha \in F \Rightarrow \alpha \cdot A = A \cdot \alpha$.

11.5-ta'rif. $\forall\ A \in F^{mxn},\ \forall\ B \in F^{nxk} \Rightarrow$ □$\cdot B=C,\ C \in F^{mxk}$.

11.3-misol.

$$A^{3x4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B^{4x2} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 7 \\ 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2+3 \cdot 0+(-1) \cdot 1+2 \cdot 3 & 1 \cdot 4+3 \cdot 7+(-1) \cdot (-5)+2 \cdot 2 \\ (-2) \cdot 2+1 \cdot 0+6 \cdot 1+3 \cdot 3 & (-2) \cdot 4+1 \cdot 7+6 \cdot (-5)+3 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2+(-1) \cdot 0+2 \cdot 1+4 \cdot 3 & 0 \cdot 4+(-1) \cdot 7+2 \cdot (-5)+4 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 34 \\ 11 & -25 \\ 14 & -9 \end{pmatrix} = C^{3x2}$$

11.3-teorema. Matritsalarni ko'paytirish amali quyidagi xossalarga ega:

1. $\exists A \cdot B \in F^{mxk} \wedge \exists B \cdot C \in F^{kxs} \Rightarrow (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (assotsiativlik).
2. $\forall\ A \in F^{mxn} \wedge \forall B,C \in F^{\ nxk} \Rightarrow A \cdot (B+C) = A \cdot B+A \cdot C$ (yig'indini chapdan ko'paytirish);
3. $\forall A,B \in F^{mxn} \wedge \forall C \in F^{\ nxk} \Rightarrow (A+B) \cdot C = A \cdot C+ B \cdot C$ (yig'indini o'ngdan ko'paytirish);
4. $\forall \alpha \in F,\ \forall A \in F^{mxn},\ \forall B \in F^{nxk} \Rightarrow \alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B$.

Takrorlash uchun savollar:

1. Kvadrat matritsa va uning turlari.
2. Matritsalarni qo'shish va uning xossalari.
3. Skalyarni matritsaga ko'paytirish va uning xossalari.
4. Matritsalarni ko'paytirish va uning xossalari.

12-ma'ruza. Elementar matritsalar va ularning xossalari

Reja:

1. Teskarilanuvchi matritsa.
2. Teskari matritsani ta'rif asosida topish.
3. Elementar matrtsa.
4. Elementar matritsalar xossalari.

Asosiy tushunchalar: teskarilanuvchi matritsa, elementar matritsa.
Adabiyotlar: [1]: 183-188 bb., [4]: 215-218 bb., [7]: 7-modul.

$F = < F;+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ maydon va maydon ustida matritsalar to'plami berilgan bo'lsin.

12.1-ta'rif. Shunday X va A n-tartibli kvadrat matritsalar berilgan bo'lib, ular uchun XA = AX = E (E – n-tartibli birlik matritsa) shart bajarilsa, u holda X matritsaga A matritsaga teskari matritsa deyiladi va A^{-1} ko'rinishda belgilanadi.

Teskari matritsaga ega matritsa teskarilanuvchi matritsa deyiladi.

Teskari matritsani topishning umumiy yo'lini ko'rib chiqamiz.

Ta'rifga ko'ra : AX = E $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_{kj} = e_{ij}$, i=(1,n), j=(1,n), bu yerda
i ≠ j bo'lsa, e_{ij} = 0 va i = j bo'lsa, e_{ij} = 1 bo'ladi.

Natijada quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + \ldots + a_{1n}x_{nj} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + \ldots + a_{jn}x_{nj} = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + \ldots + a_{nn}x_{nj} = 0 \end{cases},$$

CHTSni yechib X matritsani topamiz.

12.1-misol. A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ matritsa berilgan bo'lsa, A^{-1} ni toping.

Yechish. AX = E, ya'ni tenglikdan CHTSni tuzamiz va uni yechamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = e_{11} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = e_{12} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = e_{21} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = e_{22} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} = -2 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 3/2 \\ x_{22} = -1/2 \end{cases}$$

Demak, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

12.1–teorema. Agar berilgan kvadrat matritsa teskarilanuvchi bo'lsa, u holda unga teskari matritsa yagonadir.

F maydon ustida olingan teskarilanuvchi n–tartibli kvadrat matritsalar to'plamini $GL(n,F)$ ko'rinishda belgilaymiz.

12.2–teorema. $< GL(n,F);\cdot,^{-1} >$ algebra gruppa bo'ladi.

Haqiqatdan ham, $GL(n,F)$ to'plam elementlari kvadrat matritsalar bo'lganligi sababli har qanday ikkita kvadrat matritsani ko'paytirish natijasida yana shu tartibli kvadrat matritsa hosil bo'ladi. Demak, $GL(n,F)$ to'plamda ko'paytirish amali aniqlangan. Ko'paytirish amali assotsiativ, ya'ni $A^{n\times n}\cdot(B^{n\times n}\cdot C^{n\times n}) = (A^{n\times n}\cdot B^{n\times n})\cdot C^{n\times n}$.

Ko'paytirish amaliga nisbatan birlik element vazifasini n–tartibli birlik matritsa o'taydi va nihoyat, $GL(n,F)$ to'plam teskarilanuvchi matritsalar to'plami bo'lganligi sababli, uning har bir noldan farqli kvadrat matritsasiga teskari matritsa shu to'plamda mavjud.

Demak, $< GL(n,F);\cdot,^{-1} >$ algebra multiplikativ gruppa tashkil etadi.

12.3–teorema. Har qanday sondagi teskarilanuvchi matritsalar ko'paytmasi, yana teskarilanuvchi matritsa bo'ladi.

12.4–teorema. Teskari matritsalar quyidagi xossalarga ega:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

12.2–ta'rif. Birlik matritsadan quyidagi elementar almashtirishlarning biri yordamida hosil qilingan matritsaga elementar matritsa deyiladi:

1) birlik matritsa satri (ustuni)ni noldan farqli skalarga ko'paytirish.

2) birlik matritsa biror bir satri (ustuni) ga noldan farqli skalyarga ko'paytirilgan satr (ustun)ni qo'shish yoki ayirish.

E birlik matritsada bajarilgan φ satr elementar almashtirish 1) yoki 2) ko'rinishdagi elementar almashtirish bo'lsa, u holda hosil bo'lgan elementar matritsani E_φ ko'rinishda belgilaymiz.

12.2–misol. Quyidagi matritsalar ikkinchi tartibli elementar matritsalar:

$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}$. Bu yerda λ–noldan farqli ixtiyoriy skalyar.

12.5–teorema. Har qanday elementar matritsa teskarilanuvchi. Elementar matritsaga teskari matritsa, elementar.

12.6–teorema. Elementar matritsalar ko'paytmasi elementar.

12.7–teorema. Agar B matritsa A matritsani $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$ elementar almashtirishlar yordamida hosil qilingan bo'lsa, u holda $B = E_{\varphi_n}\cdot E_{\varphi_{n-1}}\cdots E_{\varphi_1}A$.

Takrorlash uchun savollar:

1. Teskarilanuvchi matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
2. Elementar matritsaga ta'rif bering.
3. Elementar matritsalar xossalarini ayting.
4. Teskari matritsani ta'rif asosida topish jarayonini bayon qiling.

13-ma'ruza. Matritsaning teskarilanish shartlari. Teskari matritsani topish

Reja:
1. Teskarisi mavjud bo'lmagan matritsa.
2. Matritsaning teskarilanish shartlari.
3. Teskari matritsani elementar matritsalardan foydalanib topish.

Asosiy tushunchalar: teskarilanuvchi matritsa, elementar matritsa, satrlari chiziqli erkli matritsa.

Adabiyotlar: [1]: 185-192 bb., [4]: 218-220 bb., [7]: 7-modul.

$F = < F;+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ maydon va maydon ustida $F^{n\times n}$ kvadrat matritsalar to'plami berilgan bo'lsin.

13.1-teorema. Kamida bitta nol satr yoki ustunga ega kvadrat matritsa teskarilanuvchi emas.

Isbot. A_i satri nol satr bo'lgan A kvadrat matrisa va B ixtiyoriy kvadrat matritsalar berilgan bo'lsin. U holda AB ko'paytmaning i-satri ya'ni, $(AB)_i = (A_i B^1,...,A_i B^n) = (0,...,0)$. Bundan AB ko'paytmaning B matritsa qanday bo'lishidan qat'iy nazar, nol satrga ega bo'lishi kelib chiqadi. Matritsaning teskarilanish ta'rifiga ko'ra, AB = E bo'lsa, A matritsa teskarilanuvchi deyiladi. Teorema shartida berilgan A matritsaning qaysi satri nol satr bo'lsa AB ko'paytmaning o'sha satri nol satr bo'lar ekan. Demak, ko'paytma birlik matritsaga teng bo'la olmaydi va A matritsa teskarilanuvchi emas.

13.2-teorema. Agar kvadrat matritsaning satrlari chiziqli bog'liq bo'lsa, u teskarilanuvchi emas.

Haqiqatdan ham, agar satrlari yoki ustunlari chiziqli bog'liq bo'lgan A kvadrat matritsani shu tartibli shunday nolmas B matritsaga ko'paytirish natijasida $A\cdot B = E$ shart bajarilsa, u holda B matritsa A matritsaga teskari matritsa bo'lar edi. Lekin A matritsaning qaysi satr yoki ustuni chiziqli bog'liq bo'lgan bo'lsa $A\cdot B$ ko'paytma matritsaning ham xuddi shu satr yoki ustuni chiziqli bog'liq bo'ladi. Bundan $A\cdot B \neq E$.

13.1-natija. Agar kvadrat matritsa teskarilanuvchi bo'lsa, u holda uning satrlari chiziqli erkli bo'ladi.

13.3–teorema. Satrlari chiziqli erkli bo'lgan kvadrat matritsani elementar matritsalar ko'paytmasi ko'rinishida ifodalash mumkin.

Isbot. A matritsa satrlari chiziqli erkli bo'lgan kvadrat matritsa bo'lsin. U holda A matritsani E matritsaga o'ikazuvchi shunday $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n$ elementar almashtirishlar mavjudki, $E_{\varphi_n}\cdot E_{\varphi_{n-1}}\cdots E_{\varphi_1}\cdot A=E$ bo'ladi. Bundan $A=E^{-1}{}_{\varphi_n}\cdot E^{-1}{}_{\varphi_{n-1}}\cdots E^{-1}{}_{\varphi_1}$.

13.4–teorema. Ixtiyoriy A kvadrat matritsa uchun quyidagi shartlar teng kuchli:

1) A matritsa teskarilanuvi:

2) A matritsaning satrlari (ustunlari) chiziqli erkli:

3) A matritsani elementar matritsalar ko'paytmasi ko'rinishida ifodalash mumkin.

Teorema elementar matritsalarning xossalari va yuqoridagi teoremalar asosida isbotlanadi.

13.5–teorema. Agar A kvadrat matritsani elementar almashtirishlar zanjiri (ketma-ket bajarilgan elementar almashtirishlar) birlik matritsaga o'tkazsa, u holda A matritsa teskarilanuvchi va bajarilgan elementar almashtirishlar zanjiri E matritsani A^{-1} matritsaga keltiradi.

Isbot. $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n$ elementar almashtirishlar A matritsani E matritsaga o'tkazadi deb faraz qilamiz. U holda $E_{\varphi_n}\cdot E_{\varphi_{n-1}}\cdots E_{\varphi_1}\cdot A=E$. Bundan $A^{-1}=E_{\varphi_n}\cdot E_{\varphi_{n-1}}\cdots E_{\varphi_1}$ kelib chiqadi.

13.5–teorema asosida teskari matritsani topish jarayoni quyidagicha: $A\in F^{n\times n}$ matritsaga teskari matritsani topish uchun tartibi $n\times 2n$ bo'lgan $A\,|\,E=\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{array}\right)$ matritsani elementar almashtirishlar zanjiri yordamida $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{array}\right)=E\,|\,B$ ko'rinishga keltiramiz. Hosil bo'lgan B matritsa berilgan A matritsaga teskari matritsa.

13.1–misol. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani toping.

$$A\,|\,E=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

matritsaning satrlari bo'yicha elementar almashtirishlarni bajarib

$$A \mid E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) = E \mid A^{-1},$$

$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ matritsani hosil qilamiz.

Teskari matritsa to'g'ri topilganligi $A \cdot A^{-1} = E$ tenglik asosida tekshiriladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Qanday matritsaning teskarisi mavjud bo'lmaydi?
2. Matritsaning teskarilanish shartlarini ayting.
3. Teskari matritsani elementar matritsalardan foydalanib topish jarayonini tushuntiring.

14-ma'ruza. n ta noma'lumli n ta CHTSni matritsalar yordamida yozish va yechish

Reja:

1. CHTSning matritsali ifodasi.
2. Matritsali tenglamalarning turli ko'rinishlari.
3. Matritsali tenglama yagona yechimining mavjudlik sharti.
4. Matritsali tenglamani yechish.

Asosiy tushunchalar: matritsali tenglama, matritsali tenglamaning yechimi.

Adabiyotlar: [1]: 193–195 bb., [4]: 220–221 bb., [7]: 7–modul.

R maydon ustida n ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} .$$

U holda berilgan CHTSni matritsali tenglama, ya'ni $AX = B$ ko'rinishida yozish mumkin.

14.1–ta'rif. $AX = B$ chiziqli tenglamaga $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$ chiziqli tenglamalar sistemasining matritsali ifodasi deyiladi.

14.2–teorema. Agar A matritsaning satrlari chiziqli erkli bo'lsa, u holda $A^{-1}B$ vektor $AX = B$ tenglamaning yagona yechimi bo'ladi.

A·X = B tenglamada A matritsa teskarilanuvchi bo'lsa, u holda A^{-1} matritsani topib, tenglamaning ikkala tomonini A^{-1} ga chap tomondan ko'paytiramiz (matritsalarni ko'paytirish, hattoki kvadrat matritsalar bo'lsa, ham kommutativ emas): $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$.

$A^{-1}\cdot A = E$ ekanligidan $E\cdot X = A^{-1}\cdot B$, bundan esa $X = A^{-1}\cdot B$ ekanligi kelib chiqadi.

n ta noma'lumli n ta CHTS berilgan bo'lsa uning matritsali tenglamasi $AX = B$ bo'ladi. Lekin matritsali tenglamani faqat CHTS yordamida hosil qilinmaydi. Balki A., B matritsalar berilgan bo'lsa $A \cdot X = B$ yoki $X \cdot A = B$ ko'rinishdagi matritsali tenglamalarni; A,B,C matritsalar berilgan bo'lsa $A \cdot X \cdot B = C$ ko'rinishdagi matritsali tenglamalarni tuzish mumkin bo'lsa, ularni yechish uchun o'zgaruvchining chap yoki o'ng tomonidagi A matritsa teskarilanuvchi bo'lsa, uning yechimi $A^{-1}\cdot B$ yoki $B \cdot A^{-1}$ ko'rinishda; o'zgaruvchining o'ng va chap tomonidagi A va B lar teskarilanuvchi bo'lsa, $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$ ko'rinishda bo'ladi.

14.1-misol. $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini matritsali tenglamaga keltirib, yechimini toping.

Yechish. X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$, A = $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ belgilashlar yordamida

$AX = B$ tenglamani tuzib olamiz va agar A matritsa teskarilanuvchi bo'lsa A^{-1}ni topib X = $A^{-1}\cdot B$ tenglik yordamida CHTSning yechimini topamiz.

A matritsani satr elementar almashtirishlar yordamida chiziqli erkli ekanligini tekshiramiz:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -11 & -16 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Hosil bo'lgan pog'onasimon matritsada nol satrlar yo'q. Demak, A matritsa chiziqli erkli matritsa va matritsaning teskarilanish shartlariga ko'ra uning teskari matritsasi mavjud. Teskari matritsa A^{-1} = $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}$ni 13-ma'ruzada ko'rsatilgan usul bilan topish mumkin. Teskari matritsa to'g'ri topilganligini tekshirib olamiz:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E$$

Demak, teskari matritsa yordamida CHTSni yechimini topamiz. Ya'ni X = $A^{-1}\cdot V$ tenglikdan

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}V = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ni bundan $x=1$; $y=2$; $z=3$ yechimni hosil qilamiz.

Takrorlash uchun savollar:

1. CHTSning matritsali ifodasi qanday hosil qilinadi?
2. Matritsali tenglamalarning qanday ko'rinishlarini bilasiz?
3. Matritsali tenglama yagona yechimining mavjudlik shartini aytіng.
4. Matritsali tenglamani yechish jarayonini bayon qiling.

15-ma'ruza. O'rniga qo'yishlar gruppasi. O'rniga qo'yishlarning juft-toqligi, ishorasi

Reja:

1. n-darajali o'rniga qo'yish.
2. O'rniga qo'yishlar gruppasi.
3. n-darajali simmetrik gruppa.
4. Inversiya.
5. Juft, toq o'rniga qo'yishlar.
6. Transpozitsiya.
7. O'rniga qo'yishning ishorasi.

Asosiy tushunchalar: n-darajali o'rniga qo'yish, n-darajali simmetrik gruppa, inversiya, juft o'rniga qo'yish, toq o'rniga qo'yish, transpozitsiya, o'rniga qo'yishning ishorasi.

Adabiyotlar: [1]: 195-203 bb., [4]: 221-226 bb., [7]: 8-modul.

Bizga n ta elementga ega bo'lgan A to'plam berilgan bo'lsin.

To'plam elementlarini shartli ravishda 1,2,...,n sonlar orqali belgilab olamiz, ya'ni berilgan to'plamni $A=\{1,2,3,...,n\}$ ko'rinishda yozish mumkin.

15.1-ta'rif. $A=\{1,2,3,...,n\}$ to'plamni o'ziga biyektiv akslantirishga n-darajali o'rniga qo'yish deyiladi.

A to'plamda aniqlangan φ o'rniga qo'yishni

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

ko'rinishda belgilanadi. Bunda birinchi qatordagi elementlarning joylashish tartibi ahamiyatga ega emas, lekin ikkinchi qator elementlarini joylashtirganda har bir k va unga mos $\varphi(k)$ elementlarning bir ustunda joylashishiga e'tibor berish kerak.

A to'plamning barcha o'rniga o'yishlar to'plamini S_n orqali belgilaymiz.

15.1-misol. $A=\{1,2\}$ to'plam berilgan bo'lsa, u yordamida hosil qilingan ikkinchi darajali o'rniga qo'yishlar quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $\varphi_0=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \varphi_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ va $S_2=\{\varphi_0,\varphi_1\}$.

15.2-ta'rif. Agar φ va ψ o'rniga qo'yishlarda $i_k=j_k(k=\overline{1,n})$ bo'lsa, u holda φ va ψ o'rniga qo'yishlar o'zaro teng deyiladi.

Masalan, $\varphi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}, \psi=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$ o'rniga qo'yishlar o'zaro teng .

15.3-ta'rif. φ va ψ o'rniga qo'yishlar ko'paytmasi deb φ va ψ akslantirishlar kompozitsiyasi $\varphi\psi(i)=\varphi(\psi(i)), i=1,...,n$ ga aytiladi, ya'ni

$$\varphi\cdot\psi=\varphi\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & n\\ \psi(1) & \psi(2) & ... & \psi(n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi(1) & \psi(2) & ... & \psi(n)\\ \varphi(\psi(1)) & \varphi(\psi(2)) & ... & \varphi(\psi(n))\end{pmatrix}.$$

15.4-ta'rif. A to'plamdan olingan φ o'rniga qo'yishga teskari o'rniga qo'yish deb $\varphi^{-1}=\begin{pmatrix}\varphi(1) & \varphi(2) & \cdots & \varphi(n)\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & n\\ \varphi^{-1}(1) & \varphi^{-1}(2) & ... & \varphi^{-1}(n)\end{pmatrix}$ o'rniga qo'yishga aytiladi.

15.5-ta'rif. A to'plamning har bir elementini shu elementning o'ziga o'tkazuvchi ε akslantirishga ayniy o'rniga qo'yish deyiladi va u $\varepsilon=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n\end{pmatrix}$ ko'rinishda belgilanadi.

15.1-teorema. A chekli to'plamning barcha o'rniga qo'yishlar to'plami multiplikativ gruppa bo'ladi.

15.6-ta'rif. $<S_n;\ \cdot,^{-1}>$ gruppaga n-darajali simmetrik gruppa deyiladi va u S_n orqali belgilanadi.

15.7-ta'rif. $\varphi=\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & n\\ \varphi(1) & \varphi(2) & ... & \varphi(n)\end{pmatrix}$ o'rniga qo'yishda A={1,2,3,...,n} to'plamning ixtiyoriy i,j elementlaridan tuzilgan juftlik uchun $i-j$ va $\varphi(i)-\varphi(j)$ ayirmalar bir xil ishoraga ega bo'lsa, bu juftlik to'g'ri, bir xil ishoraga ega bo'lmasa to'g'ri emas yoki inversiya tashkil etadi deyiladi.

15.2–misol. $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$ o'rniga qo'yishda inversiyalar yo'q. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ o'rniga qo'yishda $\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$ juftliklar inversiya tashkil etadi.

15.8–ta'rif. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & ... & \varphi(n) \end{pmatrix}$ o'rniga qo'yishda inversiyalar soni juft (toq) bo'lsa, o'rniga qo'yish juft (toq) o'rniga qo'yish deyiladi.

15.2–misolda keltirilgan $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$ va $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ o'rniga qo'yishlar juft o'rniga qo'yish bo'ladi.

15.9–ta'rif. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & ... & \varphi(n) \end{pmatrix}$ o'rniga qo'yishda shunday i, j elementlar mavjud bo'lib, ular uchun $\varphi(i) = j, \varphi(j) = i, \varphi(s) = s, s \in A \setminus \{i, j\}$ shartlar bajarilsa, bunday o'rniga qo'yish transpozitsiya deyiladi.

15.2–teorema. Har qanday transpozitsiya toq o'rniga qo'yish bo'ladi.

Isbot. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & ... & \varphi(n) \end{pmatrix}$ o'rniga qo'yish i ni j $i \neq j$ ga o'tkazuvchi $\varphi(i) = j, \varphi(j) = i, \varphi(s) = s, s \in A \setminus \{i, j\}$ shartlarni qanoatlantiruvchi transpozitsiya bo'lsin. Agar

1) $i < j$ bo'lsa, $\{s,t\} \in A$ juftlikning kamida bittasi i yoki j ga teng bo'lishidan, berilgan o'rniga qo'yishda inversiya mavjudligi kelib chiqadi.

2) $i < s$ yoki $j < s$ bo'lsa, u holda $\{s,i\}$, $\{j,s\}$ juftliklarda inversiyalar yo'q.

3) $i < s \le j$ bo'lsa, $\{i,s\}$ juftliklardan $\{i,i+1\}$, ... , $\{i, j\}$ lar, ya'ni $j - i$ ta inversiya mavjud.

4) $i < s < j$ bo'lsa, $\{s, j\}$ lardan $\{i+1, j\},...,\{j-1, j\}$ lar, ya'ni $j - i - 1$ ta inversiya mavjud.

Demak, berilgan transpozitsiya $(j-i)+(j-i-1) = 2(j-i)-1$ ta inversiyaga ega, ya'ni toq o'rniga qo'yish.

15.10–ta'rif. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & ... & \varphi(n) \end{pmatrix}$ o'rniga qo'yishning ishorasi deb $\operatorname{sgn}\varphi = \begin{cases} 1, агар \quad \varphi - жуфт, \\ -1, агар \quad \varphi - ток. \end{cases}$ qiymatga aytiladi.

15.3–teorema. O'rniga qo'yishlar ko'paytmasining ishorasi, o'rniga qo'yishlar ishoralari ko'paytmasiga teng.

15.4–teorema. O'rniga qo'yishlar ishorasi quyidagi xossalarga ega:

1) sgn funksiya multiplikativ, ya'ni har qanday $\varphi,\psi \in S_n$ lar uchun $\mathrm{sgn}(\varphi\psi) = \mathrm{sgn}\,\varphi \cdot \mathrm{sgn}\,\psi$ o'rinli;

2) transpozitsiya ishorasi (–1) ga teng;

3) o'zaro teskari o'rniga qo'yishlar ishorasi bir xil;

4) agar τ–transpozitsiya va φ ixtiyoriy o'rniga qo'yish bo'lsa, u holda $\mathrm{sgn}(\tau\varphi) = \mathrm{sgn}(\varphi\tau) = -\mathrm{sgn}\,\varphi$ bo'ladi.

15.5–teorema. Har qanday ikkita juft yoki toq o'rniga qo'yishlar ko'paytmasi juft o'rniga qo'yish bo'ladi;

Biri juft ikkinchisi toq o'rniga qo'yishlar ko'paytmasi toq o'rniga qo'yish bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. n–darajali o'rniga qo'yishga ta'rif bering.
2. O'rniga qo'yishlar gruppa tashkil etishini tekshiring.
3. n–darajali simmetrik gruppaga misol keltiring.
4. Inversiyaga ta'rif bering.
5. Juft, toq o'rniga qo'yishlarni ta'riflang.
6. Transpozitsiya nima?
7. O'rniga qo'yishning ishorasi qanday aniqlanadi?

16–ma'ruza. Determinantlar va ularning xossalari. Matritsalar ko'paytmasining determinanti

Reja:

1. Determinant.
2. Determinantning asosiy xossalari.
3. Matritsalar ko'paytmasining determinanti.

Asosiy tushunchalar: n–darajali o'rniga qo'yish, n–darajali simmetrik gruppa, inversiya, juft o'rniga qo'yish, toq o'rniga qo'yish, transpozitsiya, o'rniga qo'yishning ishorasi.

Adabiyotlar: [1]: 203–211 bb., [4]: 226–232 bb., [7]: 8–modul.

$F = < F;+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ maydon va maydon ustida $F^{n\times n}$ kvadrat matritsalar to'plami berilgan bo'lsin.

16.1–ta'rif. Kvadrat matritsaning har bir satr va har bir ustunidan bittadan elementlar olib tuzilgan ko'paytmalarning algebraik yig'indisiga berilgan kvadrat matritsaning determinanti deyiladi.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ matritsaning har bir satr va har bir ustunidan bittadan element olib tuzilgan n ta elementlar ko'paytmasi $a_{1\tau_1} \cdot ... \cdot a_{n\tau_n}$ bilan n–darajali o'rniga qo'yish $\tau = \begin{pmatrix} 1 & ... & n \\ \tau(1) & ... & \tau(n) \end{pmatrix}$ larni birini ikkinchisiga mos qo'yuvchi o'zaro bir qiymatli moslik mavjud. Bu moslikdan n–tartibli kvadrat matritsaning determinantini aniqlashda foydalanamiz.

Uchinchi darajali o'rniga qo'yishlar to'plami $S_3 = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$ dagi o'rniga qo'yishlar quyidagicha:

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \varphi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uchinchi tartibli kvadrat matritsa determinanti $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ni hisoblash uchun uchinchi darajali o'rniga qo'yishlar yordamida ko'paytmalar tuzamiz. Urniga qo'yishning ishorasi u yordamida hosil qilingan ko'paytmani qo'shish yoki ayirish kerakligini aniqlab beradi. Bundan quyidagi ifodani hosil qilamiz.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

16.2–ta'rif. n–tartibli kvadrat matritsa $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ ning determinanti deb $|A| = \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} \cdot ... \cdot a_{n\tau(n)}$ ($n!$ qo'shiluvchilardan iborat) yig'indiga aytiladi.

16.1–teorema. Nol satr yoki ustunga ega kvadrat matritsaning determinanti nolga teng.

16.2–teorema. Diagonal matritsaning determinanti asosiy diagonal elementlari ko'paytmasiga teng.

16.3–teorema. Uchburchak matritsaning determinanti asosiy diagonal elementlari ko'paytmasiga teng.

16.4–teorema. Kvadrat matritsa va unga transponirlangan matritsalar

determinantlari teng.

16.5–teorema. Kvadrat matritsaning ikkita satr (ustun)lari o'rnini almashtirish natijasida determinant ishorasi o'zgaradi.

16.6–teorema. Ikkita bir xil satr (ustun)ga ega kvadrat matritsa determinanti nolga teng.

16.7–teorema. A kvadrat matritsaning biror bir satr (ustun) elementlarini noldan farqli λ skalyarga ko'paytirilsa, u holda A matritsaning determinanti λ skalyarga ko'paytiriladi.

16.8–teorema. Qandaydir ikkita satr (ustun)lari proporsional bo'lgan kvadrat matritsaning determinanti nolga teng.

16.9–teorema. Kvadrat matritsa i– qatori (ustuni)ning har bir elementi m ta qo'shiluvchilardan iborat bo'lsa, bunday kvadrat matritsaning determinanti m ta determinantlar yig'indisidan iborat bo'lib, birinchi determinant i– qatori (ustuni)da birinchi, ikkinchi determinantda ikkinchi qo'shiluvchilar va h.z. boshqa qatorlar A matritsanikidek bo'ladi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a & a_{22}+b & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & b & c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

16.10–teorema. Kvadrat matritsaning biror–bir satr (ustun)iga noldan farqli skalyarga ko'paytirilgan boshqa satr (ustun)ni qo'shish natijasida determinant o'zgarmaydi.

16.11–teorema. Kvadrat matritsaning biror–bir satr (ustun)iga qolgan satr (ustun)lar chiziqli kombinatsiyasini qo'shish natijasida determinant o'zgarmaydi.

16.12–teorema. Kvadrat matritsaning biror–bir satri (ustuni) qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsa, uning determinanti nolga teng.

16.13–teorema. Har qanday elementar matritsaning determinanti noldan farqli.

16.14–teorema. Kvadrat matritsalar ko'paytmasining determinanti berilgan matritsalar determinantlari ko'paytmasiga teng.

Takrorlash uchun savollar:

1. Kvadrat matritsa determinanti tushunchasiga ta'rif bering.
2. Determinantni hisoblash formulasini tushuntiring.
3. Determinantning asosiy xossalarini ayting.
4. Matritsalar ko'paytmasining determinanti nimaga teng?

17-ma'ruza. Minorlar va algebraik to'ldiruvchilar. Matritsa rangi haqidagi teorema

Reja:
1. Matritsaosti.
2. n-tartibli minor.
3. Algebraik to'ldiruvchi.
4. Determinantni algebraik to'ldiruvchi yordamida aniqlash.
5. Laplas teoremasi.

Asosiy tushunchalar: matritsaosti (qismmatritsa), n-tartibli minor, algebraik to'ldiruvchi, Laplas teoremasi.

Adabiyotlar: [1]: 211-221 bb., [4]: 232-238 bb., [7]: 7-modul.

$F=<F;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ maydon va maydon ustida $F^{m\times n}$ matritsalar to'plami berilgan bo'lsin.

17.1-ta'rif. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ matritsaning matritsaosti deb, uning qandaydir satr va ustunlarini o'chirishdan hosil bo'lgan matritsaga aytiladi.

17.2-ta'rif. k ta satr va k ta ustundan iborat matritsaosti k-tartibli matritsaosti deyiladi.

17.1-misol. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & 3 \\ 9 & 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaning 3-tartibli qismmatritsasini hosil qilish uchun ixtiyoriy bitta ustunini o'chirish mumkin, masalan $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 7 \\ 9 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

17.3-ta'rif. k-tartibli matritsaosti determinanti A matritsaning k-tartibli minori deyiladi.

Matritsaning har bir elementi 1-tartibli minor bo'ladi.

17.4-ta'rif. Kvadrat matritsaning i- qatori j-ustunini o'chirishdan hosil bo'lgan matritsaosti determinanti a_{ij} elementning minori deyiladi va M_{ij} ko'rinishda belgilanadi.

17.5-ta'rif. $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ ko'paytmaga a_{ij} elementning algebraik to'ldiruvchisi deyiladi.

17.1-teorema. A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ kvadrat matritsaning n-satr (ustun) elementi a_{nn} dan boshqa hammasi nolga teng bo'lsa, u holda $|A| = a_{nn} \cdot M_{nn}$ bo'ladi.

17.2-teorema. A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ kvadrat matritsaning qandaydir satr (ustun) elementlaridan bittasidan boshqa hammasi nolga teng bo'lsa, u holda berilgan matritsa determinanti shu elementni uning algebraik to'ldiruvchisi bilan ko'paytmasiga teng.

17.3-teorema (Laplas teoremasi). A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ kvadrat matritsaning determinanti biror-bir satr (ustun) elementlari bilan ularning algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yig'indisiga, ya'ni $|A| = a_{1j}A_{1j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$ $(|A| = a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in}), i, j \in \{1, \dots, n\}$ ga teng.

Isbot. A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ matritsaning j-ustunini n ta ustunlar yig'indisi ko'rinishida ifodalaymiz:

$$A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

U holda kvadrat matritsa determinanti xossalariga (16.9-teorema) ko'ra

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ifodaga ega bo'lamiz. 17.2-teoremaga ko'ra

(1) $|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$.

(2) $|A| = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in}, i \in \{1,\ldots,n\}$ ekanligi yuqoridagi kabi isbotlanadi.

(1) formulaga determinantni j –ustun bo'yicha, 2–formulaga i–satr bo'yicha yoyilmasi deyiladi.

17.4–teorema. $a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \ldots + a_{nj}A_{nk} = 0, (j \neq k)$ va $a_{i1}A_{m1} + \ldots + a_{in}A_{mn} = 0, (i \neq m)$, ya'ni A matritsaning biror–bir satr (ustun) elementlarini boshqa bir satr (ustun) elementlari algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalarining yig'indisi nolga teng.

17.1–misol. A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matritsa determinantini hisoblang.

Yechish. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$

$(-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$ -5 + 18 + 6 = 19.

17.2–misol. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ determinantni hisoblang.

Yechish. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ = -1(6 – 4) – 1(9 – 1) + 2(12 – 2) = -2 – 8 + 20 = 10.

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ = 2(0 – 2) – 1(0 – 6) = 2.

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ = 2(-4) – 3(-6) = -8 + 18 = 10.

Demak, determinant –10 + 6 − 40 = –44 ga teng.

Takrorlash uchun savollar:

1. Matritsaostiga ta'rif bering.
2. n–tartibli minor deb nimaga aytiladi?.
3. Matritsa biror bir elementining algebraik to'ldiruvchisi nima?
4. Determinantni algebraik to'ldiruvchi yordamida aniqlash jarayonini tushuntiring.
5. Laplas teoremasini ayting.

18–ma'ruza. Deteminantning nolga teng bo'lish sharti. Kramer formulasi

Reja:

1. Determinant nolga teng bo'lishining zarur va yetarli sharti.
2. Matritsa rangi haqida teorema.
3. Algebraik to'ldiruvchilar yordamida teskari matritsani topish.
4. Kramer formulalari.

Asosiy tushunchalar: determinant, matritsa rangi, algebraik to'ldiruvchi, Kramer formulalari.

Adabiyotlar: [1]: 221–232 bb., [4]: 238–242 bb., [7]: 8–modul.

$F=<F;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ maydon va maydon ustida $F^{n\times n}$ matrisalar to'plami va A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ berilgan bo'lsin.

18.1–teorema. Kvadrat matritsaning determinanti nolga teng bo'lishi uchun uning satr (ustun)lari chiziqli bog'langan bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. 1. Matritsaning satrlari chiziqli erkli bo'lsa, $|A|\neq 0$ ekanligini isbotlaymiz.

Agar berilgan kvadrat matritsaning satrlari chiziqli erkli bo'lsa, u holda uni elementar matritsalar ko'paytmasi ko'rinishida ifodalash mumkin, ya'ni $A=E_1\cdot E_2\cdot\ldots\cdot E_k$. U holda determinant xossalariga ko'ra

$|A|=|E_1|\cdot|E_2|\cdot\ldots\cdot|E_k|$ va $|E_i|\neq 0(i=\{1,\ldots,k\}$. Bundan $|A|\neq 0$.

To'g'ri teorema bilan teskari teoremaga qarama-qarshi teoremalar teng kuchli bo'lganligidan, $|A|=0$ ekanligidan A matritsa chiziqli erkliligi kelib chiqadi.

2. A matritsaning satrlari chiziqli bog'liq bo'lsa, $|A|=0$ ekanligini isbotlaymiz.

Satrlari chiziqli bog'liq matritsaning kamida bitta satri qolganlari orqali chiziqli ifodalanadi. Determinantlar xossalariga ko'ra $|A|=0$.

18.1-misol. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

18.2-teorema. Har qanday kvadrat matritsa uchun quyidagi shartlar teng kuchli:

1. $|A| \neq 0$.
2. Matritsaning satr (ustun)lari chiziqli erkli.
3. A matritsa teskarilanuvchi.
4. A matritsa elementar matritsalar yordamida ifodalanadi.

18.3-teorema. A matritsaning rangi uning noldan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga teng.

Isboti. Noldan farqli A$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$matritsa berilgan bo'lsin. U holda uning rangi $r=r(A)>0$. Matritsaning kamida bitta noldan farqli r tartibli minori mavjudligini isbotlaymiz.

$r=r(A)>0$ bo'lganligi uchun, A matritsaning $r$ta chiziqli erkli satrlari bor. Shu satrlardan tuzilgan A matritsaning $B \in F^{r\times n}$ matritsaostisini tuzamiz B$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}$, bu matritsaning rangi $r(B)=r$. Matritsaning satr va ustun ranglari tengligidan $\rho(B)=r$. Demak, B matritsaning $r$ta chiziqli erkli ustunlari mavjud. B matritsaning $r$ta chiziqli erkli ustunlaridan tashkil topgan matritsaostisini C bilan belgilaymiz. U holda $C \in F^{r\times r}$ va $r(C)=r$. Yuqoridagi 18.2-teorema shartlariga ko'ra, C matritsaning ustunlari chiziqli erkli bo'lganligi uchun $|C| \neq 0$.

Demak, C matritsa A matritsaning tartibi $r$ga teng bo'lgan noldan farqli minori bo'ladi.

Agar $k > r(A)$ bo'lsa, A matritsaning k tartibli har qanday minori nolga teng bo'ladi.

Haqiqatdan ham, $k > r(A)$ bo'lsa, A matritsaning har qanday k ta satri chiziqli bog'langan bo'ladi. Bundan A matritsaning har qanday $(k \times k)$ tartibli qismmatritsasida satrlari chiziqli bog'langan bo'ladi va 18.1–teoremaga ko'ra bunday qismmatritsalar determinanti, ya'ni A matritsaning k tartibli har qanday minori nolga teng.

18.2–misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ matritsa rangini minorlar yordamida aniqlang.

Yechish. Matritsa rangi haqidagi teoremaga ko'ra matritsaning noldan farqli minorlarini aniqlaymiz.

Matritsaning berilishidan, unda kamida bitta noldan farqli birinchi tartibli minor mavjud, masalan, $A_1 = (1)$ matritsaostining determinanti 1ga teng, ya'ni $M_1 = |1| = 1 \neq 0$.

Matritsaning $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaostining determinanti

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) = 3 \neq 0.$$

Matritsaning $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaostining determinanti

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 1 - 0 - 0 - (-2) = 4 \neq 0.$$

Matritsaning 4–tartibli minori berilgan matritsaning determinantidan iborat, uni hisoblaymiz:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Demak, berilgan matritsaning noldan farqli minorlari 1–tartibli, 2–tartibli va 3–tartibli. Ulardan yuqori tartibligi 3–tartibli minor bo'lganligi uchun, berilgan matritsaning rangi 3 ga teng.

18.1–ta'rif. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ matritsaning a_{ij} elementining A_{ij} $(i,j\in\{1,...,n\}$ algebraik to'ldiruvchilaridan iborat

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ . & . & ... & . \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$$ matritsaga A matritsaga biriktirilgan matritsa deyiladi.

18.4–teorema. Agar $|A|\neq 0$ bo'lsa, u holda A matritsa teskarilanuvchi va $A^{-1}=|A|^{-1}\cdot A^*$.

Isbot. 17.3–Laplas teoremasi va 17.4–teoremalarga ko'ra

$$A_i(A^*)^j=(a_{i1},...,a_{in})\cdot\begin{pmatrix} A_{j1} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{pmatrix}=a_{i1}A_{j1}+...+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} |A, агар, i=j;| \\ 0, агар, i\neq j. \end{cases}$$

Ya'ni, $A\cdot A^*=\begin{vmatrix} |A| & 0 & ... & 0 \\ 0 & |A| & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & |A| \end{vmatrix}=|A|\cdot E$ ga ega bo'lamiz. Bundan $|A|\neq 0$ bo'lsa, $A\cdot(|A|^{-1}\cdot A^*)=E$ (1) hosil bo'ladi.

Xuddi shunday $A^*\cdot A=|A|\cdot E$ tenglikdan $|A|\neq 0$ bo'lsa, $(|A|^{-1}\cdot A^*)\cdot A=E$ (2) tenglikka ega bo'lamiz.

(1), (2) tengliklardan A va $|A|^{-1}\cdot A^*$ lar o'zaro teskari ekanligi kelib chiqadi, ya'ni $A^{-1}=|A|^{-1}\cdot A^*$.

$F=<F;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ maydon ustida quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \qquad (3)$$

CHTS berilgan va uning asosiy matritsasi

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ bo'lsin.

18.3-misol. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani algebraik to'ldiruvchilar yordamida toping.

Yechish. Berilgan A matritsaning determinantini hisoblaymiz:

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}=5(4-9)+1(2-12)-1(3-8)=-25-10+5=-30.$$

Determinant noldan farqli, demak, matritsaning teskarisi mavjud. Matritsaning har bir elementi algebraik to'ldiruvchisini topamiz:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -19;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^{*} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Tekshirish:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E.$$

18.5–teorema. $|A| \neq 0$ bo'lsa, u holda (3) CHTS yagona yechimga ega va u quyidagi formulalar orqali ifodalanadi:

(4) $x_1 = |A|^{-1}(\beta_1 A_{11} + \ldots + \beta_n A_{n1}), \ldots, x_n = |A|^{-1}(\beta_1 A_{1n} + \ldots + \beta_n A_{nn}).$

Isbot. $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$ sistemani

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ belgilashlar yordamida

$AX = B$ ko'rinishga keltiramiz. Teorema shartiga ko'ra $|A| \neq 0$ bo'lganligi uchun $AX = B$ matritsali tenglamaning yagona $X = A^{-1}B$ yechimi mavjud.

18.4–teoremaga ko'ra $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^{*}$ ekanligidan,

$$X = A^{-1}B = |A|^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ . & . & . \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ . \\ \beta_n \end{pmatrix} = |A|^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 A_{11} + & \dots & + \beta_n A_{n1} \\ . & . & . \\ \beta_1 A_{1n} + & \dots & + \beta_n A_{nn} \end{pmatrix},$$

ya'ni, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A|^{-1}(\beta_1 A_{11} + \dots + \beta_n A_{n1}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ |A|^{-1}(\beta_1 A_{1n} + \dots + \beta_n A_{nn}) \end{pmatrix}.$

18.5–teorema Kramer qoidasi va (4) formulalar Kramer formulalari deyiladi.

Agar $A(j)$ $j \in \{1,\dots,n\}$ orqali A matritsaning j–ustunini (3) sistemaning ozod hadlar ustuni bilan almashtirishdan hosil bo'lgan matritsani belgilasak, u holda

$A(1) = \begin{pmatrix} \beta_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & \dots & . \\ \beta_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \dots, A(n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & \beta_1 \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & \beta_n \end{pmatrix}$ matritsalarga ega bo'lamiz.

Laplas teoremasini qo'llab, $A(j)$ $j \in \{1,\dots,n\}$ matritsaning determinantini j–ustun yoyilmasi yordamidagi ifodasini hosil qilamiz:

$$|A(j)| = \beta_1 A_{1j} + \dots + \beta_n A_{nj}), (j = 1,\dots,n).$$

Hosil bo'lgan tengliklar yordamida 18.5–teoremani quyidagicha bayon qilish mumkin:

18.6–teorema. Agar $|A| \neq 0$ bo'lsa, u holda (3) CHTS yagona yechimga ega va u quyidagi formulalar orqali ifodalanadi:

$$x_1 = \frac{|A(1)|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|A(n)|}{|A|} \quad (5).$$

$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$ chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini Kramer formulalari yordamida topish uchun sistemaning asosiy matritsasi va A(1), A(2), A(3) matritsalarni tuzib, ularning determinantlarini hisoblaymiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

$$\Delta_1 = |A(1)| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = |A(2)| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3 = A(3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

U holda $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

18.4–misol. $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$ chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini Kramer formulalari yordamida toping.

Yechish:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + (2-12) - (3-8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1$; $x_2 = \Delta_2/\Delta = 2$; $x_3 = \Delta_3/\Delta = 3$.

Takrorlash uchun savollar:

1. Determinant nolga teng bo'lishining zarur va yetarli shartini ayting.
2. Matritsa rangi minorlar yordamida qanday topiladi?
3. Algebraik to'ldiruvchilar yordamida teskari matritsani topish jarayonini tushuntiring.
4. CHTSni Kramer qoidasi bilan yechish usulini tushuntiring.

19-ma'ruza. Bir jinsli n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasining nolmas yechimga ega bo'lish sharti

Reja:

1. Bir jinsli CHTSning yechimlari.
2. Bir jinsli CHTSning nolmas yechimlarining mavjudligi.
3. Matritsali tenglamaning nolmas yechimlari.

Asosiy tushunchalar: bir jinsli CHTS, nol yechim, nolmas yechim, matritsali tenglama.

Adabiyotlar: [1]: 232–234 bb., [4]: 242–244 bb., [7]: 8-modul.

$F = < F;+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ maydon va maydon ustida

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

bir jinsli n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

Ma'lumki, n noma'lumli CHTSning yechimi n o'lchovli arifmetik vektor bo'ladi. Agar biror-bir CHTSning yechimi bo'lgan arifmetik vektorning barcha koordinatalari nollardan iborat bo'lsa, u sistemaning nol yechimi; kamida bitta koordinatasi noldan farqli bo'lsa, nolmas yechim deyiladi.

Har qanday bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi hamjoyli bo'ladi, chunki hech bo'lmaganda nol yechimga ega.

19.1-teorema. Bir jinsli n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasining nolmas yechimga ega bo'lishi uchun, uning determinanti nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Agar berilgan bir jinsli CHTS nolmas $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ yechimga ega bo'lsa, u holda $\xi_1 A^1 + \xi_2 A^2 + \ldots + \xi_n A^n = 0$ tenglikdan ustun vektorlar sistemasi $A^1, A^2, \ldots, A^n$ chiziqli bog'liq ekanligi kelib chiqadi. Determinantning xossalariga ko'ra $|A| = 0$ bo'ladi.

Agar $|A| = 0$ bo'lsa, u holda determinantning xossalariga ko'ra, A matritsaning ustunlari chiziqli bog'langan. Vektorlar chekli sistemasining chiziqli bog'liqligi ta'rifiga ko'ra kamida bittasi noldan farqli $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ skalyarlar mavjudligidan $\xi_1 A^1 + \xi_2 A^2 + \ldots + \xi_n A^n = 0$ bo'ladi. Hosil bo'lgan tenglikka

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \; A^2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \; A^n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$ belgilashlarni qo'llab, skalyarni vektorga ko'paytirish, vektorlarni qo'shish amallarini bajarsak quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n = 0, \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \dots + a_{2n}\xi_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \dots + a_{nn}\xi_n = 0. \end{cases}$$

Ya'ni, $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ nolmas vektor $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$ bir jinsli CHTSning nolmas yechimi bo'ladi.

19.1-misol. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Tenglamalar sistemasi $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ matritsasining determinantini hisoblaymiz:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -8 \\ 0 & -5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Determinant nolga teng bo'lganligi uchun, bir jinsli CHTSning cheksiz ko'p yechimi mavjud bo'lib, ulardan faqat bittasi nol yechim.

Hosil qilingan pog'onasimon matritsa yordamida berilgan sistemaga teng kuchli bir jinsli tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 7x_2 - 3x_3 - 8x_4 = 0, \\ -8x_3 + 30x_4 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5}{4}x_4, \\ x_2 = \frac{11}{4}x_4, \\ x_3 = \frac{15}{4}x_4, \\ x_4 \in R \end{cases}$$

Berilgan bir jinsli CHTSning umumiy yechimi $(\frac{5}{4}x_4; \frac{11}{4}x_4; \frac{15}{4}x_4; x_4), x_4 \in R$ ko'rinishda bo'lib, $x_4 \neq 0$ qiymat qo'yganda nolmas yechim hosil bo'ladi, masalan, $x_4 = 4$ bo'lganda sistemaning yechimi $(5;11;15;4)$ bo'ladi.

Agar $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$ sistema yordamida $AX = 0$ matritsali tenglamani tuzamiz. Bu tenglama $|A| \neq 0$ bo'lganda nol yechimga va $|A| = 0$ bo'lganda nolmas yechimga ega.

Takrorlash uchun savollar:

1. Bir jinsli CHTSning yechimi deb nimaga aytiladi?
2. Bir jinsli CHTSning nolmas yechimlari qachon mavjud?
3. n noma'lumli n ta tenglamadan iborat bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi qachon yagona yechimga ega?

ADABIYOTLAR:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T, Dusumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi.T.,I qism,1993 y.
2. R.Iskandarov, R.Nazarov. Algebra va sonlar nazariyasi. I qism.T., O'qituvchi, 1979 y.
3. Hojiev , Faynleb. Algebra va sonlar nazariyasi kursi.
4. Kulikov L.Ya.Algebra i teoriya chisel. M., Visshaya shkola.1979 g.
5. Petrova V.T.Leksii po algebre i geometrii. Ch.1,2. Moskva,1999g.
6. Kostrikin I.A.Vvedenie v algebru.M.,Nauka.1977 g.
7. Kurosh A.G.Oliy algebra kursi.T.,O'qituvchi,Iqism,1976 y.
8. Yunusov A.S., Yunusova D.I. Algebra va sonlar nazariyasidan modul texnologiyasi asosida tayyorlangan nazorat topshiriqlari to'plami. TDPU. 2004.