O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA

MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

ANDIJON MASHINASOZLIK INSTITUTI

ANDIJON MASHINASOZLIK INSTITUTI
ANDIJAN MACHINE-BUILDING INSTITUTE
АНДИЖАНСКИЙ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

“OLIY MATEMATIKA” FANIDAN MARUZALAR KURSI (I-SEMESTR UCHUN)

Andijon – 2018

"TASDIQLAYMAN"
Andijon mashinasozlik instituti
O'quv-uslubiy kengashida ko'rib chiqilgan va ma'qullangan
Kengash raisi_______________Q.Ermatov
O'quv-uslubiy kengashining ________ -sonli bayonnomasi
"___"_______________ 20__-yil

"MA'QULLANGAN"
"Mashinasozlik" fakulteti
kengashida ko'rib chiqilgan va ma'qullangan
Kengash raisi_______________M.Kuchkarov
Fakultet kengashining ________ -sonli bayonnomasi
"28" ______08______ 2018-yil

"TAVSIYA ETILGAN"
"Oliy matematika" kafedrasi
majlisida muhokama qilingan va tavsiya etilgan
Kafedra mudiri_______________Z.Qodirov
Kafedra majlisining ___1___-sonli bayonnomasi
"27" ______08______ 2018-yil

Taqrizchilar:

1. S.Ergashov — AndMI "Oliy matematika" kafedrasi dotsenti, t. f. n.
2. T. Ibaydullayev — ADU "Matematika" kafedrasi mudiri, f.-m. f. n.

Tuzuvchilar:

Z.Qodirov — AndMI "Oliy matematika" kafedrasi katta o'qituvchisi
Sh..To'ychiyev - AndMI "Oliy matematika" kafedrasi assistenti

Fanning ishchi o'quv dasturi o'quv, ishchi o'quv reja va OO'MTV tomonidan 2017 yil «24» iyulda tasdiqlangan va 5310 - 200 –2.01 raqam bilan ro'yhatga olingan «Oliy matematika» fanining o'quv dasturi asosida ishlab chiqildi.

1-MODUL. CHIZIQLI ALGEBRA.

1-mavzu. Ikkinchi, uchinchi tartibli determinantlar. Determinantlarni hisoblash usullari. Determinantning asosiy xossalari. Minorlar va algebraik to’ldiruvchilar. n-tartibli determinant haqida tushuncha.

REJA:

1. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar.
2. Determinantlarning xossalari.
3. *n* – tartibli determinantlar.

1. Quyidagi $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22}$ haqiqiy sonlardan tuzilgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

kvadrat jadval 2-tartibli **kvadrat matrisa** deyiladi, bu yerda a_{ij}- uning elementlari, $a_{11},\ a_{12}\ va\ \ a_{21},\ a_{22}$lar uning satr elementlari, $a_{11},\ a_{21}\ va\ \ a_{12},\ a_{22}$**ustun elementlari** deb ataladi. a_{ij} ning birinchi indeksi *i* satr raqami, *j* ustun raqamini bildiradi. Misol uchun, a_{21} 2-satr va 1-ustunda joylashgan. Bu matritsaning determinanti deb, quyidagi songa aytamiz:

$$det\, A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \qquad (1)$$

Xuddi shunday,

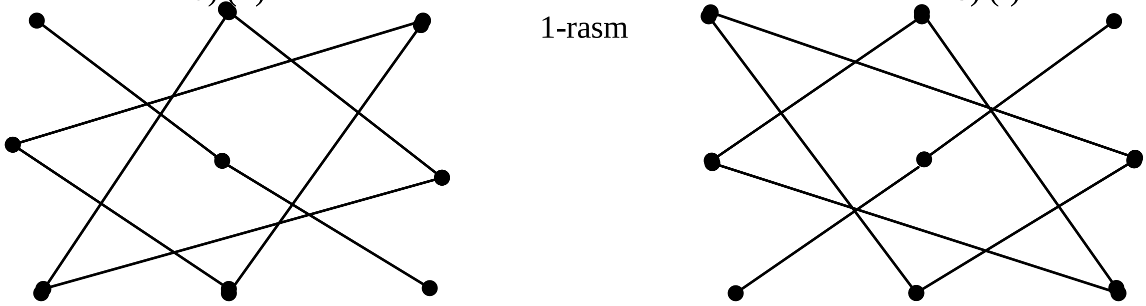
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

kvadrat jadvalni 3-tartibli kvadrat matrisa deb atasak, uning determinanti deb quyidagi sonni aytamiz:

$$\det A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \quad (2)$$

(1) va (2) determinantlar mos ravishda 2-tartibli va 3-tartibli **determinantlar** deb ham ataladi.
(2) determinantni hisoblash uchun «uchburchaklar usuli» deb ataluvchi quyidagi diagrammadan foydalanish
mumkin:

a) (+) 1-rasm b) (-)



Har bir diagrammada tutashtirilgan elementlar o‘zaro ko‘paytirilib, keyin natijalar qo‘shiladi,

a) diagrammadagi yig‘indi «+» ishorasi bilan,

b) diagrammadagi yig‘indi esa «-» ishora bolan olinib, ikkala natija o‘zaro qo‘shiladi.

2. 1. Agar determinantning barcha yo‘l elementlarini ustun elementlariga yoki aksincha almashtirilsa, uning qiymati o‘zgarmaydi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2. Agar determinantning ikki yonma-yon turgan satr (ustun) elementlarini o‘rnini mos ravishda almashtirsak, determinant qiymati qarama-qarshi ishoraga o‘zgaradi:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

3. Agar determinantning biror satr (ustun) elementlari umumiy ko‘paytuvchiga ega bo‘lsa, u holda bu ko‘paytuvchini determinant tashqarisiga chiqarish mumkin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}a_{22} - \lambda a_{12}a_{21} = \lambda\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

4. Agar determinantning biror satr (ustun) elementlari mos ravishda boshqa satr (ustun) elementlariga proporsional bo‘lsa, u holda determinant qiymati nolga teng bo‘ladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} \\ a_{21} & \lambda a_{21} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}a_{21} - \lambda a_{11}a_{21} = \lambda\left(a_{11}a_{21} - a_{11}a_{21}\right) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Hususan, agar $\lambda = 0$ bo‘lsa, determinant qiymati nolga tengdir.

5. Agar determinantning satr (ustun) elementlari ikki ifodaning yig‘indisi ko‘rinishida bo‘lsa, u holda determinant ikki determinant yig‘indisi ko‘rinishida yozilishi mumkin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}^{1} + a_{12}^{11} \\ a_{21} & a_{22}^{1} + a_{22}^{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}^{1} \\ a_{21} & a_{22}^{1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}^{11} \\ a_{21} & a_{22}^{11} \end{vmatrix}$$

6. Agar determinantning biror satr (ustun) elementlarini biror $\lambda \neq 0$ songa ko‘paytirib, mos ravishda boshqa satr (ustun) elementlariga qo‘shsak, determinant qiymati o‘zgarmaydi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + \lambda a_{11} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} \\ a_{21} & \lambda a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Yuqorida keltirilgan xossalar determinant uchinchi va undan yuqori tartibli bo‘lganda ham o‘rinlidir.

Keyingi xossalarni kiritish uchun uchinchi tartibli Δ determinantdan foydalanamiz,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Berilgan uchinchi tartibli determinantning i – yo‘li va j – ustunini o‘chirishdan hosil bo‘lgan ikkinchi tartibli determinant a_{ij} **elementning minori** deyiladi va M_{ij} - deb belgilanadi.

Masalan, a_{11} elementning minori

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Xuddi shuningdek, a_{12}-niki

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ga teng va hokazo.

Quyidagi $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ ifoda a_{ij} elementning **algebraik to‘ldiruvchisi** deyiladi. a_{11} elementningalgebraik to‘ldiruvchisi

$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, a_{12}- elementniki esa $A_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ va hokazo.

7. Determinantning biror satr (ustun) elementlarini mos ravishda o‘zining algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytirib qo‘shsak, u holda yig‘indi determinant qiymatiga teng bo‘ladi. Haqiqatdan,

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \qquad \Delta=a_{11}A_{11}+a_{22}A_{22}+a_{13}A_{13}$$

$$\Delta=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} \qquad \Delta=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$$

$$\Delta=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \qquad \Delta=a_{31}A_{31}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}$$

Tengliklarning to‘g‘ri ekanligini isbotlash qiyin emas.

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

8. Determinantning biror satr (ustun) elementlarini mos ravishda boshqa satr (ustun) elementlarining algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytirib qo‘shsak, u holda yig‘indi nolga teng bo‘ladi. Masalan,

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0 \qquad a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32}=0$$

$$a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=0 \qquad a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{31}A_{33}=0$$

va hokazo. Haqiqatdan,

$$a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{13}a_{22}-a_{11}a_{12}a_{23}+a_{12}a_{13}a_{21}+a_{11}a_{13}a_{22}-a_{12}a_{13}a_{21}=0$$

Yuqorida keltirilgan xossalar quyida kiritiladigan *n* – tartibli determinantlar uchun ham o‘rinlidir.

3. Birinchi *n* ta natural sonlarning {1, 2, …, *n*} to‘plamiga o‘zini har qanday π mos qo‘yish ***n* – tartibli o‘rinlashtirish** deyiladi. Har qanday *n* – tartibli πo‘rinlashtirish quyidagicha yozilishi mumkin:

$$\pi=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots i_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \dots\alpha_{i_n} \end{pmatrix}$$

xususan,

$$\pi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots\alpha_n \end{pmatrix}$$

kanonik o‘rinlashtirish deyiladi.

Agar $i < j$ bo‘lib, $a_i > a_j$ bo‘lsa, π o‘rinlashtirishda (i, j) juftlik inversiyani tashkil etadi deymiz. Agar barcha invers juftliklar soni $S(\pi)$ juft bo‘lsa, π o‘rinlashtirish **juft**, agar $S(\pi)$ toq bo‘lsa, π o‘rinlashtirish **toq** deyiladi.

Misol. Quyidagi

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

o‘rinlashtirishning juft yoki toq ekanligini aniqlang.

Yechish. Berilgan o‘rinlashtirishni kanonik ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

va inversiyalar sonini hisoblaymiz. Invers juftliklarni (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) lar tashkil etgani uchun, $S(\pi) = 4$, demak, π- juft o‘rinlashtirish ekan.

<u>Ta’rif.</u> Quyidagi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Kvadrat matritsaning ***n* - tartibli determinanti** deb, quyidagi songa aytiladi:

$$det\, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\pi} (-1)^{S(\pi)} a_{1,\pi(1)} \ldots a_{n,\pi(n)}$$

bu yerda yig‘indi barcha n – tartibli o‘rinlashtirishlar bo‘yicha bajariladi.

Bu ta’rifni tushunish uchun $n = 3$ bo‘lgan holini ko‘raylik. Barcha 3-tartibli o‘rinlashtirishlar quyidagicha bo‘ladi:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix},\quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix},\quad \pi_3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix},\quad \pi_4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix},\quad \pi_5 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix},\quad \pi_6 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix}$$

Har bir o‘rinlashtirish uchun inversiya sonini hisoblasak: $S(\pi_1) = 0$, $S(\pi_2) = 2$, $S(\pi_3) = 2$, $S(\pi_4) = 3$, $S(\pi_5) = 1$, $S(\pi_6) = 1$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz. U holda ta’rifga ko‘ra:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

ya’ni 3-tartibli determinant uchun avval keltirilgan formulani hosil qildik.

Yuqoridagiga o‘xshab, n - tartibli determinant uchun ham algebraik to‘ldiruvchini kiritish mumkin. U holda 2-tartibli va 3-tartibli determinantlarning barcha xossalari n - tartibli determinantlar uchun ham o‘rinli bo‘ladi. Xususan,

$$det\, A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

$$det\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

bu yerda A_{ik} algebraik to‘ldiruvchilar n – 1 tartibli determinantlardir, shu sababli (3), (4) formulalarni n - tartibli determinantni hisoblashning tartibini pasaytirish yoki satr va ustun elementlari bo‘yicha yoyish usuli deb ham atashadi.

Misol. Hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Yechish. Masalan 3-ustun elementlarini avval 2-ustunga va -2 ga ko‘paytirib 1-ustunga qo‘shamiz:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -9 & 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -9 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

3-ustunni -4 ga va 3 ga ko‘paytirib, mos ravishda 1- va 2-ustunlarga qo‘shsak:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -13 & 10 & 3 \\ -13 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -13 & 10 \\ -13 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

Tayanch iboralar.

Determinant — kvadrat matritsadan tuzilgan jadval;
Soppyus usuli — determinantni yechishning uchburchak usuli;
Minor — determinantning satr va ustunini o‘chirishdan hosil bo‘lgan tartibi berilgan determinantning tartibidan bittaga kam determinant;
Algebraik to‘ldiruvchi — minorning ishorasini aniqlovchi ifoda;
***n* – tartibli determinant** — n ni o‘rniga ixtiyoriy natural sonni qo‘yib hosil qilingan birinchi, ikkinchi, uchinchi va hokazo tartibli determinantlar.

Nazorat savollari.

1. Ikkinchi tartibli determinant va uni yechish.
2. Uchinchi tartibli determinant va uning xossalari.
3. Minor va algebraik to‘ldiruvchilar.
4. Uchinchi tartibli determinantni uchburchak usuli bilan yechish.
5. Uchinchi tartibli determinantni minor va algebraik to‘ldiruvchilar yordamida yechish.
6. n – tartibli determinant va uni yechish.

Testlardan namunalar

1. Quyidagi |A| determinantning a_{12} va a_{32} elementlari yig‘indisini toping:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

A) 5; B) 2; C) 7; D) – 6; E) 6.

2. Quyidagi |A| determinantning diagonal elementlari yig‘indisini toping:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 0 & 9 & 5 \\ -2 & 6 & -10 \end{vmatrix}.$$

A) 14; B) 0; C) 20; D) –6; E) 4.

3. Quyidagi determinantni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

A) 14; B) –26; C) 26; D) –14; E) 0.

4. Ushbu determinantni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

A) 0; B) –12; C) 12; D) 2; E) 3.

5. Quyidagi tenglamani yeching:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A) x=7; B) x= –1; C) x=2; D) x=4; E) x=8 .

6. Tenglamani yeching: $\begin{vmatrix} 3 & x+1 \\ x & -21 \end{vmatrix} = 1$

A) x_1=4; x_2=1 ; B) x_1=–2; x_2=3 ; C) x_1=1; x_2=–1 ;
D) tenglama yechimga ega emas; E) tenglama cheksiz ko‘p yechimga ega.

7. Ushbu determinantni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

A) 1; B) 0; C) –2; D) 4; E) 12.

8. Ushbu determinantni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

A) 0; B) 12; C) 10; D) –10; E) –12.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. II tartibli determinantni hisoblang:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2n+1 & n+3 \\ n-2 & 2n+3 \end{vmatrix}.$$

2. III tartibli determinant qiymatini toping: $\Delta_3 = \begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 \\ 2n-1 & n+3 & n-4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$

2-mavzu. Matritsa tushunchasi. Matritsaning asosiy turlari. Matritsa ustida amallar. Teskari matritsa va uni tuzish. Matritsaning rangi.

REJA:

1. Matritsalar va ularning turlari.
2. Matritsalar ustida amallar.
3. Teskari matritsa va uni topish
4. Matritsaning rangi.

1. Matritsalar va ularning turlari. Matritsa bir qator matematik va iqtisodiy masalalarni yechishda juda ko‘p qo‘llaniladigan tushuncha bo‘lib, uning yordamida bu masalalar va ularning yechimlarini sodda hamda ixcham ko‘rinishda ifodalanadi.

1-TA’RIF: m ta satr va n ta ustundan iborat to‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi $m\cdot n$ ta sondan tashkil topgan jadval $m\times n$ tartibli ***matritsa,***uni tashkil etgan sonlar esa ***matritsaning elementlari*** deb ataladi.

Matritsalar $A,B,C,\ldots$ kabi bosh harflar bilan, ularning i-satr va j-ustunida joylashgan elementlari esa odatda a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} kabi mos kichik harflar bilan belgilanadi. Masalan, $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1.2 \\ 0 & 7.5 & -1 \end{pmatrix}$ matritsa 2×3 tartibli, ya’ni 2 ta satr va 3 ta ustun ko‘rinishidagi $2\cdot 3=6$ ta sondan tashkil topgan. Uning 1-satr elementlari $a_{11}=1$, $a_{12}=-3$, $a_{13}=1.2$ va 2-satr elementlari $a_{21}=0$, $a_{22}=7.5$, $a_{23}=-1$ sonlardan iborat. Bu matritsaning 1-ustuni $a_{11}=1$ va $a_{21}=0$, 2-ustuni $a_{12}=-3$ va $a_{22}=7{,}5$, 3-ustuni esa $a_{13}=1.2$ va $a_{23}=-1$ elementlardan tuzilgan.

Agar biror A matritsaning tartibini ko‘rsatishga ehtiyoj bo‘lsa, u $A_{m\times n}$ ko‘rinishda yoziladi va umumiy holda

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

yoki qisqacha $A_{m\times n}=(a_{ij})$ ko‘rinishda ifodalanadi.

2-TA’RIF: A_{mxn} matritsada $m = n \neq 1$ bo‘lsa, u ***kvadrat matritsa***, $m\neq n$ ($m\neq 1$, $n\neq 1$) bo‘lsa ***to‘g‘ri burchakli matritsa*** , $m=1$, $n\neq 1$ holda ***satr matritsa*** va $m\neq 1$, $n=1$ bo‘lganda ***ustun matritsa*** deb ataladi.

A_{nxn} kvadrat matritsa qisqacha A_n kabi belgilanadi va n-tartibli kvadrat matritsa deyiladi. Masalan, xalq xo‘jaligining n ta tarmoqlari orasidagi o‘zaro mahsulot ayirboshlash $A_n=(a_{ij})$ kvadrat matritsa yordamida ifodalanadi. Bunda a_{ij}(i,j=1,2, … , n va $i\neq j$) i-tarmoqda ishlab chiqarilgan mahsulotning j-tarmoq uchun mo‘ljallangan miqdorini, a_{ii}(i=1,2, … , n) esa i-tarmoqning o‘zi ishlab chiqargan mahsulotga ehtiyojini bildiradi.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, $m=1$ va $n=1$ bo‘lganda $A_{1\times 1}$ matritsa bitta sonni ifodalaydi va shu sababli ma’lum bir ma’noda matritsa son tushunchasini umumlashtiradi.

3-TA’RIF: A va B matritsalar bir xil tartibli va ularning mos elementlari o‘zaro teng bo‘lsa, ya’ni $a_{ij}=b_{ij}$ shart bajarilsa, ular ***teng matritsalar*** deyiladi.

A va B matritsalarning tengligi $A=B$ yoki $(a_{ij})=(b_{ij})$ ko‘rinishda belgilanadi. Masalan, ixtiyoriy $a\neq 0$ soni uchun

$$A=\begin{pmatrix} a+a & a-a \\ a:a & a\cdot a \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

matritsalar o‘zaro teng, ya’ni $A = B$ bo‘ladi.

4-TA’RIF: $A=\{a_{\mathrm{ij}}\}$ matritsada i=j bo‘lgan a_{ii} elementlar ***diagonal elementlar*** deb ataladi.

Masalan, yuqorida ko‘rilgan $A_{2\times3}$ matritsaning diagonal elementlari $a_{11}=1$ va $a_{22}=7.5$ bo‘ladi.

5-TA'RIF: Diagonal elementlaridan boshqa barcha elementlari nolga teng bo‘lgan ($a_{ij}=0$, $i\neq j$) kvadrat matritsa ***diagonal matritsa*** deyiladi.

Diagonal matritsaning diagonal elementlari nolga ham teng bo‘lishi mumkin.
Masalan,

$$A_{2\times2}=A_2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad , \quad B_{3\times3}=B_3=\begin{pmatrix}15 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

diagonal matritsalar bo‘ladi.

6-TA'RIF: Barcha diagonal elementlari $a_{ii}=1$ bo‘lgan n-tartibli diagonal matritsa n-tartibli birlik matritsa yoki qisqacha ***birlik matritsa*** deyiladi.

Odatda n-tartibli birlik matritsa E_n yoki qisqacha E kabi belgilanadi. Masalan,

$$E_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad E_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

mos ravishda ikkinchi va uchinchi tartibli birlik matritsalardir.

7-TA'RIF: Barcha elementlari nolga teng ($a_{ij}=0$) bo‘lgan ixtiyoriy $m\times n$ tartibli matritsa ***nol matritsa*** deyiladi. $m\times n$ tartibli nol matritsa $O_{m\times n}$ yoki qisqacha O kabi belgilanadi. Masalan,

$$O_{2\times3}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad O_{3\times2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad O_{3\times3}=O_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ko‘rsatilgan tartibli nol matritsalar bo‘ladi.

2. Matritsalar ustida amallar. Endi matritsalar ustida algebraik amallar kiritib, matritsalar algebrasini hosil etamiz.

8-TA'RIF: Ixtiyoriy tartibli $A_{m\times n}=(a_{ij})$ matritsaning istalgan λ***songa ko‘paytmasi*** deb $C_{m\times n}=\{\lambda a_{ij}\}$ kabi aniqlanadigan matritsaga aytiladi.

Bunda A matritsaning λ songa ko‘paytmasi λA deb belgilanadi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 7\end{pmatrix}\Rightarrow 6A=\begin{pmatrix}6\cdot5 & 6\cdot4 & 6\cdot(-1)\\ 6\cdot0 & 6\cdot2 & 6\cdot7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30 & 24 & -6\\ 0 & 12 & 42\end{pmatrix}.$$

9-TA'RIF: Bir xil tartibli $A_{m\times n}=(a_{ij})$ va $B_{m\times n}=(b_{ij})$ ***matritsalar yig‘indisi*** deb elementlari $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ kabi aniqlanadigan $C_{m\times n}=(c_{ij})$ matritsaga aytiladi.

Bunda A va B matritsalarning yig‘indisi $A+B$ ko‘rinishda belgilanadi va ularning mos elementlarini qo‘shish orqali hisoblanadi. Masalan,

$$A=A_{2\times3}=\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 0 & 7 & 2\end{pmatrix}, \quad B=B_{2\times3}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix},$$

matritsalar uchun

$$A+B=\begin{pmatrix}5+1 & 3+0 & -1+1\\ 0+2 & 7+(-3) & 2+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3 & 0\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}.$$

Matritsalarni songa ko‘paytirish va o‘zaro qo‘shish amallari quyidagi qonunlarga bo‘ysunishi bevosita ularning ta’riflaridan kelib chiqadi:

I. $A+B=B+A$ (qo‘shish uchun kommutativlik qonuni);

II. $A+(B+C)=(A+B)+C$ (qo‘shish uchun assotsiativlik qonuni);

III. $\lambda (A+B) = \lambda A + \lambda B$, $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (distrubutivlik qonuni)
Bundan tashqari yuqoridagi ta’riflar orqali bu amallar ushbu xossalarga ham ega bo‘lishini ko‘rsatish qiyin emas:

$$A + O = A, \quad A+A = 2A, \quad 0 \cdot A = O, \quad \lambda \cdot O = O.$$

10-TA’RIF: Bir xil tartibli $A_{m\times n} = (a_{ij})$ va $B_{m\times n} = (b_{ij})$ ***matritsalar ayirmasi*** deb $A_{m\times n}$ va $(-1)\, B_{m\times n}$ matritsalarning yig‘indisiga, ya’ni $A_{m\times n}+(-1)B_{m\times n}$ matritsaga aytiladi.

Bunda A va B matritsalarning ayirmasi $A-B$ ko‘rinishda belgilanadi va ularning mos elementlarini o‘zaro ayirish orqali hisoblanadi. Masalan,

$$A = A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = B_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

matritsalar uchun

$$A - B = \begin{pmatrix} 5-1 & 3-0 & -1-1 \\ 0-2 & 7-(-3) & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

11-TA’RIF: $A_{m\times p}=(a_{ij})$va $B_{p\times n}=(b_{ij})$***matritsalarning ko‘paytmasi*** deb shunday $C_{m\times n}=(c_{ij})$ matritsaga aytiladiki, uning c_{ij} elementlari ushbu

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \qquad i = 1, 2, \cdots, m; \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

yig‘indilar kabi aniqlanadi.

Shunday qilib, $A_{m\times p}=(a_{ij})$va $B_{q\times n}=(b_{ij})$matritsalar uchun $p=q$, ya’ni A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo‘lgandagina ularning ko‘paytmasi mavjud bo‘ladi va AB kabi belgilanadi. Bunda $AB=C_{m\times n}=(c_{ij})$ matritsaning satrlar soni m birinchi A ko‘paytuvchi matritsa, ustunlar soni n esa ikkinchi B ko‘paytuvchi matritsa orqali aniqlanadi. Bundan tashqari $AB=C_{m\times n}=(c_{ij})$ ko‘paytma matritsaning c_{ij}elementi A matritsaning i – satr elementlarini B matritsaning j-ustunidagi mos elementlariga ko‘paytirib, hosil bo‘lgan ko‘paytmalarni qo‘shish orqali hisoblanadi. Bu “satrni ustunga ko‘paytirish” qoidasi deb aytiladi. Masalan,

$$A_{3\times2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B_{2\times2} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matritsalar uchun $m=3$, $p=q=2$, $n = 2$ bo‘lgani uchun ularning ko‘paytirish mumkin va ko‘paytma matritsa $AB=C_{3x2}$ quyidagicha bo‘ladi:

$$C_{3\times2} = \begin{pmatrix} 3\cdot6+1\cdot1 & 3\cdot(-4)+1\cdot2 \\ 0\cdot6+(-2)\cdot1 & 0\cdot(-4)+(-2)\cdot2 \\ 4\cdot6+5\cdot1 & 4\cdot(-4)+5\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -10 \\ -2 & -4 \\ 29 & -6 \end{pmatrix}.$$

Matritsalar ko‘paytmasi uchun $AB\neq BA$, ya’ni kommutativlik qonuni o‘rinli

bo‘lmaydi. Masalan, $A_{m\times q}B_{q\times n}=C_{m\times n}$ ko‘paytma mavjud, ammo $B_{q\times n}\, A_{m\times q}$ko‘paytma har doim ham mavjud emas va mavjud bo‘lgan taqdirda, ya’ni $n=m$ holda ham ular teng bo‘lishi shart emas. Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matritsalar uchun $AB\neq BA$, chunki

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 22\\ 8 & 23\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34 & 33\\ -4 & -5\end{pmatrix}.$$

Matritsalar ko‘paytmasi va yig‘indisi quyidagi qonunlarga bo‘ysunadi hamda ushbu xossalarga ega bo‘ladi:

I. $A(BC)=(AB)C$, $(\lambda A)B=A(\lambda B)$ (ko‘paytirish uchun assotsiativlik qonuni);

II. $A(B+C) = AB + AC$ (ko‘paytirish va qo‘shish amallari

$(A+B)C = AC + BC$ uchun distributivlik qonunlari);

III. $AE = EA = A$, $\mathrm{O}\cdot A = \mathrm{O}$, $A\cdot\mathrm{O} = \mathrm{O}$, $0\cdot A= \mathrm{O}$.

Bunda E va O mos ravishda tegishli tartibli birlik va nol matritsalarni ifodalaydi.

Matritsa ko‘paytmasi ta’rifidan ko‘rinadiki, har qanday n-tartibli A kvadrat matritsani o‘ziga–o‘zini ko‘paytirish mumkin va natijada yana n-tartibli kvadrat matritsa hosil bo‘ladi.

12-TA’RIF: Akvadrat matritsani o‘zaro $m$marta (m – birdan katta ixtiyoriy natural son) ko‘paytirishnatijasida hosil bo‘lgan kvadrat matritsa ***Amatritsaning m- darajasi*** deyiladi.

Amatritsaning m- darajasi A^m kabi belgilanadi. Bunda $A^0=E$ va$A^1=A$ deb olinib, A^m daraja ixtiyoriy nomanfiy butun m soni uchun aniqlanadi. Bu holda A^m daraja ta’rifdan uning quyidagi xossalari bevosita kelib chiqadi (m,k-natural sonlar, λ-haqiqiy son):

$$1.\ A^m\cdot A^k=A^{m+k}\ ;\quad 2.\ (A^m)^k=A^{mk}\ ;\quad 3.\ (\lambda A)^m=\lambda^m A^m\ ;$$

$$4.\ E^m=E;\quad 5.\ \mathrm{O}^m=\mathrm{O}.$$

Shunday qilib, har qanday kvadrat matritsa uchun natural darajaga ko‘tarish amalini kiritish mumkin ekan. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -5\\ -1 & 14\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}9 & -5\\ -1 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 60\\ 12 & -47\end{pmatrix}.$$

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, 5-xossaning teskarisi o‘rinli emas, ya’ni $A^m=\mathrm{O}$ tenglikdan har doim ham $A=\mathrm{O}$ ekanligi kelib chiqmaydi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\neq\mathrm{O}\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\mathrm{O}.$$

Kelgusida matritsani darajaga ko‘tarish amalini ixtiyoriy m butun son uchun umumlashtiramiz.

13-TA’RIF: $B=(b_{ij})$ matritsa $A=(a_{ij})$ matritsaning ***transponirlangani*** deyiladi, agar i va j indekslarning barcha mumkin bo‘lgan qiymatlarida $a_{ij}=b_{ji}$ shart bajarilsa.

A matritsaning transponirlangani A^{T} kabi belgilanadi. Agar A matritsa $m\times n$ tartibli bo‘lsa, uning transponirlangani $A^{\mathrm{T}}n\times m$ tartibli bo‘ladi.Masalan,

$$A_{2\times3}=\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ 3 & 0 & -5\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A^T_{3\times2}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -4 & 0\\ 1 & -5\end{pmatrix}.$$

Matritsani transponirlanganini topish ***transponirlash amali*** deyiladi va u quyidagi xossalarga ega bo‘lishini ko‘rsatish mumkin:

1. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$; 2. $(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}$ (λ– ixtiyoriy haqiqiy son);
3. $(A\pm B)^{\mathrm{T}}= A^{\mathrm{T}}\pm B^{\mathrm{T}}$; 4. $(A\cdot B)^{\mathrm{T}}= B^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}}$.

14-TA’RIF: Agar A kvadrat matritsa uchun $A^{\mathrm{T}}=A$ bo‘lsa, u ***simmetrik matritsa,*** $A^{\mathrm{T}}= -A$ bo‘lganda esa ***kososimmetrik matritsa*** deb ataladi.

Ta’rifdan har qanday simmetrik matritsaning elementlari $a_{ij}= a_{ji}$, kososimmetrik matritsaning elementlari esa $a_{ij}=- a_{ji}$shartni qanoatlantirishi bevosita kelib chiqadi. Bundan kososimmetrik matritsaning barcha diagonal elementlari nolga teng bo‘lishi kelib chiqadi.

Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsalardan *A* simmetrik, *B* kososimmetrik bo‘ladi.

3. Teskari matritsa: Quyida $n\times n$ o‘lchamli matritsani ko‘raylik:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ 0 & 0 \ldots 1 \end{pmatrix}$$

Ixtiyoriy $n\times n$ o‘lchamli $A=\|a_{ij}\|$ matritsa uchun $A\cdot E=E\cdot A=A$ ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas, ya’ni *E* matritsalar uchun birlik vazifasini bajaradi. Shuning uchun *E* ni **birlik matritsa** deb aytiladi.

Determinanti 0 ga teng bo‘lgan quyidagi har qanday $n\times n$ o‘lchamli $A=\|a_{ij}\|$ matritsa **maxsus matritsa** deb ataladi:

$$det\, A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

Aks holda, ya’ni $det\, A\neq 0$ bo‘lsa, *A* matritsa **maxsus bo‘lmagan matritsa** deyiladi.

Masalan, avvalgi paragrafda ko‘rilgan misolga ko‘ra

$$A=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Matritsa maxsus matritsa, chunki

$$det=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}=0$$

<u>**Ta’rif**</u>. Agar $A\cdot B=B\cdot A=E$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, $n\times n$ o‘lchamli kvadrat $B=\|b_{ij}\|$ matritsani maxsus bo‘lmagan $n\times n$ o‘lchamli $A=\|a_{ij}\|$ matritsaga **teskari matritsa** deb ataladi. Teskari matritsa $B=A^{-1}$ko‘rinishda belgilanadi.

Endi teskari matritsani bevosita hisoblash usullarini ko‘ramiz.

Faraz qilaylik, $A=\left\|a_{ij}\right\|$ maxsus bo‘lmagan kvadrat matritsa bo‘lsin. Agar $A_{ij}-a_{ij}$ elementning *det A* dagi algebraik to‘ldiruvchisi bo‘lsa, u holda

$$A^{v}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \ldots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \ldots A_{n2} \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} \ldots A_{nn} \end{pmatrix}$$

***A* ga biriktirilgan matritsa** deb ataladi. Determinantning (3), (4) xossalariga asosan quyidagi kelib chiqadi:

$$A^{v}A=AA^{v}=det\,A\cdot E\text{, bundan } A^{-1}=\frac{1}{det\,A}A^{v}$$

Teskari matritsani hisoblashning bu usuli biriktirilgan **matritsalar usuli** deb ataladi.

Misol 4. Biriktirilgan matritsalar usuli bilan

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matritsani toping.

Yechish.*det A* = - 4. Demak, *A* maxsus bo‘lmagan matritsa ekan. Uning barcha algebraik to‘ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=4,\quad A_{21}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=-8,\quad A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4$$

$$A_{12}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-7,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=9,\quad A_{32}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-5$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-6,\quad A_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=10,\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-6$$

Shuning uchun,

$$A^{v}=\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

va

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}A^{v}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -7/4 & 9/4 & -5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Quyida ko‘riladigan usulimiz elementar almashtirishlar usuli deb ataladi.

Agar $A\, n\times n$ o‘lchamli maxsus bo‘lmagan kvadrat matritsa bo‘lsa, uning uchun o‘lchami $n\times 2n$ bo‘lgan $\Gamma_A=(A|E)$ matritsa tuzib olamiz, ya’ni *A*matritsaga birlik*E* matritsani birlashtirib tuzamiz. Hosil bo‘lgan Γ_A matritsani satrlari ustida elementar almashtirishlar bajarib, uni $(E\setminus B)$ ko‘rinishga keltiramiz. U holda $B=A^{-1}$bo‘ladi.

Misol 5. Elementar almashtirishlar usuli yordamida quyidagi matritsaga teskari matritsani toping:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Yechish. Γ_A matritsani tuzib olamiz:

$$\Gamma_A=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Γ_A matritsaning satrlarini mos ravishda $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$ deb belgilab olib, ular ustida quyidagi almashtirishlarni bajaramiz:

$$\gamma_1'=\frac{1}{3}\gamma_1, \quad \gamma_1''=\gamma_1'-\frac{2}{7}\gamma_2', \quad \gamma_1'''=\gamma_1''-\frac{1}{24}\gamma_3''$$

$$\gamma_2'=\gamma_2-\frac{4}{3}\gamma_1 \quad \gamma_1''=\frac{3}{7}\gamma_2', \quad \gamma_1'''=\gamma_1''-\frac{1}{12}\gamma_3''$$

$$\gamma_3'=\gamma_3-\frac{2}{3}\gamma_1 \quad \gamma_1''=\gamma_3'+\frac{1}{7}\gamma_2' \quad \gamma_3'''=\frac{7}{24}\gamma_3''$$

Natijada ketma-ket quyidagini hosil qilamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 2/3 & -4/5 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 10/4 & -2/3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/7 & 5/7 & -2/7 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & -4/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 24/7 & -6/7 & 1/7 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 2/3 & -4/5 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 10/4 & -2/3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -7/24 & -1/24 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 5/12 & -1/12 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{array}\right)$$

Demak,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 3/4 & -7/24 & -1/24 \\ -1/2 & 5/12 & -1/12 \\ -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{pmatrix}$$

Teskari matritsa quyidagi xossalarga ega:

1^0. $(\alpha A)^{-1}=A^{-1}/\alpha \qquad (\alpha\neq 0)$

2^0. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

3^0. $\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^T\right)^{-1}$

<u>1^0-xossaning isboti.</u> Agar $\alpha\neq 0$ bo‘lsa, $det(\alpha A)=\alpha^n\ det A\neq 0$ bo‘ladi, shuning uchun $\alpha A=\|\alpha a_{ij}\|$ matritsa maxsus emas, demak, $(\alpha A)^{-1}$ mavjud. Agar A_{ij} deb αA matritsaning αa_{ij} elementning algebraik to‘ldiruvchisi, A_{ij} deb esa A matritsaning a_{ij} elementini algebraik

to‘ldiruvchisini belgilasak, u holda $A_{ij}=\alpha^{n-1}A_{ij}$ ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Shu sababli,

$$(\alpha A)^{-1}=\frac{1}{\alpha^n \det A}\left\|A_{ji}\right\|=\frac{1}{\alpha^n \det A}\left\|\alpha^{n-1}A_{ji}\right\|=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\det A}\left\|A_{ji}\right\|=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\det A}A^{v}=\frac{1}{\alpha}A^{-1}$$

<u>2^0-xossaning isboti.</u>Agar $B^{-1}A^{-1}$ ni $A\cdot B$ ga o‘ng tomonidan ko‘paytirilsa

$$AB\cdot B^{-1}A^{-1}=A\left(BB^{-1}\right)A^{-1}=AE\,A^{-1}=AA^{-1}=E$$

Agar chap tomonidan ko‘paytirsak:

$$B^{-1}A^{-1}AB=B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B=B^{-1}E\,B=B^{-1}B=E$$

bo‘ladi. Demak, haqiqatdan $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ ekan.

<u>3^0-xossaning isboti.</u> A^T ni $\left(A^{-1}\right)^T$ ga chap tomonidan ko‘paytiraylik, u holda 2.1 §dagi transponirlangan matritsalarning 3-xossasiga ko‘ra

$$A^T\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^{-1}A\right)^T=E^T=E$$

va A^T ni $\left(A^{-1}\right)^T$ ga o‘ng tomondan ko‘paytirsak quyidagi hosil bo‘ladi:

$$\left(A^{-1}\right)^T A^T=\left(AA^{-1}\right)^T=E^T=E$$

4. Matritsaning rangi. Determinanti 0 ga teng bo‘lgan quyidagi har qanday $n\times n$ o‘lchamli $A=\left\|a_{ij}\right\|$ matritsa **maxsus matritsa** deb ataladi:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

Aks holda, ya’ni $\det A\neq 0$ bo‘lsa, A matritsa **maxsus bo‘lmagan matritsa** deyiladi.

Masalan, avvalgi paragrafda ko‘rilgan misolga ko‘ra

$$A=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Matritsa maxsus matritsa, chunki

$$\det=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}=0$$

<u>**Ta’rif**</u>. Agar $A\cdot B=B\cdot A=E$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, $n\times n$ o‘lchamli kvadrat $B=\left\|b_{ij}\right\|$ matritsani maxsus bo‘lmagan $n\times n$ o‘lchamli $A=\left\|a_{ij}\right\|$ matritsaga **teskari matritsa** deb ataladi. Teskari matritsa $B=A^{-1}$ ko‘rinishda belgilanadi.

Endi teskari matritsani bevosita hisoblash usullarini ko‘ramiz.

Faraz qilaylik, $A=\|a_{ij}\|$ maxsus bo‘lmagan kvadrat matritsa bo‘lsin. Agar $A_{ij}-a_{ij}$ elementning *det A* dagi algebraik to‘ldiruvchisi bo‘lsa, u holda

$$A^{v}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}\dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22}\dots A_{n2} \\ \dots & \dots \quad \dots \\ A_{1n} & A_{2n}\dots A_{nn} \end{pmatrix}$$

***A* ga biriktirilgan matritsa** deb ataladi. Determinantning (3), (4) xossalariga asosan quyidagi kelib chiqadi:

$$A^{v}A=AA^{v}=\det A\cdot E, \text{ bundan } A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{v}$$

Teskari matritsani hisoblashning bu usuli biriktirilgan **matritsalar usuli** deb ataladi.

Misol 4. Biriktirilgan matritsalar usuli bilan

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matritsani toping.

Yechish.*det A* = - 4. Demak, *A* maxsus bo‘lmagan matritsa ekan. Uning barcha algebraik to‘ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=4, \quad A_{21}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=-8, \quad A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4$$

$$A_{12}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-7, \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=9, \quad A_{32}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-5$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-6, \quad A_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=10, \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-6$$

Shuning uchun,

$$A^{v}=\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

va

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}A^{v}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -7/4 & 9/4 & -5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Quyida ko‘riladigan usulimiz elementar almashtirishlar usuli deb ataladi.

Agar $A\, n\times n$ o‘lchamli maxsus bo‘lmagan kvadrat matritsa bo‘lsa, uning uchun o‘lchami $n\times 2n$ bo‘lgan $\Gamma_A=(A|E)$ matritsa tuzib olamiz, ya’ni *A*matritsaga birlik*E* matritsani birlashtirib tuzamiz. Hosil bo‘lgan Γ_A matritsani satrlari ustida elementar almashtirishlar bajarib, uni $(E\setminus B)$ ko‘rinishga keltiramiz. U holda $B=A^{-1}$bo‘ladi.

Misol 5. Elementar almashtirishlar usuli yordamida quyidagi matritsaga teskari matritsani toping:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Tayanch iboralar.

Matritsa — m ta satr va n ta ustunga ega bo‘lgan jadval;
Kvadrat matritsa — satr va ustunlari soni teng bo‘lgan jadval;
Transponirlangan matritsa — matritsaning satrlarini ustun, ustunlarini esa satr qilib yozish natijasida hosil qilingan matritsa;
Maxsus matritsa — determinanti nolga teng bo‘lgan matritsa;
Maxsus bo‘lmagan matritsa — determinanti nolga teng bo‘lmagan matritsa.
Matritsaning rangi — noldan farqli minorlarning eng yuqori tartibi;
Matritsaning rangini hisoblash — 1) O‘rab turuvchi minorlar usuli;
2) Elementar almashtirishlar usuli;
$\boldsymbol{R^n}$ **fazoning rangi** — fazoning o‘lchamini bildiradi.

Takrorlash uchun savollar

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Matritsaning tartibi qanday aniqlanadi?
3. Matritsaning elementi deb nimaga aytiladi?
4. Matritsalar qanday turlarga ajratiladi?
5. Qachon ikkita matritsa teng deyiladi?
6. Matritsaning qanday elementi diagonal deyiladi?
7. Birlik matritsa qanday ta’riflanadi?
8. Qachon matritsa nol matritsa deyiladi?
9. Matritsani songa ko‘paytirish qanday aniqlanadi?
10. Qaysi shartda matritsalarni qo‘shish yoki ayirish mumkin?
11. Matritsalar yig‘indisi yoki ayirmasi qanday topiladi?
12. Matritsalarni qo‘shish amali qanday qonunlarga bo‘ysunadi?
13. Matritsalarni qo‘shish amali qanday xossalarga ega?
14. Qaysi shartda matritsalarni ko‘paytirish mumkin?
15. Ko‘paytma matritsa tartibi qanday topiladi?
16. Matritsalarning ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?
17. Matritsalarni ko‘paytirish amali qanday qonunlarga bo‘ysunadi?
18. Matritsalarni ko‘paytirish amali qanday xossalarga ega?
19. Matritsaning natural darajasi qanday aniqlanadi?
20. Matritsani darajaga ko‘tarish amali qanday xossalarga ega?
21. Matritsalarni transponirlash nima?
22. Matritsalarni transponirlash amali qanday xossalarga ega?
23. Qachon matritsa simmetrik deyiladi?
24. Qanday shartda matritsa kososimmetrik deb ataladi?
25. Matritsaning iqtisodiy tatbig‘iga misol keltiring.

Testlardan namunalar

1. Matritsa mazmuni qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?
A) sonlar yig‘indisi; B) sonlar ko‘paytmasi;
C) sonlar to‘plami; D) sonlar jadvali;
E) sonlar birlashmasi.

2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ matritsaning tartibini aniqlang.

A) 2×2; B) 2×3; C) 3×2; D) 3×3; E) 2×3=6.

3. Elementlari a_{ij} bo‘lgan matritsa qachon nol matritsa deyiladi?

A) Barcha a_{ij}elementlarning yig‘indisi nolga teng bo‘lsa;

B) Barcha a_{ij}elementlari nolga teng bo‘lsa;

C) Barcha a_{ij}elementlarning ko‘paytmasi nolga teng bo‘lsa;

D) Biror satridagi barcha a_{ij}elementlar nolga teng bo‘lsa;

E) Biror ustundagi barcha a_{ij}elementlar nolga teng bo‘lsa.

4. Quyidagi matritsalarning qaysi biri nol matritsa bo‘lmaydi?

$$A)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};\quad B)\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix};\quad C)\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix};\quad D)\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};$$

E) Keltirilgan barcha matritsalar nol matritsa bo‘ladi.

5. Elementlari a_{ij}bo‘lgan kvadrat matritsa qachon birlik matritsa deyiladi?

A) Barcha a_{ij}elementlar birga teng bo‘lsa;

B) a_{ii}=1 va a_{ij} =0 ($i\neq j$) bo‘lsa;

C) Barcha a_{ii}diagonalelementlar birga teng bo‘lsa;

D) Biror satrdagi barcha a_{ij}elementlar birga teng bo‘lsa;

E) Biror ustundagi barcha a_{ij}elementlar birga teng bo‘lsa.

6. Birlik matritsani ko‘rsating.

A) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; E) $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

7. Birlik matritsani ko‘rsating.

A) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

D) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$; E) bu yerda birlik matritsa yo‘q .

8. Qaysi shartda A_{mn} va B_{pq} matritsalarni ko‘paytirish mumkin?

A) m=p; B) m=q; C) n=p; D) n=q; E) mq=np.

9. Quyidagi *A* va *B* matritsalar ustida qanday amallar bajarish mumkin?

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$$

A) $A-B$; B) $A\cdot B$; C) $B\cdot A$; D) $B-A$; E) $A+B$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. A va B matritsalar bo‘yicha (n+2)A, (1–n)B,A+B, A–B va nA+(n–3)B matritsalarni toping:

$$A=\begin{pmatrix}n & 1-n & n+1\\ 2n+1 & n & 2n-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2n & n+3 & n-2\\ n+1 & n-4 & 1-2n\end{pmatrix}.$$

2. Berilgan A va B matritsalar bo‘yicha A·B va B·A matritsalarni toping hamda A·B=B·A yoki A·B≠B·A ekanligini aniqlang :

$$A=\begin{pmatrix}n & n+1 & n-1\\ 1 & 2 & 3\\ 2n & 2n-3 & n+5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2n & 2n+1 & n\\ n-1 & n & n+1\end{pmatrix}.$$

3-mavzu. Chiziqli tenglamalar sistemasi va uni yechish uslullari. Kronekker-Kapelli teoremasi. Chiziqli algebraik tenglamalarni yechishda dasturlar majmuasidan foydalanish.

REJA:

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi va ularning yechimi. Kroneker-Kapelli teoremasi.
2. Matritsalar usuli.
3. Kramer (determinantlar) usuli.
4. Gauss (noma'lumlarni yo'qotish) usuli.
5. Chiziqli tenglamalar sistemasini Jordan-Gauss usuli bilan yechish

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi va ularning yechimi. Koʻpgina amaliy, jumladan iqtisodiy, masalalar chiziqli tenglamalar sistemasi tushunchasiga olib keladi.

1-TA'RIF:n noma'lumli m ta ***chiziqli tenglamalar sistemasi*** deb quyidagi koʻrinishdagi sistemaga aytiladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Bu yerda a_{ij} vab_i (i=1,2, …, m; j=1,2, …, n) –berilgan va ixtiyoriy oʻzgarmas sonlar boʻlib, a_{ij} sonlari (1) sistemaning ***koeffitsiyentlari***, b_i esa ***ozod hadlari*** deyiladi. Bu sistemada x_j (j=1, 2, … , n) noma'lumlar boʻlib, ularning qiymatlarini topish talab etiladi.

Yigʻindi belgisi yordamida (1) sistemani qisqacha quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\ , \quad i = 1, 2, \cdots, m\ . \qquad (2)$$

Endi (1) yoki (2) chiziqli tenglamalar sistemasining a_{ij}koeffitsiyentlaridan tuzilgan toʻrtburchakli A matritsani , $x_j$noma'lumlar va $b_i$ozod hadlardan hosil qilingan X va B ustun matritsalarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Unda, matritsalarni koʻpaytirish amalidan foydalanib, (1) sistemani ixcham va qulay boʻlgan quyidagi matritsaviy koʻrinishda yozish mumkin:

$AX=B$. (4)

2-TA'RIF: (1) yoki (2) chiziqli tenglamalar sistemaning ***yechimi*** deb shunday $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, …, $x_n=\alpha_n$ sonlarga aytiladiki, ular tenglamalar sistemasiga qoʻyilganda har bir tenglama qanoatlantiriladi, ya'ni toʻgri tenglikka aylanadi.

Sistemaning yechimlari

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}^T$$

ustun matritsa ko‘rinishda yozilsa, u (4) matritsaviy tenglamani to‘gri tenglikka aylantiradi. Bunda *n*-ta sondan tuzilgan *X* ustun matritsa sistemaning bitta yechimi bo‘lib hisoblanadi.

Masalan,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 32 \end{cases} \qquad (5)$$

n=3 noma’lumli m=2 ta tenglamalar sistemasi uchun x_1=1, x_2= –2 vax_3=5 yoki

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}^T$$

ustun matritsani tashkil etgan sonlar yechim bo‘ladi. Haqiqatan ham bu sonlarni berilgan (5) sistema tenglamalariga qo‘ysak,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3\cdot 1 + 2\cdot(-2) - 5 \equiv -6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 2\cdot 1 - 5\cdot(-2) + 4\cdot 5 \equiv 32 \end{cases}$$

to‘gri tengliklarga ega bo‘lamiz.

Sistemaning yechimini mavjudligini tekshirish va, yechim mavjud bo‘lgan taqdirda, uni topish ***sistemani yechish*** deb ataladi.Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda uch hol bo‘lishi mumkin.

1-hol. Sistema yechimga ega va bu yechim yagona. Masalan,

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -14 \\ 2x_1 - 3x_2 = 19 \end{cases}$$

sistema uchun x_1=2 va x_2= –5 yagona yechim bo‘ladi.

2-hol. Sistema yechimga ega va bu yechim bittadan ortiq. Masalan, yuqoridagi (5) sistema uchun ko‘rsatilgan yechimdan tashqari x_1= –5, x_2=26 vax_3=43 ham yechim bo‘lishini bevosita tekshirish mumkin.

3-hol. Sistema yechimga ega emas. Masalan,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

sistema yechimga ega emas, chunki yig‘indisi bir paytning o‘zida ham 1, ham 0 bo‘ladigan sonlar mavjud emas.

3-TA’RIF: Agar chiziqli tenglamalar sistemasi hech bo‘lmaganda bitta yechimga ega bo‘lsa, u holda bu sistema ***birgalikda*** deyiladi; agar yechimga ega bo‘lmasa sistema ***birgalikda emas*** deyiladi. Birgalikdagi tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo‘lsa, u ***aniq*** deyiladi; bittadan ortiq yechimga ega bo‘lsa, u ***aniqmas*** tenglamalar sistemasi deyiladi.

Berilgan (1) tenglamalar sistemasini birgalikda yoki birgalikda emasligini aniqlash uchun uning koeffitsiyentlaridan tuzilgan (3) $m\times n$ tartibli *A* matritsaga *B* ozod hadlar ustunini birlashtirishdan hosil bo‘lgan $m\times(n+1)$ tartibli

$$A^b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad (6)$$

matritsani qaraymiz .

4-TA’RIF: A^b matritsa *A* matritsaning ***kengaytirilgani*** deb ataladi.

KRONEKER-KAPELLI TEOREMASI: (1) chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo‘lishi uchun uning matritsasi *A* va kengaytirilgan matritsa A^b ranglari o‘zaro teng, ya’ni r(A)=r(A^b)=r shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Bu teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Birgalikda bo‘lgan chiziqli tenglamalar sistemasi uchun quyidagi tasdiqlar o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatish mumkin:

1. Agar birgalikdagi (1) sistema matritsasining rangi r(A) va unga kiruvchi noma’lumlar soni n o‘zaro teng, ya’ni r(A)=n bo‘lsa, unda bu sistema yagona yechimga ega, ya’ni aniq bo‘ladi.
2. Agar birgalikdagi (1) sistema matritsasining rangi r(A)<n bo‘lsa, bu sistema cheksiz ko‘p yechimga ega , ya’ni aniqmas bo‘ladi.

Kroniker-Kapelli teoremasi va yuqorida keltirilgan tasdiqlar (1) sistema yechimini mavjud yoki mavjud emasligi, ularning soni haqida xulosa chiqarishga imkon beradi, ammo sistemaning yechimini topish yo‘lini ko‘rsatmaydi. Shu sababli endi chiziqli tenglamalar sistemasini yechish masalasiga o‘tamiz.

Dastlab (1) sistemada $m=n$, ya’ni noma’lumlar va tenglamalar soni o‘zaro teng hamda r(A)=n bo‘lgan holni ko‘ramiz. Bu shartlarda ko‘rilayotgan sistema yagona yechimga ega bo‘lib, uni yechishning turli usullari mavjud.

2. Matritsalar usuli. Bu usulda sistemaning matritsaviy ko‘rinishda yozilgan (4) ifodasidan foydalaniladi. Bunda r(A)=n shartdan sistemaning n – tartibli A kvadrat matritsasi maxsusmas ekanligi kelib chiqadi, chunki matritsa rangi ta’rifiga asosan $\Delta=|A|\neq 0$ bo‘ladi. Bu holda A matritsaga teskari matritsa A^{-1} mavjud va (4) matritsaviy tenglamaning ikkala tomonini unga chap tomondan ko‘paytirish mumkin. Natijada, teskari matritsa ta’rifi va birlik matritsa xossasidan foydalanib, ushbu formulani hosil etamiz:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B. \qquad (7)$$

(4) matritsaviy ko‘rinishdagi n noma’lumli chiziqli n ta tenglamalar sistemasi yechimini ifodalovchi (7) formula bir noma’lumli $ax=b$ ($a\neq 0$) chiziqli tenglamaning yechimini determinant $x=b/a=a^{-1}b$ formulaga o‘xshash ekanligini ta’kidlab o‘tamiz.

Misol: Ushbu tenglamalar sistemasini matritsa usulida yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Yechish: Dastlab sistemaning A matritsasini yozib, uning determinantini hisoblaymiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 43 \neq 0 .$$

Demak A matritsa maxsusmas, unga teskari matritsa mavjud va uni §3 dagi (3) formulaga asosan topamiz:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ 10 & -16 & 17 \end{pmatrix}.$$

Endi (7) formula bo‘yicha noma’lumlardan tuzilgan X ustun matritsani aniqlaymiz:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ 10 & -16 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} 43 \\ -86 \\ 129 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Demak, sistemaning yagona yechimi $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$ bo‘ladi.

Shunday qilib matritsalar usuli har qanday n noma’lumli n ta tenglamali aniq sistema yechimini oddiy va ixcham ko‘rinishdagi (7) formula bilan ifodalash imkonini beradi. Bu formula nazariy tadqiqotlar uchun qulaydir, ammo n oshib borishi bilan uning amaliy tatbig‘i murakkablashib boradi. Bunga sabab shuki, bu holda A^{-1}teskari matritsani topish uchun yuqori tartibli determinantlarni hisoblashga to‘g‘ri keladi.

3. Kramer (determinantlar) usuli. Matritsaviy ko‘rinishda (7) formula bilan ifodalanuvchi (1) sistema ($m=n$) yechimini teskari matritsa formulasidan foydalanib quyidagicha yozamiz:

$$X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_k\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=A^{-1}B=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{i1} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{i2} & \cdots & A_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1k} & A_{2k} & \cdots & A_{ik} & \cdots & A_{nk}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{in} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_k\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1}\\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ b_1A_{1k}+b_2A_{2k}+\cdots+b_nA_{nk}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_nA_{nn}\end{pmatrix}.$$

Bu yerdan sistemaning x_k (k=1, 2, …, n) yechimi uchun ushbu formulalar kelib chiqadi:

$$x_k=\frac{1}{\Delta}(b_1A_{1k}+b_2A_{2k}+\cdots+b_nA_{nk})=\frac{1}{\Delta}\Delta_k=\frac{\Delta_k}{\Delta},\quad k=1,2,\cdots,n\,. \qquad (8)$$

Bunda determinantning 11-xossasidan foydalanib, k=1, 2, …, n, uchun ushbu

$$b_1A_{1k}+b_2A_{2k}+\cdots+b_nA_{nk}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{ik-1} & b_i & a_{ik+1} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\equiv\Delta_k$$

tengliklar o‘rinli bo‘lishidan foydalandik. (8) formulalarda (1) sistemaning a_{ij} koeffitsiyentlaridan tuzilgan

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{vmatrix}$$

determinant sistemaning ***asosiy determinanti,*** uning k-ustunini ozod hadlar ustuni B bilan almashtirishdan hosil bo‘lgan Δ_k (k=1, 2, …, n) determinantlar esa ***yordamchi determinantlar*** deyiladi.

<u>5-TA’RIF:</u> (1) chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini asosiy va yordamchi determinantlar orqali ifodalovchi (8) tengliklar ***Kramer formulalari*** deb ataladi.

Kramer usulining afzalligi shundan iboratki, u orqali sistemaning ma’lum bir noma'lumlarini ham (masalan, faqat x_1 va x_2 noma'lumlarni) topish mumkin. Ammo bu usul ham n katta bo'lganda yuqori tartibli determinantlarni hisoblashni taqozo etadi va shu sababli uni amalda qo'llash katta qiyinchiliklar bilan bog'liq.

Kramer formulalarini n=2 hol uchun yozamiz. Bunda (1) chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

asosiy va yordamchi determinantlar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

va Kramer formulalari

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Shunga o'xshash n=3 bo'lganda sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases},$$

asosiy va yordamchi determinantlar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

va Kramer formulalari

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Misol: Ushbu uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Yechish: Asosiy va yordamchi determinantlarni hosil etamiz va hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 18, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7 .$$

Kramer formulalariga asosan sistema yechimini topamiz:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{5}{18}, \quad x_{21} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{18}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{31}}{\Delta} = \frac{7}{18}.$$

Shuni yana bir marta ta’kidlab o‘tamizki, (1) sistema $n=m$ holda yagona yechimga ega, ya’ni birgalikda va aniq bo‘lishi uchun uning asosiy determinanti $\Delta\neq0$ bo‘lishi kerak va bunda yechim matritsalar usulida (7), Kramer usulida esa (8) formulalar bilan topiladi.

Ko‘rsatish mumkinki, agar $n=m$ holda (1) sistemaning asosiy determinanti $\Delta=0$ bo‘lsa, unda quyidagi ikki hol bo‘ladi:

1) Barcha yordamchi determinantlar $\Delta_k=0$ ($k=1, 2, \ldots, n$) bo‘lsa, unda (1) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega, ya'ni birgalikda va aniqmas bo‘ladi.

2) Agar yordamchi Δ_k ($k=1, 2, \ldots, n$) determinantlardan kamida bittasi noldan farqli bo‘lsa, unda (1) sistema yechimga ega emas, ya’ni birgalikda bo‘lmaydi.

Masalan,

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 4 \\ 6x_1 - 10x_2 = 8 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 4 \\ 6x_1 - 10x_2 = 12 \end{cases}$$

sistemalarning birinchisi uchun $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=0$ va u $x_1=c$, $x_2=(3c-4)/5$ ko‘rinishdagi cheksiz ko‘p yechimga ega. Ikkinchi sistema uchun esa $\Delta=0$, ammo $\Delta_1=20\neq0$ bo‘lgani uchun u yechimga ega emas. Haqiqatan ham sistemaning II tenglamasidan $3x_1-5x_2=6$ ekanligi kelib chiqadi va u sistemaning I tenglamasiga ziddir.

4. Gauss (noma’lumlarni yo‘qotish) usuli. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar yoki Kramer usulida yechishda bevosita berilgan (1) sistemaning o‘zi bilan ish ko‘riladi. Endi qaralayotgan Gauss usulida esa berilgan (1) sistema boshqa bir sistemaga keltiriladi shu sababli bizga quyidagi tushuncha kerak bo‘ladi.

6-TA’RIF: Agar ikkita chiziqli tenglamalar sistemalarining yechimlar to‘plami o‘zaro teng bo‘lsa, ular ***ekvivalent (teng kuchli) sistemalar*** deyiladi.

Masalan,

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = -23 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

sistemalar ekvivalent , chunki ular bir xil $x_1=-2$, $x_2=5$ yechimga ega.

1-TEOREMA: Agar (1) sistemaning ikkita tenglamalari o‘rni o‘zaro almashtirilsa yoki ulardan biri ixtiyoriy λ songa ko‘paytirilib boshqa bir tenglamasiga qo‘shilsa, natijada berilgan sistemaga ekvivalent sistema hosil bo‘ladi.

Masalan,

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -3 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalarini o‘rnini almashtirish va hosil bo‘lgan sistemaning birinchi tenglamasini $\lambda=-2$ songa ko‘paytirib, uchinchi tenglamasiga qo‘shish natijasida hosil bo‘lgan quyidagi sistema berilgan sistemaga ekvivalent bo‘ladi:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -11x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

Haqiqatan ham bu sistemalarni Kramer yoki matritsalar usulida yechib, ularning ikkalasini ham bir xil

$$x_1 = -\frac{11}{63}, \quad x_2 = \frac{25}{63}, \quad x_3 = -\frac{10}{63}$$

yechimga ega ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Endi birgalikda va aniq bo‘lgan quyidagi n noma’lumli n ta chiziqli tenlamalar sistemasini Gauss usulida yechishga o‘tamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \cdots a_{kn}x_n = b_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (9)$$

1-qadam. (9) sistemada $a_{11}\neq 0$ deb olish mumkin, chunki bu shart bajarilmagan bo‘lsa , (9) sistemadagi tenglamalar o‘rnini almashtirish orqali unga erishish mumkin. Sistemaning 1-tenglamasini ikkala tomonini $-a_{k1}/\ a_{11}$ songa ko‘paytirib, uning k-tenglamasiga (k=2, 3, …, n) qo‘shamiz. Natijada hosil bo‘ladigan ekvivalent sistemaning k-tenglamasida noma’lum x_1 qatnashmaydi va u quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad a_{k2}^{(1)}x_2 + a_{k3}^{(1)}x_3 + \cdots a_{kn}^{(1)}x_n = b_k^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \cdots a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases} \qquad (9^{(1)})$$

2-qadam. Hosil bo‘lgan $(9^{(1)})$ sistemada yuqoridagi singari yana $a_{22}^{(1)} \neq 0$ deb olish mumkin. Bu sistemaning 2-tenglamasini ikkala tomonini $-a_{k2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ songa ko‘paytirib, uning k-tenglamasiga (k=3,4, …, n) qo‘shamiz. Natijada hosil bo‘ladigan ekvivalent sistemaning k-tenglamasida noma’lum x_2 qatnashmaydi va u quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \qquad\qquad a_{43}^{(2)}x_3 + \cdots a_{4n}^{(2)}x_n = b_4^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \cdots a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases} \qquad (9^{(2)})$$

***n*-qadam.** Yuqoridagi jarayonni ketma-ket n–1 marta takrorlab, quyidagi ko‘rinishdagi ekvivalent sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \qquad\qquad\quad a_{44}^{(3)}x_4 + \cdots a_{4n}^{(3)}x_n = b_4^{(3)} \\ \qquad\qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases} \qquad (9^{(n-1)})$$

Bu ***Gauss usulining to‘g‘ri yo‘li*** , uning natijasida hosil bo‘lgan $(9^{(n-1)})$ sistema ***uchburchakli***deyiladi.

Endi $(9^{(n-1)})$ sistemaning oxirgi tenglamasidan x_n noma’lumning qiymati topamiz. So‘ngra x_n qiymati $(9^{(n-1)})$ yoki $(9^{(n-2)})$ sistemaning oxirgidan oldingi tenglamasiga qo‘yib, undan x_{n-1} noma’lumning qiymati aniqlaymiz. Shunday tarzda davom etib, birin-ketin x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, …, x_2, x_1 noma’lumlar qiymatlarini topamiz. Bu jarayon ***Gauss usulining teskari yo‘li*** deyiladi.

Gauss usulining matritsalar va Kramer usullaridan afzalliklari quyidagilardan iborat:

- Bu usul yuqori tartibli determinantlarni hisoblashni talab etmaydi va faqat arifmetik amallar orqali bajariladi;
- Bu usulni deyarli yuqorida ko‘rsatilgan ko‘rinishda amalga oshirib, ixtiyoriy chiziqli tenglamalar sistemasini, jumladan noaniq sistemalarni ham yechish mumkin;
- Bu usul sodda hisoblash algoritmiga ega bo‘lib, uni kompyuterda amalga oshirish oson.

Misol: Ushbu sistemani Gauss usulida yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Yechish: Bu sistemadan noma’lumlarni birin-ketin yo‘qotamiz.

1-qadam. Sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalardan x_1 noma’lumni yo‘qotamiz. Kasr sonlarga kelmaslik va bu orqali hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida buni quyidagicha amalga oshiramiz. Dastlab 1-tenglamani ikkala tomonini –3 soniga, 2-tenglamani esa 2 soniga ko‘paytirib, ularni o‘zaro qo‘shamiz. So‘ngra 1-tenglamani ikkala tomonini –2 soniga ko‘paytirib, hosil bo‘lgan tenglamani 3-tenglamaga qo‘shamiz. Natijada quyidagi ekvivalent sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ \quad 17x_2 - 16x_3 = -82 \\ \quad 8x_2 - 5x_3 = -31 \end{cases} .$$

2-qadam. Oldingi qadamda hosil qilingan sistemaning 2-tenglamasini –8 soniga, 3-tenglamasini 17 soniga ko‘paytirib o‘zaro qo‘shamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ \quad 17x_2 - 16x_3 = -82 \\ \qquad\qquad 43x_3 = 129 \end{cases}$$

Dastlab bu uchburchakli sistemaning 3- tenglamasidan $x_3=3$ ekanligini topamiz.

So‘ngra bu natijani sistemaning 2- tenglamasiga qo‘yib, undan $x_2 = -2$ ekanligini aniqlaymiz. Yakuniy qadamda $x_2 = -2$ va $x_3 = 3$ natijalarni sistemaning 1- tenglamasiga qo‘yib, undan $x_1 =1$ ekanligini topamiz. Demak berilgan sistemaning yagona yechimi $x_1 =1$, $x_2 = -2$ va $x_3 =3$ ekan.

5. CHiziqli tenglamalar sistemasini Jordan-Gauss usuli bilan yechish.

CHiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usulida echishda tekshiruv ustuniga ega bo‘lgan matritsa usuli ko‘rildiki, natijada berilgan tenglamalar sistemasi uchburchak ko‘rinishiga keltirildi. Keyingi bayon uchun Jordan –Gaussning takomillashgan usuli bilan tanishish muhim ahamiyatga ega, bunda noma’lumlarning qiymatlari to‘g‘ridan–to‘g‘ri topiladi.

Bizga quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Bu sistemaning A matritsasidan 0 dan farqli a_{qp} elementini tanlaymiz. Bu element hal qiluvchi element deb ataladi. A matritsaning n-nchi ustuni hal qiluvchi ustun deb, q-nchi qatori hal qiluvchi qator deb ataladi.

Yangi tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \qquad (2)$$

Bu sistemaning matritsasi A'. Bu sistemaning koeffetsientlari va ozod hadlari quyidagi formulalardan aniqlanadi:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ip}a_{qj}}{a_{qp}}$$

agari $\neq$ q.

$$b'_i = b_i - \frac{a_{ip}b_q}{a_{qp}}$$

Xususan, agar i≠q bo‘lsa $a_{ip} = 0$ bo‘ladi. Agarda i=q bo‘lsa u holda $a'_{qj} = a_{qj}, b'_q = b_q$ deb qabul qilamiz. SHunday qilib (1) va (2) sistemalardagi q-nchi tenglamalar bir hil bo‘lib, (2) sistemaning q-nchi tenglamasidan boshqa barcha tenglamalaridagi x_p oldidagi koeffetsientlari 0 ga teng. SHuni ko‘zda tutish lozimki, (1) va (2) sistemalar bir vaqtda yoki birgalikda, yoki birgalikda emas.Ular birgalikda bo‘lgan holda teng kuchli sistemalardir (ularning echimlari ustma-ust tushadi).

A' matritsaning a_{ij} elementini aniqlashda «to‘rtburchak usuli» ni ko‘zda tutish foydalidir.

A matritsaning 4 elementini qaraymiz: a_{ij} (almashtirishga tanlangan element), a_{qp} (hal qiluvchi element) va a_{ip}, a_{qj} elementlar. a'_{ij} elementni topish uchun to‘rtburchakning qarama-qarshi uchlaridagi a_{ip} va a_{qj} elementlar ko‘paytmasini a_{qp} elementga bo‘lib a_{ij} elementdan ayiramiz:

$$\begin{matrix} a_{ij} & \dots\dots\dots\dots\dots & a_{ip} \\ & & . \\ & \dots\dots\dots\dots\dots & \\ & & . \\ a_{qj} & \dots\dots\dots\dots\dots & a_{qp} \end{matrix}$$

Xuddi shu tariqa (2) sistemani ham almashtirish mumkin, bunda A' matritsaning hal qiluvchi elementi sifatida $a'_{sr} \neq 0$ elementini qabul qilamiz (s≠q,r≠p). Bu almashtirishdan so‘ng x_p lar oldidagi barcha koeffitsientlar 0 ga teng bo‘ladi. Hosil bo‘lgan sistema yana almashtirilishi mumkin va hakozo. Agar r=n (sistemaning rangi noma’lumlar soniga teng) bo‘lsa, u holda bir qator almashtirishlardan so‘ng quyidagi tenglamalar sistemasiga kelamiz:

$$k_1x_1 = l_1,$$
$$k_2x_2 = l_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$k_nx_n = l_n,$$

va bu tengliklardan noma’lumlarning qiymatlarini topamiz. Noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotishga asoslangan bu echish usuli Jordan-Gauss usuli deb ataladi.

1- misol. Quyidagi tenglamalar sistemasini Jordan-Gauss usuli bilan eching:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 5x_5 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 - 4x_3 - x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 3 \\ 2x_1 + 9x_2 + 9x_4 + 3x_5 - 12x_6 = 7 \end{cases}$$

Yechish. Bu sistemaning kengaytirilgan matritsasini tuzamiz

$$am = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & -4 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 0 & 9 & 3 & -12 & 7 \end{pmatrix}$$

1-satrnining elementlarini - 3 ga ko‘paytirib 2- satrning mos elementlariga qo‘shamiz:

$$am = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 5 & -1 & -12 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 9 & 3 & -12 & 7 \end{pmatrix}$$

1-satrnining elementlarini - 2 ga ko‘paytirib 3- satrning mos elementlariga qo‘shamiz:

$$am = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 5 & -1 & -12 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 9 & -7 & -12 & 5 \end{pmatrix}$$

3-satrnining elementlarini - 1 ga ko‘paytirib, 2-satr bilan o‘rnini almashtiramiz:

$$am = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & -9 & 7 & 12 & -5 \\ 0 & -8 & 5 & -1 & -12 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

elementlarini 8 ga ko‘paytirib 3- satrning mos elementlariga qo‘shamiz:

Bundan ko‘rinib turibdiki, x_1,x_2 va x_3 lar bazis noma’lumlar, x_4,x_5 va $x_6$lar esa ozod noma’lumlar bo‘ladi. Sistema cheksiz ko‘p echimga ega.

$$am = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & -9 & 7 & 12 & -5 \\ 0 & 0 & -43 & -73 & 44 & 98 & -40 \end{pmatrix}$$

3- satrning elementlarini -43 ga bo‘lamiz:

3-satrnining elementlarini 6 ga ko‘paytirib 2- satrning mos elementlariga qo‘shamiz:

$$am = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{51}{43} & \frac{37}{43} & \frac{-72}{43} & \frac{25}{43} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{73}{43} & \frac{-44}{43} & \frac{-98}{43} & \frac{40}{43} \end{pmatrix}$$

3-satrnining elementlarini 3 ga ko‘paytirib 1- satrning mos elementlariga qo‘shamiz:

$$am = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & \frac{219}{43} & \frac{83}{43} & \frac{-294}{43} & \frac{163}{43} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{51}{43} & \frac{37}{43} & \frac{-72}{43} & \frac{25}{43} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{73}{43} & \frac{-44}{43} & \frac{-98}{43} & \frac{40}{43} \end{pmatrix}$$

2-satrnining elementlarini -5 ga ko‘paytirib 1- satrning mos elementlariga qo‘shamiz:

$$am = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{36}{43} & -\frac{102}{43} & \frac{66}{43} & \frac{38}{43} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{51}{43} & \frac{37}{43} & \frac{-72}{43} & \frac{25}{43} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{73}{43} & \frac{-44}{43} & \frac{-98}{43} & \frac{40}{43} \end{pmatrix}$$

Tayanch iboralar.

Trivial yechim — $x = 0$ yechim;

Fundamental yechimlar sistemasi — kanonik bazisdagi unga mos keluvchi $E_1,\ E_2,...,E_{n-r}$ vektorlar sistemasi;

Birgalikdagi CHTS — yechimga ega bo‘lgan sistema;

Birgalikda bo‘lmagan CHTS — yechimga ega bo‘lmagan sistema;

Ekvivalent CHTS — ikkinchi sistemaning yechimlari to‘plami bir xil bo‘lgan sistema;

Kramer formulalari — CHTS ni determinantlar yordamida yechish;

Matritsalar usuli — CHTSni matritsalar yordamida yechish.

Trivial yechim — $x = 0$ yechim;

Fundamental yechimlar sistemasi — kanonik bazisdagi unga mos keluvchi $E_1,\ E_2,...,E_{n-r}$ vektorlar sistemasi.

<u>Takrorlash uchun savollar</u>

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
2. Sistemaning koeffitsiyentlari, noma’lumlari va ozod hadlari deb nimaga aytiladi?
3. Sistemaning yechimlari qanday ta’riflanadi?
4. Qachon sistema birgalikda yoki birgalikda emas deyiladi?
5. Qachon sistema aniq va qachon aniqmas deyiladi?
6. Kroniker-Kapelli teoremasi nimani ifodalaydi?
7. Qaysi shartda chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega?
8. Qaysi shartda chiziqli tenglamalar sistemasi cheksiz ko‘p yechimga ega?

9. Chiziqli tenglamalar sistemasi matritsa ko‘rinishda qanday yoziladi?
10. Sistema matritsa usulida qanday yechiladi?
11. Matritsalar usulining qanday qulayliklari va kamchiliklari bor?
12. Sistemani Kramer usulida yechishning mohiyati nimadan iborat?
13. Sistemaning asosiy determinanti deb nimaga aytiladi?
14. Sistemaning yordamchi determinantlari qanday hosil qilinadi?
15. Sistema yechimi uchun Kramer formulalari qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
16. Qachon tenglamalar sistemasi ekvivalent deyiladi?
17. Gauss usulining mohiyati nimadan iborat?
18. Gauss usulining to‘g‘ri yolida nimaga erishiladi?
19. Gauss usulining teskari yolida nimaga erishiladi?
20. Sistemaning asosiy o‘zgaruvchilari deb nimaga aytiladi?
21. Sistemaning erkli o‘zgaruvchilari deb nimaga aytiladi?
22. Qanday yechim bazis yechim deb ataladi?

Testlardan namunalar

1. Quyidagi sistemalardan qaysi biri chiziqli tenglamalar sistemasini ifodalaydi?

A) $\begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 = b_1 \\ a_{21}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = b_2 \end{cases}$; B) $\begin{cases} \dfrac{a_{11}}{x_1} + \dfrac{a_{12}}{x_2} = b_1 \\ \dfrac{a_{21}}{x_1} + \dfrac{a_{22}}{x_2} = b_2 \end{cases}$; C) $\begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$;

D) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = b_2 \end{cases}$; E) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$;

2. Ushbu chiziqli tenglamalar sistemasi koeffitsiyentlarining yig‘indisini toping:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

A) 10 ; B) 0; C) 5 ; D) 15; E) to‘g‘ri javob yo‘q.

3. Ta’rifni to‘ldiring: α, β va γ sonlarga uch noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi deyiladi, agarda ular sistemaning …… tenglamalarini ayniyatga aylantirsa.
A) birinchi; B) ikkinchi; C) birorta; D) kamida bitta; E) uchala.

4. Qachon chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda deb ataladi?
A) yechimga ega bo‘lmasa; B) kamida bitta yechimga ega bo‘lsa;
C) yagona yechimga ega bo‘lsa; D) cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lsa;
E) keltirilgan barcha hollarda.

5. Tenglamalar sistemasini yeching va $x_1^2 + x_2^2$ ifodaning qiymatini aniqlang:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$$

A) 5; B)1; C) 4; D) 2; E) 3.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Ushbu ikki noma’lumli tenglamalar sistemasini matritsalar usulida yeching:

$$\begin{cases} nx_1 + (n+1)x_2 = n+2 \\ (n-1)x_1 + (n+3)x_2 = n-2 \end{cases}.$$

2. Ushbu uch noma’lumli tenglamalar sistemasini Kramer (determinantlar) usulida yeching:

$$\begin{cases} nx_1 + (n+1)x_2 + (n+2)x_3 = 1 \\ (n-2)x_1 + (n-1)x_2 + nx_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = n \end{cases}.$$

3. Ushbu to‘rt noma’lumli tenglamalar sistemasini Gauss (noma’lumlarni yo‘qotish) usulida yeching:

$$\begin{cases} nx_1 + (n-1)x_2 + (n+2)x_3 + (2-n)x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = n \\ (n+3)x_1 + (n-2)x_2 + nx_3 + (1-2n)x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 = n+1 \end{cases}.$$

2-MODUL. VEKTORLAR ALGEBRASI.

4-mavzu. Vektorlar ustida chiziqli amallar. Vektorning o’qdagi proeksiyasi. Vektorning uzunligi. Yo’naltiruvchi kosinuslar. Vektorlar sistemasining chiziqli bog’liqmasligi. Bazis. Vektorni koordinata o’qlarida tashkil etuvchilar bo’yicha yoyish.

REJA:

1. Vektorlar va ular bilan bog‘liq tushunchalar.
2. Vektorlar ustida amallar.
3. Vektorlarning koordinatalari.

1. Vektorlar va ular bilan bog‘liq tushunchalar. Hayotda uchraydigan harorat, bajarilgan ish, ish haqi, jismning massasi, ishlab chiqarish hajmi, tovarning narxi, partiyadagi mahsulotlar soni kabi kattaliklar ularni ifodalovchi sonli qiymatlar orqali to‘liq aniqlanadi.

1-TA’RIF: Sonli qiymatlari bilan to‘liq aniqlanadigan kattaliklar ***skalyarlar*** deb ataladi.

“Skalyar” atamasi lotin tilidagi “scala” so‘zidan olingan bo‘lib, “pog‘ona” degan ma’noni ifodalaydi. Skalyarlar $a, b, c, \ldots$ kabi harflar bilan belgilanadi.

Kuch, kuch momenti, tezlik, tezlanish, bosim, siljish, elektr maydonining kuchlanishi, oqim kabi kattaliklarni aniqlash uchun ularning sonli qiymatlaridan tashqari yo‘nalishlarini ham ko‘rsatish zarurdir.

2-TA’RIF: Ham sonli qiymati, ham yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattaliklar ***vektorlar*** deyiladi.

“Vektor” lotincha ”vehere” so‘zidan olingan va “yo‘llovchi” ma’nosiga ega. Vektorlar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \cdots$ yoki ***a***, ***b***, ***c***, … kabi belgilanadi.

3-TA’RIF: Har qanday ***a*** vektorning sonli qiymati uning ***moduli*** yoki ***uzunligi*** deb ataladi va |***a***| kabi belgilanadi.

Geometrik nuqtai-nazardan vektorlar yo‘naltirilgan kesmalar singari qaraladi. Boshi A va oxiri B nuqtada bo‘lgan yo‘naltirilgan kesma bilan aniqlanadigan vektor $\overrightarrow{AB}$ kabi belgilanadi. Bunda A nuqta ***vektorning boshi***, B nuqta esa ***vektorning uchi*** deyiladi. Bu yerda AB kesma uzunligi vektor modulini ifodalaydi, ya’ni $|AB|=|\overrightarrow{AB}|$ bo‘ladi.

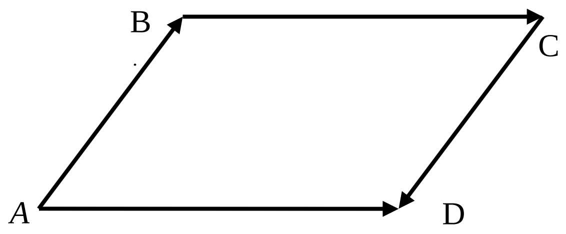
4-TA’RIF: Boshi va uchi bitta nuqtadan iborat bo‘lgan vektor ***nol vektor*** deyiladi.

Nol vektor **0** kabi belgilanib, uning moduli |**0**|=0 bo‘ladi. Nol vektorning yo‘nalishi to‘g‘risida so‘z yuritib bo‘lmaydi.

5-TA’RIF: Bir to‘g‘ri chiziqda yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda joylashgan vektorlar ***kollinearvektorlar*** deb ataladi.

Kelgusida ***a*** va ***b*** vektorlarning kollinear ekanligini ***a***||***b***kabi belgilaymiz.

Masalan, $ABCD$ parallelogramm bo‘lsa, unda



$\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, ammo $\overrightarrow{AD}$ va $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{CD}$ vektorlar kolllinear bo‘lmaydi.

Izoh. Nol vektor **0** har qanday ***a*** vektorga kollinear deb hisoblanadi.

6-TA’RIF: Quyidagi uchta shartlar bajarilganda ***a*** va ***bteng vektorlar*** deyiladi:

1. ***a***||***b*** , ya’ni bu vektorlar kollinear;
2. |***a***|=|***b***|, ya’ni bu vektorlar bir xil uzunlikka ega;
3. ***a*** va ***b*** vektorlar bir xil yo‘nalishga ega.

Agar ***a*** va ***b*** teng vektorlar bo‘lsa, ***a***=***b***deb yoziladi. Masalan, yuqoridagi $ABCD$ parallelogrammda $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ bo‘ladi. Bu yerdan vektorlarni parallel ko‘chirish mumkinligi kelib chiqadi.

7-TA’RIF: Bitta yoki parallel tekisliklarda joylashgan uch va undan ortiq vektorlar ***komplanar*** deyiladi.

Masalan, uchburchakning turli tomonlarida joylashgan vektorlar komplanar bo‘ladi.

2. **Vektorlar ustida amallar.** Endi vektorlar ustida arifmetik amallar kiritamiz.

8-TA’RIF:a vektorni λ songa (skalyarga) ko‘paytmasi deb quyidagi uchta shart bilan aniqlanadigan yangi bir ***c*** vektorga aytiladi:

1. |***c***|= |λ||***a***|, ya’ni ***a*** vektorning uzunligi $|\lambda|$ marta o‘zgaradi;
2. ***c*** || ***a***, ya’ni bu vektorlar kollinear;
3. λ>0 bo‘lsa ***c*** va ***a*** bir xil yo‘nalgan, λ<0 bo‘lsa ***c*** va ***a*** qarama-qarshi yo‘nalgan.

a vektorni λ songa ko‘paytmasi λ***a*** kabi belgilanadi. Masalan, *ABCD* trapetsiya bo‘lib, uning *AD* va*BC* asoslarining uzunliklari |*AD*|=8 va |*BC*|=4 bo‘lsa, unda $\overrightarrow{AD}$ =2 $\overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{AD}$ =–2 $\overrightarrow{CB}$ tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

Vektorlarni songa ko‘paytirish amali quyidagi xossalarga ega:

1. λ(β***a***)=β(λ***a***) 2. (λ±β)***a***=λ ***a***±β ***a*** 3. 0· ***a***=**0**.

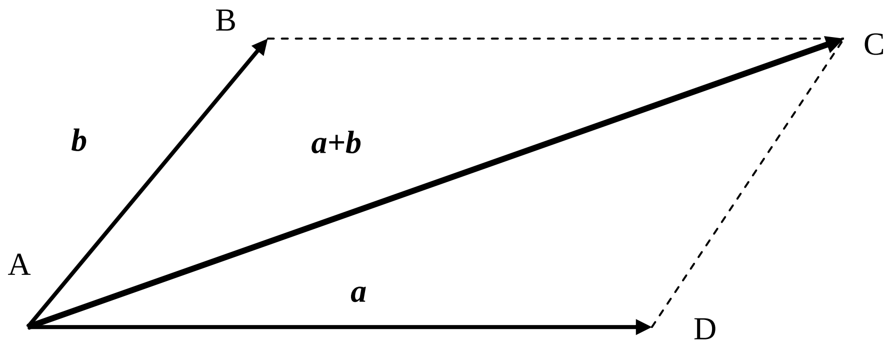
Bu yerda λ vaβ ixtiyoriy sonlarni, ***a***esa ixtiyoriy vektorni ifodalaydi.

<u>9-TA’RIF:</u> (–1)***a*** vektor ***a*** vektorga ***qarama-qarshi vektor*** deyiladi va – ***a*** kabi belgilanadi.

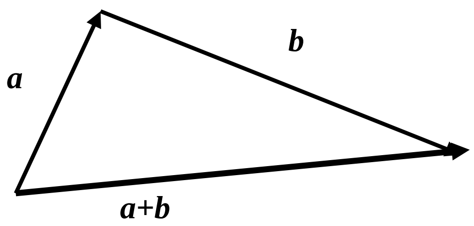
Masalan, yuqorida ko‘rilgan *ABCD* parallellogramda $\overrightarrow{AD}$ va $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{CD}$ qarama-qarshi vektorlar, ya’ni $\overrightarrow{AD}$ =– $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$ =– $\overrightarrow{CD}$ bo‘ladi.

Endi ikkita ***a*** va ***b*** vektorlarni qo‘shish amalini kiritamiz. Buning uchun parallel ko‘chirish orqali ularning boshlarini bitta *A* nuqtaga keltiramiz. Unda bu vektorlarni ***a***= $\overrightarrow{AD}$, ***b***= $\overrightarrow{AB}$ kabi belgilab, *ABCD* parallelogrammni hosil qilamiz.

<u>10-TA’RIF:</u>a va ***bvektorlarning yig‘indisi*** deb *ABCD* parallelogrammning *A* uchidan chiquvchi diagonalidan hosil qilingan $\overrightarrow{AC}$ vektorga aytiladi va ***a***+***b*** kabi belgilanadi.

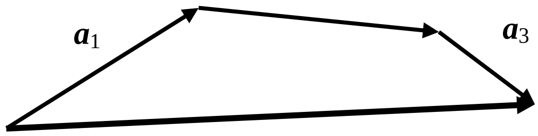


Vektorlar yig‘indisining bu usulda aniqlash ***parallelogramm qoidasi*** deyiladi va unga moddiy nuqtaga qo‘yilgan ikkita kuchning teng ta’sir etuvchisini topish asos qilib olingan. Bu yig‘indini ***uchburchak qoidasi***deb ataladigan quyidagi usulda ham topish mumkin. Bunda dastlab parallel ko‘chirish orqali ***b***vektorning boshi ***a*** vektorning uchi ustiga keltiriladi. So‘ngra ***a*** boshidan chiqib, ***b***uchida tugaydigan vektor hosil qilinadi va u ***a***+***b***yig‘indini ifodalaydi.



Bir nechta $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, …, $\boldsymbol{a}_n$ (n≥3) vektorlarning yig‘indisi parallelogramm qoidasini bir necha marta ketma-ket qo‘llash yoki ***ko‘pburchak qoidasi*** deb ataladigan ushbu usulda topiladi. Bu usulda parallel ko‘chirish orqali $\boldsymbol{a}_1$ uchiga $\boldsymbol{a}_2$ boshi, $\boldsymbol{a}_2$ uchiga $\boldsymbol{a}_3$ boshi va hokazo $\boldsymbol{a}_{n-1}$ uchiga $\boldsymbol{a}_n$ boshi keltirib qo‘yiladi. Hosil bo‘lgan siniq chiziqning boshi ($\boldsymbol{a}_1$ vektor boshi) bilan oxiri ($\boldsymbol{a}_n$

vektor uchi) tutashtirilib, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\ldots+\boldsymbol{a}_n$ yig‘indi vektor topiladi. Masalan, uchta $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ va $\boldsymbol{a}_3$ vektorlarning $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$ yig‘indisini topish quyida ko‘rsatilgan:



Agar $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ va $\boldsymbol{a}_3$ bir tekislikda joylashmagan vektorlar bo‘lsa, ko‘pburchak qoidasi bilan topilgan $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$ yig‘indi qo‘shiluvchi vektorlarni parallel ko‘chirish orqali umumiy bir 0 boshga keltirib hosil qilinadigan parallelepipedning 0 uchidan chiquvchi diagonali kabi ham topilishi mumkin. Bu ***parallelepiped qoidasi*** deb ataladi.

Vektorlarni qo‘shish amali quyidagi xossalarga ega:

1. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ — kommutativlik (o‘rin almashtirish) qonuni;

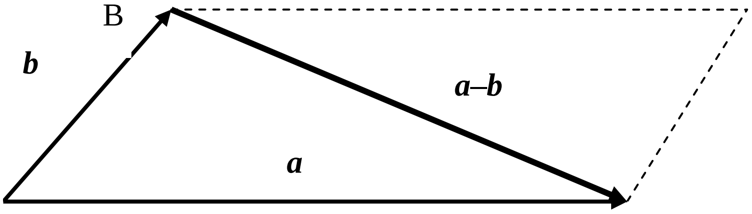
2. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ — assotsiativlik (guruhlash) qonuni;

3. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ **;**

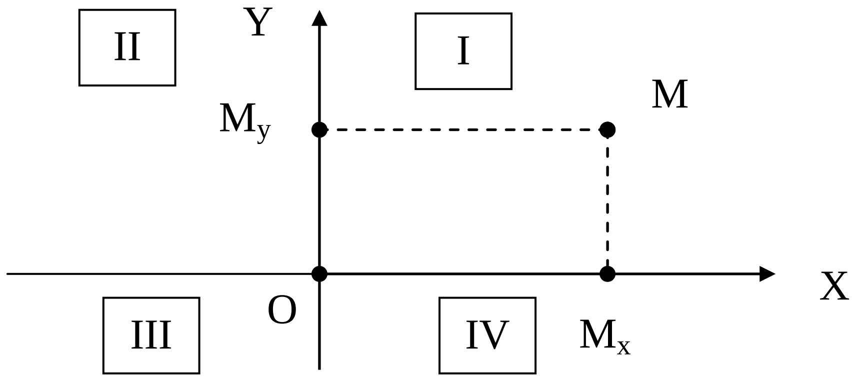
4. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$.

<u>11-TA’RIF:</u> ***a*** va ***bvektorlarning ayirmasi*** deb ***a*** va–***b*** vektorlarning yig‘indisiga aytamiz.

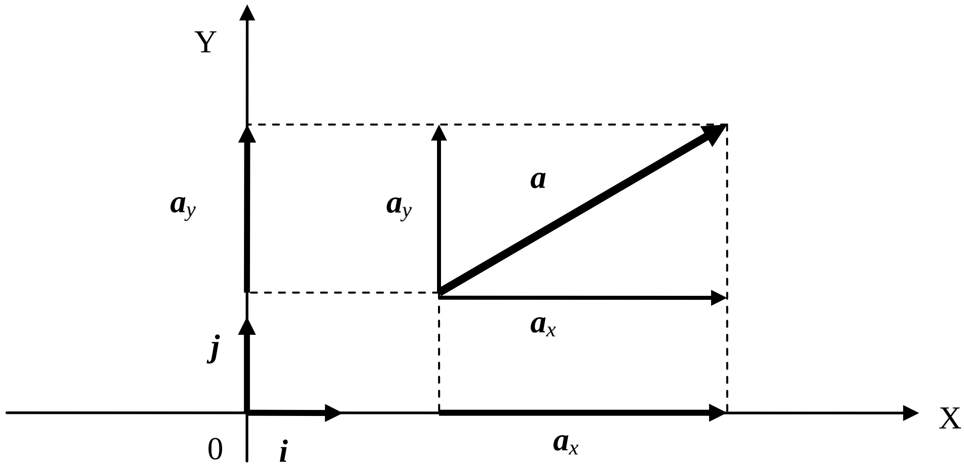
a va ***b*** vektorlarning ayirmasi ***a–b*** kabi belgilanadi bu vektorlardan hosil qilingan *ABCD* parallelogrammning B uchidan chiquvchi $\overrightarrow{BD}$ diagonalidan iborat bo‘ladi.



3. Vektorlarningkoordinatalari. Dastlabtekislikdagivektorlarningkoordinatalari tushunchasinikiritamiz. Buninguchuntekislikdao‘zaro perpendikulyarbo‘lganvaOnuqtadakesishuvchiOX(abssissalaro‘qi) vaOY (ordinatalaro‘qi) o‘qlaridantuzilganXOYDekartkoordinatalarsistemasiniolamiz. BusistemadatekislikdagiharbirMnuqtao‘ziningOXvaOYo‘qlardagiproyeksiyalaribo‘lmish$M_x$va$M_y$nuqtalarorqaliquyidagichaaniqlanadi. $M_x$va$M_y$nuqtalardanOkoordinataboshigachabo‘lgan $|OM_x|$ va $|OM_y|$ masofalarorqaliM***nuqtaningkoordinatalari***debataladigan$x=\pm|OM_x|$ (abssissa) va$y=\pm|OM_y|$ (ordinata) sonlaraniqlanadi. Bunda (x,y) koordinatalarning ishoralari I–IV choraklarda mos ravishda (+,+), (–,+), (–,–) va (+,–) kabi olinadi. Shunday qilib, tekislikdagi har bir M nuqta o‘zining koordinatalari bo‘lmish (x,y) sonlar juftligi orqali bir qiymatli aniqlanadi va bu hol $M(x,y)$ kabi yoziladi.



Xuddi shunday tarzda tekislikdagi har bir ***a*** vektorni sonlar juftligi orqali ifodalash mumkin. Buning uchun mos ravishda OX va OY koordinata o‘qlarida joylashgan, musbat yo‘nalishga ega va uzunliklari birga teng bo‘lgan ***i*** va ***j*** vektorlarni kiritamiz.



Kiritilgan ***i*** va***j*** vektorlar ***ort vektorlar*** yoki qisqacha ***ortlar*** deb ataladi. Endi berilgan ***a*** vektorni yo‘naltirilgan kesma sifatida qarab, uning OX vaOY o‘qdagi proyeksiyalarini qaraymiz. Bu proyeksiyalar ham yo‘naltirilgan kesmalar bo‘lib, ular ***a*** vektorning OX vaOY o‘qdagi ***proyeksiyalari*** deb ataladi va $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$ kabi belgilanadi. Koordinatalar o‘qlarida joylashgan $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$ vektorlar mos ravishda shu o‘qlardagi ***i***, ***j*** ortlarga kollinear bo‘ladi va shu sababli $\boldsymbol{a}_x=\pm|\boldsymbol{a}_x|\boldsymbol{i}$ hamda $\boldsymbol{a}_y=\pm|\boldsymbol{a}_y|\boldsymbol{j}$ deb yozish mumkin. Bunda proyeksiyalar va ortlar bir xil yo’nalishda bo‘lsa +, qarama-qarshi bo‘lsa – ishorasi olinadi. Unda vektorlarni qo‘shish ta’rifiga asosan quyidagi tengliklarni yoza olamiz:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y=(\pm|\boldsymbol{a}_x|)\boldsymbol{i}+(\pm|\boldsymbol{a}_y|)\boldsymbol{j}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}. \qquad (1)$$

<u>12-TA’RIF:</u> (1) tenglik ***a*** vektorning ortlar bo‘yicha ***yoyilmasi***, *x* va *y* sonlari esa uning ***koordinatalari*** deb ataladi .

Koordinatalari *x* va *y* , ya’ni (1) yoyilmaga ega bo‘lgan ***a*** vektor qisqacha $\boldsymbol{a}=(x,y)$ kabi ifodalanadi. Masalan, yoyilmasi $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$ bo‘lgan vektorning koordinatalari $x=2$, $y=-3$ bo‘ladi va $\boldsymbol{a}=(2,-3)$ deb yoziladi. Nol vektor uchun yoyilma $\mathbf{0}=0\cdot\boldsymbol{i}+0\cdot\boldsymbol{j}=(0,0)$, ya’ni uning koordinatalari $x=0$, $y=0$ bo‘ladi.

Shunday qilib tekislikdagi ixtiyoriy ***a*** vektor o‘zining *x* va*y* koordinatalari, ya’ni (x,y) sonlar juftligi bilan (1) tenglik orqali to‘liq aniqlanadi.

Xuddi shunday tarzda fazodagi nuqta va vektorlar uchun koordinatalar tushunchasi kiritiladi.Buning uchun fazoda o‘zaro perpendikulyar bo‘lgan va O nuqtada kesishuvchi OX, OY va OZ (applikatalar) o‘qlarini kiritamiz. Bunda fazodagi har bir M nuqta o‘zining OX, OY va

OZ o‘qlaridagi proyeksiyalari M_x , M_y va M_z orqali tekislikda qaralgani singari x, y va z koordinatalari bilan bir qiymatli aniqlanadi va bu M(x, y, z) kabi ifodalanadi.

Vektorlarning koordinatalarini aniqlash uchun oldin kiritilgan $\boldsymbol{i}$ va $\boldsymbol{j}$ ortlarga qo‘shimcha ravishda OZ koordinata o‘qida joylashgan $\boldsymbol{k}$ ort vektorni kiritamiz. Unda, fazodagi vektorlarni qo‘shishning parallelepiped qoidasidan foydalanib,

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z=(\pm|\boldsymbol{a}_x|)\boldsymbol{i}+(\pm|\boldsymbol{a}_y|)\boldsymbol{j}+(\pm|\boldsymbol{a}_z|)\boldsymbol{k}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \qquad (2)$$

yoyilmani hosil etamiz. Bu yerda x, y, z sonlar uchligi fazodagi $\boldsymbol{a}$ vektorning koordinatalari bo‘lib, $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$ deb yoziladi.

Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning tengligi va ular ustidagi qo‘shish, ayirish, songa ko‘paytirish amallarining natijalari oson aniqlanadi. Bularni fazodagi vektorlar uchun ifodalaymiz. Tekisikdagi vektorlar uchun tegishli natijalar z=0 holda kelib chiqadi.

<u>1-TEOREMA:</u> $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2, z_2)$ vektorlar teng bo‘lishi uchun ularning mos koordinatalari teng, ya’ni $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$ bo‘lishi zarur va yetarli.

Teoremaning isboti (2) yoyilmadan kelib chiqadi va o‘quvchiga havola etiladi.

<u>2-TEOREMA:</u> $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2, z_2)$ vektorlarning yig‘indisi yoki ayirmasining koordinatalari qo‘shiluvchilarning mos koordinatalari yig‘indisi yoki ayirmasiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1,y_1, z_1)\pm(x_2,y_2, z_2)=(x_1\pm x_2, y_1\pm y_2, z_1\pm z_2). \qquad (3)$$

Isbot: Vektorlarning (2) yoyilmasi va ularni o‘zaro qo‘shish, songa ko‘paytirish amallarining xossalariga asosan

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1,y_1, z_1)\pm(x_2,y_2, z_2)=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\pm(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})=$$
$$=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k}$$

tenglikni olamiz va undan (3) formula o‘rinli ekanligini ko‘ramiz.

Masalan, $\boldsymbol{a}=(4,-2,1)$ va $\boldsymbol{b}=(5,9,0)$ vektorlar uchun

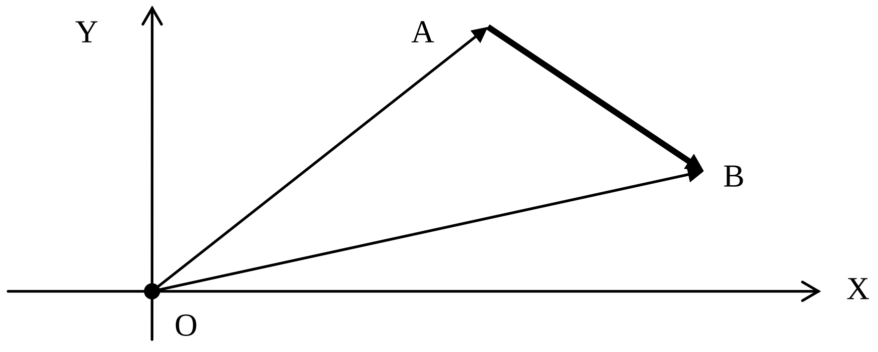
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4+5,-2+9,1+0)=(9,7,1), \qquad \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4-5,-2-9,1-0)=(-1,-11,1).$$

<u>3-TEOREMA:</u> Har qanday $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$ vektorning ixtiyoriy λ songa ko‘paytmasining koordinatalari uning har bir koordinatasini λ songa ko‘paytirishdan hosil bo‘ladi, ya’ni $\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\cdot(x, y, z)=(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

Teoremaning isbotini o‘quvchilarga mustaqil ish sifatida havola etamiz. Masalan, $\boldsymbol{a}=(3, -4, 1)$ va $\lambda=6$ bo‘lsa, $6\boldsymbol{a}=6(3, -4, 1)=(18,-24, 6)$ bo‘ladi.Bu natijalardan foydalanib ushbu masalalarni yechamiz.

Masala: Boshi A(x_1, y_1, z_1) va uchi B(x_2, y_2, z_2) nuqtada joylashgan $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalarini toping.

Yechish: Berilgan vektorning A boshi va B uchini koordinatalar boshi O bilan tutashtirib $\overrightarrow{OA}$ va $\overrightarrow{OB}$ vektorlarni hosil etamiz.



Bunda $\overrightarrow{OA}=(x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OB}=(x_2, y_2, z_2)$ bo‘ladi va vektorlarning ayirmasi ta’rifi hamda 2-teoremaga asosan quyidagi natijani olamiz:

$\overrightarrow{AB}=(x, y, z)=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2, y_2, z_2)-(x_1, y_1, z_1)=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$. (4)

Demak, vektorning koordinatalarini topish uchun uchining koordinatalaridan boshini koordinatalarini ayirish kerak. Masalan, boshi A(5,–4, 2) va uchi B(7, 1, 0) nuqtalarda joylashgan vektorning koordinatalari quyidagicha bo‘ladi:

$$x=x_2-x_1=7-5=2,\ y=y_2-y_1=1-(-4)=5,\ z=z_2-z_1=0-2=-2.$$

Masala № 2: Uchlari $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalarda joylashgan AB kesmani berilgan λ (λ>0) nisbatda bo‘luvchi $C(x_0, y_0, z_0)$ nuqtaning koordinatalarini toping.

Yechish: Oldingi masalaga asosan

$$\overrightarrow{AC}=(x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1),\quad \overrightarrow{CB}=(x_2-x_0, y_2-y_0,\ z_2-z_0)$$

deb yozishimiz mumkin. Masala sharti, vektorni songa ko‘paytirish ta’rifi va 3-teoremaga asosan ushbu tengliklar o‘rinli bo‘ladi:

$$|\overrightarrow{AC}|=\lambda|\overrightarrow{CB}|\quad \Rightarrow \overrightarrow{AC}=\lambda\,\overrightarrow{CB}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1)=\lambda(x_2-x_0, y_2-y_0,\ z_2-z_0)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1)=(\lambda x_2-\lambda x_0, \lambda y_2-\lambda y_0, \lambda z_2-\lambda z_0).$$

Bu yerdan, 1-teoremaga asosan, izlanayotgan x_0 koordinata ushbu tenglamadan topiladi:

$$x_0-x_1=\lambda(x_2-x_0)\Rightarrow(1+\lambda)x_0=\lambda x_2+x_1\Rightarrow x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\ .$$

Xuddi shunday tarzdagi mulohazalar orqali izlangan nuqtaning koordinatalari

$$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z_0=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\ (5)$$

formulalar bilan topilishini aniqlaymiz.

Masalan, uchlari A(2,–3, 1) va B(16, 11, 15) nuqtalarda joylashgan AB kesmani λ=2:5 nisbatda bo‘luvchi nuqtaning koordinatalari (5) formulaga asosan quyidagicha bo‘ladi:

$$x_0=\frac{2+\frac{2}{5}\cdot 16}{1+\frac{2}{5}}=6,\quad y_0=\frac{-3+\frac{2}{5}\cdot 11}{1+\frac{2}{5}}=1,\quad z_0=\frac{1+\frac{2}{5}\cdot 15}{1+\frac{2}{5}}=7$$

Xususiy, λ=1 bo‘lgan, holda AB kesmaning o‘rta nuqtasi koordinatalari uchun ushbu formulaga ega bo‘lamiz:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y_0=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z_0=\frac{z_1+z_2}{2}.\qquad (6)$$

Masalan, uchlari A(4,–1, 5) va B(2, 11, –13) nuqtalarda joylashgan AB kesmaning o‘rta nuqtasining koordinatalari (6) formulaga asosan quyidagicha bo‘ladi:

$$x_0=(4+2)/2=3,\quad y_0=(-1+11)/2=5,\quad z_0=(5+(-13))/2=-4\ .$$

Tayanch iboralar

Skalyar * Vektor * Vektorning moduli * Vektorning geometrik talqini * Vektorning boshi * Vektorning uchi * Nol vektor * Kollinear vektorlar * Vektorlarning tengligi * Komplanar vektorlar*Vektorni songa ko‘paytmasi * Qarama-qarshi vektorlar* Vektorlarni qo‘shish * Parallelogramm qoidasi * Uchburchak qoidasi*Ko‘pburchak qoidasi *Parallelepiped qoidasi * Vektorlarni ayirish * Ort vektorlar*Vektorning o‘qdagi proyeksiyasi *Vektorning yoyilmasi * Vektorning koordinatlari

Takrorlash uchun savollar

1. Qanday kattaliklar skalyarlar deyiladi?
2. Skalyarlarga qanday misollar bilasiz?

3. Qanday kattaliklar vektorlar deb ataladi?
4. Vektorlarga qanday misollar bilasiz?
5. Vektorlarning geometrik ma’nosi nimadan iborat?
6. Vektorning moduli deb nimaga aytiladi?
7. Qanday vektor nol vektor deyiladi?
8. Qanday vektorlar kollinear deyiladi?
9. Qachon vektorlar teng deb hisoblanadi?
10. Vektorni songa ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?
11. Vektorni songa ko‘paytmasi qanday xossalarga ega?
12. Vektorlar yig‘indisi qanday aniqlanadi?
13. Vektorlar yig‘indisi qanday xossalarga ega?
14. Ort vektorlar deb qanday vektorlarga tushuniladi?
15. Vektorning ortlar bo‘yicha yoyilmasi qanday aniqlanadi?
16. Vektorning koordinatalari qanday topiladi?
17. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning tenglik sharti nimadan iborat?
18. Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida arifmetik amallar qanday bajariladi?
19. Vektorning koordinatalari uning boshi va uchi bo‘yicha qanday topiladi?
20. Kesmani berilgan nisbatda bo‘luvchi nuqtaning koordinatalari qanday topiladi?
21. Kesma o‘rta nuqtasining koordinatalari qanday topiladi?

Testlardan namunalar

1. Skalyar deb nimaga aytiladi?

A)Faqat yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka skalyar deb aytiladi.
B) Faqat son qiymati bilan aniqlanadigan kattalikka skalyar deb aytiladi.
C) Ham son qiymati, ham yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka skalyar deb aytiladi.
D) Yo‘nalgan kesmaga skalyar deb aytiladi.
E) Har qanday kattalik skalyar deyiladi.

2. Vektor kattalik deb nimaga aytiladi?

A)Faqat yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka vektor deb aytiladi.
B) Faqat son qiymati bilan aniqlanadigan kattalikka vektor deb aytiladi.
C) Ham son qiymati, ham yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka vektor deb aytiladi.
D) Har qanday kesmaga vektor deb aytiladi.
E) Har qanday kattalik vektor deyiladi.

3. Quyidagi kattaliiklardan qaysi biri vektor bo‘ladi ?

A) sirt yuzasi; B) jism hajmi; C) kesma uzunligi;
D) kuch; E) Birorta ham kattalik vektor bo‘lmaydi.

4. Qachon vektorlar kollinear deb aytiladi ?

A) Bir xil yo‘nalgan vektorlar kollinear deb aytiladi.
B) Har qanday ***a*** va ***b*** vektorlar kollinear vektorlar deb aytiladi.
C) Bir xil yo‘nalgan va uzunliklari teng bo‘lgan vektorlar kollinear deb aytiladi.
D) Bitta to‘g‘ri chiziqda yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda yotuvchi ***a*** va ***b*** vektorlarga kollinear vektor deb aytiladi.
E) Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi ***a*** va ***b*** vektorlarga kollinear vektor deb aytiladi.

5. Qachon vektorlar teng deb aytiladi ?

A) Bir xil yo‘nalgan vektorlar teng deb aytiladi.
B) Bir xil uzunlikli ***a*** va ***b*** vektorlarga teng vektorlar deb aytiladi.
C) Bir xil yo‘nalgan va uzunliklari teng bo‘lgan vektorlar teng deb aytiladi.
D) ***a*** va ***b*** vektorlar kollinear, bir xil yo‘nalgan va uzunliklari teng bo‘lsa, ular teng vektorlar deb aytiladi.
E) Kollinear va bir xil yo‘nalgan vektorlar teng deb aytiladi.

6. Ta’rifni to‘ldiring: Uchta vektor komplanar deyiladi, agar ular ··· joylashgan bo‘lsa.

A) bitta to‘g‘ri chiziqda ; B) bitta tekislik yoki parallel tekisliklarda ;
C) parallel to‘g‘ri chiziqlarda ; D) o‘zaro perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlarda ;
E) o‘zaro perpendikulyar tekisliklarda.

7. Fazodagi ort vektorlar qanday aniqlanadi?

A) OX, OY, OZ koordinata o‘qlarida joylashgan, musbat yo‘nalishda ega va uzunliklari birga teng bo‘lgan vektorlar;
B) Uzunliklari birga teng bo‘lgan uchta vektor;
C) O‘zaro perpendikulyar bo‘lgan uchta vektor;
D) O‘zaro kollinear bo‘lgan uchta birlik vektor;
E) Uchta komplanar birlik vektorlar.

8. ***a***=(2, –5) vektorning $\bar{\boldsymbol{i}}$ va $\bar{\boldsymbol{j}}$ ortlar bo‘yicha yoyilmasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan ?

A) ***a***=2***i***–5***j*** ; B) ***a***= –5***i***+2***j*** ; C) ***a***= –2***i***+5***j*** ; D) ***a***=5***i–***2***j*** ; E) ***a***=2***i+***5***j*** .

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Boshi A(n, 2n+3, 5–2n), uchi esa B(2n+3, 2n–1, n) nuqtada joylashgan ***a*** vektorning koordinatalarini toping.

2. Berilgan ***a***=(n–2, n+3, n–1) va ***b***=(n, n–4, n+2) vektorlar bo‘yicha *n**a***, ***a+b***, ***a–b***va3***a+***n***b***vektorlarni toping.

3. Boshi A(n–2, n+3, n) va uchi B(n+1, n–3, n–1) nuqtada joylashgan vektorning koordinatalarini toping.

4. Uchlari A(n–2, n+3, n) va B(n+1, n–3, n–1) nuqtalarda joylashgan AB kesmani λ=(n–1):(n+2) nisbatda bo‘luvchi C(x,y,z) nuqta koordinatalarini aniqlang.

5-mavzu. Vektorlarning skalyar, vektor va aralash ko'paytmalari. Ularning xossalari. Vektorlar orasidagi burchak. Ikki vektorning kolleniarlik va komplanarlik shartlari.

REJA:

1. Vektorlarning skalyar koʻpaytmasi va uning xossalari.
2. Skalyar koʻpaytmaning koordinatalardagi ifodasi va uning tadbiqlari.
3. Vektor koʻpaytma va uning xossalari.
4. Vektor koʻpaytmaning koordinatalardagi ifodasi va uning tadbiqlari.
5. Vektorlarning aralash koʻpaytmasi va uning xossalari.
6. Aralash koʻpaytmaning koordinatalardagi ifodasi va uning tadbiqlari.

1. Vektorlarning skalyar koʻpaytmasi va uning xossalari. Biz vektorlarni songa koʻpaytirish, qoʻshish va ayirish amallarini koʻrib oʻtdik. Endi vektorlarni oʻzaro koʻpaytirish masalasiga oʻtamiz. Buning uchun dastlab fizikadan kuch bajargan ishni hisoblash formulasini eslaymiz. Biror moddiy nuqtaga $\boldsymbol{f}$ kuch vektori ta'sir etib, uni $\boldsymbol{s}$ vektor boʻyicha harakatlantirgan boʻlsin. Bunda kuch va harakat vektorlari orasidagi burchak φ boʻlsa, unda moddiy nuqtani koʻchirishda bajarilgan ish $A=|\boldsymbol{f}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cdot\cos\varphi$ formula bilan hisoblanadi. Bu formulada $|\boldsymbol{f}|$ – kuch kattaligini, $|\boldsymbol{s}|$ – bosib oʻtilgan masofani ifodalaydi.

<u>1-ТАЪРИФ:</u> Ikkita $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning ***skalyar koʻpaytmasi*** deb ularning modullari bilan ular orasidagi burchak kosinusining koʻpaytmalariga aytiladi.

$\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning skalyar koʻpaytmasi $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{ab}$ yoki $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ kabi belgilanadi va , ta'rifga asosan,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi \qquad (1)$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda φ orqali $(0\le\varphi\le\pi)$ $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar orasidagi burchak belgilangan boʻlib, u $\boldsymbol{a}$ vektordan $\boldsymbol{b}$ vektorgacha eng qisqa burilish burchagi kabi aniqlanadi. Ikki vektorni (1) koʻrinishda koʻpaytirish natijasida son, ya'ni skalyar kattalik hosil boʻladi va shu sababli $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ vektorlarning skalyar koʻpaytmasi deb ataladi.

Skalyar koʻpaytma ta'rifi boʻyicha yuqorida koʻrib oʻtilgan ish formulasini $A=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s}$ deb yozish mumkin. Demak, kuch va harakat lektorlarining skalyar koʻpaytmasi bajarilgan ishni ifodalaydi va bu skalyar koʻpaytmani mexanik ma'nosi boʻladi.

Skalyar koʻpaytmaning ta'rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$, ya'ni skalyar koʻpaytma uchun kommutativlik qonuni bajariladi.

Haqiqatan ham, skalyar koʻpaytma ta'rifini ifodalovchi (1) formulaga asosan

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} =|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\varphi=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}.$$

2. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$, ya'ni vektorni oʻziga - oʻzining skalyar koʻpaytmasi (bu ba'zan vektorning skalyar kvadrati deyiladi va $\boldsymbol{a}^2$ kabi belgilanadi) uning moduli kvadratiga teng. Bu xossa ham skalyar koʻpaytma ta'rifini ifodalovchi (1) formuladan bevosita kelib chiqadi:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2 .$$

3. Ixtiyoriy λ soni uchun $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b})= \lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

Dastlab $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b})$ tenglikni oʻrinli ekanligini koʻrsatamiz. (1) formulaga asosan

$$(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})= |\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi = |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi = |\boldsymbol{a}|\cdot|\lambda|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi = |\boldsymbol{a}||\lambda\boldsymbol{b}|\cos\varphi= (\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}).$$

Endi $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})= \lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ tenglikni toʻgʻriligini koʻrsatamiz. Agar $\lambda\ge 0$ boʻlsa

$$(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})= |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi =\lambda\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi= \lambda (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Agar $\lambda<0$ boʻlsa, $\lambda\boldsymbol{a}$ vektor $\boldsymbol{a}$ vektorga qarama-qarshi yoʻnalgan va shu sababli $\lambda\boldsymbol{a}$ bilan $\boldsymbol{b}$ vektor orasidagi burchak $\pi-\varphi$ boʻladi. Bu holda $\cos(\pi-\varphi)= -\cos\varphi$ va $\lambda = -|\lambda|$ boʻlgani uchun

$$(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})= |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\pi-\varphi) =-|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi= \lambda\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi= \lambda (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Jumladan $\lambda=0$ holda har qanday $\boldsymbol{a}$ vektor uchun $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$ natijani olamiz.

4. $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}$, ya'ni vektorlarning skalyar koʻpaytmasi uchun distributivlik qonuni bajariladi.

Bu xossani isbotsiz qabul etamiz.

2-TA'RIF: Agar ***a*** va ***b*** vektorlar orasidagi burchak $\varphi=90^0$ bo'lsa, ular ***ortogonal vektorlar*** deyiladi.

Kelgusida ***a*** va ***b*** vektorlarning orthogonalligini $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ kabi belgilaymiz. Masalan, oldin kiritilgan ***i***, ***j*** va ***k*** ort vektorlar o'zaro ortogonal, ya'ni $\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{k}$ va $\boldsymbol{j}\perp\boldsymbol{k}$ bo'ladi/

TEOREMA: Noldan farqli ***a*** va ***b*** vektorlar ortogonal bo'lishi uchun ularning skalyar ko'paytmasi ***ab*** =0 bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot: Dastlab teorema shartini zaruriyligini ko'rsatamiz:

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Rightarrow\varphi=90^0\Rightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos 90^0=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot 0=0;$$

Endi teorema shartini yetarli ekanligini ko'rsatamiz:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi=0\ ,\ |\boldsymbol{a}|\neq 0\ ,\ |\boldsymbol{b}|\neq 0\ \Rightarrow \cos\varphi=0\Rightarrow\varphi=90^0\Rightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\,.$$

Skalyar ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi va uning tadbiqlari. Tekislikda koordinatalari bilan berilgan ***a*** $=(x_1,\ y_1)$ va ***b***$=(x_2,\ y_2)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini topamiz. Skalyar ko'paytmaning 2-xossasi va yuqoridagi teoremadan ortlar uchun ushbu tengliklar o'rinli ekanligini ko'ramiz:

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=|\boldsymbol{i}|^2=1,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=|\boldsymbol{j}|^2=1,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0\,.$$

Endi ***a*** $=(x_1,\ y_1)$ va ***b***$=(x_2,\ y_2)$ vektorlarning yoyilmasi hamda skalyar ko'paytmaning 3 va 4 -xossalaridan foydalanamiz:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})=x_1x_2\,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+x_1y_2\,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+y_1x_2\,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+y_1y_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=$$
$$=x_1x_2\cdot 1+x_1y_2\cdot 0+y_1x_2\cdot 0+y_1y_2\cdot 1=x_1x_2+y_1y_2.$$

Demak

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1y_2+y_1y_2 \qquad (2)$$

ya'ni vektorlarning skalyar ko'paytmasi ularning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng bo'ladi.

Masalan, ***a***=(3,6) va***b***=(5,-2) vektorlarning skalyar ko'paytmasi

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1y_2+y_1y_2=3\cdot 5+6\cdot(-2)=15-12=3.$$

Xuddi shunday tarzda fazodagi ***a***$=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ va***b***$=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi uchun

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \qquad (3)$$

formula o'rinli bo'lishini ko'rsatish mumkin.

Endi skalyar ko'paytmaning tatbiqlari
sifatida quyidagi masalalarni ko'ramiz.

1-masala. Fazoda koordinatalari bilan berilgan ***a***$=(x,y,z)$ vektorning modulini toping.

Yechish. Skalyar ko'paytmaning 2- xossasiga va (3) formulaga asosan

$$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=xx+yy+zz=x^2+y^2+z^2\Rightarrow\ |\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ . \qquad (4)$$

Masalan, ***a***=(3,4,12) vektorning moduli

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13.$$

(4) formulada z=0 deb tekislikda koordinatalari bilan berilgan ***a***$=(x,y)$ vektorning moduli

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$$

formula bilan hisoblanishini ko'ramiz.

2-masala. Fazodagi koordinatalari bilan berilgan ***a***$=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ va***b***$=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ vektorlar orasidagi φ burchakni toping.

Yechish. Skalyar ko'paytma ta'rifi (1), (3) va (4) formulalarga asosan

$$cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\ . \qquad (5)$$

Masalan, ***a***=(1,0,1) va***b***=(0,1,1) vektorlar orasidagi φ burchak uchun

$$cos\varphi=\frac{1\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{2}$$

natijani olamiz va undan $\varphi=60^0$ ekanligini topamiz.

(5) formulada $z_1=0$, $z_2=0$ deb tekislikda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$ vektorlar orasidagi φ burchak

$$cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

formula bilan topilishini ko‘ramiz.

3-masala. $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning ortogonallik shartini toping.

Yechish. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ bo‘lgani uchun ular orasidagi burchak $\varphi=90^0$ bo‘ladi va shu sababli $\cos\varphi=0$. Unda (5) formuladan

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 0 \qquad (6)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu ikki vektorning ortogonallik shartidir.

Masalan, $\boldsymbol{a}=(3,-2,1)$ va $\boldsymbol{b}=(5,7,-1)$ vektorlar ortogonaldir, chunki

$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 3\cdot5+(-2)\cdot7+1\cdot(-1) = 15-14-1=0.$

(6) formulada $z_1=0$, $z_2=0$ deb tekislikda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$ vektorlarning ortogonallik shartini topamiz:

$$x_1x_2+y_1y_2= 0$$

4-masala. Fazodagi $A(x_1,y_1,z_1)$ va $B(x_2,y_2, z_2)$ nuqtalar orasidagi d masofani toping.

Yechish. Bu nuqtalarni kesma bilan tutashtirib, boshi $A(x_1,y_1,z_1)$ nuqtada va uchi $B(x_2,y_2, z_2)$ nuqtada bo‘lgan $\boldsymbol{a}$ vektorni hosil qilamiz. Ma’lumki, bu vektorning koordinatalari uning uchi bilan boshi koordinatalari ayirmasiga teng bo‘ladi, ya’ni $\boldsymbol{a}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$. Unda $d=|\boldsymbol{a}|$ va, (4) formulaga asosan,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (7)$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Masalan, A(5, –3,1) va B(8,1,13) nuqtalar orasidagi masofa

$$d = \sqrt{(8-5)^2 + (1-(-3))^2 + (13-1)^2} = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$$

bo‘ladi.

(7) formulada $z_1=0$, $z_2=0$ deb tekislikda koordinatalari bilan berilgan $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar orasidagi d masofa uchun

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

formula o‘rinli bo‘lishini ko‘ramiz.

5-masala. Korxona ishlab chiqarayotgan mahsulotlar tannarxi (z_i) va hajmi (q_i) bo‘yicha ma’lumotlar quyidagi jadvalda keltirilgan:

Iqtisodiy ko‘rsatgich	I mahsulot	II mahsulot	III mahsulot
Mahsulot tannarxi (z_i), so‘m	350	500	250
Mahsulot hajmi (q_i), dona	500	700	1200

Mahsulotlarni ishlab chiqarish xarajatlarini toping.

Yechish. Ishlab chiqarilgan mahsulotlarning tannarx vektorini $\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,z_3)$, hajm vektorini $\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,q_3)$ deb belgilasak, unda ishlab chiqarish xarajatlari

$$z_1q_1+z_2q_2+z_3q_3= \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{q}\ ,$$

ya’ni $\boldsymbol{z}$ va $\boldsymbol{q}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasiga teng bo‘ladi. Bizning masalada

$$\boldsymbol{q}=(500, 700, 1200), \qquad \boldsymbol{z}=(350, 500, 250),$$

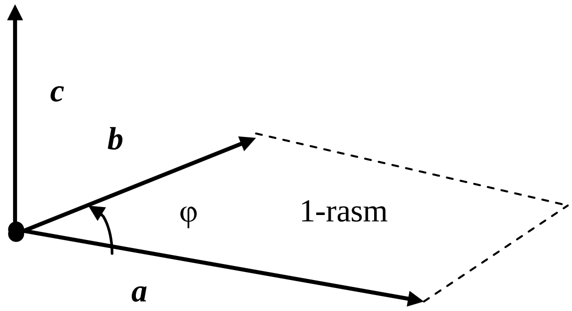
$$\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{q}=z_1q_1+z_2q_2+z_3q_3=350\cdot500+500\cdot700+250\cdot1200=825000.$$

Demak ko‘rsatilgan mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun korxona 825 ming so‘m xarajat qilgan.

3. Vektor ko'paytma va uning xossalari. Ikkita $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi natijasida son hosil bo'lishini ko'rib o'tdik. Endi bu vektorlarning shunday ko'paytmasini aniqlaymizki, natijada yana vektor hosil bo'lsin.

3-TA'RIF: Fazodagi $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning ***vektor ko'paytmasi*** deb, quyidagi uchta shart bilan aniqlanuvchi yangi $\boldsymbol{c}$ vektorga (1-rasmga qarang) aytiladi:

1. $\boldsymbol{c}$ vektorning moduli $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuziga teng bo'lib, $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$ formula bilan aniqlanadi. Bunda φ berilgan $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar orasidagi burchakni ifodalaydi.
2. $\boldsymbol{c}$ vektor $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar yotgan tekislikka perpendikulyar, ya'ni $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$ bo'ladi .
3. $\boldsymbol{c}$ vektor shunday yo'nalganki, uning uchidan qaraganda $\boldsymbol{a}$ vektordan $\boldsymbol{b}$ vektorga eng qisqa burilish soat mili harakatiga teskari bo'ladi.



1-rasm

$\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$yoki $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ kabi belgilanadi.

Vektor ko'paytma ta'rifi fizikadan kuch tushunchasi bilan bog'liq masaladan kelib chiqqan. Agar radius vektori $\boldsymbol{r}$ bo'lgan moddiy A nuqtaga $\boldsymbol{f}$ kuch ta'sir etayotgan bo'lsa, unda $\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{r}$ vektorial ko'paytma $\boldsymbol{f}$kuchni A nuqtaga nisbatan momentini ifodalaydi.

Vektor ko'paytma xossalari bilan tanishamiz.

1. Vektor ko'paytmada ko'paytuvchilar o'rni almashsa, natijada faqat ishora o'zgaradi, ya'ni

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.$$

Bu tasdiq vektor ko'paytma ta'rifining 3-shartidan bevosita kelib chiqadi. Demak, vektor ko'paytma uchun kommutativlik qonuni bajarilmaydi.

2. Vektor ko'paytmada o'zgarmas λ ko'paytuvchini tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni

$$[\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}]=\lambda[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}].$$

Jumladan, $\lambda=0$ holda har qanday $\boldsymbol{a}$ vektor uchun $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{0}]=[\boldsymbol{0},\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{0}$ ekanligini ko'ramiz.

3. Vektor ko'paytma uchun taqsimot qonuni o'rinli, ya'ni

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}.$$

4. Agar $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ kollinear vektorlar bo'lsa, ularning vektor ko'paytmasi $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ bo'ladi. Aksincha noldan farqli$\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar uchun $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ bo'lsa, bu vektorlar kollinear bo'ladi.

Isbot:1) $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ kollinear vektorlar bo'lsin. Bu holda ular orasidagi burchak $\varphi=0$ yoki $\varphi=\pi$ va shu sababli $\sin\varphi=0$ bo'ladi. Unda vektor ko'paytma ta'rifining 1-shartiga asosan

$$|\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\varphi=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot 0=0 \Rightarrow \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ va $|\boldsymbol{a}|\neq 0$, $|\boldsymbol{b}|\neq 0$ bo'lsin. Unda

$$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\varphi=|\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,|=0 \Rightarrow \sin\varphi=0 \Rightarrow \varphi=0 \text{ yoki } \varphi=\pi.$$

Bundan $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ kollinear vektorlar ekanligi kelib chiqadi.

Natija: Ixtiyoriy $\boldsymbol{a}$ vektor uchun $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ bo'ladi.

Misol:$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ ko'paytmani soddalashtiring.

Yechish: Vektor ko'paytmaning ko'rib o'tilgan xossalariga asosan

$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-4\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-2\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=2\cdot\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+4\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-2\cdot\boldsymbol{0}=5\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$

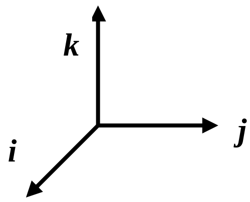
4.Vektor ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi uning tatbiqlari. Endi fazoda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlarning vektor ko'paytmasini topish masalasi bilan shug'ullanamiz. Dastlab $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ va $\boldsymbol{k}$ ortlarning vektor ko'paytmalarini hisoblaymiz. Vektor ko'paytmaning 4-xossasidan kelib chiqqan natijaga asosan

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=0, \quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=0, \quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0.$$

Vektor ko‘paytma va ortlar ta’riflaridan (2-rasm) quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.$$

2-rasm



Yuqoridagi natijalarni 2-rasmdan topish uchun vektor ko‘paytmadagi ikkinchi ko‘paytuvchidan soat miliga teskari yo‘nalishda burilib, vektorial ko‘paytmani topamiz. Masalan, $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$ ko‘paytmani topish uchun $\boldsymbol{j}$ ortdan soat miliga teskari yo‘nalishda burilib, $\boldsymbol{k}$ ort vektorga kelamiz.

Vektor ko‘paytmaning 1- xossasiga binoan

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}, \ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}$$

tengliklarni olamiz. Bu natijalarni yuqoridagi rasmda soat mili bo‘yicha burilib topishimiz mumkin.

Yuqoridagi ortlar uchun tengliklar va vektorial ko‘paytma xossalaridan foydalanib ushbu natijaga kelamiz:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k})\times (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k})= x_1x_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} + x_1y_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+ x_1z_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+$$
$$+ y_1x_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} + y_1y_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+ y_1z_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+ z_1x_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} + z_1y_2\boldsymbol{k}\times c\boldsymbol{j}+ z_1z_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=$$
$$= x_1y_2\boldsymbol{k}- x_1z_2\boldsymbol{j}- y_1x_2\boldsymbol{k}+ y_1z_2\boldsymbol{i}+ z_1x_2\boldsymbol{j}- z_1y_2\boldsymbol{i}=$$
$$=(y_1z_2- z_1y_2)\boldsymbol{i}+(z_1x_2 -x_1z_2)\boldsymbol{j}+(x_1y_2- y_1x_2)\boldsymbol{k}=(y_1z_2- z_1y_2 , z_1x_2 -x_1z_2, x_1y_2- y_1x_2).$$

Demak, $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlarning vektorial ko‘paytmasi $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(x, y, z)$ koordinatalari

$$x=y_1z_2- z_1y_2 , \quad y = z_1x_2 -x_1z_2 , \quad z=x_1y_2- y_1x_2$$

formulalar bilan topiladi. Ammo bu formulalarni esda saqlab qolish oson emas. Shu sababli bu natijalarni qulayroq ko‘rinishda yozish maqsadida koordinatalar uchun topilgan natijalarni ikkinchi tartibli determinantlar orqali ifodalaymiz:

$$x = y_1z_2 - z_1y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \qquad y = z_1x_2 - x_1z_2 = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix};$$
$$z = x_1y_2 - y_1x_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}; \qquad (8)$$

Laplas teoremasidan foydalanib, ushbu uchinchi tartibli determinantga kelamiz:

$$\boldsymbol{a}\times \boldsymbol{b} = x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathrm{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathrm{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\mathrm{k} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Demak, $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlarning vektorial ko‘paytmasini determinant orqali

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{(9)}$$

formula bilan topish mumkin.

Misol: $\boldsymbol{a}=(2; 3; -1)$ va$\boldsymbol{b}=(3; -1; -4)$ vektorlarning vektor ko‘paytmasini toping.

Yechish: (9) formulaga asosan

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}=-13\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k}=(-13,\ 5,\ -11). \qquad \textbf{(10)}$$

Endi vektor ko‘paytmaning tatbiqlari sifatida quyidagi masalalarni yechamiz.

6-masala. $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ vektorlardan hosil qilingan parallelogramm yuzini toping.

Yechish: Vektor ko‘paytma ta’rifining 1-sharti va (8) formulaga asosan parallelogramm yuzi S quyidagicha topiladi:

$$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2} \qquad (11)$$

Misol: $\boldsymbol{a}=(2; 3; -1)$ va $\boldsymbol{b}=(3; -1; -4)$ vektorlarga yasalgan parallelogramm yuzasini toping.

Yechish: Bunda (10) tenglikdan $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-13\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k}=(-13,\ 5,\ -11)$ ekanligi ma’lum. Shu sababli (11) formulaga asosan

$$S=\sqrt{(-13)^2+5^2+(-11)^2}=\sqrt{169+25+121}=\sqrt{315}=3\sqrt{35}$$

Natija. $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlardan yasalgan uchburchakning yuzi

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2} \qquad (12)$$

formula bilan topiladi.

7-masala. $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning kollinearlik shartini toping.

Yechish: Oldin ko‘rilgan vektorial ko‘paytmaning 4-xossasiga asosan $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlar kollinear bo‘lishi uchun ularning vektorial ko‘paytmasi $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ bo‘lishi kerak. Unda (8) formuladan quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$x=y_1z_2-z_1y_2=0; \quad y=z_1x_2-x_1z_2=0; \quad z=x_1y_2-y_1x_2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}; \ \frac{x_1}{x_2}=\frac{z_1}{z_2}; \ \frac{y_1}{y_2}=\frac{x_1}{x_2} \quad \Rightarrow \ \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

Demak, $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlar kollinear bo‘lishi uchun

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2} \qquad (13)$$

shart bajarilishi, ya’ni ularning mos koordinatalari proporsional bo‘lishi kerak.

Misol: $\boldsymbol{a}=(m,3,2)$ va $\boldsymbol{b}=(4,6,n)$ vektorlar m va n parametrlarning qanday qiymatlarida kollinear bo‘lishini aniqlang.

Yechish: (6) kollinearlik shartiga asosan

5. Vektorlarning aralash ko‘paytmasi va uning xossalari. Uchta ***a*, *b*, *c*** vektorlarni o‘zaro ko‘paytirish masalasini ko‘raylik. Agar ***a*** va ***b*** vektorlarni skalyar ko‘paytirib, natijada hosil bo‘lgan sonni ***c*** vektorga ko‘paytirsak, u holda ***c*** vektorga kollinear vektor hosil bo‘ladi. Agarda birinchi ikkita vektorni vektorial ko‘paytirib, natijada hosil bo‘lgan vektorni uchinchi ***c*** vektorga yana vektorial ko‘paytirsak, unda yangi bir ***d*** vektor hosil qilamiz. Bundan tashqari uchta vektorni quyidagi usulda ham ko‘paytirish mumkin.

4-TA’RIF: ***a*, *b*, *c*** vektorlarning ***aralash ko‘paytmasi*** deb dastlabki ikkita vektorlarning $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ vektorial ko‘paytmani uchinchi ***c*** vektorga skalyar ko‘paytmasi kabi aniqlanadigan songa aytiladi.

a*, *b*, *cvektorlarning aralash ko‘paytmasi ***abc*** kabi belgilanadi va , ta’rifga asosan, ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\boldsymbol{abc} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \quad (14)$$

Bu yerda ham vektorial, ham skalyar ko‘paytma qatnashgani uchun (14) aralash ko‘paytma deb atalgan.

Aralash ko‘paytmaning geometrik ma’nosini ko‘rib o‘taylik. Buning uchun komplanar bo‘lmagan ***a*, *b*, *c***vektorlarni qaraylik. Ma’lumki, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ uzunligi ***a***va ***b*** vektorlardan tuzilgan parallelogrammning yuzasiga teng va parallelogramm tekisligiga perpendikulyar yo‘nalgan vektordan iborat bo‘ladi. Agar $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$vektorga ***c*** vektorni proyeksiyalasak, u holda shu proyeksiya parallelogramm tekisligiga perpendikulyar bo‘lib, uning moduli ***a*, *b*, *c***vektorlarga qurilgan parallelepiped balandligi H qiymatini ifodalaydi. Unda bu parallelopiped hajmi uchun

$$V=S_{asos}\cdot H= |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{abc}| \qquad (15)$$

formulaga ega bo‘lamiz. Shunday qilib, ***abc*** aralash ko‘paytmaning absolut qiymati ***a*, *b*, *c***vektorlarga qurilgan parallelepiped hajmini ifodalar ekan.

Endi aralash ko‘paytmaning xossalarini ko‘rib o‘tamiz:

❖ Aralash ko‘paytmada vektorial va skalyar ko‘paytma amallari o‘rnini almashtirish mumkin, ya’ni

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) .$$

Shu sababli aralash ko‘paytmada amallarni ko‘rsatmasdan, qisqacha ***abc*** kabi yozish mumkin.

❖ Aralash ko‘paytmada ko‘paytuvchilar o‘rnini soat miliga teskari yo‘nalish bo‘yicha doiraviy ravishda almashtirilsa, uning qiymati o‘zgarmasdan qoladi, ya’ni

$$\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{cab} = \boldsymbol{bca} = \boldsymbol{abc}.$$

Bunga aralash ko‘paytmaning aylanma xossasi deb aytiladi.

❖ Aralash ko‘paytmada yonma – yon turgan vektorlarning o‘rni almashtirilsa, uning ishorasi qarama-qarshisiga o‘zgaradi, ya’ni

$$\boldsymbol{abc} = -\boldsymbol{bac} = \boldsymbol{bca} = -\boldsymbol{cba}.$$

Skalyar (vektorial) ko‘paytmani qaysi hollarda nolga (nol vektorga) teng bo‘lishini tahlil qilgan edik. Bu savolni endi aralash ko‘paytma uchun ko‘rib chiqaylik. Aralash ko‘paytma quyidagi hollarda nolga teng bo‘ladi:

1) ko‘paytuvchi vektorlardan kamida bittasi nol vektor;
2) ko‘paytuvchi vektorlardan kamida ikkitasi kollinear;
3) ko‘paytuvchi vektorlar komplanar bo‘lsa.

Birinchi holda aralash ko‘paytmaning nol bo‘lishi o‘z–o‘zidan kelib chiqadi. Ikkinchi holda, ya’ni ikkita vektor kollinear bo‘lsa, unda ularning vektorial ko‘paytmasi nol va shu sababli aralash ko‘paytma ham nolga teng bo‘ladi. Uchinchi holda $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ va***c***vektorlar perpendikulyar bo‘ladi va shu tufayli ularning skalyar ko‘paytmasi, ya’ni aralash ko‘paytma nolga teng bo‘ladi.

Natijada quyidagi tasdiqni olamiz:

TEOREMA.Noldan farqli uchta vektorning komplanar bo‘lishi uchun ularning aralash ko‘paytmasi nolga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir.

5. Aralash ko‘paytmaning koordinatalardagi ifodasi va uningtadbiqlari.

Endi koordinatalari bilan berilgan uchta $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ va $\boldsymbol{c}=(x_3, y_3, z_3)$ vektorlarning aralash ko‘paytmasini hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz. Vektorial ko‘paytmani hisoblash formulasidagi determinantni Laplas teoremasiga asosan birinchi satr bo‘yicha yoyilmasini qaraymiz:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathrm{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathrm{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\mathrm{k}=\mathrm{Xi}+\mathrm{Yj}+\mathrm{Zk}.$$

Skalyar ko‘paytmani hisoblash formulasi va yuqoridagi tenglikka hamda determinantning satr bo‘yicha yoyilmasiga asosan

$$\boldsymbol{abc}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\mathrm{X}x_3+\mathrm{B}\,y_3+\mathrm{C}\,z_3=\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (16)$$

Demak, ***abc*** aralash ko‘paytma birinchi, ikkinchi va uchinchi satrlari mos ravishda ***a, b*** va ***c*** vektorlarning koordinatalaridan tuzilgan III tartibli determinant kabi hisoblanadi.

Masalan, ***a***=(3,1,–2), ***b***=(4,0,1), ***c***=(0,2,–1) vektorlarning aralash ko‘paytmasini (16) formula bo‘yicha topamiz:

$$\boldsymbol{abc}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-18.$$

Aralash ko‘paytmaning tatbiqlari sifatida quyidagi masalalarni qaraymiz.

8-**masala:** Koordinatalari bilan berilgan uchta ***a***=(x_1, y_1, z_1), ***b***=(x_2, y_2, z_2) va ***c***=(x_3, y_3, z_3) vektorlarning komplanarlik shartini toping.

Yechish: Yuqorida ko‘rib o‘tilgan teorema va (16) formulaga asosan bu vektorlarning komplanar bo‘lishi uchun

$$\boldsymbol{abc}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0 \quad (17)$$

shart bajarilishi zarur va yetarli.

Misol: ***a*****=(**m,–12,–2**)**, ***b***=(0,m,1) va ***c***=(1,2,3) vektorlar m parametrning qanday qiymatlarida komplanar bo‘lishini toping .

Yechish: Komplanarlikning kordinatalardagi (17) shartiga asosan

$$\boldsymbol{abc}=\begin{vmatrix} m & -12 & -2 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0\Rightarrow 3m^2-12+2m-2m=0\Rightarrow m^2=4\Rightarrow m=\pm 2.$$

9-masala: Koordinatalari bilan berilgan uchta ***a***=(x_1, y_1, z_1), ***b***=(x_2, y_2, z_2) va ***c***=(x_3, y_3, z_3) vektorlardan yasalgan parallelepipedning V hajmini toping.

Yechish: Aralash ko‘paytmaning geometrik ma’nosini ifodalovchi (2) tenglik va (3) formulaga asosan

$$\mathrm{V}=|\boldsymbol{abc}|=\pm\,\boldsymbol{abc}=\pm\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (18)$$

Misol: ***a*****=(**3,–1,2**)**, ***b***=(0,3,1) va ***c***=(1,2,3) vektorlardan yasalgan parallelepipedning V hajmini toping.

Yechish: (18) formulaga binoan

$$V=\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=14.$$

10-masala: Koordinatalari bilan berilgan uchta $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ va $\boldsymbol{c}=(x_3, y_3, z_3)$ vektorlardan tuzilgan piramidaning V hajmini toping.

Yechish: Berilgan $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ va $\boldsymbol{c}$ vektorlardan tuzilgan piramidaning asosidagi $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar hosil qilgan uchburchak yuzasini S, balandligini h va hajmini V deb olsak, V=Sh ⁄ 3 tenglik o‘rinli bo‘ladi. Shu vektorlardan tuzilgan parallelepiped asosining yuzasi 2S, balandligi esa h bo‘ladi. Bu parallelepiped hajmini V_0 deb olsak, $V_0=2Sh=|\boldsymbol{ab}\ \boldsymbol{c}|$ bo‘ladi. Bu holda piramida hajmi

$$V = V_0 / 6 = |\boldsymbol{abc}| / 6 = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix} \qquad (19)$$

formula bilan hisoblanadi.

11-masala: Fazodagi to‘rtta $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ va $M_4(x_4, y_4, z_4)$ nuqtalarni bir tekislikda yotish shartini toping.

Yechish: M_1, M_2, M_3 va M_4 nuqtalar bir tekislikda yotishi uchun

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1), \quad \overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_4}=(x_4-x_1, y_4-y_1, z_4-z_1)$$

vektorlarni komplanar bo‘lishi zarur va yetarli. Shu sababli, (16) formulaga asosan,bu to‘rtta nuqtani bir tekislikda yotishi uchun

$$\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{vmatrix}=0 \qquad (20)$$

shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

12-masala: $M_1(1,m,-1)$, $M_2=(0,1,2m+1)$, $M_3=(-1,m,1)$ va $M_4=(2,1,3)$ nuqtalar m parametrning qanday qiymatlarida bir tekislikda joylashgan bo‘lishini toping.

Yechish: (20) shartdan foydalanib, ushbu natijani olamiz:

$$\begin{vmatrix}-1 & 1-m & 2(m+1)\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & 1-m & 4\end{vmatrix}=0 \Rightarrow 4(1-m)(2-m)=0 \Rightarrow m_1=1, m_2=2.$$

Demak, $m=1$ yoki $m=2$ bo‘lganda yuqoridagi to‘rtta nuqta bir tekislikda yotadi va ular

$$M_1(1,1,-1),\ M_2=(0,1,3),\ M_3=(-1,1,1),\ M_4=(2,1,3)$$

yoki

$$M_1(1,2,-1),\ M_2=(0,1,5),\ M_3=(-1,2,1),\ M_4=(2,1,3)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Tayanch iboralar

* Vektorial ko‘paytma * Vektorial ko‘paytmaning mexanik ma’nosi * Vektorial ko‘paytmaning xossalari * Vektorial ko‘paytmaning koordinatalardagi ifodasi *Vektorlarning kollinearlik sharti* Aralash ko‘paytma * Aralash ko‘paytmaning geometrik ma’nosi * Aralash ko‘paytmaning xossalari * Aralash ko‘paytmaning koordinatalardagi ifodasi * Uch vektorning komplanarlik sharti

Testlardan namunalar

1. Agar $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ bo‘lsa, quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o‘rinli emas ?
   A) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$ (φ– ***a*** va ***b*** vektorlar orasidagi burchak);
   B) $\mathbf{c}\perp\boldsymbol{a}$;C) $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$;
   C) ***c***, ***a***va ***b*** vektorlar bir tekislikda yotadi;
   D) Barcha tasdiqlar o‘rinli
2. Qanday ***a*** va ***b*** vektorlarning skalyar va vektorial ko‘paytmalari o‘zaro teng bo‘ladi ?
   A) Bu vektorlar teng bo‘lsa; B) Bu vektorlar kollinear bo‘lsa;
   C) Bu vektorlar ortogonal bo‘lsa; D) Bu vektorlar qarama-qarshi bo‘lsa;
   E) Bunday vektorlar mavjud emas.
3. Qaysi shartda ***a*** va ***b*** vektorlar uchun $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ tenglik o‘rinli ?
   A) Bu vektorlar teng bo‘lsa; B) Bu vektorlar kollinear bo‘lsa;
   C) Bu vektorlar ortogonal bo‘lsa; D) Bu vektorlar qarama-qarshi bo‘lsa;
   E) Bunday vektorlar mavjud emas.
4. Agar $|\boldsymbol{a}|=4$, $|\boldsymbol{b}|=5$ va $\varphi=30^0$ bo‘lsa, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=$?
   A) 20 ; B) 10 ; C) $10\sqrt{3}$; D) 41 ; E) 0.
5. Qachon $|\,\boldsymbol{abc}\,|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$ tenglik o‘rinli bo‘ladi ?
   A) Agar ***a***, ***b*** va ***c*** vektorlar o‘zaro perpendikulyar bo‘lsa;
   B) Agar $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$ shart bajarilsa; C) Agar ***a***, ***b*** va ***c*** kollinear bo‘lsa;
   D) Agar ***a***, ***b*** va ***c*** vektorlar komplanar bo‘lsa; E) Agar $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ bo‘lsa.
6. $X=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$ aralash ko‘paytma ifodasini soddalashtiring.
   A) $X=\boldsymbol{abc}$; B) $X=2\boldsymbol{abc}$; C) $X=3\boldsymbol{abc}$; D) $X=4\boldsymbol{abc}$;
   E) To‘g‘ri javob ko‘rsatilmagan.
7. Agar λ va μ ixtiyoriy sonlar bo‘lsa, $X=\boldsymbol{ab}(\boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$ aralash ko‘paytma ifodasini soddalashtiring.
   A) $X=\boldsymbol{abc}$; B) $X=\lambda\boldsymbol{abc}$; C) $X=\mu\boldsymbol{abc}$; D) $X=(\lambda+\mu)\boldsymbol{abc}$;
   E) To‘g‘ri javob ko‘rsatilmagan.
8. Koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,0,4)$va $\boldsymbol{c}=(5,-2,0)$ vektorlarning aralash ko‘paytmasi ***abc*** hisoblansin.
   A) 0 ; B) 23 ; C) –46 ; D) –23 ; E) 1 .
9. *m* parametrning qanday qiymatlarida $\boldsymbol{a}=(2,0,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-1,m)$va $\boldsymbol{c}=(-1,3m,1)$ vektorlar komplanar bo‘ladi ?
   A) 1 va –0,5 ; B) 1 va –1 ; C) 0,5 va 1 ; D) 0,5 va –1 ; B) –0,5 va 0,5 .

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Berilgan $\boldsymbol{a}=(n-3,\ n+1,\ 2n-1)$ va $\boldsymbol{b}=(n+2,\ n,\ n-1)$ vektorlardan tuzilgan parallelogramm yuzasini toping.
2. $\boldsymbol{a}=(\lambda n,\ n-2,\ n+1)$ va $\boldsymbol{b}=(n-3,\ \mu n,\ n-1)$ vektorlar λ va μ parametrlarning qanday qiymatlarida kollinear bo‘lishini aniqlang.
3. $\boldsymbol{a}=(n,\ 2n+1,\ 1-n)$, $\boldsymbol{b}=(n+1,\ n-1,\ 2n)$va $\boldsymbol{c}=(n-1,\ 3n,\ 1)$ vektorlarning aralash ko‘paytmasini hisoblang.
4. Berilgan $\boldsymbol{a}=(n,\ 2n+1,\ 1-n)$, $\boldsymbol{b}=(n+1,\ n-1,\ \lambda)$va $\boldsymbol{c}=(n-1,\ 3n,\ 1)$ vektorlar λ parametrning qanday qiymatida komplanar bo‘ladi ?
5. $\boldsymbol{a}=(n+2,\ 2n,\ 1-2n)$, $\boldsymbol{b}=(n,\ 2n-1,\ 0)$va $\boldsymbol{c}=(n-1,\ 3n,\ 1)$ vektorlar orqali hosil qilingan parallelepiped hajmini hisoblang.

Takrorlash uchun savollar:

1. Vektorial ko‘paytma qanday ta’riflanadi?
2. Vektorial ko‘paytmaning mexanik ma’nosi nimadan iborat?
3. Vektorial ko‘paytma qanday xossalarga ega?
4. Ortlarning vektorial ko‘paytmasi qanday topiladi?

5. Vektorial ko‘paytma koordinatalarda qanday ifodalanadi?
6. Ikkita vektordan hosil qilingan parallelogramm va uchburchak yuzalari qanday topiladi?
7. Vektorlarning kollinearlik sharti nimadan iborat?
8. Vektorlarning aralash ko‘paytmasi qanday aniqlanadi ?
9. Aralash ko‘paytmaning geometrik ma’nosi nimadan iborat ?
10. Aralash ko‘paytma natijasida qanaqa kattalik hosil bo‘ladi ?
11. Aralash ko‘paytma qanday xossalarga ega?
12. Qanday vektorlar komplanar deyiladi ?
13. Uchta vektor komplanarligining zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat ?
14. Aralash ko‘paytma koordinatalar orqali qanday topiladi?
15. Uchta komplanar bo‘lmagan vektordan hosil qilingan parallelepiped hajmi qaysi formula bilan topiladi?
16. Uchta komplanar bo‘lmagan vektorga yasalgan piramida (tetraedr) hajmi qaysi formula bilan hisoblanadi ?
17. Uchta vektorning komplanarlik sharti koordinatalar orqali qanday ifodalanadi ?
18. Fazodagi to‘rtta nuqta qaysi shartda bir tekislikda yotadi?

3-MODUL. TEKISLIKDA ANALITIK GEOMETRIYA.

6-mavzu.Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularning turlari.To'g'ri chiziqning o'zaro joylashishi. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.

REJA:

1. Tekislikda analitik geometriya predmeti va asosiy masalalari.
2. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning turli tenglamalari:
   a). Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi.
   b). Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi.
   c). Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi.
   d). Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi.
   e). Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi.
   f).Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi.
3. To‘g‘ri chiziqlarga doir masalalar.To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.

1.Tekislikda analitik geometriya predmeti va asosiy masalalari. Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo‘lsin. Bu holda tekislikdagi har bir M nuqta uning ***koordinatalari*** deb ataladigan (x,y) sonlar juftligi bilan to‘liq aniqlanishi va $M(x,y)$ kabi yozilishi oldin aytib o‘tilgan edi. Tekislikdagi har bir geometrik obyektni (chiziq, geometrik figura va boshqalar) nuqtalar to‘plami kabi qarash mumkin. Bunda M nuqta biror chiziqqa tegishli bo‘lishi uchun ma’lum bir shartni qanoatlantirishi kerak. Bu shart matematik ko‘rinishda M nuqtaning koordinatalari orqali biror

$$F(x,y)=0 \qquad (*)$$

tenglama bilan ifodalanadi deb hisoblaymiz.

1-TA‘RIF: Agar (*) tenglamani faqat tekislikdagi biror L chiziqqa tegishli $M(x,y)$ nuqtalarning koordinatalari qanoatlantirsa, u shu ***chiziq tenglamasi*** deb ataladi.

Agarda $M_0(x_0,y_0)$ nuqta uchun $F(x_0,y_0) = 0$ shart bajarilsa (tenglama qanoatlantirilsa), M_0 nuqta shu tenglama bilan aniqlanadigan chiziqqa tegishli, aks holda esa tegishli bo‘lmaydi. Shunday qilib tekislikdagi chiziq o‘zining tenglamasi bilan to‘liq aniqlanadi. Ammo har qanday tenglama ham biror chiziqni ifodalashi shart emas. Masalan, $x^2+ y^4=0$ tenglamani faqat bitta O(0,0) nuqta koordinatalari qanoatlantiradi va shu sababli bu tenglama chiziqni ifodalamaydi. Shuningdek, $x^2+y^2+1=0$ tenglamani tekislikdagi birorta ham nuqtaning koordinatalari qanoatlantirmaydi va u bo‘sh to‘plamni ifodalaydi.

2-TA‘RIF:Tekislikdagi chiziqlarni ularning tenglamalari orqali o‘rganuvchi matematik fan ***analitik geometriya*** deb ataladi.

Analitik geometriya asoschisi bo‘lib farang matematigi va faylasufi Rene Dekart hisoblanadi. U kiritgan koordinatalar sistemasi orqali geometrik tushuncha bo‘lgan M nuqta va algebraik tushuncha bo‘lgan sonlar juftligi (x,y) orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatildi. Bu bilan matematikaning ikkita bo‘limi bo‘lmish algebra va geometriya orasida bog‘lanish hosil etildi. Natijada tekislikdagi bir qator geometrik masalalarni algebraik va aksincha, bir qator algebraik masalalarni geometrik usullar bilan oson yechilishiga erishildi.

Tekislikdagi analitik geometriyada asosan ikkita masala qaraladi:

- Berilgan chiziqning tenglamasini topish va bu tenglama asosida uni analitik o‘rganish.
- Berilgan tenglamaga mos keluvchi chiziqni aniqlash.

Masala: Markazi $M(a,b)$ nuqtada joylashgan R radiusli aylana tenglamasini toping.
Yechish: $N(x,y)$ shu aylanada joylashgan ixtiyoriy nuqta bo‘lsin. Bizga maktabdan

tanish bo‘lgan aylana ta’rifiga asosan u |MN|=R shartni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plamidan (geometrik o‘rnidan) iborat. Unda ikki nuqta orasidagi masofa (III bob,§2, (7)) formulasiga ko‘ra aylananing ushbu tenglamasini hosil etamiz:

$$|MN| = R \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \ . \qquad (1)$$

Masalan, markazi M(2,3) nuqtada joylashgan va radiusi R=5 bo‘lgan aylana $(x–2)^2 + (y–3)^2 = 25$ tenglamaga ega bo‘ladi. Bu yerdan N(5,7) nuqta shu aylanaga tegishli ekanligi kelib chiqadi, chunki $(5–2)^2 + (7–3)^2 = 25$. K(2,6) nuqta aylanada yotmaydi, chunki uning koordinatalari aylananing tenglamasini qanoatlantirmaydi:
$(2–2)^2 + (6–3)^2 = 9 \neq 25$.

2. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning turli tenglamalari:

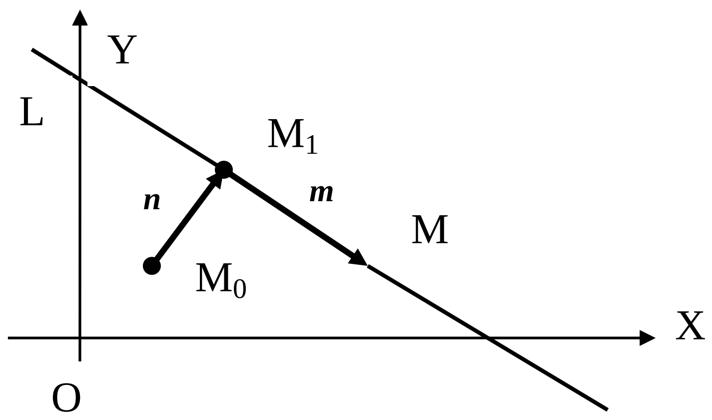
a).Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi. To‘g‘ri chiziq geometriyaning boshlang‘ich tushunchalaridan biri bo‘lib, u ta’rifsiz qabul etiladi.

TEOREMA: Tekislikdagi har qanday *L* to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$Ax+By+C=0 \ , \ A^2+B^2 \neq 0 \qquad (2)$$

ko‘rinishda, ya’ni I tartibli tenglamadan iborat bo‘ladi. Aksincha, har qanday I tartibli (2) tenglama tekislikda biror to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

Isbot: Dastlab teoremaning birinchi qismini o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun tekislikning berilgan *L* to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lmagan ixtiyoriy bir M_0 nuqtasini olamiz.



Bu nuqtadan *L* to‘g‘ri chiziqqa perpendikular o‘tkazamiz va ularning kesishish nuqtasini $M_1(x_1,y_1)$ deb belgilaymiz. Boshi M_0 , uchi esa M_1 nuqtada bo‘lgan $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$ vektorni kiritamiz va uning koordinatalarini A va B, ya’ni $\boldsymbol{n}$=(A,B) deb olamiz. Endi *L* to‘g‘ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy bir $M(x,y)$ nuqtani olamiz va boshi $M_1(x_1,y_1)$, uchi esa $M(x,y)$ nuqtada joylashgan $\boldsymbol{m}=(x–x_1,\ y–y_1)$vektorni qaraymiz. Bunda $M(x,y)$ nuqta *L* to‘g‘ri chiziqda yotsa va faqat su holda ***n*** va ***m*** vektorlar ortogonal bo‘ladi. Vektorlarning ortogonallik shartini koordinatalardagi ifodasidan foydalanib, quyidagi natijalarni olamiz:
$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}=A(x–x_1)+B(\ y–y_1)=0 \Rightarrow Ax+By+ (–Ax_1 – By_1) =0 \Rightarrow Ax+By+C=0.$
Bunda $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$ ekanligidan $|\boldsymbol{n}|^2=A^2+ B^2 \neq 0$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi teoremaning ikkinchi qismini isbotlaymiz, ya’ni (2) tenglama to‘g‘ri chiziqni ifodalashini ko‘rsatamiz. Buning uchun (2) tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$Ax+By+C= Ax+B(y+C/B)=0 \Rightarrow A(x–0)+B(y– (–C/B))=0 \Rightarrow A(x–x_1)+B(\ y–y_1)=0.$$

Bunda $x_1=0$, $y_1=–C/B$ belgilash kiritildi. Agar $\boldsymbol{n}$=(A,B) va $\boldsymbol{m}=(\ x–x_1,\ y–y_1)$ vektorlarni qarasak, oxirgi tenglikdan $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}=0$, ya’ni bu vektorlar orthogonal ekanligi kelib chiqadi. $\boldsymbol{n}$=(A,B) vektorga orthogonal bo‘lgan barcha $\boldsymbol{m}=(x–x_1,\ y–y_1)$ vektorlarning $M(x,y)$ uchlari bir to‘g‘ri chiziqda yotadi. Demak, (2) tenglama $M_1(0, –C/B)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\boldsymbol{n}$=(A,B) vektorga nisbatan perpendikular joylashgan to‘g‘ri chiziqni ifodalar ekan.

3-TA‘RIF: (2) tenglama tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning ***umumiy tenglamasi*** deb ataladi. Unda A va B ***koeffitsiyentlar***, C esa ***ozod had*** deyiladi.

Teorema isbotidan ko‘rinadiki, (2) tenglama orqali aniqlanadigan ***n***=(A,B) **≠0** vektor bu tenglama ifodalaydigan *L* to‘g‘ri chiziqqa nisbatan perpendikular bo‘ladi va uning ***normal vektori*** deb ataladi.

Masalan, $3x+4y–8=0$ tenglama $M_1(0,2)$ nuqtadan o‘tuvchi va ***n***=(3,4) vektorga perpendikular bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

Shunday qilib, biz har qanday to‘g‘ri chiziq tenglamasi (2) ko‘rinishda bo‘lishini (analitik geometriyaning I asosiy masalasi) aniqladik va aksincha, har qanday (2) tenglama biror to‘g‘ri chiziqni ifodalashini (analitik geometriyaning II asosiy masalasi) isbotladik.

Endi tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning (2) umumiy tenglamasini ayrim xususiy hollarini tahlil etib, xulosalar chiqaramiz.

1) Ozod had C=0 bo‘lsin. Bunda (2) tenglama $Ax+By=0$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tenglamani O(0,0) nuqta qanoatlantiradi. Demak, $Ax+By=0$ ko‘rinishdagi tenglamalar koordinatalar boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlarni ifodalaydi.

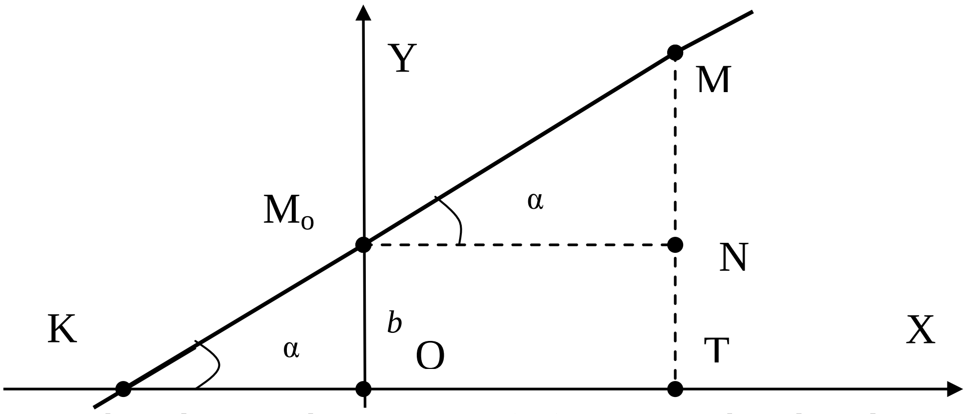
2) A=0, ya’ni *L* to‘g‘ri chiziq tenglamasi $By+C=0$ ko‘rinishda bo‘lsin. Bu holda uning normal vektori ***n***=(0,B)$\perp$OX . Ammo ***n***=(0,B)$\perp L$ bo‘lgani uchun bu holda *L* to‘g‘ri chiziq OX koordinata o‘qiga parallel ($L \parallel$ OX) yoki $L\perp$OY bo‘ladi.

3) B=0 holni ko‘ramiz. Bunda tenglama $Ax+C=0$ ko‘rinishda bo‘lib, ***n***=(A,0)$\perp$OY . Demak, $L \parallel$ OY yoki $L\perp$OX bo‘ladi.

4) C=0 va B=0 bo‘lsin. Bunda tenglama $Ax=0$ yoki, A≠0 bo‘lgani uchun ($A^2+B^2\neq 0$ shartga asosan), $x=0$ tenglamaga kelamiz. Bu tenglama OX koordinata o‘qi joylashgan to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

5) C=0 va A=0 holda $y=0$ tenglamaga kelamiz. Bu tenglama OY koordinata o‘qi joylashgan to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

b). Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi. Berilgan *L* to‘g‘ri chiziq OX o‘qi bilan α burchak ($\alpha\neq 90^0$) tashkil etishi (ya’ni OX o‘qini soat miliga teskari yo‘nalishda α burchakka burilsa, u *L* to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi) va OY o‘qidagi $M_0(0,b)$ nuqtadan o‘tishi ma’lum bo‘lsin.



Bu to‘g‘ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtaning koordinatalari qanday tenglamani qanoatlantirishini aniqlaymiz. Chizmadan

$OM_0=TN=b$, $OT=M_0N=x$, $TM=y$, $\angle M_0KO = \angle MM_0N = \alpha$

ekanligini ko‘ramiz. Bu yerda ΔM_0MN to‘g‘ri burchakli uchburchak bo‘lib, undan ushbu natijani olamiz:

$$\frac{MN}{M_0N} = tg\alpha \Rightarrow \frac{TM-TN}{M_0N} = tg\alpha \Rightarrow \frac{y-b}{x} = tg\alpha \Rightarrow y-b = x\cdot tg\alpha \Rightarrow y = x\cdot tg\alpha + b.$$

Oxirgi tenglikda $tg\alpha=k$ belgilash kiritib, berilgan shartlarda *L* to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lishini topamiz:

$$y=kx+b \qquad (3)$$

4-TA'RIF: (3) tekislikdagi to'g'ri chiziqning ***burchak koeffitsiyentli tenglamasi*** deyiladi. Unda $k = tg\alpha$ to'g'ri chiziqning ***burchak koeffitsiyenti***, b esa ***boshlang'ich ordinatasi*** deb ataladi.

Agar L to'g'ri chiziq umumiy tenglamasi Ax+By+C=0 (B≠0) bilan berilgan bo'lsa, uning burchak koeffitsiyentli tenglamasiga quyidagicha o'tiladi:

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow By = -Ax - C \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x + (-\frac{C}{B}) \Rightarrow k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Masalan, umumiy tenglamasi 4x–6y+3=0 bo'lgan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini topamiz:

$$4x - 6y + 3 = 0 \Rightarrow 6y = 4x + 3 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{2}.$$

c). Tekislikdagi to'g'ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi. Koordinata boshidan o'tmaydigan L to'g'ri chiziq OX va OY koordinata o'qlarini mos ravishda $M_1(a,0)$ va $M_2(0,b)$ nuqtalarda kesib o'tishi ma'lum bo'lsin. Bu holda L tenglamasi qanday ko'rinishda bo'lishini topamiz.

Bu to'g'ri chiziq tenglamasini topish uchun $M_1(a,0)$ va$M_2(0,b)$ nuqtalar unda yotishidan foydalanamiz. Bu nuqtalarning koordinatalarini L to'g'ri chiziqning Ax+By+C=0 umumiy tenglamasini qanoatlantiradi, ya'ni

$$\begin{cases} Aa + B \cdot 0 + C = 0 \\ A \cdot 0 + Bb + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{C}{a} \\ B = -\dfrac{C}{b} \end{cases}$$

Bu yerda C≠0, chunki L to'g'ri chiziq koordinata boshidan o'tmaydi. Shu sababli umumiy tenglamadan quyidagi natijani olamiz:

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow -\frac{C}{a}x + (-\frac{C}{b})y + C = 0 \Rightarrow -C(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1) = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

Demak, L to'g'ri chiziqning izlangan tenglamasi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (4)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunda $|a|$ va $|b|$ qaralayotgan L to'g'ri chiziqni mos ravishda OX va OY koordinata o'qlaridan ajratgan kesma uzunliklarini ifodalaydi. Shu sababli quyidagi ta'rif kiritiladi.

5-TA'RIF: (4) to'g'ri chiziqning ***kesmalardagi tenglamasi*** deyiladi.

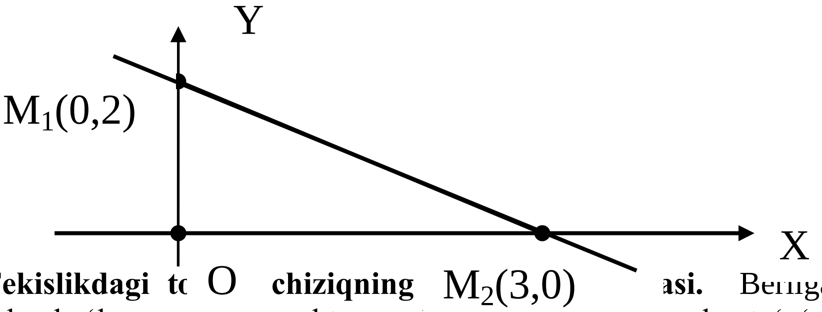
Agar koordinata boshidan o'tmaydigan L to'g'ri chiziq Ax+By+C=0 (A≠0, B≠0, C≠0) umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsa, uning kesmalardagi tenglamasiga o'tish uchun (–C) soniga bo'linadi:

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow -\frac{A}{C}x + (-\frac{B}{C})y - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x}{(-C/A)} + \frac{y}{(-C/B)} = 1.$$

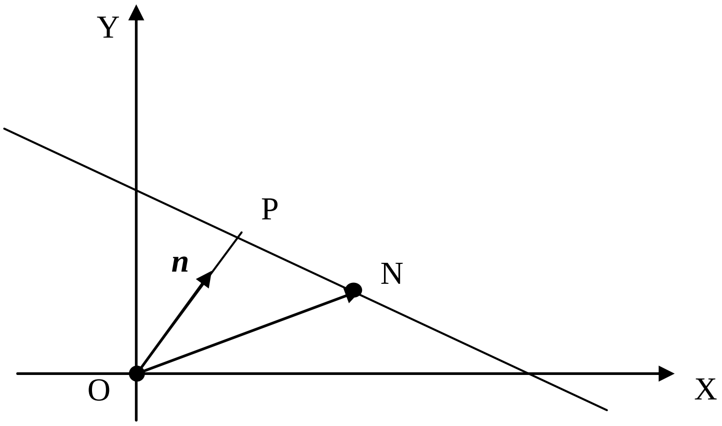
Masalan, umumiy tenglamasi 2x+3y–6=0 bo'lgan to'g'ri chiziqning kesmalardagi tenglamasini topamiz:

$$2x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow \frac{2}{6}x + \frac{3}{6}y - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1.$$

Demak, bu to'g'ri chiziq OX va OY o'qlarni $M_1(3,0)$ va $M_2(0,2)$ nuqtalarda kesib o'tadi. Bundan foydalanib L to'g'ri chiziqni quyidagicha osonlik bilan yasash mumkin:



d). Tekislikdagi t… chiziqning … asi. Berilgan L to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lgan ***n*** birlik vektor va koordinata boshidan bu to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa |0P|=p ma’lum bo‘lsin. Bu ma’lumotlar asosida L to‘g‘ri chiziq tenglamasini topamiz. Agar ***n*** birlik vektor OX koordinata o‘qi bilan ∠POX=α burchak tashkil etgan bo‘lsa, uning koordinatalari cos α va sinα bo‘ladi, ya’ni ***n*** =(cos α, sinα) deb yozish mumkin. N(x,y) berilgan to‘g‘ri chiziqdagi ixtiyoriy bir nuqta va ***r*** =(x,y) uning radius-vektori bo‘lsin. ***r*** va**n** vektorlar orasidagi burchak ∠PON=φ deb olamiz.



r va***n*** vektorlarning ***n·r***skalyar ko‘paytmasini ikki usulda hisoblaymiz. Skalyar ko‘paytmani koordinatalar orqali hisoblash formulasiga asosan***n·r*** **=** $x$cosα + $y$sin α **;**
Skalyar ko‘paytmaning ta’rifiga asosan va Δ PON da cosφ=|OP|/|ON| ekanligidan foydalanib, ushbu tenglikni hosil qilamiz:

n·r **=|*n*|·|*r*|** cosφ = 1·|***r***|· cosφ=|ON|·|OP| ⁄ |ON| = |OP| = p.

n·rskalyar ko‘paytmasi uchun bu ikki ifodani tenglashtirib, berilgan L to‘g‘ri chiziqdagi barcha N(x,y) nuqtalarning koordinatalari

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \Rightarrow x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ (5)

tenglamani qanoatlantirishini ko‘ramiz.

<u>6-TA‘RIF:</u> (5) tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning ***normal tenglamasi*** deyiladi.

Agar L to‘g‘ri chiziq Ax+By+C=0 umumiy tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, uning normal tenglamasiga o‘tish masalasini ko‘ramiz. Bu va (5) tenglama bitta to‘g‘ri chiziqni ifodalagani uchun ularning mos koeffitsiyentlari proporsional bo‘ladi. Agar noma’lum proporsionallik koeffitsiyentini μ deb belgilasak, unda

$\mu A=\cos\alpha$, $\mu B=\sin\alpha$, $\mu C= -p$

tengliklarga ega bo‘lamiz. Dastlabki ikki tenglikdan

$(\mu A)^2+(\mu B)^2=\mu^2(A^2+B^2)=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \Rightarrow \mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$

natijaga kelamiz. Yuqoridagi uchinchi tenglikdan μC= –p<0 ekanligini ko‘ramiz. Demak, μishorasi C ozod had ishorasiga qarama-qarshi qilib olinishi kerak. Bunda μ***normallashtiruvchi ko‘paytuvchi*** deyiladi. Natijada

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = \frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \quad (6)$$

tenglik orqali umumiy tenglamadan normal tenglamaga o‘tish mumkinligini ko‘ramiz.

Masalan, umumiy tenglamasi $3x+4y-15=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$3x+4y-15=0 \Rightarrow \frac{3x+4y-15}{\sqrt{3^2+4^2}}=0 \Rightarrow \frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-3=0\,.$$

e). Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi. Tekislikdagi L to‘g‘ri chiziqning biror $M_0(x_0,y_0)$ nuqtasi va unga parallel $\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{i}+n\boldsymbol{j}=(m,\ n)\neq\boldsymbol{0}$ vektor berilgan bo‘lsin. Bu holda berilgan M_0 nuqta va $\boldsymbol{a}$ vektor L to‘g‘ri chiziqni to‘liq aniqlaydi. Shu sababli $\boldsymbol{a}$ to‘g‘ri chiziqning ***yo‘naltiruvchi vektori***, M_0 esa uning ***boshlang‘ich nuqtasi*** deyiladi. Bu ma’lumotlar asosida L to‘g‘ri chiziq tenglamasini aniqlaymiz. Buning uchun berilgan L to‘g‘ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtani olamiz. Bu nuqtani boshlang‘ich M_0 nuqta bilan tutashtirib, $\boldsymbol{x}=(x-x_0,\ y-y_0)$ vektorni hosil qilamiz. Shartga asosan $\boldsymbol{x}$ va $\boldsymbol{a}$ vektorlar kollinear bo‘ladi. Vektorlarning kollinearlik shartiga asosan ularning mos koordinatalari proporsionaldir:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \qquad (7)$$

Izoh: Agar L to‘g‘ri chiziqning $\boldsymbol{a}=(m,\ n)$ yo‘naltiruvchi vektorida $m=0$ (L-gorizontal to‘g‘ri chiziq) yoki $n=0$ (L-vertikal to‘g‘ri chiziq) bo‘lsa , unda (7) tenglamadagi tegishli kasrlarning suratlari nol deb olinadi va L to‘g‘ri chiziqning tenglamasi $y=y_0$ yoki $x=x_0$ ko‘rinishda yoziladi.

<u>7-TA‘RIF:</u> (7) tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi.

“Kanonik” so‘zi sodda, ixcham degan ma’noni ifodalaydi. Agar L to‘g‘ri chiziq umumiy $Ax+By+C=0$ tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, yo‘naltiruvchi vektor sifatida $\boldsymbol{a}=(B,-A)$ vektorni, boshlang‘ich $M_0(x_0,y_0)$ nuqta sifatida esa koordinatalari $Ax_0+By_0=-C$ shartni qanoatlantiruvhchi ixtiyoriy bir nuqtani olish mumkin. Masalan, $x_0=0$, $y_0=-C/B$ yoki $x_0=-C/A$, $y_0=0$ deb olish mumkin.

Izoh: Agar L to‘g‘ri chiziq OX yoki OY o‘qiga perpendikular, ya’ni to‘g‘ri chiziq $\boldsymbol{i}$ yoki $\boldsymbol{j}$ vektorga perpendikular bo‘lsa, unda $n=0$ yoki $m=0$ bo‘ladi. Bu holda (7) tenglamadagi tegishli kasrning surati nolga teng deb olinadi va L to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi mos ravishda $x=x_0$ yoki $y=y_0$ ko‘rinishda bo‘ladi.

f). Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi. To‘g‘ri chiziqning (7) kanonik tenglamasidagi kasrlarning qiymatlari $M(x,y)$ nuqta to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakat etganda o‘zgarib boradi va ixtiyoriy haqiqiy t soniga teng bo‘la oladi. Shu sababli bu tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{y-y_0}{m}=\frac{x-x_0}{n}=t \Rightarrow \begin{cases} y-y_0=mt \\ x-x_0=nt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=y_0+mt \\ x=x_0+nt \end{cases},\ t\in(-\infty,\infty). \quad (8)$$

<u>8-TA‘RIF:</u> (8) sistemada t – ***parametr***, sistemaning o‘zi esa tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning ***parametrik tenglamasi*** deyiladi.

Agar to‘g‘ri chiziq umumiy $Ax+By+C=0$ ($A\neq0$, $B\neq0$) tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, uning parametrik tenglamasiga o‘tish uchun $x=t$ deb olamiz. Bundan to‘g‘ri chiziqning quyidagi parametrik tenglamasiga kelamiz:

$$\begin{cases} x=t \\ y=-\dfrac{A}{B}t-\dfrac{C}{B} \end{cases}.$$

Izoh: Agar umumiy tenglamada A=0 yoki B=0 bo‘lsa, (8) parametrik tenglama

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\dfrac{C}{B} \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{C}{A} \\ y = t \end{cases}$$

ko‘rinishda yoziladi.

To‘g‘ri chiziqqa doir har xil masalalarni yechishda uning u yoki bu ko‘rinishdagi tenglamasi qulay bo‘lishi mumkin va bunga biz kelgusida ishonch hosil etamiz.

3. To‘g‘ri chiziqlarga doir masalalar.To’g’ri chiziqlar orasidagi burchak. Nuqtadan to’g’ri chiziqqacha bo’lgan masofa.

Bu yerda biz to‘g‘ri chiziqlarga doir tez-tez uchrab turadigan ayrim masalalar va ularning yechimlari bilan tanishib chiqamiz.

1-masala: Berilgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar tenglamasini toping.

Yechish: Izlangan $L$to‘g‘ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentli $y=kx+b$ tenglamasidan foydalanamiz. Berilgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqta L to‘g‘ri chiziqda yotgani uchun uning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi, ya’ni $y_0=kx_0+b$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglikni oldingi tenglamadan hadma-had ayirib, masala javobini quyidagi ko‘rinishda topamiz:

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad (1)$$

Bunda burchak koeffitsiyenti k bir qiymatli aniqlanmaydi va uning qiymatini ixtiyoriy ravishda tanlash mumkin. Buning sababi shundan iboratki, berilgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqta orqali cheksiz ko‘p to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin. (1) berilgan nuqtadan o‘tuvchi ***to‘g‘ri chiziqlar dastasi*** tenglamasi deyiladi. Masalan, $M_0(5,-3)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasi tenglamasi

$$y+3=k(x-5) \Rightarrow y=kx-(5k+3)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Agar $k=2$ desak, $M_0(5,-3)$ nuqtadan o‘tuvchi aniq bir to‘g‘ri chiziq tenglamasi $y=2x-13$ hosil bo‘ladi.

2-masala: Berilgan ikkita $M_1(x_1,y_1)$ va $M_2(x_2,y_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.

Yechish: Berilgan nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini topish uchun $M_1(x_1,y_1)$ nuqtani boshlang‘ich nuqta, ularni tutashtirishdan hosil bo‘lgan $\boldsymbol{a}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$ vektorni esa yo‘naltiruvchi vektor deb olish mumkin. Shu sababli izlangan to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (2)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Masalan, $M_1(2,1)$ va$M_2(-3,0)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

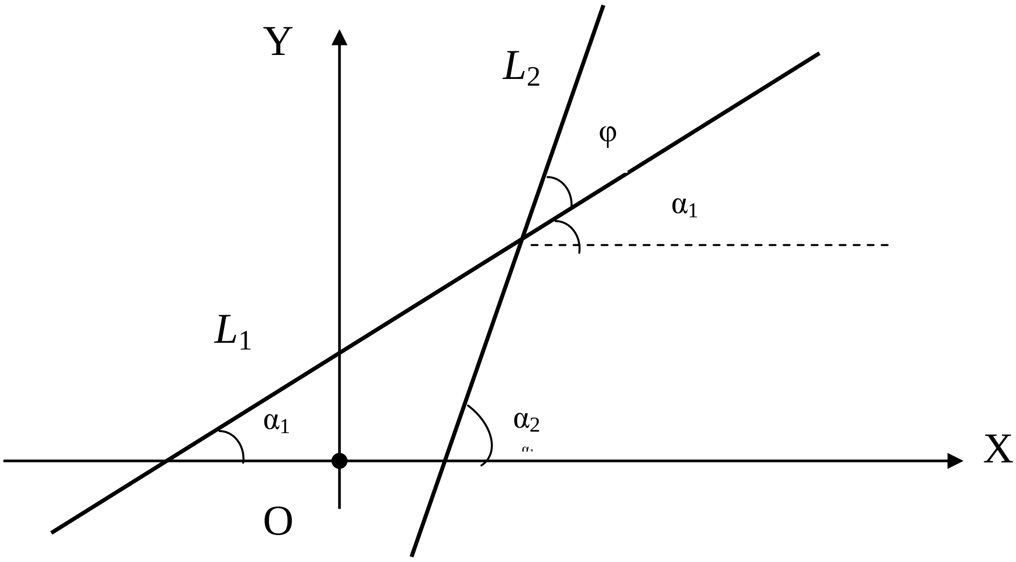
$$\frac{x-2}{-3-2}=\frac{y-1}{0-1} \Rightarrow -(x-2)=-5(y-1) \Rightarrow x-5y+3=0\,.$$

TA‘RIF:L_1 va L_2***to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak*** deb ularning birinchisini soat miliga teskari yo‘nalishda aylantirib ikkinchisi bilan astma-ust tushirish uchun kerak bo‘ladigan burilish burchagiga aytiladi.

3-masala: Berilgan ikkita L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi φ burchakni toping.

Yechish: ***I hol.***L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar o‘zlarining burchak koeffitsyentli

tenglamalari $y=k_1x+b_1$ va $y=k_2x+b_2$ bilan berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqlarning OX o‘qi bilan hosil qilgan burchaklarini mos ravishda α_1 vaα_2 kabi belgilaymiz



Chizmadan ko‘rinadiki izlanayotgan burchak $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$ bo‘ladi va shu sababli uning tangensini quyidagicha topish mumkin:

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 \cdot tg\alpha_1}.$$

Bunda $tg\alpha_1 = k_1$ va $tg\alpha_2 = k_2$ ekanligini hisobga olib va $\varphi \neq 90^0$ shartda izlangan burchak uchun

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \qquad (3)$$

formulagaegabo‘lamiz.

II-hol. L_1va$L_2$to‘g‘richiziqlaro‘zlarining$A_1x+B_1y+C_1=0$ va$A_2x+B_2y+C_2=0$ umumiytenglamalaribilanberilganbo‘lsin. Bu tenglamalardan L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlarning $\boldsymbol{n}_1=(A_1,\ B_1)$ va$\boldsymbol{n}_2=(A_2,\ B_2)$ normal vektorlarini topamiz. Unda izlangan φ burchak normal vektorlar orasidagi burchak bilan teng bo‘ladi va, vektorlar orasidagi burchak formulasiga asosan ,

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (4)$$

formula bilan topiladi.

Misol sifatida umumiy tenglamalari $5x-y+7=0$ va $3x+2y-1=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni (4) formulaga asosan topamiz:

$$\cos\varphi = \frac{5\cdot 3 + (-1)\cdot 2}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{13}{\sqrt{26\cdot 13}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^0.$$

4-masala: Berilgan ikkita L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlarning parallellik va perpendikularlik shartlarini toping.

Yechish: ***I hol.*** L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar o‘zlarining burchak koeffitsiyentli tenglamalari $y=k_1x+b_1$ va $y=k_2x+b_2$ bilan berilgan bo‘lsin.

Agar L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsa, y holda

$$\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha_1 = \text{tg}\,\alpha_2 \Rightarrow k_1 = k_2.$$

Aksincha, agar $k_1 = k_2$ bo‘lsa, u holda (3) formuladan $tg\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$, ya’ni L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziq parallel bo‘ladi. Shunday qilib, burchak koeffitsiyentli tenglamalari bilan berilgan ikki to‘g‘ri chiziqning parallel bo‘lishining zaruriy va yetarli sharti

$$k_1 = k_2 \qquad (5)$$

bo‘ladi.

Agar L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar perpendikular bo‘lsa, unda $\varphi=90^0$ bo‘ladi. Yuqoridagi (3) formuladan

$$ctg\varphi = \frac{1 + k_2 \cdot k_1}{k_2 - k_1}$$

ekanligini ko‘ramiz. $\varphi=90^0$ holda $ctg\varphi=0$ bo‘ladi va shu sababli uning formulasidagi kasrning surati nolga teng bo‘lishi kerak:

$$1+k_1k_2=0 \Rightarrow k_1k_2= -1. \qquad (6)$$

Aksincha, agar (6) shart bajarilsa, unda $ctg\varphi=0$ bo‘ladi va $\varphi=90^0$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, (6) ikkita to‘g‘ri chiziqning perpendikularligining zaruriy va yetarli shartini ifodalaydi.

II-hol. L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar o‘zlarining $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ umumiy tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin. Bu holda L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar parallel yoki perpendikular bo‘lishi uchun ularning $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1)$ va $\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2)$ normal vektorlari mos ravishda kollinear yoki orthogonal bo‘lishi zarur va yetarlidir. Unda vektorlarning kollinearlik yoki ortogonallik shartlaridan foydalanib, masala javobini hosil etamiz:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0, \qquad (7)$$

$$L_1 \| L_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}\,. \qquad (8)$$

Misol sifatida burchak koeffitsiyentli tenglamalari

$$y = -3x + 5, \quad y = \frac{1}{3}x - 1$$

bilan berilgan to‘g‘ri chiziqlarni qaraymiz. Bu yerda $k_1=-3$ va $k_2=1/3$ bo‘lgani uchun $k_1k_2= -1$. Demak, (6) shart bajarilmoqda va shu sababli L_1 va L_2 o‘zaro perpendikular joylashgan.

Masala: $M_0(-3,-1)$ nuqta orqali o‘tuvchi va umumiy tenglamasi $2x+y-3=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikular to‘g‘ri chiziqning tenglamasi topilsin.

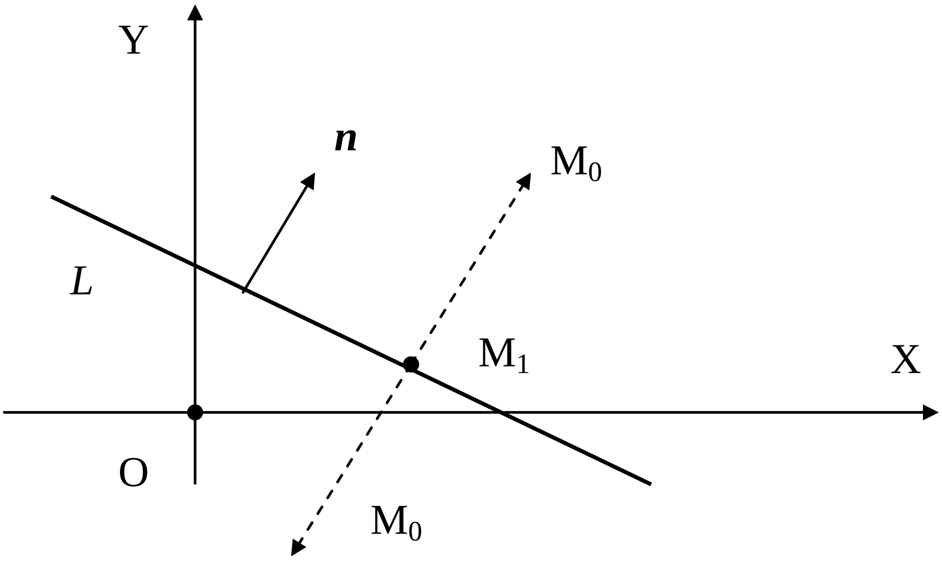
Yechish: Izlanayotgan to‘g‘ri chiziq $M_0(-3,-1)$ nuqta orqali o‘tadi va shu sababli (1) formulaga asosan uning tenglamasi $y+1=k_2(x+3)$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tenglamadagi k_2 burchak koeffitsiyentini (6) perpendikularlik shartidan topamiz. Berilgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti $k_1=-1/2$ ekanligidan $k_2=-1/k_1=2$ bo‘lishi kelib chiqadi. Unda izlanayotgan to‘g‘ri chiziqning tenglamasi

$$y+1=k_2(x+3) \Rightarrow y+1=2(x+3) \Rightarrow y=2x+5$$

ekanligini topamiz.

5-masala: Berilgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadan berilgan L to‘g‘ri chiziq‘gacha bo‘lgan d masofani toping.

Yechish: L to‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasi Ax+By+C=0 bilan berilgan bo‘lsin. Berilgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqta bu L to‘g‘ri chiziqda yotmaydi deb olamiz, chunki aks holda d=0 bo‘lishi ravshan. $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadan L to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan perpendikular asosini $M_1(x_1,y_1)$ deb belgilaymiz.



Berilgan L to‘g‘ri chiziqning $\boldsymbol{n}$=(A,B) normal va uchi M_1, boshi esa M_0 nuqtada joylashgan $\boldsymbol{d}=(x_0-x_1,\ y_0-y_1)$ vektorlarni qaraymiz. Bu vektorlar kollinear va ularning yo‘nalishlari bir xil yoki qarama-qarshi bo‘lishi mumkin.

Dastlab $\boldsymbol{n}$=(A,B) va $\boldsymbol{d}=(x_0-x_1,\ y_0-y_1)$ vektorlar bir xil yo‘nalgan holni ko‘ramiz. Bu holda ular orasidagi burchak φ=0 bo‘ladi. Unda $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{d}$ skalyar ko‘paytmani ta’rifi va koordinatalardagi ifodasiga asosan ushbu tenglikni hosil etamiz:

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{d}=|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{d}|\cdot\cos\varphi=|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{d}|\cdot\cos 0=|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{d}|=d\cdot\sqrt{A^2+B^2}=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1).$$

$M_1(x_1,y_1)$ nuqta L to‘g‘ri chiziqda yotganligi uchun

$$Ax_1+By_1+C=0 \Rightarrow C=-(Ax_1+By_1)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Shuning uchun

$$A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)=Ax_0+By_0-(Ax_1+By_1)=Ax_0+By_0+C$$

deb yozish mumkin. Unda yuqoridagi $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{d}$ skalyar ko‘paytma ifodasidan

$$d=\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

formulaga ega bo‘lamiz.

Agar $\boldsymbol{n}$=(A,B) va $\boldsymbol{d}=(x_0-x_1,\ y_0-y_1)$ vektorlar qarama-qarshi yo‘nalgan bo‘lsa, ular orasidagi burchak $\varphi=180^0$ va bu holda $\cos\varphi=\cos 180^0=-1$ bo‘ladi. Yuqoridagi mulohazalarni takrorlab, bu holda

$$d=\frac{-(Ax_0+By_0+C)}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

natijaga erishamiz. Bu ikkala holni birlashtirib

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (9)$$

umumiy formulani hosil etamiz.

Izoh: Masala yechimidan kelib chidadiki, agar $Ax_0+ By_0+C>0$ bo‘lsa $M_0(x_0,y_0)$ nuqta umumiy tenglamasi $Ax+By+C=0$ bo‘lgan L to‘g‘ri chiziqdan yuqorida va aksincha, $Ax_0+ By_0+C<0$ bo‘lsa, L to‘g‘ri chiziqdan pastda joylashgan bo‘ladi. $Ax_0+ By_0+C=0$ holda esa $M_0(x_0,y_0)$ nuqta L to‘g‘ri chiziqda yotishi tushunarlidir.

Masala: $M_0(-3,-1)$ nuqtadan umumiy tenglamasi $4x+3y-1=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan D masofani toping va ular o‘zaro qanday joylashganini aniqlang.

Yechish: (9) formulaga asosan

$$d = \frac{|4\cdot(-3)+3\cdot(-1)-4|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|-19|}{5} = 3{,}8 .$$

Bunda

$$Ax_0+ By_0+C=4\cdot(-3)+3\cdot(-1) -4=-19<0$$

bo‘lgani uchun $M_0(-3,-1)$ nuqta L to‘g‘ri chiziqdan pastda joylashganligini ko‘ramiz.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, bu masala L to‘g‘ri chiziq normal tenglamasi

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

bilan berilganda juda oddiy yechiladi, chunki bu holda (9) formulani (V bob,§1, (6) formulaga qarang)

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p| \quad (10)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Demak, $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadan normal tenglamasi bilan berilgan to‘g‘ri chiziqqacha masofani topish uchun bu nuqta koordinatalarini normal tenglamaga qo‘yish va hosil bo‘lgan sonni absolut qiymatini olish kifoyadir.

6-masala: Berilgan L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlarning $M_0(x_0,y_0)$ kesishish nuqtasini toping.

Yechish: Bu to‘g‘ri chiziqlarning

$$A_1x+B_1y+C_1=0\ (L_1),\quad A_2x+B_2y+C_2=0\ (L_2)$$

umumiy tenglamalarini qaraymiz. $M_0(x_0,y_0)$ kesishish nuqtasi ham L_1 va ham L_2 to‘g‘ri chiziqlarga tegishli bo‘lgani uchun uning koordinatalari yuqoridagi ikkala umumiy tenglamalarni qanoatlantiradi. Demak, $M_0(x_0,y_0)$ kesishish nuqtasining koordinatalari ushbu chiziqli tenglamalar sistemasidan topiladi:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases} . \qquad (11)$$

Agar (11) sistemada

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

shart bajarilsa, u yagona (x_0,y_0) yechimga ega bo‘ladi va L_1 , L_2 to‘g‘ri chiziqlar faqat bitta $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada kesishadi.Agar (11) sistemada

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

shart bajarilsa, u cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi va L_1, L_2 to‘g‘ri chiziqlar ham cheksiz ko‘p nuqtalarda kesishadi, ya’ni ular ustma-ust tushadi.Agar (11) sistemada

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$$

shart bajarilsa, u yechimga ega bo‘lmaydi va L_1 , L_2 to‘g‘ri chiziqlar birorta ham nuqtada kesishmaydi, ya’ni ular parallel joylashgan bo‘ladi.

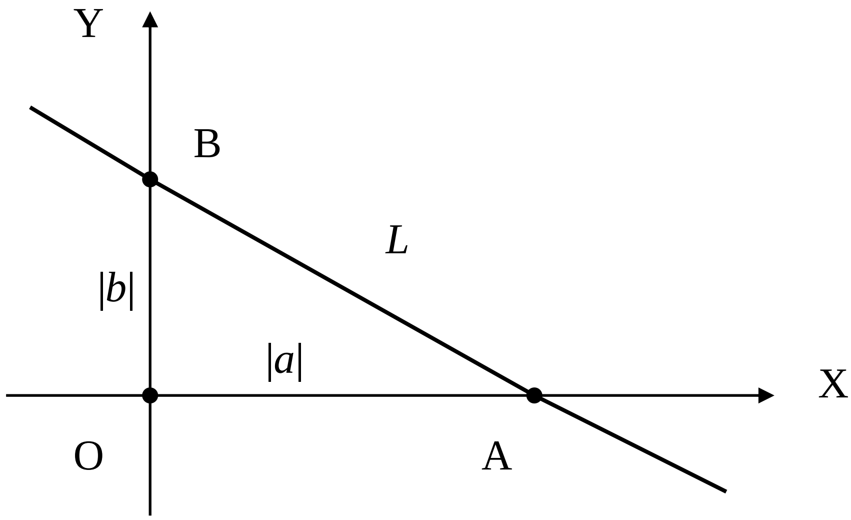
Misol sifatida umumiy tenglamalari $2x+y-1=0$ va$x+2y+1=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlarning $M_0(x_0,y_0)$kesishish nuqtasini topamiz. Bu holda (11) sistema va uning yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases}2x+y-1=0\\ x+2y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+y=1\\ x+2y=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}.$$

Demak, bu to‘g‘ri chiziqlar $M_0(1,-1)$ nuqtada kesishadi.

7-masala: Koordinata boshidan o‘tmaydigan L to‘g‘ri chiziq va OX, OY koordinata o‘qlari bilan chegaralangan uchburchakning S yuzasini toping.

Yechish: Berilgan L to‘g‘ri chiziqning kesmalardagi $(x/a)+(y/b)=1$ tenglamasini qaraymiz .



Chizmadan ko‘rinadiki, izlanayotgan S yuza to‘g‘ri burchakli ΔAOB yuzasidan iborat. Bu uchburchakning katetlari uzunliklari L to‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasidan $|AO|=|a|$ va $|BO|=|b|$ kabi topiladi. Demak, izlangan yuza

$$S=\frac{1}{2}|AO|\cdot|BO|=\frac{1}{2}|a|\cdot|b|=\frac{|ab|}{2} \qquad (12)$$

formula bilan topiladi.

<u>**Masala:**</u>Umumiy tenglamasi $3x-8y+24=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziq va koordinata o‘qlari bilan chegaralangan uchburchak yuzasini toping.

Y***echish*****:** Dastlab bu to‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasini topamiz:

$$3x-8y+24=0 \Rightarrow \frac{3x-8y+24}{-24}=0 \Rightarrow \frac{x}{-8}+\frac{y}{3}=1.$$

Demak, a=–8 , b=3 va (12) formulaga asosan

$$S=\frac{|-8\cdot 3|}{2}=12 \text{ kv.birlik.}$$

Tayanch iboralar

* Geometrik obyekt tenglamasi * Analitik geometriya predmeti * Analitik geometriyaning ikkita asosiy masalasi * Aylana tenglamasi * To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi * Burchak koeffitsiyentli tenglama * Kesmalardagi tenglama * Normaltenglama * Kanoniktenglama * Parametriktenglama * To‘g‘richiziqlardastasi * Ikkitanuqtadano‘tuvchito‘g‘richiziq * Ikkito‘g‘richiziqorasidagiburchak * Parallellikshartі * Perpendikularlikshartі * Nuqtadanto‘g‘richiziqqachabo‘lganmasofa * Ikkito‘g‘richiziqningkesishishnuqtasi * Uchburchak yuzasi

Takrorlash uchun savollar

1. Geometrik obyekt tenglamasi deb nimaga aytiladi?
2. Analitik geometriya predmeti nimadan iborat?
3. Analitik geometriyaning ikkita asosiy masalasi qanday ifodalanadi?
4. Aylana tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
5. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
6. To‘g‘ri chiziqning normal vektori qanday aniqlanadi?
7. Umumiy tenglamaning ayrim xususiy hollarini tahlil eting.
8. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti deb nimaga aytiladi?
9. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
10. Umumiy tenglamadan burchak koeffitsiyentli tenglamaga qanday o‘tiladi?
11. To‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
12. Qanday to‘g‘ri chiziqlar uchun ularning kesmalardagi tenglamasi mavjud bo‘ladi?
13. Umumiy tenglamadan kesmalardagi tenglamaga qanday o‘tiladi?
14. To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
15. Umumiy tenglamadan normal tenglamaga qanday o‘tiladi?
16. Qanday vektor berilgan to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori deyiladi?
17. To‘g‘ri chiziqning boshlang‘ich nuqtasi deb nimaga aytiladi?
18. To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
19. Umumiy tenglamadan kanonik tenglamaga qanday o‘tiladi?
20. To‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
21. Umumiy tenglamadan parametrik tenglamaga qanday o‘tiladi?
22. To‘g‘ri chiziqlar dastasi tenglamasi deb nimaga aytiladi ?
23. Berilgan ikkita nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi ?
24. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak qanday aniqlanadi?
25. To‘g‘ri chiziqlarning perpendikularlik sharti nimadan iborat?
26. To‘g‘ri chiziqlarning parallellik sharti nimadan iborat ?
27. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa qanday topiladi?
28. Ikki to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasi qanday aniqlanadi?
29. To‘g‘ri chiziq va koordinata o‘qlari bilan chegaralangan uchburchak yuzasini topish formulasini yozing.

Testlardan namunalar

1. Analitik geometriyada chiziq nima asosida o‘rganiladi?

A) tenglama; B) chizma; C) proyeksiya; D) ta’rif ;
E) To‘g‘ri javob yo‘q.

2. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning umumiy Ax+By+C=0 tenglamasidagi A va B koeffitsiyentlar qanday shartni qanoatlantirishi kerak ?

A) A·B>0; B) A+B=0; C) A–B<0 ; D) $A^2+B^2\neq0$; E) $A^2-B^2\neq0$.

3. Tasdiqni yakunlang: Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning umumiy Ax+By+C=0 tenglamasi bo‘yicha tuzilgan ***n***=(A,B) vektor bu to‘g‘ri chiziqqa ··· .

A) parallel bo‘ladi; B) tegishli bo‘ladi ; C) perpendikular bo‘ladi ;
D) perpendikular bo‘lmaydi; E) og‘ma bo‘ladi .

4. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini ko‘rsating.

A) $y = kx + b$; B) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$; C) A$x$ + By + C = 0;

D) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$; E) $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$.

5. Qaysi tenglama M(x_0,y_0) nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasini ifodalamaydi ?

A) $y - y_0 = k(x - x_0)$; B) $\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=k$; C) $\dfrac{x-x_0}{y-y_0}=k$;

D) A$(x-x_0)$ + B$(y-y_0)$ = 0; E) $y + y_0 = k(x + x_0)$.

6. Qaysi tenglama M(–3;1) va N(0;7) nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi?

A) $y + 1 = 2(x-3)$; B) $y - 1 = 2(x + 3)$; C) $2x - y + 7 = 0$;
D) $y = 2x + 7$; E) $4x - 2y + 14 = 0$.

7. Ikki $y=k_1x+b_1$ va $y=k_2x+b_2$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi α burchak tangensi formulasini ko‘rsating.

A) $tg\alpha = \dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$; B) $tg\alpha = \dfrac{k_1+k_2}{1-k_1k_2}$;

C) $tg\alpha = \dfrac{k_1\cdot k_2}{1+k_1k_2}$; D) $tg\alpha = \dfrac{k_1-k_2}{1-k_1k_2}$; E) $tg\alpha = \dfrac{1+k_1k_2}{k_2-k_1}$.

8. $y=2x-3$ va $y = -3x + 5$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

A) 90^0; B) 60^0; C) 45^0; D) 30^0; E) 120^0.

9. $y=k_1x+b_1$ va $y=k_2x+b_2$ to‘g‘ri chiziqlarning parallellik shartini ko‘rsating.

A) $k_1\cdot k_2 = -1$; B) $k_1+k_2=0$; C) $k_1\cdot k_2=1$;
D) $k_1-k_2=0$; E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

10. $3x+\alpha y+5=0$ va $\alpha x+12y-1=0$ to‘g‘ri chiziqlar α parametrning qanday qiymatlarida parallel bo‘ladi ?

A) ±3; B) ±4; C) ±5; D) ±6; E) ±7.

11. $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ to‘g‘ri chiziqlarning perpendikularlik shartini ko‘rsating.

A) $A_1B_1+A_2B_2=0$; B) $A_1A_2+B_1B_2=0$; C) $A_1B_1-A_2B_2=0$;
D) $A_1A_2-B_1b_2=0$; E) $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

12. OY o‘qidan 3 birlik kesma ajratuvchi va OX o‘qi bilan 60^0 burchak tashkil qiluvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.

A) $y = kx + b$; B) $y = \dfrac{1}{2}x + 3$; C) $y = x - 3$;

D) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + 3$; E) $y = \sqrt{3}x + 3$.

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziq $(n+2)x+(n+3)y+(2n-1)=0$ umumiy tenglamasi bilan berilgan. Quyidagilarni aniqlang:

a) to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini;

b) to‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasini;

c) to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasini;

d) to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasini;

e) to‘g‘ri chiziqni koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini;

2. Uchburchakning uchlari $A(n, n+1)$, $B(n-2, n+3)$ va $C(n+2, n-4)$ nuqtalarda joylashgan. Quyidagilarni aniqlang:

a) uchburchak tomonlarining umumiy tenglamalarini;

b) A burchakning kosinusini;

c) B uchdan o‘tkazilgan mediana uzunligini;

d) C uchdan tushirilgan balandlik uzunligini;

e) Balandliklarning kesishish nuqtasini;

f) Uchburchak yuzasini.

7-mavzu. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar. Aylana, ellips, giperbola, parabola va ularning kanonik tenglamalari

REJA:

1. II tartibli tenglama va chiziqlar.
2. Aylana va uning tenglamalari.
3. Ellips va uning kanonik tenglamasi.
4. Ellipsning xarakteristikalari.
5. Giperbola va uning kanonik tenglamasi.
6. Giperbolaning xarakteristikalari.
7. Parabola, uning kanonik tenglamasi va xarakteristikalari.

1. II tartibli tenglama va chiziqlar. Bu bobning boshida har qanday I tartibli Ax+By+C=0 tenglama tekislikda biror to'g'ri chiziqni aniqlashini va aksincha, tekislikdagi har qanday to'g'ri chiziq I tartibli tenglamaga ega bo'lishini ko'rib chiqqan edik.

Endi tekislikda II tartibli tenglamalarni qaraymiz. Bu tenglamalarning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1)$$

Bunda (1) tenglamadagi A, B, C koeffitsiyentlardan kamida bittasi noldan farqli, ya'ni $A^2+B^2+C^2 \neq 0$ shart bajarilishi kerak. Aks holda (1) tenglama I tartibli tenglamaga aylanadi.

1-TA'RIF: Tenglamasi (1) ko'rinishda bo'lgan tekislikdagi chiziqlar ***II tartibli chiziqlar*** deb ataladi.

Biz quyida bunday chiziqlarning turlari bilan tanishib chiqamiz. Hozircha esa (1) tenglama har doim ham biror egri chiziqni ifodalashi shart emasligini misollar orqali ko'rsatamiz.

1-misol. (1) tenglamadan A=1, C=–1,B=D=E=F=0 holda hosil bo'ladigan II tartibli $x^2-y^2=0$ tenglama ikkita I tartibli $y=\pm x$ tenglamalarga ajraladi va ikkita to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

2-misol. A=C=F=1, D=–1, B=E=0 holda (1) tenglama

$$x^2+y^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=0$$

ko'rinishga keladi va uni faqat bitta M(1,0) nuqta qanoatlantiradi.

3-misol. A=C=F=1, D=B=E=0 holda (1) tenglama $x^2+y^2+1=0$ ko'rinishga keladi va uni birorta ham nuqta qanoatlantirmaydi, ya'ni bu tenglama bo'sh to'plamni ifodalaydi.

2. Aylana va uning tenglamalari. Bizga maktabdan tanish bo'lgan aylana ta'rifini eslaymiz.

2-TA'RIF: Berilgan M(a,b) nuqtadan bir xil R masofada joylashgan tekislikdagi nuqtalar to'plami (geometrik o'rni) ***aylana*** deb ataladi. Bunda M(a,b) nuqta aylananing ***markazi***, R soni esa aylananing ***radiusi*** deyiladi.

Markazi M(a,b) nuqtada va radiusi R bo'lgan aylananing tenglamasi

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (2)$$

ko'rinishda bo'lishini oldin ko'rib o'tgan edik. (2) aylananing ***normal tenglamasi*** deb ataladi va undan aylana II tartibli egri chiziq ekanligi ko'rinadi. Agar aylana markazi O(0,0) koordinata boshida joylashgan bo'lsa, uning tenglamasi

$$x^2+y^2=R^2$$

ko‘rinishda bo‘ladi va u aylananing ***kanonik tenglamasi*** deyiladi.

Endi umumiy holdagi II tartibli (1) tenglama qaysi shartda aylanani ifodalashini aniqlaymiz. Qisqa ko‘paytirish formulalardan foydalanib (2) tenglamani

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0 \qquad (3)$$

ko‘rinishga keltiramiz. Bu yerdan aylananing (3) tenglamasi (1) umumiy tenglamadan

$$A=C=1,\ B=0,\ D=-2a,\ E=-2b; \qquad F=a^2+b^2-R^2$$

bo‘lgan holda kelib chiqishini ko‘ramiz..

Endi qanday holda (1) umumiy tenglama aylanani ifodalashini aniqlaymiz. (3) tenglamadan ko‘rinadiki birinchi navbatda B=0 va A=C bo‘lishi kerak. Bu holda $A^2+B^2+C^2\neq0$ shartdan $A=C\neq0$ ekanligi kelib chiqadi va (1) tenglama ushbu

$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0$ (4)

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tenglamani (2) ko‘rinishga keltirish uchun uni $A\neq0$ soniga bo‘lamiz va to‘liq kvadratlarni ajratamiz:

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0 \Rightarrow x^2+y^2+2\frac{D}{A}x+2\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+\frac{D}{A})^2+(y+\frac{E}{A})^2+\frac{AF-D^2-E^2}{A^2}=0 \Rightarrow$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\frac{D^2+E^2-AF}{A^2}. \qquad (5)$$

Bunda a=–D/A va b=–E/A belgilash kiritilgan. Bu yerda $\Delta=D^2+E^2-AF$ ishorasiga qarab uch hol bo‘lishi mumkin.

I hol: $\Delta<0$. Bu holda (5) tenglama bo‘sh to‘plamni (mavhum aylanani) ifodalaydi, chunki uning chap tomoni doimo nomanfiydir.

II hol: $\Delta=0$. Bu holda (5) tenglama faqat bitta M(a,b) nuqtani (markazi shu nuqtada va radiusi R=0 bo‘lgan aylanani) ifodalaydi.

III hol: $\Delta>0$. Bunda $\Delta=R^2$ deb belgilash mumkin va (5) tenglama (2) ko‘rinishni oladi, ya’ni aylanani ifodalaydi.

Demak, (4) ko‘rinishdagi II tartibli tenglamada $D^2+E^2-AF=\Delta>0$ shart bajarilsa, u M(a,b) markazining koordinatalari a=–D/A va b=–E/A, radiusi esa

$$R=\frac{\sqrt{D^2+E^2-AF}}{|A|}$$

bo‘lgan aylanani ifodalaydi va (4) ***aylananing umumiy tenglamasi*** deb aytiladi.

Masalan, $x^2+y^2-2x+6y-15=0$ tenglamani qaraymiz. Bu tenglamada

$$A=C=1,\ D=-1,\ E=3,\ F=-15,\ D^2+E^2-AF=1+9-(-15)=25>0.$$

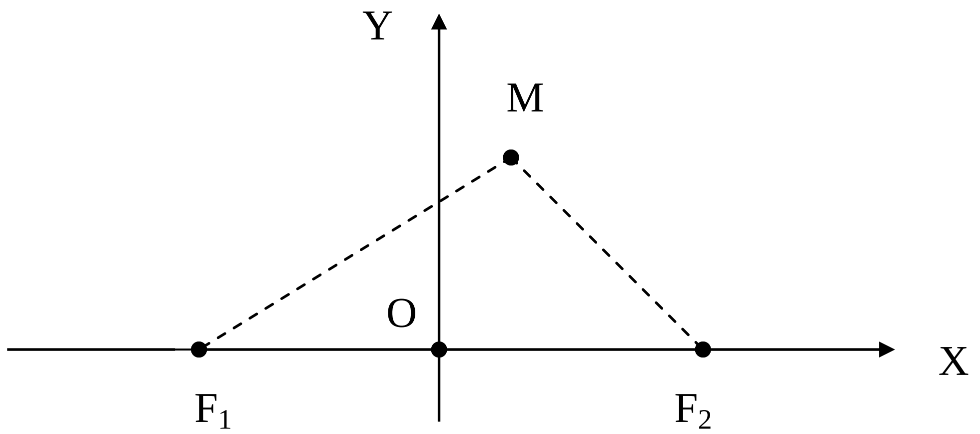
Demak, bu tenglama markazi M(1, –3) va radiusi R=5 bo‘lgan aylanani ifodalaydi. Haqiqatan ham

$$x^2+y^2-2x+6y-15=0 \Rightarrow (x-1)^2-1+(y+3)^2-9-15=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=25=5^2.$$

3. Ellips va uning kanonik tenglamasi. Dastlab ellips ta’rifini keltiramiz**.**

3-TA’RIF:Berilgan ikkita F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalarining yig‘indisi o‘zgarmas songa teng bo‘lgan tekislikdagi nuqtalarining geometrik o‘rni ***ellips*** deb ataladi. Bunda F_1 va F_2 nuqtalar ellipsning ***fokuslari*** deyiladi.

Ta’rif bo‘yicha ellips tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun F_1 va F_2 fokuslar orasidagi masofani $2c$, ellipsning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasidan fokuslarigacha bo‘lgan masofalar yig‘indisini $|MF_1|+|MF_2|=2a$ deb belgilaymiz. XOY Dekart koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz. OX o‘qini F_1 va F_2 fokuslar orqali, OY o‘qini esa fokuslar o‘rtasidan o‘tkazamiz (26-rasmga qarang). Bunda F_1 va F_2 fokuslar koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik joylashadi va, belgilashimizga asosan $|F_1F_2|=2c$ bo‘lgani uchun, $|OF_1|=|OF_2|=c$ bo‘ladi. Shu sababli bu fokuslar $F_1(-c,0)$ va $F_2(c,0)$ koordinatalarga ega bo‘ladi.



Bu holda, ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan,

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}\ , \quad |MF_2| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

va, ellips ta’rifiga asosan,

$$|MF_1| + |MF_2| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a\,.$$

Bu tenglikni quyidagicha soddalashtiramiz:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,]^2 = [2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 4xc = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow (a^2 - xc)^2 = [a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^4 - 2a^2xc + (xc)^2 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2 \Rightarrow$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \qquad (6)$$

Yuqoridagi chizmadagi F_1MF_2 uchburchakdan uchburchak tengsizligiga asosan

$$|MF_1|+|MF_2|>|F_1F_2| \Rightarrow 2a>2c>0 \Rightarrow a^2-c^2>0$$

Ekanligini ko‘ramiz. Shu sababli $a^2-c^2 = b^2$ deb belgilab olish mumkin. Bu belgilashda (6) tenglama $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ ko‘rinishga keladi. Bu tenglamani a^2b^2 ifodaga bo‘lib, ushbu tenglamaga kelamiz:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (b^2=a^2-c^2) \qquad (7)$$

4-TA’RIF: (7) tenglama ellipsning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi.

Ellips kanonik tenglamasini tahlil etib, uning xususiyatlarini aniqlaymiz.

- ✓ Kanonik (7) tenglamada ellipsga tegishli har bir M(x,y) nuqtaning koordinatalari kvadrati bilan qatnashmoqda. Shu sababli $M_1(-x,y)$, $M_2(-x, -y)$ va $M_3(x, -y)$ nuqtalarning koordinatalari ham (7) kanonik tenglamani qanoatlantiradi, ya’ni bu nuqtalar ham ellipsga tegishli bo‘ladi. Bundan OX va OY koordinata o‘qlari ellips uchun simmetriya o‘qlari bo‘lishi kelib chiqadi.
- ✓ (7) tenglamaga x=0 yoki y=0 qiymatlarni qo‘yib va bunda hosil bo‘ladigan tenglamalarni yechib, mos ravishda ellipsning OX yoki OY koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz:

$$x=0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=b^2 \Rightarrow y=\pm b\,; \quad y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm a.$$

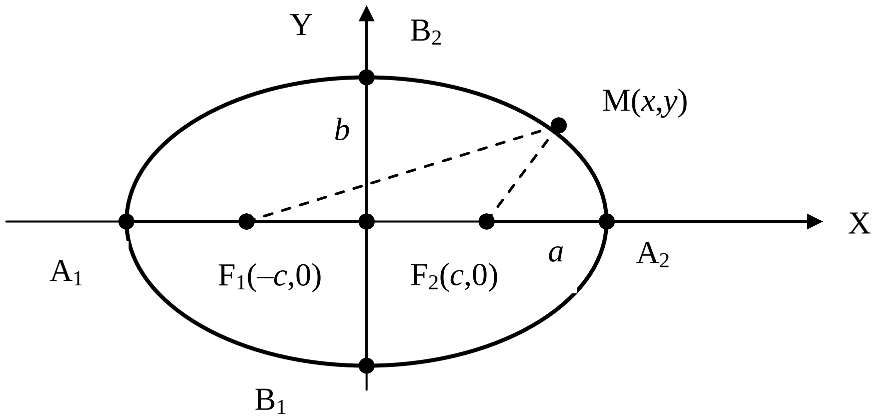
Demak, ellips OX o‘qini $A_1(-a,0)$ va $A_2(a,0)$, OY o‘qini esa $B_1(0,-b)$ va $B_2(0,b)$ nuqtalarda kesib o‘tadi. Bu nuqtalar ellipsning ***uchlari*** deyiladi. Ellips uchlari orasidagi $A_1A_2=2a$ va $B_1B_2=2b$ kesmalar mos ravishda ellipsning ***katta o‘qi*** va ***kichik o‘qi***, $OA_1=OA_2=a$ va $OB_1=OB_2=b$ esa uning ***katta yarim o‘qi*** va ***kichik yarim o‘qi*** deyiladi.

- ✓ (7) kanonik tenglamadan ellipsga tegishli ixtiyoriy M(x,y) nuqtaning koordinatalari

$$\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}\le 1 \Rightarrow x^2\le a^2 \Rightarrow |x|\le a, \qquad \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\le 1 \Rightarrow y^2\le b^2 \Rightarrow |y|\le b$$

tengsizliklarni qanoatlantirishini ko‘ramiz. Demak, ellips OX o‘qi bo‘yicha $x=\pm a$ vertikal, OY o‘qi bo‘yicha esa $y=\pm b$ gorizontal to‘g‘ri chiziqlar orasida joylashgan chegaralangan egri chiziqdan iborat bo‘ladi.

- ✓ Koordinata o‘qlari ellips uchun simmetriya o‘qlari bo‘lgani uchun uning grafigini faqat birinchi chorakda aniqlash kifoya. Bu yerda $x\ge 0$ va $y\ge 0$ bo‘lgani uchun (7) tenglamadan unga teng kuchli bo‘lgan $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ tenglamaga kelamiz. Bunda $x\in[0;a]$ bo‘lib, x o‘zgaruvchining qiymati 0 dan a ga qarab oshib borganda, y o‘zgaruvchining qiymati b dan boshlab nolgacha kamayib boradi. Bu ma’lumot asosida dastlab ellips grafigini I chorakdagi qismini chizamiz, so‘ngra uni simmetriya asosida II, III va IV choraklarga davom ettirib, ellips grafigini quyidagi rasmdagidek bo‘lishini topamiz:



4. Ellipsning xarakteristikalari. Endi ellipsning ayrim xususiyatlarini ifodalovchi tushunchalar bilan tanishamiz.

5-TA'RIF:Ellipsning fokuslari orasidagi $2c$ masofani uning katta o'qi uzunligi $2a$ ga nisbati ellipsning ***ekssentrisiteti*** deb ataladi.

Ellipsning ekssentrisiteti ε kabi belgilanadi va ta'rifga hamda (7) kanonik tenglamaga asosan

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \; . \qquad (8)$$

Bu formuladan $0 \le \varepsilon < 1$ ekanligi kelib chiqadi. Agar $\varepsilon=0$ bo'lsa, (8) formuladan $a=b$ ekanligini ko'ramiz. Bu holda $a=b=R$ deb olsak, (7) kanonik tenglama $x^2+y^2=R^2$ ko'rinishga keladi, ya'ni aylana tenglamasini ifodalaydi. Demak aylana ekssentrisiteti $\varepsilon=0$ bo'lgan ellipsdan iborat, ya'ni ellipsning xususiy bir holi ekan. Shunday qilib ellipsning ekssentrisiteti ε qiymati bo'yicha uning shakli haqida xulosa chiqarish mumkin. Bunda ε qiymati qanchalik nolga yaqin bo'lsa, ellipsning shakli shunchalik "dumaloqroq" ; ε qanchalik birga yaqin bo'lsa, ellipsning shakli shunchalik "cho'zinchoqroq" bo'ladi.

6-TA'RIF:Ellipsning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasidan uning F_1 va F_2 fokuslarigacha bo'lgan $|MF_1|=r_1$ va $|MF_2|=r_2$ masofalar shu nuqtaning ***fokal radiuslari*** deyiladi.

Ellips ta'rifiga asosan $r_1+r_2=2a$ bo'ladi. Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan

$$r_1 = |MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,, \quad r_2 = |MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\;.$$

Fokal radiuslarning bu ifodalarini kvadratga oshirib, so'ngra hosil bo'lgan ifodalarni hadma-had ayirib hamda $r_1+r_2=2a$ ekanligini eslab , r_1 va r_2 uchun ushbu tenglamalar sistemasiga kelamiz:

$$\begin{cases} r_1^2 - r_2^2 = 4cx \\ r_1 + r_2 = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (r_1+r_2)(r_1-r_2) = 4cx \\ r_1 + r_2 = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 - r_2 = \dfrac{2cx}{a} \\ r_1 + r_2 = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 - r_2 = 2\varepsilon x \\ r_1 + r_2 = 2a \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasini yechib, fokal radiuslar uchun quyidagi formulalarni olamiz:

$$r_1 = a + \varepsilon x \qquad r_2 = a - \varepsilon x \qquad (9)$$

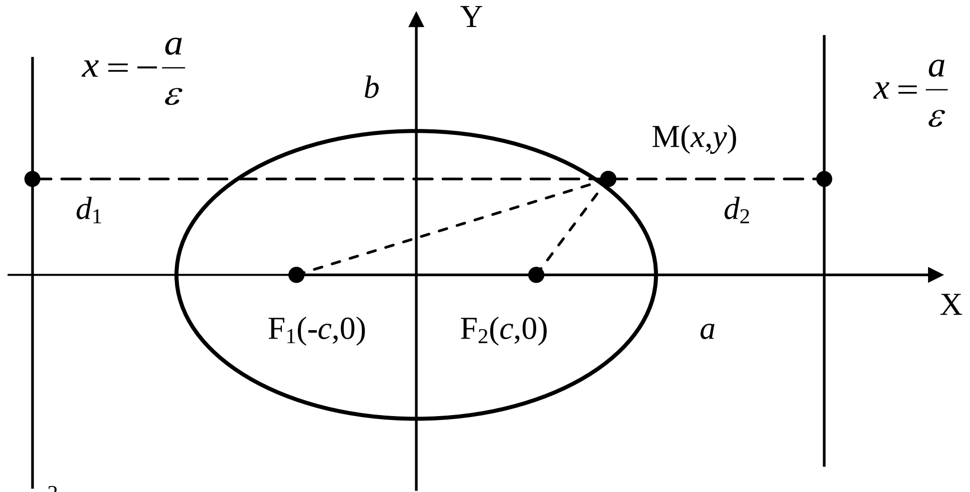
7-TA'RIF:Tenglamasi $x=\pm a/\varepsilon$ bo'lgan vertikal to'g'ri chiziqlar ellipsning ***direktrisalari*** deyiladi.

Ellipsning ixtiyoriy M(x,y) nuqtasidan uning $x=-a/\varepsilon$ va $x=a/\varepsilon$ direktrisalarigacha masofalarni mos ravishda d_1 va d_2 deb belgilaymiz. Quyidagi chizmadan ko‘rinadiki $d_1=(a/\varepsilon)+x$ va $d_2=(a/\varepsilon)-x$. Bu tengliklar va (9) formulaga asosan quyidagi natijani olamiz:

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{a+\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}+x}=\varepsilon\frac{\frac{a}{\varepsilon}+x}{\frac{a}{\varepsilon}+x}=\varepsilon,\quad \frac{r_2}{d_2}=\frac{a-\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}-x}=\varepsilon\frac{\frac{a}{\varepsilon}-x}{\frac{a}{\varepsilon}-x}=\varepsilon\Rightarrow\quad \frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon. \quad \textbf{(10)}$$

Shunday qilib ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan uning OY o‘qiga nisbatan bir tomonda joylashgan fokusi va direktrisasigacha bo‘lgan masofalar nisbati o‘zgarmas son bo‘lib, doimo ε ekssentrisitetiga teng bo‘ladi.

Ellips va uning xarakteristikalari quyidagi rasmda ko‘rsatilgan.



Misol:$x^2+4y^2=4$ tenglama ellipsni ifodalashini ko‘rsating va uning barcha xarakteristikalarini toping.

Yechish: Dastlab berilgan tenglamani ikkala tomonini 4 soniga bo‘lamiz:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1.$$

Bu yerdan berilgan tenglama yarim o‘qlari a=2 va b=1 bo‘lgan ellipsni ifodalashini ko‘ramiz. Unda $c^2=a^2-b^2=3$ bo‘lgani uchun qaralayotgan ellipsning fokuslari F$_1(-\sqrt{3},0)$ va F$_2(\sqrt{3},0)$ nuqtalarda joylashganligini ko‘ramiz. Bu natijalardan foydalanib, ellipsning ekssentrisiteti va direktrisalarini topamiz:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ellipsga tegishli M(x,y) nuqtaning fokal radiuslari

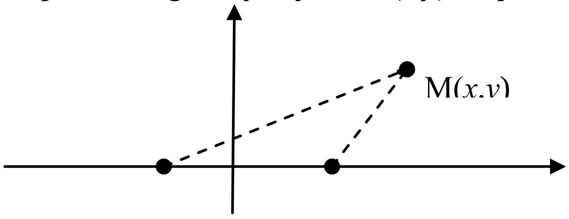
$$r_1=a+\varepsilon x=2+\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ r_2=a+\varepsilon x=2+\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

formulalar bilan topiladi.

5. Giperbola va uning kanonik tenglamasi. Biz II tartibli chiziqlardan birini, ya’ni ellips va uning xususiy holi bo‘lmish aylanani ko‘rib chiqdik va ularning xossalarini o‘rgandik. Bu yerda biz II tartibli chiziqlar bilan tanishishni davom ettirib, ulardan yana ikkitasini qaraymiz.

1-TA'RIF: Tekislikdagi ikkita F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalarining ayirmasining absolut qiymati o'zgarmas $2a$ soniga teng bo'lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o'rni ***giperbola*** deb ataladi. Bunda F_1 va F_2 nuqtalar ***fokuslar*** deyiladi.

Giperbola tenglamasini tuzish uchun fokuslar orasidagi masofani $|F_1F_2|=2c$ deb olamiz Dekart koordinatalar sistemasini xuddi ellips holida ko'rilgan singari olamiz. Unda fokuslar koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'lib, ular koordinatalari orqali $F_1(-c,0)$ va $F_2(c,0)$ ko'rinishda ifodalanadi. Giperboladagi ixtiyoriy bir $M(x,y)$ nuqtani olamiz.



Giperbola ta'rifga asosan $|MF_2| - |MF_1| = \pm 2a$ bo'ladi. Bu tenglikni koordinatalar orqali ifodalab va ellips tenglamasini keltirib chiqarish uchun qilingan soddalashtirishlarni takrorlab, quyidagi tenglamani hosil etamiz:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Bu natija oldin ko'rilgan ellips tenglamasiga o'xshaydi, ammo bu yerda $a^2 - c^2 < 0$ bo'ladi. Haqiqatan ham chizmadagi F_1MF_2 uchburchakdan uchburchak tengsizligiga asosan

$$\big|\,|MF_2| - |MF_1|\,\big| < |F_1F_2| \Rightarrow 2a < 2c \Rightarrow a < c \Rightarrow a^2 - c^2 < 0.$$

Shu sababli $a^2 - c^2 = -b^2$ deb belgilash mumkin va oxirgi tenglamani $a^2(a^2 - c^2)$ songa bo'lib,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = c^2 - a^2) \qquad (1)$$

tenglamani hosil qilamiz.

2-TA'RIF: (1) tenglama giperbolaning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi.

Giperbolaning kanonik tenglamasini tahlil etish orqali uning xususiyatlarini aniqlaymiz.

❖ Giperbolaning (1) kanonik tenglamasida x va y koordinatalar juft darajada qatnashadi. Demak, $M(x,y)$ giperbolada yotgan nuqta bo'lsa, unda ushbu $M_1(-x,y)$, $M_2(-x,-y)$ va $M_3(x,-y)$ nuqtalar ham giperbolaga tegishli bo'ladi, ya'ni giperbola OX va OY koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikdir.

❖ Giperbolaning OX va OY koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz.

$$y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a.$$

Bu yerdan giperbola OX o'qini ikkita $A_1(-a,0)$ va $A_2(a,0)$ nuqtalarda kesib o'tishini ko'ramiz. Bu nuqtalar giperbolaning ***uchlari*** , ular orasidagi $|A_1A_2|=2a$ masofa giperbolaning ***haqiqiy o'qi*** deyiladi.

Agar $x=0$ desak, u holda (1) tenglamadan $y^2 = -b^2 \Rightarrow y \in \varnothing$ natijaga kelamiz. Bundan giperbola OY o'qi bilan kesishmasligi kelib chiqadi. Shu sababli (1) kanonik tenglama orqali aniqlanadigan $B_1(0,-b)$ va $B_2(0, b)$ nuqtalar giperbolaning ***mavhum uchlari***, ular orasidagi $|B_1B_2|=2b$ masofa esa giperbolaning ***mavhum o'qi*** deb ataladi. Mos ravishda a va b sonlariga giperbolaning ***yarim haqiqiy*** va ***yarim mavhum o'qlari*** deyiladi. Giperbolaning o'qlari kesishadigan nuqta uning ***markazi*** deb yuritiladi.

❖ Giperbolaning (1) kanonik tenglamasidan yana quyidagi natijalarni olamiz:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2}\geq 1\Rightarrow|x|\geq a\Rightarrow x\in(-\infty,-a]\cup[a,\infty);$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1\geq 0\Rightarrow|y|\geq 0\Rightarrow y\in(-\infty,\infty).$$

Bu yerdan giperbola $x=-a$ va $x=a$ tenglamali vertikal to‘g‘ri chiziqlardan mos ravishda chap va o‘ng tomonda joylashgan ikkita bo‘lakdan iborat chegaralanmagan chiziq ekanligini ko‘ramiz. Bu bo‘laklar giperbolaning ***tarmoqlari*** deb ataladi.

❖ Giperbola tenglamasini quyidagi ko‘rinishda qaraymiz:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\,.$$

Bu tenglamadan ikkita xulosa kelib chiqadi. Birinchidan, $|x|$ o‘zining eng kichik qiymati a dan boshlab cheksiz oshib borsa, unda $|y|$ qiymatlari 0 dan boshlab cheksiz oshib boradi. Ikkinchidan, $|x|$ oshib borgan sari

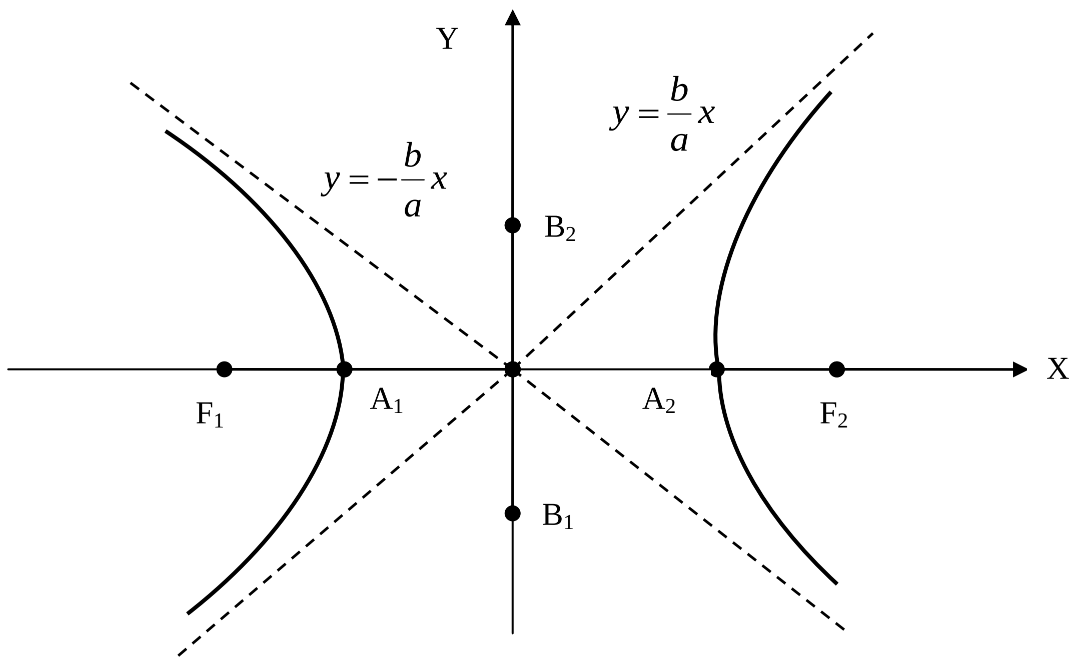
$$\frac{a^2}{x^2}\approx 0\Rightarrow\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\approx 1\Rightarrow y\approx\pm\frac{b}{a}x\,.$$

Demak, $|x|$ oshib borgan sari giperbolaning shoxlari tobora

$$y=\pm\frac{b}{a}x \qquad (2)$$

tenglamaga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlarga yaqinlashib boradi. Bu to‘g‘ri chiziqlar giperbolaning ***asimptotalari*** deb ataladi.

Izoh: Bu ma’lumotlar asosida giperbola shaklini dastlab koordinatalar tekisligining I choragida ($x\geq 0$, $y\geq 0$), so‘ngra esa uning simmetrikligidan foydalanib, qolgan choraklarda aniqlaymiz. Natijada giperbolani va uning ikkita asimptotasini ifodalovchi quyidagi rasmni hosil etamiz:



6.Giperbolaning xarakteristikalari. Endi giperbolaning xususiyatlarini ifodalovchi ayrim xarakteristikalar bilan tanishamiz.

3-TA'RIF: Giperbolani fokuslari orasidagi $2c$ masofani uning haqiqiy o'qi uzunligi $2a$ ga nisbati giperbolaning ***ekssentrisiteti*** deyiladi.

Giperbolaning ekssentrisiteti ε kabi belgilanadi va uning ta'rifi hamda (1) kanonik tenglamaga asosan quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}\ . \qquad (3)$$

Bu formuladan ko'rinadiki, giperbolaning ekssentrisiteti $\varepsilon>1$ bo'ladi va uning tarmoqlarini shaklini aniqlashtiradi. Agar ε qiymati birga qanchalik yaqin bo'lsa, giperbolaning tarmoqlari OX o'qiga qarab shunchalik siqiq, ε qiymati oshib borgan sari esa shunchalik yoyiq bo'ladi.

4-TA'RIF:Giperbolaning $M(x,y)$ nuqtasidan uning F_1 va F_2 fokuslarigacha bo'lgan masofalar shu nuqtaning ***fokal radiuslari*** deyiladi.

Bu fokal radiuslar $r_1=|MF_1|$ va $r_2=|MF_2|$ kabi belgilanadi. Ellipsning fokal radiuslarini topish uchun bajarilgan ishlarni takrorlab, giperbolaning fokal radiuslari uchun ushbu formulalarni hosil etamiz:

$$r_1=\pm(a+\varepsilon x),\qquad r_2=\pm(a-\varepsilon x) \qquad (4)$$

Bunda giperbolaning O koordinata boshidan o'ng tomonda joylashgan tarmog'i uchun "+", chap tomondagi tarmog'i uchun esa "–" ishorasi olinadi.

5-TA'RIF: Tenglamalari $x=\pm a/\varepsilon$ bo'lgan ikkita l_1 va l_2 vertikal to'g'ri chiziqlar ***g***iperbolaning ***direktrisalari*** deb ataladi.

Giperbolada ektsentrisitet $\varepsilon>1$ bo'lgani uchun $a/\varepsilon<a$. Demak, giperbolaning direktrisalari uning O markaz bilan A_1 va A_2 uchlari orasida joylashgan bo'ladi.

TEOREMA: Giperboladagi ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtaning r_1 va r_2 fokal

radiuslarining shu nuqtadan mos l_1 va l_2 direktrisalarigacha bo'lgan d_1 va d_2 masofalarga nisbati o'zgarmas bo'lib, bu nisbat ektsentrisitetga teng bo'ladi, ya'ni

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{d_1}{d_2}=\varepsilon\ .$$

Teoremani isboti ellips uchun ko'rilgan usulda amalga oshiriladi va o'quvchiga havola qilinadi.Endi (1) kanonik tenglamada $a=b$ bo'lgan holni alohida ko'rib chiqamiz.Bu holda giperbola ***teng yonli*** deyiladi. Teng yonli giperbolaning asimptotalari $qi\pm x$ tenglama bilan aniqlanib, koordinata burchaklarining bissektrisalaridan iborat va o'zaro perpendikular bo'ladi. Bu asimptotalarni OX^* va OY^* koordinata o'qlari sifatida olsak, unda bu yangi koordinatalar sistemasida giperbolaning tenglamasi bizga maktabdan tanish bo'lgan $x^*\cdot y^*=k\Rightarrow y^*=k/x^*$ ($k\neq0$)ko'rinishga keladi. Bunda $k>0$ bo'lsa giperbola tarmoqlari koordinata tekisligining I va III choraklarida, $k<0$ holda esa II va IV choraklarda joylashgan bo'ladi.Iqtisodiy masalalarni qarashda ***kasr – chiziqli*** deb ataladigan va

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\qquad (c\neq0, bc-ad\neq0) \qquad (5)$$

ko'rinishda bo'lgan tenglama ko'p uchraydi. Masalan, iqtisodchi olim Tornkvist odamlarning daromadlari x va turli tovarlarga bo'lgan talablari y orasidagi bog'lanishning matematik modelini kasr – chiziqli tenglama ko'rinishda qarash kerakligini asoslab bergan. Bu model x daromad oshib borishi bilan y talab ham dastlab oshib borishi, ammo borgan sari bu o‘sish sekinlashib, ma’lum bir chegaradan ortiq bo‘la olmasligini akslantiradi.

Agar ko‘rsatilgan kasr – chiziqli tenglamada yangi

$$x^{*}=x+\frac{d}{c},\ y^{*}=y-\frac{a}{c}$$

koordinatalarga o‘tsak va $k=(bc-ad)/c^2$ belgilash kiritsak, unda (5) $y^*=k/x^*$ ko‘rinishga kelishini tekshirib ko‘rish mumkin. Demak, (5) kasr – chiziqli tenglama teng yonli giperbolani ifodalaydi. Bu teng yonli giperbolaning asimptotalari $x=-d/c$ vertikal va $y=a/c$ gorizontal to‘g‘ri chiziqlardan iborat, markazi esa $M(-d/c,\ a/c)$ nuqtada joylashgan bo‘ladi.

Misol: Quyidagi kanonik tenglamasi bilan berilgan giperbolaning barcha xarakteristikalarini toping:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\cdot$$

Bu giperbolaning abssissasi $x=8$, ordinatasi $y>0$ bo‘lgan M nuqtasining fokal radiuslarini aniqlang.

***Ye*chish:** Berilgan tenglamani (1) kanonik tenglama bilan taqqoslab, giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o‘qlari $a=4$, $b=3$ ekanligini ko‘ramiz. Bu holda $c^2=a^2+b^2=16+9=25$ $\Rightarrow c=5$ bo‘lgani uchun giperbolaning fokuslari $F_1(-5{,}0)$ va $F_2(5{,}0)$ nuqtalarda joylashganligini aniqlaymiz. Berilgan giperbolaning asimptotalari

$$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{3}{4}x=\pm 0{,}75x\,,$$

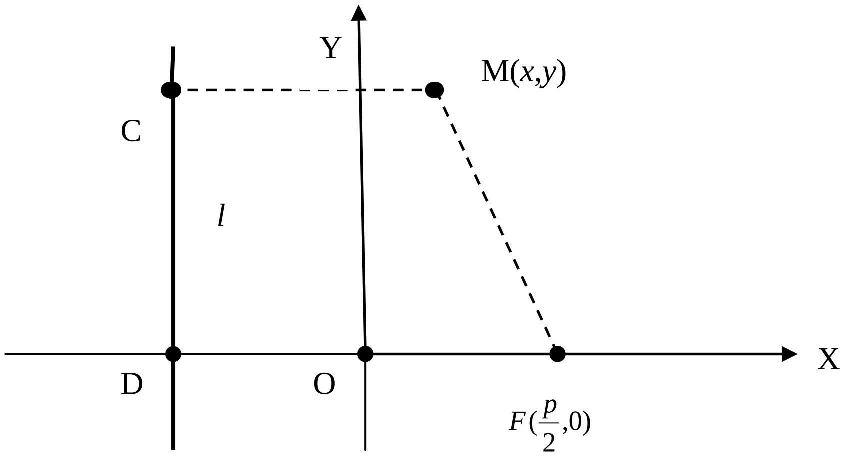
ekssentrisiteti $\varepsilon=c/a=5/4=1{,}25$, direktrisalarining tenglamasi esa $x=\pm a/\varepsilon=\pm 4/1{,}25=\pm 3{,}2$ bo‘ladi. Endi giperbolaning berilgan $M(8,y)$ nuqtasining fokal radiuslarini topamiz. Bu nuqta giperbolaning o‘ng shoxida joylashgan va shu sababli (4) formulani “+” ishora bilan qaraymiz:

$r_1=a+\varepsilon x=4+1{,}25\cdot 8=14, \qquad r_2=-a+\varepsilon x=-4+1{,}25\cdot 8=6.$

7.Parabola, uning kanonik tenglamasi va xarakteristikalari. Bizga parabola maktabdan ma’lum bo‘lib, u $y=ax^2+bx+c$ kvadratik funksiyaning grafigi singari qaralgan edi. Endi bu tushunchaga ma’lum bir xossaga ega II tartibli chiziq singari yondashamiz.

6-TA’RIF: Berilgan F nuqta va l to‘g‘ri chiziqqacha masofalari o‘zaro teng bo‘lgan tekislikdagi nuqtalarining geometrik o‘rni ***parabola*** deb aytiladi. Bunda F nuqta ***fokus***, l to‘g‘ri chiziq esa ***direktrisa*** deyiladi.

Parabola tenglamasini topish uchun OX koordinata o‘qini F fokusdan o‘tuvchi va l direktrisaga perpendikular qilib, OY o‘qini esa F va l o‘rtasidan o‘tkazamiz. Fokusdan direktrisagacha bo‘lgan masofani $|FD|=p>0$ deb belgilaymiz. Unda fokusning koordinatalari $F(p/2{,}0)$, direktrisa tenglamasi esa $x=-p/2$ bo‘ladi. Parabolaga tegishli ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtani olamiz va uning l direktrisadagi proyeksiyasini C deb belgilaymiz.



Parabola ta’rifiga ko‘ra |MC|=|MF|. Bu tenglikni koordinatalar orqali ifodalab va uni soddalashtirib, ushbu natijani olamiz:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right| \Rightarrow \left(\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}\right)^2=\left|x+\frac{p}{2}\right|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-xp+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+xp+\frac{p^2}{4} \Rightarrow y^2=2px$$

Demak, ko‘rilayotgan parabola

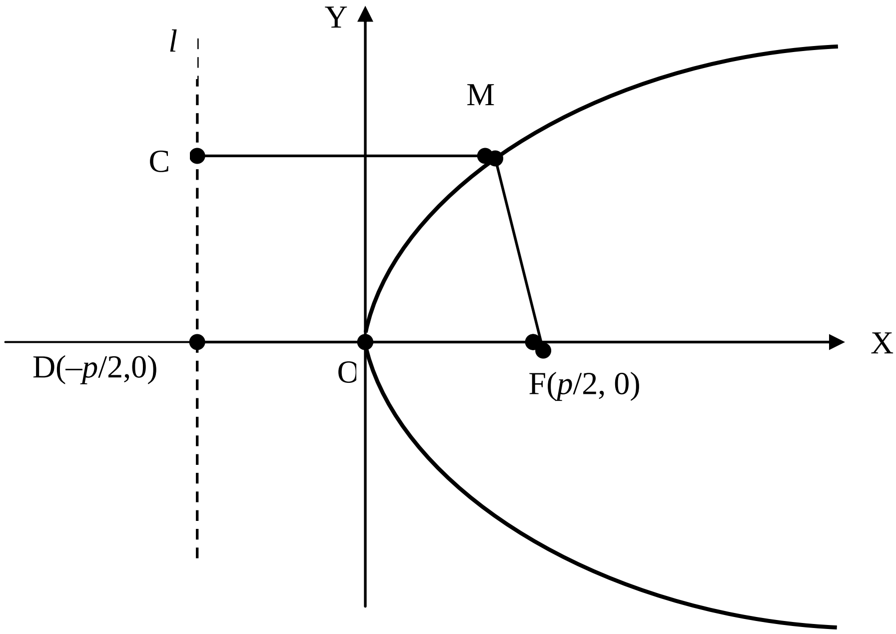
$$y^2=2px \qquad (6)$$

tenglama bilan ifodalanadi.

<u>7-TA’RIF:</u> (6) tenglama parabolaning ***kanonik tenglamasi***, p ($p>0$)esa uning ***parametri*** deyiladi.

Parabolaning kanonik tenglamasini tahlil etamiz.

- $y^2 \geq 0$, $p>0 \Rightarrow x \geq 0$. Demak, parabola O koordinata boshidan o‘ng tomonda joylashgan.
- Bunda O(0,0) koordinata boshi (6) tenglamani qanoatlantiradi va shu sababli parabolada yotadi. O nuqta parabolaning ***uchi*** deb ataladi.
- (6) tenglamada y kvadrati bilan qatnashgani uchun M(x,y) parabolaga tegishli nuqta bo‘lsa, unda N(x,–y) nuqta (6) tenglamani qanoatlantiradi, ya’ni parabolaga tegishli bo‘ladi.BundanbizningparabolaOXo‘qiganisbatansimmetrikekanligikelibchiqadi.
- Agar (6) kanoniktenglamada$x$o‘zining 0 qiymatidanboshlabo‘sibborsa, unda |y| ham 0 qiymatdanboshlabo‘sibboradi. Demak, parabola chegaralanmagan chiziq ekan.
- Bu ma’lumotlar asosida dastlab parabola shaklini I chorakda ($x \geq 0$, $y \geq 0$) aniqlab, so‘ngra OX o‘qiga simmetrik tarzda davom ettiramiz. Natijada parabola quyidagi ko‘rinishda ekanligini aniqlaymiz;



Parabolaning ixtiyoriy M nuqtasidan *l* direktirisagacha bo‘lgan masofani $|MC|=d$, F fokusigacha bo‘lgan masofani $|MF|=r$ (fokal radius) deb belgilaymiz. Unda parabola ta’rifga asosan $r=d=x+p/2$ bo‘ladi. Ellips va giperbolani qaraganimizda ularning ekssentrisiteti uchun $\varepsilon=r/d$ tenglik o‘rinli bo‘lishini ko‘rgan edik. Bu tenglikni ε ekssentrisitetning ta’rifi sifatida olsak, unda parabola uchun $\varepsilon=r/d=1$ bo‘ladi.

Demak, ε ekssentrisitet qiymatiga qarab II tartibli chiziqning ko‘rinishini aniqlash mumkin ekan. Agar $\varepsilon=0$ bo‘lsa – aylana , $0<\varepsilon<1$ bo‘lsa – ellips , $\varepsilon=1$ bo‘lsa – parabola va $\varepsilon>1$ bo‘lsa – giperbolaga ega bo‘lamiz.

Misol: OX o‘qi parabolaning simmetriya o‘qi bo‘lib, uning uchi koordinatalar boshida yotadi. Parabola uchidan fokusigacha bo‘lgan masofa 4 birlikka teng. Parabola va uning direktrisasi tenglamasini toping.

Yechish: Dastlab, masala shartiga asosan, parabolaning *p* parametrini topamiz:

$$|OF|=4 \Rightarrow p/2=4 \Rightarrow p=8.$$

Unda, (5) formulaga asosan, parabola tenglamasini topamiz:

$$y^2=2px \Rightarrow y^2=2\cdot 8x=16x.$$

Bu yerdan direktrisa tenglamasi $x=-p/2 \Rightarrow x=-4$ ekanligini ko‘ramiz.

Shuni ta’kidlab otish kerakki, $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ kvadrat uchhadning grafigi uchi koordinatalari

$$x_0=-\frac{b}{2a}\,,\;\; y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

bo‘lgan $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada, simmetriya o‘qi esa OY o‘qiga parallel va $x=-b/2a$ tenglamaga ega bo‘lgan vertikal to‘g‘ri chiziqdan tashkil topgan paraboladan iboratdir. Agar $a>0$ bo‘lsa, parabola yuqoriga, $a<0$ bo‘lsa, pastga yo‘nalgan bo‘ladi.

Parabolaning iqtisodiy tatbig‘iga doir bir misol keltiramiz. Ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi *x*, uning bir birligining narxi *P* va ishlab chiqarish xarajatlari *Z* bo‘lsa , bu ko‘rsatkichlar

$P=ax+b$ ($a<0$) va $Z=cx+d$ ($c>0$) ko‘rinishda chiziqli bog‘langan deb olish mumkin. Unda bu mahsulotni sotishdan olingan tushum T va foyda F bilan mahsulot hajmi x orasidagi bog‘lanish

$$T=Px=ax^2+bx\ ,\ \ F=T-Z=ax^2+bx-(cx+d)=ax^2+(b-c)x-d$$

ko‘rinishdagi kvadrat uchhadlar, ya’ni parabolalar orqali ifodalanadi.

Tayanch iboralar

* Ikki o‘zgaruvchili II tartibli tenglamalar * Tekislikdagi II tartibli chiziqlar
* Aylana * Aylana markazi * Aylana radiusi * Aylananing normal tenglamasi
* Aylananing kanonik tenglamasi * Aylananing umumiy tenglamasi * Ellips
* Ellipsning fokuslari * Ellipsning kanonik tenglamasi * Ellipsning uchlari
* Ellips o‘qlari * Fokal radiuslar * Ellips ekssentrisiteti * Ellips direktrisalari.

Takrorlash uchun savollar

1. Ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko‘rinishi qanday bo‘ladi?
2. Aylana qanday ta’riflanadi?
3. Aylananing normal tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
4. Aylananing kanonik tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
5. Aylananing umumiy tenglamasini yozing va u bo‘yicha aylana markazi hamda radiusi qanday topilishini ko‘rsating.
6. Ellips qanday ta’riflanadi?
7. Ellipsning kanonik tenglamasini yozing va undagi parametrlar ma’nosini ko‘rsating.
8. Ellipsning ekssentrisiteti qanday aniqlanadi va u nimani ifodalaydi?
9. Ellipsning fokal radiuslari deb nimaga aytiladi va ular qanday topiladi?
10. Ellips direktrisalari deb nimaga aytiladi?

Testlardan namunalar

1. Markazi M(a,b) nuqtada va radiusi R bo‘lgan aylana tenglamasini ko‘rsating.
   A) $(x+a)^2+(y+b)^2=R^2$; B) $(x+b)^2+(y+a)^2=R^2$; C) $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$;
   D) $(x-b)^2+(y-a)^2=R^2$; E) $(x-a)^3+(y-b)^3=R^3$.
2. Umumiy ko‘rinishdagi II tartibli $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$tenglama aylanani ifodalashi uchun B koeffitsient qanday shartni qanoatlantirishi kerak ?
   A) $B>0$; B) $B<0$; C) $B\neq0$; D) $B=0$; E) $B\geq0$.
3. Aylananing umumiy tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi ?
   A)$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0$; B) $Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$;
C)$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey=0$; D)$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$;
E) $Ax^2+Ay^2+F=0$ **.**
4. Umumiy tenglamasi $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ bo‘lgan aylananing radiusini toping.
   A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) 6.
5. Umumiy tenglamasi $x^2+y^2-6x-4y-3=0$ bo‘lgan aylananing $M_0(x_0,y_0)$ markazini toping.
   A) $M_0(-2,-3)$; B) $M_0(2,3)$; C) $M_0(-3,-2)$; D) $M_0(3,2)$; E) $M_0(-3,2)$.
6. II tartibli $x^2+y^2-4x+2y+F=0$ tenglama aylanani ifodalashi uchun ozod had F qanday shartni qanoatlantirishi kerak ?
   A) $F=5$; B) $F<5$; C) $F>5$; D) $F\neq5$; E) $|F|=5$.
7. Ta`rifni to‘ldiring: Berilgan ikkita nuqtalargacha masofalar … o‘zgarmas son bo‘lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni ellips deyiladi.
   A) ayirmasi; B) ko‘paytmasi; C) yig‘indisi;
   D) bo‘linmasi; E) kvadratlarining yig‘indisi.
8. Yarim o‘qlari a va b bo‘lganellipsning kanonik tenglamasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan ?

A) $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$; B) $a^2x^2 - b^2y^2 = 1$; C) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

D) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; E) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

9. Yarim o‘qlari a=5 va b=4 bo‘lgan ellipsning fokuslari F(±C, 0) nuqtalarda joylashgan bo‘lsa , C qiymatini toping.
   A) 5; B) 4; C) 3; D) 2; E) 1.
10. Ellipsning ekssentrisiteti ε qanday shartni qanoatlantiradi ?
   A) ε>0; B) ε<0 ; C) ε≠0 ; D) ε=0; E) 0<ε<1.
11. Ekssentrisitetning qanday qiymatida ellips aylanaga o‘tadi ?
   A) ε>0; B) ε<0; C) ε≠0; D) ε=0; E) ε=1.

<u>Mustaqil ish topshiriqlari</u>

1. Ushbu II tartibli tenglama aylanani ifodalashini ko‘rsating:

$$x^2+y^2+2(n+1)x+2(n-1)y-2n=0\cdot$$

Bu aylananing normal tenglamasi, M(a,b) markazi va R radiusini toping.

2. Kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{(n+2)^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ bo‘lgan ellips uchun quyidagilarni aniqlang:

a) ellips uchlarining koordinatalarini b) fokuslar koordinatalarini;

c) fokuslar orasidagi masofani; d) direktrisa tenglamalarini;

e) ekssentrisitet qiymatini ; f) fokal radiuslar tenglamalarini.

4-MODUL. FAZODA ANALITIK GEOMETRIYA.

8-mavzu. Fazoda tekislikning vektor, umumiy, normal tenglamalari. Tekislikning o’zaro joylashishi.Tekisliklar orasidagi burchak. Tekislikning o’zaro parallellik va perpendikulyarlik shartlari. Tekisliklar dastasi.

REJA:

1. Fazoda analitik geometriya predmeti va asosiy masalalari.

2. Tekislik va uning turli tenglamalari.

3. Fazod ikki tekislik orasidagi burchak.

1.Fazoda analitik geometriya predmeti va asosiy masalalari. Fazoda Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo‘lsin. Bu holda undagi har bir M nuqta uning ***koordinatalari*** deb ataladigan (x, y, z) sonlar uchligi bilan to‘liq aniqlanishi va M(x, y, z) kabi yozilishi oldin (III bob, §2) aytib o‘tilgan edi. Fazodagi sirt va chiziqlarni M(x, y, z) nuqtalar to‘plami kabi qarash mumkin. Fazoda biror S sirt va

$$F(x, y, z)=0 \qquad (*)$$

tenglama berilgan bo‘lsin.

<u>1-TA‘RIF:</u> Agar (*) tenglamani faqat S sirtga tegishli M(x, y, z) nuqtalarning koordinatalari qanoatlantirsa, u bu sirtning ***tenglamasi*** deb ataladi.

Agarda $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqta uchun $F(x_0,y_0,z_0)=0$ shart bajarilsa (tenglama qanoatlantirilsa), M_0 nuqta shu tenglama bilan aniqlanadigan S sirtga tegishli, aks holda esa tegishli bo‘lmaydi. Shunday qilib sirt o‘zining tenglamasi bilan to‘liq aniqlanadi. Ammo har qanday tenglama ham biror sirtni ifodalashi shart emas. Masalan, $x^2+ y^4+z^6=0$ tenglamani faqat bitta O(0,0,0) nuqta koordinatalari qanoatlantiradi va shu sababli bu tenglama sirtni ifodalamaydi. Shuningdek, $x^2+y^2+z^2+1=0$ tenglamani fazodagi birorta ham nuqtaning koordinatalari qanoatlantirmaydi va u bo‘sh to‘plamni ifodalaydi.

Fazodagi chiziqlarni tenglamalari $F_1(x, y, z)=0$ va $F_2(x, y, z)=0$ bo‘lgan S_1 va S_2 sirtlarning kesishish chizig‘i singari qarash mumkin. Bu holda chiziqdagi barcha M(x, y, z) nuqtalarning koordinatalari

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad (**)$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi.

<u>2-TA‘RIF:</u> Agar (**) tenglamalar sistemasini faqat fazodagi L chiziqning M(x, y, z) nuqtalarning koordinatalari qanoatlantirsa, u bu chiziqning ***tenglamasi*** deb ataladi.

<u>3-TA‘RIF:</u>Fazodagi sirt va chiziqlarni ularning tenglamalari orqali o‘rganuvchi matematik fan ***analitik geometriya*** deb ataladi.

Fazodagi analitik geometriyada asosan ikkita masala qaraladi:

1. Berilgan sirtn yoki chiziqning tenglamasini topish va uni analitik o‘rganish.
2. Berilgan tenglamaga mos keluvchi sirtn yoki chiziqni aniqlash.

Masala: Markazi M(a,b,c) nuqtada joylashgan R radiusli sfera tenglamasini toping.

Yechish: N(x,y,z) shu sferaga tegishli ixtiyoriy bir nuqta bo‘lsin. Sfera |MN|=R shartni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plamidan (geometrik o‘rnidan) iboratdir. Unda ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko‘ra sferaning ushbu tenglamasini hosil etamiz:

$$|MN|=R\Rightarrow\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=R\Rightarrow$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Masalan, markazi M(2,3,–1) va radiusi R=5 bo‘lgan sfera tenglamasi
$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 25$
tenglamaga ega bo‘ladi. Bu yerdan N(5,7,–1) nuqta shu sferaga tegishli ekanligi kelib chiqadi, chunki
$(5-2)^2 + (7-3)^2 + (1-1)^2 = 25.$
K(2,6,3) nuqta bu sferada yotmaydi, chunki uning koordinatalari sferaning tenglamasini qanoatlantirmaydi:
$(2-2)^2 + (6-3)^2 + (3-1)^2 = 13 \neq 25.$

Tenglamalari $x^2 + y^2 + (z+4)^2 = 20$ va $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ bo‘lgan sferalarning kesishish chizig‘i L

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z+4)^2 = 20 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi. Bu sistemadagi tenglamalarni ayirib, $z=0$ ekanligini topamiz. Bu yerdan L chiziq XOY koordinata tekisligida joylashgan va tenglamasi $x^2 + y^2 = 4$ bo‘lgan aylanadan iborat ekanligini ko‘ramiz.

---

2. Tekislik va uning turli tenglamalari. Tekislik geometriyaning boshlang‘ich tushunchalariga kiradi va shu sababli ta’rifsiz qabul etiladi.

***a).* Tekislikning umumiy tenglamasi.**

TEOREMA: 1). Fazodagi har qanday tekislikning tenglamasi uch o‘zgaruvchili chiziqli tenglamadan iborat, ya’ni

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bunda $A^2+B^2+C^2 \neq 0$ shart bajarilishi kerak.

2) Har qanday (1) chiziqli tenglama fazoda biror tekislikni aniqlaydi.

3-TA‘RIF: (1) tenglama tekislikning ***umumiy tenglamasi*** deb ataladi. Berilgan P tekislikka perpendikulyar bo‘lgan har qanday vektor bu tekislikning ***normal vektori*** yoki qisqacha ***normali*** deb ataladi.

Oldingi teoremani isbotlash jarayonidan (1) umumiy tenglamasi bilan berilgan tekislik uchun $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ normal vektor bo‘lishi kelib chiqadi. Bu natija kelgusida juda ko‘p qo‘llaniladi.

Endi P tekislikning (1) umumiy tenglamasini ayrim xususiy hollarda tahlil etamiz.

1. $D=0 \Rightarrow Ax+By+Cz=0 \Rightarrow 0(0,0,0) \in P$, ya’ni P tekislik koordinatalar boshidan o‘tadi.
2. $A=0 \Rightarrow By+Cz+D=0 \Rightarrow \boldsymbol{n}=(0,B,C) \perp OX \Rightarrow P \parallel OX$, ya’ni P tekislik OX o‘qiga parallel bo‘ladi.
3. $B=0 \Rightarrow Ax+Cz+D=0 \Rightarrow \boldsymbol{n}=(A,0,C) \perp OY \Rightarrow P \parallel OY$.
4. $C=0 \Rightarrow Ax+By+D=0 \Rightarrow \boldsymbol{n}=(A,B,0) \perp OZ \Rightarrow P \parallel OZ$.
5. $A=0$, $D=0 \Rightarrow By+Cz=0 \Rightarrow 0(0,0,0) \in P$, $P \parallel OX \Rightarrow OX \subset P$, ya’ni P tekislik OX o‘qidan o‘tadi.
6. $B=0$, $D=0 \Rightarrow Ax+Cz=0 \Rightarrow 0(0,0,0) \in P$, $P \parallel OY \Rightarrow OY \subset P$.
7. $C=0$, $D=0 \Rightarrow Ax+By=0 \Rightarrow 0(0,0,0) \in P$, $P \parallel OZ \Rightarrow OZ \subset P$.
8. $A=0$, $B=0 \Rightarrow Cz+D=0 \Rightarrow z=-D/C \Rightarrow P \parallel OX$, $P \parallel OY \Rightarrow P \parallel XOY$,
ya’ni P tekislik XOY tekisligiga parallel bo‘ladi.

9. $A=0$, $C=0 \Rightarrow By+D=0 \Rightarrow y=-D/B \Rightarrow P \parallel OX$, $P \parallel OZ \Rightarrow P \parallel XOZ$.
10. $B=0$, $C=0 \Rightarrow Ax+D=0 \Rightarrow x=-D/A \Rightarrow P \parallel OY$, $P \parallel OZ \Rightarrow P \parallel YOZ$.

11. A=0, B=0, D=0 $\Rightarrow$ Cz=0 $\Rightarrow z$=0 $\Rightarrow P$=XOY .
12. A=0, C=0, D=0$\Rightarrow$By=0 $\Rightarrow y$=0 $\Rightarrow P$=XOZ .
13. B=0, C=0, D=0$\Rightarrow$ Ax=0 $\Rightarrow x$=0 $\Rightarrow P$=YOZ .

b).Tekislikning kesmalardagi tenglamasi. Fazoda koordinatalar boshidan o‘tmaydigan hamda OX, OY va OZ koordinata o‘qlarini mos ravishda $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$ va $M_3(0,0,c)$nuqtalarda kesib o‘tuvchi P tekislik tenglamasini tuzamiz. Buning uchun tekislikning umumiy Ax+By+Cz+D =0 (D$\neq$0) tenglamasidan foydalanamiz. Bu yerdagi noma’lum A, B va C koeffitsientlarni quyidagi mulohazalardan topamiz:

$$M_1(a,0,0) \in P \Rightarrow \mathrm{A}a + \mathrm{D} = 0 \Rightarrow \mathrm{A} = -\mathrm{D}/a;$$
$$M_2(0,b,0) \in P \Rightarrow \mathrm{B}b + \mathrm{D} = 0 \Rightarrow \mathrm{B} = -\mathrm{D}/b;$$
$$M_3(0,0,c) \in P \Rightarrow \mathrm{C}c + \mathrm{D} = 0 \Rightarrow \mathrm{C} = -\mathrm{D}/c.$$

A,B va C koeffitsientlar uchun topilgan bu ifodalarni umumiy tenglamaga qo‘yib va D$\neq$0 ekanligini hisobga olib, ushbu natijani hosil etamiz:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow -\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -D\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (2)$$

Demak, yuqorida berilgan ma’lumotlar asosida, tekislik tenglamasini (2) ko‘rinishda yozish mumkin. Bunda $|a|$, $|b|$ va $|c|$ qaralayotgan P tekislikni OX, OY va OZ koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalarini ifodalaydi va shu sababli quyidagi ta’rif kiritiladi.

4-TA‘RIF: (2) tenglama tekislikning ***kesmalardagi tenglamasi*** deyiladi.

Agar koordinata boshidan o‘tmaydigan tekislik (1) umumiy tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa (A,B,C,D$\neq$0), uning kesmalardagi tenglamasiga o‘tish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow -D\left(\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} - 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1 \Rightarrow a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}.$$

Demak, umumiy tenglamadan kesmalardagi tenglamaga o‘tish uchun uni ozod hadining qarama-qarshisiga bo‘lish kerak.

Masala: Umumiy $3x–4y+z–5=0$ tenglamasi bilan berilgan tekislikning kesmalardagi tenglamasini toping.

Yechish: Umumiy tenglamani –D=5 soniga bo‘lib, (2) tenglamada

$$a = -\frac{D}{A} = \frac{5}{3}, \quad b = -\frac{D}{B} = -\frac{5}{4}, \quad c = -\frac{D}{C} = +\frac{5}{1} = 5$$

ekanligini topamiz. Bundan berilgan tekislikning kesmalardagi tenglamasi

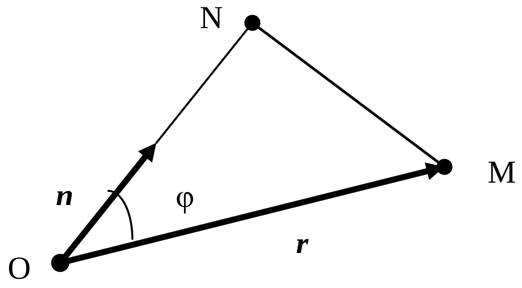
$$\frac{x}{5/3} + \frac{y}{-5/4} + \frac{z}{5} = 1$$

ekanligi kelib chiqadi.

c). Tekislikning normal tenglamasi. Berilgan P tekislikka O koordinata boshidan o‘tkazilgan perpendikularning asosini N deb belgilaymiz. Bu perpendikular uzunligi $|ON|=p$ (ya’ni koordinata boshidan P tekislikkacha bo‘lgan masofa) va uning OX,OY,OZ koordinata o‘qlari bilan mos ravishda hosil etgan α, β, γ burchaklar ma’lum deb olamiz. Tekislikning ON perpendikularda joylashgan va O nuqtadan N nuqtaga qarab yo‘nalgan normal birlik vektorini ***n*** deb belgilaymiz. Bunda uning koordinatalari ***n***=(cosα, cosβ, cosγ) bo‘ladi. P tekislikda yotuvchi ixtiyoriy M(x,y,z) nuqtani olsak, uning radius vektori ***OM***=***r***=(x,y,z) bo‘ladi. Endi ***n***·***r*** skalyar ko‘paytmani ikki usulda hisoblaymiz. Agar bu vektorlar orasidagi burchakni φ deb olsak, unda skalyar ko‘paytmaning ta’rifiga asosan (quyidagi 36-rasmga qarang)

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{r}|\cdot\cos\varphi=1\cdot|\boldsymbol{r}|\cdot\cos\varphi=|\boldsymbol{r}|\cdot(|ON|/|\boldsymbol{r}|)=|ON|=p$$

tenglikka ega bo‘lamiz.



Ikkinchi tomondan, skalyar ko‘paytmaning koordinatalardagi ifodasiga asosan,

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r} = x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$$

tenglikni hosil etamiz. Bu yerdan ko‘rinadiki P tekislikdagi har bir M(x,y,z) nuqtaning koordinatalari

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p\Rightarrow x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \qquad (3)$$

tenglamani qanoatlantiradi va aksincha, (3) tenglamani qanoatlantiruvchi har bir M(x,y,z) nuqta P tekislikka tegishli bo‘ladi.

5-TA‘RIF: (3) tenglama tekislikning ***normal tenglamasi*** deyiladi.

Endi (1) umumiy tenglamasi bilan berilgan tekislikning normal tenglamasini topish masalasini ko‘ramiz. Buning uchun dastlab quyidagi lemmani isbotlaymiz.

LEMMA: Agar ikkita $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tenglamalar bitta P tekislikni ifodalasa, unda ularning mos koeffitsiyentlari va ozod hadlari proporsional bo‘ladi , ya’ni

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

Masala: Tekislikning $2x-y+2z-5=0$ umumiy tenglamasidan normal tenglamasiga o‘ting.

Yechish: Normallashtiruvchi μ ko‘paytuvchini topamiz va berilgan umumiy tenglamani unga ko‘paytirib, normal tenglamani topamiz:

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{1}{3}\Rightarrow \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z-\frac{5}{3}=0\,.$$

Bunda ozod had D=–5<0 bo‘lgani uchun μ ishorasi musbat qilib olindi va normal tenglamada

$$\cos\alpha=\frac{2}{3},\quad \cos\beta=-\frac{1}{3},\quad \cos\gamma=\frac{2}{3},\quad p=\frac{5}{3}$$

bo‘ladi.

d). Berilgan nuqtadan o‘tuvchi tekisliklar dastasi tenglamasi.

Berilgan $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi barcha tekisliklar tenglamasini toping.

Izlanayotgan tekisliklarning umumiy tenglamasi

$Ax+By+Cz+D=0$
ko‘rinishda bo‘ladi. Masala shartiga asosan $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqta bu tekisliklarda yotadi va shuning uchun uning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi, ya’ni
$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$
tenglik o‘rinli bo‘ladi. Hosil bo‘lgan bu tenglikni yuqoridagi umumiy tenglamadan ayirib,
$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ (4)
tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu berilgan $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi tekisliklar tenglamasini ifodalaydi. Undagi A, B va C koeffitsiyentlarga turli qiymatlar berib, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi turli tekisliklarni hosil qilamiz.

Masalan, $M_0(3,-4,1)$ nuqtadan o‘tuvchi tekisliklar tenglamasi

$$A(x-3)+B(y+4)+C(z-1)=0 \Rightarrow Ax+By+Cz+(-3A+4B-C)=0$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

e). Fazodagi bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta nuqtalar o‘tuvchi tekislik tenglamasi.

Izlanayotgan tekislikka tegishli va yuqorida berilgan uchta nuqtalardan farqli bo‘lgan ixtiyoriy bir $M(x,y,z)$ nuqtani olamiz. Bu nuqtalar orqali

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\vec{r}_1,\quad \overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)=\vec{r}_2,$$

$$\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)=\vec{r}_3$$

vektorlarni hosil etamiz. Bu vektorlarning uchalasi ham biz izlayotgan tekislikda yotadi, ya’ni komplanar bo‘ladi. Shu sababli, vektorlarning komplanarlik shartiga asosan, ularning aralash ko‘paytmasi nolga teng bo‘ladi. Bu aralash ko‘paytmani vektorlarning koordinatalari orqali ifodalab,

$$\vec{r}_1\vec{r}_2\vec{r}_3=\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (5)$$

tenglamani olamiz. (5) berilgan uchta nuqtadan o‘tuvchi tekislikning tenglamasini ifodalaydi.

Misol sifatida berilgan uchta $M_1(1,2,3)$, $M_2(-1,0,0)$ va $M_3(3,0,1)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini topamiz:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$-4(x-1)+6(y-2)-4(z-3)-4(z-3)+4(y-2)+6(x-1)=0\Rightarrow$$

$$2(x-1)+10(y-2)-8(z-3)=0 \Rightarrow (x-1)+5(y-2)-4(z-3)=0\Rightarrow x+5y-4z+1=0.$$

f). Berilgan tekislikka parallel va berilgan nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi.

Berilgan P_0 tekislikning umumiy tenglamasi

$$A_0x+B_0y+C_0z+D_0=0$$

bo‘lsin. (1) natijaga asosan $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi ixtiyoriy P tekislik tenglamasi

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu tenglamadagi A,B va C koeffitsiyentlarni P_0 va$P$tekisliklarning parallellik shartidan, ya’ni (5) nisbatlar tengligidan topiladi. Bunda $A=A_0$, $B=B_0$ va $C=C_0$ deb olsak, (5) nisbatlar birga teng bo‘ladi va shu sababli izlanayotgan tekislik tenglamasi

$$A_0(x-x_0)+B_0(y-y_0)+C_0(z-z_0)=0$$

ekanligini topamiz.

j).Berilgan nuqtadan o‘tuvchi va 2 ta vektorga parallel bo‘lgan *P* tekislik tenglamasI.
(1) formulaga asosan berilgan $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi tekisliklar tenglamasi

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

bo‘lishidan foydalanamiz. Bunda noma’lum $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ normal vektor sifatida berilgan vektorlarning $\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2$ vektorial ko‘paytmasini olish mumkin. Agar (12) tenglama bo‘yicha $\boldsymbol{r}=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$ o‘zgaruvchi vektorni tuzsak, unda bu tenglamani $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2)\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{r}=0$ ko‘rinishda aralash ko‘paytma orqali ifodalash mumkin. Bu yerdan, aralash ko‘paytmani koordinatalardagi ifodasidan (III bob, §4, (3) formula) foydalanib, masala javobini quyidagi ko‘rinishda topamiz:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0 \quad .$$

3. Fazod ikkita tekislik orasidagi burchak. P_1 va P_2 tekislikliklarning

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

umumiy tenglamalariga murojaat etamiz. Bu tenglamalardan P_1 va P_2 tekislikliklarning $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1,C_1)$ va $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ normal vektorlarini olamiz. Bu holda P_1 va P_2 tekislikliklar orasidagi ikki yoqli α burchak ularning $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ va $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ normal vektorlari orasidagi burchakka teng bo‘ladi. Unda, fazodagi ikki vektor orasidagi burchak formulasiga asosan, ko‘rilayotgan masala javobi

$$\cos\alpha=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (6)$$

formula bilan beriladi.

Masalan, umumiy tenglamalari $x+2y+2z+7=0$ va $16x+12y-15z-1=0$ bo‘lgan tekisliklar orasidagi ikki yoqli α burchakni topamiz:

$$\cos\alpha=\frac{1\cdot16+2\cdot12+2\cdot(-15)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{16^2+12^2+(-15)^2}}=\frac{10}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{625}}=\frac{2}{15}\Rightarrow\alpha=\arccos\frac{2}{15}.$$

Fazodagi ikkita tekisliklarning parallellik va perpendikularlik shartlari:

Dastlab P_1 va P_2 tekislikliklarning

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

umumiy tenglamalaridan $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1,C_1)$ va $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ normal vektorlarini topamiz.

Agar yuqorida keltirilgan P_1 va P_2 tekisliklar perpendikular bo‘lsa, u holda ularning $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ va $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ normal vektorlari ham o‘zaro ortogonal bo‘ladi. Unda, fazodagi ikkita vektorning ortogonallik shartiga asosan,

$$\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2=0\ \Rightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \qquad (7)$$

natijani olamiz. Bu berilgan tekisliklarning perpendikularlik shartini ifodalaydi.
Xuddi shunday ravishda P_1 va P_2 tekisliklarning parallellik sharti ularning normal vektorlarining kolleniarlik shartidan kelib chiqadi va

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \qquad (8)$$

ko‘rinishda ifodalanadi.

Masalan, umumiy tenglamalari $6x+3y-2z+7=0$ va $x+2y+6z-1=0$ bo‘lgan P_1 va P_2 tekisliklar uchun

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=6\cdot1+3\cdot2+(-2)\cdot6=0$$

bo‘lgani uchun ular perpendikulardir.

$4x+2y-4z+5=0$ va $2x+y+2z-1=0$ tenglamalar bilan berilgan P_1 va P_2 tekisliklar esa paralleldir, chunki

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{4}{2}=2,\quad \frac{B_1}{B_2}=\frac{2}{1}=2,\quad \frac{C_1}{C_2}=\frac{-4}{-2}=2\Rightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Berilgan uchta tekisliklarning kesishish nuqtasini topish.

Yechish: Bu tekisliklarning kesishish nuqtasi M(x, y, z) ularning uchalasiga ham tegishli bo‘lgani uchun, uning x, y va z koordinatalari P_1, P_2 va P_3 tekisliklarning umumiy tenglamalarini bir paytni o‘zida qanoatlantiradi. Demak, bu nuqta koordinatalari berilgan tekisliklarning umumiy tenglamalaridan hosil qilingan ushbu sistemani yechish orqali topiladi:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=-D_1\\ A_2x+B_2y+C_2z=-D_2\\ A_3x+B_3y+C_3z=-D_3\end{cases}\qquad (9)$$

Bunda uch hol bo‘lishi mumkin.

I hol. Sistema koeffitsiyentlari proporsional emas. Bu holda (9) sistema yagona yechimga ega va P_1, P_2 , P_3 tekisliklar mana shu bitta nuqtada kesishadi.

II hol. Sistema koeffitsiyentlari k proporsionallik koeffitsiyenti bilan proporsional, ammo ozod hadlar nisbatlarining kamida bittasi bu k sonidan farqli. Bu holda (9) sistema yechimga ega emas va P_1, P_2 , P_3 tekisliklar kesishmaydi, ya'ni ular o‘zaro parallel bo‘ladi.

III hol. Sistema koeffitsiyentlari va ozod hadlari o‘zaro proporsional. Bu holda (9) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega va P_1, P_2 , P_3 tekisliklar cheksiz ko‘p nuqtalarda kesishadi, ya'ni ular ustma-ust joylashgan bo‘ladi.

Berilgan nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa. P tekislik normal tenglamasi $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ orqali berilgan bo‘lsin. Bu holda izlangan d masofa

$$d=|\,x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p\,|$$

formula bilan hisoblanishini ko‘rsatish mumkin.

Agar P tekislik umumiy tenglamasi $Ax+By+Cz+D=0$ bilan berilgan bo‘lsa, oldin undan $\mu=\pm1/(A^2+B^2+C^2)$ normallashtiruvchi ko‘paytuvchi yordamida normal tenglamaga o‘tamiz va so‘ngra (9) formuladan foydalanamiz. Natijada

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

formulani hosil etamiz.

Masalan, $M_0(1,2,3)$ nuqtadan $2x-2y+z-3=0$ umumiy tenglama bilan ifodalanuvchi tekislikkacha bo‘lgan d masofani topamiz:

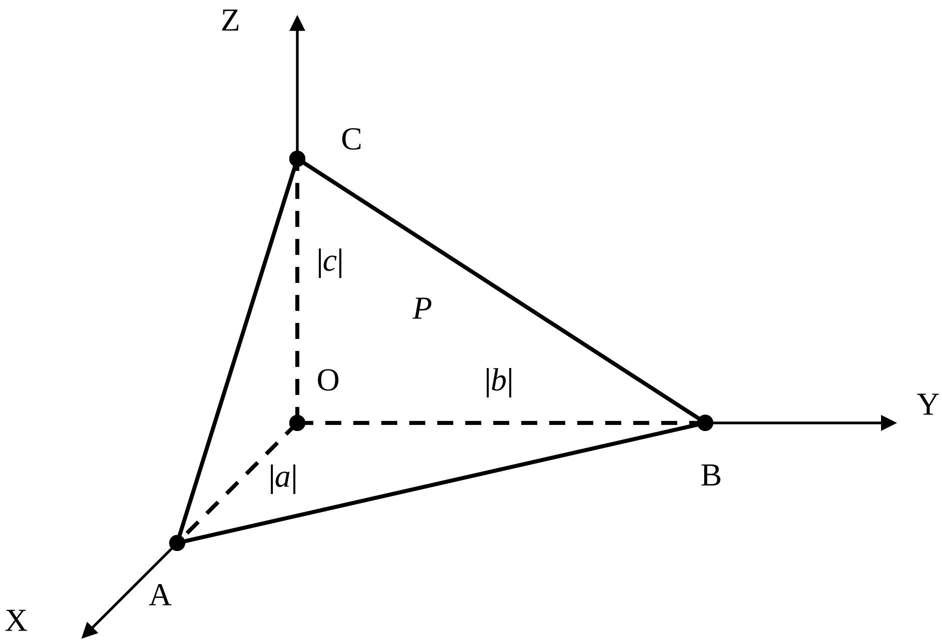
$$d=\frac{|2\cdot1+(-2)\cdot2+1\cdot3+(-3)|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{2}{3}.$$

Koordinata boshidan o‘tmaydigan tekislik va koordinata tekisliklari bilan chegaralangan uchburchakli piramida hajmi.

Berilgan P tekislikning ushbu

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

kesmalardagi tenglamasiga murojaat etamiz. Unda P tekislik va koordinata tekisliklari qirralari $|OA|=|a|$, $|OB|=|b|$ va $|OC|=|c|$ o‘zaro perpendikular bo‘lgan piramidani hosil etadi.



Bu yerdan, piramidaning hajmi formulasiga asosan, masala javobini quyidagi ko‘rinishda ekanligini aniqlaymiz:

$$V=\frac{1}{3}hS_{asos}=\frac{1}{3}\cdot|OC|\cdot\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{3}|c|\cdot\frac{1}{2}\cdot|a|\cdot|b|=\frac{1}{6}|abc|.$$

Tayanch iboralar

* Yo‘naltiruvchi vektor * Boshlang‘ich nuqta * Kanonik tenglama
* Parametrik tenglama * Umumiy tenglama . * To‘g‘ri chiziqlar dastasi * Ikkita nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi* To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak * parallellik sharti * perpendikularlik sharti *

Takrorlash uchun savollar

1. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori deb nimaga aytiladi?
2. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning boshlang‘ich nuqtasi deb nimaga aytiladi?
3. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini yozing.
4. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
5. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasidan uning kanonik tenglamasiga qanday o‘tiladi?
6. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
7. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasidan uning yo‘naltiruvchi vektorini qanday aniqlash mumkin?

Mustaqil ish topshiriqlari

1.Fazodagi to‘g‘ri chiziq quyidagi kanonik tenglamasi bilan berilgan:

$$\frac{x-5}{n+2}=\frac{y+3}{n+4}=\frac{z}{n+1}.$$

Bu to‘g‘ri chiziq uchun quyidagilarni aniqlang:

a) yo‘naltiruvchi vektorini ;
b) parametrik tenglamasini;
d) biror umumiy tenglamasini .

2. BCD tetraedrning uchlari

$A(n,\ n+2,\ n–4),\ B(n+2,\ n–1,\ n+1),\ C(2n,\ n,\ 2n–1),\ D(2n+3,\ 2n,\ n)$

nuqtalarda joylashgan. Bu tetraedr uchun quyidagilarni aniqlang:
a) AB qirraning kanonik tenglamasi; *b*) AD qirraning parametrik tenglamasi;
c) AB va AD orasidagi burchak; *d*)AB va DC orasidagi masofa;
e) D uchidan o‘tib, AB qirrasiga parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

9-mavzu. Fazodagi to'g'ri chiziqning vektor, kanonik, parametrik va umumiy tenglamari. To'g'ri chiziqning o'zaro joylashishi. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak, parallellik va perpendikulyarlik shartlari. To'g'ri chiziq va tekislikning fazoda o'zaro joylashishi.

REJA:

1.Fazoda to‘g‘ri chiziqning turli tenglamalari.
2. Fazoda ikkita to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak.
3. Fazodagi to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak va ularning o'zaro joylashuvi.

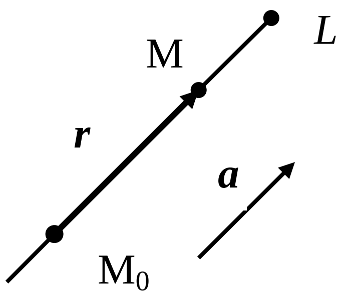
1. Fazoda to‘g‘ri chiziqning turli tenglamasi.

a). Fazodagi to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi. Fazodagi L to‘g‘ri chiziq tenglamasini topish uchun unga parallel bo‘lgan biror $\boldsymbol{a}=(m, n, p)$ vektor shu to‘g‘ri chiziqda yotuvchi biror $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta ma'lum deb olamiz. Bunda $\boldsymbol{a}$ berilgan L to‘g‘ri chiziqning ***yo‘naltiruvchi vektori***, M_0 esa ***boshlang‘ich nuqtasi*** deyiladi.

$M(x, y, z)$ berilgan L to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy bir nuqtasi bo‘lsin. Bu va M_0 nuqtalarni tutashtirib,

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$$

vektorni hosil qilamiz.



Agar $M(x, y, z)$ nuqta berilgan L to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lsa va faqat shu holda $\boldsymbol{r}$ bilan $\boldsymbol{a}$ yo‘naltiruvchi vektor kollinear bo‘ladi. Bundan va vektorlarning kollinearlik shartidan foydalanib, L to‘g‘ri chiziqni ifodalovchi

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \quad (10)$$

tenglamaga ega bo‘lamiz.

<u>TA'RIF:</u> (10) fazodagi to‘g‘ri chiziqning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi.

To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasidagi kasrlarning maxrajlaridagi m,n va p sonlari yo‘naltiruvchi $\boldsymbol{a}$ vektorning koordinatalari, suratlardagi x_0,y_0 va z_0 sonlari esa boshlang‘ich M_0 nuqtaning koordinatalari ekanligini ta'kidlab o‘tamiz.

Izoh. Agar $\boldsymbol{a}=(m, n, p)$ yo‘naltiruvchi vektorning biror koordinatasi 0 bo‘lsa, (1) kanonik tenglamadagi tegishli kasrning surati ham 0 deb olinadi. Masalan, n=0 bo‘lsa, unda L to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$y-y_0=0, \qquad \frac{x-x_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu holda $\boldsymbol{a}=(m,0,p)$ yo‘naltiruvchi vektor OY koordinata o‘qiga perpendikular joylashgani uchun L to‘g‘ri chiziq ham OY o‘qiga perpendikular bo‘ladi

b). Fazodagi to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning (1) kanonik tenglamasidagi o‘zaro teng bo‘lgan kasrlarning qiymatlarini *t* deb belgilaymiz. Bunda *t* parametr deb ataladi va ixtiyoriy haqiqiy qiymatni qabul eta oladi. Bu holda fazodagi to‘g‘ri chiziq tenglamasini quyidagi ko‘rinishga keltiriladi:

$$\frac{x-x_0}{m}=t,\ \frac{y-y_0}{n}=t,\ \frac{z-z_0}{p}=t \Rightarrow x-x_0=mt,\ y-y_0=nt,\ z-z_0=pt \Rightarrow$$

$$x=x_0+mt, \quad y=y_0+nt, \quad z=z_0+pt, \quad t\in(-\infty,\infty). \qquad (2)^{**}$$

TA’RIF: (2)** fazodagi to‘g‘ri chiziqning ***parametrik tenglamasi*** deyiladi.
Masalan, kanonik tenglamasi

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-2}$$

bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi

$$x=5+3t, \quad y=-1+4t, \quad z=-2t$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Agar fazodagi to‘g‘ri chiziq (2) parametrik tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, uning kanonik tenglamasiga o‘tish uchun har bir tenglamadan *t* parametr ifodasini topib, bu ifodalarni tenglashtirish kerak. Masalan, to‘g‘ri chiziq

$$x=-4+5t, \quad y=6-3t, \quad z=-1-2t$$

parametrik tenglamasi bilan berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini topamiz:

$$x=-4+5t,\ y=6-3t,\ z=-1-2t \Rightarrow 5t=x+4,\ -3t=y-6,\ -2t=z+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{x+4}{5},\ t=\frac{y-6}{-3},\ t=\frac{z+1}{-2} \Rightarrow \frac{x+4}{5}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z+1}{-2}.$$

c). Fazodagi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi. Fazodagi har qanday *L* to‘g‘ri chiziqni o‘zaro parallel bo‘lmagan qandaydir ikkita P_1 va P_2 tekisliklarning kesishish chizig‘i singari qarash mumkin. Bu P_1 va P_2 tekisliklar mos ravishda $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ umumiy tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin. Bu holda ularning kesishishidan hosil bo‘lgan *L* to‘g‘ri chiziqqa tegishli M(x, y, z) nuqtalar ham P_1, ham P_2 tekisliklarda yotadi va shu sababli ularning koordinatalari

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (11)$$

chiziqli tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi.

TA’RIF: (11) sistema fazodagi to‘g‘ri chiziqning ***umumiy tenglamasi*** deyiladi.

Agar fazodagi *L* to‘g‘ri chiziq (1) kanonik tenglamasi orqali berilgan va, masalan, $p\neq 0$ bo‘lsa, uning umumiy tenglamasiga quyidagicha o‘tish mumkin:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{p} \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} px-mz+mz_0-px_0=0 \\ py-nz+nz_0-py_0=0 \end{cases}. \qquad (4)$$

Hosil qilingan (4) sistema berilgan *L* to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi bo‘ladi, chunki bu sistema (3) ko‘rinishda bo‘lib, undan

$$A_1=p,\ B_1=0,\ C_1=-m,\ D_1=mz_0-px_0 \ \text{ va } \ A_1=0,\ B_1=p,\ C_1=-n,\ D_2=nz_0-py_0$$

holda kelib chiqadi. Bunda *L* to‘g‘ri chiziq birinchisi OY, ikkinchisi esa OX o‘qiga parallel bo‘lgan tekisliklarning kesishishidan hosil qilinadi.

Masalan, kanonik tenglamasi

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-4}{6}$$

bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamalaridan birini topamiz:

$$\begin{cases}\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{z-4}{6}\\ \dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-4}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3(x-3)=z-4\\ 6(y+1)=-5(z-4)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-z-5=0\\ 6y+5z-14=0\end{cases}.$$

Endi aksincha, ya’ni fazodagi to‘g‘ri chiziq (3) umumiy tenglamasi bilan berilgan bo‘lsin. Bu holda (3) sistemada biror o‘zgaruvchini, masalan z o‘zgaruvchini, erkli deb olamiz va

$$\begin{cases}A_1x+B_1y=-(C_1z+D_1)\\ A_2x+B_2y=-(C_2z+D_2)\end{cases}\qquad(5)$$

chiziqli tenglamalar sistemasini hosil etamiz. Bu sistemani yechib,

$$x=x_0+mz,\ \ y=y_0+nz,\quad z=z\Rightarrow\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z}{1}$$

ko‘rinishdagi kanonik tenglamaga kelamiz.

Misol sifatida umumiy tenglamasi

$$\begin{cases}2x+y-z+1=0\\ 3x-y+2z-3=0\end{cases}\qquad(6)$$

bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamalaridan birini topamiz:

$$\begin{cases}2x+y=z-1\\ 3x-y=3-2z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x=2-z\\ 5y=7z-9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{5}z+\dfrac{2}{5}\\ y=\dfrac{7}{5}z-\dfrac{9}{5}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}z=\dfrac{x-0{,}4}{-0{,}2}\\ z=\dfrac{y+2{,}2}{1{,}4}\end{cases}\Rightarrow\frac{x-0{,}4}{-0{,}2}=\frac{y+2{,}2}{1{,}4}=\frac{z}{1}.$$

Umumiy tenglamasi (3) bilan berilgan L to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini boshqa usulda ham topish mumkin. Buning uchun (3) sistemadagi biror o‘zgaruvchiga aniq bir qiymat beriladi. Masalan, $z=z_0$ deb olinib, (5) sistemadan $x=x_0$ va $y=y_0$topiladi. Bu holda $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtani L to‘g‘ri chiziqning boshlang‘ich nuqtasi sifatida olish mumkin. Endi (3) sistemaga kiruvchi tekisliklarni P_1 va P_2 deb olsak, $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$ va $\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$ ularning normal vektorlari bo‘ladi. Bu vektorlar mos ravishda P_1 va P_2 tekisliklarga perpendikular, L esa ularning kesishish chizig‘i ekanligidan , $\boldsymbol{n}_1$ va $\boldsymbol{n}_2$ normallarning ikkalasi ham L to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘ladi. Unda $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$ vektorial ko‘paytma L to‘g‘ri chiziqqa parallel vektorni ifodalaydi va shu sababli uning yo‘naltiruvchi vektori sifatida olinishi mumkin. Bu vektorning m,n, va p koordinatalari vektorial ko‘paytmaning ushbu formulasidan topiladi:

$$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}.\qquad(7)$$

Masalan, yuqorida ko‘rilgan (6) umumiy tenglamada z=2 deb olamiz va quyidagi sistemani hosil etib, uni yechamiz:

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

Demak, $M_0(0,1,2)$ nuqtani L uchun boshlang‘ich deb olish mumkin. Endi (7) formuladan $\boldsymbol{a}=(m,n,p)$ yo‘naltiruvchi vektorni topamiz:

$$\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}=(1,-7,-5).$$

Demak, (6) umumiy tenglamasi bilan berilgan to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasining yana bir ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-7}=\frac{z-2}{-5}.$$

d). Fazoda berilgan nuqtadan o‘tuvchi barcha to‘g‘ri chiziqlar tenglamasi. Berilgan $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtani boshlang‘ich deb qaraymiz. Unda bu masala javobi

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bunda m, n va p uchalasi bir paytda nolga teng bo‘lmagan ixtiyoriy sonlardir. Bu tenglama fazodagi $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi ***to‘g‘ri chiziqlar dastasining*** tenglamasi deyiladi.

e). Fazoda berilgan ikkita nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi. Izlanayotgan to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzish uchun uning biror boshlang‘ich nuqtasi va yo‘naltiruvchi vektorining koordinatalarini bilish kifoyadir. Boshlang‘ich nuqta sifatida berilgan nuqtalardan istalgan birini, masalan $M_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqtani olamiz. Yo‘naltiruvchi vektor sifatida esa bu to‘g‘ri chiziqda yotuvchi

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\, y_2-y_1,\, z_2-z_1)$$

vektorni tanlaymiz. Bundan berilgan ikkita $M_1(x_1,y_1,z_1)$ va $M_2(x_2,y_2,z_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

ko‘rinishda bo‘lishi kelib chiqadi.

Masalan, $M_1(5,-1,2)$ va $M_2(-3,6,4)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{x-5}{-3-5}=\frac{y+1}{6+1}=\frac{z-2}{4-2} \Rightarrow \frac{x-5}{-8}=\frac{y+1}{7}=\frac{z-2}{2}$$

f). Fazoda berilgan nuqtadan o‘tuvchi va berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

Berilgan L to‘g‘ri chiziq kanonik tenglamasini qaraymiz:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Unda izlanayotgan to‘g‘ri chiziqning boshlang‘ich nuqtasi sifatida M(a,b,c) nuqtani, yo‘naltiruvchi vektori sifatida berilgan L to‘g‘ri chiziqning $\boldsymbol{a}$=(m, n, p) yo‘naltiruvchi vektorini olish mumkin. Bu holda izlangan tenglama

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

2. Fazoda ikkita to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak.

Fazoda berilgan ikkita L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlarning kanonik tenglamalarini olamiz:

$$L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1};\quad L_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Bu holda L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi φ burchakni topish masalasi ularning $\boldsymbol{a}_1=(m_1, n_1, p_1)$ va $\boldsymbol{a}_2=(m_2, n_2, p_2)$ yo‘naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakni topish masalasiga keltiriladi. Unda ikkita vektor orasidagi burchak formulasiga asosan masala javobi

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

ko‘rinishda ekanligini aniqlaymiz.

Masalan, kanonik tenglamalari

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1},\qquad \frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$$

bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi φ burchakni topamiz:

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 2+(-4)(-2)+1\cdot(-1)}{\sqrt{1+16+1}\sqrt{4+4+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\varphi=45^0.$$

Fazoda berilgan ikkita L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlarning perpendikularlik va parallellik sharti.

Agar L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar perpendikular bo‘lsa, u holda φ=0 va yuqoridagi formuladan cosφ=0 bo‘ladi. Bundan esa ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikularlik sharti quyidagicha ekanligi kelib chiqadi:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

Agar L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsa, u holda ularning yo‘naltiruvchi vektorlari $\boldsymbol{a}_1=(m_1, n_1, p_1)$ va $\boldsymbol{a}_2=(m_2, n_2, p_2)$ o‘zaro kollinear bo‘ladi. Bundan, ikki vektorning kollinearlik shartiga asosan ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik sharti kelib chiqadi:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

Masalan, kanonik tenglamalari

$$L_1:\frac{x-1}{-3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{4};\quad L_2:\frac{x-5}{6}=\frac{y}{5}=\frac{z+7}{2}$$

bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar perpendikular, chunki

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=(-3)\cdot 6+2\cdot 5+4\cdot 2=0,$$

ya’ni perpendikulyarlik shart bajariladi.

Kanonik tenglamalari

$$L_1:\frac{x-1}{-6}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-4}{8};\quad L_2:\frac{x-5}{-3}=\frac{y}{2}=\frac{z+7}{4}$$

bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar esa parallel, chunki

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{-6}{-3}=2,\quad \frac{n_1}{n_2}=\frac{4}{2}=2,\quad \frac{p_1}{p_2}=\frac{8}{4}=2\Rightarrow\quad \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}=2,$$

ya'ni kolleshart bajariladi.

Berilgan L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlarining (3) kanonik tenglamalariga murojaat etamiz. Bu tenglamalardan ularning $\boldsymbol{a}_1=(m_1, n_1,p_1)$ va $\boldsymbol{a}_2=(m_2, n_2,p_2)$ yo‘naltiruvchi vektorlarini hamda $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ boshlang‘ich nuqtalarini topamiz. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ boshlang‘ich nuqtalarni mos ravishda vektorning boshi va uchi deb qarab, $\boldsymbol{r}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ vektorni hosil qilamiz. Bu holda L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar bir P tekislikda yotishi uchun ularning yo‘naltiruvchi vektorlari $\boldsymbol{a}_1=(m_1, n_1,p_1)$, $\boldsymbol{a}_2=(m_2, n_2,p_2)$ va $\boldsymbol{r}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ vektor ham shu P tekislikda yotishi zarur va yetarli ekanligini ko‘rish qiyin emas. Unda uch vektorning komplanarlik shartiga asosan

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$$

natijani olamiz. Bu ikkita L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlarni bir tekislikda yotish shartini ifodalaydi.

Masalan, kanonik tenglamalari

$$L_1:\ \frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{1};\qquad L_2:\ \frac{x+2}{5}=\frac{y-5}{4}=\frac{z+2}{7}$$

bo‘lgan to‘g‘ri chizilar bir tekislikda yotadi, chunki

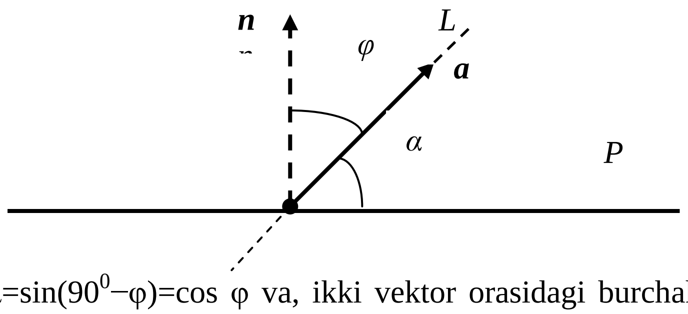
$$\begin{vmatrix} -2-(-3) & 5-1 & -2-0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \end{vmatrix}=18-16+20+30-4-48=0.$$

3. Fazodagi to’g’ri chiziq va tekislik orasidagi burchak va ularning o’zaro joylashuvi.

L to‘g‘ri chiziqning

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

kanonik va P tekislikning $Ax+By+Cz+D=0$ umumiy tenglamasi berilgan bo’lsin. Bu tenglamalardan L to‘g‘ri chiziqning $\boldsymbol{a}=(m,n,p)$ yo‘naltiruvchi va P tekislikning $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ normal vektorlarini aniqlaymiz. Bu vektorlar orasidagi burchakni φ deb olsak, unda quyidagi 39-rasmdan izlanayotgan burchak $\alpha=90^0-\varphi$ bo‘lishini ko‘ramiz:



Bu holda $\sin\alpha=\sin(90^0-\varphi)=\cos\varphi$ va, ikki vektor orasidagi burchak formulasiga asosan, ushbu natijani olamiz:

$$\sin\alpha=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\quad .$$

Masalan, kanonik tenglamasi

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{\sqrt{2}}=\frac{z-1}{1}$$

bo‘lgan *L* to‘g‘ri chiziq va umumiy tenglamasi

$$x+y\sqrt{2}-z+1=0$$

bo‘lgan *P* tekislik orasidagi burchak

$$\sin\alpha=\frac{1\cdot 1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+1\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+(-1)^2}}=\frac{2}{2\cdot 2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\arcsin\frac{1}{2}=30^0.$$

Berilgan *L* to‘g‘ri chiziqning kanonik va *P* tekislikning umumiy tenglamalaridan ularning ***a***=(*m*,*n*,*p*) yo‘naltiruvchi va ***n***=(A,B,C) normal vektorlarini aniqlaymiz.

I. Berilgan *L* to‘g‘ri chiziq va *P* tekislik o‘zaro parallel bo‘lsin. U holda *L* to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori***a***=(*m*,*n*,*p*)va *P* tekislik normali ***n***=(A,B,C) o‘zaro perpendikular (ortogonal) bo‘ladilar. Bundan, ikki vektorning ortogonallik shartiga asosan,

$$Am+Bn+Cp=0$$

tenglikka kelamiz. *L* to‘g‘ri chiziq va *P* tekislikning parallellik shartini ifodalaydi. Bu natijaga $\alpha=0$ deb ham erishish mumkin.

II. Endi berilgan *L* to‘g‘ri chiziq va *P* tekislik o‘zaro perpendikular bo‘lsin.Bu holda ***a***=(*m*,*n*,*p*)va ***n***=(A,B,C) vektorlar kollinear (parallel) bo‘ladi. Unda, ikki vektorning kollinearlik shartiga asosan

$$\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. *L* to‘g‘ri chiziq va *P* tekislikning perpendikularlik shartini ifodalaydi.

1-misol: *L* to‘g‘ri chiziqning

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{n}=\frac{z+3}{-2}$$

kanonik tenglamasidagi *n* parametr qanday qiymat qabul etganda u umumiy tenglamasi $x-3y+6z+7=0$ bo‘lgan tekislikka parallel bo‘ladi ?

Yechish: To‘g‘ri chiziq va tekislikning parallellik shartidan foydalanamiz:

$$3\cdot 1+(-3)n+(-2)\cdot 6=0 \Rightarrow n=-3.$$

2-misol: *L* to‘g‘ri chiziqning

$$\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$$

kanonik tenglamasidagi *n* va *P* tekislikning $3x-2y+Cz+1=0$ umumiy tenglamasidagi C parametrlarning qanday qiymatida ular o‘zaro perpendikular bo‘ladilar ?

Yechish: To‘g‘ri chiziq va tekislikning perpendikularlik shartidan foydalanamiz:

$$\frac{m}{3}=\frac{4}{-2}=\frac{-3}{C}\Rightarrow m=-6,\quad C=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}.$$

Berilgan *L* to‘g‘ri chiziqning

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

umumiy tenglamasini olamiz. Bu tenglama bo‘yicha

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \quad \textbf{(*)}$$

tenglamalarni hosil etamiz. Bunda λ va μ ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo‘lib, ularning har bir qiymatida biror tekislikni ifodalaydi. Bu tenglamalarni *L* to‘g‘ri chiziqqa tegishli har bir M(*x*,*y*,z*)* nuqta qanoatlantiradi. Demak, *L* to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekisliklarni ifodalaydi. Bunda $\lambda=1$ va $\mu=0$ yoki $\lambda=0$ va $\mu=1$ deb olsak, *L* to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasidagi mos ravishda birinchi yoki ikkinchi tekislik tenglamasi kelib chiqadi.

<u>TA'RIF:</u> (*) berilgan L to'g'ri chiziqdan o'tuvchi ***tekisliklar dastasi tenglamasi*** deb ataladi.

L to'g'ri chiziqning

$$x = x_0 + mt,\ \ y = y_0 + nt,\ \ z = z_0 + pt$$

parametrik , P tekislikning esa $Ax+By+Cz+D=0$ umumiy tenglamasini olamiz. Ularning kesishish nuqtasi ham to'g'ri chiziq, ham tekislik tenglamalarini qanoatlantiradi va shu sababli quyidagi sistemani yozishimiz mumkin:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Bu sistemadan ushbu tenglamani hosil etamiz:

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0 \Rightarrow$$

$$(Am + Bn + Cp)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0\,. \qquad (5)$$

Bu yerda uch hol bo'lishi mumkin.

1) $Am+Bn+Cp\neq 0$. Bu holda (5) tenglama yagona

$$t_0 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$$

ildizga ega bo'ladi. Uning qiymatini L to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasiga qo'yib, yagona kesishish nuqtasining koordinatalarini topamiz.

2) $Am+Bn+Cp=0$ va $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$. Bu holda (5) tenglama cheksiz ko'p ildizga ega bo'lib, L to'g'ri chiziq tekislikda yotadi va uning har bir nuqtasi P bilan kesishish nuqtasi bo'ladi.

3) $Am+Bn+Cp=0$ va $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$. Bu holda (5) tenglama yechimga ega emas, ya'ni L to'g'ri chiziq P tekislikka parallel bo'lib, ular kesishishmaydi.

Misol sifatida $x=1+t$, $y=-1-2t$, $z=6t$ to'g'ri chiziq bilan $2x+3y+z-1=0$ tekislikning kesishish nuqtasini topamiz. Bu holda (5) tenglamadan quyidagi natijani olamiz:

$$[2\cdot 1+3\cdot(-2)+1\cdot 6]\cdot t+[2\cdot 1+3\cdot(-1)+1\cdot 0-1]=0 \Rightarrow t_0=1 \Rightarrow$$

$$x_0=1+1=2,\ \ y_0=-1-2=-3,\ \ z_0=6.$$

Demak, berilgan to'g'ri chiziq va tekislik $M_0(2, -3,6)$ nuqtada kesishadi.

Berilgan $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ nuqtadan o'tuvchi barcha tekisliklar tenglamasi $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ ko'rinishda bo'lishi bizga ma'lum. Bu yerdan izlanayotgan P tekislik tenglamasini topish uchun $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ normal vektorni aniqlash kifoya. Buning uchunberilgan L_1 va L_2 to'g'ri chiziqlarning kanonik tenglamalarini olamiz:

$$L_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}\,; \quad L_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}\,.$$

Bu tenglamalardan L_1 va L_2 to'g'ri chiziqlarning $\boldsymbol{a}_1=(m_1, n_1, p_1)$ va $\boldsymbol{a}_2=(m_2, n_2, p_2)$ yo'naltiruvchi vektorlarini topamiz. Masala shartiga asosan bu vektorlar izlanayotgan P tekislikka parallel bo'ladi. Unda ularning vektorial ko'paytmasi $\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2$ bu tekislikka perpendikular joylashgan bo'ladi va shu sababli normal vektor $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2$ deb olish mumkin. Bu holda $\boldsymbol{r}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ vektorni kiritib,skalyar va aralash ko'paytma ta'riflari hamda ularning koordinatalardagi ifodasini eslab, masala javobiga quyidagicha erishamiz:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Rightarrow \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{r}=0 \Rightarrow \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{r}=0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

TAYANCH IBORA

Ikki to‘g‘ri chiziqni bir tekislikda yotish sharti* To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak * To‘g‘ri chiziq va tekislikning parallellik sharti * To‘g‘ri chiziq va tekislikning perpendikularlik sharti* Tekisliklar dastasi * To‘g‘ri chiziq va tekislikning kesishish nuqtasi

NAZORAT SAVOLLARI:

1. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasidan uning kanonik va parametrik tenglamasiga qanday o‘tiladi?
2. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasidan uning umumiy tenglamasiga qanday o‘tish mumkin?
3. Fazodagi berilgannuqtadano‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi ?
4. Fazodagi berilgan ikkita nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi ?
5. Fazodagi ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi?
6. Fazodagi ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikularlik sharti nimadan iborat?
7. Fazodagi ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik sharti nimadan iborat?
8. Qaysi shartda fazodagi ikki to‘g‘ri chiziq bir tekislikda yotadi ?

Testlardan namunalar.

1. $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\boldsymbol{a}=(m,n,p)$ vektorga parallel to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini ko‘rsating.

A) $\dfrac{x-m}{x_0}=\dfrac{y-n}{y_0}=\dfrac{z-p}{z_0}$; B) $m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0$;

C) $m(x-x_0)=n(y-y_0)=p(z-z_0)$; D) $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$;

E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

2. Kanonik tenglamasi $\dfrac{x}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ ko‘rinishda bo‘lgan L to‘g‘ri chiziq qanday xususiyatga ega ?

A) L to‘g‘ri chiziq YOZ koordinata tekisligiga parallel joylashgan;
B) L to‘g‘ri chiziq YOZ koordinata tekisligiga perpendikular joylashgan;
C)L to‘g‘ri chiziq YOZ koordinata tekisligini kesib o‘tadi;
D)L to‘g‘ri chiziq YOZ koordinata tekisligini kesib o‘tmaydi;
E)To‘g‘ri javob keltirilmagan.

3. Fazodagi L to‘g‘ri chiziqning $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ kanonik tenglamasida $m=0$ bo‘lsa, L qanday xususiyatga ega bo‘ladi ?

A) L to‘g‘ri chiziq OX koordinata o‘qiga parallel joylashgan;
B) L to‘g‘ri chiziq OX koordinata o‘qiga perpendikular joylashgan;

C) L to‘g‘ri chiziq OX koordinata o‘qini kesib o‘tadi;
D) L to‘g‘ri chiziq OX koordinata o‘qini kesib o‘tmaydi;

4. To‘g‘ri javob keltirilmagan.Kanonik tenglamasi $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{-3}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektorining koordinatalarini toping.
A) (–3, 1, 0) B)(3, –1, 0) C)(2,5, –3) D)(–2, –5, 3) E)to‘g‘ri javob keltirilmagan.

5. Kanonik tenglamasi $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{-3}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori modulini toping.
A) $\sqrt{10}$; B) $2\sqrt{5}$; C) 4; D) 2; E) $\sqrt{38}$.

6. Kanonik tenglamasi $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{-3}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning boshlang‘ich nuqtasining koordinatalarini toping.
A)(–3, 1, 0); B)(3, –1, 0); C)(2,5, –3); D)(–2, –5, 3); E) to‘g‘ri javob keltirilmagan

6. Umumiy tenglamasi

$$\begin{cases} 2x+3y+5z-7=0 \\ x-y+2z+5=0 \end{cases}$$

bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasini toping.

A) $x=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}t,\quad y=\frac{4}{5}-\frac{7}{5}t,\quad z=t$ B) $x=-\frac{8}{5}-\frac{11}{5}t,\quad y=\frac{17}{5}-\frac{1}{5}t,\quad z=t$

C) $x=\frac{17}{3}+\frac{2}{3}t,\quad y=-\frac{8}{3}+\frac{7}{3}t,\quad z=t$ D) $x=\frac{6}{5}-\frac{4}{5}t,\quad y=\frac{7}{3}-\frac{41}{3}t,\quad z=t$

E) $x=5+2t,\quad y=4-7t,\quad z=t$

7. $M_1(x_1,y_1,z_1)$ va $M_2(x_2,y_2,z_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.

A) $\frac{x-x_2}{x_2-x_1}=\frac{y-y_2}{y_2-y_1}=\frac{z-z_2}{z_2-z_1}$; B) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$;

C) $\frac{x-x_2}{y-y_1}=\frac{y-y_2}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{y-y_1}$; D) Ax+By+Cz+D=0; E) Ax=By=Cz=D.

8. Ushbu $M_1(3,-1,4)$ va $M_2(1,1,2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.

A) $\frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-4}{4}$; B) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-0}{4}$; C) $\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{1`}=\frac{z-4}{2}$;

D) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{4}$; E) $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-4}{-2}$.

9. Kanonik tenglamalari $\frac{x-1}{\alpha}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+4}{\sqrt{2}}$, $\frac{x+2}{2}=\frac{y+13}{\alpha}=\frac{z-6}{\sqrt{2}}$

bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar α parametrning qanday qiymatida o‘zaro perpendikular bo‘ladi ?
A) ±1; B) 1; C) –1; D) 2; E) –2 .

10. Kanonik tenglamalari $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$, $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$

bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.
A) 0^0; B) 30^0; C) 45^0; D) 60^0; E) 90^0

10-mavzu. Sirtning fazodagi tenglamasi. Ikkinchi tartibli sirtlar.

REJA:

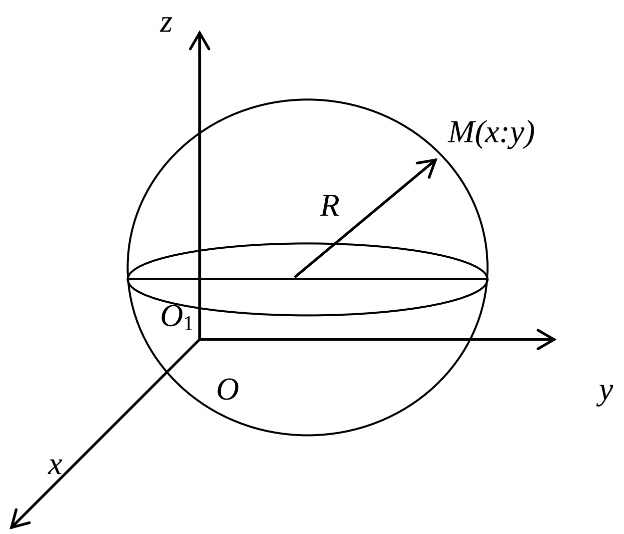
1. Ikkinchi tartibli sirt tushunchasi.
2. Sfera.
3. Silindrik sirtlar.
4. Konus sirt.
5. Aylanma sirtlar.
6. Ellipsoidlar.
7. Giperboloidlar.
8. Paraboloidlar.

I. Fazodagi biror dekart koordinatalar sistemasida *x, y, z* larga nisbatan

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+2Kz+L=0 \qquad (1)$$

tenglamani qanoatlantiradigan nuqtalar to‘plami **ikkinchi tartibli sirt** deyiladi. Bu tenglamadagi *A, B, C, D, E, F* koeffitsiyentlardan hech bo‘lmasa bittasi noldan farqli bo‘lganda sfera, ellipsoid, giperboloid, silindrik sirt, konus sirt yoki bir qancha aylanma sirtlarni ifodalash mumkin. Shuningdek bu tenglama yordamida ikki tengsizliklar oilasi, nuqta, to‘g‘ri chiziq va hatto bo‘sh to‘plamlarni ham aniqlash mumkin. Biz bu bobda eng sodda (aylanma sirtlar) sferalar, konuslar, silindrlar, ellipsoidlar, giperboloidlar, paraboloidlar va giperbolik paraboloidlar bilan tanishamiz.

II.<u>**Ta’rif.**</u> Fazoda berilgan nuqtadan teng masofada yotgan nuqtalarning geometrik o‘rnidan



tashkil to pgan sirt **sfera** deyiladi.

Sfera tenglamasini tuzish uchun fazoda $O_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqta olaylik. Undan teng masofada yotgan umumiy holda $M(x,y,z)$ nuqta va masofa R bo‘lsin. U holda aytilganiga ko‘ra, shakldan:

$$|O_1M|=R \text{ yoki } \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}=R$$

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=R^2$$

Bu sferaning **(kanonik) tenglamasi** deyiladi.

Agar sfera markazi koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushsa uning tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi ($x_1=y_1=z_1=0$)

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \qquad (3)$$

Misol. $x^2+y^2+z^2+2x+4y-20=0$ tenglama bilan berilgan sferaning markazi va radiusi *R* topilsin.

Yechish. $x^2+y^2+z^2+2x+4y-20=0$ dan to‘la kvadrat ajratamiz.

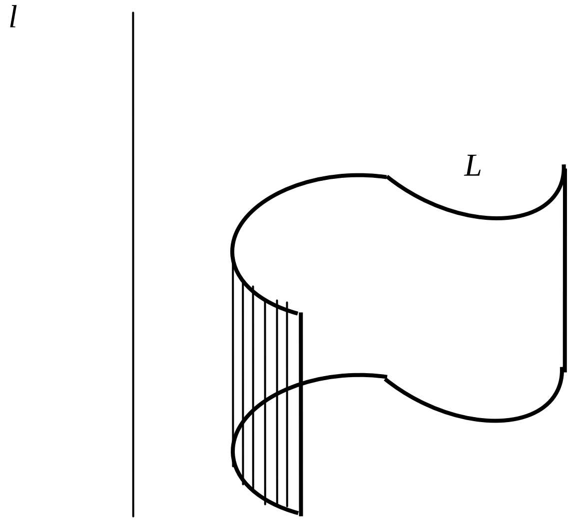
$$x^2+2x+1+y^2+4y+4+z^2=25$$

$$(x+1)^2+(y+2)^2+(z-0)^2=25$$

Demak, $O_1(-1;-2;0)$ sfera markazi

R=5 sfera radiusi.

III. Ta’rif. Fazoda yo‘naltiruvchi deb atalgan *L*- chiziqni kesib o‘tuvchi va biror *l* to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan barcha to‘g‘ri chiziqlardan hosil bo‘lgan sirt **silindrik sirti** deyiladi.



F(*x*, *y*) = 0 tenglama fazodagi yasovchisi *OZ* - o‘qqa parallel silindrik sirtni aniqlaydi. Shuningdek *F*(*x*, *z*) = 0 yasovchisi *OY* - o‘qqa parallel, *F*(*y*, *z*) = 0 yasovchisi *OX* - o‘qqa parallel bo‘lgan sirtni aniqlaydi. Bu holda *F*(*x, y*) = 0,
F(*x*, *z*) = 0, *F*(*y*, *z*) = 0 tenglamalar tekislikda ko‘rilsa, ular mos ravishda *XOY*, *XOZ*, *YOZ* tekislikdagi egri chiziqlarni ifodalaydi va ular silindrik **sirtlarning yo‘naltiruvchilari** deyiladi.

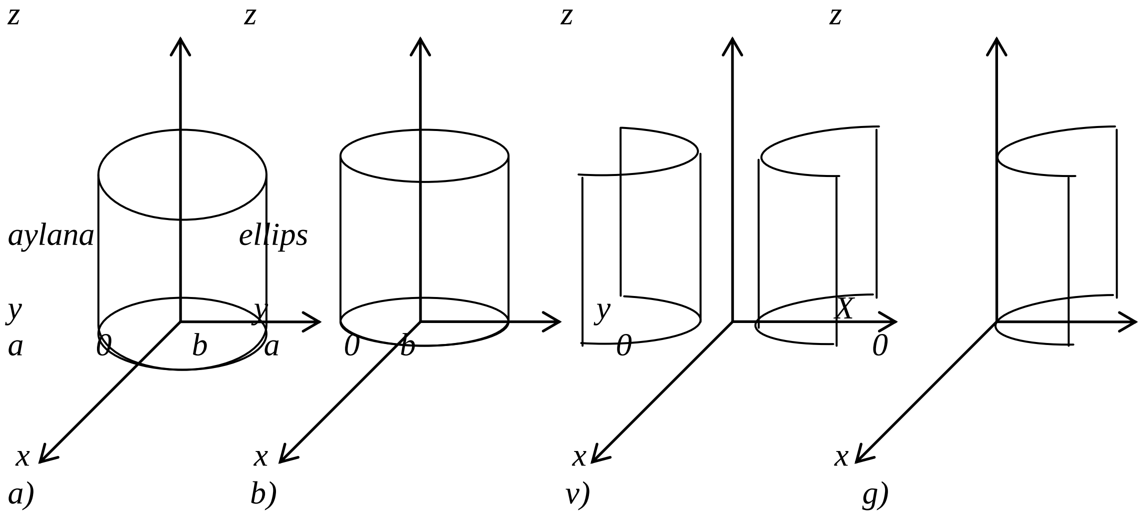
Quyidagi yasovchilari *OZ* o‘qqa parallel bo‘lgan eng muhim silindrik sirtni ko‘ramiz. Ularning yo‘naltiruvchilari mos ravishda aylana, ellips, giperbola, paraboladan iborat.

a) $x^2+y^2=a^2$ — to‘g‘ri doiraviy silindr (4)

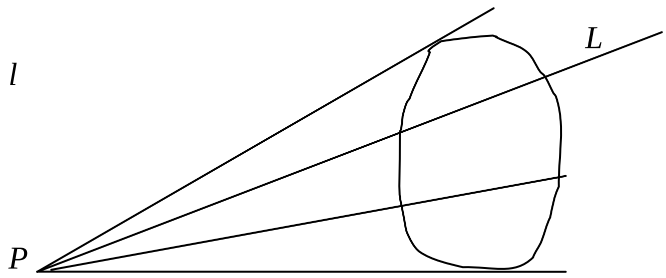
b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — elliptik silindr (5)

v) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ — giperbolik silindr (6)

g) $y^2=2px$ — parabolik silindr (7)



IV. Ta’rif. Fazoda yo‘naltiruvchi deb atalgan l – chiziqni kesib o‘tuvchi va berilgan P – nuqtadan o‘tuvchi barcha l to‘g‘ri chiziqlardan hosil bo‘lgan sirt **konus sirt** (yoki ikkinchi tartibli konus) deb ataladi.



P – nuqta konusning uchi va l – yasovchisi deb ataladi.

Misol. Uchi koordinatalar boshida yotgan va yo‘naltiruvchisi ellipsoiddan iborat:

$$L:\begin{cases} z=c \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$$ konus tenglamasi tuzilsin.

Yechish.$M(x, y, z)$ konusning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin, u holda konusning yasovchi $O(0; 0; 0)$ va $M(x, y, z)$ nuqtalardan o‘tgan to‘g‘ri chiziq bo‘ladi. Uning fazodagi kanonik tenglamasini topamiz

$$\frac{x-0}{x-0}=\frac{y-0}{y-0}=\frac{z-0}{z-0}\text{yoki}\frac{x}{x}=\frac{y}{y}=\frac{z}{z}$$ yoki $z=c$ ni o‘rniga qo‘ysak:

$$\frac{x}{x}=\frac{y}{y}=\frac{z}{z}\text{bundan}\, x=\frac{cx}{z}; \qquad y=\frac{cy}{z}$$ hosil bo‘ladi.

Buni yo‘naltiruvchi L tenglamasiga qo‘ysak, quyidagi tenglama hosil bo‘ladi

$$\frac{c^2x^2}{a^2z^2}+\frac{c^2y^2}{b^2z^2}=1\text{yoki}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (8)$$

Bu elliptik sfera yoki **ikkinchi tartibli konus tenglamasi** deyiladi. Agar bunda $a=b$ deb olsak yo‘naltiruvchisi

$\left.\begin{array}{r} z=c \\ x^2+y^2=a^2 \end{array}\right\}$ a – radiusli aylana bo‘lgan to‘g‘ri aylanma konus hosil bo‘ladi, uning simmetriya o‘qi OZ dan iborat bo‘ladi.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (9)$$

Shuningdek, o‘qlari OY va OX koordinata o‘qlaridan iborat va uchi koordinatalar boshida yotuvchi ikkinchi tartibli konuslarning tenglamasi mos ravishda

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (10)$$

va

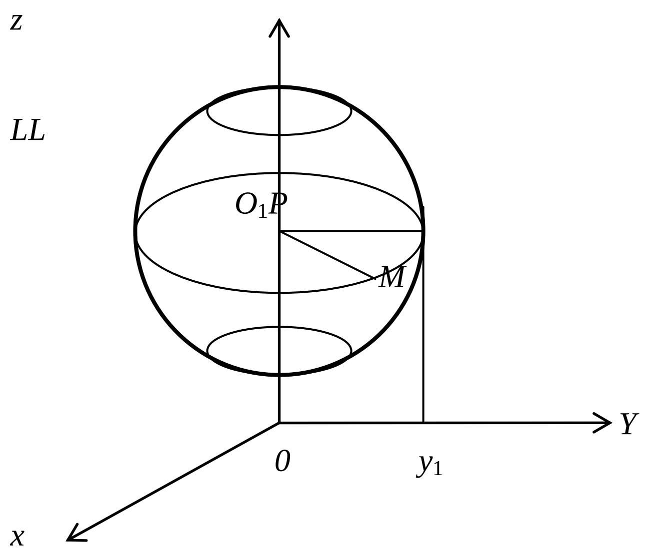
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (11)$$

lardan iborat bo‘ladi.

V. <u>Ta’rif.</u> Fazoda biror L chiziqning l – o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan nuqtalar to‘plami **aylanma sirt** deyiladi. L – chiziq aylanma sirtning medianasi, l – (chiziq) o‘q esa uning **aylanma o‘qi** deyiladi. Biz aylanish o‘qlari OZ, OY, OX - o‘qlaridan iborat bo‘lgan hollar bilan chegaralanamiz.

1) Sirt aylanish o‘qi OZ o‘qidan iborat bo‘lgan, L – medianasi esa OYZ tekisligida yotgan tekis chiziq bo‘lib uning tenglamasi quyidagicha bo‘lsin

$$\left.\begin{array}{r} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{array}\right\}$$



$M(x, y, z)$ – aylanma sirtning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin, M nuqta orqali OZ o‘qiga perpendikulyar qilib Q tekislik o‘tkazaylik, Q tekislikda aylanma sirtni markazi O_1 va $P(O, Y_1, Z)$, $O(O, O, Z)$ bo‘ladi. Bu holda $|O_1M|=|O_1P|=|y_1|$

$$|O_1M|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$|y_1|=\sqrt{x^2+y^2}; \qquad y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$$

$P(0, y_1, z)$ nuqta L – medianada yotgani uchun, $F(y_1, z)=0$ o‘rinli. Bundan ushbu tenglama hosil bo‘ladi.

$$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0 \qquad (12)$$

Bu $F(y, z) = 0$, $x=0$ L – mediana OZ o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan aylanma sirt tenglamasidir.

2) Agar $F(y, z) = 0$, $x=0$ L – mediana OY o‘qi atrofida aylantirilsa, u aylanma jismning tenglamasi quyidagicha ko‘rinishda bo‘ladi.

$$F\left(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0 \tag{13}$$

3) Agar $F(x, y) = 0$, $z=0$ L – mediana OX o‘qi atrofida aylantirilsa va bundan hosil bo‘lgan aylanma jismning tenglamasi quyidagicha ko‘rinishda bo‘ladi

$$F\left(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0 \tag{14}$$

VI. 1. Aylanma ellipsoidlar.

a) Agar XOZ tekisligida berilgan $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsni OZ o‘qi atrofida aylantirsak tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lgan aylanma ellipsoid hosil bo‘ladi (5-punkt).

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1 \text{yoki} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{15}$$

b) Agar shu ellipsni OX o‘qi atrofida aylantirsak ushbu aylanma ellipsoid hosil bo‘ladi va h.k.

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{yoki} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{16}$$

c) Agar (15) yoki (14) da $a=c$ deb olsak

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \tag{16′}$$

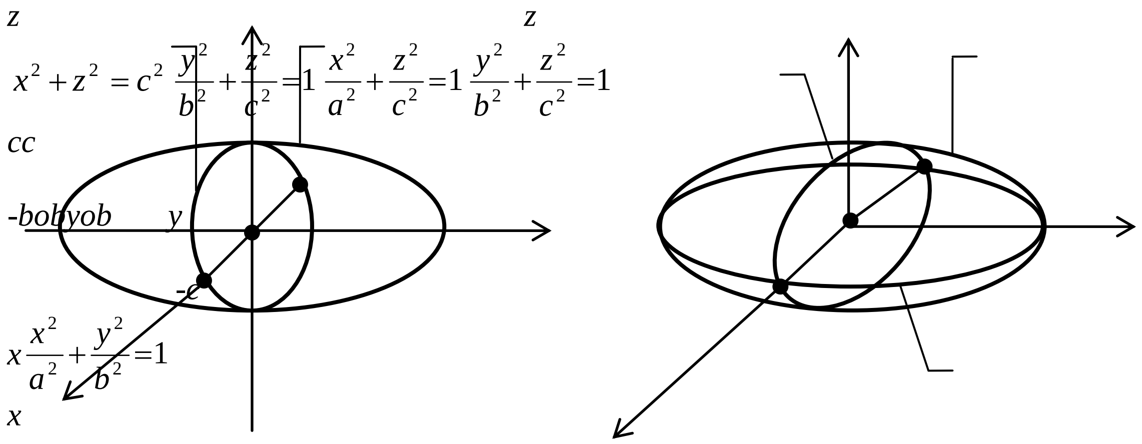
sfera hosil bo‘ladi.

2. Elliptik ellipsoid.

Tenglamasi:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{17}$$

ko‘rinishida berilgan sirt fazoda **elliptik ellipsoid** deyiladi.



$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1 \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

VII. 1. Bir pallali aylanma giperboloidlar.

a) YOZ tekislikda berilgan $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbola OZ o‘qi atrofida aylantirilsa tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lgan bir pallali aylanma giperbolik sirt hosil bo‘ladi (5-punkt).

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{yoki} \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{18}$$

b) Agar XOY tekislikda berilgan $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbola OY – o‘qi atrofida aylantirilsa tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lgan bir pallali aylanma giperbolik sirt hosil bo‘ladi.

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (19)$$

s) Agar XOZ tekisligida berilgan $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbola OZ – o‘qi atrofida aylantirilsa tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lgan bir pallali aylanma giperbolik sirt hosil bo‘ladi.

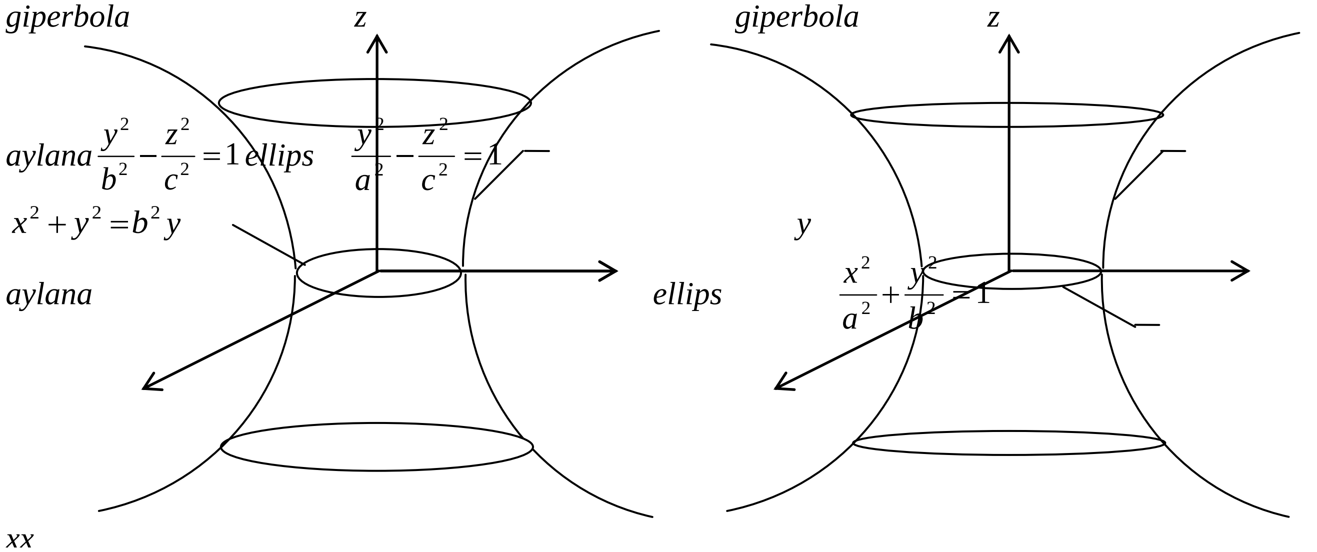
$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (20)$$

2. Bir pallali elliptik giperboloidlar.

Tenglamalari quyidagi ko‘rinishda berilgan sirtlar fazoda **bir pallali elliptik giperboloidlar** deyiladi.

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 & (21) \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 & (22) \\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 & (23) \end{array}\right.$$

Bu sirtlar mos ravishda $z=h$, $y=k$, $x=t$ tekisliklar bilan kesilsa, kesimda ellipslar hosil bo‘ladi.



Aylana bir pallali giperboloid — Bir pallali elliptik giperboloid

3. Ikki pallali aylanma giperboloidlar.

a) Agar YOZ tekisligida berilgan $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbola OY o‘qi atrofida aylantirilsa tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lgan ikki pallali aylanma giperboloid hosil bo‘ladi:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2+z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (24)$$

b) Shuningdek XOY tekisligida berilgan $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{c^2}=1$; va *XOZ* tekisligida berilgan $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbolalar mos ravishda *OX* va *OZ* o‘qi atrofida aylantirilsa quyidagi ko‘rinishdagi ikki pallali giperboloidlar hosil bo‘ladi:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1 \qquad (25)$$

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (26)$$

4. Ikki pallali elliptik giperboloidlar.

Tenglamalari quyidagicha ko‘rinishda berilgan sirtlar fazoda **ikki pallali elliptik giperboloidlar** deyiladi.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{yoki} -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (27)$$

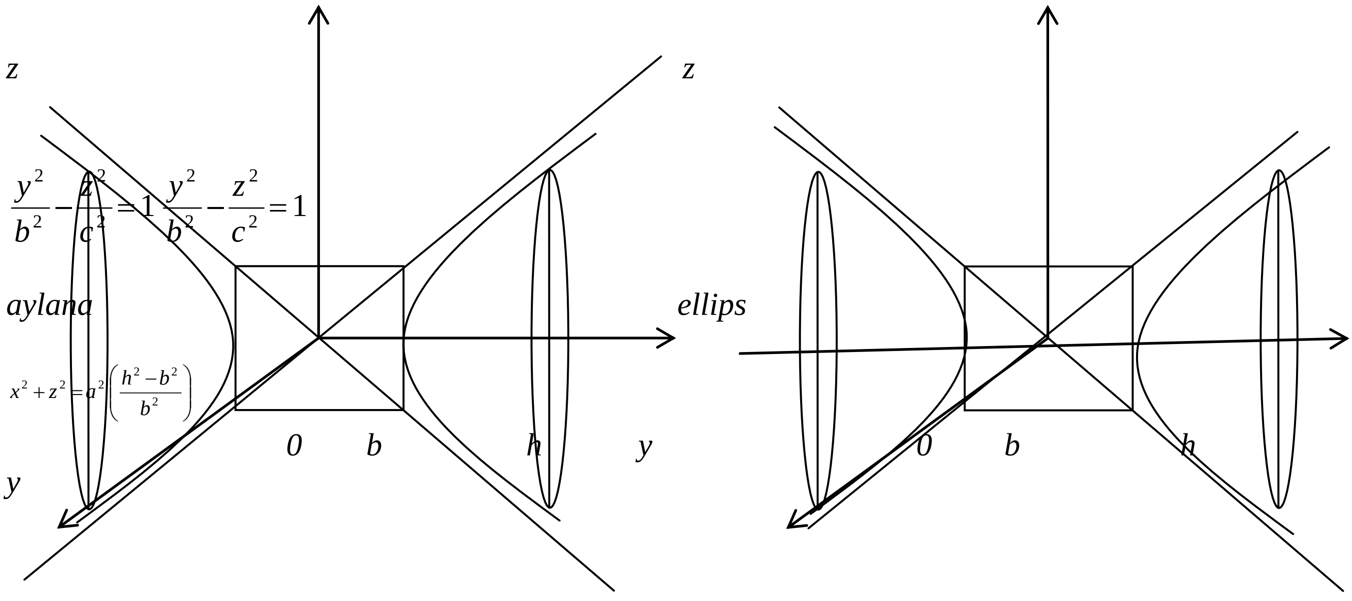
$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{yoki} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (28)$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{yoki} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (29)$$

Quyida *OY* o‘qi atrofida aylantirilishdan hosil bo‘ladi.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ikki pallali aylanma giperboloid va

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ikki pallali elliptik giperboloidlar shaklini keltiramiz.



VIII. 1. Aylanma paraboloidlar.

a) Agar *XOY* tekisligida berilgan $y^2=2px$ parabola *OX* o‘qi atrofida aylantirilsa tenglamasi quyidagicha ko‘rinishda bo‘lgan aylanma paraboloid (sirt) hosil bo‘ladi (5 punkt).

$$y^2+z^2=2px \qquad (30)$$

Agar $x=h$ deb olinsa $y^2+z^2=2ph$, $z=h$ aylana hosil bo‘ladi.

b) Shuningdek XOZ tekisligida berilgan $x^2 = 2pz$ parabola vaYOZ tekisligida berilgan $z^2 = 2py$ parabolani mos ravishda OZ va OY o‘qlari atrofida aylantirsak quyidagicha aylanma paraboloidlar tenglamasi hosil bo‘ladi.

$$x^2 + y^2 = 2pz \qquad (31)$$

va

$$x^2 + z^2 = 2py \qquad (32)$$

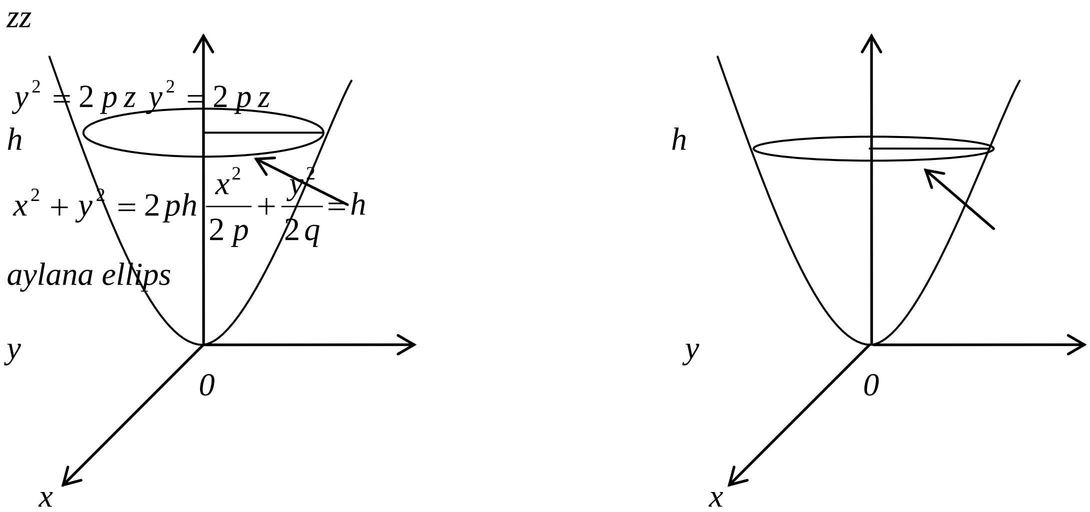
2. Elliptik paraboloidlar. Tenglamasi umumiy holda quyidagicha ko‘rinishda berilgan sirtlar **elliptik paraboloidlar** deyiladi.

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \qquad (33)$$

$$\frac{x^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2y \qquad (34)$$

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x \qquad (35)$$

Quyida OZ o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan $x^2 + y^2 = 2pz$ va $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$ elliptik paraboloidlarni shaklini keltiramiz:



3. Giperbolik paraboloidlar. Tenglamasi umumiy holda quyidagicha ko‘rinishda berilgan sirtlar **giperbolik paraboloid** deyiladi.

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \qquad \frac{x^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2y \qquad \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x \qquad (36)$$

yoki bu tengliklar odatda quyidagicha ko‘rinishda yoziladi:

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z \qquad \frac{x^2}{2p} - \frac{z^2}{2q} = y \qquad \frac{y^2}{2p} - \frac{z^2}{2q} = x \qquad (37)$$

Quyida $\frac{y^2}{2q} - \frac{x^2}{2p} = z$ giperbolik paraboloid shaklini keltiramiz. Bunda $z = h$ bo‘lsa

$\frac{y^2}{2qh} - \frac{x^2}{2ph} = 1$ giperbola;

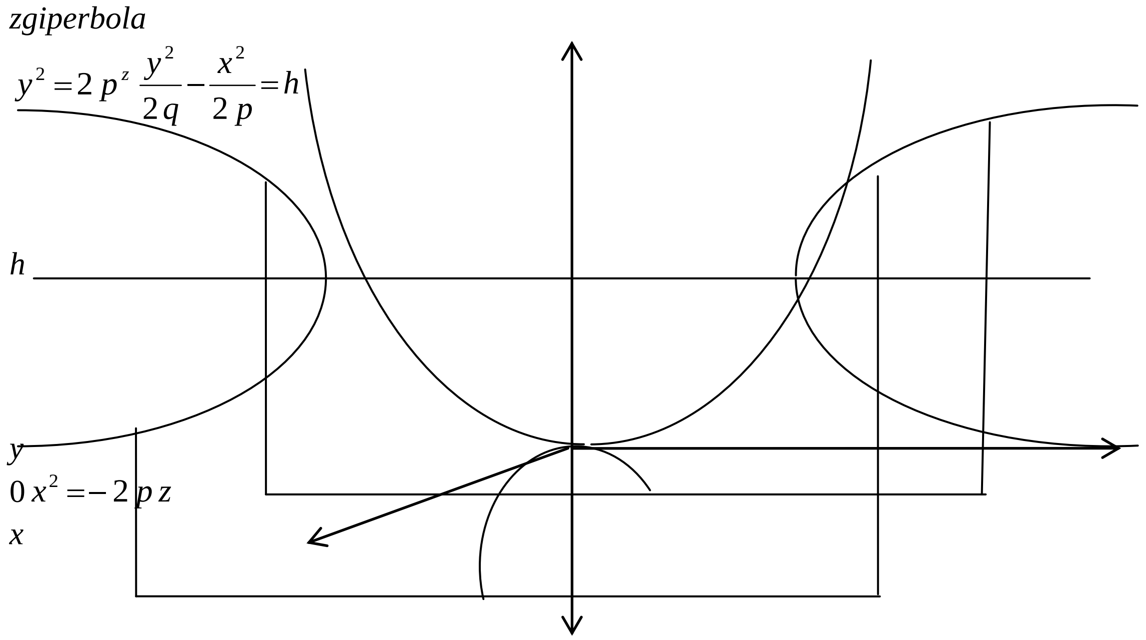
$x=0$ bo‘lsa $y^2 = 2qz$ parabola

y=0 bo‘lsa $x^2 = 2pz$ parabola

z=0 bo‘lsa $\frac{y^2}{2q} - \frac{x^2}{2p} = 0$ yoki

$\frac{y^2}{q} - \frac{x^2}{p} = 0$ yoki $\left(\frac{y}{\sqrt{q}} - \frac{x}{\sqrt{p}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{q}} + \frac{x}{\sqrt{p}}\right)$ yoki *XOY* tekislikda yotuvchi ikkita quyidagi to‘g‘ri chiziqlardan iborat:

$\frac{y}{\sqrt{q}} - \frac{x}{\sqrt{p}}$ va $\frac{y}{\sqrt{q}} + \frac{x}{\sqrt{p}}$ yoki $y = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}\,x$ koordinatalar boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlardan iborat. Bu degan so‘z sirt *XOY* tekisligini shu ikki to‘g‘ri chiziqlar bo‘ylab kesib o‘tadi.



Giperbolik paraboloidlarni umuman to‘g‘ri chiziqlardan tashkil topgan sirt ekanligini isbotlash mumkin.

Tayanch iboralar.

Sfera — fazoda berilgan nuqtadan teng uzoqlikda yotgan nuqtalarning geometrik o‘rnidan tashkil topgan sirt;

Silindrik sirt — fazoda yo‘naltiruvchi chiziqni kesib o‘tuvchi va biror to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan barcha chiziqlardan hosil bo‘lgan sirt;

Konus sirt — fazoda yo‘naltiruvchi chiziqni kesib o‘tuvchi barcha to‘g‘ri chiziqlardan hosil bo‘lgan sirt;

Aylanma sirt — fazoda biror chiziqning o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan nuqtalar to‘plami.

Nazorat savollari.

1. Sfera tenglamasi.
2. Silindrik sirt tenglamasi.
3. Konus sirt tenglamasi.
4. Aylanma sirt haqida tushuncha.
5. Aylanma va elliptik ellipsoidlar.
6. Bir pallali va ikki pallali giperboloidlar.
7. Aylanma, elliptik va giperbolik paraboloidlar.

5-MODUL. MATEMATIK ANALIZGA KIRISH.

11-mavzu. O’zgaruvchi va o’zgarmas miqdorlar. To’plamlar va ular ustida amallar. Mantiqiy amallar. Ketma-ketlikning limiti.

REJA:

1. To‘plamlar va ularga doir tushunchalar.
2. To‘plamlar ustida amallar va ularning xossalari.
3. Chekli va cheksiz to‘plamlar.
4. Sanoqli va sanoqsiz to‘plamlar.
5. Nyuton binomi va binomial koeffitsiyentlar.
6. Sonli ketma-ketlik va uning limiti.
7. Sonli ketma-ketlik limitini hisoblash qoidalari.

1. To‘plamlar va ularga doir tushunchalar. To‘plamlar nazariyasi deyarli barcha matematik fanlarnining asosida yotadi. Bu nazariya asoslari 1879–1884 yillarda olmon matematigi ***Georg Kantor*** tomonidan chop etilgan bir qator maqolalarda yoritib berildi. ***To‘plam*** matematikaning poydevorida yotgan boshlang‘ich tushunchalardan biri bo‘lgani uchun u ta’rifsiz qabul etiladi. To‘plam deyilganda biror bir xususiyati bo‘yicha umumiylikga ega bo‘lgan obyektlar majmuasi tushuniladi. Masalan, I kurs talabalari to‘plami, [0,1] kesmadagi nuqtalar to‘plami, natural sonlar to‘plami, firma xodimlari to‘plami, korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar to‘plami va hokazo. Matematikada to‘plamlar A,B,C,D,… kabi bosh harflar bilan belgilanadi. A,B,C,D,… to‘plamlarga kiruvchi obyektlar ularning ***elementlari*** deyiladi va odatda mos ravishda kichik $a,b\ ,c\ ,d,\ldots$ kabi harflar bilan belgilanadi. Bunda «a element A to‘plamga tegishli (tegishli emas)» degan tasdiq $a\in$A ($a\notin$A) kabi yoziladi.

1-*TA’RIF:* Birorta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam ***bo‘sh to‘plam*** deyiladi va $\varnothing$ kabi belgilanadi.

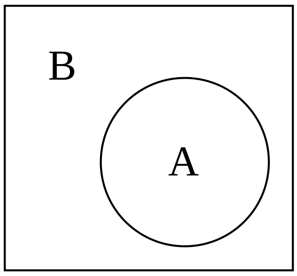
Masalan, { sin$x$ = 2 tenglamaning yechimlari}$=\varnothing$, { perimetri 0 bo‘lgan kvadratlar }= $\varnothing$, { kvadrati manfiy bo‘lgan haqiqiy sonlar }$=\varnothing$.

Algebrada 0 soni qanday vazifani bajarsa, to‘plamlar nazariyasida $\varnothing$ to‘plam shunga o‘xshash vazifani bajaradi.

2-*TA’RIF:* Agar A to‘plamga tegishli har bir a element boshqa bir B to‘plamga ham tegishli bo‘lsa ($a\in$A$\Rightarrow a\in$B**)**, u holda A to‘plam B ***to‘plamining qismi*** deyiladi va A$\subset$B (yoki B$\supset$A) kabi belgilanadi.

Quyidagi 1-rasmda B kvadratdagi, A esa uning ichida joylashgan doiradagi nuqtalar to‘plamimni ifodalasa, unda A$\subset$B bo‘ladi.

1-rasm



Masalan, korxonada ishlab chiqarilayotgan oliy navli mahsulotlar to‘plamini A, barcha mahsulotlar to‘plamini esa B deb olsak , unda A$\subset$B bo‘ladi.

Ta’rifdan ixtiyoriy A to‘plam uchun A$\subset$ A va$\varnothing\subset$A tasdiqlar o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi. Shu sababli to‘plamlar uchun $\subset$ belgisi sonlar uchun $\leq$ belgiga o‘xshash ma’noga egadir.

3-*TA'RIF:* Agarda A vaBto'plamlar uchun A⊂B vaB⊂A shartlar bir paytda bajarilsa, bu to'plamlar ***teng*** deyiladi va A=B kabi yoziladi.

Masalan,A={–1;1} va B={x^2–1=0 tenglama ildizlari},
C= {badiiy asarni yozish uchun ishlatilgan harflar} va D={alfavitdagi harflar} to'plamlari uchun A=B, C=D bo'ladi.

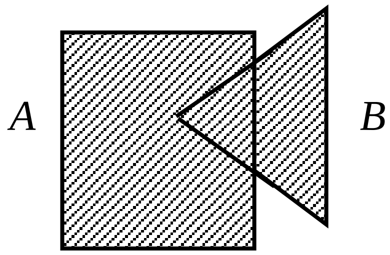
2. To'plamlar ustida amallar va ularning xossalari. Algebrada *a* va *b* sonlar ustida qo'shish va ko'paytirish amallari kiritilgan bo'lib, ular
a+b=b+a va *ab=ba* (kommutativlik , ya'ni o'rin almashtirish),
a+(b+c)=(a+b)+c va *a(bc)=(ab)c* (assotsiativlik, ya'ni guruhlash),
a(b+c)=ab +ac (distributivlik, ya'ni taqsimot)
qonunlariga bo'ysunadilar. Bulardan tashqari har qanday *a* soni uchun *a*+0=*a* va *a*· 0=0 tengliklar ham o'rinli bo'ladi.

Endi to'plamlar ustida algebraik amallar kiritamiz.

4-*TA'RIF:*A va B to'plamlarning ***birlashmasi (yig'indisi)*** deb shunday C to'plamga aytiladiki, u A va B to'plamlardan kamida bittasiga tegishli bo'lgan elementlardan tashkil topgan bo'ladi va A∪B kabi belgilanadi.

Agar A kvadratdagi, B esa uchburchakdagi nuqtalar to'plamidan iborat bo'lsa, unda ularning birlashmasi A∪B quyidagi 2-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi:

2-rasm



Shunday qilib A∪B to'plam yoki A to'plamga , yoki B to'plamga, yoki A va B to'plamlarning ikkalasiga ham tegishli elementlardan iboratdir.

Masalan, A={1,2,3,4,5} va B={2,4,6,8} bo'lsa A∪B={1,2,3,4,5,6,8},

C={I navli mahsulotlar} va D={II navli mahsulotlar } bo'lsa, unda

C∪D={I yoki II navli mahsulotlar} to'plamni ifodalaydi.

To'plamlarni birlashtirish amali , sonlarni qo'shish amali singari,

A∪B =B∪A (kommutativlik),

(A∪B) ∪ C=A∪ (B∪C) (assosiativlik)

qonunlarga bo'ysunadi. Bulardan tashqari A∪∅ =A va, sonlardan farqli ravishda, A∪A=A, B⊂A bo'lsa A∪B=A tengliklar ham o'rinli bo'ladi. Bu tasdiqlarning barchasi to'plamlar tengligi ta'rifidan foydalanib isbotlanadi. Misol sifatida, oxirgi tenglikni isbotlaymiz:

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ yoki } x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow (A \cup B) \subset A;$$
$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow A \subset (A \cup B)$$

Demak, $(A \cup B) \subset A$, $A \subset (A \cup B)$ va , ta'rifga asosan, A∪B =A.

Bir nechta A_1 , A_2 , A_3 , … , A_n to'plamlarning yig'indisi

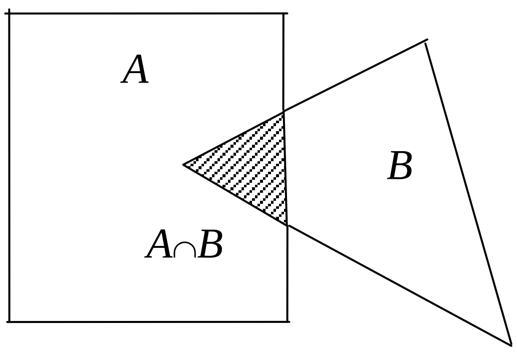
$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

kabi belgilanadi va ulardan kamida bittasiga tegishli bo‘lgan elementlar to‘plami sifatida aniqlanadi.

5 -TA’RIF: A va B to‘plamlarning ***kesishmasi (ko‘paytmasi)*** deb shunday C to‘plamga aytiladiki, u A va B to‘plamlarning ikkalasiga ham tegishli bo‘lgan elementlardan tashkil topgan bo‘ladi va $A \cap B$ kabi belgilanadi.

Agar A kvadratdagi, B esa uchburchakdagi nuqtalar to‘plamini belgilasa, unda ularning $A \cap B$ kesishmasi 3-rasmdagi shtrixlangan soha kabi ifodalanadi:

3-rasm



Shunday qilib $A \cap B$ to‘plam A va B to‘plamlarning umumiy elementlaridan tashkil topgan bo‘ladi. Shu sababli agar ular umumiy elementlarga ega bo‘lmasa, ya’ni kesishmasa, unda $A \cap B = \varnothing$ bo‘ladi.

Masalan, $A=\{1,2,3,4,5\}$ va $B=\{2,4,6,8\}$ bo‘lsa $A \cap B=\{2,4\}$,

C={Tekshirilgan mahsulotlar} va D={Sifatli mahsulotlar} bo‘lsa, unda

$C \cap D$={Tekshirishda sifatli deb topilgan mahsulotlar} to‘plamni ifodalaydi.

To‘plamlarni kesihmasi amali quyidagi qonunlarga bo‘ysunadi:

$A \cap B = B \cap A$ (kommutativlik),

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (assotsiativlik),

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivlik)

Shu bilan birga $A \cap A = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$ va $B \subset A$ bo‘lsa $A \cap B = B$ tengliklar ham o‘rinli bo‘ladi. Bu tasdiqlarning o‘rinli ekanligiga yuqorida ko‘rsatilgan usulda ishonch hosil etish mumkin.

Bir nechta $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ to‘plamlarning kesishmasi

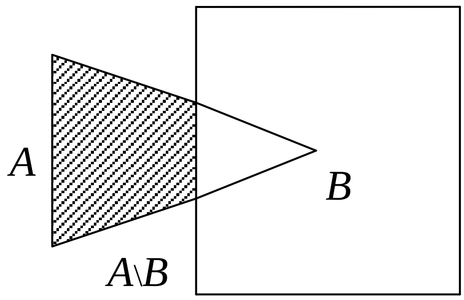
$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

kabi belgilanadi va barcha A_k ($k=1,2, \cdots, n$) to‘plamlarga tegishli bo‘lgan umumiy elementlardan tuzilgan to‘plam kabi aniqlanadi.

6-TA’RIF: A va B to‘plamlarning ***ayirmasi*** deb A to‘plamga tegishli, ammo B to‘plamga tegishli bo‘lmagan elementlardan tashkil topgan to‘plamga aytiladi va A\B kabi belgilanadi.

Agar A uchburchakdagi, B esa kvadratdagi nuqtalar to‘plamini belgilasa, unda ularning A\B ayirmasi 4-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo‘ladi :

4-rasm



Masalan, A={1,2,3,4,5} va B={1,3,7,9} bo‘lsa, unda A\B={2,4,5}, B\A={7,9};

C={Korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar}va D={Sifatli mahsulotlar} bo‘lsa,

C\D={ Korxonada ishlab chiqarilgan sifatsiz mahsulotlar }.

Demak, A\B to‘plam A to‘plamning B to‘plamga tegishli bo‘lmagan elementlaridan hosil bo‘ladi. To‘plamlar ayirmasi uchun

$$A\backslash A=\varnothing, \quad A\backslash\varnothing=A, \quad \varnothing\backslash A=\varnothing$$

va A⊂B bo‘lsa A\B=∅ munosabatlar o‘rinlidir.

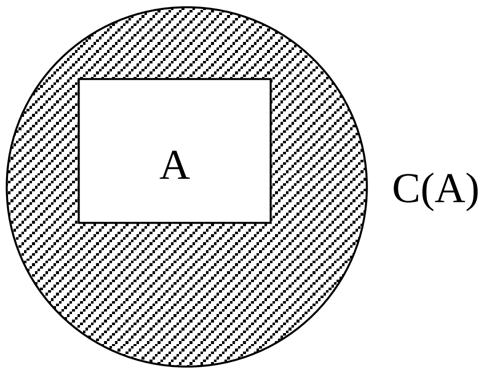
7-TA’RIF: Agar ko‘rilayotgan barcha to‘plamalarni biror Ω to‘plamning qism to‘plamlari kabi qarash mumkin bo‘lsa, unda Ω ***universal to‘plam*** deb ataladi.

Masalan, sonlar bilan bog‘liq barcha to‘plamlar uchun Ω=(–∞, ∞) , insonlardan iborat to‘plamlar uchun Ω={Barcha odamlar} universal to‘plam bo‘ladi.

8 -TA’RIF: Agar A to‘plam Ω universalto‘plamning qismi bo‘lsa, unda Ω\A to‘plam ***A to‘plamning to‘ldiruvchisi*** deb ataladi va C(A) kabi belgilanadi.

Agar quyidagi chizmada Ω universal to‘plam doiradagi, A to‘plam esa uning ichida joylashgan to‘ri to‘rtburchakdagi nuqtalardan iborat bo‘lsa, uning to‘ldiruvchisi C(A) 5-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo‘ladi:

5-rasm



Demak, C(A) to‘plam A to‘plamga kirmaydigan elementlardan tashkil topgan bo‘ladi, ya’ni $x\in A\Rightarrow x\notin C(A), \quad x\notin A\Rightarrow x\in C(A)$.

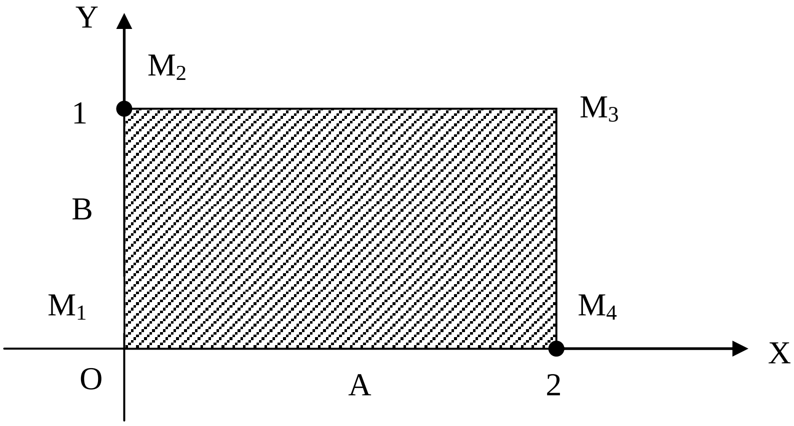
Masalan, Ω={Barcha korxonalar}, A={Rejani bajargan korxonalar} bo‘lsa, unda C(A)={ Rejani bajarmagan korxonalar} to‘plami bo‘ladi;

Ω={1,2,3, · · ·, n, · · ·}–natural sonlar to‘plami, A={2,4,6, · · · , 2n, · · ·}–juft sonlar to‘plami, B={5,6,7, · · ·, n, · · ·}– 4dan katta natural sonlar to‘plami bo‘lsa, unda

C(A)={1,3,5, · · ·, 2n–1, · · ·}– toq sonlar, C(B)={1,2,3,4}–5dan kichik natural sonlar to‘plamlarini ifodalaydi.

9-TA’RIF:A va B to‘plamlarning ***Dekart ko‘paytmasi*** deb A×B kabi belgilanadigan va (x, y) (x∈A, y∈B) ko‘rinishdagi juftliklardan tuzilgan yangi to‘plamga aytiladi.

Masalan, A=[0,2] va B=[0,1] bo‘lsa, A×B to‘plam tekislikdagi (x, y) (x∈A=[0,2], y∈B=[0,1]) nuqtalardan, ya’ni uchlari $M_1(0,0)$, $M_2(0,1)$, $M_3(2,1)$ va $M_4(2,0)$ nuqtalarda joylashgan to‘g‘ri to‘rtburchakdan iborat bo‘ladi (6-rasmga qarang):



6-rasm

Agar C={Tajribali ishchilar} va D={Yosh ishcilar} bo‘lsa, unda C×D tajribali va yosh ishchidan iborat bo‘lgan turli “ustoz-shogird” juftliklaridan iborat to‘plamni ifodalaydi.

Umuman olganda to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi uchun A×B≠B×A, ya’ni kommutativlik qonuni bajarilmaydi. Masalan, A=[0,2] va B=[0,1] to‘plamlar uchun A×B asosining uzunligi 2, balandligi 1 bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni , B×A esa asosining uzunligi 1, balandligi 2 bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni ifodalaydi va bunda A×B≠B×A bo‘ladi.

3. Chekli va cheksiz to‘plamlar. To‘plamlar nazariyasida barcha to‘plamlar chekli va cheksiz to‘plamlarga ajratiladi. Bu to‘plamlarni ta’riflash uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz.

10-TA’RIF:Agar A va B to‘plamlar berilgan bo‘lib, har bir a∈A elementga biror f qonun-qoida asosida bitta va faqat bitta b∈B element mos qo‘yilgan bo‘lsa (a→b), A to‘plam B to‘plamga ***aks ettirilgan*** deyiladi va f : A → B kabi ifodalanadi.

Masalan, $f(x)=\sin x$ akslantirishda X=(–∞, ∞) haqiqiy sonlar to‘plami Y=[–1, 1] kesmaga (f : X → Y), $g(x)=x^3$ akslantirishda esa X=(–∞, ∞) to‘plamni o‘ziga (g : X → X) akslantiriladi.

11-TA’RIF:Agar f : X → Y akslantirish berilgan bo‘lsa, Y to‘plamning y=f(x)elementi X to‘plamning x elementining ***tasviri ,*** x esa y elementning ***asli*** deyiladi.

12-TA’RIF:Agar f : X → Y akslantirishda har bir y∈Y tasvirga uning faqat bitta x∈X asli mos kelsa (buni x⇔y kabi ifodalaymiz), bu akslantirish X va Y to‘plamlar orasidagi ***o‘zaro bir qiymatli moslik*** deyiladi.

Masalan, $f(x)=\sin x$: X=(–∞, ∞) → Y=[–1, 1] akslantirish o‘zaro bir qiymatli moslik bo‘lmaydi, chunki $y=\sin x,\ y\in[-1{,}1]$, tenglama X=(–∞, ∞) haqiqiy sonlar to‘plamida cheksiz ko‘p yechimga egadir. $g(x)=x^3$: X → X akslantirish esa o‘zaro bir qiymatli moslikdir, chunki $y=x^3$ tenglama X=(–∞, ∞) haqiqiy sonlar to‘plamida faqat bitta yechimga egadir.

13-TA’RIF:Agar A to‘plamning elementlari bilan natural sonlar to‘plami N ning dastlabki biror *m* ta elementlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatib bo‘lsa, unda A ***cheklito‘plam***deyiladi.

Masalan, A={ Yer yuzidagi barcha odamlar}, B={Kitobdagi varaqlar}, C={Zavoddagi stanoklar}, D={Aksioner jamiyatdagi a’zolar} kabi to‘plamlar chekli bo‘ladi.

Ba’zi hollarda chekli to‘plamdagi elementlar sonini aniq ko‘rsatib bo‘ladi, ba’zi hollarda esa bu sonni aniq ko‘rsatib bo‘lmaydi. Masalan, A={O‘zbekistondagi viloyatlar} to‘plami chekli va uning elementlari soni m(A)=12 deb ko‘rsatish mumkin. Ammo B={Yer yuzidagi barcha daraxtlar} to‘plami ham chekli bo‘lsada, undagi elementlar soni m(B) ni aniq ko‘rsata olmaymiz.

Umumiy holda chekli A to‘plamning elementlar soni m(A)=*m* bo‘lsa, , bu to‘plamni A=$\{a_{1,} a_2 ,\ldots, a_m\}$ ko‘rinishda yozish mumkin.

1-TEOREMA: Agarda chekli A va B to‘plamlarning elementlari soni mos ravishda m(A) va m(B) bo‘lsa, unda ularning birlashmasi A$\cup$B va kesishmasi A$\cap$B elementlarining soni o‘zaro

$$m(A\cup B)=m(A)+m(B) - m(A\cap B)$$

tenglik bilan bog‘langan.

Masala: Korxonada ishlab chiqarilgan 300 dona mahsulot sifati tekshirildi. Bunda mahsulot oliy navli, I navli, II navli yoki sifatsiz bo‘lishi mumkin deb hisoblanadi. Tekshiruv natijalaridan 270 dona mahsulot sifatli va 150 dona mahsulot oliy navli emasligi ma’lum. I va II navli mahsulotlarning umumiy sonini toping.

Yechish: Tekshiruvda sifatli deb topilgan mahsulotlar to‘plamini A, oliy navli bo‘lmagan mahsulotlar to‘plamini B kabi belgilaymiz. Masala shartiga asosan m(A)=270 va m(B)=150 ekanligi ma’lum. To‘plamlar birlashmasi ta’rifiga asosan A$\cup$B korxonada ishlab chiqarilgan barcha mahsulotlar to‘plamini ifodalaydi shu sababli m(A$\cup$B)=300 bo‘ladi. To‘plamlar kesishmasi ta’rifiga asosan A$\cap$B tekshiruv natijasida sifatli va oliy navli bo‘lmagan, ya’ni I yoki II navli deb baholangan mahsulotlar to‘plamini ifodalaydi. Unda, yuqorida isbotlangan formuladan foydalanib, masala javobini quyidagicha topamiz:

$$m(A\cup B)=m(A)+m(B)-m(A\cap B) \Rightarrow m(A\cap B)=m(A)+m(B)-m(A\cup B)=$$
$$=270+150-300=120.$$

Demak, I va II navli mahsulotlarning umumiy soni 120 dona ekan.

Endi cheksiz to‘plam tushunchasini kiritamiz va u bilan bog‘liq tasdiqlar bilan tanishamiz.

14-TA’RIF: Chekli bo‘lmagan A to‘plam ***cheksizto‘plam*** deyiladi.

Masalan, natural sonlar to‘plami $N=\{1, 2, 3, \cdots, n , \cdots\}$, Q={Ratsional sonlar} , A={ [0;1] kesmadagi nuqtalar}, B={sin*x*=*a* ($|a| \le 1$) tenglama ildizlari} va D={Tekislikdagi barcha to‘g‘ri chiziqlar} kabi to‘plamlar cheksiz bo‘ladi.A va B chekli to‘plamlarni ularning elementlari soni m(A) va m(B) bo‘yicha m(A)>m(B), m(A)=m(B), m(A)<m(B) munosabatlarning biri bilan o‘zaro taqqoslash mumkin. Bunda chekli to‘plamlarni ikki xil usulda taqqoslash mumkin.

1 – u s u l :A iq B to‘plamdagi elementlar soni m(A) va m(B) bevosita sanash orqali topiladi va so‘ngra ular o‘zaro taqqoslanadi.

2 – u s u l : Har bir $a\in$A elementga bitta va faqat bitta $b\in$B elementini mos qo‘yamiz. Agar bu mos qo‘yishda A to‘plamdagi elementlar ortib qolsa (ya’ni bir qancha $a\in$A elementlarga B to‘plamda ularga mos qo‘yiladigan elementlar yetmay qolsa), unda m(A)>m(B) va aksincha, B to‘plamning elementlari ortib qolsa, m(A)<m(B) bo‘ladi. Uchinchi holda A to‘plamda ham, B to‘plamda ham elementlar ortib qolmaydi va bunda m(A)=m(B) bo‘ladi.

Masalan, A={Viloyatdagi firmalar}, B={ Viloyatdagi auditorlar} to‘plamlarni ulardagi firmalar va auditorlar sonini sanamasdan, 2- usulda taqqoslaymiz. Buning uchun har bitta firmaga bittadan auditorni jo‘natamiz. Agar bir qism firmalarga jo‘natish uchun auditorlar yetmay qolsa, unda m(A)>m(B); hamma firmalarga auditorlar jo‘natilib, ularning bir qismi ortib qolgan bo‘lsa, unda m(A)<m(B); hamma firmalarga auditorlar jo‘natilib, boshqa auditor qolmagan bo‘lsa, unda m(A)=m(B) bo‘ladi.

15-*TA'RIF:*Agar A va B to‘plamlar orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatib bo‘lsa, bu to‘plamlar ***ekvivalent*** deyiladi va A~B kabi belgilanadi.

Masalan, A={toq sonlar}, B={juft sonlar} bo‘lsin. Unda $A\ni 2n-1\Leftrightarrow 2n\in B$, ya’ni $1\Leftrightarrow 2$, $3\Leftrightarrow 4$, $5\Leftrightarrow 6$, $\cdots$, $2n-1\Leftrightarrow 2n$, $\cdots$ ko‘rinishda A va B to‘plam elementlari o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin va shu sababli A~B bo‘ladi. Demak A va B to‘plamlar ekvivalent, ya’ni A~B bo‘lsa, ularni elementlar soni bo‘yicha bir xil deb qarash mumkin.

2-TEOREMA: AgardaA~B, B~Cbo‘lsa, undaA~Cbo‘ladi**.**

16-*TA'RIF:*Agar A~B bo‘lsa, ular ***teng quvvatli*** to‘plamlar deb ataladi.

Chekli A va B to‘plamlarning quvvati ulardagi elementlar soni m(A) va m(B) kabi aniqlanadi. Shu sababli chekli A va B to‘plamlar ekvivalent, ya’ni teng quvvatli, bo‘lishi uchun ularning elemetlari soni m(A)=m(B) shartni qanoatlantirishi zarur va yetarlidir.

4. Sanoqli va sanoqsiz to‘plamlar. Cheksiz to‘plamlar ichida eng «kichigi» natural sonlar to‘plami

$$N=\{1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\}$$

bo‘lib hisoblanadi.

17-*TA'RIF:* Natural sonlar to‘plami *N* va unga ekvivalent barcha cheksiz to‘plamlar ***sanoqli to‘plam*** deyiladi.

Agarda A sanoqli to‘plam bo‘lsa, uning elementlarini natural sonlar yordamida belgilab (nomerlab) chiqish mumkin, ya’ni $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$ deb yozish mumkin.

Endi sanoqli to‘plamlarga misollar keltiramiz.

1) Z={butun sonlar}=$\{\cdots, -2,-1,0,1,2, \cdots\}$ sanoqli to‘plam bo‘ladi. Bunga $Z\ni n\Leftrightarrow 2n+1\in N$, agar $n\geq 0$ bo‘lsa va $Z\ni n\Leftrightarrow 2|n|\in N$, agar $n<0$ bo‘lsa, ya’ni nomanfiy butun sonlarga toq natural sonlarni, manfiy butun sonlarga esa juft natural sonlarni mos qo‘yish bilan ishonch hosil qilish mumkin. Bunda $N\subset Z$ bo‘lsada N~Z ekanligini ta’kidlab o‘tamiz.

2) A={juft sonlar}=$\{2,4,6,8, \cdots,2n, \cdots\}\sim N$. Bunga $A\ni 2n\Leftrightarrow n\in N$ o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish orqali ishonch hosil etish mumkin.

Sanoqli to‘plamlar quyidagi xossalarga ega bo‘lishini ko‘rsatish mumkin:

I. Har qanday sanoqli to‘plamning qism to‘plami chekli yoki sanoqli bo‘ladi.

II. Sanoqli va chekli to‘plam birlashmasi sanoqli to‘plam bo‘ladi.

III. Chekli yoki sanoqli sondagi sanoqli to‘plamlar birlashmasi sanoqlidir.

IV. Barcha sanoqli to‘plamlar o‘zaro ekvivalent bo‘ladi.

Oxirgi tasdiqdan barcha sanoqli to‘plamlar bir xil quvvatga ega ekanligi kelib chiqadi.

3-TEOREMA: Ratsional sonlar to‘plami Q sanoqli.Har qanday cheksiz to‘plam sanoqli bo‘lavermaydi.

18-*TA'RIF:* Sanoqli bo‘lmagan cheksiz to‘plam ***sanoqsiz to‘plam*** deb aytiladi.

Ushbu teorema sanoqsiz to‘plamlar mavjudligini ko‘rsatadi.

4-TEOREMA: [0,1] kesmaga tegishli barcha nuqtalar (haqiqiy sonlar) to‘plami sanoqsizdir.

Teoremani isbotsiz qabul etamiz.

19-*TA'RIF:* [0,1] kesma va unga ekvivalent barcha to‘plamlar ***kontinuum*** quvvatli deyiladi.

Ixtiyoriy a, b ($b>a$) haqiqiy sonlar uchun $[a, b]\sim[0,1]$, ya’ni ixtiyoriy kesmadagi nuqtalar (haqiqiy sonlar) kontinuum quvvatli sanoqsiz to‘plam bo‘ladi. Bunga $y=a+(b-a)x$ ($y\in[a,b]$, $x\in[0,1]$) o‘zaro bir qiymatli akslantirish orqali ishonch hosil qilish mumkin.

Natija: Ixtiyoriy ikkita $[a,b]$ ва $[c,d]$ kesmalar ekvivalent, ya’ni $[a,b]\sim[c,d]$ bo‘ladi.

Haqiqatan ham, yuqorida ko‘rsatilganga asosan, $[a,b]\sim[0,1]$ va $[c,d]\sim[0,1]$. Bu yerdan, 1-teoremaga asosan, $[a,b]\sim[c,d]$ ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday tarzda ixtiyoriy chekli yoki cheksiz oralik (a,b) ~[0,1], ya'ni kontinuum quvvatli sanoqsiz to'plam bo'lishini isbotlash mumkin. Jumladan, barcha haqiqiy sonlar to'plami R=(– ∞ , ∞) kontinuum quvvatli sanoqsiz to'plam bo'ladi.

Har qanday chekli to'plamning quvvati sanoqli to'plam quvvatidan kichik, o'z navbatida sanoqli to'plam quvvati kontinuum quvvatidan kichikdir. Unda quvvati kontinuumdan katta to'plamni mavjud yoki mavjud emasligini aniqlash masalasi paydo bo'ladi. Bu masala o'z yechimini quyidagi teorema orqali topadi.

5-TEOREMA: A to'plam quvvati m(A) bo'lsin. U holda A to'plamning barcha qism to'plamlaridan iborat B to'plam quvvati m(B)>m(A) bo'ladi.

Bu teoremadan quvvati eng katta bo'lgan cheksiz to'plam mavjud emasligi kelib chiqadi. Jumladan, quvvati kontinuumdan katta bo'lgan sanoqsiz to'plamlar mavjud.

Agar A va B cheksiz to'plamlar quvvati m(A) va m(B) bo'lsa, bu yerda yoki m(A)=m(B) yoki m(A)<m(B) yoki m(A)>m(B) munosabatlardan biri o'rinli bo'ladi. Bunda m(A)=m(B) tenglik A~B ekanligini bildiradi. m(A)>m(B) yozuv A to'plamning biror qismi B to'plamga ekvivalent, ammo B to'plamda A to'plamga ekvivalent qism yo'qligini bildiradi.

5. Nyuton binomi va binomial koeffitsiyentlar.

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k$$

Bu tenglikda n ixtiyoriy natural son bo'lib, u maktabda o'rganiladigan $(a+b)^2$ va $(a+b)^3$ qisqa ko'paytirish formulalarini umumlashtirmasini ifodalaydi va matematikada ***Nyuton binomi*** **(**binomikkihad degan ma'noni bildiradi**),** unga kiruvchi C_n^k sonlari esa ***binomial koeffitsiyentlar*** deb ataladi.

1. Agar Nyuton binomida $a = b = 1$ yoki $a=1$, $b=-1$deb olsak, unda

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$$

tengliklar o'rinlini ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

2. Agar k o'rniga $n-k$ qo'yilsa yoki $k=0$ yoki $k=n$ deb olinsa, unda

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \qquad C_n^0 = C_n^n = 1$$

tengliklar hosil bo'ladi. Ular kombinatsiyalarni hisoblashni osonlashtiradi

6.Sonli ketma-ketlik va uning limiti.

1-TA'RIF: Agar har bir $n\in N$ natural songa biror qonun-qoida asosida ma'lum bir $a_n\in R$ haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsa, unda $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$
sonli ketma-ketlik deb ataladi. Bunda a_i $(i\in N)$ sonlari ***ketma-ketlikning hadlari***, a_n esa ***umumiy hadi*** deyiladi.

Sonli ketma-ketliklarga bir nechta misol keltiramiz.

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, \quad a_n = \frac{1}{n}$;

2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \dots, \quad a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$;

3) $-1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots, \quad a_n=(-1)^n$;

4) $3, 3, 3, 3, \cdots, 3, \cdots, \quad a_n=3$;

5) $-1, -4, -9, -16, \cdots, -n^2, \cdots, \quad a_n=-n^2$;

6) $2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots, \quad a_n=2^n$;

7) $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \cdots, n^{(-1)^n}, \cdots, \qquad a_n = n^{(-1)^n};$

8) $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \cdots, (-1)^n \cdot n, \cdots, \qquad a_n = (-1)^n \cdot n$.

Kelgusida $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ sonli ketma-ketlikni qisqacha ketma-ketlik deb yuritamiz va $\{a_n\}$ kabi belgilaymiz.

2-TA'RIF: Agar shunday M (yoki m) soni mavjud bo'lsaki, $\{a_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari uchun $a_n \le M$ (yoki $a_n \ge m$)shart bajarilsa, unda bu ketma-ketlik ***yuqoridan*** **(*quyidan*) *chegaralangan*** deb ataladi. Ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik ***chegaralangan*** deyiladi.

Masalan, yuqorida keltirilgan 5) ketma-ketlik yuqoridan $M=-1$ soni bilan, 6) va 7) ketma-ketliklar quyidan mos ravishda $m=2$ va $m=0$ soni bilan chegaralangan. 1)─4) ketma-ketliklar esa chegaralangan bo'ladi.

3-TA'RIF: Ixtiyoriy $M>0$ soni uchun $\{a_n\}$ ketma-ketlikning kamida bitta hadi $|a_n|>M$ tengsizlikni qanoatlantirsa, bu ketma-ketlik ***chegaralanmagan*** deyiladi.

Masalan, 5)─8) ketma-ketliklar chegaralanmagan bo'ladi. Bunda 8) quyidan ham, yuqoridan ham chegaralanmagan ketma-ketlik bo'ladi.

4-TA'RIF: Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lib, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni uchun unga bog'liq shunday N_ε son topilsaki, $n>N_\varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar va biror chekli A haqiqiy son uchun $|a_n - A|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, bu A soni $\{a_n\}$ ketma-ketlikning ***chekli limiti*** deyiladi.

A soni$\{a_n\}$ ketma-ketlikning chekli limiti ekanligi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{yoki } \lim a_n=A \text{ yoki } a_n\to A$$

kabi yoziladi. Bu yozuv "$\{a_n\}$ ketma-ketlik A soniga intiladi yoki yaqinlashadi" deb o'qiladi.

Masalan, 1) ketma-ketlik limiti $A=0$ ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun ixtiyoriy $\varepsilon>0$ sonini olib, limit ta'rifidagi N_ε sonini topishga harakat etamiz:

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} = N_\varepsilon .$$

Demak, 1) ketma-ketlikda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni uchun $N_\varepsilon=1/\varepsilon$ deb olsak, unda barcha $n>N_\varepsilon$ uchun $|a_n-0|=|(1/n)-0|<\varepsilon$ bo'ladi va, limit ta'rifga asosan, $\lim (1/n)=0$ ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shunday tarzda 2) ketma-ketlik limiti ham 0 bo'lishini ko'rsatish mumkin.Endi yana $\{a_n\}$ ketma-ketlik limiti ta'rifiga murojaat etamiz. Unda $a_n\to A$ bo'lsa, tartib raqami $n>N_\varepsilon$ bo'lgan barcha a_n hadlar uchun

$$|a_n - A|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon< a_n - A<\varepsilon \Rightarrow A-\varepsilon< a_n<A+\varepsilon \Rightarrow a_n\in(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\{a_n\}$ ketma-ketlik chekli A limitga ega bo'lsa, unda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni uchun uning tartib raqami $n>N_\varepsilon$ bo'lgan barcha a_n hadlari A nuqtaning ε-atrofiga tegishli va undan tashqarida faqat chekli sondagi hadlar joylashgan bo'ladi. Limit ta'rifining bu ifodasidan foydalanib 3) ketma-ketlik limiti mavjud emasligini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilamiz va 3) ketma-ketlik limiti biror A sonidan iborat deb olamiz. Bu limit nuqtaning $(A-0.5, A+0.5)$ atrofini qaraymiz. Unda bu atrofdan tashqarida 3) ketma-ketlikning chekli sondagi hadlari joylashgan bo'lishi kerak. Ammo A limit nuqtaning bu atrofiga 3) ketma-ketlikning ham 1, ham -1 hadlari bir paytda tegishli bo'la olmaydi. Bunga sabab shuki, olingan $(A-0.5, A+0.5)$ atrof uzunligi 1 bo'lib, -1 va 1 hadlar orasidagi masofa esa 2 ga tengdir. Bu holda, masalan, agar $1\in(A-0.5, A+0.5)$ bo'lsa, unda -1 bu atrofdan tashqarida joylashgan bo'ladi. Bundan esa $(A-0.5, A+0.5)$ atrofdan tashqarida 3) ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari joylashganligi kelib chiqadi. Ammo bu xulosa limit ta'rifiga ziddir. Demak farazimiz noto'g'ri va 3) ketma-ketlik limitga ega emas ekan.

5-TA'RIF: Hamma hadlari bir xil a soniga teng bo'lgan ketma-ketlik ***o'zgarmas ketma-ketlik*** deyiladi.

Har qanday $\{a_n=C\}$ o‘zgarmas ketma-ketlik uchun $\lim a_n = \lim C = C$ tenglik o‘rinli bo‘lishi bevosita limit ta’rifidan kelib chiqadi. Masalan, yuqoridagi 4) $\{a_n=3\}$ o‘zgarmas ketma-ketlikdir va uning uchun $\lim a_n = \lim 3 = 3$ bo‘ladi.

6-TA‘RIF: Ixtiyoriy $M>0$ soni uchun bu songa bog‘liq shunday N_M soni topilsaki, $\{a_n\}$ ketma-ketlik tartib raqami $n>N_M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha hadlar uchun $|a_n|>M$ tengsizlik bajarilsa, unda bu ketma-ketlik ***cheksiz limitga*** ega deyiladi.

Berilgan $\{a_n\}$ ketma-ketlikning limiti cheksiz ekanligi $\lim a_n=\infty$ yoki $\lim a_n=\pm\infty$ kabi ifodalanadi. Masalan, 5) ketma-ketlik uchun $\lim a_n=-\infty$ ekanligini ko‘rsatamiz. ixtiyoriy $M>0$ uchun

$$|a_n| > M \Rightarrow \left|-n^2\right| > M \Rightarrow n^2 > M \Rightarrow n > \sqrt{M} = N_M .$$

Demak, 5) ketma-ketlikda ixtiyoriy $M>0$ soni uchun $N_M = \sqrt{M}$ deb olsak, unda barcha $n>N_M$ uchun $|a_n|=|-n^2|>M$ bo‘ladi va, barcha $a_n<0$ ekanligidan hamda cheksiz limit ta’rifiga asosan , $\lim(-n^2)=-\infty$ ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shundek 6) ketma-ketlik uchun $\lim a_n=\lim 2^n=+\infty$ ekanligini ko‘rsatish mumkin. 8) sonli ketma-ketlik ham chegaralanmagan, ammo uning cheksiz limiti aniq bir ishoraga ega emas va shu sababli $\lim a_n=\lim(-1)^n n=\infty$ deb yoziladi.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki cheksiz limitga ega har qanday ketma-ketlik albatta chegaralanmagan bo‘ladi. Ammo teskari tasdiq har doim ham o‘rinli bo‘lmaydi. Masalan, yuqorida keltirilgan 7) ketma-ketlik chegaralanmagan, ammo uning limiti mavjud emas.

7-TA‘RIF: Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo‘lsa, u ***yaqinlashuvchi***, aks holda esa ***uzoqlashuvchiketma-ketlik*** deyiladi.

Masalan, yuqoridagi 1), 2) va 4) ketma-ketliklar yaqinlashuvchi, 3), 5)─8) ketma-ketliklar esa uzoqlashuvchidir.

1-TEOREMA: Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, uning limiti yagona bo‘ladi.

Biror $\{a_n\}$ ketma-ketlik limitini hisoblash ikki bosqichdan iborat bo‘ladi:

1) bu ketma-ketlikni yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlash;
2) agar ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, uning limitini topish.

8-TA‘RIF: Agar ixtiyoriy $n=1,2,3,\cdots$ uchun $a_{n+1}>a_n$ $(a_{n+1}<a_n)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, unda $\{a_n\}$ ketma-ketlik ***monoton o‘suvchi (kamayuvchi)*** deyiladi.

Masalan, $\{1-1/n\}$ monoton o‘suvchi, $\{1+1/n\}$ esa monoton kamayuvchi ketma-ketlik bo‘ladi.

2-TEOREMA: Agar $\{a_n\}$ monoton o‘suvchi (kamayuvchi) ketma-ketlik va yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo‘lsa, unda $\{a_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo‘ladi.

Bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

7. Sonli ketma-ketlik limitini hisoblash qoidalari.

3-TEOREMA: Agar $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ketma-ketliklarning ikkalasi ham yaqinlashuvchi va $\lim a_n=A$, $\lim b_n=B$ bo‘lsa, unda quyidagi tengliklar o‘rinli bo‘ladi:

$$\lim(a_n \pm b_n)= \lim a_n \pm \lim b_n=A\pm B; \qquad (1)$$

$$\lim(a_n \cdot b_n)= \lim a_n \cdot \lim b_n=A\cdot B; \qquad (2)$$

$$\lim(a_n / b_n)= \lim a_n / \lim b_n=A/B \ \ (\lim b_n=B\neq 0). \qquad (3)$$

Izohlar: **1.** (1)─(3) tengliklar yaqinlashuvchi ketma-ketliklar uchun limit olish va arifmetik amallar bajarilish tartibini o‘zgartirish mumkinligini ko‘rsatadi.

2. Agar $\{a_n=C\}$ o‘zgarmas ketma-ketlik bo‘lsa, bu holda $\lim a_n=C$ ekanligidan foydalanib, (2) tenglikni $\lim Cb_n=C\lim b_n=Cb$ ko‘rinishda yozish mumkin. Demak, o‘zgarmas C ko‘paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

(1)─(3) limit hisoblash qoidalari va eng sodda

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha<0; \\ 1, & \alpha=0 \\ \infty, & \alpha>0 \end{cases} \qquad (4)$$

limitdan foydalanib, bir qator ketma-ketliklarning limitini hisoblash mumkin. Bunga misol sifatida

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{p_k n^k + p_{k-1}n^{k-1} + p_{k-2}n^{k-2} + \cdots + p_1 n + p_0}{q_m n^m + q_{m-1}n^{m-1} + q_{m-2}n^{m-2} + \cdots + q_1 n + q_0} \qquad (5)$$

limitni hisoblash masalasini ko‘ramiz. (5) limitni to‘g‘ridan-to‘g‘ri (3) qoida yordamida hisoblab bo‘lmaydi, chunki surat va maxrajdagi ketma-ketliklar yaqinlashuvchi emas.Bu limitni hisoblash uchun uch holni alohida-alohida qaraymiz.

1) $k>m$. Limit ostidagi kasrning suratidan n^k va maxrajidan n^m darajani qavsdan tashqariga chiqaramiz. So‘ngra $k-m=\alpha>0$ ekanligini hisobga olib va (4) limitdan foydalanib, quyidagi natijaga kelamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^k(p_k + p_{k-1}n^{-1} + p_{k-2}n^{-2} + \cdots + p_1 n^{1-k} + p_0 n^{-k})}{n^m(q_m + q_{m-1}n^{-1} + q_{m-2}n^{-2} + \cdots + q_1 n^{1-m} + q_0 n^{-m})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{p_k}{q_m}n^{k-m} = \frac{p_k}{q_m}\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}(\alpha>0) = \pm\infty .$$

2) $k=m=r$. Bu holda (5) limitdagi kasrning surat va maxrajini n^r darajaga bo‘lib va (1)—(3) limit hisoblash qoidalari hamda (4) limitdan foydalanib, ushbu javobni hosil etamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_r(n)}{Q_r(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{p_r n^r + p_{r-1}n^{r-1} + p_{r-2}n^{r-2} + \cdots + p_1 n + p_0}{q_r n^r + q_{r-1}n^{r-1} + q_{r-2}n^{r-2} + \cdots + q_1 n + q_0} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^r(p_r + p_{r-1}n^{-1} + p_{r-2}n^{-2} + \cdots + p_1 n^{1-r} + p_0 n^{-r})}{n^r(q_r + q_{r-1}n^{-1} + q_{r-2}n^{-2} + \cdots + q_1 n^{1-r} + q_0 n^{-r})} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(p_r + p_{r-1}n^{-1} + p_{r-2}n^{-2} + \cdots + p_1 n^{1-r} + p_0 n^{-r})}{\lim\limits_{n\to\infty}(q_r + q_{r-1}n^{-1} + q_{r-2}n^{-2} + \cdots + q_1 n^{1-r} + q_0 n^{-r})} = \frac{p_r}{q_r}.$$

3) $k<m$. Bunda 1) holdagi singari mulohazalar yuritib,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{p_k}{q_m}n^{k-m} = \frac{p_k}{q_m}\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}(\alpha<0) = \frac{p_k}{q_m}\cdot 0 = 0$$

javobga erishamiz.

Misol sifatida ushbu limitni hisoblanishini to‘liq ko‘rsatamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{2n+7} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(4-3n^{-1})}{n(2+7n^{-1})} = \lim_{n\to\infty}\frac{4-3n^{-1}}{2+7n^{-1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(4-3n^{-1})}{\lim\limits_{n\to\infty}(2+7n^{-1})} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}4 - \lim\limits_{n\to\infty}3n^{-1}}{\lim\limits_{n\to\infty}2 + \lim\limits_{n\to\infty}7n^{-1}} = \frac{4-3\lim\limits_{n\to\infty}n^{-1}}{2+7\lim\limits_{n\to\infty}n^{-1}} = \frac{4-3\cdot 0}{2+7\cdot 0} = \frac{4}{2} = 2 .$$

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, har qanday $\{a_n\}$ ketma-ketlik limitini hisoblashning umumiy usuli mavjud bo‘lmasdan, (5) limit singari ayrim xususiy hollarda uni hisoblash yo‘lini ko‘rsatish mumkin. Bunga misol sifatida quyidagi ko‘rinishdagi limitni hisoblash usuli bilan tanishtiramiz:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b})(\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b})}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+a})^2-(\sqrt{n+b})^2}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+a)-(n+b)}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}}=$$

$$=(a-b)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}}=(a-b)\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(a/n)}+\sqrt{1+(b/n)}}\right]=$$

$$=(a-b)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+(a/n)}+\sqrt{1+(b/n)}}=(a-b)\cdot 0\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}=0.$$

Sonli ketma-ketliklar limitlarini hisoblashda quyidagi ***ajoyib limit*** deb ataladigan tenglikdan ham foydalanish mumkin:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \qquad (6)$$

Bu natija umumiy hadi $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bo‘lgan sonli ketma-ketlik monoton o‘suvchi va yuqoridan 3 soni bilan chegaralanganligini isbotlash (bu ustida to‘xtalib o‘tirmaymiz) va 2-teoremadan foydalanish orqali keltirib chiqariladi . Bu limitning javobi *e*=2.718281… irratsional son ekanligi va bu son matematikada juda ko‘p qo‘llanilishini ta’kidlab o‘tamiz. Masalan, natural logarifm ln*x* asosi mana shu *e* sonidan iboratdir.

Tayanch iboralar

To‘plam * To‘plam elementi * Bo‘sh to‘plam * To‘plam qismi * To‘plamlar tengligi * To‘plamlar birlashmasi * To‘plamlar kesishmasi * To‘plamlar ayirmasi * Universal to‘plam * To‘plam to‘ldiruvchisi * Dekart ko‘paytma .

Takrorlash uchun savollar

1. To‘plamlar nazariyasining ahamiyati nimadan iborat?
2. To‘plamlar nazariyasiga kim asos solgan?
3. To‘plam deganda nima tushuniladi?
4. To‘plam elementi qanday aniqlanadi?
5. To‘plamlarga misollar keltiring.
6. Qanday to‘plam bo‘sh to‘plam deyiladi?
7. To‘plam qismi qanday ta’riflanadi?
8. Qachon ikkita to‘plam teng deyiladi?
9. To‘plamlar birlashmasi qanday kiritiladi?
10. To‘plamlar birlashmasi amali qanday xossalarga ega?
11. To‘plamlar kesishmasi qanday ta’riflanadi?
12. To‘plamlar kesishmasi amali qanday xossalarga ega?
13. To‘plamlar ayirmasi qanday aniqlanadi?
14. Universal to‘plam nima?
15. To‘plam to‘ldiruvchisi deb nimaga aytiladi?
16. To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?
17. To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi uchun kommutativlik qonuni o‘rinlimi ?

Testlardan namunalar

1. To‘plamlar nazariyasining asoschisi kim ?

A) Pifagor ; B) Dekart ; C) Kantor ; D) Ferma ; E) Gauss .
2. Quyidagi to‘plamlardan qaysi biri bo‘sh to‘plam emas?
A) Kvadrati manfiy bo‘lgan haqiqiy sonlar;
B) sinx = 2 tenglama yechimlari to‘plami;
C) Ikkita burchagi o‘tmas bo‘lgan uchburchaklar to‘plami;
D) Kubi manfiy bo‘lgan sonlar to‘plami;
E) Ikkiga bo‘linmaydigan juft sonlar to‘plami.
2. Qachon A to‘plam B to‘plamning qismi deyiladi?
A) Agar A va B bir xil elementlardan tashkil topgan bo‘lsa.
B) Agar A va B har xil elementlardan tashkil topgan bo‘lsa.
C) Agar B to‘plamning har bir elementi A to‘plamga tegishli bo‘lsa.
D) Agar A to‘plamning har bir elementi B to‘plamga tegishli bo‘lsa.
E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.
3. Quyidagi tasdiqlardan qaysi biri noto‘g‘ri?
A) bo‘sh to‘plam barcha to‘plamlarning to‘plam ostisi bo‘ladi;
B) har bir to‘plam o‘zining to‘plam ostisi bo‘ladi;
C)Agar $A\subset B$ va $C\subset A$ bo‘lsa, unda $C\subset B$ bo‘ladi;
D)Agar $B\subset A$ bo‘lsa, unda $A\cap B=B$ bo‘ladi;
E)Agar $B\subset A$ bo‘lsa, unda $A\cup B=B$ bo‘ladi;
4. A va B to‘plamlar birlashmasi amali qayerda ifodalangan ?
A) $A \cup B$; B) $A \cap B$; C) $A \subset B$; D) $A \supset B$; E) $A \setminus B$.
5. Agar $x\in A \cup B$ bo‘lsa, quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o‘rinli emas ?
A) $x\in A$, $x\notin B$; B) $x\notin A$, $x\in B$; C) $x\notin A$, $x\notin B$;
D) $x\in A$, $x\in B$; E) barcha tasdiqlar o‘rinli bo‘ladi .
6. To‘plamlar birlashmasi amalining xossasi qayerda noto‘g‘ri ko‘rsatilgan ? (Ω – universal to‘plam, $\varnothing$ – bo‘sh to‘plam)
A) $A\cup B=B\cup A;$ B) $A\cup\varnothing=A$; C) $A\cup A=A;$
D) $A\cup\Omega=\Omega.$ E) Barcha xossalar to‘g‘ri ko‘rsatilgan.
7. A = [–3; 0] va B = (–1; 5] to‘plamlar birlashmasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?
A) [–3; 5]; B) [–3; –1]; C) (–1; 0); D) (0; 5]; E) [–1; 5].
8. A va B to‘plamlar kesishmasi amali qayerda ifodalangan?
A) $A \cup B$; B) $A \cap B$; C) $A \subset B$; D) $A \supset B$; E) $A \setminus B$.
9. Agar $x\in A \cap B$ bo‘lsa, quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o‘rinli bo‘ladi ?
A) $x\in A$, $x\notin B$; B) $x\notin A$, $x\in B$; C) $x\notin A$, $x\notin B$;
D) $x\in A$, $x\in B$; E) barcha tasdiqlar o‘rinli emas .
10. Agar universal to‘plam $\Omega=(-\infty, \infty)$ va A=(2,5] bo‘lsa, C(A) to‘plam qayerda to‘g‘ri ifodalangan ?
A) $C(A)=[-\infty,2]$; B) $C(A)=(5, \infty]$; C) $C(A)=[0,2] \cup (5, \infty)$;
D) $C(A)= (-\infty, 2] \cup (5, \infty)$; E) to‘g‘ri javob keltirilmagan .

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Quyidagi A va B to‘plamlar bo‘yicha $A\cup B$, $A\cap B$, A/B va B/A to‘plamlarni toping:
$$A=\{n-3, n-2, n-1, n, n+1\},\ B=\{ n-1, n, n+1, n+2, n+3, n+4\}.$$
2. Quyidagi A va B to‘plamlar bo‘yicha $A\cup B$, $A\cap B$, A/B va B/A to‘plamlarni toping:
$$A=[n-3, n+1], \qquad B=(n-1, n+5)$$
3. Quyidagi A va B to‘plamlarning $A\times B$ va $B\times A$ Dekart ko‘paytmalarini aniqlang:
$$A=\{n-3, n-2, n-1\},\ B=\{n, n+1, n+2, n+3\}$$

12-mavzu. Funksiya tushunchasi. Funksiyaning limiti. Limitlar haqida asosiy teoremalar. Bir tomonlama limitlar. Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar. Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar. Funksiyaning uzluksizligi. Funksiyaning uzilish nuqtalari va ularning turlari.

REJA:

1. Funksiya va u bilan bog‘liq tushunchalar.
2. Funksiya grafigi va berilish usullari.
3. Funksiya ko‘rinishlari.
4. Murakkab va teskari funksiya.
5. Asosiy elementar va elementar funksiyal.
6. Funksiya limiti.
7. Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar va ularning xossalari.
8. Funksiya limitini hisoblash qoidalari. Funksiya limitining mavjudlik shartlari.
9. Ajoyib limitlar.
10. Uzluksiz funksiyalar va ularning xossalari.
11. Kesmada uzluksiz funksiyalar uchun asosiy teoremalar.
12. Funksiyaning uzilish nuqtalari va ularning turlari

1. Funksiya va u bilan bog‘liq tushunchalar. Atrofimizdagi turli jarayonlarni matematik usullarda tadqiqot qilayotganimizda o‘zgarmas va o‘zgaruvchi miqdorlarga duch kelamiz.

1-TA’RIF: Faqat bitta sonli qiymat qabul qiladigan kattaliklar ***o‘zgarmas miqdorlar*** deyiladi.

Masalan, yorug‘lik tezligi *c*, erkin tushish tezlanishi *g*, aylana uzunligini uning diametriga nisbati π, izotermik jarayonlarda harorat t^0 o‘zgarmas miqdorlardir.

2-TA’RIF: Turli sonli qiymatlar qabul qila oladigan kattaliklar ***o‘zgaruvchi miqdorlar*** deyiladi.

Masalan, tekis harakatda *v* tezlik o‘zgarmas miqdor bo‘lib, vaqt *t* va bosib o‘tilgan masofa *s* o‘zgaruvchi miqdorlardir.

Biror jarayonni o‘rganayotganimizda bir nechta o‘zgaruvchi miqdorlar o‘rtasidagi o‘zaro bog‘lanishlarga duch kelamiz.

Masalan, tekis harakatda tezlikni *v*, vaqtni *t* va bosib o‘tilgan masofani *s*desak, u holda *t* va *s*o‘zgaruvchilar o‘zaro $s=v\cdot t$ ko‘rinishda bog‘langan bo‘ladi. Bunday bog‘lanishlarni juda ko‘p keltirish mumkin va shu sababli ularni atroflicha o‘rganish maqsadida funksiya tushunchasi kiritiladi.

3-TA’RIF: Agarda *x* o‘zgaruvchining biror *D* sonli to‘plamga tegishli har bir qiymatiga ma’lum bir qonun-qoida asosida *y* o‘zgaruvchining biror *E* to‘plamga tegishli yagona bir qiymati mos qo‘yilgan bo‘lsa, ya’ni $f : D \to E$ bo‘lsa, unda*y* o‘zgaruvchi *x*o‘zgaruvchining ***funksiyasi*** deyiladi.

Biror *y* o‘zgaruvchi *x* o‘zgaruvchining funksiyasi ekanligi $y=f(x)$kabi belgilanadi (*f* harfi o‘rniga*F*, *h*, *g*, φ kabi boshqa harflar ham qo‘llanilishi mumkin). Bu yerda *x**erkli o‘zgaruvchi yoki argument***, *y* esa ***erksiz o‘zgaruvchi yoki funksiya*** deb ataladi.

Masalan, $y=2x+3$, $y=3x^2+4x-1$, $y=2/x$, $y=5xe^x+6$ funksiyalarga misol bo‘ladi.

4-TA’RIF: Berilgan $f : D \to E$ funksiyada *D* – funksiyaning ***aniqlanish sohasi***, *E* − ***o‘zgarish yoki qiymatlar sohasi*** deyiladi.

$y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi D{*f*}, qiymatlar sohasi esa E{*f*}kabi belgilanadi. Masalan, $f(x)=\sin\sqrt{x}$ funksiya uchun D{*f*}=[0,∞), E{*f*}=[–1,1].

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, oldingi paragrafda ko'rilgan $\{a_n\}$ sonli ketma-ketlikni aniqlanish sohasi D$\{f\}=N$−natural sonlar to'plami, qiymatlar sohasi esa $f(n)= a_n$, $n\in N$, haqiqiy sonlardan iborat funksiya deb qarash mumkin.

Matematik analiz fanida asosan funksiyalar a ular bilan bog'liq bo'lgan tasdiqlar o'rganiladi.

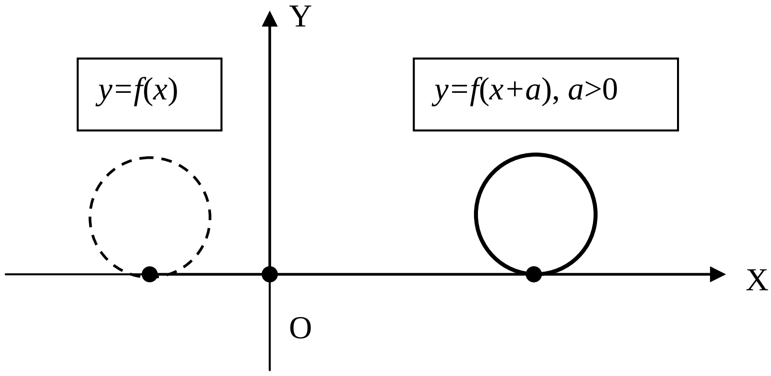
2. Funksiya grafigi va berilish usullari. Funksiya haqida geometrik tasavvur hosil etish uchununing grafigi tushunchasi kiritiladi.

5-TA'RIF:XOY koordinata tekislikdagi $(x,y)=(x,f(x))$, $x\in$D$\{f\}$, koordinatali nuqtalarning geometrik o'rni $y=f(x)$ funksiyaning ***grafigi*** deyiladi.

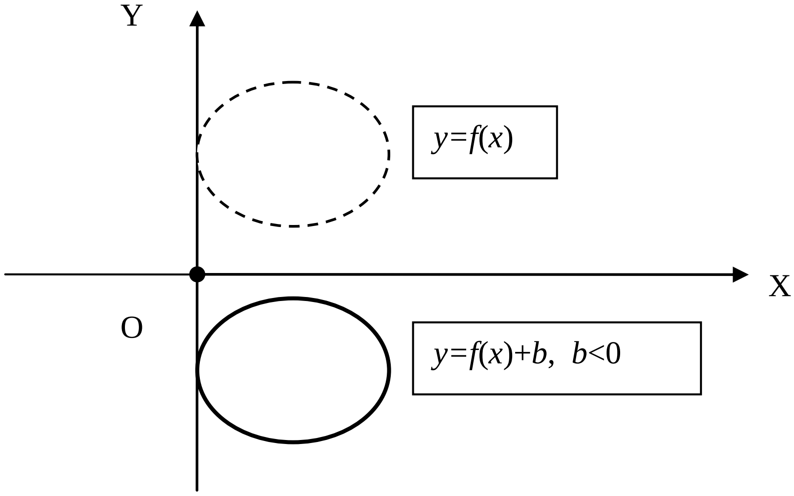
Masalan, $y=x^2$ funksiya grafigi paraboladan, $y=\cos x$ funksiya grafigi sinusoidadan, $y=2x+5$ funksiya grafigi esa to'g'ri chiziqdan iboratdir.

Turli masalalarni yechishda berilgan $y=f(x)$ funksiyaning L grafigini ma'lum bir ko'rinishda o'zgartirishga to'g'ri keladi.

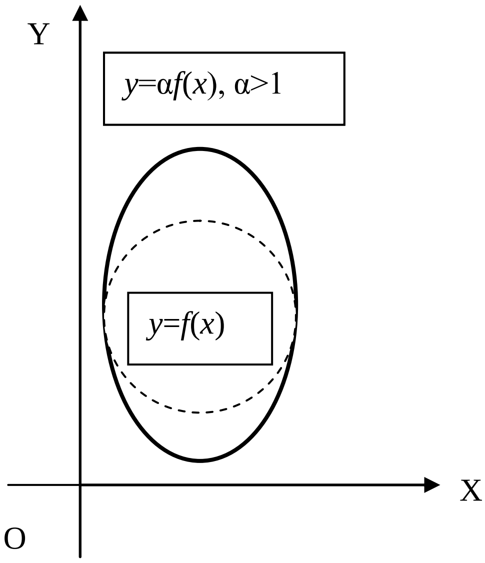
- $y=f(x+a)$ funksiyaning grafigi L chiziqni OX o'qi bo'yicha $|a|$ birlik chapga (agar $a>0$ bo'lsa) yoki o'ngga (agar $a<0$ bo'lsa) parallel ko'chirishdan hosil bo'ladi.

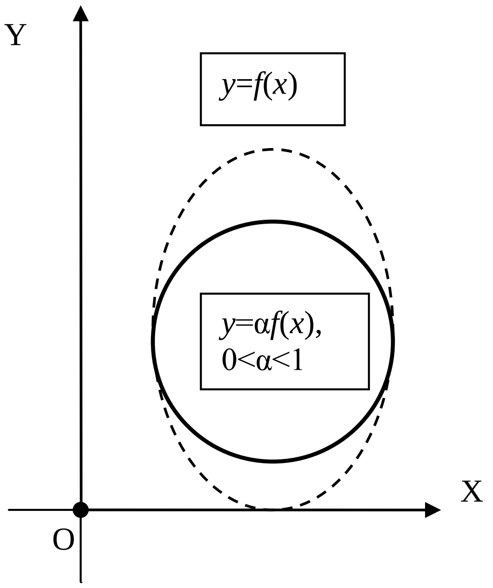


- $y=f(x)+b$ funksiyaning grafigi L chiziqni OY o'qi bo'yicha $|b|$ birlik yuqoriga (agar $b>0$ bo'lsa) yoki pastga (agar $b<0$ bo'lsa) parallel ko'chirishdan hosil bo'ladi.

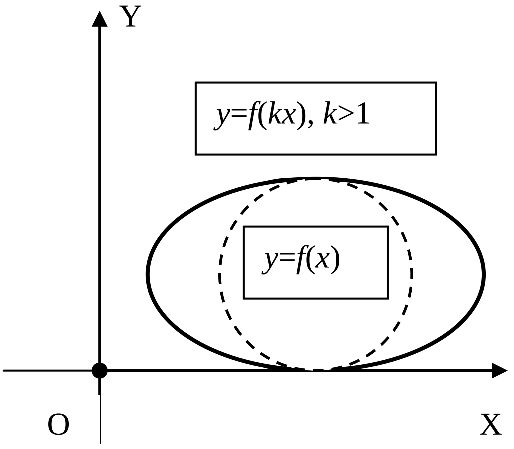


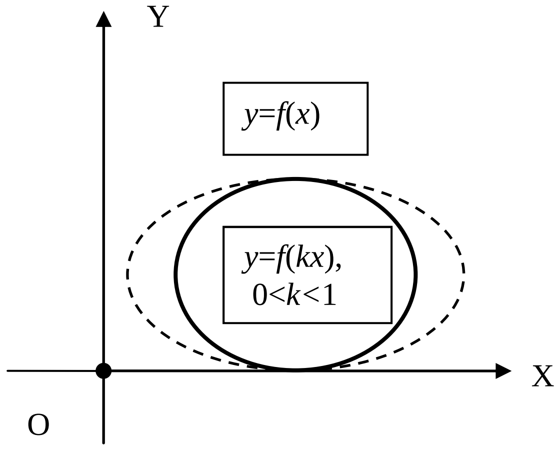
- $y=\alpha f(x)$ funksiyaning grafigi L chiziqni OY o'qi bo'yicha α marta cho'zish (agar $\alpha>1$ bo'lsa) yoki qisish (agar $0<\alpha<1$ bo'lsa,) orqali hosil bo'ladi. Agar $\alpha<0$ bo'lsa, unda L chiziq OX o'qiga nisbatan simmetrik ravishda akslanadi.





➢ $y=f(kx)$ funksiyaning grafigi L chiziqni OX o‘qi bo‘yicha k marta cho‘zish (agar $k>1$ bo‘lsa,) yoki qisish (agar $0<k<1$ bo‘lsa,) orqali hosil bo‘ladi. Agar $k<0$ bo‘lsa, unda L chiziq OY o‘qiga nisbatan simmetrik ravishda akslanadi.





Turli masalalarni qarashda funksiya asosan to‘rt usulda berilishi mumkin.

❖ ***Analitik usul.*** Ko‘p hollarda funksiyalar analitik usulda, ya’ni x argument ustida bajariladigan matematik amallarni formulalar orqali ifodalash orqali beriladi. Masalan, aylana radiusi x va uning yuzasi y orasidagi bog‘lanish funksiyasi $y=\pi x^2$ formula orqali analitik usulda aniqlanadi.

❖ ***Jadval usuli.*** Bu usulda funksiya

x_i	x_1	x_2	x_3	. . .	x_{n-1}	x_n
$y_i=f(x_i)$	y_1	y_2	y_3	. . .	y_{n-1}	y_n

ko‘rinishdagi jadval orqali beriladi. Masalan, Bradisning to‘rt xonali matematik jadvallar kitobchasida funksiyalarning qiymatlari shunday ko‘rinishda berilgan. Odatda x argument va y funksiya orasidagi bog‘lanish tajriba yoki kuzatuvlar asosida o‘rganilayotgan bo‘lsa, funksiya qiymatlari jadval ko‘rinishda ifodalanadi.

❖ ***Grafik usul.*** Bunda x argument va y funksiya orasidagi bog‘lanish bu funksiyaning grafigi orqali beriladi. Masalan, yurak faoliyatini ifodalovchi funksiya kardiogramma orqali grafik ko‘rinishda ifodalanadi. Shuningdek bu usuldan tenglamalarni grafik usulda yechishda ham foydalaniladi.

❖ ***Ta’rif usuli.*** Bu usulda funksiya qiymatini aniqlash qonuni uni ta’riflash orqali beriladi. Masalan, ***Dirixle funksiyasi*** deb ataluvchi va [0,1] kesmada aniqlangan D(x) funksiyani analitik, jadval yoki grafik ko‘rinishlarda ifodalab bo‘lmaydi. Bu funksiya qiymatlari ta’rif bo‘yicha quyidagicha aniqlanadi:

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa };\\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa }.\end{cases}$$

3. Funksiya ko‘rinishlari. Funksiyalar u yoki bu xususiyatlariga qarab turli ko‘rinishlarga ajratiladi.

6-TA’RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror $D\subset D\{f\}$ sohaga tegishli ixtiyoriy $x_1, x_2\in D$ va $x_1<x_2$ nuqtalar uchun $f(x_1)<f(x_2)$ [$f(x_1)\leq f(x_2)$] shartni qanoatlantirsa, u shu D sohada ***o‘suvchi (kamaymovchi) funksiya*** deyiladi.

Masalan, $y=x^3$ funksiya $(-\infty;\infty)$ oraliqda, $y=x^2$ funksiya esa aniqlanish sohasining $(0,\infty)$ oralig‘ida o‘suvchi bo‘ladi. ***Ant’ye funksiya*** deb ataladigan $y=[x]$ funksiyaning qiymati argument x qiymatiga eng yaqin va undan katta bo‘lmagan butun son kabi aniqlanadi. Masalan, $[1.2]=1$, $[2.98]=2$, $[12]=12$, $[-1.5]=-2$. Bu holda $f(x)=[x]$ funksiya uchun $D\{f\}=(-\infty;\infty)$ va $E\{f\}=Z=\{0,\pm1, \pm2,\cdots\}$ bo‘lib, u aniqlanish sohasida kamaymoqchi funksiya bo‘ladi.

7***-TA’RIF:*** Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror $D\subset D\{f\}$ sohaga tegishli ixtiyoriy $x_1, x_2\in D$ va $x_1<x_2$ nuqtalar uchun $f(x_1)>f(x_2)$ [$f(x_1)\geq f(x_2)$] shartni qanoatlantirsa , u shu D sohada ***kamayuvchi (o‘smoqchi) funksiya*** deyiladi.

Masalan, $y=-2x$ funksiya $(-\infty;\infty)$ oraliqda, $y=x^2$ funksiya esa aniqlanish sohasining $(-\infty,0)$ oralig‘ida kamayuvchi bo‘ladi. $y=1-[x]$ funksiya esa $(-\infty;\infty)$ oraliqda o‘smoqchi bo‘ladi.

O‘suvchi yoki kamaymoqchi, kamayuvchi yoki o‘smoqchi funksiyalar birgalikda ***monoton funksiyalar*** deyiladi.

8-TA’RIF: *A*niqlanish sohasi $D\{f\}$ nol nuqtaga nisbatan simmetrik bo‘lgan $y=f(x)$ funksiya ixtiyoriy $x\in D\{f\}$ uchun $f(-x)=f(x)$ [$f(-x)= -f(x)$] shartni qanoatlantirsa, u ***juft*** [***toq***] ***funksiya*** deyiladi .

Masalan, $f(x)=x^2$ –juft funksiya, $f(x)=x^3$ esa toq funksiya bo‘ladi. Lekin har qanday funksiya juft yoki toq bo‘lishi shart emas. Masalan, $f(x)=x^2-3x+1$ yoki $f(x)=2x-3$ funksiyalar na juft va na toqdir.

Ta’rifdan juft funksiya grafigi OY koordinata o‘qiga, toq funksiya grafigi esa O koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘lishi kelib chiqadi.

TEOREMA: Agar $f(x)$ va $g(x)$ juft funksiyalar bo‘lsa, ularning umumiy D aniqlanish sohasida $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ va, $g(x)\neq0$ bo‘lsa, $f(x)/g(x)$ funksiyalar ham juft funksiyalardir. Agar $f(x)$ va $g(x)$ toq funksiyalar bo‘lsa $f(x)\pm g(x)$ toq, $f(x)\cdot g(x)$ va $f(x)/g(x)$ funksiyalar esa juft funksiya bo‘ladi. Agar $f(x)$ juft va $g(x)$ toq funksiya bo‘lsa, ularning ko‘paytmasi va bo‘linmasi toq funksiya bo‘ladi.

Izoh: Agar $f(x)$ aniqlanish sohasi $D\{f\}$ koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘lgan ixtiyoriy funksiya bo‘lsa, unda $F(x)= f(x)+ f(-x)$ juft, $G(x)= f(x) -f(-x)$ esa toq funksiya bo‘lishini ko‘rish qiyin emas.

9-TA’RIF:Agar $y=f(x)$ funksiya uchun shunday T>0 son mavjud bo‘lsaki, $\forall x\in D\{f\}$ uchun $x\pm T\in D\{f\}$ bo‘lib, $f(x\pm T)=f(x)$ shart bajarilsa, u ***davriy funksiya*** deb ataladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi eng kichik musbat T soni shu funksiyaning ***davri*** deyiladi.

Masalan, $y=\sin x$ davri $T=2\pi$, $y=\mathrm{tg}x$ esa davri $T=\pi$ bo‘lgan davriy funksiyalardir. $y=\{x\}=x-[x]$ funksiya qiymati argument x qiymatining nomanfiy kasr qismiga teng bo‘ladi. Masalan, $\{1.2\}=0.2$, $\{2.98\}=0.98$, $\{\pm8\}=0$, $\{-1.7\}= 0.3$ (bunda $-1.7= -2+0.3$ deb qaraladi). Bu holda $D\{f\}=(-\infty;\infty)$ va $E\{f\}=[0,1)$ bo‘lib, ixtiyoriy $x\in D\{f\}$ va $n\in N=\{1,2,3.\cdots\}$ uchun $\{x+n\}=\{x\}$ bo‘ladi. Bundan $f(x)=\{x\}$ davri T=1 bo‘lgan davriy funksiya ekanligini ko‘rish mumkin. $y=x^2$ yoki $y=e^x$ funksiyalar esa davriymas funksiyalarga misol bo‘ladi.

10-TA’RIF:Berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun shunday M >0 soni topilsaki, ixtiyoriy $x\in D$ uchun $|f(x)|\leq M$ shart bajarilsa, u D sohada ***chegaralangan funksiya*** deyiladi. Aks holda $y=f(x)$ ***chegaralanmagan funksiya*** deb ataladi.

Masalan, y=sin$x$ chegaralangan funksiya, chunki barcha x uchun $|\sin x|\leq 1$. $y=2^x$ funksiya $(-\infty,0)$ oraliqda chegaralangan va $2^x\leq 1$, ammo bu funksiya $(0,\infty)$ oraliqda chegaralanmagan, chunki ixtiyoriy M>0 katta soni uchun $x>\log_2 M$ bo‘lganda $2^x>M$ bo‘ladi.

<u>11-TA’RIF:</u> Agar $y=f(x)$ funksiya biror D sohaning har bir x nuqtasida o‘zgarmas C soniga teng bo‘lsa, u D sohada ***o‘zgarmas funksiya*** deyiladi.

Masalan, $x\in(-\infty,\infty)$ sohada $f(x)=\sin^2x+\cos^2x=1$, $x\in(-\infty,0)$ sohada $f(x)=x/|x|=-1$ o‘zgarmas funksiya bo‘ladi.

4. Murakkab va teskari funksiyalar. Funksiyalar bilan bog‘liq yana ikkita tushunchani kiritamiz.

<u>12-TA’RIF:</u> Agar $z=\varphi(x)$ funksiya X→Z , $y=f(z)$ esa Z→Y akslantirishni ifodalasa , unda $y=f(\varphi(x))$ funksiya X→Y akslantirishni ifodalaydi va ***murakkab funksiya*** deb ataladi. Bu yerdaφ***ichki***, $f$esa ***tashqi funksiya*** deyiladi. $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya f va φ funksiyalarning ***superpozitsiyasi*** deb ham aytiladi.

Masalan, $y=\sin x^2$ murakkab funksiya bo‘lib, unda $\varphi(x)=x^2$ ichki, $f(\varphi)=\sin\varphi$ esa tashqi funksiya bo‘ladi. $y=\sin^2x$ murakkab funksiyada esa $\varphi(x)=\sin x$ ichki, $f(\varphi)=\varphi^2$ tashqi funksiya bo‘ladi.

<u>13-TA’RIF:</u> Aniqlanish sohasi D{f} va qiymatlar sohasi E{f} bo‘lgan $y=f(x)$ funksiya uchun har bir $y\in$E{f} soniga $f(x)=y$ shartni qanoatlantiradigan yagona $x\in$D{f} sonini mos qo‘yadigan $x=\varphi(y)$ funksiya mavjud bo‘lsa, u berilgan f funksiyaga ***teskari funksiya*** deb ataladi.

Berilgan f funksiyaga teskari funksiya f^{-1} kabi belgilanadi. Bunda f^{-1} faqat belgilash bo‘lib, u $1/f$ degan ma’noni ifodalamasligini ta’kidlab o‘tamiz.

Odatda argument x, funksiya esa y orqali belgilanganligi uchun, $y=f(x)$ funksiyaga teskari $x=\varphi(y)$ funksiya $y=\varphi(x)$ yoki $y=f^{-1}(x)$ ko‘rinishda yoziladi.

Agar $y=f(x)$ funksiya o‘suvchi yoki kamayuvchi bo‘lsa ,unga teskari funksiya $y=f^{-1}(x)$ mavjudligini va uni $f(y)=x$ tenglama yechimi kabi topishimiz mumkinligini isbotlash mumkin. Masalan, $f(x)=3x-1$ bo‘lsa, unda $3y-1=x$ tenglamadan teskari funksiya $f^{-1}(x)=(a+1)/3$ ekanligini aniqlaymiz.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, o‘zaro teskari funksiyalar uchun D{f}=E{f^{-1}} va E{f}=D{f^{-1}}, $f\,[f^{-1}(x)]=x$ va $f^{-1}[f\,(x)]=x$ munosabatlar o‘rinli bo‘ladi. Bundan tashqari ularning grafiklari $y=x$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘ladi

5. Asosiy elementar va elementar funksiyalar. Maktab matematikasidan bizga ma’lum bo‘lgan quyidagi funksiyalarni eslatib o‘tamiz:

❖ **Darajali *funksiya*.** Bu funksiya $y=x^\alpha$ ko‘rinishda bo‘lib, o‘zgarmas daraja ko‘rsatkichi $\alpha\in$ R bo‘ladi. Masalan,

$$y=1=x^0,\quad y=x^2,\quad y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}},\quad y=\frac{1}{x}=x^{-1}$$

darajali funksiyalardir. Darajali funksiyaning xossalari α daraja ko‘rsatkichi qiymatiga bog‘liq bo‘ladi. Masalan, α musbat butun son bo‘lsa, $f(x)=x^\alpha$ aniqlanish sohasi D{f}=$(-\infty,\infty)$, qiymatlar sohasi esa toq α uchun E{f}=$(-\infty,\infty)$, juft α uchun E{f}=$[0,\infty)$ bo‘ladi. Agar α manfiy butun son bo‘lsa, $f(x)=x^\alpha$ aniqlanish sohasi D{f}={x: $x\neq 0$}, qiymatlar sohasi esa E{f}=$(-\infty,\infty)$ bo‘ladi. Bundan tashqari α juft son bo‘lsa, $f(x)=x^\alpha$ juft, α toq bo‘lsa toq funksiya bo‘ladi.

❖ ***Ko‘rsatkichli funksiya.*** Bu funksiya $y=a^x$ ko‘rinishda va unda daraja asosi $a>0$ va $a\neq 1$ shartni qanoatlantiruvchio‘zgarmas son bo‘ladi. Masalan, $y=3^x$, $y=(1/10)^x$, $y=e^x$ ko‘rsatkichli funksiyalardir. Bu funksiya uchun D{f}=$(-\infty,\infty)$, E{f}=$(0,\infty)$ bo‘ladi. Agar $a>1$ bo‘lsa, $f(x)=a^x$o‘suvchi, $0<a<1$ bo‘lsa kamayuvchi funksiyaga ega bo‘lamiz.

❖ ***Logarifmik funksiya.*** Bu funksiya $y=\log_a x$, ($a>0$, $a\neq 1$), ko‘rinishda bo‘lib,$y=a^x$ko‘rsatkichli funksiyaga teskari funksiyani ifodalaydi.

Masalan, $y=\log_2 x$, $y=\log_{0.8} x$,$y=\log_{10}x$ $=\lg x$, $y=\log_e x$ $=\ln x$ logarifmik funksiyalardir. Logarifmik $f(x)=\log_a x$ funksiya uchun $D\{f\}=(0,\infty)$, $E\{f\}=(-\infty,\infty)$ bo‘ladi. Agar logarifm asosi $a>1$ bo‘lsa, $f(x)=\log_a x$ o‘suvchi, $0<a<1$ holda esa kamayuvchi bo‘ladi.

❖ ***Trigonometrik funksiyalar.*** Bular $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}x$ va $y=\mathrm{ctg}x$ funksiyalardan iborat. Bu yerda $f(x)=\sin x$ va $f(x)=\cos x$ funksiyalar uchun $D\{f\}=(-\infty,\infty)$ va $E\{f\}=[0,1]$ bo‘lib, ular $T=2\pi$ davrli va chegaralangan bo‘ladi. Bunda $f(x)=\sin x$─toq, $f(x)=\cos x$─juft funksiyalardir.
$f(x)=\mathrm{tg}x$ va $f(x)=\mathrm{ctg}x$ funksiyalarning aniqlanish sohalari mos ravishda $D\{f\}=\{x$: $x\neq(2k+1)\pi/2$, $k\in Z\}$ va $D\{f\}=\{x$: $x\neq k\pi$, $k\in Z$ $\}$, qiymatlar sohasi $E\{f\}=(-\infty,\infty)$ bo‘ladi. Bu funksiyalar $T=\pi$ davrli, toq va chegaralanmagan bo‘ladi.

❖ ***Teskari trigonometrik funksiyalar.*** Bularga $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}x$, $y=\mathrm{arcctg}x$ funksiyalar kiradi.Ular mos trigonometrik funksiyalarga teskari bo‘ladi. $f(x)=\arcsin x$ va $f(x)=\arccos x$ uchun $D\{f\}=[-1,1]$, qiymatlar sohasi esa mos ravishda $E\{f\}=[-\pi/2, \pi/2]$ va $E\{f\}=[0, \pi]$ bo‘ladi. $f(x)=\mathrm{arctg}x$ va $f(x)=\mathrm{arcctg}x$ uchun $D\{f\}=(-\infty,\infty)$, qiymatlar sohasi esa mos ravishda $E\{f\}=(-\pi/2, \pi/2)$ va $E\{f\}=(0, \pi)$ bo‘ladi. Bundan tashqari $f(x)=\arcsin x$ va $f(x)=\mathrm{arctg}x$ toq funksiyalardir.

14-TA’RIF: 1-5 funksiyalar ***asosiy elementar funksiyalar*** deb ataladi.

Chekli sondagi asosiy elementar funksiyalar ustida chekli sondagi arifmetik va superpozitsiallash amallari orqali hosil qilingan funksiyalar ***elementar funksiyalar*** deyiladi. Masalan , $y=2\ln\sin x+x^2/5$, $y=a^x\ln(x+1)$ elementar funksiya bo‘ladi. $y=\{x\}$ va $y=[x]$ elementar bo‘lmagan funksiyalarga misol bo‘ladi.

6. Funksiya limiti. Biz sonli ketma-ketlik uchun oliy matematikaning poydevorida yotgan asosiy tushunchalaridan biri bo‘lgan limit tushunchasini kiritgan edik. Endi bu tushunchani funksiya uchun umumlashtiramiz.

15-TA’RIF: Agarda oldindan berilgan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun unga bog‘liq shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topilsaki, $0<|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $x\in D\{f\}$ va biror A soni uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, A soni $y=f(x)$ ***funksiyaning*** $x\to a$ ***bo‘lgandagi limiti*** deb ataladi.

Ta’rifdagi tasdiq

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$

ko‘rinishda yoziladi. Misol sifatida,

$$\lim_{x\to 3} x^2=9$$

ekanligini ta’rif bo‘yicha ko‘rsatamiz. Bu yerda $x\to3$ bo‘lgani uchun $2<x<4$, ya’ni $|x+3|<7$ deb olishimiz mumkin. Bu holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$$|f(x)-A|=|x^2-9|=|x+3||x-3|<7|x-3|<\varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lishi uchun $|x-3|<\varepsilon/7$, ya’ni $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/7$ deb olish mumkin. Demak, limit ta’rifiga asosan, $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

16-TA’RIF: Agar har qanday katta $N>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(N)>0$ son mavjud bo‘lsaki, $0<|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)|>N$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, unda $y=f(x)$ funksiya $x\to a$ (a−chekli son) bo‘lganda ***cheksiz limitga*** ($+\infty$ yoki $-\infty$) ega deyiladi .

Ta’rifdagi tasdiq $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan,

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x^3-8)^2}=+\infty$$

ekanligini ko‘rsatish mumkin. Bu yerda $x\to2$ bo‘lgani uchun $1<x<3$ deb olishimiz mumkin. Bu holda berilgan $N>0$ soni bo‘yicha $\delta=\delta(N)>0$ sonini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\frac{1}{(x^3-8)^2}=\frac{1}{(x-2)^2(x^2+2x+4)^2}>\frac{1}{(x-2)^2(3^2+2\cdot 3+4)^2}=$$

$$=\frac{1}{361(x-2)^2}>N\Rightarrow (x-2)^2<\frac{1}{361N}\Rightarrow |x-2|<\frac{1}{19\sqrt{N}}=\delta(N) \quad .$$

Demak, ta’rifga asosan, yuqoridagi limit cheksiz bo‘ladi.

17-TA’RIF: Agar har qanday kichik ε>0 soni uchun shunday katta M=M(ε)>0 son mavjud bo‘lsaki, |*x*|>M shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in D\{f\}$ va biror chekli *A* soni uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $y=f(x)$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo‘lganda ***chekli limitga*** ega deyiladi.

Bu tasdiq $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=A$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$$

ekanligini ko‘rsatamiz. Ixtiyoriy kichik ε>0 uchun

$$|f(x)-A|=\left|\frac{x+1}{x}-1\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon\Rightarrow |x|>\frac{1}{\varepsilon}=M(\varepsilon),$$

ya’ni $M(\varepsilon)=\varepsilon^{-1}$ deb olishimiz mumkin. Bu yerdan, ta’rifga asosan, yuqoridagi limit qiymati haqiqatan ham birga teng ekanligi kelib chiqadi.

18-TA’RIF: Agar har qanday katta N>0 soni uchun shunday M=M(N) son mavjud bo‘lsaki, |*x*|>M shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)|>N$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $y=f(x)$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo‘lganda ***cheksiz limitga*** ega deyiladi,

Ta’rifdagi tasdiq $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan, ta’rifdan foydalanib, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2=+\infty$ ekanligini ko‘rsatish mumkin.

1-TEOREMA: Agar $x\to a$ bo‘lganda $y=f(x)$ funksiya limiti mavjud bo‘lsa, u holda bu limit yagona bo‘ladi.

19-TA’RIF: $y=f(x)$ funksiyaning argumenti *x* qandaydir chekli *a* soniga faqat chap ($x<a$) yoki o‘ng ($x>a$) tomondan yaqinlashib borganda ($x\to a-0$ yoki $x\to a+0$ kabi belgilanadi) funksiya limiti biror A_1 yoki A_2 sonidan iborat bo‘lsa, bu sonlar funksiyaning *a* nuqtadagi ***chap yoki o‘ng limiti*** deb ataladi. $y=f(x)$ funksiyaning *a* nuqtadagi chap yoki o‘ng limiti

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0) \qquad \text{yoki} \qquad \lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)$$

kabi belgilanadi. Masalan , ***signum funksiya*** deb ataladigan ushbu

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases} \qquad (1)$$

funksiya uchun *x*=0 nuqtadagi chap va o‘ng limitlar mos ravishda quyidagicha bo‘ladi:

$$\operatorname{sgn}(0-0)=\lim_{x\to 0-0}\operatorname{sgn}(x)=\lim_{x\to 0-0}(-1)=-1,$$

$$\operatorname{sgn}(0+0)=\lim_{x\to 0+0}\operatorname{sgn}(x)=\lim_{x\to 0+0}1=1.$$

2-TEOREMA: Biror *a* nuqtada $y=f(x)$ funksiya $x\to a$ bo‘lganda chekli *A* limitga ega bo‘lishi uchun uning shu *a* nuqtadagi chap va o‘ng limitlari o‘zaro teng va $f(a-0)=f(a+0)=A$ shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Teoremaning isboti bevosita yuqorida ko‘rib o‘tilgan limit ta’riflaridan kelib chiqadi va o‘quvchiga havola etiladi.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, funksiya limiti har doim ham mavjud bo'lavermaydi. Masalan, y=sgn(x) funksiya $x\to0$ bo'lganda limitga ega emas, chunki bu holda sgn(0–0)= −1 va sgn(0+0)=1 bo'lib, sgn(0–0)≠ sgn(0+0).

8. Cheksiz kichik va cheksia kata miqdorlar, ularning xossalari. Limitlarga doir turli tasdiqlarni isbotlashda cheksiz kichik miqdor va ularning xossalari muhim ahamiyatga ega.

20-TA'RIF: Agar $\alpha(x)$ funksiya uchun

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$$

shart bajarilsa, unda bu funksiya $x\to a$ (a−ixtiyoriy chekli yoki cheksiz son) bo'lganda ***cheksiz kichik miqdor*** deb ataladi .

Masalan, $\alpha(x)=x^2$ funksiya $x\to0$, $\alpha(x)=(x-3)^2$ funksiya $x\to3$ va $\alpha(x)=x^{-2}$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo'lganda cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

3-TEOREMA: Agar $x\to a$ bo'lganda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar bo'lib, $f(x)$ esa ixtiyoriy chegaralangan funksiya bo'lsa, u holda $x\to a$ bo'lganda $\alpha(x)\pm\beta(x)$, $\alpha(x)\cdot\beta(x)$, $f(x)\cdot\alpha(x)$, $C\alpha(x)$ (C=const, ya'ni o'zgarmas son) funksiyalar ham cheksiz kichik miqdorlar bo'ladi.

NATIJA: Chekli sondagi cheksiz kichik miqdorlarning algebraik yig'indisi, ko'paytmasi yana cheksiz kichik miqdordan iborat bo'ladi.

Bu natijaning isboti oldingi teoremani bir necha marta qo'llash orqali keltirib chiqariladi.

Izoh: Agar $x\to a$ bo'lganda $\alpha(x)$ va$\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar bo'lsa, unda ularning nisbati $\alpha(x)/\beta(x)$ cheksiz kichik miqdor bo'lishi shart emas.

Masalan, $x\to0$ bo'lganda $\alpha(x)=Ax^n$ va$\beta(x)=Bx^m$ (n,m–natural, A,B– noldan farqli ixtiyoriy haqiqiy sonlar) cheksiz kichik miqdorlar bo'ladi va

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to0}\frac{Ax^n}{Bx^m}=\lim_{x\to0}\frac{A}{B}x^{n-m}=\begin{cases}0, & n>m;\\ A/B, & n=m;\\ \pm\infty, & n<m.\end{cases}$$

Bu yerdan ko'rinadiki, yuqoridagi misolda $\alpha(x)/\beta(x)$ nisbat faqat $n>m$ bo'lganda cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

21-TA'RIF: $x\to a$ bo'lganda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar va

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$$

bo'lsin. Bunda A=0 bo'lsa, $\alpha(x)$ $x\to a$ bo'lganda $\beta(x)$ ga nisbatan ***yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor*** deyiladi va $\alpha(x)=o(\beta(x))$ kabi belgilanadi. Agar $A\neq0$ va chekli son bo'lsa, unda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ ***bir xil tartibli cheksiz kichik miqdorlar*** deyiladi va $\alpha(x)=0(\beta(x))$ kabi belgilanadi. Jumladan A=1 bo'lsa $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ ***ekvivalent cheksiz kichik miqdorlar*** deyiladi va $\alpha(x)\sim\beta(x)$ kabi belgilanadi. Agar $A=\pm\infty$ bo'lsa, $\alpha(x)$ $x\to a$ bo'lganda $\beta(x)$ ga nisbatan ***quyi tartibli cheksiz kichik miqdor*** deyiladi va $\beta(x)=o(\alpha(x))$ kabi belgilanadi.

Endi cheksiz katta miqdor tushunchasi va uning xossalari bilan tanishamiz.

22-TA'RIF: Agar $f(x)$ funksiya uchun

$$\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty$$

shart bajarilsa, unda bu funksiya $x\to a$ (a−ixtiyoriy chekli yoki cheksiz son) bo'lganda ***cheksiz katta miqdor*** deb ataladi.

Masalan, $f(x)$=tg$x$ funksiya $x\to\pi/2$, $f(x)=(x-1)^{-3}$ funksiya $x\to1$ va $f(x)=x^2$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo'lganda cheksiz katta miqdor bo'ladi.

4-TEOREMA: Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x\to a$ bo'lganda cheksiz katta miqdorlar bo'lsa, unda $x\to a$ shartda quyidagi tasdiqlar o'rinlidir:

1) $|f(x)|+|g(x)|$ va $f(x)\cdot g(x)$ cheksiz katta miqdor bo'ladi;

2) Agar $\lim\limits_{x\to a} h(x) \neq 0$ bo‘lsa, unda $f(x)\cdot h(x)$ va $f(x)/h(x)$ cheksiz katta miqdor bo‘ladi;

3) Ixtiyoriy C o‘zgarmas soni va chegaralangan $\varphi(x)$ funksiya uchun $Cf(x)$ va $\varphi(x)f(x)$ funksiyalar cheksiz katta miqdor bo‘ladi.

Teoremaning isboti bevosita 8-ta’rifdan kelib chiqadi va uning ustida to‘xtalib o‘tirmaymiz.

Izoh: Yuqoridagi teorema shartlarida $|f(x)|-|g(x)|$ va $f(x)/g(x)$ funksiyalar cheksiz katta miqdor bo‘lishi shart emas. Bu funksiyalar $x\to a$ bo‘lganda mos ravishda $\infty-\infty$ va ∞/∞ko‘rinishdagi aniqmasliklar deyiladi va ularkelgusida(VIII bob, §6) to‘liqroq ko‘rib chiqiladi.

Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar orasidagi bog‘lanish quyidagi teorema orqali ifodalanadi.

5-TEOREMA: Agar $f(x)$ funksiya $x\to a$ bo‘lganda cheksiz katta miqdor bo‘lsa, unda shu holda $1/f(x)$ funksiya cheksiz kichik miqdor bo‘ladi. Aksincha, agar $\alpha(x)$ funksiya $x\to a$ bo‘lganda cheksiz kichik miqdor bo‘lsa, unda shu holda $1/\alpha(x)$ funksiya cheksiz katta miqdor bo‘ladi.

9. Funksiya limitini hisoblash qoidalari. Funksiya limitini uning ta’rifi bo‘yicha hisoblash har doim ham oson emas. Shu sababli funksiya limiti asosan uni hisoblash qoidalari yordamida topiladi.

LEMMA: $y=f(x)$ funksiya $x\to a$ bo‘lganda chekli A limitga ega bo‘lishi uchun uni $f(x)=A+\alpha(x)$ ko‘rinishda bo‘lishi zarur va yetarli. Bunda $\alpha(x)$ funksiya $x\to a$ bo‘lganda biror cheksiz kichik miqdorni ifodalaydi.

Lemma isboti limit va cheksiz kichik miqdor ta’riflaridan kelib chiqadi.

ASOSIY TEOREMA: Agar $x\to a$ bo‘lganda $f(x)$ va$g(x)$ funksiyalar chekli A va B limitlarga ega bo‘lsa, unda

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A\pm B \ , \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to a} Cf(x) = C\lim_{x\to a} f(x) = CA \quad (C=\text{const.})\ , \qquad (3)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) = A\cdot B \quad (4)$$

va, agar $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B\neq 0$ bo‘lsa,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B} \qquad (5)$$

tengliklar o‘rinlidir.

Asosiy teoremada keltirilgan limit hisoblash qoidalari va $f(x)=C$ (C-const.) o‘zgarmas funksiyaning limiti shu sonni o‘ziga teng bo‘lishidan foydalanib, murakkabroq limitlarni soddaroq limitlarga keltirish orqali hisoblash mumkin.

Masalan,

$$\lim_{x\to 1} x^2 e^x = \lim_{x\to 1} x^2 \cdot \lim_{x\to 1} e^x = 1\cdot e = e, \quad \lim_{x\to 1}(x^2+e^x) = \lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} e^x = 1+e,$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x}{x^2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} e^x}{\lim\limits_{x\to 1} x^2} = \frac{e}{1} = e, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x} = \lim_{x\to\infty}(2-\frac{3}{x}) = \lim_{x\to\infty} 2 - \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x} = 2-0 = 2.$$

6-TEOREMA: Agar $x=a$ nuqtaning biror atrofida $\varphi(x)\leq f(x)\leq \psi(x)$ qo‘sh tengsizlik o‘rinli bo‘lib, $x\to a$ bo‘lganda $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarining chekli limitlari mavjud va

$\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}\Psi(x)=A$ shart bajarilsa, u holda $x\to a$ bo‘lganda $f(x)$ funksiya uchun ham chekli limit mavjud bo‘lib, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Masalan, barcha $x\neq 0$ uchun

$$-\frac{1}{x^2}\leq\frac{\sin x}{x^2}\leq\frac{1}{x^2},\quad \lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{x^2})=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}=0.$$

7-TEOREMA: Agarda $x=a$ nuqtaning biror atrofida $y=f(x)$ funksiya o‘suvchi (yoki kamayuvchi) bo‘lib, yuqoridan (yoki quyidan) biror M (yoki m) soni bilan chegaralangan bo‘lsa, u holda bu funksiya $x\to a$ bo‘lganda limitga ega va bu limit uchun

$$\lim_{x\to a} f(x)\leq M \quad (\text{yoki} \lim_{x\to a} f(x)\geq m)$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

Masalan, $x>1$ bo‘lganda

$$f(x)=\frac{2x^4+3x^2}{x^4}=2+\frac{3}{x^2}$$

funksiya kamayuvchi va quyidan $m=2$ soni bilan chegaralangan. Bu yerda

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(2+\frac{3}{x^2})=2$$

bo‘lib, teorema tasdig‘i o‘rinlidir.

9.Ajoyib limitlar. Turli funksiyalarning limitini hisoblashda quyidagi tengliklardan foydalanish mumkin:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \text{(I)},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2{,}718281\ .... \qquad \text{(II)},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}=a \qquad \text{(III)},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad \text{(IV)},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha \qquad \text{(V)}.$$

Bu tengliklar matematikada ***ajoyib limitlar*** deb ataladi.

10. Uzluksiz funksiyalar va ularning xossalari.

1-TA’RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiya o‘zining aniqlanish sohasiga biror atrofi bilan kiruvchi x_0 nuqtada

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \quad (1)$$

shartni qanoatlantirsa, bu funksiya x_0 nuqtada ***uzluksiz*** deyiladi.

Masalan, oldingi paragrafda $f(x)=x^2$ funksiya uchun $x\to 3$ holda hisoblangan limit qiymatidan foydalanib,

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3} x^2=9=3^2=f(3)$$

ekanligini ko‘ramiz. Demak, $f(x)=x^2$ funksiya $x=3$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Yuqoridagi funksiya uzluksizlik shartini, $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$ ekanligini hisobga olib,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$$

kabi yozish mumkin. Demak, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lishi uchun funksiya olish va limit olish amallarini o‘rnini almashtirish mumkin bo‘lishi kerak ekan.

Amaliy masalalarda funksiya uzluksizligini orttirma tushunchasi orqali tekshirish qulay. Agar x nuqta x_0 nuqta atrofidan olingan bo‘lsa, $x–x_0$ ayirma ***argument orttirmasi*** deyiladi va Δx kabi belgilanadi. Bu holda $f(x)–f(x_0)$ ayirma ***funksiya orttirmasi*** deyiladi va Δf yoki Δy kabi belgilanadi.

Demak, Δx orttirma argumentning o‘zgarishini, Δf esa funksiya o‘zgarishini ifodalaydi. Agarda $x\to x_0$ bo‘lsa, u holda $\Delta x\to 0$ bo‘ladi. Bundan, $x=x_0+\Delta x$ ekanligidan foydalanib, (1) uzluksizlik shartini

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0) \qquad (2)$$

ko‘rinishida yozish mumkin. Bu shartni o‘z navbatida, $\Delta f=f(x)–f(x_0)=f(x_0+\Delta x)–f(x_0)$ ekanligidan foydalanib,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0 \qquad (3)$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin. Demak $f(x)$ funksiya uzluksiz bo‘lishi uchun argumentning “kichik” Δx o‘zgarishiga funksiyaning ham “kichik” Δf o‘zgarishi mos kelishi kerak.

Misol sifatida $y=f(x)=x^2$ funksiyaning har qanday x_0 nuqtada uzluksiz ekanligini (3) shart yordamida ko‘rsatamiz:

$\Delta y=\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=$

$$=x_0^2+2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x^2)-x_0^2=(2x_0+\Delta x)\Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=0.$$

<u>2-TA’RIF:</u>Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, u shu ***oraliqda uzluksiz funksiya*** deyiladi.

Masalan, yuqorida ko‘rsatilganga asosan, $f(x)=x^2$ funksiya ixtiyoriy (a,b) oraliqda uzluksizdir. $y=(1–x^2)^{–1}$ funksiya esa $(–1,1)$ va uning ichida joylashgan ixtiyoriy oraliqda uzluksiz bo‘ladi, ammo $x=\pm 1$ nuqtalardan kamida bittasi kirgan sohalarda uzluksiz bo‘lmaydi.

Geometrik nuqtai-nazardan biror (a,b) oraliqda uzluksiz funksiyani grafigi shu oraliqda yaxlit bir (uzluksiz) chiziqdan iborat funksiya deb qarash mumkin. Masalan, $y=x^2$ funksiya grafigi ixtiyoriy (a,b) oraliqda uzluksiz bo‘lgan paraboladan iborat.

<u>ASOSIY TEOREMA:</u> Barcha asosiy elementar funksiyalar o‘zining aniqlanish sohasidagi har bir x_0 nuqtada uzluksizdir.

Bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

<u>1-TEOREMA:</u> Agarda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ funksiyalar ham bu nuqtada uzluksiz bo‘ladi. Agarda qo‘shimcha ravishda $g(x_0)\neq 0$ shart bajarilsa, $f(x)/g(x)$ nisbat ham x_0 nuqtada uzluksizdir.

Isbot: Teoremaning isboti limitlar xossalaridan va uzluksizlikning (1) shartidan kelib chiqadi. Masalan, $h(x)=f(x)\pm g(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligini ko‘rsatamiz. Teorema shartiga asosan

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$$

bo‘lgani uchun, algebraik yig‘indining limiti formulasiga asosan,

$$\lim_{x\to x_0} h(x)=\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\pm g(x_0)=h(x_0).$$

Bu yerdan, ta’rifga asosan, $h(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi. Teoremaning qolgan qismini isboti o‘quvchilarga mustaqil ish sifatida tavsiya etiladi.

<u>2-TEOREMA:</u> Agar $y=g(x)$ funksiya x_0 nuqtada, $z=f(y)$ funksiya esa $y_0=g(x_0)$nuqtada uzluksiz bo‘lsa, unda $f(g(x))=F(x)$ murakkab funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Asosiy teorema va bu ikkala teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija: Barcha elementar funksiyalar o‘zlarining aniqlanish sohasidagi har bir x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Bu natijaga ishonch hosil etish uchun elementar funksiyalar ta’rifini eslash kifoyadir.

3-TA’RIF:Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror $x=a$ nuqtada aniqlangan bo‘lib, bu nuqtada uning o‘ng (chap) limiti mavjud va

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)=f(a) \quad (\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)=f(a))$$

shartni qanoatlantirsa, u holda $f(x)$ funksiya a nuqtada ***o‘ngdan(chapdan) uzluksiz*** deyiladi.

Masalan,

$$y=f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x\geq 3 \\ 2x-1, & x<3 \end{cases} \qquad (4)$$

funksiya x=3 nuqtada o‘ngdan uzluksiz, chunki

$$\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3}(2x+1)=7=f(3).$$

Ammo bu funksiya x=3 nuqtada chapdan uzluksiz emas, chunki

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3}(2x-1)=5\neq f(3).$$

Aksincha,

$$y=f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leq 1 \\ x^2-1, & x>1 \end{cases} \qquad (5)$$

funksiya x=1 nuqtada chapdan uzluksiz, o‘ngdan esa uzluksiz emas.Oldin ko‘rib o‘tilgan

$$y=\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases} \quad (6)$$

funksiya x=0 nuqtada chapdan ham, o‘ngdan ham uzluksiz bo‘lmaydi, chunki

$$\mathrm{sgn}(0–0)= –1\neq 0=\mathrm{sgn}(0), \quad \mathrm{sgn}(0+0)= 1\neq 0=\mathrm{sgn}(0).$$

3-TEOREMA:Berilgan $y=f(x)$ funksiya qaralayotgan $x=a$ nuqtada uzluksiz bo‘lishi uchun bu nuqtada u ham chapdan, ham o‘ngdan uzluksiz bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Izoh: $y=f(x)$ funksiya uchun $x=a$ nuqtada chap va o‘ng limitlar mavjud hamda ular o‘zaro teng, ya’ni $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$ ekanligidan har doim ham uni bu nuqtada uzluksiz bo‘lishi kelib chiqavermaydi. Masalan,

$$y=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases} \qquad (7)$$

funksiya uchun, 1-ajoyib limitga asosan,

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1\neq 0=f(0).$$

Demak, bu funksiya x=0 nuqtada funksiya chapdan ham, o‘ngdan ham uzluklidir.

11. Kesmada uzluksiz funksiyalar uchun asosiy teoremalar. Dastlab funksiyaning kesmadauzluksizligi tushunchasini kiritamiz.

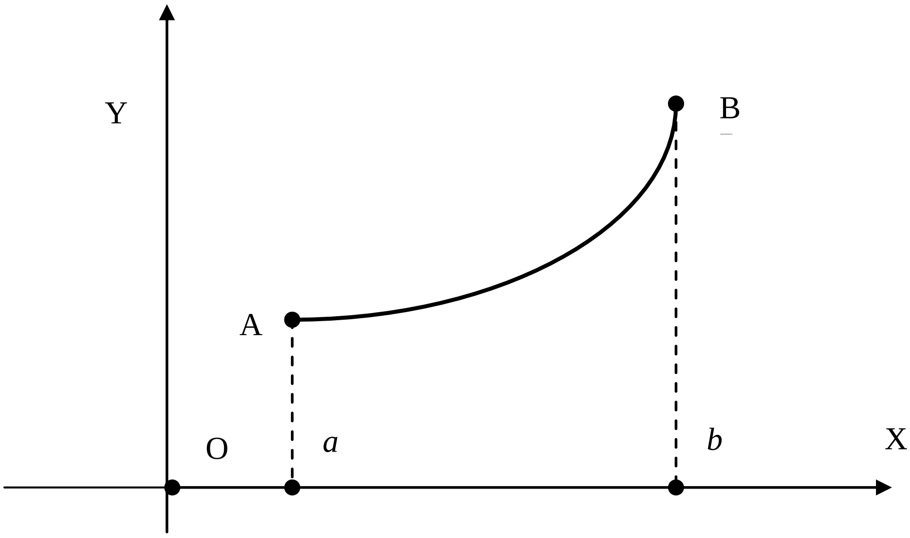
4-TA’RIF:Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqning har bir nuqtasida uzluksiz, $x=a$ ($x=b$) chegaraviy nuqtada o‘ngdan (chapdan) uzluksiz bo‘lsa , bu funksiya $[a,b]$ ***kesmada uzluksiz*** deyiladi.

Masalan, $y=\sin x$, $y=x^2$ funksiyalar har qanday $[a,b]$ kesmada uzluksizdir.

Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, uning grafigini shu kesmaga mos keluvchi qismi yaxlit (uzluksiz) chiziqdan iborat bo‘ladi. Uzluksizlikning bu geometrik talqini uzluksiz funksiyalarning quyidagi xossalari va ularning isbotini tasavvur etishga imkon beradi.

4-TEOREMA: Agarda $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, bu kesmada kamida bitta shunday x_1 (yoki x_2) nuqta mavjudki, har qanday $x\in[a,b]$ uchun $f(x_1)\geq f(x)$ (yoki $f(x_2)\leq f(x)$) munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Ushbu teoremani funksiya grafigiga asoslangan va shu sababli qat’iymas bo‘lgan isbotini keltirish bilan chegaralanamiz. $y=f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada grafigining OY o‘qi bo‘ycha eng yuqorida va eng quyida joylashgan nuqtalaridan bittadan vakil olib, ularning abssissasini mos ravishda x_1 va x_2 deb belgilaymiz. Bu nuqtalar A va B, ularning abssissasi $x_1=a$ va $x_2=b$ bo‘ladi.



Bu holda ixtiyoriy $x\in[a,b]$ uchun teoremadagi tasdiqlar bajariladi.

Bu teoremadagi $f(x_1)$ yoki $f(x_2)$ berilgan $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ ***kesmadagi eng katta yoki eng kichik qiymati*** deb ataladi va

$$\max_{x\in[a,b]} f(x)=M\,, \qquad \min_{x\in[a,b]} f(x)=m$$

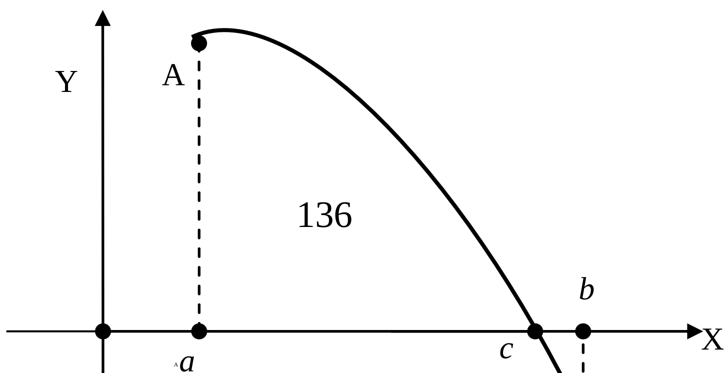
kabi belgilandi.

Masalan, $f(x)=x^2$, $x\in[2,4]$ funksiya uchun $x_1=2$, $x_2=4$ bo‘ladi, chunki bu kesmada $m=4\leq x^2\leq 16=M$, ya’ni $f(2)\leq f(x)\leq f(4)$ munosabat o‘rinli.

TEOREMA (Veyershtrass): Berilgan $[a,b]$ kesmada uzluksiz $y=f(x)$ funksiya shu kesmada o‘zining eng katta M va eng kichik m qiymatiga erishadi, ya’ni bu kesmada kamida bittadan shunday x_1 va x_2 nuqta mavjudki, $f(x_1)=M$ va $f(x_2)=m$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

5-TEOREMA: Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va uning chegaralarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, ya’ni $f(a)\cdot f(b)<0$ shart bajarilsa, u holda kamida bitta shunday $c\in(a,b)$ nuqta mavjudki, unda $f(c)=0$ tenglik bajariladi.

Isbot: Masalan, $f(a)>0$, $f(b)<0$ bo‘lsin. Bu holda $y=f(x)$ funksiyaning grafigi $x\in[a,b]$ bo‘lganda AB uzluksiz chiziq dan iborat bo‘lib, uning $x=a$ abssissali A uchi OX koordinata o‘qidan yuqorida, ikkinchi $x=b$ abssissali, B uchi esa undan pastda bo‘ladi.



Shu sababli funksiya grafigi OX o‘qini kamida bitta $x=c$ nuqtada kesib o‘tadi va shu nuqtada $f(c)=0$ bo‘ladi.

Bu teorema yordamida $f(x)=0$ ko‘rinishdagi tenglamaning ildizlari yotgan oraliqlarni topish mumkin. Masalan, $x-\cos x=0$ ten glama $(0,\pi)$ oralikda ildizga ega, chunki $f(x)=x-\cos x$ funksiya $[0,\pi]$ kesmada uzluksiz va $f(0)=-1<0$, $f(\pi)=\pi+1>0$. Demak, qandaydir $x_0\in(0,\pi)$ nuqtada $f(x_0)=x_0-\cos x_0=0$ bo‘ladi va x_0 berilgan tenglama ildizini ifodalaydi.

6-TEOREMA: Agarda $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A\neq B$ bo‘lsa, har qanday $\mu\in(A,B)$ son uchun kamida bitta shunday $c\in(a,b)$ nuqta topiladiki, unda $f(c)=\mu$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

NATIJA: Agarda $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va bu yerda uning eng katta va eng kichik qiymatlari mos ravishda M va m bo‘lsa, u holda funksiyaning $x\in[a,b]$ bo‘lgandagi qiymatlari $[m, M]$ kesmani to‘liq to‘ldiradi.

Kelgusida ayrim masalalarni qarashda bizga tekis uzluksizlik tushunchasi kerak bo‘ladi.

5-TA’RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni bo‘yicha shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ soni topilsaki, biror $D\subset D\{f\}$ sohadagi $|x_1-x_2|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalar uchun $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, unda $y=f(x)$ funksiya D sohada ***tekis uzluksiz*** deb ataladi.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, agar $y=f(x)$ funksiya biror D sohada tekis uzluksiz bo‘lsa, unda bu funksiya D sohaning har bir x_0 nuqtasida albatta uzluksiz bo‘ladi. Haqiqatan ham tekis uzluksizlik ta’rifida $x_2= x_0$ va $x_1= x$ deb olsak, unda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni bo‘yicha shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ soni topiladiki,

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Ammo teskari tasdiq har doim ham o‘rinli emas. Masalan, $f(x)=\sin(1/x)$ funksiya $(0,1)$ oraliqda uzluksiz, lekin uni bu oraliqda tekis uzluksiz emasligini ko‘rsatish mumkin.

6-TEOREMA (Kantor): Agar $y=f(x)$ funksiya biror $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, unda bu funksiya shu kesmada tekis uzluksiz bo‘ladi.

Teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Bu teoremadan yuqorida ko‘rilgan $f(x)=\sin(1/x)$ funksiya ixtiyoriy $[\varepsilon, 1]$ kesmada $(\varepsilon>0)$ tekis uzluksiz ekanligi kelib chiqadi, chunki u bu kesmada uzluksiz.

12. Funksiyaning uzilish nuqtalari va ularning turlari. Endi funksiyaning uzlukliligi ustida to‘xtalib o‘tamiz.

6-TA’RIF: $y=f(x)$ funksiya uchun uzluksizlikka qo‘yiladigan shartlardan kamida bittasi bajarilmaydigan nuqtalar uning ***uzilish nuqtalari,*** funksiyaning o‘zi esa bu nuqtalarda ***uzlukli*** deb ataladi.

Ta’rifga asosan, biror $x=a$ nuqtada $\lim_{x\to a} f(x)$ mavjud va $\lim_{x\to a} f(x)\neq f(a)$, $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ yoki $\lim_{x\to a} f(x)$ mavjud bo‘lmasa, bu nuqta $y=f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi bo‘ladi.

Masalan, $f(x)=(1–x^2)^{–2}$ funksiya uchun $x=\pm 1$ uning uzilish nuqtasi bo‘ladi, chunki bu nuqtalarda $\lim\limits_{x\to\pm 1} f(x)=\infty$. (6) signum funksiya uchun x=0 uzilish nuqtasi bo‘ladi , chunki $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$ mavjud emas.

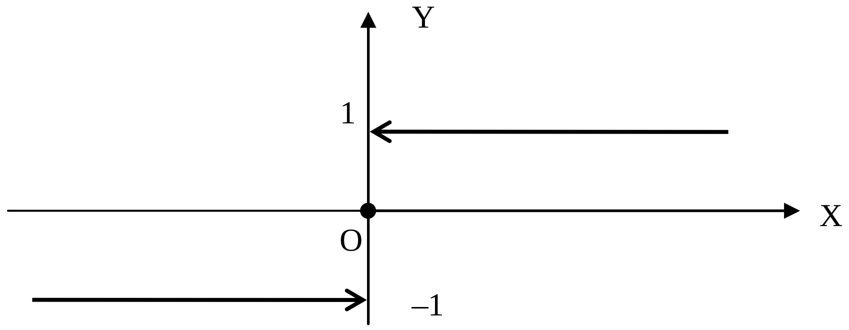
Funksiyaning uzilish nuqtalari uch sinfga ajratiladi.

7-TA’RIF:Agar $y=f(x)$ funksiyaning $x=a$ uzilishnuqtasida $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ limit mavjud, ammo $a\notin D\{f\}$ yoki $f(a)\neq A$ bo‘lsa, unda $x=a$ funksiyaning ***tuzatib bo‘ladigan uzilish nuqtasi*** deyiladi.

Bu yerda $x=a$ funksiyaning tuzatib bo‘ladigan uzilish nuqtasi deyilishiga sabab shuki, agar $f(a)=A$ deb olsak, unda funksiya $x=a$ nuqtada uzluksiz funksiyaga aylanadi. Masalan, yuqorida ko‘rib o‘tilgan (7) funksiya $f(x)=\sin x/x$ uchun $f(0)=0$ demasdan, $f(0)=1$ desak, u hamma joyda uzluksiz bo‘ladi.

8-TA’RIF:Agarda $x=a$ nuqta $y=f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi bo‘lib, bu nuqtada funksiyaning chap $f(a–0)$ va o‘ng $f(a+0)$ limitlari mavjud hamda chekli sonlardan iborat bo‘lsa, $x=a$ funksiyaning ***I tur uzilish nuqtasi*** deyiladi. Bunda $\Delta=f(a+0)–f(a–0)$ soni funksiyaning a uzilish nuqtasidagi ***sakrashi*** deb ataladi.

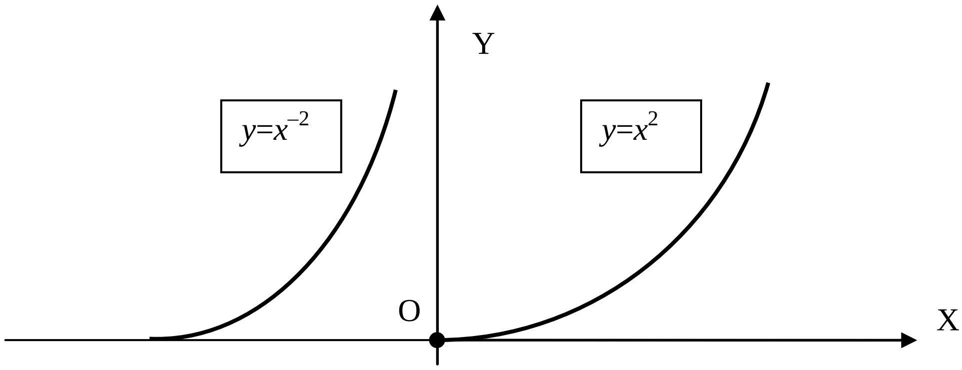
Masalan, (6) signum funksiya uchun x=0 I tur uzilish nuqtasi bo‘ladi. Bu holda sgn(0–0)=–1, sgn(0+0)=1 va funksiya bu nuqtada o‘z qiymatini uzluksiz ravishda o‘zgartirmasdan, Δ=1–(–1)=2 sakrash bilan o‘zgartiradi.



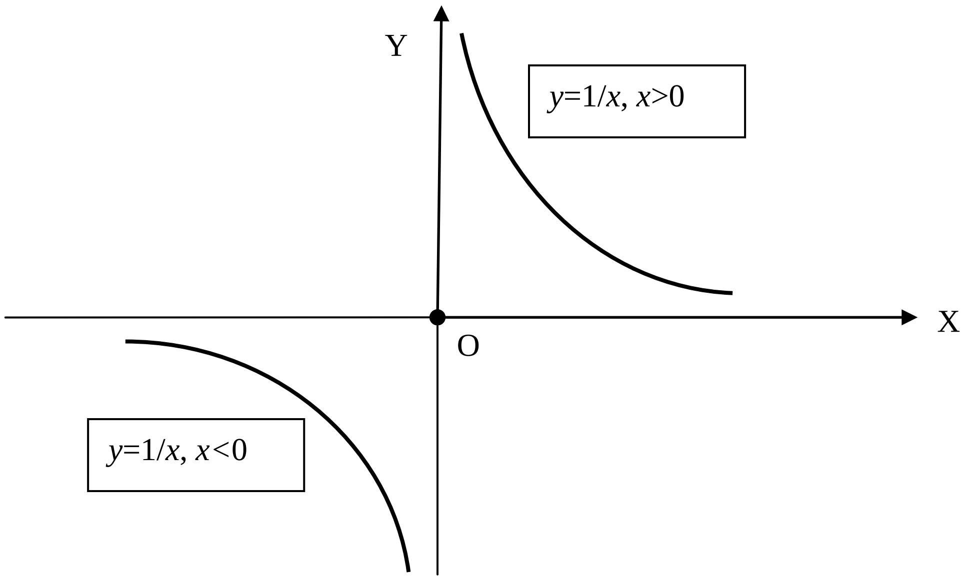
8-TA’RIF: Agarda $y=f(x)$ funksiyaning $x=a$ uzilish nuqtasida uning chap va o‘ng limitlaridan kamida bittasi cheksiz yoki mavjud bo‘lmasa, $x=a$ funksiyaning ***II tur uzilish nuqtasi*** deyiladi.
Masalan,

$$y=\begin{cases} x^2, x\geq 0 \\ x^{-2}, x<0 \end{cases}$$

funksiya $x=0\in D\{f\}$ nuqtada II tur uzilishga ega, chunki $f(0+0)=0$, $f(0–0)=\infty$ bo‘lmoqda.



$f(x)=x^{-1}$ funksiya uchun $x=0\notin D\{f\}$ II tur uzilish nuqtasi bo‘ladi, chunki bu nuqtada $f(0-0)=-\infty$ va $f(0+0)=\infty$, ya’ni chap va o‘ng limitlardan ikkalasi ham cheksiz bo‘lmoqda.



Endi ushbu funksiyani qaraymiz:

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ \sin\dfrac{1}{x}, & x>0. \end{cases}$$

Bu funksiya barcha nuqtalarda, jumladan $x=0$ nuqtada aniqlangan. Bunda $x\to 0$ bo‘lganda $|\cos(1/x)|\le 1$, ya’ni chegaralangan funksiya bo‘lgani uchun

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=0=f(0)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Demak, bu funksiya uchun $x=0$ nuqtada chap limit mavjud va bundan tashqari u chapdan uzluksiz. Endi bu funksiyaning $x=0$ nuqtadagi o‘ng limitini qaraymiz. Agar $x=(2\pi n+\pi/2)^{-1}$, $n\in N$, deb olsak, unda $n\to\infty$ bo‘lganda $x\to 0+0$ bo‘ladi va bu holda

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{n\to\infty}\sin(2\pi n+\frac{\pi}{2})=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}1=1$$

natijani olamiz. Xuddi shu tarzda $x=(2\pi n)^{-1}$, $n\in N$, deb olsak, unda $n\to\infty$ bo‘lganda yana $x\to 0+0$ bo‘ladi, ammo bu holda

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{n\to\infty} \sin 2\pi n = \lim_{n\to\infty} \sin 0 = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

natijaga kelamiz. Oxirgi ikki tenglikdan qaralayotgan funksiyaning x=0 nuqtada o‘ng limiti mavjud emasligi kelib chiqadi. Demak, bu funksiya uchun x=0 II tur uzilish nuqtasi bo‘ladi.

Tayanch iboralar

* O‘zgarmasmiqdorlar * O‘zgaruvchimiqdorlar * Funksiya * Aniqlanishsohasi * Qiymatlarsohasi * Funksiyagrafigi * O‘suvchi (kamaymoqchi) funksiya* Kamayuvchi (o‘smoqchi) funksiya * Monotonfunksiyalar * Juftfunksiya * Toqfunksiya * Davriyfunksiya * Chegaralanganfunksiya * Chegaralanmaganfunksiya * O‘zgarmasfunksiya * Murakkabfunksiya * Teskarifunksiya * Asosiyelementarfunksiyalar * Elementarfunksiyalar * Tornkvistfunksiyalari

Takrorlash uchun savollar

1. Qanday miqdorlar o‘zgarmas deyiladi? Misollar keltiring.
2. Qanday miqdorlar o‘zgaruvchi deyiladi? Misollar keltiring.
3. Funksiya qanday ta’riflanadi?
4. Funksiyaning aniqlanish sohasi deb nimaga aytiladi?
5. Funksiyaning o‘zgarish (qiymatlar) sohasi qanday ta’riflanadi?
6. Funksiya grafigi deb nimaga aytiladi?
7. Funksiya qanday usullarda berilishi mumkin?
8. Qaysi shartda funksiya o‘suvchi (kamaymoqchi) deyiladi?
9. Qanday funksiya kamayuvchi (o‘smoqchi) deb ataladi?
10. Monoton funksiya deganda nima tushuniladi?
11. Qachon funksiya juft (toq) deb ataladi?
12. Davriy funksiya deb qanday funksiyaga aytiladi?
13. Chegaralangan (chegaralanmagan) funksiya ta’tifini keltiring.
14. O‘zgarmas funksiya qanday aniqlanadi?
15. Murakkab funksiya qanday hosil etiladi?
16. Teskari funksiya qanday ta’riflanadi?
17. Qaysi shartda teskari funksiya mavjud bo‘ladi va u qanday topiladi?
18. Qaysi funksiyalar asosiy elementar funksiyalar deyiladi?
19. Elementar funksiyalar deb qanday funksiyalarga aytiladi?
20. Elementar bo‘lmagan funksiyalarga qanday misollar bilasiz?
21. Iqtisodiy mazmunli qanday funksiyalarni bilasiz?
22. Tornkvist funksiyalari qaysi iqtisodiy tushunchalar orasidagi bog‘lanishlarni ifodalaydi?
23. Tornkvist funksiyalari qanday iqtisodiy qonuniyatlarni akslantiradi?

Testlardan namunalar

1. Ta’rifni to‘ldiring: $y=f(x)$ funksiya deb x o‘zgaruvchining har bir $x\in$D qiymatiga y o‘zgaruvchining …. $y\in$E qiymatini mos qo‘yilishiga aytiladi.
A) bir nechta ; B) kamida bitta; C) faqat bitta ; D) ikkita; E) kamida ikkita.
2. Ta’rifni to‘ldiring: $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi deb x argumentning $y=f(x)$ funksiya ……. bo‘ladigan qiymatlar to‘plamiga aytiladi.
A) musbat; B) manfiy; C) nol; D) ma’noga ega ; E) cheksiz.
3. $f(x)=\sqrt{2x+1}-\lg x$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.
A) $(-1,+\infty)$; B) $(0,+\infty)$; C) $(2,11)$; D)$(-\infty,+\infty)$; E) $(1,+\infty)$.
4. $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.
A) $[1,+\infty)$; B) $[0,+\infty)$; C) $(-\infty,+\infty)$; D)$(-\infty,1)$; E) $(1,+\infty)$.
5. $f(x)=\arcsin\frac{x-1}{2}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.
A) $[0,1]$; B) $[1,2]$; C) $(-\infty,+\infty)$; D)$[-1,3]$; E) $[-1,1]$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. $f(x)=\ln\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

2. $f(x)=\sqrt{n^2-x^{2n}}$ funksiyaning qiymatlar sohasini toping.

3. Quyidagi funksiyalarni juft-toqlikka tekshiring:

$$f(x)=\sin^n x\cdot\cos nx, \quad g(x)=\sin^n x+\cos nx.$$

4. $f(x)=\frac{x+n}{x-n}$ **(**$x>n$**)** funksiyaga teskari $f^{-1}(x)$ funksiyani toping.

5. $f(x)=x^n$, $g(x)=\ln(n+x)$ funksiyalar bo‘yicha $y=f(g(x))$ va $y=g(f(x))$ murakkab funksiyalarni yozing.

6-MODUL. BIR O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING DIFFERENSIAL HISOBI.

13-mavzu. Hosilasining ta'rifi, uning geometrik va mexanik ma'nosi. Funksiyaning differensiallanuvchanligi. Differensiallashning asosiy qoidalari. Elementar funksiyalarning xosilalari. Murakkab va teskari funksiyalarning xosilalari. Oshkormas va parametrik ko'rinishda berilgan funksiyalarni differentsiallash. Hosila jadvali.

REJA:

1. Hosila tushunchasiga olib keladigan amaliy masalalar.
2. Hosila ta'rifi va uning amaliy ma'nolari.
3. Differensiallanuvchi funksiya va uning uzluksizligi.
4. Hosilani hisoblash algoritmi.
5. Logarifmik differensiallash usuli.
6. Hosilalar jadvali.
7. Differensiallash qoidalari.
8. Murakkab funksiyaning hosilasi.
9. Oshkormas funksiyalarning hosilasi.
10. Teskari funksiya va uni differensiallash.
11. Funksiyaning parametrik tenglamasi va uning hosilasi.

Differensial hisob oliy matematikaning eng asosiy va eng kuchli, samarali usullaridan biri bo'lib hisoblanadi. Matematik tahlilning bu bo'limi nisbatan yosh bo'lib, uning dastlabki kurtaklari XVII asrda Ferma, Paskal, Dekart kabi matematiklarning ishlarida shakllangan va XVIII asrda buyuk ingliz olimi Nyuton (1642–1727) va mashhur olmon matematigi Leybnits (1646–1716) tomonidan unga asos solingan va turli masalalarni yechish uchun keng qo'llanilgan.

1. Hosila tushunchasiga olib keladigan amaliy masalalar. Differensial hisob asosida funksiya hosilasi tushunchasi yotadi va u tarixan quyidagi amaliy masalalarni yechish jarayonida paydo bo'lgan.

❖ **Oniy tezlik masalasi.** Bizga ma'lumki, to'g'ri chiziq bo'yicha tekis harakat qilayotgan moddiy nuqtaning ixtiyoriy t vaqtdagi tezligi $v(t)=v_0=\text{const}$, ya'ni o'zgarmas bo'ladi. Bunda harakat boshlangandan keyin t vaqt o'tgach nuqtaning bosib o'tgan masofasi $S(t)=vt$ funksiya bilan aniqlanadi va ***harakat tenglamasi*** deb ataladi. Endi bu nuqta to'g'ri chiziq bo'yicha notekis harakatda bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda moddiy nuqtaning tezligi t vaqt o'tishi bilan o'zgarib boradi va biror $v=v(t)$ funksiyani hosil qiladi. Moddiy nuqtaning t vaqt momentidagi tezligi ***oniy tezlik*** deb ataladi. Biz notekis harakat tenglamasi $S=S(t)$ ma'lum bo'lgan taqdirda moddiy nuqtaning biror t_0 vaqtdagi $v_0=v(t_0)$ oniy tezligini topish masalasini qaraymiz. Buning uchun ikkinchi bir $t=t_0+\Delta t$ vaqtni qaraymiz. Unda moddiy nuqtaning ko'rilayotgan $(t_0, t)=(t_0, t_0+\Delta t)$ vaqt oralig'ida bosib o'tgan masofasi

$$S(t)-S(t_0)=S(t_0+\Delta t)-S(t_0)=\Delta S,$$

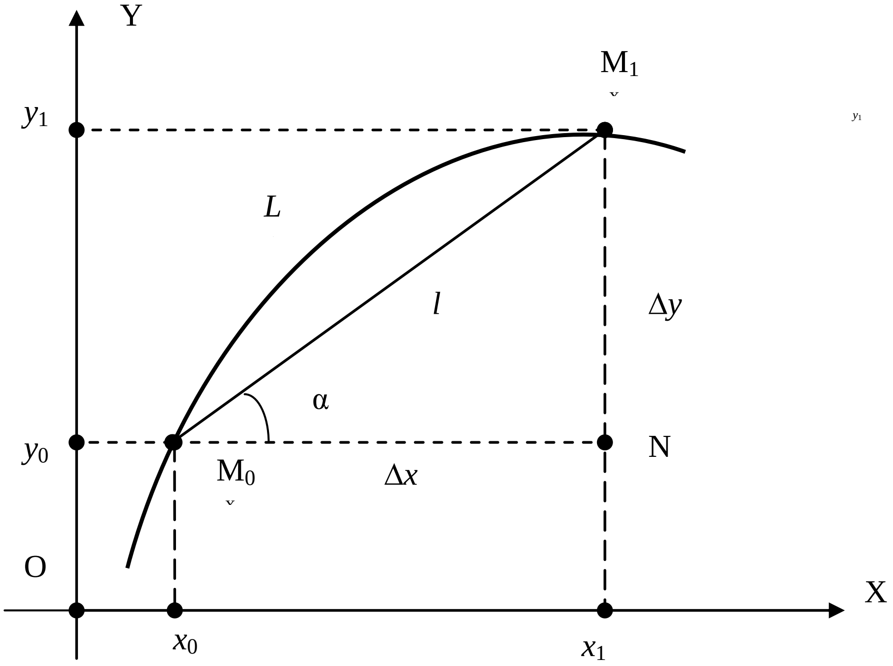
ya'ni harakat tenglamasini ifodalovchi $S=S(t)$ funksiyaning orttirmasiga teng bo'ladi. Agar notekis harakatdagi moddiy nuqtaning bu vaqt oralig'idagi o'rtacha tezligini $\bar{v}(\Delta t)$ deb belgilasak, uning qiymati $\bar{v}(\Delta t)=\Delta S/\Delta t$ formula bilan aniqlanadi. Bu holda $v(t_0)$ oniy tezlik $\bar{v}(\Delta t)$ o'rtacha tezlikning $t\to t_0$, ya'ni $\Delta t\to 0$ bo'lgandagi limiti kabi aniqlanadi. Demak, notekis harakatda $v(t_0)$ oniy tezlik

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}(\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad \textbf{(1)}$$

limitni hisoblash orqali topiladi.

❖ **Urinma masalasi.** Dastlab tekislikdagi berilgan *L* chiziqning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tushunchasini kiritamiz.

Berilgan *L* chiziqda yotuvchi ikkita M_0 va M_1 nuqtalarni tutashtiruvchi M_0M_1 kesma ***vatar*** deb ataladi.



Bu vatar yotgan to‘g‘ri chiziq M_0 nuqtadan o‘tgani uchun uning tenglamasi

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad k = tg\alpha = \frac{|NM_1|}{|NM_0|} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

<u>1-TA’RIF:</u> Agar *L* chiziqning M_0M_1 vatari yotgan *l* to‘g‘ri chiziq M_1 nuqta *L* chiziq bo‘ylab M_0 nuqtaga cheksiz yaqinlashib borganda ($M_1 \to M_0$) biror l_0 to‘g‘ri chiziqqa cheksiz yaqinlashib borsa ($l \to l_0$), unda l_0 berilgan *L* chiziqning M_0 nuqtadagi ***urinmasi*** deyiladi.

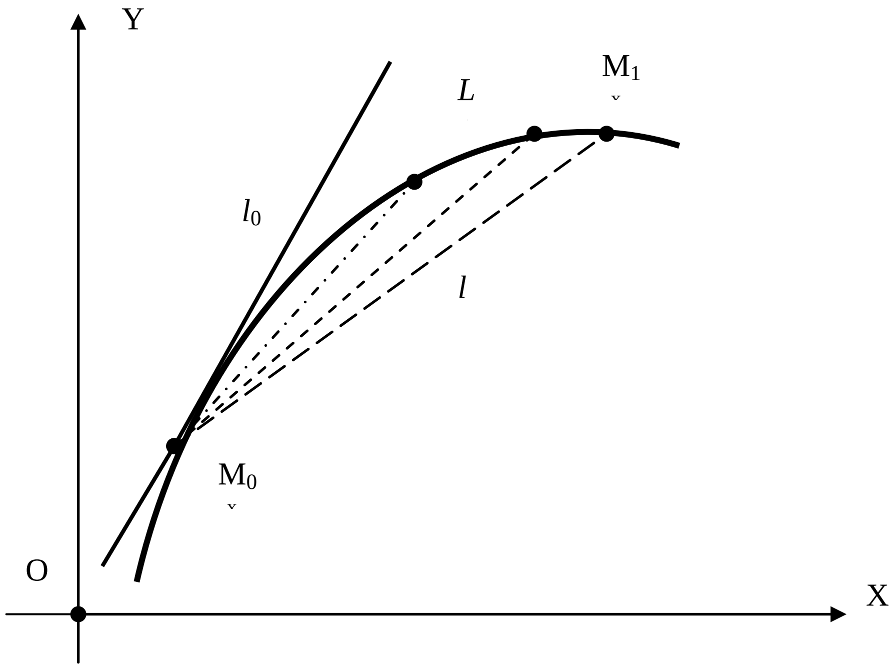
Egri chiziqning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi urinmasi shu nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq bo‘lgani uchun uning ham tenglamasi vatar tenglamasi singari $y-y_0=k_0(x-x_0)$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tenglamadagi k_0 burchak koeffitsiyentini topish uchun *L* chiziq tenglamasini ifodalovchi $y=\varphi(x)$ funksiya berilgan deb hisoblaymiz. Urinma ta’rifiga asosan

$$M_1 \to M_0 \Rightarrow x_1 \to x_0 \,, y_1 \to y_0 \Rightarrow \Delta x \to 0 \,, \Delta y \to 0$$

bo‘lgani uchun M_0M_1 vatarning *k* burchak koeffitsiyenti uchun yuqorida keltirilgan formulaga asosan

$$k_0 = \lim_{M_1 \to M_0} k = \lim_{M_1 \to M_0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} \qquad (2)$$

natijani olamiz.



2. Hosila ta’rifi va uning amaliy ma’nolari. Yuqoridagi masalalarni yechish uchun amalga oshirilgan ishlarni umumiy holda qaraymiz. Bizga biror $y=f(x)$ funksiya berilgan. Bu funksiyaning aniqlanish sohasiga kiruvchi x_0 va $x=x_0+\Delta x$ argument qiymatlarini qaraymiz, ya’ni x_0 nuqtada argumentga Δx orttirma beramiz. Argumentning bu Δx orttirmasiga mos keluvchi $y=f(x)$ funksiyaning $\Delta y=\Delta f= f(x_0+\Delta x)–f(x_0)$ orttirmasini topamiz. So‘ngra Δf funksiya orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbatini $\Delta x\to 0$ holdagi limitini hisoblaymiz.

2-TA’RIF:Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning Δf orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbati $\Delta x\to 0$ bo‘lganda chekli limitga ega bo‘lsa, bu limit qiymati funksiyaning x_0 nuqtadagi ***hosilasi*** deb ataladi.

Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $f'(x_0)$ yoki $y'(x_0)$ kabi belgilanadi va, ta’rifga asosan,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{4}$$

tenglik orqali aniqlanadi.

Misol sifatida $f(x)=x^2$ funksiya hosilasini uning ta’rifiga asosan topamiz: $\Delta f=f(x+\Delta x)–f(x) = (x+\Delta x)^2 –x^2 =2x\Delta x +(\Delta x)^2$ =>

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x\,.$$

Demak, $(x^2)'=2x$. Shunday tarzda $x'=1$ va $(x^3)'=3x^2$ ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Oldin ko‘rilgan masalalarning (1)–(3) javoblarini kiritilgan hosila tushunchasi orqali ifodalaymiz. Harakat tenglamasi $S=S(t)$ funksiya bilan ifodalanadigan notekis harakatda t_0 vaqtdagi oniy tezlik uchun topilgan (1) natijadan

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=S'(t_0) \tag{1′}$$

formulani hosil qilamiz.

Demak, $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi uning o‘zgarish tezligini ifodalaydi va bu ***hosilani mexanik ma’nosi*** deyiladi. Nyuton hosila tushunchasiga mana shu yo‘nalishdagi tadqiqotlari orqali kelgan va uni “flyuktsiya” deb atagan. Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, bu yerda “tezlik” tushunchasi faqat harakat tezligini ifodalamasdan, u keng ma’noda tushuniladi. Masalan, ximiyaviy reaksiya tezligi, texnologik jarayon tezligi, iqtisodiy islohotlarni amalga oshirish tezligi va hokazo.

Endi $y=\varphi(x)$ funksiya orqali berilgan L chiziqning $M_0(x_0,y_0)= M_0(x_0, \varphi(x_0))$ nuqtasiga o‘tkazilgan l_0 urinmaning k burchak koeffitsiyenti ifodalovchi (2) formulani eslab, undan

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=\varphi'(x_0) \qquad (2')$$

natijaga kelamiz.

Demak, $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi uning grafigini $M_0(x_0,y_0)= M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi va bu ***hosilani geometrik ma’nosi*** deyiladi. Nyutonning hosila bo‘yicha ishlaridan bexabar holda Leybnits mana shunday geometrik masalalarni yechish jarayonida hosila tushunchasiga kelgan.

Shunday qilib, $y=f(x)$ funksiya grafigining $M_0(x_0,y_0)= M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tenglamasi

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Rightarrow y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \qquad (5)$$

ko‘rinishda topiladi.

Misol sifatida $f(x)=x^2$ parabolaning $x_0=3$ abssissali nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tenglamasini topamiz. Bunda $f(x_0)= f(3)=3^2=9$, $f'(x_0)=2\, x_0=2\cdot 3=6$ va shu sababli, (5) formulaga asosan, izlangan urinma tenglamasi

$$y=6(x-3)+9 \Rightarrow y=6x-9$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Mehnat unumdorligi to‘g‘risidagi masalaning (3) javobini hosila orqali

$$z(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta t}=h'(t_0) \qquad (3')$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Demak, $y=f(x)$ funksiya x vaqtgacha ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini ifodalasa, uning hosilasi $f'(x)$ shu x vaqtdagi mehnat unumdorligini ifodalaydi va buni ***hosilaning iqtisodiy ma’nosi*** deb qarash mumkin.

3. **Differensiallanuvchi funksiya va uning uzluksizligi.** Dastlab differensiallanuvchi funksiya tushunchasini kiritamiz.

3-*TA’RIF:* Agar $y=f(x)$ funksiya x nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, u shu nuqtada ***differensiallanuvchi*** deyiladi. Aks holda $y=f(x)$ funksiya x nuqtada ***differensiallanmovchi*** deb ataladi. Funksiyani $f'(x)$ hosilasini topish amali ***differensiallash amali*** deb ataladi.

Funksiyaning differensiallanuvchiligi va uzluksizligi orasidagi bog‘lanish quyidagi teorema orqali ifodalanadi.

TEOREMA: Agarda $y=f(x)$ funksiya x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u shu nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Isbot: Teoremani isbotlash uchun, funksiyaning uzluksizligi ta’rifiga asosan,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=0 \qquad (6)$$

shart bajarilishini ko‘rsatish kifoya. Hosila ta’rifini ifodalovchi (4) tenglik va limitni mavjudligi haqidagi oldin ko‘rib o‘tilgan lemmaga (VII bob, §3) asosan

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(\Delta x)\Rightarrow \Delta f=(f'(x)+\alpha(\Delta x))\Delta x$$

tenglikni yozish mumkin. Bu yerda $\Delta x\to 0$ bo‘lganda $\alpha(\Delta x)$ cheksiz kichik miqdor bo‘ladi. Bu holda, limit hisoblash qoidalariga asosan,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=\lim_{\Delta x\to 0}(f'(x)+\alpha(\Delta x))\Delta x=f'(x)\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)\Delta x=f'(x)\cdot 0+0=0.$$ Demak,

(6) shart o‘rinli va shu sababli $f(x)$ funksiya x nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Izoh: Teoremadagi tasdiqning teskarisi umuman olganda o‘rinli emas. Masalan, $f(x)=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz, ammo bu nuqtada differensiallanuvchi emas. Haqiqatan ham,

x=0 nuqtada argumentga Δx orttirma berganimizda funksiya orttirmasi uchun $\Delta f=f(0+\Delta x)-f(0)=f(\Delta x)=|\Delta x|$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerdan ko‘rinadiki

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0,$$

ya’ni $f(x)=|x|$ funksiya x=0 nuqtada uzluksiz. Ammo

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,\quad \lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

Bu yerdan ko‘rinadiki $\Delta x\to 0$ bo‘lganda $\Delta f/\Delta x$ nisbat limitga ega emas va shu sababli x=0 nuqtada $f'(0)$ hosila mavjud emas.

4-TA’RIF: Berilgan $y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqning har bir x nuqtasida differensiallanuvchi bo‘lsa, u shu ***oraliqda differensiallanuvchi*** deb ataladi.

Masalan, $y=x^2$ funksiya har qanday (a,b) oraliqda differensiallanuvchi. $y=|x|$ funksiya esa x=0 nuqtani o‘z ichiga olmaydigan barcha oraliqlarda differensiallanuvchi, ammo x=0 nuqtani o‘z ichiga oluvchi oraliqlarda differensiallanuvchi bo‘lmaydi

4. **Hosilani hisoblash algoritmi.** Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning $f'(x)$ hosilasini topish, ya’ni uni differensiallash, oldingi paragrafda keltirilgan ta’rifga asosan quyidagi algoritm bo‘yicha amalga oshiriladi:

- funksiyaning x argumentiga $\Delta x\neq 0$ orttirma berib, $x+\Delta x$ nuqtani topamiz;
- funksiya orttirmasini $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ formula bo‘yicha hisoblaymiz;
- $\Delta f/\Delta x$ orttirmalar nisbatni topamiz;
- $\Delta f/\Delta x$ nisbatning $\Delta x\to 0$ bo‘lgandagi limitini aniqlaymiz.

Misol sifatida asosiy elementar funksiyalardan biri bo‘lgan $f(x)=\sin x$ hosilasini yuqorida keltirilgan algoritm bo‘yicha topamiz:

✓ x va $x+\Delta x$ nuqtalarda funksiyaning $f(x)=\sin x$ va $f(x+\Delta x)=\sin(x+\Delta x)$ qiymatlarini hisoblaymiz;

✓ trigonometrik ayirmani ko‘paytmaga keltirish formulasidan foydalanib, Δf funksiya orttirmasini quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin(\Delta x/2)\cdot\cos(x+\Delta x/2);$$

✓ $\Delta f/\Delta x$ orttirmalar nisbatni tuzamiz:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)}{\Delta x}=\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\cdot\cos(x+\Delta x/2)\ ;$$

✓ Ko‘paytmaning limiti, I ajoyib limit hamda $y=\cos x$ funksiya uzluksizligidan foydalanib, $\Delta f/\Delta x$ nisbatning $\Delta x\to 0$ bo‘lgandagi limitini hisoblaymiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\cdot\cos(x+\Delta x/2)\right]=\left(\frac{\Delta x}{2}=\alpha\right)$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\cos(x+\alpha)=1\cdot\cos x=\cos x.$$

Demak,

$$(\sin x)'=\cos x$$

formula o‘rinli ekan. Xuddi shunday tarzda

$$(\cos x)'=-\sin x$$

ekanligini aniqlaymiz.

Yana bir misol sifatida $f(x)=a^x$ ko‘rsatkichli funksiya hosilasini topamiz:

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a .$$

Bu yerda ajoyib limitlardan biri bo'lgan

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

limit qiymatidan foydalanildi. Jumladan, $a=e$ holda $(e^x)' = e^x \ln e = e^x$ natijaga ega bo'lamiz.

5. **Logarifmik differensiallash usuli.** Ba'zi hollarda differensiallanuvchi $y=f(x)>0$ funksiya hosilasini uning logarifmi orqali quyidagicha topish mumkin:

$$[\ln f(x)]' = (u = f(x)) = (\ln u)' = \frac{1}{u} u' = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow f'(x) = [\ln f(x)]' \cdot f(x) .$$

TA'RIF: Funksiyaning $f'(x)$ hosilasini formula orqali topish ***logarifmik differensiallash usuli*** deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^2e^{2x}(1+x^4)^3$ funksiya hosilasini bevosita hisoblash ancha murakkab. Biroq logarifmik differensiallash usulida bu hosila osonroq topiladi:

$$\ln f(x) = \ln[x^2 e^{2x}(1+x^4)^3] = 2\ln x + 2x + 3\ln(1+x^4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\ln f(x)]' = [2\ln x + 2x + 3\ln(1+x^4)]' = \frac{2}{x} + 2 + \frac{12x^3}{1+x^4} = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = (\frac{2}{x} + 2 + \frac{12x^3}{1+x^4}) f(x) = (\frac{2}{x} + 2 + \frac{12x^3}{1+x^4}) \cdot x^2 e^{2x}(1+x^4)^3 =$$
$$= 2xe^{2x}(1+x^4)^3 + 2x^2e^{2x}(1+x^4)^3 + 12x^5e^{2x}(1+x^4)^2 =$$
$$= 2xe^{2x}(1+x^4)^2[1+x^4+x(1+x^4)+6x^4] = 2xe^{2x}(1+x^4)^2(x^5+7x^4+x+1).$$

Yana bir misol sifatida $f(x)=x^\alpha$ ($x>0$, α-ixtiyoriy haqiqiy son) darajali funksiya hosilasini logarifmik differensiallash usulida aniqlaymiz:

$$\ln f(x) = \ln x^\alpha = \alpha \ln x \Rightarrow [\ln f(x)]' = (\alpha \ln x)' = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow (x^\alpha)' = \frac{\alpha}{x} \cdot x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} .$$

Bu yerdan formula o'rinli ekanligiga yana bir marta ishonch hosil etamiz.

2-TA'RIF: Agar $u=u(x)>0$, $v=v(x)$ esa ixtiyoriy funksiya bo'lsa, unda $y=u(x)^{v(x)} = u^v$ ko'rinishdagi murakkab funksiya ***darajali-ko'rsatkichli funksiya*** deyiladi.

Agar $u=u(x)>0$ va $v=v(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lsa, unda $y= u^v$ darajali-ko'rsatkichli funksiya ham differensiallanuvchi bo'ladi va uning hosilasini logarifmik differensiallash usulida quyidagicha hisoblash mumkin:

$$\ln y = v \cdot \ln u \Rightarrow (\ln y)' = (v \cdot \ln u)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \Rightarrow y' = y \cdot (v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}) .$$

Bu natijani ushbu ko'rinishda yozamiz:

$$(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u' .$$

Bu yerdan ko'rinadiki, $y= u^v$ darajali-ko'rsatkichli funksiya hosilasi ikkita qo'shiluvchidan iborat. Bunda birinchi qo'shiluvchi $y= u^v$ funksiyani murakkab ko'rsatkichli funksiya (u o'zgarmas) singari qarab, undan hosila olish natijasida hosil bo'ladi. Ikkinchi qo'shiluvchi esa bu funksiyani murakkab darajali funksiya (v o‘zgarmas) deb, undan hosila olish orqali topilishi mumkin.

Misol sifatida $y=x^x$ funksiya hosilasini (17) formula orqali topamiz:

$$(x^x)'= x^x\cdot\ln x\cdot x'+x\cdot x^{x-1}\cdot x'=(1+\ln x)\, x^x .$$

6. Hosilalar jadvali. Oldin ko‘rilganlarga asosan barcha asosiy elementar funksiyalar o‘zlarining aniqlanish sohasida differensiallanuvchi bo‘ladi. Ularning hosilalari va differenrsiallash qoidalarini ***hosilalar jadvali*** ko‘rinishda ifodalaymiz. Bu jadvaldan foydalanib ixtiyoriy elementar funksiyani hosilasini topish mumkin va u matematik tahlil “Differensial hisob” bo‘limining asosiy quroli bo‘lib hisoblanadi. Bunda elementar funksiyalarning hosilalari yana elementar funksiya bo‘lishini ta’kidlab o‘tamiz.

H O S I L A L A R   J A D V A L I

I. DARAJALI FUNKTSIYALAR			
1	$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1},\quad \alpha\in(-\infty,\infty)$	2	$(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}u',\ u=u(x)$
3	$(x)'=1,\quad (x^2)'=2x,\ (x^3)'=3x^2,$ $(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2},\quad (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	4	$(u^2)'=2uu',\ (u^3)'=3u^2u',$ $(\frac{1}{u})'=-\frac{u'}{u^2},\quad (\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
II. KO‘RSATGICHLI FUNKTSIYALAR			
5	$(a^x)'=a^x\ln a,\ a>0,\ a\neq 1$	6	$(a^u)'=a^u u'\ln a,\ u=u(x)$
7	$(e^x)'=e^x,\quad (10^x)'=10^x\ln 10$	8	$(e^u)'=e^u\cdot u',\quad u=u(x)$
III. LOGARIFMIK FUNKTSIYALAR			
9	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}=\frac{\log_a e}{x}$	10	$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a}=\frac{u'\log_a e}{u},u=u(x)$
11	$(\ln x)'=\frac{1}{x}\ (\lg x)'=\frac{1}{x\ln 10}=\frac{\lg e}{x}$	12	$(\ln u)'=\frac{1}{u}u',\quad u=u(x)$
IV. TRIGONOMETRIK FUNKTSIYALAR			
13	$(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$	14	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$, $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
15	$(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\ (\mathrm{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	16	$(\mathrm{tg}u)'=\frac{u'}{\cos^2 u},\ (\mathrm{ctg}u)'=-\frac{u'}{\sin^2 u}$
V. TESKARI TRIGONOMETRIK FUNKTSIYALAR			
17	$(\arcsin x)'=-(\arccos x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	18	$(\arcsin u)'=-(\arccos u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
21	$(\mathrm{arctg}x)'=-(\mathrm{arcctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$		$(\mathrm{arctg}u)'=-(\mathrm{arcctg}u)'=\frac{u'}{1+u^2}$
DIFFERENSIALLASH QOIDARLARI			
27	$(C)'=0$, (C–const.), $(C\cdot u)'=C\cdot u'$	28	$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$
29	$(u\pm v)'=u'\pm v',(\frac{u}{v})'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$	30	$[f(u)]'_x=f'_u(u)\cdot u',\quad u=u(x)$

31	$\{f^{-1}(y)\}' = \dfrac{1}{f'(x)}, \quad x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$	32	$(u^v)' = u^v v' \ln u + v u^{v-1} u'$

7. **Differensiallash qoidalari.** Har qanday funksiya hosilasini yuqoridagi algoritm bo‘yicha hisoblash oson emas va ancha murakkab hisoblashlarni talab etadi. Shu sababli amalda $y=f(x)$ funksiya hosilasini hisoblash quyidagi ***differensiallash qoidalari*** yordamida osonroq amalga oshirilishi mumkin.

1-qoida: O‘zgarmas funksiya, ya’ni ixtiyoriy C o‘zgarmas sonning hosilasi nolga teng , ya’ni

$$(C)'=0 \quad (C\text{–const}).$$

2-qoida: Agar $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, bu nuqtada $y=u(x)\pm v(x)=u\pm v$ funksiya ham differensiallanuvchi va uning hosilasini

$$(u \pm v)'=u' \pm v'$$

formula bilan hisoblash mumkin.

Masalan,

$(x^2+\sin x)'= (x^2)'+ (\sin x)'=2x+\cos x$, $(5-\cos x)'= (5)' - (\cos x)'=0-(-\sin x)=\sin x$.

1-natija: Differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaga ixtiyoriy C o‘zgarmas sonni qo‘shsak, uning hosilasi o‘zgarmaydi.

Haqiqatan ham $(f(x)+C)' =f'(x)+C' = f'(x)+0= f'(x)$.

Izoh: Yuqoridagi 2- qoidada keltirilgan tasdiqning teskarisi umuman olganda o‘rinli emas. Masalan, $u=|x|$ va $v=1-|x|$ funksiyalar yig‘indisi $u+v=1$ o‘zgarmas funksiya sifatida barcha x nuqtalarda, jumladan $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi. Ammo u va v qo‘shiluvchi funksiyalar $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi emas.

3-qoida: Agar $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, bu nuqtada $y=u(x)\cdot v(x)=u\cdot v$ funksiya ham differensiallanuvchi va uning hosilasi uchun

$$(u\cdot v)'= u'\cdot v+ u\cdot v'$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Funksiya orttirmasi ta’rifiga asosan

$$\Delta u=u(x+\Delta x)- u(x) \Rightarrow u(x+\Delta x)= u(x)+ \Delta u,$$

$$\Delta v=v(x+\Delta x)- v(x) \Rightarrow v(x+\Delta x)= v(x)+ \Delta v$$

ekanligidan foydalanib, $\Delta(u\cdot v)$ funksiya orttimasini topamiz:

$$\Delta(u\cdot v) =u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)- u(x)\cdot v(x)=[u(x)+ \Delta u]\cdot[v(x)+ \Delta v] - u(x)\cdot v(x)=$$

$$= u(x)\cdot\Delta v+ v(x)\cdot \Delta u+\Delta u\cdot\Delta v.$$

Bu yerdan, hosila ta’rifi va limit hisoblash qoidalariga asosan,

$$(u\cdot v)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u\cdot v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\cdot\Delta v + v(x)\cdot\Delta u + \Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v$$

natijani olamiz. Shartga asosan $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi , demak uzluksiz ham bo‘lgani uchun

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v',\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u',\quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$$

tengliklar o‘rinli bo‘ldi. Bu tengliklarni oldingi natijaga qo‘yib, $y=u\cdot v$ funksiya differensiallanuvchi va

$$(u\cdot v)'=u\cdot v'+v\cdot u'+u'\cdot 0=u\cdot v'+v\cdot u',$$

ya’ni (6) formula o‘rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Masalan,

$$(e^x\cdot\sin x)'=(e^x)'\cdot\sin x+e^x\cdot(\sin x)'=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x=(\sin x+\cos x)e^x.$$

2-natija: O‘zgarmas C ko‘paytuvchini hosila belgisidan tashqariga chiqarish mumkin. Haqiqatan ham, (4) va (6) formulalarga asosan

$[C\cdot f(x)]'=C'\cdot f'(x)+C\cdot f'(x)=0\cdot f(x)+C\cdot f'(x)=C\cdot f'(x)$.

Masalan, $(5x^2)'=5\cdot(x^2)'=5\cdot 2x=10x$.

4-qoida: Agar $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi va bu yerda $v=v(x)\neq 0$ shart bajarilsa, unda bu nuqtada $y=u(x)/v(x)=u/v$ funksiya ham differensiallanuvchi va uning hosilasi uchun

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Bu tasdiqni isboti oldingi qoida isbotiga o‘xshash tarzda amalga oshiriladi va o‘quvchiga mustaqil ish sifatida taklif etiladi.

Bu qoidadan foydalanib, $y=\text{tg}x$ va $y=\text{ctg}x$ asosiy elementar funksiyalarning hosilasini topamiz. $\cos x\neq 0$ shartda, ya’ni $x\neq(\pi/2)\pm\pi n$ ($n=0,1,2,3,\ldots$.) bo‘lganda

$$(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Xuddi shunday ravishda, $\sin x\neq 0$ shartda, ya’ni $x\neq\pm\pi n$ ($n=0,1,2,3,\ldots$.) bo‘lganda, $(\text{ctg}x)'=-1/(\sin^2 x)$ ekanligi topiladi. Demak, $y=\text{tg}x$ va $y=\text{ctg}x$ funksiyalar o‘zlarining aniqlanish sohasida differensiallanuvchi bo‘lib, ularning hosilalari

$$(\text{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\text{tg}^2x,\quad (\text{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\text{ctg}^2x)$$

formula bilan topiladi.

5-qoida: Berilgan $y=f(x)$ funksiya x nuqtaning biror atrofida qat’iy monoton (o‘suvchi yoki kamayuvchi) va uzluksiz bo‘lsin. Bundan tashqari $y=f(x)$ funksiya bu x nuqtada differensiallanuvchi va $f'(x)\neq 0$ bo‘lsin. Bu shartlarda $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiya mavjud va differensiallanuvchi bo‘lib, uning hosilasi uchun

$$\left\{f^{-1}(y)\right\}' = \frac{1}{f'(x)} \text{ yoki } x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Keltirilgan shartlarda tegishli $y=f(x)$ nuqtaning biror atrofida $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiya mavjud, qat’iy monoton va uzluksiz bo‘lishini ko‘rsatish mumkin.Bu funksiyani differensiallanuvchi bo‘lishini aniqlash uchun uning y argumentiga $\Delta y\neq 0$ orttirma beramiz. Bu holda $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiya

$$\Delta x=f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y)$$

orttirma oladi. Bunda $f^{-1}(y)$ teskari funksiya qat’iy monoton ekanligidan $\Delta x\neq 0$, uzluksiz ekanligidan esa $\Delta y\to 0 \Rightarrow \Delta x\to 0$ bo‘lishi kelib chiqadi. Bu holda, $f'(x)$ mavjud va noldan farqli ekanligi hamda hosila ta’rifidan ushbu natijani olamiz:

$$\left\{f^{-1}(y)\right\}' = x'_y = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{-1} = \left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{-1} = (y'_x)^{-1} = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Demak, $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiya differensiallanuvchi va (9) formula o‘rinli.

Bu qoidadan foydalanib yana bir nechta asosiy elementar funksiyalarning hosilalarini aniqlaymiz.

Dastlab $y=f(x)=\arcsin x$ teskari trigonometrik funksiya hosilasini topamiz. Ta’rifga asosan, $x\in(-1, 1)$ bo‘lganda bu funksiya $y\in(-\pi/2, \pi/2)$ qiymatlarni qabul etadi hamda $x=\sin y$ funksiyaga teskari bo‘ladi. Bu yerda $y\in(-\pi/2, \pi/2)$ bo‘lgani uchun, $x=\sin y$ teskari funksiyaning hosilasi

$$x'_y = (\sin y)' = \cos y > 0,$$

ya’ni noldan farqli bo‘ladi. Bu holda, (9) formulaga asosan,

$$(\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

natijani hosil qilamiz. Demak,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x\in(-1,1)$$

formula o‘rinli ekan. Xuddi shunday usulda

$$(\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\mathrm{arctg} x)' = -(\mathrm{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$ formulalarni

isbotlash mumkin.

Endi $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$) logarifmik funksiya hosilasini topamiz. Bunda $x\in(0,\infty)$ va $y\in(\infty, \infty)$ hamda logarifmik funksiya qat’iy monoton bo‘lib, u $x=a^y$ko‘rsatkichli funksiyaga teskaridir. Bundan tashqari $x=a^y$ differensiallanuvchi va $(a^y)'=a^y\ln a\neq 0$. Shu sababli, (9) formulaga asosan, logarifmik funksiya hosilasi mavjud va

$$(\log_a x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y\ln a} = \frac{1}{x\ln a}$$

ekanligini topamiz. Demak,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} = \frac{\log_a e}{x}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad .$$

6-qoida: Berilgan $y=f(u)$ murakkab funksiyada tashqi $f(u)$ va ichki $u(x)$ funksiyalar argumentlari bo‘yicha differensiallanuvchi bo‘lsin. Bu holda $y=f(u)$murakkab funksiya x bo‘yicha differensiallanuvchi bo‘lib, uning hosilasi

$$f'_x(u) = f'_u(u) \cdot u'(x)$$

formula bilan, ya’ni tashqi va ichki funksiyalar hosilalarining ko‘paytmasi kabi topiladi.

Isbot: *u(x)* funksiya differensiallanuvchi ekanligidan uning uzluksizligi kelib chiqadi va shu sababli $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0$ bo‘ladi. Bu yerdan, hosila ta’rifi va limit hisoblash qoidalariga asosan ,

$$f'_x(u) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'_u(u) \cdot u'(x),$$

ya’ni $y=f(u)$murakkab funksiya differensiallanuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Masalan, $(\sin x^2)' = (u=x^2) = (\sin u)'_x = (\sin u)'_u \cdot u' = \cos u \cdot (x^2)' = 2x\cos x^2$,

$(\sin^2 x)' = (u=\sin x) = (u^2)'_x = (u^2)'_u \cdot u' = 2u \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.

Bu qoidadan foydalanib, $y=x^\alpha$ (α–ixtiyoriy haqiqiy son), $x \in (0, \infty)$, darajali funksiyaning differensiallanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun darajali funksiyani

$y = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ ko‘rinishdagi murakkab ko‘rsatkichli funksiya kabi ifodalaymiz. Ko‘rsatkichli va logarifmik funksiya hosilasidan foydalanib,

$$y' = (x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = (u = \alpha \ln x) = (e^u)' = e^u u' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^\alpha \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

natijaga kelamiz. Demak, $y=x^\alpha$, $x \in (0,\infty)$, darajali funksiya differensiallanuvchi va uning hosilasi

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

formula orqali hisoblanadi. Masalan,

$$(x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2, \quad (x^{-1})' = (\frac{1}{x})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} ,$$

$$(x^{1/2})' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (x^{1/3})' = (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} .$$

8. *Murakkab funksiyaning hosilasi.* Bizga murakkab funksiya berilgan

bo‘lsin, ya’ni shunday $y=f(x)$ funksiyaki, uni $y=F(u)$, $u=\varphi(x)$ yoki $y=F[\varphi(x)]$ ko‘rinishida ifodalash mumkin bo‘lsin.

Teorema. Agar $u=\varphi(x)$ funksiya biror x nuqtada $u'_x = \varphi'(x)$ hosilaga ega

bo‘lsa $y=F(u)$ funksiya esa x ga mos u ning qiymatida $y'_u = F(u)$ hosilaga ega bo‘lsa, u holda shu x nuqtada murakkab funksiya ham

$y'_x = F'_u(x) \cdot \varphi'(x)$ yoki $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ gat eng hosilaga ega bo‘ladi.

Isboti. Argument x ga Δx orttirma beramiz, u holda

$$u+\Delta u=\varphi(x+\Delta x),\quad y+\Delta y=F(u+\Delta u)$$

bu yerdan

$$\Delta u=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x),\quad \Delta y=F(u+\Delta u)-F(u)$$

$\Delta x\to 0$ da $\Delta u\to 0$ intiladi va $\Delta u\to 0$ da $\Delta y\to 0$ intiladi.

Teoremaning shartiga asosan.

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'$$

bu yerdan

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'+\alpha$$

tenglik kelib chiqadi, bu yerda $\Delta u\to 0$ da $\alpha\to 0$

So‘ng tenglikdan

$\Delta y=y'+\alpha\,\Delta u$ hosil qilamiz.

Buni Δx gab o‘lamiz va $\Delta x\to 0$ dagi limitini topamiz

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}=y'_u\cdot u'_x$$

Shunday qilib teorema isbot bo‘ladi.

Agar $y=f(x)$ funksiya $y=F(u), u=\varphi(v),\; v=\phi(x)$ ko‘rinishda bo‘lsa, bu murakkab funksiya uchun ham teorema o‘rinlidir, ya’ni

$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x$

Misol. $y=\sin^2\ln x,\; v=\ln x,\; u=\sin v,\; y=u^2$

$y'_u=2u,\; u'_v=\cos v, v'_x=1/x$

$y'_x\; y'_u\cdot\; v'_x=2u\cdot\cos v\cdot 1/x=2\sin\cdot\ln x\cdot\cos\ln x\cdot 1/x$

$y'_x=1/x\sin 2\ln x$

9. ***Oshkormas funksiyalarning hosilasi***. Agar ikkita *x* va *y* o‘zgaruvchilar

$$F(x,y)=0 \qquad (1)$$

tenglama bilan berilgan bo‘lsa va $y=f(x)$ ni (1) tenglamaga qo‘yganimizda u x ga nisbatan ayniyatga aylansa, u holda (1) tenglama **oshkormas funksiya** deyiladi.

Masalan, $x^2+y^2-a^2=0$ tenglamani $y=\sqrt{a^2-x^2}$ yoki $y=-\sqrt{a^2-x^2}$ funksiyalar ayniyatga aylantiradi. Ammo hamma vaqt ham oshkormas funksiyani oshkor ko‘rinishda ifodalash mumkin emas.

Masalan, 1) $x^2+y^2-xy=0$ 2) $e^{x+y}-2\sin x\,y=0$ bularni elementar funksiyalar orqali ifodalab bo‘lmaydi.

Bunday funksiyani differensiallash uchun y ni x ning funksiyasi debqarash mumkin va murakkab funksiyaning hosilasi sifatida aniqlash mumkin.

Misol.

1) $x^2+y^2\,a^2=0$

$2x+2y\cdot y'=0',\; y'=-x/y$

2) $x^2+y^2-x\,y=0$

$$2x+2yy^{|}-y-xy^{|}=0, y^{|}=-\frac{2x-y}{2y-x}$$

3) $e^{x+y}-2\sin xy=0$

$$e^{x=y}(1+y')-2\cos xy\cdot(xy'+y)=0$$

$$\left(e^{x+y}-2x\cos xy\right)y'-2y\cos xy+e^{x=y}=0$$

$$y'=\frac{2y\,cox\,y-e^{x+y}}{e^{x+y}-2x\cos xy}$$

10. Teskari funksiya va uni differensiallash Biror (a,b) $(a\langle b)$ oraliqda aniqlangan va o‘suvchi $y=f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin. $(f(a)=c,\ f(b)=d)$.

Funksiya o‘suvchi bo‘lgani uchun $x_1\langle x_2$ dan $y_1\langle y_2$ ekani kelib chiqadi. Argumentning ikkita har xil x_1, x_2 qiymatlari uchun funksiyaning ikkita $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$ qiymatlari mos keladi. Buning teskarisi ham to‘g‘ri, ya’ni $y_1<y_2$ qiymatlari uchun x_1, x_2 qiymatlari mos keladi. Demak x ning qiymatlari bilan uning qiymatlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud. U holda $x=f^{-1}(y)$ funksiya $y=f(x)$ **funksiyaning teskari funksiyasi** deyiladi.

Huddi shunday fikrni kamayuvchi funksiyalar uchun ham aytish mumkin.

<u>Teorema.</u> Agar $y=f(x)$ funksiyaning y nuqtadagi noldan farqli bo‘lgan $\varphi^{|}(y)$ hosilaga ega $x=\varphi(y)$ teskari funksiyasi mavjud bo’lsa, u holda tegishli x nuqtada $y=f(x)$ funksiya $\frac{1}{\varphi^{|}(y)}$ ga teng bo‘lgan $f^{|}(x)$ hosilaga ega bo‘ladi, ya’ni, $f^{|}(x)=\frac{1}{\varphi^{|}(y)}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isboti. Δy orttirmaga asosan yozamiz.

$$\Delta y=\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

$\Delta y\to 0$ da $\Delta x\to 0$. Limitiga o‘tib $y_x^{|}=\frac{1}{x_y^{|}}$ ni hosil qilamiz. $y_x^{|}=\frac{1}{x_y^{|}}$

11. Funksiyaning parametrik tenglamasi va uning hosilasi. Agarda tekislikda egri chiziq

$$\left.\begin{aligned}x&=\varphi(t),\\ y&=\phi(t),\end{aligned}\right\}\ t\in[\alpha,\ \beta]$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlangan bo‘lsa, u holda shu sistema **funksiyaning parametrik tenglamasi** deyiladi.

Agar $x=\varphi(t)$ funksiya $t=\Phi(x)$ teskari funksiyaga ega bo‘lsa, u holda uni x ning funksiyasi, ya’ni

$$y=\psi[\Phi(x)] \qquad (2)$$

Murakkab funksiya ko‘rinishida ifodalash mumkin.

Parametrik funksiyaga misollar keltirish mumkin, masalan:

1) **Aylananing parametrik tenglamasi**

$$\left.\begin{aligned}x&=a\cos t\\ y&=a\sin t\end{aligned}\right\}\ t\in[0;2\pi]$$

2) **Ellipsning parametrik tenglamasi**

$$\left.\begin{array}{l} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{array}\right\} \quad t\in[0;2\pi]$$

3) Sikloidaning parametrik tenglamasi

$$\left.\begin{array}{l} x=a(t-\sin t) \\ y=a(t-\cos t) \end{array}\right\} \quad t\in[0;2\pi]$$

4) Astroidaning parametrik tenglamasi

$$\left.\begin{array}{l} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{array}\right\} \quad t\in[0;2\pi]$$

va h.k.

Hosilani topish, murakkab funksiyaning hosilasi formulasidan va teskari funksiyaning hosilasi formulasidan foydalanamiz:

(2) tenglikdan

$$y'_x=y'_t\cdot t'_x=y'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{y'_t}{x'_t} \text{ yoki } y'_x=\frac{\psi(t)}{\varphi^{|}(t)}$$

Misol. $\left.\begin{array}{l} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{array}\right\} \quad t\in[0;2\pi]$

$x'_t=a\sin t$

$y'_t=a\cos t$

$$y'_x=\frac{a\cos t}{-a\sin t}=-ctgt$$

Tayanch iboralar

* Hosilani hisoblash algoritmi * O‘zgarmas son hosilasi * Algebraik yig‘indi hosilasi * Ko‘paytmaning hosilasi * Bo‘linmaning hosilasi * Teskari funksiya hosilasi * Murakkab funksiya hosilasi * Logarifmik differensiallash * Darajali-ko‘rsatkichli funksiya * Hosilalar jadvali

Murakkab funksiya – $y=F(u),\ u=\varphi(x)$ bo‘lsa , $y=F[\varphi(x)]$ funksiya murakkab funksiya bo‘ladi;

Oshkormas funksiya - $F(x,y)=0$ tenglamasi bilan berilgan funksiya;

Teskari funksiya– argumentning qiymatlari uchun funksiyaning qiymatlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik mabjud bo‘lsa, berilgan funksiyaga teskari funksiya berilgan bo‘ladi;

Funksiyaning parametrik funksiyasi - $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in[\alpha,\beta]$ tenglamalar sistemasi;

Giperbolik funksiyalar – ko‘rsatqichli funksiyalar orqali ifodalanuvchi funksilar.

Takrorlash uchun savollar

1. Funksiya hosilasini topish algoritmi qanday qadamlardan iborat?
2. O‘zgarmas sonning hosilasi nimaga teng?
3. Funksiyalar algebraik yig‘indisining hosilasi qanday hisoblanadi?
4. Funksiyalar algebraik yig‘indisi differensiallanuvchi bo‘lsa, qo‘shiluvchilar differensiallanuvchi bo‘lishi shartmi?
5. Funksiyalar ko‘paytmasining hosilasi qanday topiladi?
6. Differensiallashda o‘zgarmas ko‘paytuvchini nima qilish mumkin?
7. Funksiyalar nisbatining hosilasi qanday hisoblanadi?
8. Teskari funksiyaning hosilasi qaysi shartda mavjud va qanday topiladi?
9. Murakkab funksiyaning hosilasi qanday hisoblanadi?

10. Logarifmik differensiallash usulining mohiyati nimadan iborat?
11. Darajali – ko‘rsatkichli funksiya qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
12. Darajali – ko‘rsatkichli funksiyaning hosilasi qaysi formula bilan aniqlanadi?
13. Elementar funksiyalarning hosilasi qanday funksiyadan iborat bo‘ladi?
14. Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari jadvalini yozing .

Testlardan namunalar

1. Differensiallash qoidasi qayerda xato ko‘rsatilgan?

A) $(Cu)'=Cu'$ (C-const.); B) $(u\pm v)'=u'\pm v'$; C) $(u\cdot v)'=u'v+uv'$; D) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v+uv'}{v^2}$; E) $(f(u))'=f'(u)u'$.

2. Ikkita u va v diffrentsiallanuvchi funksiyalar u/v nisbatining hosilasini hisoblash formulasi to‘g‘ri yozilgan javobni ko‘rsating.

A) $\frac{u'v+uv'}{v}$; B) $\frac{u'v+uv'}{v^2}$; C) $\frac{u'v-uv'}{v^2}$; D) $\frac{u'v-uv'}{v}$; E) $\frac{u'v'-uv}{v^2}$.

3. $y=x^2/\sin x$ funksiyaning y' hosilasini hisoblang.

A) $y'=x^2/\cos x$; B) $y'=2x/\sin x$; C) $y'=2x/\cos x$;
D) $y'=x(2\sin x+x\cos x)/\sin^2 x$; E) $y'=x(2\sin x-x\cos x)/\sin^2 x$.

4. Ikkita u va v diffrentsiallanuvchi funksiyalar $u\cdot v$ ko‘paytmasining hosilasini hisoblash formulasi qayerda to‘g‘ri yozilgan?

A) $u'v'$; B) $u'v'+uv$; C) $u'v+uv'$; D) $u'v-uv'$; E) $u'v'-uv$.

5. $y=x^2\sin x$ funksiyaning y' hosilasini hisoblang.

A) $y'=x^2\cos x$; B) $y'=x(x\sin x-2\cos x)$; C) $y'=2x\sin x$; D) $y'=x(x\cos x+2\sin x)$;
E) $y'=x(x\cos x-2\sin x)$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Quyidagi funksiyalarning hosilasini differensiallash qoidalari yordamida hisoblang:

a) $f(x)=nx^n+(n+1)\sin x-n^2\cos x-2n^x$; *b*) $f(x)=x^ne^x$; *c*) $f(x)=\frac{\ln x}{x+n}$.

2. Ushbu murakkab funksiyalarning hosilasini hisoblang:

a) $f(x)=\ln(nx+\cos x)$; *b*) $f(x)=\sin^{2n}(x^2+2nx+1)$.

3. $f(x)=(x+n)^{nx}$ darajali-ko‘rsatgichli funksiya hosilasini toping.

14-mavzu. Yuqori tartibli hosilalar. Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosi. Hosilaning tadbiqlari. Funksiyaning differensiali. Yuqori tartibli differensiallar. Differensiallardan taqribiy hisoblashlarda foydalanish.

REJA:

1. Differensial va uning geometrik ma'nosi.
2. Yuqori tartibli hosila va differensiallar.
3. Oshkormas va parametrik funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari.

1. Differensial va uning geometrik ma'nosi. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada differensiallanuvchi bo'lsa, kesmaga tegishli biror *x* nuqtadagi hosilasi

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f^{|}(x) \qquad (1)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Limit ta'rifidan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f^{|}(x)+\alpha \qquad (2)$$

bu yerda $\Delta x\to 0$ da $\alpha\to 0$ $\Delta y=f^{|}(x)\Delta y+\alpha\cdot\Delta x$

Shunday qilib, funksiyaning Δy orttirmasi ikkita qo'shiluvchidan iborat bo'lib, bulardan birinchisi orttirmaning bosh bo'lagi deb ataladi va Δx orttirmaga nisbatan chziqlidir. Shu birinchi xadi funksiyaning differensiali deb ataladi va $d\,y$ yoki $d\,f(x)$ bilan belgilanadi, demak,

$$d\,y=f'(x)\Delta x \qquad (3)$$

$y=x,\ y^{|}=x^{|}=1$ bo'lgani uchun $d\,y=d\,x=\Delta x$, u holda $\Delta x=d\,x$ bo'ladi $d\,y=f^{|}(x)d\,x$.

Funksiyaning differensiali funksiya hosilasi va argument differensialining ko'paytmasiga tengdir.

(1)tenglamadagi ikkinchi yig'indi $\alpha\Delta x$ esa Δx ga nisbatan yuqori tartibli kichik miqdordir. (3) tenglamadan

$$f'(x)=\frac{d\,y}{d\,x} \qquad (4)$$

Demak, $f^{|}(x)$ hosilasi funksiya differensialini erkli o'zgaruvchining argument differsialiga nisbati deb qarash mumkin

$$\Delta y=d\,y+\alpha\Delta x \qquad (5)$$

$\alpha\Delta x$ ifoda Δx ga nisbatan cheksiz kichik miqdor bo'lgani uchun

$$\Delta y\approx d\,y \qquad (6)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Yuqoridagi ifodadan foydalanib yozamiz

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f^{|}(x)\Delta x$$

yoki

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f^{|}(x)\Delta x \qquad (7)$$

So'ng (7) formula taqribiy hisoblashlarda ishlatiladi.

Misol. $\sqrt{3{,}92}$ - hisoblash tashkil etilsin.

$y=\sqrt{x}$ funksiyani olamiz, bu yerda $x_0=4,\ \ \Delta x=-0{,}08$

$$x_0-\Delta x=4-0{,}08=3{,}92,\ \ f(x_0)=y\big|_{x_0=4}=\sqrt{4}=2$$

$$f^{|}(x)=y^{|}=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad f^{|}(x_0)=y^{|}\Big|_{x_0=4}=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$$

$$\sqrt{3{,}92}=\sqrt{4-0{,}08}\approx f(x_0)+f^{|}(x_0)\Delta x=2+\frac{1}{4}(-0{,}08)=2-0{,}02=1{,}92$$

Yuqorida keltirilgan hosila jadvallari yordamida funksiyaning differsiallarini topish mumkin.

Masalan.

1) $y=x^{\alpha}$, $\qquad d\,y=\alpha\, x^{\alpha-1}dx$

2) $y=\log_a x$, $\qquad d\,y=\frac{1}{x}\log_a edx$

3) $y=u+v$, $\qquad d\,y=du+dv$

4) $y=u/v$, $\qquad d\,y=\frac{vdu-udv}{v^2}$

shunga o‘hshash barcha formulalarni yozish mumkin.

Murakkab funksiya berilgan bo‘lsin, ya’ni

$$y=f(u),\quad u=\varphi(x)\ y=f[\varphi(x)].$$

Murakkab funksiyaning hosilasiga muvofiq:

$$\frac{d\,y}{d\,x}\text{ yoki } d\,y=f_u^{|}(u)\varphi^{|}(x)d\,x,$$

ammo $\varphi'(x)d\,x=d\,u$ bo‘lgani uchun

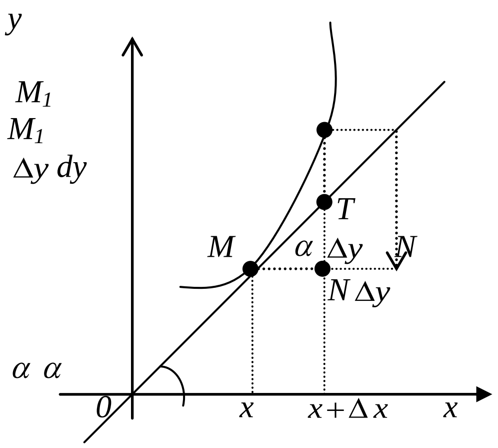
$$d\,y=f_u^{|}(u)d\,u$$

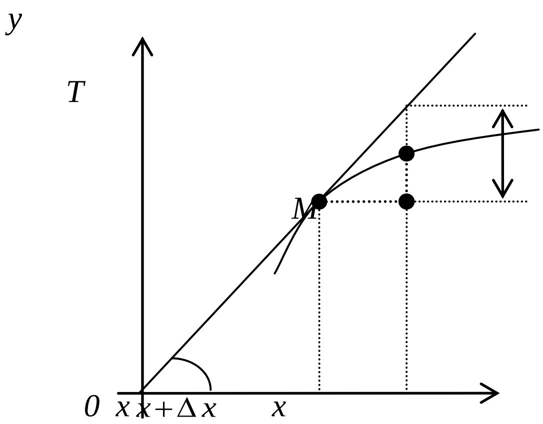
Shunday qilib, murakkab funksiyaning differensiali oddiy funksiyaning differensiali kabi ekan, ya’ni murakkab va oddiy funksiyaning differensiallari ma’no jihatidan har hil bo‘lsa ham, ko‘rinishi bir hil ekan. Bu **differensialning invariantligi** deyiladi.

Egri chiziq $y=f(x)$ tenglama orqali berilgan bo‘lsin. Egri chiziqning biror $M(x,y)$ nuqtasini olamiz va shu nuqtaga urinma o‘tkazib uning *0X* o‘qining musbat yo‘nalishi bilan tashkil etgan burchagini α deb belgilaymiz. Argument x ga Δx orttirma beramiz, natijada funksiya Δy orttirmaga ega bo‘ladi. Bu nuqtani $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ deb olamiz.

ΔMNT dan $NT=MN\,tg\alpha$, $tg\alpha=f^{|}(x)$, $MN=\Delta x$, $NT=f^{|}(x)\Delta x$ lekin $dy=f^{|}(x)\Delta x$ bo‘lgani uchun $NT=dy$ ekani kelib chiqadi.

So‘nggi tenglik $f(x)$ funksiyaning berilgan x va Δx qiymatlariga tegishli differensiali $y=f(x)$ egri chiziqning berilgan x nuqtasidagi urinma kordinatasini orttirmasiga teng ekan.Shakldan ko‘rinadiki, $M_1T=\Delta y-dy$. Bu ayirma shakliga e’tibor bersak musbat ham, manfiy ham bo‘lishi mumkin.





2. Yuqori tartibli hosila va differensiallar. Ma'lumki, $y=f(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lsa, uning hosilasi $f'(x)$ shu oraliqda aniqlangan yangi bir funksiya bo'ladi. Shu sababli $f'(x)$ funksiyaning hosilasi to'g'risida so'z yuritish mumkin.

1-***TA'RIF:*** Agar $f'(x)$ hosila differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, uning hosilasi $y=f(x)$ ***funksiyaning II tartibli hosilasi*** deyiladi.

Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning II tartibli hosilasi $f''(x)$, y'' yoki $f^{(2)}(x)$,$y^{(2)}$ kabi belgilanadi va , ta'rifga asosan, $f''(x)=[f'(x)]'$ formula bilan hisoblanadi.

Masalan, $f(x)=x^4$ funksiya uchun $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=(4x^3)'=12x^2$ bo'ladi.

Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosi: *M*modiy nuqta $S=f(t)$ qonuniyat bo'yicha to'g'ri chiziqli harakatlanayotgan bo'lsin. Bizga ma'lumki, S_t' hosila nuqtaning ma'lum paytdagi tezligiga teng: $S_t'=V$.

Yo'ldan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosila nuqtaning tezlanishiga tengligini ko'rsatamiz, ya'ni

$$S_t''=a\ .$$

Biror t vaqt mobaynida nuqtaning tezligi V, $t+\Delta t$ vaqtda esa $V+\Delta V$ bo'lsin, ya'ni Δt vaqt oralig'ida tezlik ΔV katalikka o'zgarsin. $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ munosabat nuqtaning Δt vaqt mobaynidagi o'rtacha tezlanishini ifodalaydi. Bu munosabatning $\Delta t\to 0$ dagi limiti M nuqtaning t vaqtdagi tezlanishi deyiladi va a bilan belgilanadi:

$$a:\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta t}=a\ ,$$

ya'ni

$$v'=a\ .$$

Lekin $v=S_t'$; Bundan$a=(S_t')'$, ya'ni$a=S_t''$.

Misol. Moddiy nuqta $S(t)=\frac{t^3}{3}$ qonuniyat bo'yicha harakatlanmoqda. $t=5$ vaqt mobaynidagi tezlanishini toping.

$$a = s'' = \left(\frac{t^3}{3}\right)'' = 2t$$

$$a(t=5) = 2 \cdot 5 = 10$$

Agar moddiy nuqta to‘g‘ri chiziq bo‘ylab $S=S(t)$ tenglama bilan harakatlanayotgan bo‘lsa, unda $S'(t)$ uning t vaqtdagi $v(t)$ oniy tezligini ifodalashini ko‘rib o‘tgan edik. Unda $S''(t)$ nuqtaning harakat davomidagi tezligini o‘zgarish tezligini, ya’ni $a(t)$ tezlanishini ifodalaydi.

Yuqorida ko‘rib o‘tilgan tarzda differensiallanuvchi II tartibli $f''(x)$ hosila bo‘yicha ***III tartibli hosila*** $[f''(x)]'$ kabi aniqlanadi va $f'''(x)$ yoki $f^{(3)}(x)$ kabi belgilanadi. Bu jarayonni davom ettirilib, $f^{(n)}(x)$ ***n–tartibli hosila*** tushunchasi quyidagi rekkurent formula orqali kiritiladi:

$$f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x))', \quad n=2,3,4,\dots \qquad (10)$$

Izoh: Hosila tartibi tushunchasi kiritilgach, qulaylik uchun $f(x)$ funksiyaning o‘zi 0-tartibli hosila, ya’ni $f(x)=f^{(0)}(x)$, $f'(x)$ esa I tartibli hosila, ya’ni $f'(x)=f^{(1)}(x)$ deb qaraladi.

Masalan, $f(x)=x^3$ uchun $f^{(0)}(x)=x^3$, $f^{(1)}(x)=3x^2$, $f^{(2)}(x)=6x$, $f^{(3)}(x)=6$ va $n\geq4$ holda $f^{(n)}(x)=0$ bo‘ladi. Umuman olganda, $f(x)=P_m(x)$ – m-darajali ko‘phad bo‘lsa, unda $n>m$ holda $f^{(n)}(x)=0$ bo‘ladi.

<u>3-TA’RIF:</u> Agar $y=f(x)$ funksiya uchun n–tartibli hosila mavjud bo‘lsa, u ***n marta differensiallanuvchi*** funksiya deb ataladi.

n–tartibli hosila ta’rifini ifodalovchi (10) formuladan ko‘rinadiki, umuman olganda $f^{(n)}(x)$ berilgan funksiyadan ketma-ket n marta hosila olish orqali birin-ketin topiladi. Ammo ba’zi funksiyalar uchun n–tartibli hosila ifodasini birdaniga yozish mumkin. Masalan,
$(e^x)^{(n)}= e^x$, $(a^x)^{(n)}=a^x \ln^n a$, $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\pi n/2)$, $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\pi n/2)$.

n–tartibli hosila hisoblanadigan (11) formula va hosila olish qoidalaridan foydalanib, n marta differensiallanuvchi $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar uchun

$$(C)^{(n)}=0 \ (C\text{-const}), \quad (C\cdot u)^{(n)}=C\cdot u^{(n)}, \quad (u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$$

formulalar o‘rinli ekanligini ko‘rsatish qiyin emas.

Ammo $y=uv$ ko‘paytmaning n–tartibli hosilasi uchun formula murakkab bo‘lib, quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)} + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \cdots + nu'v^{(n-1)} + v^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

Bu tenglik ***Leybnits formulasi*** deyiladi.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$$

formula bilan hisoblanishini eslatib o‘tamiz.

Berilgan $y=f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo‘lsa, uning differensiali $df=f'(x)dx$ ko‘rinishda bo‘ladi. Demak, df differensialning qiymati x argument va $dx=\Delta x$ argument orttirmasiga (differensialiga) bog‘liq bo‘ladi. Biz argument differensiali dx ixtiyoriy, ammo o‘zgarmas va x argumentning qiymatiga bog‘liq bo‘lmagan son deb qaraymiz. Bu holda df differensial x argumentning biror funksiyasidan iborat bo‘ladi va shu sababli uning differensiali to‘g‘risida so‘z yuritish mumkin.

<u>4-TA’RIF:</u>Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning differensiali df o‘z navbatida differensiallanuvchi funksiya bo‘lsa, uning differensiali $y=f(x)$ funksiyaning ***ikkinchi tartibli differensiail*** deb ataladi.

$y=f(x)$ funksiyaning II tartibli differensiali d^2f kabi belgilanadi va, ta’rifga asosan, quyidagi formula bilan topiladi:

$$d^2f=d(df)=d(f'(x)dx)=[f'(x)dx]'dx=[f'(x)]'\,dx\,dx=f''(x)(dx)^2=f''(x)dx^2 .$$

Demak, $y=f(x)$ funksiyaning II tartibli differensiali uning II tartibli hosilasi orqali

$$d^2f = f''(x)dx^2\ ,\ \ dx^2=(dx)^2,$$

formula yordamida topiladi. Xuddi shunday tarzda $y=f(x)$ funksiyaning ***n* – tartibli differensiali** d^nf

$$d^nf=d(d^{n-1}f)= f^{(n)}(x)(dx)^n= f^{(n)}(x)dx^n\ ,\ n=2,3,4,\ \dots \qquad (11)$$

kabi aniqlanadi va hisoblanadi. Bunda funksiyaning o‘zi $f=d^0f$ – 0-tartibli, differensiali esa $df=d^1f$– 1- tartibli differensial singari qaraladi.

Masalan, $f(x)=x^3$ funksiya uchun $df=3x^2dx$, $d^2f=6xdx^2$, $d^3f=6dx^3$ va $n\geq 4$ holda $d^nf=0$ bo‘ladi.

Yuqori tartibli differensiallardan foydalanib, yuqori tartibli hosilalarni

$$f''(x)=\frac{d^2f}{dx^2}\ ,\quad f'''(x)=\frac{d^3f}{dx^3}\ ,\cdots,\ f^{(n)}(x)=\frac{d^nf}{dx^n}$$

kabi yozish mumkin.

3. Oshkormas va parametrik funksiyalar yuqori tartibli hosilalari.

Oshkormas funksiyaning ikkinchi tartibli xosilasini topishni quyidagi misolda ko’ramiz.

Misol. $x^2+y^2-xy=0$

$$2x+2yy'-y-xy'=0$$

$$y'=-\frac{2x-y}{2y-x}$$

$$y''=\frac{(2-y')(2y-x)-(2y'-1)(2x-y)}{(2y-x)^2}=\frac{\left(2-\frac{2x-y}{2y-x}\right)(2y-x)-\left(2\frac{2x-y}{2y-x}-1\right)(2x-y)}{(2y-x)^2}=$$

$$=\frac{(3y)(2y-x)-3x(2x-y)}{(2y-x)^3}=\frac{6_y^{\,2}-6xy+6x^2}{(2y-x)^3}$$

Parametrik funksiyaning ikkinchi tartibli hosilani topamiz.

Bizga ma’lumki, $x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$ funksiyaning hosilasi

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Formula bilan hisoblanadi. Ikkinchi tartibli hosilasini aniqlaymiz:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}=\frac{\varphi'(t)\phi''(t)-\varphi''(t)\phi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

Misol.

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos t\\ y&=a\sin t\end{aligned}\right\}$$

$$x_t'=-a\sin t \qquad x_{tt}''=-a\cos a$$

$$y_t'=a\cos t \qquad x_{tt}''=-a\sin a$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{+a\cos t}{-a\sin t}=-ctg\,t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(-a\sin t)(-a\sin t)-(-a\cos t)\,(-a\cos t)}{[-a\sin t]^3}=-\frac{1}{a\sin^3 t}$$

Tayanch iboralari.

Funksiyaning differensiali - funksiyahosilasi va argument differensialining ko‘paytmasi;

Differensialning geometrik ma’nosi- $f(x)$ funksiay berilgan x va Δx qiymatlariga tegishli differensiali $y = f(x)$egri chiziqning berilgan x nuqtasidagi oriqma ordinatasini orttirmasi;

Yuqori tartibli hosilalar – birinchi tartibli hosiladan ketma-ket olingan hosilalar;

Yuqori tartibli differensiallar – birinchi tartibli differsiyadan ketma-ket olingan differensiallar.

Nazorat savollari

1. Funksiya differensialining ta’rifi.
2. Funksiya differensialaning geometrik ma’nosi.
3. Yuqori tartibli hosila va differensiallar.
4. Oshkormas va parametrik funksiyaning yuqori tartibli hosilalari.

7-MODUL. HOSILANING TADBIQI.

15-mavzu. Differensiallanuvchi funksiyalar haqida ba'zi bir teoremalar. Egri chiziqqa urinma va normal tenglamasi. Lopital qoidasi. Teylor va Makloren formulalari. e^x, *sinx, cosx, lnx, ln(lnx)* funksiyalarni Makloren formulalari bo'yicha yoyish.

REJA:

1. Roll, Lagranj, Koshi teoremasi.
2. Aniqmasliklar va ularni ochish.
3. Lopitalning I va II qoidasi. Ularning tatbiqlari.
4. Turli aniqmasliklarni ochish.
5. Teylor va Makloren formulalari.

1. Roll teoremasi. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$kesmada uzluksiz bo‘lib, shu kesmaing barcha ichki nuqtalarda differsiallanuvchi va $f(a)=f(b)=0$ bo‘lsa, u holda (a,b)oraliqda hech bo‘lmaganda bitta $x=c$ nuqta mavjudki bu nuqtada funksiya hosilasi nolga aylanadi, ya'ni $f'(c)=0$.

Isboti. $f(x)$funksiya$[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgani uchun shu kesmada eng katta qiymati *m* ga erishadi.

1 hol. $M = m$ bo‘lsa $[a,b]$ kesmada $f(x)$o‘zgarmas bo‘ladi. Bundan $f'(c)=0$ kelib chiqadi $(a<x<b)$

2 hol. $M\neq m$ bo‘lsa, soddalik uchun $M>0$ deb faraz qilsak, $[a,b]$ kesmada $f(x)$ funksiya uzluksiz bo‘lgani uchun $f(c)$ $(a<c<b)$ bo‘ladi.
Bundan

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(c+\Delta x)-M}{\Delta x}\leq 0 \quad (1)$$

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(c+\Delta x)-M}{\Delta x}\geq 0 \quad (2)$$

(1) va (2) tengliklarni taqqoslab, $f'(c)=0$ni hosil qilamiz. Teorema isbot qilindi.

Misol. $f(x)=\sin x$ funksiya $[0,\pi]$ kesmada uzluksiz, $[0,\pi]$ oraliqda differensiallanuvchi $f(0)=\sin 0=0,\quad f(\pi)=\sin\pi=0.$ Roll teoremasining barcha shartlari bajariladi.
$f'(x)=\cos x=0\Rightarrow x=\pi/2,$demak $0<\pi/2<\pi$ uchun $f'(\pi/2)=\cos(\pi/2)=0$

Logranj teoremasi. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lib, (a,b) oraliqda hech bo‘lmaganda bitta $x=c$ nuqta topiladiki, $(a<x<b)$ bu nuqtada $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

yordamchi funksiyani tuzamiz. Bunda $F(a)=0,\quad F(b)=0$ bo‘lib $F(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va (a,b) oraliqda differsiallanuvchi bo‘ladi.

demak $F(x)$ funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Bunda $F'(c)=0 \ (a<c<b)$ kelib chiqadi. Lekin

$F'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$ bo‘lgani uchun $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ va teorema isbot qilindi.

Misol $f(x)=x^3+3x+5$ funksiya $[-1,1]$ kesmada uzluksiz va uning barcha ichki nuqtalarida differensiallanuvchidir.

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{9-1}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$$f'(x)=3x^2+3=4 \Rightarrow 3x^2=1 \Rightarrow x^2=1/3 \Rightarrow x_1=\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Demak $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\in(-1,1)$

Koshi teoremasi. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lib, (a,b) oraliqda differensiallanuvchi bo‘lsa, bundan tashqari (a,b) oraliqning barcha nuqtalarida $g'(x)\neq 0$ bo‘lsa, u holda shunday $x=c \ (a<c<b)$ nuqta topiladiki, bu nuqtada $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isboti. $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot(g(x)-g(a))$ yordamchi funksiyani tuzamiz. Bunda $F(a)=0$, $F(b)=0$ bo‘ladi.

$F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x)$ bo‘lgani uchun $F(x)$ funksiya (a,b) oraliqda differsiallanuvchi bo‘ladi. Demak $F(x)$ funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Roll teoremasiga binoan shunday $x=c \ (a<c<b)$ nuqta topiladiki, $F'(c)=0$ bo‘ladi. Bunda

$f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0 \Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ va teorema isbotlandi.

Misol. $f(x)=x^3+8,\ g(x)=x^3+x+1$ funksiyalar $[-1,2]$ kesmada uzluksiz va uning barcha ichki nuqtalarida differensiallanuvchi ekanligi ravshan $(a=-1,\ b=2)$

$$\frac{f(2)-f(-1)}{g(2)-g(-1)}=\frac{8+8-(-1)^3-8}{8+2+1-\left[(-1)^3-1+1\right]}=\frac{9}{11+1}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=3x^2+1\neq 0$, $x=1$ nuqtada $\dfrac{f'(1)}{g'(1)}=\dfrac{3\cdot 1}{3\cdot 1+1}=\dfrac{3}{4}$.

Bundan $\dfrac{f(2)-f(-1)}{g(2)-g(-1)}=\dfrac{f'(-1)}{g'(1)};-1<1<2$

2. Aniqmasliklar va ularni ochish. Cheksiz kichik (katta) miqdorlar xossalari o‘rganilganda ularning nisbatlari cheksiz kichik (katta) miqdor bo‘lishi shart emas ekanligi misollar orqali ko‘rsatilgan edi. Funksiya hosilasi yordamida bu nisbatlarning qiymatlarini topish masalasini umumiy holda qarash va uning yechimini berish mumkin.

1-TA’RIF: Agar $x\to a$ (a–chekli yoki cheksiz son) bo‘lganda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar cheksiz kichik miqdorlar, ya’ni

$$\lim_{x\to a} f(x)=0, \quad \lim_{x\to a} g(x)=0$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, ularning $f(x)/g(x)$ nisbati $x\to a$ bo‘lganda **0/0** ***ko‘rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi

Masalan, $x\to 0$ bo‘lganda $\sin x/x$, $x\to 1$ holda $(x^3-1)/(x^2-1)$ va $x\to\infty$ bo‘lgan holda $[\ln(1+1/x)]/(e^{1/x}-1)$ nisbatlar 0/0 ko‘rinishdagi aniqmasliklar bo‘ladi.

2-TA’RIF: Agar $x\to a$ (a–chekli yoki cheksiz son) bo‘lganda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar cheksiz katta miqdorlar bo‘lsa, ya’ni

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, ularning $f(x)/g(x)$ nisbati $x\to a$ bo‘lganda ∞/∞ ***ko‘rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Masalan, $x\to 0$ bo‘lganda $\ln|\sin x|/\ln|x|$, $x\to\infty$ holda $(x+1)^2/(x^2+1)$ nisbatlar ∞/∞ ko‘rinishdagi aniqmaslikdir.

3-TA’RIF:Berilgan 0/0 yoki ∞/∞ko‘rinishdagi $f(x)/g(x)$ aniqmaslikning $x\to a$ bo‘lgandagi limitini topish shu ***aniqmaslikni ochish*** deb ataladi.

Limitlarni hisoblash mavzusi bo‘yicha misollar yechganimizda ayrim aniqmasliklarni ochish masalasi bilan shug‘ullangan edik. Ammo unda har bir aniqmaslikni ochish uchun ko‘paytuvchilarga ajratish, qo‘shmasiga ko‘paytirish, eng katta darajasiga bo‘lish, ajoyib limitlarga keltirish kabi sun’iy usullardan foydalanilgan edi. Shunday qilib, har bir aniqmaslikni ochish uchun o‘ziga xos xususiy usuldan foydalangan edik.

3. Lopitalning I va II qoidasi va ularning tatbiqlari. Endi aniqmasliklarni ochishning umumiy qoidasini ko‘rib chiqamiz. Bu qoidani farang matematigi Fransua Lopital (1661–1704 y.) o‘zining 1696 yilda bosmadan chiqqan «Cheksiz kichik miqdorlar tahlili» nomli kitobida birinchi marta keltirgan va shuning uchun ***Lopital qoidalari*** nomi bilan tarixga kirgan.

1-TEOREMA**(*****Lopitalning I qoidasi*****):**$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqta atrofida aniqlangan, differensiallanuvchi va $g'(x)\neq 0$ bo‘lsin. Bundan tashqari $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x\to a$ shartda cheksiz kichik miqdorlar bo‘lsin, ya’ni

$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \ , \qquad \lim_{x\to a} g(x)=0 \qquad (1)$$

tengliklar bajarilsin. Bu holda, agar $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo‘lsa (chekli yoki cheksiz), unda $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ham mavjud bo‘ladi va ushbu tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (2)$$

Misol sifatida, Lopitalning I qoidasidan foydalanib, bir nechta ajoyib limitlarni isbotlaymiz.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=(\dfrac{0}{0})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=\cos 0=1.$

Bu natija 1 ajoyib limitni ifodalaydi.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}=(\dfrac{0}{0})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\ln(1+ax)]'}{x'}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+ax}\cdot(1+ax)'}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{1+ax}=\frac{a}{1+0}=a.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a}{1}=\frac{a^0\ln a}{1}=\ln a.$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 0}\frac{\left[(1+x)^\alpha-1\right]'}{x'}==\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1}=\alpha\cdot(1+0)^{\alpha-1}=\alpha$$

.

Izoh: Agar 1-teoeremada qo‘shimcha ravishda $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar chekli $x=a$ nuqtada uzluksiz deb shart qo‘ysak, unda (2) tenglikni

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Lopitalning II qoidasi. Endi ∞/∞ ko‘rinishdagi aniqmasliklarni ochish masalasiniqaraymiz.

***2-TEOREMA*(*Lopitalning II qoidasi*):**$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqta atrofida aniqlangan, differensiallanuvchi va $g'(x)\neq 0$ bo‘lsin. Bundan tashqari $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x\to a$ shartda cheksiz katta miqdorlar bo‘lsin, ya’ni

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty,\qquad \lim_{x\to a}g(x)=\infty \qquad (3)$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lsin. Bu holda, agar

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

mavjud bo‘lsa (chekli yoki cheksiz), unda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

ham mavjud bo‘ladi va ushbu tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (4)$$

Lopitalning II qoidasi yordamida ushbu limitlarni hisoblaymiz:

- $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1-x^2)}{\ln(1-x)}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to 1}\frac{[\ln(1-x^2)]'}{[\ln(1-x)]'}=\lim_{x\to 1}\frac{-2x/(1-x^2)}{-1/(1-x)}=$$
  $$=2\lim_{x\to 1}\frac{x(1-x)}{(1-x^2)}=2\lim_{x\to 1}\frac{x(1-x)}{(1-x)(1+x)}=2\lim_{x\to 1}\frac{x}{1+x}=2\cdot\frac{1}{2}=1;$$
- $$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to\infty}\frac{x'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0;$$
- $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{\ln x}=(\alpha>0,\ \frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^\alpha)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1/x}=\alpha\lim_{x\to\infty}x^\alpha=\infty.$$

1-izoh: Yuqoridagi (2) yoki (8) tengliklarda $f'(x)/g'(x)$ nisbat $x\to a$ holda yana 0/0 yoki ∞/∞ ko‘rinishdagi aniqmaslikdan iborat bo‘lib, $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar 1-teorema yoki 2-teorema shartlarini qanoatlantirsin. Bu holda

$$\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

mavjud bo‘lsa, quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}\,. \qquad (5)$$

Shunday qilib, aniqmaslikni ochish uchun Lopital qoidasini bir necha marta ketma-ket qo‘llash mumkin. Buning uchun har gal Lopital qoidasi shartlarini bajarilishini tekshirib ko‘rish kerak.

Misol sifatida quyidagi limitlarni hisoblaymiz:

- $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2};$$

- $$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[(x+1)^2\right]'}{\left(x^2+1\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(x+1)}{2x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+0}{1}=1.$$

2-izoh: Lopital qoidasiga teskari tasdiq doimo ham o‘rinli bo‘lishi shart emas, ya’ni

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

mavjud , ammo

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

mavjud bo‘lmasligi mumkin.

Masalan, $f(x)=x+\sin x$, $g(x)=x$, $x\to\infty$ bo‘lsin. Bu holda

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1+0=1.$$

Ammo bu funksiyalar uchun

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}=1+\lim_{x\to\infty}\cos x$$

va bu limit mavjud emas, chunki $x\to\infty$ holda davriy funksiya bo‘lgan $\cos x$ limitga ega emas.

3-izoh: Lopital qoidasi har doim ham aniqmaslikni ochishga imkon beravermaydi. Masalan, ushbu limitni qaraymiz:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x-1})'}{(\sqrt{x+1})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=(\frac{\infty}{\infty})=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1})'}{(\sqrt{x-1})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=\cdots$$

Bu yerdan ko‘rinadiki berilgan limit, Lopital qoidasi ikki marta qo‘llanilgach, yana o‘ziga qaytib kelmoqda. Demak, bu aniqmaslikni Lopital qoidasi orqali ochib bo‘lmaydi. Holbuki bu limit surat va maxrajni x o‘zgaruvchiga bo‘lish usulida oson hisoblanadi:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-1/x}}{\sqrt{1+1/x}}=\frac{\sqrt{1-0}}{\sqrt{1+0}}=1.$$

4. Turli aniqmasliklarni ochish. Oldinko‘rilganvashartliravishda 0/0 yoki ∞/∞ kabibelgilangananiqmasliklarbilanbirqatordashartliravishda $0\cdot\infty$, 1^{∞}, 0^{0},∞^{0}, , ∞–∞kabibelgilanadigananiqmasliklarhammavjud.

4-TA’RIF: Agar $\lim_{x\to a}f(x)=0,\quad \lim_{x\to a}g(x)=\infty$ bo‘lsa, $f(x)\cdot g(x)$ ko‘paytma $x\to a$ bo‘lganda **0·∞*ko‘rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Masalan, $x\to0$ bo‘lganda $f(x)=x$, $g(x)=\ln|x|$ funksiyalar ko‘paytmasi $f(x)\cdot g(x)=x\ln|x|$ yuqorida ta’riflangan 0·∞ ko‘rinishidagi aniqmaslikdir.

Bunday aniqmasliklarni ochish uchun ularni

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{1/g(x)}\quad \text{yoki}\quad f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{1/f(x)}$$

kabi yozib, 0/0 yoki ∞/∞ ko‘rinishdagi aniqmaslikka keltiriladi va so‘ngra Lopital qoidalaridan foydalaniladi. Masalan,

$$\lim_{x\to0}x\ln|x|=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{1/x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to0}\frac{(\ln|x|)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to0}\frac{1/|x|}{-1/x^2}=-\lim_{x\to0}|x|=0.$$

4-TA’RIF: Agar $\lim_{x\to a}f(x)=1,\ \lim_{x\to a}g(x)=\infty$ bo‘lsa, $f(x)^{g(x)}$ ($f(x)>0$) ifoda $x\to a$ bo‘lganda **1^{∞} *ko‘rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Masalan, $f(x)=1+1/x$, $g(x)=x$ funksiyalar uchun $f(x)^{g(x)}=(1+1/x)^x$ ifoda 1^{∞}ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘ladi. Bunday aniqmasliklarni ochish uchun $u=f(x)^{g(x)}$ deb belgilaymiz va bu tenglikni ikkala tomonidan logarifm olib, $\ln u=\ln f(x)^{g(x)}=g(x)\ln f(x)$ ko‘paytmaga kelamiz. Bunda

$$\lim_{x\to a}g(x)=\infty,\quad \lim_{x\to a}\ln f(x)=\ln1=0$$

bo‘lgani uchun $\ln u=g(x)\ln f(x)$ ko‘paytma 0·∞ ko‘rinishidagi aniqmaslik va uni yuqorida ko‘rsatilgan usulda ochish mumkin. Agar

$$\lim_{x\to a}\ln u=\lim_{x\to a}\{[\ln f(x)]g(x)\}=b$$

bo‘lsa, unda ko‘rsatkichli funksiyalarning uzluksizligidan foydalanib, ushbu natijani olamiz:

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}u=\lim_{x\to a}e^{\ln u}=e^{\lim\limits_{x\to a}\ln u}=e^b. \qquad (6).$$

Misol sifatida $\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e$ II ajoyib limitni isbotlaymiz. Bunda $f(x)=1+1/x$, $g(x)=x$ bo‘lib, $\ln u=g(x)\ln f(x)=x\ln(1+1/x)$ va

$$\lim_{x\to\infty}\ln u=\lim_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{1}{x})=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}=(\frac{0}{0})=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{[\ln(1+1/x)]'}{(1/x)'}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1+1/x}\cdot\frac{(1+1/x)'}{(1/x)'}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1+1/x}\cdot 1\right]=\frac{1}{1+0}=1.$$

Bu yerdan, (10) tenglikka asosan,

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln u}=e^1=e,$$

ya’ni II ajoyib limitga ega bo‘lamiz.

5-TA’RIF: Agar berilgan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun

$$\lim_{x\to a}f(x)=0,\ \lim_{x\to a}g(x)=0\quad \text{yoki}\quad \lim_{x\to a}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to a}g(x)=0$$

bo‘lsa, unda $f(x)^{g(x)}$ ($f(x)>0$) ifoda $x\to a$ bo‘lganda $\mathbf{0^0}$***yoki*** $\mathbf{\infty^0}$ ***ko‘rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Bunday ko‘rinishdagi aniqmasliklarni ochish yuqorida 1^∞ko‘rinishdagi aniqmasliklar uchun ko‘rib o‘tilgan usulda amalga oshiriladi.

Masalan, $f(x)=x$, $g(x)=x$ va $x\to 0+0$ holda $u=f(x)^{g(x)}=x^x$ ifoda 0^0 ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘ladi. Bunda

$$\lim_{x\to 0+0}\ln u=\lim_{x\to 0+0}x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{1/x}=(\frac{\infty}{\infty})=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0+0}x=0$$

va, (10) tenglikka asosan,

$$\lim_{x\to 0+0}x^x=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\ln u}=e^0=1\ .$$

6-TA’RIF: Agar berilgan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty,\qquad \lim_{x\to a}g(x)=\infty$$

bo‘lsa, unda $f(x)–g(x)$ ayirma $x\to a$ bo‘lganda $\infty–\infty$ ***ko‘rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Bunday aniqmasliklarni ochish uchun ularni

$$f(x)–g(x)=f(x)[1–g(x)/f(x)]$$

ko‘rinishda yozamiz. Bunda ikki hol bo‘lishi mumkin.

I. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=A\neq 1$. Bu holda

$$f(x)–g(x)=f(x)[1–g(x)/f(x)]$$

ifodani $x\to a$ bo‘lganda shartli ravishda $(1–A)\cdot\infty$ ko‘rinishda deb qarash mumkin va shu sababli

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\pm\infty.$$

Masalan, $f(x)=x$, $g(x)=\ln x$ va $x\to+\infty$ deb olsak, $f(x)–g(x)=x–\ln x$ ayirma $\infty–\infty$ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘ladi. Bu holda

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0=A\neq 1$$

bo‘lgani uchun

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)=+\infty$$

II. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=A=1$. Bu holda

$$f(x)–g(x)=f(x)[1–g(x)/f(x)]$$

ifoda $x \to a$ bo‘lganda $0 \cdot \infty$ ko‘rinishidagi aniqmaslik bo‘ladi va uni yuqorida ko‘rilgan usulda ochish mumkin..

Masalan, $f(x)=1/\cos x$, $g(x)=\mathrm{tg}x$ va $x \to \pi/2$ deb olsak,

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\cos x}-\mathrm{tg}x$$

ayirma $\infty-\infty$ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘ladi. Bu holda

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}x\cdot\cos x)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$$

bo‘lgani uchun

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{\cos x}-\mathrm{tg}x)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}(1-\cos x\cdot\mathrm{tg}x)=(0\cdot\infty)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)'}{(\cos x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\mathrm{ctg}x=0.$$

5. Teylor va Makloren formulalari. Farazqilaylik $y=f(x)$funksiya $x=a$ nuqtaningbiroratrofida $n+1$gachatartiblihosilalargaegabo‘lsin, ya’ni $n+1$ martadifferensiallanuvchibo‘lsin.Shunday

$$P_n(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+...+c_n(x-a)^n \qquad (1)$$

Ko‘phadni topamizki, uning noma’lum koeffintsientlari

$$P_n(a)=f(a),\ P_n'(a)=f'(a),\ P_n''(a)=f''(a),\ ...,\ P_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a) \qquad (2)$$

tenglikdan topilsin. Bunda

$c_0=f(a),\ c_1=f'(a),\ c_2=\dfrac{f''(a)}{2!},\ c_3=\dfrac{f'''(a)}{3!},\ ...,\ c_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$,tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Koeffisientning topilgan qiymatlarini (1) formulaga qo‘ysak, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$P_n=(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+...+=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (3)$$

$f(x)$ funksiya va $P_n(x)$ ko’pxad ayirmasining $R(x)$ bilan belgilasak, $f(x)-P_n(x)=R_n(x)$ kelib chiqadi. Buni(3) formuladan foydalanib qiyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x) \qquad (4)$$

(4) formula $x=a$ nuqta atrofida $f(x)$ funksiyaning n darajali ko‘pxadga yoyilmasi bo‘lib, **Teylor formulasi** deyiladi. $R_n(x)$**yoyilmasining qoldiq hadi** deyiladi. $R_n(x)$ning turli shakllari mavjuddir. $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ $(0<\theta<1)$ -Logranj shaklidagi **qoldiq hadi** deyiladi. Buni (4) ga qo‘ysak, Teylor formulasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+...$$
$$...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{x+1} \qquad (5)$$

$$0<\theta<1$$

(5) formulada $a=0$ bo'lsa $f(x)$ funksiyaning $x=0$ nuqta atrofidagi yoyilmasi hosil bo'ladi.

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+...$$
$$...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{x+1} \qquad 0<\theta<1 \qquad (6)$$

(6) formula Teylor formulasining hususiy holi bo'lib, **Makloren formulasi** deyiladi.

e^x, $sin\,x$, $cos\,x$ funksiyaning Teylor (Makloren) formulasi bo'yicha yoyilmasi.

$f(x)=e^x$ bo'lsa $f^{(i)}(x)=e^x$ bundan $f^{(i)}(0)=e^0=1;\ i=0,\ 1,2,3,...,n$ $f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta_x}$ Bularni (6) formulaga qo'ysak ,

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+...+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{0x}}{(n+1)!}x^{x+1}, \qquad 0<\theta<1$$

$f(x)=sin\,x$ bo'lsa $f(0)=sin\,0=0,\ f'(x)=cos\,x=sin(x+\pi/2),\ f'(0)=cos\,0=1$

$f''(x)=(cos\,x)'=-sin\,x=sin(x+2\cdot\pi/2),\ f''(0)=sin\,\pi=0$

$f'''(x)=(-sin\,x)'=-cos\,x=sin(x+3\cdot\pi/2),\ f'''(0)=sin(3\pi/2)=-1$

$f^{(n)}\,sin=(x+n\cdot\pi/2),\ f^{(n)}(0)=sin(n\cdot\pi/2);\ f''(\theta x)^{(n+1)}=sin[\theta x+(n+1)\cdot\pi/2]$

Bularni (6) formulaga qo'yib $sin\,x$ ning yoyilmasini hosil qilamiz.

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-...+\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n!}x^n+\frac{\sin\left[\theta x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right]}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1$$

Shunga o'xshash $cos\,x$ ning yoyilmasi quyidagicha bo'ladi:

$$cos\,x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+\frac{x^n}{n!}cos\frac{n\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}cos\left[\theta x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right],\ 0<\theta<1$$

Tayanch iboralar

* 0/0 ko'rinishdagi aniqmaslik * ∞/∞ ko'rinishdagi aniqmaslik * Aniqmasliklarni ochish * Lopitalning I qoidasi * Lopitalning II qoidasi * 0•∞ ko'rinishdagi aniqmaslik * 1^{∞} ko'rinishdagi aniqmaslik * 0^{0} ko'rinishdagi aniqmaslik
* ∞^{0} ko'rinishdagi aniqmaslik * ∞ – ∞ ko'rinishdagi aniqmaslik

Takrorlash uchun savollar

1. 0/0 ko'rinishdagi aniqmaslik ta'rifini bering.
2. ∞/∞ ko'rinishdagi aniqmaslik qanday ta'riflanadi?
3. Aniqmasliklarni ochish deb nimaga aytiladi?
4. Lopitalning I qoidasi qanday ifodalanadi?
5. Lopitalning II qoidasi qanday mazmunga ega?
6. Lopitalning I qoidasi yordamida I ajoyib limit qanday isbotlanadi?
7. Lopital qoidasiga teskari tasdiq har doim o'rinlimi? Misol keltiring.

8. 0/0 va ∞/∞ aniqmasliklardan tashqari yana qanday ko‘rinishdagi aniqmasliklar mavjud?
9. 0·∞ ko‘rinishdagi aniqmaslik qanday ochiladi?
10. II ajoyib limit Lopital qoidasi yordamida qanday isbotlanadi?
11. 1^∞, 0^0 va ∞^0 ko‘rinishdagi aniqmasliklar qanday ochiladi?
12. ∞–∞ ko‘rinishdagi aniqmaslik qanday ochiladi?

Testlardan namunalar

1. Qaysi holda $f(x)/g(x)$ nisbat $x\to a$ bo‘lganda 0/0 ko‘rinishdagi aniqmaslik deyiladi?

A) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$; B) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$; C) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$;

D) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$; E) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq 0,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$.

2. Quyidagilardan qaysi biri $x\to 1$ bo‘lganda 0/0 ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘lmaydi?

A) $\dfrac{x^n-1}{x^m-1},\ n,m\in N, n\neq m$; B) $\dfrac{a^x-a}{x-1}$; C) $\dfrac{\ln x}{\arccos x}$;

D) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$; E) $\dfrac{\sin 3(x-1)}{\cos(x-1)}$.

3. Agarda $f(x)/g(x)$ nisbat $x\to a$ bo‘lganda 0/0 ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘lsa, qaysi tenglik Lopitalning I qoidasini ifodalaydi?

A) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$; B) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g(x)}$;

C) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g'(x)}$; D) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$;

E) to‘g‘ri javob keltirilmagan.

4. $f(x)/g(x)$ nisbat limitini ($x\to a$) hisoblash uchun Lopitalning I qoidasida $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarga quyidagi shartlardan qaysi talab etilmaydi?

A) $f(x)$ va $g(x)$ a nuqtaning biror atrofida differensiallanuvchi;

B) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$; C) $g'(x)\neq 0$;

D) $f(a)=0$, $g(a)=0$; E) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ limit mavjud.

4. Lopitalning I qoidasini isbotlash uchun kimning teoremasidan foydalaniladi?

A) Veyershtrass; B) Roll; C) Lagranj; D) Koshi; E) Ferma.

5. Lopital qoidasidan foydalanib $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{4x}$ limitni hisoblang.

A) $\dfrac{5}{4}$; B) $\dfrac{4}{5}$; C) 0; D) $-\dfrac{5}{4}$; E) ∞.

16-mavzu. Funksiyaning monotonlik, kritik va ekstremum nuqtalari. Funksiya grafigining qavariqligi, botiqligi va burilish nuqtalari, asimptotalari. Funksiyani tekshirishning va grafigini yasashning umumiy sxemasi va uning tadbiqi.

REJA:

1. Funksiyaning monotonlik sharti.
2. Funktsiyaning ekstremumi, ekstremum mavjudligining zaruriy va yetarli shartlari.
3. Funksiyaning global ekstremumlari.
4. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari.
5. Funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik sohalari.
6. Funksiya grafigining burilish nuqtalari.
7. Funksiya grafigining asimptotalari.
8. Funktsiyani to'la tekshirish va grafigini yasashning umumiy sxemasi.

Agar $y=f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lsa, uning juda ko'p xususiyatlarini $f'(x)$ hosila yordamida aniqlash mumkin. Shu sababli hosila funksiyani tekshirish uchun asosiy va kuchli qurol bo'lib hisoblanadi.

1. Funksiyaning monotonlik sharti.

<u>1-TA'RIF:</u> Agarda $y=f(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqda aniqlangan va bu oraliqqa tegishli ixtiyoriy ikkita $x_1<x_2$ nuqtalarda $f(x_1)<f(x_2)$ $[f(x_1)>f(x_2)]$ shartni qanoatlantirsa, u shu oraliqda ***o'suvchi* [*kamayuvchi*]** deb ataladi.

Masalan, $y=2^x$ $[y=(0,2)^x]$ funksiya barcha nuqtalarda, ya'ni $(-\infty , \infty)$ oraliqda o'suvchi [kamayuvchi], $y=1+x^2$ funksiya $(-\infty ,0)$ oraliqda kamayuvchi, $(0,\infty)$ oraliqda esa o'suvchi bo'ladi.

Funksiyaning o'sish va kamayish oraliqlarini birgalikda uning ***monotonlik oraliqlari*** deb ataymiz. Differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaning monotonlik oraliqlarini topish masalasini qaraymiz.

<u>1-TEOREMA:</u> **I.** Differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqda o'suvchi [kamayuvchi] bo'lsa, bu oraliqda uning hosilasi $f'(x)\geq 0$ $[f'(x) \leq 0]$ shartni qanoatlantiradi.

II. Agar differensiallanuvchi bo'lgan $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi biror (a,b) oraliqda $f'(x)>0$ $[f'(x)<0]$ shartni qanoatlantirsa, unda bu (a,b) oraliqda funksiya o'suvchi [kamayuvchi] bo'ladi.

Isbot: I. $y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda o'suvchi va x, $x+\Delta x$ nuqtalar shu oraliqqa tegishli bo'lsin. Agarda $\Delta x>0$ bo'lsa, unda

$$x+\Delta x>x \Rightarrow f(x+\Delta x) >f(x) \Rightarrow \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) >0 \Rightarrow \Delta f/\Delta x>0.$$

Demak, $\Delta x>0 \Rightarrow \Delta f/\Delta x>0$. Xuddi shunday mulohazalardan $\Delta x<0$ holda ham $\Delta f/\Delta x>0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu yerdan, hosila ta'rifi va limit xossasiga asosan,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$$

natijani olamiz. Xuddi shunday usulda kamayuvchi $y=f(x)$ funksiya uchun $f'(x) \leq 0$ ekanligi isbotlanadi.

II. $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi (a,b) oraliqdagi har bir x nuqtada $f'(x)>0$ shartni qanoatlantirsin. Bu holda, chekli orttirmalar haqidagi Lagranj teoremasiga asosan (a,b) oraliqdagi har qanday $x_1<x_2$ nuqtalar uchun

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi),\ x_1<\xi<x_2$$

tenglik bajariladi. Bu tenglikdan, $x_2-x_1>0$ va $f'(\xi)>0$ bo‘lgani uchun,

$$f(x_2)-f(x_1)>0 \Rightarrow f(x_2)>f(x_1),$$

ya’ni $y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda o‘suvchi ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday usulda (a,b) oraliqdagi har bir x nuqtada $f'(x)<0$ bo‘lsa, unda bu oraliqda $y=f(x)$ funksiya kamayuvchi ekanligi ko‘rsatiladi. Teorema to‘liq isbotlandi.

1-izoh: Teoremaning I qismi (a,b) oraliq $y=f(x)$ funksiyaning monotonlik oralig‘i bo‘lishini zaruriy, II qismi esa yetarli shartini ifodalaydi.

2-izoh: Monotonlik oralig‘ining yetarlilik sharti har doim ham uning uchun zaruriy shart bo‘lmaydi. Masalan, $f(x)=e^x$ funksiya $(-\infty,\infty)$ oraliqda o‘suvchi va bu oraliqda uning hosilasi $f'(x)=e^x>0$ shartni qanoatlantiradi. Ammo shu oraliqda o‘suvchi $f(x)=x^3$ funksiyaning hosilasi $f'(x)=3x^2$ bu oraliqdagi $x=0$ nuqtada nolga teng bo‘ladi, ya’ni yetarlilik sharti $f'(x)>0$ bajarilmaydi

Yuqoridagi teoremadan kelib chidadiki, berilgan differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaning o‘sish yoki kamayish oraliqlarini topish uchun $f'(x)>0$ yoki $f'(x)<0$ tengsizlikni yechish kerak.

Masalan, $f(x)=x+1/x$ funksiya uchun $f'(x)=1-1/x^2>0$ tengsizlikning yechimi $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ sohadan iborat va shu sababli bu sohada berilgan funksiya o‘suvchi bo‘ladi. $x=0$ nuqtada funksiya aniqlanmaganligini hisobga olib, bu funksiya $(-1,0)\cup(0,1)$ sohada kamayuvchi ekanligini ko‘ramiz.

2. Funktsiyaning ekstremumi, ekstremum mavjudligining zaruriy va yetarli shartlari.

***2-TA’RIF*:** Agar x_0 nuqtaning shunday atorfi $(x_0-\delta,x_0+\delta)\ (\delta>0)$ mavjud bo’lsaki, shu oraliqdan olingan istalgan $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ uchun $f(x)\le f(x_0)\quad (f(x)\ge f(x_0))$ tengsizlik o’rinli bo’lsa, u holda $f(x)$funksiya x_0 nuqtada lokal maksimumga (lokal minimumga) erishadi deyiladi. Funksiyaning lokal maksimum va lokal minimum nuqtalari funksiyaning lokal ekstremumlari yoki shunchaki funksiya ekstemumlari deb yuritiladi.

Berilgan $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqta va uning biror atrofida aniqlangan bo‘lib, bu atrofdagi ixtiyoriy x nuqta uchun $f(x_0)\ge f(x)$ $[f(x_0)\le f(x)]$ shartni qanoatlantirsa, u shu x_0 nuqtada ***lokal maksimumga (minimumga)*** ega deb ataladi.

Masalan, $f(x)=\sin x$ funksiya $x=\pi/2$ nuqtada $\sin(\pi/2)=1$ lokal maksimumga, $x=3\pi/2$ nuqtada esa $\sin(3\pi/2)=-1$ lokal minimumga ega bo‘ladi.

Funksiyaning lokal maksimum va minimum qiymatlari birgalikda uning ***lokal ekstremumlari*** deyiladi. Lokal ekstremumning zaruriy sharti quyidagi Ferma teoremasi orqali ifodalanadi.

2-TEOREMA:* *(Ferma teoremasi): Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi va lokal ekstremumga ega bo‘lsa, unda bu nuqtada funksiyaning hosilasi $f'(x_0)=0$ shartni qanoatlantiradi.

Isbot: Berilgan $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal maksimumga ega bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda $|\Delta x|$ yetarli kichik bo‘lganda

$$f(x_0+\Delta x)\le f(x_0)\ \Rightarrow\ \Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\le 0$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bundan $\Delta x>0$ $(\Delta x<0)$ bo‘lganda, $\Delta f/\Delta x\le 0$ $(\Delta f/\Delta x\ge 0)$ ekanligi kelib chiqadi . Shu sababli hosila ta’rifi va limit xossasiga asosan ushbu tengsizliklarga ega bo‘lamiz:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\le 0\,,\quad f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\ge 0\,.$$

Teorema shartiga ko‘ra $f'(x_0)$ hosila mavjud bo‘lgani uchun, bu ikkala tengsizlikdan $f'(x_0)=0$ ekanligi kelib chiqadi.

$y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal minimumga ega bo‘lgan hol ham xuddi shunday qaraladi. Teorema isbot bo‘ldi.

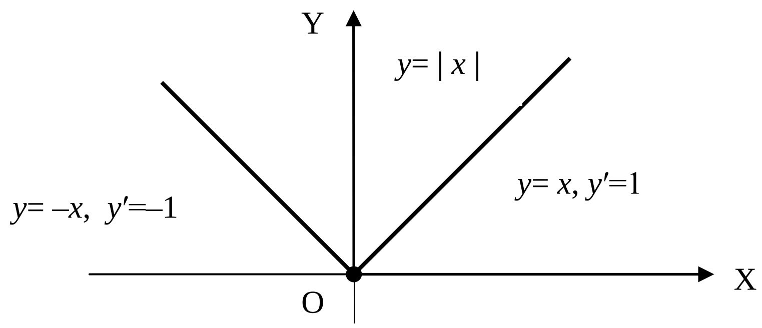
Masalan, $f(x)=\sin x$ funksiya $x_0=\pi/2$ nuqtada lokal maksimumga ega va bu nuqtada uning hosilasi $f'(\pi/2)=\cos(\pi/2)=0$ tenglikni qanoatlantiradi.

Ferma teoremasining bir iqtisodiy talqinini keltiramiz. Ishlab chiqarish nazariyasining asosiy qonunlaridan biri quyidagicha ifodalanadi: ishlab chiqarishda mahsulotning optimal (maqsadga muvofiq, eng qulay) hajmi limitik xarajat MS va limitik daromad MD tengligi bilan aniqlanadi. Demak, mahsulotning x_0 optimal hajmi $\mathrm{MS}(x_0)=\mathrm{MD}(x_0)$ tenglamadan topiladi. Bu tasdiq bevosita Ferma teoremasidan kelib chiqadi. Haqiqatan ham, korxonaning x hajmdagi mahsulot ishlab chiqarishdagi xarajatlari $\mathrm{S}(x)$, daromadi $\mathrm{D}(x)$ bo‘lsa, unda uning olgan foydasi $\mathrm{F}(x)=\mathrm{D}(x)-\mathrm{S}(x)$ funksiya bilan aniqlanadi.Bu holda mahsulotning optimal hajmi x_0 foyda $\mathrm{F}(x)$ maksimal bo‘ladigan nuqta kabi aniqlanadi. Buning uchun, Ferma teoremasiga asosan,

$\mathrm{F}'(x_0)=0 \Rightarrow \mathrm{D}'(x_0)-\mathrm{S}'(x_0)=0 \Rightarrow \mathrm{D}'(x_0)=\mathrm{S}'(x_0) \Rightarrow \mathrm{MS}(x_0)=\mathrm{MD}(x_0)$

tenglik, ya’ni yuqorida keltirilgan iqtisodiy qonun bajarilishi kerak.

Funksiya $f'(x)=0$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalardan boshqa nuqtada ham lokal ekstrmumga ega bo‘lishi mumkin. Masalan, $f(x)=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega, ammo bu nuqtada uning hosilasi mavjud emas.



Xulosa: Funksiya ekstremumga ega bo‘lgan nuqtada uning hosilasi nolga teng yoki mavjud bo‘lmaydi.

3-TA’RIF: Funksiya hosilasi nolga teng yoki mavjud bo‘lmagan nuqtalar shu funksiyaning ***kritik yoki statsionar nuqtalari*** deyiladi.

Demak, funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo‘lsa, x_0 nuqta uning kritik nuqtasi bo‘ladi. Ammo bu tasdiqning teskarisi har doim ham o‘rinli bo‘lmaydi, ya’ni ekstremumning yuqorida ko‘rsatilgan $f'(x_0)=0$ zaruriy sharti yetarli shart emas.

Masalan, $y=x^3$ funksiyaning $f'(x)=3x^2$hosilasi $x=0$ nuqtada nolga teng va shu sababli bi funksiya uchun $x=0$ kritik nuqta bo‘ladi. Ammo bu nuqtada funksiya ekstremumga ega emas, chunki $x<0$ bo‘lganda $f(x)<0=f(0)$ va $x>0$ bo‘lganda $f(x)>0=f(0)$.

***3-TEOREMA*(*lokal ekstremumning I yetarli sharti*)**: Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 kritik nuqtaning biror atrofida differensiallanuvchi bo‘lib, bu kritik nuqtani chapdan ($x<x_0$) o‘ngga ($x>x_0$) qarab bosib o‘tishda $f'(x)$ hosila o‘z ishorasini o‘zgartirsa, u holda x_0 kritik nuqtada $f(x)$ funksiya lokal ekstremumga erishadi. Jumladan, bunda $f'(x)$ hosila o‘z ishorasini musbatdan manfiyga (manfiydan musbatga) o‘zgartirsa, unda x_0 kritik nuqtada $f(x)$ funksiya lokal maksimumiga (lokal minimumiga) erishadi.

Misol sifatida $f(x)=x+1/x$ funksiyani ekstremumga tekshiramiz. Buning uchun dastlab $f'(x)=1-1/x^2$ hosilani topamiz. Bunda $f'(x)=0$ tenglamadan $x_1=-1$ va $x_2=1$ kritik nuqtalarni aniqlaymiz. Bundan tashqari $x=0$ nuqtada $f'(x)$ mavjud emas, ammo bu nuqta funksiyani aniqlanish sohasiga kirmaydi va shu sababli uni ekstremumga tekshirish ma’noga ega emas

Dastlab $x_1=-1$ kritik nuqtani qaraymiz. Bunda $x<-1$ bo‘lganda $f'(x)>0$ va $x>-1$ bo‘lganda $f'(x)<0$ ekanligini ko‘ramiz. Demak, $x_1=-1$ kritik nuqtada funksiya lokal maksimumga ega va $f_{\max}=f(-1)=-2$.

Xuddi shunday ravishda $x_2=1$ kritik nuqtada funksiya lokal minimumga ega va $f_{\min}=f(1)=2$ ekanligini aniqlaymiz.

Endi $f(x)=1+(x-1)^{2/3}$ funksiyani qaraymiz. Bu holda

$$f'(x)=[1+(x-1)^{2/3}]'=\frac{2}{3}(x-1)^{-1/3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

va hosila birorta ham nuqtada nolga teng bo‘lmaydi. Ammo $x=1$nuqtada hosila mavjud emas va bu nuqta funksiyani aniqlanish sohasiga kiradi. Demak, $x=1$ kritik nuqta bo‘ladi. Bunda $x<1$ bo‘lganda $f'(x)<0$ va $x>1$ bo‘lganda $f'(x)>0$. Demak, $x=1$ kritik nuqtada funksiya lokal minimumga ega va $f_{\min}=f(1)=1$ bo‘ladi.

4-TEOREMA: Agar $y=f(x)$ funksiya hosilasi x_0 kritik nuqtaning chap va o‘ng atrofida ishorasini o‘zgartirmasa, bu nuqtada funksiya ekstremumga ega bo‘lmaydi.

Ayrim hollarda kritik nuqta atrofida $f'(x)$ hosilaning ishorasini aniqlash murakkab bo‘ladi. Bunday hollarda, $y=f(x)$ funksiya x_0 kritik nuqtada ikki marta differensiallanuvchi va $f''(x)$ bu nuqtaning biror atrofida uzluksiz bo‘lsa, quyidagi teoremadan foydalanish mumkin.

5-TEOREMA**(*****lokal ekstremumning II yetarli sharti*****):** Agar x_0 kritik nuqtada $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$ va chekli bo‘lsa, unda bu nuqtada $y=f(x)$ funksiya lokal ekstremumga ega bo‘ladi. Jumladan, $f''(x_0)<0$ ($f''(x_0)>0$) bo‘lsa, $f(x_0)$ funksiyaning lokal maksimumi (lokal minimumi) bo‘ladi.

Masala: Fermer bog‘ida n dona olma daraxti bor.Agar hosil hozir yig‘ib olinsa, har bir daraxtdan m kg olma olinib, uni p so‘mdan sotish mumkin. Agar hosilni yig‘ish orqaga surilsa, har haftada bitta daraxtdan olinadigan hosil miqdori r kg oshadi, ammo uning narxi q so‘mdan pasayib boradi. Bunda m, p, r va q musbat sonlardir. Fermer hosilni qachon yig‘ib olganda maksimal foyda ko‘radi ?

Yechish: Hosilni yig‘ib olinguncha o‘tgan haftalar sonini x deb belgilaymiz. Bu holda bog‘dan yig‘ilgan hosil miqdori $n(m+xr)$ kg, uning narxi esa $p-xq$ so‘mga teng bo‘ladi. Unda olmani sotishdan olingan foyda $f(x)=n(m+xr)(p-xq)$funksiya bilan ifodalanadi. Bu funksiyani ekstremumga tekshiramiz. Dastlab uning hosilasini hisoblab, $x_0$kritik nuqtasini topamiz:

$$f'(x)=n(m+xr)'(p-xq)+n(m+xr)(p-xq)'=$$

$$=n[(rp-mq)-2qrx]=0\Rightarrow x_0=\frac{rp-mq}{2qr}\quad .$$

Bu yerda $f''(x)=-2qr<0$ bo‘lgani uchun x_0 kritik nuqtada foyda funksiyasi $f(x)$ maksimumga erishadi va foydaning maksimal qiymati quyidagicha bo‘ladi:

$$f_{\max} = f\left(\frac{rp-mq}{2qr}\right) = \frac{n(rp+mq)^2}{4rq} \ .$$

3. **Funksiyaning global ekstremumlari.** Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Unda, Veyershtrass teoremasiga (VII bob,§4) asosan, funksiya bu kesmadagi qandaydir x_1 va x_2 nuqtalarda o‘zining eng katta va eng kichik

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_1) = M\,, \qquad \min_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_2) = m$$

qiymatlarini qabul etadi. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmadagi biror x_0 nuqtada lokal ekstremumga ega bo‘lsa, unda $f(x)\le f(x_0)$ yoki $f(x)\ge f(x_0)$ tengsizliklardan biri x_0 nuqtaning biror atrofidagi x nuqtalar uchun bajarilib, barcha $x\in[a,b]$ uchun o‘rinli bo‘lmasligi ham mumkin. Shu sababli ular ***lokal (tor doiradagi) ekstremumlar*** deyiladi. Ammo $M=f(x_1)\ge f(x)$, $m=f(x_2)\le f(x)$ tengsizliklar barcha $x\in[a,b]$ uchun o‘rinli bo‘ladi va shu sababli ular mos ravishda $y=f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi global maksimumi (M) va global minimumi (m), birgalikda ***global (keng doiradagi) ekstremumlari*** deyiladi.

Veyershtrass teoremasida kesmada uzluksiz funksiyalar uchun global ekstremumlar mavjudligi tasdiqlanadi, ammo ularni qanday topish masalasi qaralmaydi. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesma ichida differensiallanuvchi bo‘lsa, bu masala quyidagi algoritm asosida hal etiladi:

- Berilgan funksiyaning $f'(x)$ hosilasi hisoblanadi ;
- $f'(x)=0$ tenglamadan $[a,b]$ kesma ichida joylashgan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kritik nuqtalar topiladi;
- Berilgan funksiyaning kritik nuqtalardagi $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ va kesma chegaralaridagi $f(a), f(b)$ qiymatlari hisoblanadi;
- Yuqorida hisoblangan funksiya qiymatlari orasidan eng katta va eng kichigi topiladi. Ular biz izlayotgan m va M global ekstremumlarni ifodalaydi.

Misol sifatida $f(x)=x^4-2x^2+3$ funksiyaning $[-3,2]$ kesmadagi global ekstremumlarini topamiz. Buning uchun dastlab $f'(x)=4x(x^2-1)=0$ tenglamadan $x_1=-1$, $x_2=0$ va $x_3=1$ kritik nuqtalarni topamiz. Ularning uchalasi ham biz qarayotgan $[-3,2]$ kesma ichida joylashgan va shu sababli bu nuqtalarning barchasini qaraymiz. Kritik va chegaraviy nuqtalarda berilgan funksiya qiymatlarini hisoblab,

$$f(-3)=66,\ \ f(-1)=f(1)=2,\ \ f(0)=3,\ f(2)=11$$

natijalarni olamiz. Bu natijalarni taqqoslab, berilgan funksiyaning global ekstremumlari

$$M = \max_{x\in[-3,2]} f(x) = f(-3) = 66\,, \qquad m = \min_{x\in[-3,2]} f(x) = f(\pm 1) = 2$$

ekanligini aniqlaymiz.

4. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari. [a,b] kesmada aniqlangan va uzluksiz bo’lgan *f(x)* funk**s**iyaning shu kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari quyidagicha aniqlanadi.

1. *f(x)* funk**s**iyaning *(a,b)* intervaldagi hamma maksimum va minimum qiymatlari topiladi.
2. *f(a)* va *f(b)* lar hisoblanadi.
3. *f(x)* funk**s**iyaning *[a,b]* dagi barcha maksimum qiymatlari va *f(a),f(b)* larning ichidagi eng kattasi *f(x)* funk**s**iyaning *[a,b]* kesmadagi eng katta qiymati bo’ladi. *f(x)* funk**s**iyaning *[a,b]* dagi barcha minimum qiymatlari va *f(a),f(b)* larning ichidagi eng kichigi *f(x)* funk**s**iyaning *[a,b]* kesmadagi eng kichik qiymati bo’ladi.

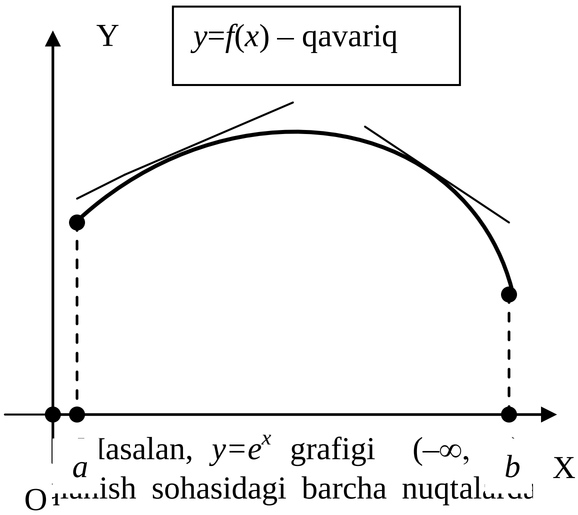
Misol. $y=x^3-3x^2-45x+225$ funk**s**iyaning [0,6] kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatini toping.

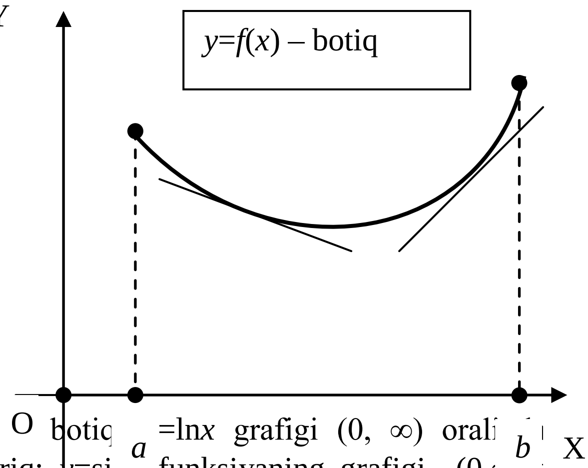
1. $y'=3x^2-6x-45$;
2. $y'=0$ $\quad 3x^2-6x-45=0 \ \Leftrightarrow\ x^2-2x-15=0$, $x_1=-3$; $x_2=5$, $x_1=-3\notin[0,6]$; $\quad x_2=5\in[0,6]$ =0=225; $y(0)=225$; $y(5)=50$; $y(6)=63$.

$y(0)=225$ eng katta qiymati; $y(5)=50$ eng kichik qiymati.

5. Funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik sohalari. Funksiyaning yana bir muhim xususiyatlaridan biri uning qavariqligi va botiqligi bo‘lib hisoblanadi. Bunga misol sifatida fizikaning optika bo‘limida qaraladigan qavariq va botiq linzalarni ko‘rsatish mumkin.

1-TA’RIF: Agar $y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda differensiallanuvchi va uning grafigi bu oraliqdagi har bir $M(x,f(x))$ nuqtada o‘tkazilgan urinmasidan pastda (yuqorida) joylashgan bo‘lsa, u shu oraliqda ***qavariq*** **(*botiq*)**.





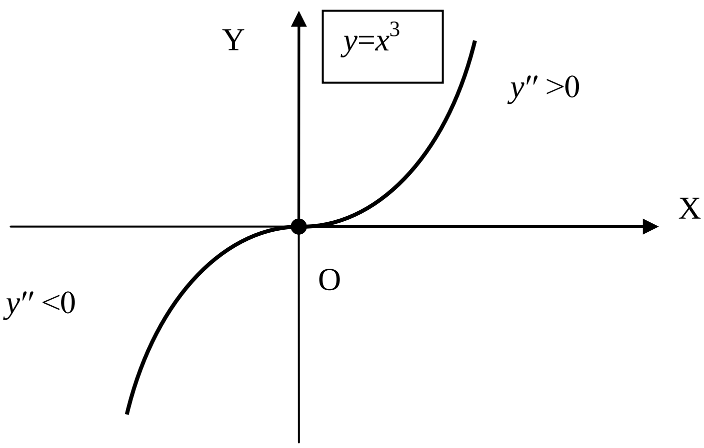
[M]asalan, $y=e^x$ grafigi $(-\infty,$ … botiq … $=\ln x$ grafigi $(0, \infty)$ orali… ni …ish sohasidagi barcha nuqtala… …ariq; $y=\sin x$ funksiyaning grafigi $(0,\pi)$ … da qavariq, $(\pi,2\pi)$ oraliqda esa botiq bo‘ladi.

Umumiy holda $y=f(x)$ funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik sohalari uning II tartibli hosilasi orqali quyidagi teorema yordamida aniqlanadi.

1-TEOREMA: Agar $y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqning har bir nuqtasida ikki marta differensiallanuvchi va barcha $x\in(a, b)$ nuqtalarda $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$) shart bajarilsa, funksiya grafigi bu oraliqda botiq (qavariq) bo‘ladi.

Bu teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Masalan, $f(x)=x^3$ funksiya uchun $f''(x)=6x>0$ tengsizlik yechimi $(0,\infty)$ oraliqdan iborat bo‘ladi va unda bu funksiya grafigi botiq bo‘ladi.Xuddi shunday $f''(x)=6x<0$ tengsizlik yechimi bo‘lgan $(-\infty, 0)$ oraliqda funksiya grafigi qavariq bo‘ladi.



Izohlar: 1. Agar biror (a,b) oraliqning har bir nuqtasida $f''(x)=0$ bo‘lsa, unda $f(x)=Ax+B$ ko‘rinishda va uning grafigi to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘ladi. To‘g‘ri chiziqni qavariq ham, botiq ham deb olish mumkin.

2. II tartibli hosila ta’rifiga asosan $f''(x)=[f'(x)]'$ bo‘lgani uchun, funksiya grafigining botiqlik sohasida $f'(x)$ hosila o‘suvchi (chunki $[f'(x)]'=f''(x)>0$) va qavariqlik sohasida kamayuvchi (chunki $[f'(x)]'=f''(x)<0$) bo‘ladi.

6. Funksiya grafigining burilish nuqtalari. Funksiya xossalarini o‘rganish va ularni tatbiq etishda uning burilish nuqtasi tushunchasi ham muhim ahamiyatga egadir.

2-TA’RIF: Funksiya grafigi biror $M(x_0,f(x_0))$ nuqtadan o‘tayotganda botiqligini qavariqlikka yoki aksincha, qavariqligini botiqlikka o‘zgartirsa, bu nuqta uning ***burilish (egar) nuqtasi*** deyiladi.

Masalan, ko‘rib o‘tilgan $f(x)=x^3$ funksiya uchun koordinatalar boshi O(0,0) burilish nuqtasi bo‘ladi. $F(x)=x^2$ funksiya grafigi paraboladan iborat bo‘lib, u hamma joyda botiq va shu sababli burilish nuqtasiga ega emas. Umumiy holda $y=f(x)$ funksiya grafigining burilish nuqtasi mavjudligi va uni topish masalasini qaraymiz.

2-TEOREMA (Burilish nuqtasi mavjudligining zaruriy sharti): Agar $y=f(x)$ funksiya uchun $M(x_0,f(x_0))$ burilish nuqtasi va x_0 nuqta hamda uning biror atrofida $y=f(x)$ funksiya ikki marta differensiallanuvchi bo‘lsa, unda $f''(x_0)=0$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Funksiya grafigi x_0 nuqta biror atrofining chap tomonida $(x<x_0)$ qavariq, o‘ng tomonida $(x>x_0)$ esa botiq bo‘lsin. Unda, oldingi teoremaga asosan, $x<x_0$ holda $f''(x)<0$, $x>x_0$ holda $f''(x)>0$ bo‘ladi. Bu yerdan, teorema shartiga asosan x_0 nuqtada funksiya ikki marta differensiallanuvchi bo‘lgani uchun, teorema tasdig‘i $f''(x_0)=0$ kelib chiqadi.

Masalan, $f(x)=\sin x$ funksiya uchun $x_0=\pi$ abssissali nuqta burilish nuqtasi va unda $f''(\pi)=-\sin\pi=0$ bo‘ladi.

3-TEOREMA (Burilish nuqtasi mavjudligining yetarli sharti): Agar biror x_0 nuqtada $y=f(x)$ funksiyaning II tartibli hosilasi $f''(x_0)=0$ yoki mavjud bo‘lmasa va bu nuqta biror atrofining chap va o‘ng tomonida $f''(x)$ turli ishorali qiymatlarga ega bo‘lsa, unda $M(x_0, f(x_0))$ funksiya grafigining burilish nuqtasi bo‘ladi.

Isbot: Dastlab $f''(x)<0$, $x<x_0$ va $f''(x)>0$, $x>x_0$ holni ko‘ramiz. Oldin ko‘rilgan 6-teoremaga asosan, x_0 nuqtaning chap tomonida funksiya grafigi qavariq, o‘ng tomonida esa botiq bo‘ladi. Demak, ta’rifga asosan, $M(x_0, f(x_0))$ nuqta $y=f(x)$ funksiya grafigining burilish nuqtasi bo‘ladi.

$f''(x)>0$, $x<x_0$ va $f''(x)<0$, $x>x_0$ hol ham xuddi shunday isbotlanadi.

Misol sifatida $f(x)=x^3-3x^2$ funksiya grafigining burilish nuqtasini topamiz. Bu yerda $f''(x)=6x-6=0$ tenglamadan $x_0=1$ nuqtani topamiz. Bu nuqtani tekshiramiz. Bunda $x<x_0=1$ bo‘lganda $f''(x)<0$ (grafik qavariq) va $x>x_0=1$ bo‘lganda $f''(x)>0$ (grafik botiq) bo‘lgani uchun $M(1,-2)$ funksiya grafigining burilish nuqtasi bo‘ladi.

Izoh: $y=f(x)$ funksiyaning $M(x_0,f(x_0))$ burilish nuqtasida $f''(x_0)$ mavjud bo‘lmasligi ham mumkin. Masalan, $f(x)=x^3$ funksiyaga teskari $g(x)=x^{1/3}$ funksiya uchun O(0,0) burilish nuqtasi bo‘ladi va bu $x_0=0$ nuqtada II tartibli hosila $g''(x)=(-2/9)x^{-5/3}$ mavjud emas.

7. Funksiya grafigining asimptotalari.

3-TA’RIF: Biror $y=kx+b$ tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziq va $y=f(x)$ funksiya grafigi bilan ifodalaydigan egri chiziq uchun

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0 \qquad (1)$$

shart bajarilsa, unda $y=kx+b$ to‘g‘ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining ***og‘ma asimptotasi*** deyiladi.

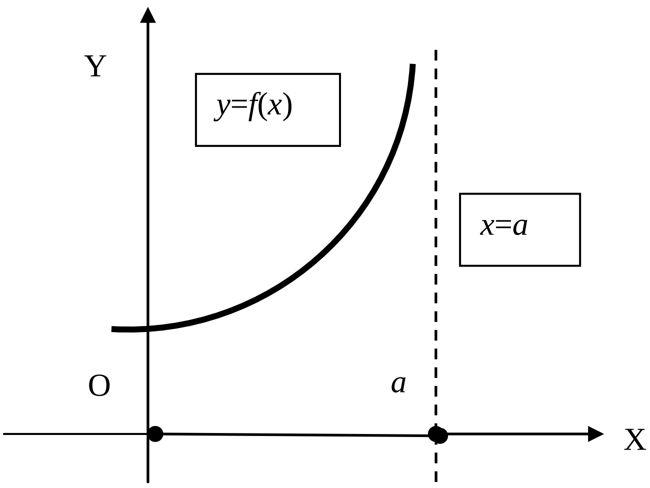
Masalan, $f(x)=x+1/x$ funksiya grafigi uchun $y=x$ to‘g‘ri chiziq og‘ma asimptota bo‘ladi, chunki

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to\infty}[x+\frac{1}{x}-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

<u>4-TA’RIF:</u> Agar biror $x=a$ nuqtada $y=f(x)$ funksiyaning

$$\lim_{x\to a-0} f(x), \quad \lim_{x\to a+0} f(x)$$

chap va o‘ng limitlaridan kamida bittasi cheksiz bo‘lsa, unda $x=a$ tenglamali vertikal to‘g‘ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining ***vertikal asimptotasi*** deyiladi.



Odatda vertikal asimptotalar funksiyaning aniqlanish sohasi bo‘yicha uning uzilish nuqtalari orqali topiladi. Masalan, $f(x)=1/(x^3-1)$ funksiya grafigi uchun $x=1$ to‘g‘ri chiziq vertikal asimptota bo‘ladi.

Funksiyaning og‘ma asimptotalarining mavjudligi va ularning tenglamasi quyidagi teorema bilan aniqlanadi.

<u>4-TEOREMA:</u> Berilgan $y=f(x)$ funksiya grafigi og‘ma asimptotaga ega bo‘lishi uchun

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \qquad \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b \tag{2}$$

limitlarning ikkalasi ham mavjud hamda chekli bo‘lishi zarur va yetarlidir. Bu holda og‘ma asimptota $y=kx+b$ tenglamaga ega bo‘ladi.

Isbot:*Zaruriylik sharti.* Berilgan (2) shartlarni zaruriyligini ko‘rsatamiz. Tenglamasi $y=kx+b$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigi uchun og‘ma asimptota bo‘lsin. Unda, og‘ma asimptota ta’rifini ifodalovchi (1) tenglik va limit xossalariga asosan, quyidagilarni yozish mumkin:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=\lim_{x\to\infty}x[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k-\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0.$$

Bu yerdan, eng so‘nggi limit qiymati nol bo‘lgani uchun,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$$

ekanligi kelib chiqadi. Og‘ma asimptota ta’rifi va limit xossasidan yana bir marta foydalanib,

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]-\lim_{x\to\infty}b=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$$

natijani olamiz.

Yetarlilik sharti. Teoremaning (2) shartidagi ikkinchi limitga asosan

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=0$$

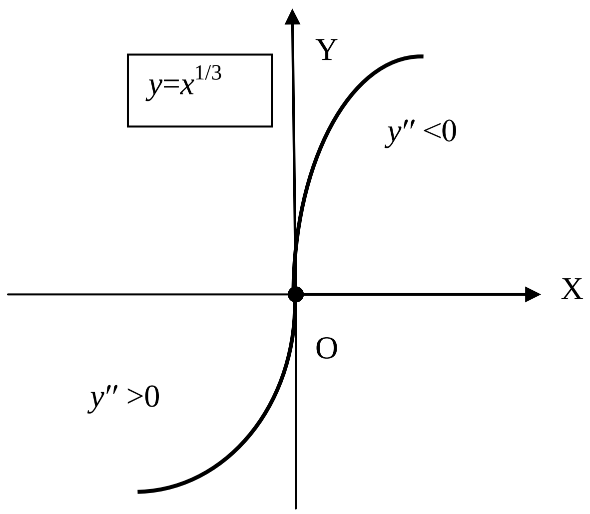
tenglikni yoza olamiz. Bu yerdan, 6-ta’rifga asosan, $y=kx+b$ to‘g‘ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigi uchun og‘ma asimptota bo‘lishi kelib chiqadi.

Masalan, $f(x)=(2x^2+3x–5)/x$ funksiya uchun

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-5}{x^2}=\lim_{x\to\infty}(2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2})=2+0-0=2,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to\infty}[\frac{2x^2+3x-5}{x}-2x]=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-5}{x}=\lim_{x\to\infty}(3-\frac{5}{x})=3$$

ekanligini topamiz. Demak, bu funksiyaning grafigi $y=2x–3$ og‘ma asimptotaga ega bo‘ladi.



Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki, $f''(x_0)=0$ burilish nuqtasi mavjudligini zaruriy sharti har doim ham yetarli emas. Masalan, $f(x)=x^4$ funksiyaning $f''(x)=12x^2$ hosilasi $x_0=0$ nuqtada nolga teng, ammo bu nuqtada funksiya grafigi burilishga ega emas. Haqiqatan ham $x< x_0=0$ va $x> x_0=0$ hollarda $f''(x)=12x^2>0$, ya’ni bu funksiya grafigi barcha nuqtalarda botiq va shu sababli burilish nuqtasiga ega emas. Shuning uchun burilish nuqtasini aniqlashga imkon beradigan yetarli shartni topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu masala quyidagi teoremada o‘z yechimini topadi.

8. Funktsiyani to’la tekshirish va grafigini yasashning umumiy sxemasi.

$y=f(x)$ funksiya xususiyatlarini quyidagi tartibda aniqlash mumkin ;

- ✓ Funksiyaning D{f} aniqlanish sohasini topamiz ;

- ✓ Funksiyaning E{*f*} qiymatlar sohasini topishga harakat qilamiz. Bu sohani to‘g‘ridan-to‘g‘ri topish qiyin bo‘lsa, uni funksiyaning keyingi qadamlarda aniqlanadigan xususiyatlaridan foydalanib aniqlash mumkin ;
- ✓ Funksiyani juft yoki toqlikka tekshiramiz ;
- ✓ Funksiyani davriylikka tekshiramiz va u davriy bo‘lsa, uning davrini aniqlaymiz;
- ✓ Funksiyani uzilish nuqtalari mavjudligini tekshiramiz va ular mavjud bo‘lsa, ularning turini aniqlaymiz ;
- ✓ $f(x)=0$ tenglamadan funksiya nollarini topamiz va ular orqali funksiya o‘z ishorasini o‘zgartirmaydigan oraliqlarni hamda funksiya grafigini OX o‘qi bilan kesishish nuqtalarini aniqlaymiz ;
- ✓ $f'(x)>0$ va $f'(x)<0$ tengsizliklarni yechib, funksiyaning o‘sish va kamayish, ya’ni monotonlik sohalarini aniqlaymiz ;
- ✓ $f'(x)=0$ yoki $f'(x)$ mavjud emas shartlardan funksiyaning kritik nuqtalarni topamiz va bu nuqtalarda funksiyani I yoki II tartibli hosila yordamida ekstremumga tekshiramiz ;
- ✓ $f''(x)>0$ va $f''(x)<0$ tengsizliklarni yechib, funksiya grafigining botiqlik va qavariqlik sohalarini topamiz ;
- ✓ $f''(x)=0$ yoki $f''(x)$ mavjud emas shartlardan foydalanib funksiya grafigining burilish nuqtalarini aniqlaymiz ;
- ✓ Funksiya grafigi asimptotalarini, agarda ular mavjud bo‘lsa, topamiz ;
- ✓ Argument $x\to\pm\infty$ bo‘lganda funksiya limitini tekshiramiz;
- ✓ Oldingi qadamlarda olingan ma’lumotlar asosida funksiya grafigini chizamiz .

Tayanch iboralar

* Funksiyaning o‘sish sohasi * Funksiyaning kamayish sohasi * Funksiyaning monotonlik sohasi * Lokal maksimum * Lokal minimum * Lokal ekstremumlar
* Kritik nuqta * Global ekstremumlar* Botiqlik sohasi * Qavariqlik sohasi * Burilish nuqtasi * Og‘ma asimptota * Vertikal asimptota * gorizontal asimptota

Takrorlash uchun savollar

1. Funksiyaning o‘sish (kamayish) oraliqlari deb nimaga aytiladi?
2. Funksiyaning monotonlik oraliqlari qanday ta’riflanadi?
3. Differensiallanuvchi funksiyaning monotonlik oraliqlari qanday topiladi?
4. Funksiyaning lokal maksimumi (minimumi) deb nimaga aytiladi?
5. Funksiyaning lokal ekstremumlari qanday ta’riflanadi?
6. Ekstremumning zaruriy sharti nimadan iborat va u yetarli shart bo‘ladimi?
7. Kritik nuqta deb nimaga aytiladi?
8. Ekstremumning yetarli sharti I tartibli hosila orqali qanday ifodalanadi?
9. Ekstremumning yetarli sharti II tartibli hosila orqali qanday ifodalanadi?
10. Funksiyaning kesmadagi global ekstremumlari nima va ular qanday topiladi?
11. Funksiya grafigining botiqlik (qavariqlik) sohalari qanday topiladi?
12. Funksiya grafigining burilish nuqtasi nima?
13. Differensiallanuvchi funksiya grafigining burilish nuqtalari qanday topiladi?
14. Funksiya grafigining og‘ma asimptotalari qanday ta’riflanadi?
15. Funksiya grafigining vertikal asimptotalari qanday ta’riflanadi va topiladi?
16. Og‘ma asimptotalar mavjudligining zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat?

Mustaqil ish topshiriqlari

1. $f(x)=x^n e^{nx}$ funksiyaning monotonlik oraliqlarini toping.

2. $f(x) = x^n e^{-nx}$ funksiyani ekstremumga tekshiring .

Testlardan namunalar

1. Ushbu $f(x)=x^3-3x$ funksiyaning kamayish oralig‘ini toping.
A) $(-1;1)$; B) $(0,1)$; C) $(-1,0)$; D) $(-\infty,-1)$; E) $(-2, 2)$.
2. $y=x\ln x$ funksiya o‘sish sohasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?
A $(0, e)$; B) $(-\infty, 1/e)$; C) $(0, \infty)$; D) $(0; 1/e)$; E) $(1/e; \infty)$.
3. $f(x)=x^3-3x$ funksiyaning kritik nuqtalarini toping.
A) $\{-1;1\}$; B) $\{0;1\}$; C) $\{-1;0\}$; D) $\{2;3)$; E)$\{-2;2\}$.
4. $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi x_0 kritik nuqtadan chap va o‘ng tomonda qanday ishoraga ega bo‘lganda $f(x_0)$ lokal maksimum bo‘ladi?
A) musbat, musbat; B) musbat, manfiy; C) manfiy, manfiy;
D) manfiy, musbat; E) qarama-qarshi ishorali.
5. $y=f(x)$ funksiya x_0 kritik nuqtada ikki marta differensiallanuvchi bo‘lsa, qaysi shartda $f(x_0)$ lokal maksimum bo‘ladi?
A) $f''(x_0)>0$; B) $f''(x_0)<0$; C) $f''(x_0)=0$; D) $f''(x_0)\neq0$; E) $|f''(x_0)|\geq1$.
6. $y=(x^4+2x^3-4)/(x^3+1)$ funksiya grafigining og‘ma asimptotasi tenglamasini yozing.
A) $y=x$; B) $y=x+1$; C) $y=x-1$; D) $y=x+2$; E) $y=x-1$.

8-MODUL. KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR NAZARIYASI.

17-mavzu. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohasi, limiti va uzluksizligi. Xususiy hosilalar. To'la differensial. Sirtga o'tkazilgan urinma tekislik va normal tenglamalari. Yuqori tartibli xususiy hosilalar va to'la differensial. Teylor formulasi.

REJA:

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiya haqida tushuncha.
2. Xususiy va to'la orttirma.
3. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning limiti va uzluksizligi.
4. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari.
5. Xususiy differensiallar.
6. Xususiy hosila va xususiy differensialning geometrik ma'nosi.
7. To'la orttirma va to'la differensial.
8. To'la differensialning taqribiy hisoblashga tadbiqi.
9. Xususiy hosilalar.
10. Funksiyani to'la differensiallash.
11. Ikki o'zgaruvchili funksiya uchun Teylor formulasi.

1. Ko'p holatlarda biror miqdor boshqa bir qancha bog'liqmas o'zgaruvchilarga bog'liq bo'ladi. Masalan, uchburchakning yuzi *S* uning asosi *a* va balandligi *h* ning qiymatlariga bog'liq, ya'ni

$$S = \frac{1}{2} a h$$

To'g'ri burchakli parallelepipedning hajmi *V* bir-biriga bog'liq bo'lmagan qirralarning funksiyasidir:

$$V=abc$$

Elektr toki ajratadigan issiqlik miqdori *Q* kuchlanish *E*, tok kuchi *J* va vaqt *t* ning funksiyasidir:

$$Q = 0{,}24JEt$$

Avval ikki o'zgaruvchili funksiyaning ta'rifini keltiramiz.

O'zgaruvchilar *x* va *y* ning har bir juft qiymatiga *Oxy* tekisligida bitta nuqta mos keladi. *Oxy* tekisligida *D*sohaga tegishli bo'lgan nuqtalar to'plamini olamiz.

Ta'rif. Agar o'zgaruvchi miqdorlar *x* va *y* ning *D* sohadan olingan har bir juft qiymatiga boshqa o'zgaruvchi miqdor *z* ning bitta yoki bir nechta qiymatlari mos kelsa, u holda *z* miqdor ***x* va *y* ning funksiyasi** deyiladi.

D sohaning nuqtalar to'plami funksiyaning **aniqlanish sohasi** deyiladi, ya'ni funksiyaning aniqlanish yoki mavjudlik sohasi deb *x* va *y* ning shunday qiymatlari to'plamiga aytiladiki, bu qiymatlarda funksiya *z* aniqlangan bo'lsin. *D* soha *Oxy* tekislikning biror qismidan yoki butun tekislikdan iborat bo'lishi mumkin.

D sohani chegaralab turgan chiziqqa **sohaning chegarasi** deyiladi. Sohaning chegarasida yotmagan nuqtalarga **ichki nuqtalar** deyiladi. Agar soha faqat ichki nuqtalardan tashkil topgan bo'lsa, bunday soha **ochiq soha** deyiladi. Agar sohaga ichki nuqtalardan tashqari uning chegarasida yotgan nuqtalar ham tegishli bo'lsa, u **yopiq soha** deyiladi.

Agar shunday o'zgarmas miqdor *C* mavjud bo'lib, sohaning ixtiyoriy *M* nuqtasidan koordinata boshi *O* gacha bo'lgan masofa $|OM|<C$ bo'lsa, u holda **soha chegaralanmagan** deyiladi. Masalan, $x^2+y^2<r^2$ tengsizlik bilan aniqlangan soha markazi koordinata boshida,

radiusi r bo‘lgan doiraning ichida yotgan nuqtalar to‘plamidan iborat. Sohaga $x^2+y^2=r^2$ aylanada yotgan nuqtalar tegishli emas. Demak, soha ochiq (yopiq emas) sohadir. Agar $x^2+y^2\leq r^2$ bilan aniqlangan sohani qarab chiqsak, u yopiq soha ekanligini ko‘ramiz.

Agar zmiqdor x va y ning funksiyasi bo‘lsa, uni $z=f\left(x,y\right)$ kabi belgilaymiz. Bu yerda x va y - bog‘liqmas o‘zgaruvchilar yoki o’zgaruvchilar, **z – bog‘liq o‘zgaruvchi yoki funksiya** deyiladi. Funksional bog‘lanishdagi f harfi (uning o‘rniga ixtiyoriy boshqa harf bo‘lishi mumkin) z ning mos qiymatini topish uchun x va y qiymatlari ustida bajarilishi lozim bo‘lgan amallar to‘plamini bildiradi.

Agar x va y ning har bir juft qiymati uchun funksiya z ning bitta qiymati mos kelsa funksiya bir qiymatli, ko‘p qiymatlari mos kelsa **ko‘p qiymatli** deyiladi.

Ikki o‘zgaruvchili funksiya bir o‘zgaruvchili funksiya kabi jadval yordamida, analitik va grafik ko‘rinishda berilishi mumkin.

Agar o‘zgaruvchilarning ma’lum qiymatlari uchun funksiyaning mos qiymatlari jadval yordamida berilsa bu funksiyani jadval ko‘rinishida berilishiga misol bo‘ladi.

Analitik usulda funksional bog‘lanish formula yordamida beriladi, masalan:

$$z=x^2-xy+y^3,\qquad z=\frac{tg\left(x+y\right)}{x^2+y^2}$$

Analitik usulda berilgan funksiya uchun aniqlanish sohasi (qo‘shimcha shartlar bo‘lmasa) x va y ning z mavjud bo‘ladigan qiymatlari bo‘ladi. Masalan, $z=ln\left(x^2+y^2-r^2\right)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $x^2+y^2>r^2$, ya’ni doiradan tashqaridagi nuqtalardan iborat.

To‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi $S=xy$. Bu funksiyaning tabiiy aniqlanish sohasi $x>0$ va $y>0$ (to‘rtburchakning tomonlari manfiy va nolga teng bo‘lmasligi sababli). Bu funksiyaning tabiiy aniqlanish sohasi esa butun tekislik nuqtalaridan iborat.

Ikki o‘zgaruvchili funksiya grafigi deb abssissa va ordinatasi o‘zgaruvchilar x va y ning qiymatlari, applikatasi esa funksiya z ning mos qiymatlaridan iborat bo‘lgan nuqtalar to‘plamiga aytiladi. Bunday grafik biror sirt bo‘ladi.

Masalan, $x^2+y^2+z^2=r^2,\quad z>0$ funksiyaning grafigi markazi koordinat boshida, radiusi $r$bo‘lgan sferaning OXY tekisligidan yuqori qismidan iborat, $z=2+x$ funksiyaning grafigi OY o‘qiga parallel bo‘lgan tekislikdan iborat.

Ikki o‘zgaruvchili funksiya oshkormas ko‘rinishda, ya’ni $f\left(x,y,z\right)=0$ ko’rinishda berilishi mumkin.

Endi ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning ta’rifini keltiramiz.

<u>**Ta’rif.**</u> Agar o‘zgaruvchi *x, y, z, ..., t* miqdorlarining har bir qiymatlari to‘plamiga o‘zgaruvchi U ning bitta yoki bir nechta qiymatlari mos kelsa, u holda U miqdor ***x, y, z, ..., t*** **funksiyasi** deyiladi va

$$u=f\left(x,y,z,...,t\right)$$

kabi belgilanadi.

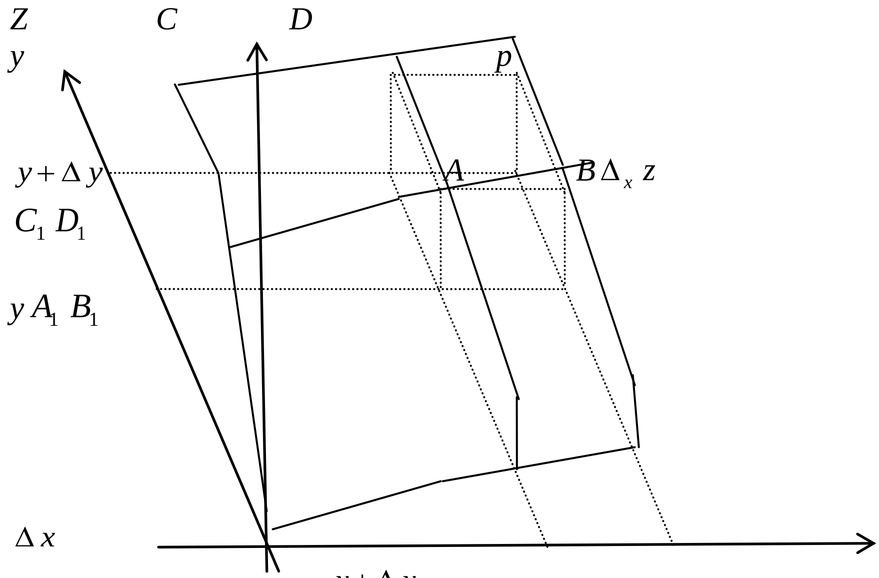
Agar funksiya oshkormas ko’rinishda berilgan bo’lsa,

$$F\left(x,y,z,...,t,u\right)=0$$

kabi belgilanadi.

Ikki o‘zgaruvchili funksiya uchun o‘rinli bo‘lgan hamma ta’riflar, ko‘p o‘zgaruvchili funksiya uchun ham o’rinlidir. Uch va undan ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarning grafigini koordinatalar sistemasida tasvirlab bo‘lmaydi. Uch o‘zgaruvchili $u=f\left(x,y,z\right)$ funksiyaning aniqlanish sohasi uch o‘lchovli fazoning biror qismidan yoki butun fazodan iborat bo‘ladi. To‘rt va undan ortiq o‘zgaruvchili funksiyaning aniqlanish sohasini ham tasvirlab bo‘lmaydi.

2. $z=f\left(x,y\right)$ sirtni $y=y_0=const$ tekislik bilan kesamiz. Kesma AB chiziq hosil bo‘ladi. AB chiziq bo‘ylab z faqat x o‘zgarishi bilan o‘zgaradi.



Bog‘liqmas o‘zgaruvchi *x* ga Δx orttirma beramiz. U funksiya *z* ham orttirma qabul qiladi. Uni *x* ga nisbatan xususiy orttirma deymiz va $\Delta_x z$ bilan belgilaymiz (chizma *EB*). $EB = B_1B - A_1A$, ya’ni

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y) \qquad (1)$$

Shunga o‘xshash, agar $z = f(x, y)$ sirtni $x = x_0 = const$ tekislik bilan kesishadi, kesimda *AC* chiziq hosil bo‘ladi.

Bu chiziq bo‘ylab *z* faqat *y* ga nisbatan o‘zgaradi. *y* ga Δy orttirma bersak, funksiya *z* orttirma $\Delta_y z$ ni qabul qiladi (chizmada *FC*). Bu *y* ga nisbatan **xususiy orttirma** deyiladi.

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y) \qquad (2)$$

Endi *x* ga Δx va *y* ga Δy orttirmani bersak funksiya z Δz orttirmani qabul qiladiki, u funksiyaning to‘la orttirmasi deyiladi (chizmada *PD*).

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x, y) \qquad (3)$$

Umuman olganda $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$

Misol. $z = x^2 y$

$$\Delta_x z = (x+\Delta x)^2 y - x^2 y = (2x\Delta x + \Delta x^2)y$$

$$\Delta_y z = x^2(y+\Delta y) - x^2 y = x^2\Delta y$$

$$\Delta z = (x+\Delta x)^2(y+\Delta y) - x^2 y = (2x\Delta x + \Delta x^2)y + (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2)\Delta y$$

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning xususiy va to‘la orttirmalari shunga o‘xshash aniqlanadi.

3. <u>1-ta’rif</u>. $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning ***r*** **radiusli atrofi** deb markazi M_0 nuqtada radiusi *r* bo‘lgan doira ichida yotgan $M(x, y)$ nuqtalar to‘plami ya’ni $|M_0M| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$ tengsizlikni qanoatlantiradigan nuqtalar to‘plamiga aytiladi.

<u>2-ta’rif.</u> Agar har qanday kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $r > 0$ son mavjud bo‘lsaki, $|M_0M| < r$ shart bajarilganda $M(x, y)$ nuqtalar uchun $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ shart bajarilsa, u holda *A* son $z = f(x, y)$ funksiyani $M_0(x_0, y_0)$ **nuqtadagi limiti** deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$

Ta'rifga ko'ra $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada funksiyaning aniqlangan bo'lishi talab qilinmaydi, shuning uchun biz $x \neq x_0$ yoki $y \neq y_0$ deb qabul qilamiz.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning limiti ham shunga o'xshash ta'riflanadi.

Bir o'zgaruvchili funksiyaning limitiga doir bo'lgan teoremalar ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham o'rinlidir.

3-ta'rif. Faraz qilamiz, (x_0, y_0) nuqta $z = f(x, y)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli. Agar $z = f(x, y)$ funksiya uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'lsa,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

u holda $z = f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada **uzluksiz** deyiladi.

Oxirgi tenglik shuni anglatadiki, agar funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, uning limiti shu nuqtadagi qiymatiga teng.

4-ta'rif. Agar funksiya biror sohaning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, funksiya shu sohada **uzluksiz** deyiladi.

Agar biror $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada uzluksizlik sharti bajarilmasa, M_0 nuqta **uzilish nuqtasi** deyiladi, bu quyidagi holatlarda bo'lishi mumkin:

1) $z = f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan, lekin M_0 nuqtada aniqlanmagan;

2) $z = f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning biror atrofining hamma nuqtalarida aniqlangan, lekin $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ mavjud emas;

3) $z = f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqta atrofining hamma nuqtalarida aniqlangan va $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ mavjud, lekin $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$.

Misollar.

1. $z = xy$ funksiya OXY tekislikning hamma nuqtalarida uzluksiz, demak uzilish nuqtasi yo'q.
2. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ funksiya 0(0,0) nuqtada uzilishga ega.
3. $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$ funksiyaning uzilish nuqtalari $y=x$ va $y=-x$ to'g'ri chiziqlardan iborat.
4. $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ funksiya uchun 0(0,0) nuqta uzilish nuqtasidir.

4. $z = f(x, y)$ tenglikda y ni o'zgarmas deb olib va bunday funksiyaning x ga nisbatan bir o'zgaruvchili funksiyasi differensiallanuvchi deb faraz qilamiz.

Ta'rif. $z = f(x, y)$ funksiyani x ga nisbatan xususiy orttirmasi $\Delta_x z$ ni Δx ga nisbati $\Delta x \to 0$ dagi limitiga (mavjud bo'lsa) ikki o'zgaruvchili funksiyaning x bo'yicha xususiy hosilasi deymiz va z'_x yoki $f'_x(x, y)$ yoki $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ yoki $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ kabi belgilaymiz, ya'ni

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Shunga o'xshash $z = f(x, y)$ funksiyadan y ga nisbatan xususiy hosila topiladi.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

Boshqacha qilib aytganda, $z=f(x,y)$ funksiyadan x ga nisbatan xususiy hosila deb shu funksiyadan y ni o'zgarmas deb x ga nisbatan topilgan hosilaga aytiladi. Shunga o'xshash, $z=f(x,y)$ funksiyadan y ga nisbatan xususiy hosila deb shu funksiyada x ni o'zgarmas deb olib va y ga nisbatan topilgan hosilaga aytamiz.

Bu ta'rifdan shu narsa ayon bo'ladiki, xususiy hosilalarni topish qoidasi bir o'zgaruvchili funksiyadan hosila topish qoidasi bilan ustma-ust tushadi, shuning uchun bir o'zgaruvchili funksiyaning hosilasini topish uchun formulalar bu yerda ham o'z kuchida qoladi. Shuni qayd qilamizki ikki o'zgaruvchili funksiyadan faqat xususiy hosila topish paytida boshqa o'zgaruvchi o'zgarmas deb faraz qilinadi va boshqa paytda esa, $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ lar ikki o'zgaruvchili funksiyalardir.

1-misol. $z=x^2\cos(xy)$dan xususiy hosilalar topilsin.

Yechish. $z'_x=2x\cos(xy)-x^2y\sin(xy)$ $\quad z'_y=-x^3\sin(xy)$

Uch va undan ko'p o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari shunga o'xshash topiladi, masalan, to'rt o'zgaruvchili $u=f(x,y,z,t)$ funksiyaning xususiy hosilalari

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z,t)-f(x,y,z,t)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,z,t)-f(x,y,z,t)}{\Delta y}$$

va hokazo kabi aniqlanadi.

2-misol. $u=x^2+y^2-zt^3$ $u'_x=2x;$ $\quad u'_y=2y;$ $\quad u'_z=-t^3;$ $\quad u'_1=-3zt^2\cdot x$

5. Xususiy hosila ta'rifidan. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=z'_x$. Bundan $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=z'_x+\alpha$ bu yerda $\alpha\to 0$ agar $\Delta x\to 0$ bo'lsa. Oxirgi tenglikdan $\Delta_x z=z'_x\,\Delta x+\alpha\,\Delta x$ ni hosil qilamiz. Shunday qilib, xususiy orttirmani ikkita qo'shiluvchi yig'indisi shaklida tasvirladik. Ikkinchi qo'shiluvchi $\alpha\,\Delta x$ $\Delta x\to 0$ holda yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor. Birinchi qo'shiluvchi $z'_x\,\Delta x$ esa Δx ga nisbatan chiziqli ifoda bo'lib, xususiy orttirmaning bosh qismini tashkil qiladi.

Ta'rif. $z=f(x,y)$ funksiyaning x ga nisbatan **xususiy differensiali** deb, x ga nisbatan xususiy orttirmaning bosh qismiga aytiladi va $d_x z$ bilan belgilanadi, ya'ni $d_x z=z'_x\,\Delta x$.

Bog'liqmas o'zgaruvchining orttirmasi uning differensialiga teng:
$\Delta x=dx,\ \Delta y=dy$ shuning uchun $d_x z=z'_x\,dx$.

Shunga o'xshash y ga nisbatan xususiy differensial topiladi.

$$d_y z=\frac{\partial z}{\partial y}\partial y$$

Xususiy differensiallardan $\frac{d_x z}{dx}=z'_x,\ \frac{d_y z}{dy}=z'_y$ ni topamiz, ya'ni xususiy hosila differensialni mos o'zgaruvchi differensiali nisbatiga teng.

Xususiy differensial ifodasidan ko'rinadiki, uni topish uchun xususiy hosilani o'zgaruvchi differensialiga ko'paytirish yetarlidir.

Misol. $z=\sin\left(x^2+y^2\right)$

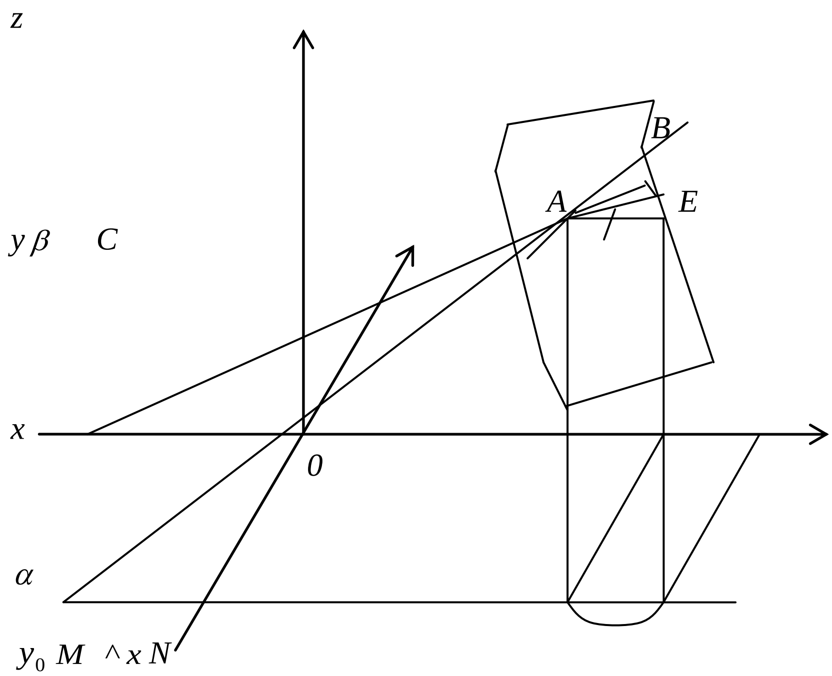
$d_x z=2x\cos\left(x^2+y^2\right)dx;$ $\quad d_y z=2y\cos\left(x^2+y^2\right)dy$.

Uch va undan ko‘p o‘zgaruvchili funksiyadan xususiy differensiallarni topish ko‘rib chiqilganga o‘xshashdir.

Misol. $u = z\sin(x\,y)$

$d_x\,u = y\,z\cos(x\,y)d\,x;\quad d_y\,u = x\,z\cos(x\,y)d\,x;\quad d_z\,u = \sin(x\,y)d\,z$

6. Xususiy hosilalar z'_x va z'_y ning absolyut qiymatlari funksiyani mos ravishda *x* ga va *y* ga nisbatan o‘zgarish tezligining miqdorini bildiradi, ularning ishoralari esa bu o‘zgarishning xarakterini (o‘sish yoki kamayish) bildiradi.



$y = y_0 = const$ tekislik bilan $f(x, y)$ tekislikni kesamiz. Kesimda *AE* chiziq hosil bo‘ladi. Tekislikdagi $M(x, y_0)$nuqtaga sirtdagi $A(x, y_0, z)$ nuqta to‘g‘ri keladi. *x* ga $\Delta\,x$ orttirma beramiz, u holda tekislikdagi $N(x + \Delta\,x, y_0)$ nuqtaga sirtda $E(x + \Delta\,x, y_0, z + \Delta\,z)$nuqta mos keladi va funksiya $\Delta_x\,z = C\,E$ orttirmani qabul qiladi. $\dfrac{\Delta_x\,z}{\Delta\,x}$ nisbat*AE* kesuvchini *OX* o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagining tangensiga teng, ya’ni $\dfrac{\Delta_x\,z}{\Delta\,x} = tg\,\beta$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x\,z}{\Delta\,x} = \frac{\partial\,z}{\partial\,x} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} tg\,\beta = tg\,\alpha$$

shuning uchun $\dfrac{\partial\,z}{\partial\,x} = tg\,\alpha$, ya’ni $\dfrac{\partial\,z}{\partial\,x}$ xususiy hosila sirtni $y = y_0$ tekislik bilan kesishda hosil bo‘lgan chiziqqa o‘tkazilgan urinmani *OX* o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagining tangensiga teng.

Xususiy differensial d_x^z ga urinma nuqtasi applikatasining orttirmasini (chizmada *EB*) bildiradi. Shunga o‘xshash xususiy hosila z'_y va xususiy differensial d_x^z ga ham geometrik ma’no beriladi.

7. Ma’lumki $f(x, y)$ funksiyaning to‘la orttirmasi

$$\Delta z = f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x, y\right) \tag{4}$$

ko‘rinishga ega. Faraz qilaylik, funksiya qaralayotgan nuqta *M*(*x*, *y*)da uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo‘lsin. (1) ifodaning o‘ng tomoniga $f\left(x, y+\Delta y\right)$ni qo‘shamiz va ayiramiz:

$$\Delta z = \left| f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x, y+\Delta y\right)\right| + \left| f\left(x, y+\Delta y\right) - f\left(x, y\right)\right| \tag{5}$$

Bu ifodaning o‘ng tomonidagi birinchi o‘rta qavs ichidagi ifoda bir o’zgaruvchili funksiyaning ikki qiymatining ayirmasidan iborat (ikkinchi o’zgaruvchi o‘zgarmasdir). Bu ifodaga Lagranj teoremasini qo‘llab topamiz:

$$f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x, y+\Delta y\right) = \frac{\partial f\left(\bar{x}, y\right)}{\partial x}\Delta x \tag{6}$$

Bu yerda $\bar{x}$ x bilan $x+\Delta x$ orasida joylashgan. (5) ifoda o‘ng tomonidagi ikkinchi o‘rta qavsdagi ifoda *y* ga nisbatan bir o‘zgaruvchi (*x* ga nisbatan o‘zgarmaydi) funksiyaning ikkita qiymatlarining ayirmasidan iborat. Unga ham Lagranj teoremasini qo‘llaymiz:

$$f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x, y\right) = \frac{\partial f\left(x, \bar{y}\right)}{\partial y}\Delta y \tag{7}$$

u yerda $\bar{y}$, y va $y+\Delta y$ lar orasida joylashgan. (6) va (7) ifodalarni (5) ga qo‘ysak:

$$\Delta z = \frac{\partial f\left(\bar{x}, y+\Delta y\right)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f\left(x, \bar{y}\right)}{\partial y}\Delta y \tag{8}$$

Ma’lumki:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\partial f\left(\bar{x}, y+\Delta y\right)}{\partial x} = \dfrac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x} \\ \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\partial f\left(x, \bar{y}\right)}{\partial y} = \dfrac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial y} \end{cases} \tag{9}$$

Chunki $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ bo‘lganda $\bar{x}\to x$, $\bar{y}\to y$ bo‘ladi. (9) tengliklarni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f\left(\bar{x}, y+\Delta y\right)}{\partial x} = \dfrac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x} + \alpha_1 \\ \dfrac{\partial f\left(x, \bar{y}\right)}{\partial y} = \dfrac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial y} + \alpha_2 \end{cases}$$

(10)

Bu yerda $\alpha_1\to 0$, $\alpha_2\to 0$, agar $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ bo‘lsa, ya’ni, agar $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$ bo‘lsa, (10) ni (8) ga qo‘yib topamiz:

$$\Delta z = \frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y \tag{11}$$

Oxirgi tenglikda o‘ng tomondagi ikkita oxirgi qo‘shiluvchilarning yig‘indisi Δr ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdordir. Haqiqatda

$$\frac{\alpha_1\Delta x}{\Delta r}\to 0,\ \frac{\alpha_2\Delta y}{\Delta r}\to 0,\ \text{agar } \Delta r\to 0 \text{ bo‘lsa}$$

(11) ifodada o‘ng tomondagi ikkita oldingi hadlarning yig‘indisi Δx va Δy ga nisbatan chiziqli ifodadir. Bu yig‘indi $f'_x\left(x, y\right)\neq 0$ va $f'_y\left(x, y\right)\neq 0$ bo‘lganda to‘la orttirmaning bosh qismini beradi va Δz yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor bilan farq qiladi.

<u>Ta'rif.</u> Ikki o'zgaruvchili funksiyaning **to'la differensiali** deb, to'la orttirmasining Δx va Δy ga nisbatan chiziqli bo'lgan bosh qismiga aytiladi va dz yoki df bilan belgilanadi:

$$dz=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y \qquad (12)$$

Bog'liqmas o'zgaruvchilarning orttirmalari Δx va Δy ularning differensiali deyiladi va *dx* va *dy* bilan belgilanadi. U holda to'la differensial

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (13)$$

ko'rinishni oladi, bu yerda $dx=\Delta x$ va $dy=\Delta y$

Shunday qilib, agar $z=f(x,y)$ funksiya uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsa, u holda u differensiallanuvchi bo'lib, to'la differensial (13) formula bilan topiladi.

Misol. $z=xy$ funksiyaning to'la differensiali va to'la orttirmasi (2,1) nuqtada $\Delta x=0{,}2$ va $\Delta y=0{,}1$ bo'lganda topilsin.

$dz=ydx+xdy=y\Delta x+x\Delta y$

$\Delta z=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y$

$dz=1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}1=0{,}4$

$\Delta z=1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}1+0{,}1\cdot 0{,}2=0{,}42$

O'zgaruvchilarning soni ko'p bo'lgan holatda ham to'la differensial shunga o'xshash topiladi. Masalan, $u=f(x,y,z,...,t)$ bo'lsa

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+...+\frac{\partial f}{\partial t}dt$$

bo'ladi.

Misol. $u=x^2y+\cos 2z$ bo'lsa, $du=2xydx+x^2dy-2\sin z\,dz$ bo'ladi.

8. Oldingi mavzudan $\Delta z\approx dz$ yoki

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\approx\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

kelib chiqib, bundan

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y \qquad (14)$$

taqribiy formulani hosil qilamiz. Bu formula taqribiy hisoblashda qo'llaniladi. Agar $x_0+\Delta x=x,\quad y_0+\Delta y=y$ desak, (4) ni

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) \qquad (15)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Misol. Agar to'g'ri burchakli uchburchakda o'tkir burchak α va gipotenuza *c* o'zgaruvchan bo'lsa, katetlar ular orqali $a=c\sin\alpha,\quad b=c\cos\alpha$ kabi ifodalanadi.

$c+\Delta c,\ \alpha+\Delta\alpha$ bo'lganda, katetlar a_1,b_1 ni topamiz:

$a_1\approx a+da,\quad b_1\approx b+db$ yoki

$a_1\approx a+\sin\alpha\Delta c+c\cos\alpha\Delta\alpha,\ b_1\approx b+\cos\alpha\Delta c-c\sin\alpha\Delta\alpha$.

Shu jumladan, $c=2,\quad \alpha=30^0,\quad c_1=2{,}1,\quad \alpha_1=31^0$ bo'lganda

$$a_1=2\cdot\sin 30^0+\sin 30^0\cdot 0{,}1+2\cdot\cos 30^0\cdot\frac{\pi}{180}\approx 1{,}080$$

$$b_1=2\cdot\cos 30^0+\cos 30^0\cdot 0{,}1-2\cdot\sin 30^0\cdot\frac{\pi}{180}\approx 1{,}801$$

Hisoblashda yo‘l qo‘yilgan xatolikni baholashga differensialning tadbiqi.

Faraz qilaylik, x, y ning qiymatlarini aniqlashda Δx va Δy xatolikka yo‘l qo‘yilgan bo‘lsin. U holda $z=f(x,y)$ ni qiymatini hisoblashda yo‘l qo‘yilgan xato $\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)$ bo‘ladi. Bu xatolikni baholaymiz. Δx, Δy absolyut qiymatlari bo‘yicha yetarli darajada kichik bo‘lganda to‘la orttirmani to‘la differensial bilan almashtirish mumkin:

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

Bundan

$$|\Delta z| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \cdot |\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot |\Delta y| \qquad (16)$$

hosil bo‘ladi. Agar $|\Delta^* x|$ va $|\Delta^* y|$ orqali Δx va Δy ning absolyut qiymatlarining eng kattasini belgilasak, u holda

$$|\Delta^* z| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \cdot |\Delta^* x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot |\Delta^* y| \qquad (17)$$

deb qabul qilish mumkin.

Misol. To‘g‘ri burchakli uchburchakda gipotenuza c va katet a ning qiymatlari $c=75$, $a=32$ maksimal absolyut xato $|\Delta^* c|=0,2;$ $|\Delta^* a|=0,1$ bilan aniqlangan. a katet qarshisidagi burchak α ni $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ formula bilan va yo‘l qo‘yilgan maksimal absolyut xatoni aniqlang.

Yechish. $\sin\alpha=\frac{a}{c};\quad \alpha=\arcsin\frac{a}{c}$ bundan

$$\frac{\partial\alpha}{\partial a}=\frac{1}{\sqrt{c^2-a^2}};\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial c}=-\frac{a}{c\sqrt{c^2-a^2}}$$

(17) formuladan foydalanamiz:

$$|\Delta\alpha|=\frac{0,1}{\sqrt{75^2-32^2}}+\frac{32\cdot 0,2}{75\sqrt{75^2-32^2}}=0,00275\,radian=9^0\,38'$$

Shunday qilib, $\alpha=arcsin\frac{32}{75}=9^0\,38'$.

Maksimal nisbiy xatoni baholash uchun (2) ning ikkala tomonini funksiya taqribiy qiymatining moduli $|z|=|f(x,y)|$ ga bo‘lamiz:

$$\frac{|\Delta^* z|}{|z|}=\frac{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|}{|z|}\cdot|\Delta^* x|+\frac{\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|}{|z|}\cdot|\Delta^* y|$$

Bundan $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f}=\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{z}=\dfrac{\partial}{\partial x}\ln|f|;\quad \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f}=\dfrac{\partial}{\partial y}\ln|f|$ ni hisobga olib topamiz:

$$|\delta^* z|=\frac{|\Delta^* z|}{|z|}=\left|\frac{\partial}{\partial x}\ln|f|\right|\cdot|\Delta^* x|+\left|\frac{\partial}{\partial y}\ln|f|\right|\cdot|\Delta^* y| \qquad (18)$$

yoki qisqacha

$$|\delta^* z| = |\Delta^* \ln|z|| \qquad (19)$$

(18) formuladan funksiyaning maksimal nisbiy xatosi bu funksiya logarifmining maksimal absolyut xatosiga tengligi kelib chiqadi.

9. Faraz qilaylik, $z = f(x,y)$ funksiya xususiy hosilalar $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_y(x,y)$ga ega bo‘lsin.

Bu hosilalar o‘zgaruvchi x va y ning funksiyalaridir, shuning uchun ulardan xususiy hosilalarni topish mumkin.Birinchi tartibli xususiy hosilalardan xususiy hosilalar **ikkinchi tartibli xususiy hosilalar** deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx} = z''_{xx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = z''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx} = z''_{yx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy} = z''_{yy}$$

f''_{xy} va f''_{yx} hosilalar aralash xususiy hosilalar deyiladi, ulardan biri avval x ga nisbatan, keyin y ga nisbatan hosila topishdan hosil bo‘lgan, ikkinchisi teskari.

Misol. $z = x^3 y^2 - x y^3$

$z'_x = 3x^2 y^2 - y^3; \quad z'_y = 2x^3 y - 3x y^2$

$z''_{xx} = 6x y^2; \quad z''_{xy} = 6x^2 y - 3y^2; \quad z''_{yx} = 6x^2 y - 3y^2; \quad z''_{yy} = 2x^3 - 6x y$

Aralash hosilalar o‘zaro teng. Hamma vaqt ham shunday bo‘ladimi? Bu savolga quyidagi teorema javob beradi:

Teorema. $z = f(x,y)$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari, ular uzluksiz bo‘lganda, o‘zaro teng bo‘ladi, ya’ni

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$$

Shunday qilib ikki o‘zgaruvchili funksiya ko‘rsatilgan shart bajarilganda to‘rtta emas, balki uchta xususiy hosilaga ega bo‘ladi.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalardan olingan xususiy hosilalar **uchinchi tartibli xususiy hosilalar** deyiladi va hokazo.Umuman, bir necha marta ikki o‘zgaruvchili funksiyani differensiallash natijasi differensiallash tartibiga bog‘liq emas (ular uzluksiz bo‘lgan holda). Masalan,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}$$

tekshirib, $z = f(x,y)$ funksiyaning n – tartibli xususiy hosilalarining soni $n+1$ ta ekanligiga ishonch qilsa bo‘ladi:

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n}; \quad \frac{\partial'' z}{\partial x^{n-1} \partial y}; \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \partial y^2}; \ldots; \quad \frac{\partial^n z}{\partial x \, \partial y^{n-1}}; \quad \frac{\partial^n z}{\partial y^n}$$

Ko‘p o’zgaruvchili funksiyalar uchun yuqori tartibli xususiy hosilalarni topish ko‘rib chiqilgandan farq qilmaydi. Bu yerda ham differensiallash natijasi differensiallash tartibiga bog‘liq emaslik haqida teorema o‘rinlidir, masalan $u = f(x,y,z)$ funksiya uchun:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y \partial x}$$

Misol. $u = e^{xy} \sin z$ funksiya berilgan.

$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ va $\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z\, \partial x}$ topilsin.

Yechish.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y e^{xy} \sin z; \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{xy} \sin z + x\ y e^{xy} \sin z = (1 + xy) e^{xy} \sin z$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + xy) e^{xy} \cos z$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\ e^{xy} \sin z; \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x\, e^{xy} \cos\ z$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x} = e^{xy} \cos\ z + x\, y e^{xy} \cos\ z = (1 + xy) e^{xy} \cos\ z$$

Solishtirib $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x}$ ekanligini ko'ramiz.

10. $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ birinchi tartibli xususiy hosilalari bilan uzluksiz bo'lsin. Agar shunday $u(x,y)$ funksiya mavjud bo'lsaki, uning to'la differensiali $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ ifodaga teng bo'lsa, ya'ni

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (20)$$

u holda bu ifoda **to'la differensial** deyiladi. Qanday shart bajarilganda $Pdx + Qdy$ to'la differensial bo'ladi?

Teorema. $P(x,y)dx + Q\ (x,y)dy$ ifodaning to'la differensial bo'lishi uchun

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (21)$$

o'rinli bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. **Zaruriy shart.** Faraz qilaylik, (1) o'rinli bo'ladigan $u(x,\ y)$ funksiya mavjud bo'lsin.

$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ va (1) dan $P = \frac{\partial u}{\partial x}$ va $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$ hosil bo'ladi. Bulardan $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ va $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$ topamiz. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$ bo'lganligi sababli $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ kelib chiqadi.

Yetarli shart. Funksiya $u(x, y)$ ikkita shartni

$$1)\ \frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y); \quad 2)\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \qquad (22)$$

qanoatlantirishi kerak. Birinchi shartni qanoatlantiruvchi funksiyani cheksiz ko'p yo'llar bilan tanlash mumkin. Ularning hammasini

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y) \qquad (23)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda $\varphi(y)$ ga nisbatan ixtiyoriy funksiya. $\varphi(x)$ ni shunday tanlaymizki, ikkala tomonidan y ga nisbatan hosila topamiz va natijani $Q(x,\ y)$ ga tenglashtiramiz:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx+\varphi'(y)=Q(x,y)$$

bundan

$$\varphi'(y)=Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx \tag{24}$$

(31) o'ng tomoni x ga bog'liq emas, uni integrallab topamiz:

$$\varphi(y)=\int\left[Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right]dy+C \tag{23}$$

integral ostidagi o'rta qavsda ikki funksiyaning ayirmasi turibdi. Ularning har biri x ga bog'liq. Soddalashtirganda x ga bog'liq ifoda yeyishib ketadi va integral ostida faqat y ga nisbatan ifoda qoladi. $\varphi(y)$ning qiymatini topamiz.

Misol. $(e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy$ ifoda berilgan.

Uni to'la differensial ekanligini tekshirib $u(x, y)$ funksiya topilsin.

Yechish.

$$P=e^y+x;\quad Q=xe^y-2y;\ \frac{\partial P}{\partial y}=e^y;\ \ \frac{\partial Q}{\partial x}=e^y$$

$$u=\int(e^y+x)dx+\varphi(y)=xe^y+\frac{x^2}{2}+\varphi(y)$$

Bundan:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=xe^y+\varphi'(y)=Q(x,y)$$

$$\varphi'(y)=Q(x,y)-xe^y=xe^y-2y-xe^y=-2y$$

$$\varphi(y)=-y^2+C\qquad u(x,y)=xe^y+\frac{x^2}{2}-y^2+C$$

11. Faraz qilaylik $z=f(x,y)$ funksiya va $(n+2)$ tartibli hosilasigacha $M(a, b)$ nuqtada va uning biror atrofida uzluksiz bo'lsin. U holda bu funksiyani $(x - a)$ va $(x-b)$ larning darajalariga nisbatan va biror o'zgarmasga nisbatan n-darajali ko'phad ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'ladi. Bu ko'phadni quyidagi ko'rinishda qidiramiz (n=2 uchun).

$$f(x,y)=A_0+D(x-a)+E(y-b)+\frac{1}{2}\left|A(x-a)^2+2B(x-a)(y-b)+C(y-b)^2\right|+R_n$$

bu yerda A_0, D, E, A, B, C x va y ga bog'liq bo'lmagan koeffitsiyentlar, R_n-ko'rinishi xuddi bir o'zgaruvchili funksiya uchun qoldiq hadning ko'rinishiga o'xshash qoldiq had. Agar $f(x, y)$ funksiyada x ni o'zgarmas deb qabul qilib y ga nisbatan bir o'zgaruvchili funksiya uchun Teylor formulasini yozsak (n=2 uchun)

$$f(x,y)=f(x,b)+\frac{y-b}{1}f'_y(x,b)+\frac{(y-b)^2}{2!}f''_{yy}(x,b)+\frac{(y-b)^3}{3!}f'''_{yyy}(x,\eta)$$

hosil bo'ladi. Bu yerda $\eta=b+\theta_1(y-b),\quad 0<\theta_1<1$

Endi $f(x,b)$ $f'_y(x,b)$ $f''_{yy}(x,b)$ funksiyalarni $(x-a)$ darajalari bo'yicha Teylor formulasiga yoyamiz (to'rtinchi tartibli aralash xususiy hosilagacha olamiz):

$$f(x,b)=f(a,b)+\frac{x-a}{1}f'_x(a,b)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''_{xx}(a,b)+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''_{xxx}(\xi_1,b)$$

$$f'_y(x,y)=f'_y(a,b)+\frac{x-a}{1}f''_{yx}(a,b)+\frac{(x-a)^2}{2!}f'''_{yxx}(\xi_2,b)$$

$$f''_{yy}(x,b)=f''_{yy}(a,b)+\frac{x-a}{1}f'''_{yyx}(\xi_3,b)$$

bu yerda $\xi_1=x+\theta_2(x-a),\quad 0<\theta_2<1$

$\xi_2=x+\theta_3(x-a),\quad 0<\theta_3<1$

$\xi_3=x+\theta_4(x-a),\quad 0<\theta_4<1$

(35), (36) va (37) ifodalarni (34) formulaga qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$f(x,b)=f(a,b)+\frac{x-a}{1}f'_x(a,b)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''_{xx}(a,b)+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''_{xxx}(\xi_1,b)+$$
$$+\frac{y-b}{1}\left[f'_y(a,b)+\frac{x-a}{1}f''_{yx}(a,b)+\frac{(x-a)^2}{2!}f'''_{yxx}(\xi_2,b)\right]+$$
$$+\frac{(y-b)^2}{2!}\left[f''_{yy}(a,b)+\frac{x-a}{1}f'''_{yyx}(a,b)\right]+\frac{(y-b)^3}{3!}f'''_{yyy}(a,b)$$

yoki

$$f(x,y)=f(a,b)+(x-a)f'_x(a,b)+(y-b)f'_y(a,b)+$$
$$+\frac{1}{2}\left[(x-a)^2 f''_{xx}(a,b)+2(x-a)(y-b)f''_{xy}(a,b)+(y-b)^2 f''_{yy}(a,b)\right]+R_2$$

bu yerda

$$R_2=\frac{1}{3!}\left[(x-a)^3 f'''_{xxx}(\xi_1,b)+3(x-a)^2(y-b)f'''_{xxx}(\xi_1,b)+\right.$$
$$\left.+3(x-a)(y-b)^2 f'''_{xyy}(\xi_2,b)+(y-b)^3 f'''_{yyy}(a,\eta)\right]$$

qoldiq had deyiladi. Agar $x-a=\Delta x,\ y-b=\Delta y$ va $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ desak, qoldiq had quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$R_2=\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta x^3}{\Delta y^3}f'''_{xxx}(\xi_1,b)+3+\frac{\Delta x^2\,\Delta y}{\Delta\rho^3}f'''_{xxy}(\xi_2,b)+\right.$$
$$\left.+3\frac{\Delta x\Delta y^2}{\Delta\rho^3}f'''_{xyy}(\xi_2,b)+\frac{\Delta y^3}{\Delta\rho^3}f'''_{yyy}(a,\eta)\Delta\rho^3\right.$$

$|\Delta x|<\Delta\rho,\ |\Delta y|<\Delta\rho$ va uchinchi tartibli hosilalarni chegaralanganligi sababli qoldiq hadni $\Delta\rho^3$ oldidagi koeffitsiyent chegaralangandir, uni α_0 bilan belgilasak $R_2=\alpha_0 4\Delta\rho^3$ bo‘lib Teylor formulasi

$$f(x,y)=f(a,b)+\Delta x\,f'_x(a,b)+\Delta y\,f'_y(a,b)+\frac{1}{2}\left[\Delta x^2\,f''_{xx}(a,b)+\right.$$
$$\left.2\Delta x\Delta y\,f''_{xy}(a,b)+\Delta y^2\,f''_{yy}(a,b)\right]+\alpha_0\,\Delta\rho^2$$

ko‘rinishni oladi.

Misol. $f(x,y)=x^3-2y^3+3xy$ funksiyani $x=1,\ y=2$ qiymatdan $x_1=1+k,\ y=2+h$ qiymatga o‘tganda orttirmasini toping.

Yechish. $f'_x=3x^2+3y \qquad f'_x(1,2)=3+6=9$

$f'_y = -6y^2 + 3x \qquad f'_y(1,2) = -6\cdot 4 + 3 = -21$

$f''_{xx} = 6x \qquad f''_{xx}(1,2) = 6$

$f''_{xy} = 3 \qquad f''_{xy}(1,2) = 3$

....

$f'''_{xyy} = f'''_{xxy} = 0$

Topilgan qiymatlarni formulaga qo‘yib topamiz:

$$\Delta f(x,y) = 9k - 21h + 3k^2 + 3kh - 12h^2 + k^3 - 2h^3.$$

Tayanch iboralar.

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya — o‘zgaruvchilari n ta o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lgan funksiya $(n \neq 1)$ **Xususiy orttirma** — faqat bitta o‘zgaruvchi orttirma oladi;
To‘la orttirma — hamma o‘zgaruvchilar bir vaqtda orttirma oladi;
Xususiy hosilalar — xususiy orttirmalardan olingan hosilalar;
Xususiy differensial — x va y ga nisbatan xususiy orttirmalarning bosh qismi;
To‘la differensial — to‘la orttirmalarning Δx va Δy ga nisbatan chiziqli bo‘lgan qismi;
Yuqori tartibli xususiy hosila — birinchi tartibli xususiy hosilalardan olingan xususiy hosilalar;
Ikkinchi tartibli xususiy hosila — ikkinchi tartibli hosila va hokazo;
Funksiyani to‘la differensiali — xususiy differensiallar yig‘indisi.

Nazorat savollari.

1. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya haqida tushuncha.
2. Xususiy va to‘la orttirma.
3. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning limiti va uzluksizligi.
4. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari.
5. Xususiy differensiallar.
6. Xususiy hosila va xususiy differensialning geometrik ma’nosi.
7. To‘la orttirma va to‘la differensial.
8. To‘la differensialning taqribiy hisoblashga tadbiqi.
9. Ikki o‘zgaruvchili funksiya uchun Teylor formulasi.

18-mavzu. Oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema. Oshkormas funksiyani differentsiallash. Sirtga o’tkazilgan urinma tekislik va normal tenglamalari. Ko’p o’zgaruvchili funksiyalarning ekstremumlari. Shartli ekstremum.

REJA:

1. Murakkab funksiyaning hosilasi. To‘la hosila.
2. Oshkormas funksiyaning hosilasi.
3. Sirtga urinma tekislik va normal.
4. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning ekstremumlari.
5. Shartli ekastremumlar.
6. Funksiyaning yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlar.
7. Eng kichik kvadratlar usuli bilan tajriba asosida funksiyani topish.

1. Faraz qilaylik

$$z=F(u, v) \tag{1}$$

tenglamada u va v bog‘liqmas o‘zgaruvchilar x va y ning funksiyalari bo‘lsin:

$$u=\varphi(x,y);\ v=\psi(x,y) \tag{2}$$

$$z=F(\varphi(x,y),\psi(x,y)) \tag{3}$$

$F(u,v)$, $\varphi(x,y),\psi(x,y)$ funksiyalar uzluksiz xususiy hosilalarga ega deb faraz qilib, $\partial z/\partial x$ va $\partial z/\partial y$ ni y ni o‘zgarishsiz qoldirib, x ga Δx orttirma beramiz. U holda asosan u va v ham $\Delta_x u$ va $\Delta_x v$ xusisiy orttirmalarni qabul qiladi. (16) ga asosan esa funksiya z Δz orttirma qabul qiladi. Bu orttirmani quyidagi (to‘la differensial mavzusiga qaralsin) ko‘rinishda yozamiz;

$$\Delta z=\frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u+\frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v+\alpha_1\Delta_x u+\alpha_2\Delta_x v.$$

Bu tenglikning har bir hadini Δx ga bo‘lamiz.

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x}+\alpha_1\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\alpha_2\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Agar $\Delta x\to 0$ bo‘lsa, $\Delta_x u\to 0,\ \Delta_x v\to 0$ va $\alpha_1\to 0,\ \alpha_2\to 0$. Oxirgi tenglikda $x\to 0$ bo‘lganda limitga o‘tamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

x ni o‘zgarishsiz qoldirib, y ga Δy orttirma berib topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

O‘zgaruvchilarning sanog‘i ko‘p bo‘lganda ham xususiy hosilalar shunga o‘xshash topiladi.

Misol. $w=u^2v-t^3$ bo‘lib $u=x-y;\quad v=xy;\quad t=x+y$ bo‘lsin.

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=2uv+u^2y-3t^2=$$

$$=2(x-y)xy-(x-y)^2y-3(x+y)^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=2uv(-1)-u^2x-3t^2=-2(x-y)xy-(x-y)^2x-3(x+y)^2$$

Agar $z=F(x,u,v)$ funksiya berilgan bo‘lib, y,u,v navbatida faqat x ning funksiyalari bo‘lsa, ya’ni $y=f(x),\ u=\varphi(x),\ v=\psi(x)$, u holda z faqat bitta o‘zgaruvchi x ning funksiyasi bo‘lib qoladi va undan oddiy hosila $\frac{dz}{dx}$ ni topish masalasini qo‘yish mumkin.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

va $\frac{dx}{dx}=1,\ \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{dy}{dx},\ \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{du}{dx},\ \frac{\partial \upsilon}{\partial x}=\frac{dv}{dx}$ bo‘lib

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

hosil bo‘ladi, bu esa **to‘la hosila** deyiladi.

$$z=\sqrt{x^3+y};\qquad y=\sin 2x$$

Misol.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y}};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{x^3+y}};\qquad \frac{\partial y}{\partial x}=2\cos 2x$$

bo‘lib $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y}}+\frac{1}{2\sqrt{x^3+y}}\cdot 2\cos 2x=\frac{3x^2+2\cos 2x}{2\sqrt{x^3+\sin 2x}}$ bo‘ladi.

2. Avval bitta bog‘liqmas o‘zgaruvchining oshkormas funksiyasidan hosilani qarab chiqamiz.

Teorema. Oshkormas funksiya $F(x,y)=0$ berilgan bo‘lib, funksiyani qanoatlantiradigan (x, y) nuqtani o‘z ichiga olgan biror D sohada $F(x,y),\ F'_x(x,y)$ uzluksiz va $F'_x(x,y)\neq 0$ bo‘lsin. U holda x ning funksiyasi bo‘lgan $y\,y'_x=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$ hosilaga ega bo‘ladi.

Isbot. x ning biror qiymatida $F(x,y)=0$ bo‘lsin. x ga Δx orttirma bersak, $y\,\Delta y$ orttirma qabul qiladi. $F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0$ hosil qilamiz. $F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F=0$ ayirmani xususiy hosilalar orqali ifodalaymiz:

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x+y)=\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y=0$$

bo‘lib, bundan

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y=0$$

hosil bo‘ladi. Buni ikkala tomonini Δx ga bo‘lamiz va $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ni topamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}+\alpha_1}{\frac{\partial F}{\partial y}+\alpha_2}$$

$\Delta x\to 0$ holda $\alpha_1\to 0$ va $\alpha_2\to 0$, hamda $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ ekanligini hisobga olib topamiz.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

Misol. $x^2+\cos\left(x+y^2\right)=0 \qquad y'_x=?$

$$y'_x=-\frac{2x-\sin\left(x+y^2\right)}{-2y\sin\left(x+y^2\right)}=\frac{2x-\sin\left(x+y^2\right)}{2y\sin\left(x+y^2\right)}$$

Endi ikki o‘zgaruvchili oshkormas ko‘rinishda berilgan $F(x,y,z)=0$ funksiyadan $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ va $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ xususiy hosilalarni topamiz. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ni topish paytida y o‘zgarmasligini hisobga $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$ ni shunga o‘xshash $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$ ni topamiz.

Misol. $e^z+x^2y+z+5=0 \qquad F(x,y,z)=e^z+x^2y+z+5$

$F'_x=2xy;\quad F'_y=x^2;\quad F'_z=e^z+1;$ demak

$$z'_x=-\frac{2xy}{e^2+1},\qquad z'_y=-\frac{x^2}{e^2+1}.$$

3. Agar sirtning tenglamasi $z=f(x,y)$ bo‘lsa, uning $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tekisligining tenglamasi qiyidagicha bo‘ladi:

$$z-z_0=(x-x_0)f'_x(x_0,y_0)-(y-y_0)f'_x(x_0,y_0).$$

<u>Ta’rif</u>. Urinma tekislikka urinish nuqtasida penpendikulyar to‘g‘ri chiziq **normal** deyiladi. Uning tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{x-x_0}{f_x^1(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y^1(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

Agar sirtning tenglamasi *F (x, y, z)*=0 oshkormas ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, ma’lumki hususiy hosilalar (undan *z*=*f (x, y*) funksiya mavjud bo‘lsa):

$$f'_x(x_0,y_0)=-\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)};\qquad f'_y(x_0,y_0)=-\frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

bo‘lib, urunma tekislikning tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$z-z_0=-(x_0,x_0)\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}-(y-y_0)\frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

yoki $(z-z_0)\cdot F'_z(x_0,y_0,z_0)+(x-x_0)F'_x(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)F'_y(x_0,y_0,z_0)=0$

yoki qisqacha $(x-x_0)\dfrac{\partial F}{\partial x}\Big|_0+(y-y_0)\dfrac{\partial F}{\partial y}\Big|_0+(z-z_0)\dfrac{\partial F}{\partial z}\Big|_0=0$

Normal tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\partial F}{\partial x}\Big|_0}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\partial F}{\partial x}\Big|_0}=\frac{z-z_0}{\dfrac{\partial F}{\partial x}\Big|_0}$$

Misol. Aylanma ellipsoid $x^2+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ ga shunday urinma tekislik o‘tkazilsinki, u $x+y-z=0$ tekislikka parallel bo‘lsin.

Yechish. $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_0=2x_0$, $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_0=y_0$, $\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_0=2z_0$

bo‘lganini sababli urinma tekislik $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ nuqtada $2x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0$ bo‘ladi.

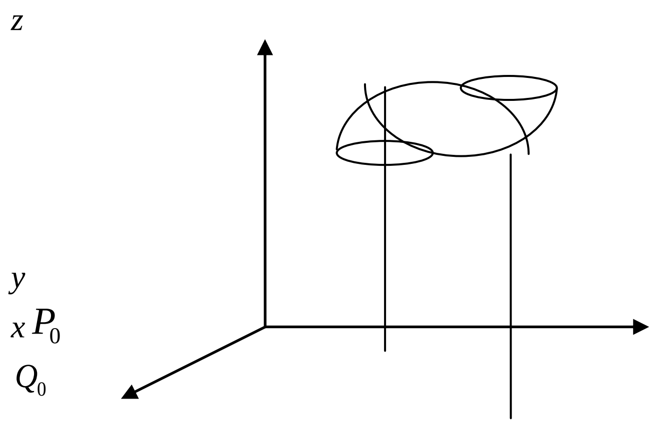
Uning $x+y-z=0$ tekislikka parallelligidan foydalanamiz:

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{y_0}{1}=\frac{2z_0}{1}$$

Bunga M_0 nuqtaning ellipsoidda yotish sharti $x_0^2+y_0^2/2+z_0^2=1$ ni qo‘shamiz va birgalikda yechib, $M_0^{(1)}(1/2,1,1/2)$ va $M_0^{(2)}(-1/2,-1,1/2)$ ni topamiz. Bu koordinatalarni urinma tekislik tenglamasiga qo‘yib, ikkita tekislikni topamiz.

$x+y-z=2$ va $x+y-z=-2$.

4. Ta’rif. $P_0(x_0,\ y_0)$ nuqta $z=f(x,y)$ funksiya uchun ekstrimum (max yoki min) nuqtasi deyiladi, agar funksiyaning bu nuqtadagi qiymati shu nuqtaning biror atrofidan qabul qilgan qiymatlaridan katta (*max*) yoki kichik (*min*) bo‘lsa. Bu holda $f(x_0,\ y_0)$ **funksiyaning ekstremal qiymati** deyiladi.



Chizmada P_0 -*max*, Q_0 - *min* nuqtasi.

Ta’rifga ko‘ra ekstrimum nuqtasi albatta funksiyaning aniqlanish sohasining ichida yotishi kerak.

Teorema 1. (ekstrimumning zaruriy sharti) Agar $z=f(x,y)$ funksiya $x=x_0$ va $y=y_0$ qiymatlari ekstrimumga ega bo‘lsa, u holda o‘zgaruvchilarning bu qiymatlarida har bir birinchi xususiy hosila nolga teng yoki mavjud emas.

Isbot. $y=y_0$ funksiyani qiymatga qo‘yib, bir o‘zgaruvchili funksiya $z=f(x,y)$ ning ekstrimumi $\partial f/\partial x=0$ mavjud bo‘lmaganda mavjud bo‘lishini bilamiz. Shunga o‘xshash $z_x^1=0$ yoki mavjud emasligi kelib chiqadi.

Ta'rif. $z_x^1 = 0$ va $z_y^1 = 0$ bo'ladigan nuqtaga statsionar nuqta va bu hosilalar mavjud bo'lmagan nuqtaga **kritik nuqta** deyiladi. Keltirilgan shart zaruriy bo'lib, yetarli bo'la olmaydi.

Misol. $z=xy$ funksiya hosilalari $x=0$, $y=0$ nuqtada nolga aylanadi, lekin bu nuqtada ekstremum yo'q.

Teorema-2. (etarli shart) $P_0(x_0,\ y_0)$ statsionar nuqta, ya'ni $f_x'(x_0y_0)=0,\quad f_x'(x_0y_0)=0$ bo'lsin. Bu nuqtada ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni hisoblaymiz va quyidagicha belgilaymiz:

$$A = f_{xx}''(x_0y_0);\quad B = f_{xy}''(x_0y_0);\qquad C = f_{yy}''(x_0y_0).$$

1. Agar $B^2 - AC < 0$ bo'lsa, $P_0(x_0,\ y_0)$ nuqtada funksiya ekstrimumga ega:

max., agar $A<0$ ($C<0$) bo'lsa maksimumga
min., agar $A>0$ ($C>0$) bo'lsa minimumga erishiladi

2. Agar $B^2 - AC > 0$ bo'lsa $P_0(x_0,\ y_0)$ nuqtada ekstrimum mavjud emas,
3. Agar $B^2 - AC = 0$ bo'lsa ekstrimum mavjud bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin . Qo'shimcha tekshirish kerak.

Misol. 1) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ ekstrimumlari topilsin.

Yechish:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1, & x_2 = 0 \\ y_1 = 1, & y_2 = 0 \end{matrix} \qquad (1,1),\ (0,0)$$

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = 6x\big|_{x=1} = 6;\quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = -3;\qquad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = 6y\big|_{y=1} = 6$$

$$B^2 - AC = 9 - 36 < 0 \quad A > 0 \ \ (C > 0)$$

$$Z_{min}(1,1) = 1 + 1 - 3 = 1$$

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 6x\big|_{x=0} = 0;\quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = -3;\qquad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 6y\big|_{y=0} = 0$$

$B^2 - AC = 9 - 0 > 0$ ekstremum mavjud emas.

Misol. 2) $z = x^2 - y^2;$ (0,0) statsionar nuqta.

A=2; B=0; C=-2. $B^2 - AC = 4 > 0$ ekstremum mavjud emas.

5. Ba'zi holatlarda funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatini topish masalasi o'zgaruvchilari o'zaro qo'shimcha shart bilab bir-biriga bog'liq bo'lgan funksiyaning ekstrimumi topishga keltiriladi.

O'zgaruvchilar bir-biriga

$$\varphi(x,y) = 0 \tag{1}$$

Shart bilan bog'langan bo'lganda

$$z = f(x,y) \tag{2}$$

funksiyaning eksremumlari topilsin.

Agar (1) dan y ni x orqali ifodalab, uning qiymatini (2) ga qo'ysak, bir argumantning funksiyasini hosil qilamiz Uni eksremumini tekshirish bizga ma'lum. Lekin masalani boshqacha yechish ham mumkin.

Argument x ning biror qiymatida funksiya ekstremumga ega bo‘lsa, uning hosilasi nolga aylanishi kerak.

(2) dan $\partial z / \partial x$ ni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d y}{d x}$$

ekstremum nuqtada

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d y}{d x} = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{d y}{d x} = 0$$

λ

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d y}{d x} + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{d y}{d x}\right) = 0 \qquad (4)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{d y}{d x} = 0 \qquad (5)$$

ya’ni

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

U holda $x$va$y$ ning bu qiymatlarida (5) dan $\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ hosil bo‘ladi.

Shunday qilib, ekstrimum nuqtalarda 3 ta tenglik o‘rinloi bo‘ladi;

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Bu sistemadan x, y ni topamiz. (6) shartli ekstrimumning zaruriy shartidir. Har qanday x, y (va λ) (6) ni qanoatlantirsa ham, bu qiymatlarda shartli ekstrimumi mavjud bo‘lmasligi mumkin. Buni tekshirish uchun qo‘shimcha tekshirish o‘takazish kerak.

Agar qo‘shimcha

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) \qquad (7)$$

funksiyani tuzsak, (6) sistema (7) funksiyadan topilgan xususiy hosilalarga tengligi ko‘rinadi.

Shunday qilib, shartli ekstrimumni tekshirish uchun (7) sistema tuziladi, undan hususiy hosilalar topilib (6) sistema tuziladi va yechiladi.

Misol. Yuzi 2*a*ga teng bo‘lgan tunukadan paralelepiped shaklidagi yopiq qiticha yasash kerakki, uning hajmi eng katta bo‘lsin.

Yechish. Masala $v = xyz$ funksiyani $2xy + 2xz + 2yz = 2a$ yoki $xy + xz + yz - a = 0$, bo‘lganda maksimumga topishga keltiriladi.

$$F(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - a)$$

(6) sistemani tuzamiz
$$\begin{cases} yz+\lambda(y+z)=0 \\ xz+\lambda(x+y)=0 \\ xy+\lambda(x+y)=0 \\ xy+xz+yz-a=0 \end{cases}$$

1- tenglamani *x*ga, 2-tenglamani *y* ga, 3- tenglamani *z* ga ko‘paytirib, ularni (ya’ni uchta tenglamani) qo‘shamiz va *xy*+*xz*+*yz*=*a* ni hisobga olib $\lambda=-\frac{3xyz}{2a}$ ni topamiz. Bu qiymatni 3 ta oldinga qiymatlarga qo‘yib

$$\begin{cases} yz\left(1-\frac{3x}{2a}(y+z)\right)=0 \\ xz\left(1-\frac{3y}{2a}(x+z)\right)=0 \\ xy\left(1-\frac{3z}{2a}(x+y)\right)=0 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Bundan

$$\begin{cases} \frac{3x}{2a}(y+z)=1 \\ \frac{3y}{2a}(x+z)=1 \\ \frac{3z}{2a}(x+y)=1 \end{cases}$$

ni hosil qilamiz (chunki $x\neq 0\, y\neq 0 z\neq 0$) Bu sistemadan

x=*y*=*z* kelib chiqadi. U holda *xy*+*xz*+*yz*=*a*dan $x=y=z=\sqrt{\frac{a}{3}}$ ni topamiz. Geometrik nuqtai nazardan bu bitta statsionar nuqtada maksimum mavjuddir. Parallelepeped kub bo‘lib, uning tomoni $\sqrt{\frac{a}{3}}$ bo‘lganda eng katta hajmni berar ekan.

6. Uzluksiz funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari yopiq sohaning ichki nuqtalarida yoki chegarasida bo‘lishi mumkin. Agar sohaning ichida bo‘lsa, u albatta kritik nuqtada bo‘ladi. Demak, sohada yotgan kritik nuqtalarini topish, bu nuqtalarda funksiyaning qiymatini hisoblash kerak. Chegarada funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topib, bulardan va kritik nuqtalaridagi qiymatlaridan eng katta va eng kichigini aniqlashimiz kerak.

Misol. Tekislikda shunday nuqta topilsinki undan berilgan uchta nuqtalargacha bo‘lgan masofalarning yig‘indisi eng kichik qiymatga va uchburchak ichida bo‘lgan uchburchakning shunday nuqtasi topilsinki, undan uchlarigacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi eng katta bo‘lsin.

Yechish. Masalaning 1- qismi $P_1M^2+P_2M^2+P_3M^2=z$ funksiyani, ya’ni $z=x^2+y^2+(x-1)^2+x^2+y^2+(y-1)^2$ yoki $z=3x^2+3y^2-2x-2y+2$ eng kichik qiymatini (butun tekislikda) topishga keltiriladi. Bundan:

$z'_x = 6x - 2, \quad z'_y = 6x - 2, \quad \begin{cases} 3x - 1 = 0 \\ 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{1}{3}$

$M(1/3,\ 1/3)$nuqtadan $P_1,\ P_2,\ P_3$ nuqtalargacha masofalarning yug‘indisi eng kichikdir. $M(1/3,\ 1/3)$nuqta $\Delta P_1\ P_2\ P_3$ ning oraliq markazidir.

2-qismga o‘tamiz. Funksiya $\Delta P_1\ P_2\ P_3$ ichida bitta kritik nuqta $M(1/3,\ 1/3)$ ga ega. Shuning uchun eng katta qiymatining tomonlarida (sohaning chegarasida) bo‘ladi. $P_1\ P_2$ tomonda$y$=0, shuning uchun $z = 3x^2 - 2x + 2$, $z' 6x - 2;$ $z' = 0 \Rightarrow x = 1/3$ eng kattasi 3.

$P_1\ P_3$tomonda: x=0, demak, $z = 3y^2 - 2y + 2$ eng katta qiymati z(0,1)=3

$P_1\ P_3$tomonda: x=y=1 va $z = 3x^2 + 3(1-x)^2 - 2x - 2\,(1-x) + 2 = 6x^2 - 6x + 3$ eng katta qiymati z(0)=z(1)=3.

$P_2\,(1,0)$; $P_3\,(0,1)$nuqtalardan uchburchak uchlarigacha masofalar kvadratining yig‘indisi eng katta qiymatga ega.

7. Tajriba asosida argument x ning ma’lum qiymatlariga funksiya y ning mos qiymatlari jadval yordamida berilgan bo‘lsin:

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

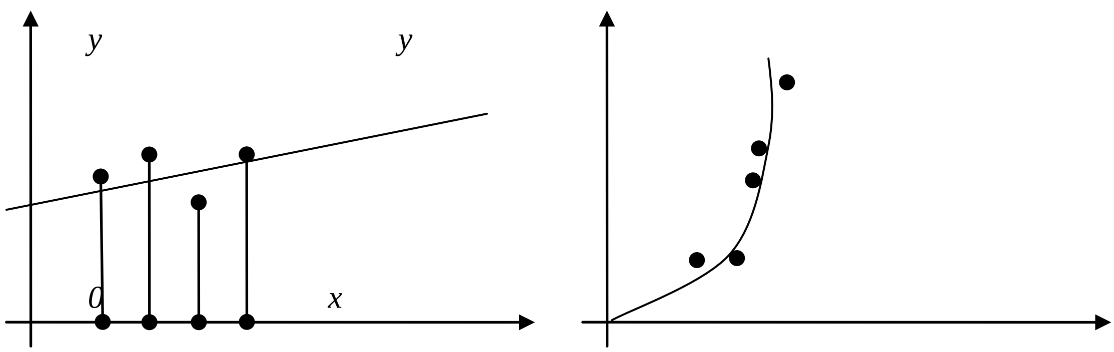
Bu tajriba asosida x va y orasida funksional bog‘lanish

$$y = \varphi(x) \qquad (8)$$

ni topish talab qilinadi.

Bu funksiyaning ko‘rinishi nazariy mulohazalar asosida yoki tajriba asosida topilgan qiymatlarga koordinata tekisligi mos keladigan nuqtalar asosida aniqlanadi. Bu nuqtalarni **“tajriba nuqtalari”** deymiz.

Faraz qilaylik **“tajriba nuqtalari”** berilgan bo‘lsin.



Tajriba asosida topilgan qiymatlarning ma’lum xatolik bilan topilganini hisobga olib, qidiriladigan (8) funksiyani chiziqli $y = ax + b$ yoki $y = ax^b$ ko‘rinishda qidirish mumkin:

Funksiya $\varphi(x, a, b, c, \ldots)$ ning qaysi ko‘rinishda qidirilayotganiga qarab, unda qatnashgan parametrlar a, b, c, … ni shunday aniqlash kerakki, bu funksiya tajribani aks ettiruvchi funksional bog‘lanishni iloji boricha aniqroq aks ettirsin.

Keng tarqalgan usullardan biri eng kichik kvadratlar usulidir. Bu usul quyidagilardan iborat.

Tajribada hosil bo‘lgan qiymatlar y_i va qidiriladigan funksiya $\varphi(x, a, b, c, \ldots)$ ning mos qiymatlari ayirmalari kvadratlarining yig‘indisini tuzamiz:

$$s(a,b,c,...)=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\varphi\left(x,a,b,c,...\right)\right)^2 \qquad (9)$$

parametrlar ya'ni *a, b, c*, … ni shunday tanlaymizki, (9) yig'indi eng kichik qiymatga ega bo'lsin ya'ni $s(a,b,c,...)=\min$.

Shunday qilib, masalani yechish parametrlar *a, b, c*, … ni shunday qiymatlarini topishga olib kelindiki, bu qiymatlarda *s* (*a, b, c*,…) funksiya minimimga ega bo'lsin. Bunday qiymatlar ma'lumki,

$$\frac{\partial s}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial s}{\partial b}=0, \quad \frac{\partial s}{\partial c}=0, ...$$

Sistemasining yoki

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i\varphi\left(x_i,a,...\right)\right)\frac{\partial\varphi}{\partial a}=0\\ \sum_{i=1}^{n}\left(y_i\varphi\left(x_i,a,...\right)\right)\frac{\partial\varphi}{\partial b}=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \end{cases} \qquad (10)$$

Sistemaning yechimidan iborat. (10) sistemada no'malumlar soni tenglamalr soniga teng. Har bir aniq holda (10) sistemaning yechimini mavjudligi tekshiriladi.

Misol. Qidiriladigan funksiya –chiziqli funksiya *y=ax+b* bo'lsin. Bu holda *s* (*a,b*) funksiyaning ko'rinishi

$$s(a,b)\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-a\,x_i-b\right)^2$$

bo'ladi. Bu yerda no'malumlar a,b ($x_i y_i$ berilgan qiymatlar)

a va *b* ni aniqlash uchun (10) sistemaning ko'rinishi

$$\begin{cases}\frac{\partial s}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-a\,x_i-b\right)x_i=0\\ \frac{\partial s}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-a\,x_i-b\right)=0\end{cases} \qquad (11)$$

bo'ladi. Bu sistema yagona yechimga ega bo'lib, bu yechim uchun *S* (*a,b*) funksiya minimumga ega.

Misol. Tajriba natijasi

x	1	2	3	6
y	3	4	2,5	0,5

jadvaldan iborat.

Funksiya *y=ax+b* ko'rinishda qidirilib, *a* va *b* ni aniqlash uchun

$$s(a,b)\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-a\,x_i-b\right)^2 \text{ hosilalar}\begin{cases}\frac{\partial s}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-a\,x_i-b\right)x_i\\ \frac{\partial s}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-a\,x_i-b\right)\end{cases}$$

ni topamiz.

(11) sistemasini tuzish uchun

$\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 21;$ $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 39;$ $\sum_{i=1}^{4} x_i = 12;$ $\sum_{i=1}^{4} y_i = 10;$ ni topamiz va (4) ga qo‘yi b *a* va *b* ni aniqlash uchun

$$\begin{cases} 21 - 39a - 11b = 0 \\ 10 - 11a - 4b = 0 \end{cases}$$

ni hosil qilamiz.
Bundan

$$a = -26/35; \qquad b = -159/35.$$

Demak:
$y = -26/35 \quad x - 159/35.$

Tayanch iboralar.

Yuqori tartibli xususiy hosila — birinchi tartibli xususiy hosilalardan olingan xususiy hosilalar.
Ikkinchi tartibli xususiy hosila — ikkinchi tartibli hosila va hokazo;
Funksiyani to‘la differensiali — xususiy differensiallar yig‘indisi;
Yuksaklik chizig‘i — *OXY* tekislikdagi shunday chiziqki, uning har bir nuqtasida funksiya o‘zgarmas bo‘ladi.
Yuksaklik sirti — *u=c* sirt.
Urinma tekislik – sirtga urilib o‘tuvchi tekislik.
Normal – urinma tekislikka urilish nuqtasida perpendikulyar to‘ri chiziq.
Funksiyaning ekstrimumlari – funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari
Shartli ekstrimum – qo‘shimcha shartlar yordamida funksiyani ekstrimumlarini topish.

Nazorat savollari.

1. Sirtga urinma tekislik va normal.
2. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning ekstremumlari.
3. Shartli ekastremumlar.
4. Funksiyaning yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlar.
5. Eng kichik kvadratlar usuli bilan tajriba asosida funksiyani topish.