O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI
NAMANGAN MUHANDISLIK-QURILISH INSTITUTI

V.R.XODJIBAYEV

OMMAVIY XIZMAT KO‘RSATISH NAZARIYASI ELEMENTLARI

O‘QUV QO‘LLANMA

Toshkent-2022

UO’K 519.111.3+519.2(073)
KBK 22.171+22.141ya7
X-82
Xodjibayev V.R.
Ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasi elementlari. O’quv qo’llanma./ Toshkent: Lesson press, 2022, 78 b.

Taqrizchilar:
Mashrabbayev A. – fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent
Gafarov I.A. – fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

Mazkur o‘quv qo‘llanma oliy o‘quv yurtlarida bakalavriatning “Matematika” va “Amaliy matematika va informatika” ta’lim yonalishlari hamda “Matematika (Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika)” magistratura mutaxassisligi bo‘yicha ta’lim olayotgan talabalarga “Ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasi” tanlov (maxsus) fan kursini tashkil etish uchun mo‘ljallangan. Unda ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimlari turlari va ularning asosiy xarakteristikalari bayon qilingan. O‘quv qo‘llanmadan talabalar, magistrlar va o‘qituvchilar foydalanishlari mumkin.

Namangan davlat universiteti Kengashi tomonidan o’quv qo’llanma sifatida nashr etishga tavsiya qilingan (2022 yil, 17 mart, 8-bayonnoma)

Namangan muhandislik-qurilish institute Kengashi tomonidan o’quv qo’llanma sifatida nashr etishga tavsiya qilingan (2022 yil, 5 aprel, 10-bayonnoma)

O’zbekiston Respublikasi Oliy va o’rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan nashr etishga ruxsat berilgan (2022 yil, 19 iyul, 233-sonli buyruq)

ISBN 978-9943-6764-2-3

So‘z boshi

Ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasi amaliy matematikaning ehtimolliklar nazariyasi, xususan, tasodifiy jarayonlar nazariyasi usullaridan keng foydalanadigan sohasi hisoblanadi. U universitetlarning matematika bakalavriat yunalishlari va ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika magistratura mutaxassisligi talabalariga tanlov fan sifatida tavsiya etilgan fanlar qatoriga kiradi. Ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasi fanini o‘rganish uchun talabalardan matematik analizning umumiy, ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistikaning to‘la kurslari bo‘yicha bilimlarga, ma’lum darajada matematik fanlarni o‘rganish tajribasiga ega bo‘lishlari talab etiladi.

Ushbu o‘quv qo‘llanmani yozishda muallifning bir necha yillar mobaynida Namangan davlat universiteti talabalariga o’qigan ma’ruzalari asos qilib olindi va T.L.Saati [1], B.V.Gnedenko, I.N.Kovalenko [2], L.Kleynrok [3], X.Taxa [4], K.A. Djafarov, A.A. Mogulskiy [5] kitoblaridan keng foydalanildi. Xususan, keltirilgan misol va masalalar, asosan, ko‘rsatilgan adabiyotlardan olindi.

O’quv qo’llanma Kirish va 9 ta paragrafdan iborat bo‘lib, har bir paragrafda formula va tasdiqlarning nomerlari mustaqildir. Paragraf ichida formula va tasdiqlarga murojaat qilishda faqat ularning nomerlari, paragraf tashqarisida esa, paragraf nomeri ham ko‘rsatiladi.

Kirish

Insonning barcha amaliy faoliyati har xil turdagi ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimlari bilan bog‘liqdir. Bunday tizimlarga shahar transporti, oshxona, restoranlar, pochta, sartaroshxona, do‘konlar, poliklinikalar va hokazo xizmat tizimlarini misol sifatida keltirish mumkin. Har qanday ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimlari esa, kutish jarayonlari va navbat tushunchalari bilan chambarchas bog‘liq. Agar mijozlar xizmat ko‘rsatish qurilmasiga kelganda u band bo‘lib, xizmat ko‘rsatish boshlanguncha kutishga to‘g‘ri kelsa, navbat paydo bo‘ladi. Masalan, bemor shifokor qabuliga kirishi uchun uning kabineti oldida navbat hosil qilib kutadi. Ingliz tilidagi adabiyotlarda “Ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasi” “Queuing theory”, ya’ni so‘zma-so‘z tarjima qilganda “Navbatlar nazariyasi” deb ataladi. Haqiqatan ham, ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasi, asosan, har xil tizimlarda vujudga keladigan navbatlarni o‘rganishga bag‘ishlangan nazariyadir. Ushbu fan XX asr boshlarida telefon ishi, fizika, biologiya, iqtisod (chipta sotish kassalarida, do‘konlarda va h.k ommaviy xizmat ko‘rsatishni oqilona tashkil etish) sohalarining amaliy masalalarini hal etish bilan bog‘liq holda shiddat bilan rivojlana boshladi.

Har qanday ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimi quyidagi elementlarni o‘z ichiga oladi:

1. *Talablarning kirish oqimi*. Odatda ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimiga kelgan mijozlar sonini tizimga tushgan murojaatlar soni, yoki talablar soni, deb yuritiladi. Talablarning kirish oqimi asosiy element bo‘lib, uni o‘rganish har qanday ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimini tashkil etishda zarur va muhimdir. Bunda asosiy xarakteristika talablar kirish oqimining intensivligi (tezligi), ya’ni vaqt birligi oralig‘ida tizimga keladigan mijozlarning o‘rtacha soni hisoblanadi.

2. Navbat. Ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimiga kelib tushgan talab darhol qanoatlantirilishi mumkin bo‘lmagan hollarda navbat hosil bo‘ladi. Bunday hollarda navbat uzunligi (navbatda turgan talablar soni), kutayotgan talablarning xizmat ko‘rsatishga yo‘llash tartibi (navbat tartibi, intizomi), kutish vaqti kabi tushunchalar qiziqish uyg‘otadi va bu jarayonlarda vaqt asosiy parametr bo‘ladi. Ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimlarida navbat tartibi, intizomi har xil bo‘lishi mumkin. Odatda “avval kelganga avval xizmat ko‘rsatiladi” tamoyiliga amal qilinadi. Ba’zi hollarda bu qoida buzilishi mumkin (masalan, pensionerlarga navbatsiz xizmat ko‘rsatadigan tizimda). Navbat barcha ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimlariga tegishli emas. Shunday tizimlar borki, ularda navbatga yo‘l qo‘yilmaydi va talab tushgan paytda tizim band bo‘lsa, bu talabga xizmat ko‘rsatilmaydi (rad qilinadi).

3. *Xizmat ko‘rsatuvchi qurilma*. (Moslama, pribor). Bu element har qanday ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimida mavjud bo‘ladi. U tizimning xususiyatiga qarab, bitta yoki bir nechta bo‘lishi mumkin (yonilg‘i quyish shoxobchasida bitta yoki bir nechta kolonka, magazinda bitta yoki bir nechta kassa).

Xizmat ko‘rsatuvchi qurilmalarning tashkil etilishiga nafaqat bitta talabga xizmat ko‘rsatish uchun zarur bo‘lgan vaqt, balki navbat uzunligi va kutish vaqti ham bog‘liq bo‘ladi. Agar tizimda xizmat ko‘rsatuvchi qurilmalar katta sonda bo‘lsa, bu tizimda navbat uzunligi kichik bo‘ladi. Lekin har bir qurilmani (moslamani) tashkil etish uchun mablag‘ talab qilinadi.

4. *Xizmat ko‘rsatilgan talablarning chiqish oqimi*. Xizmat ko‘rsatilgan talablarning chiqish oqimi boshqa bir ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimi uchun kirish oqimi bo‘lganda bu element muhim ahamiyata ega bo‘ladi. Masalan, poyezddan tushgan yo‘lovchilarning ko‘pchiligi taksi to‘xtash joyiga yo‘l oladi.

Aksariyat hollarda qandaydir vaqt oralig‘ida ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimiga kelib tushgan talablar soni, tushgan talabning unga xizmat ko‘rsatish boshlanguncha kutgan vaqti (bu navbat bilan bog‘liq), bitta talabga (mijozga) xizmat ko‘rsatish uchun ketadigan vaqt va boshqalar tasodifiy miqdorlar bo‘ladi. Ular bir-biriga bog‘liq bo‘lishi mumkin. Demak, ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimining faoliyat ko‘rsatishi tasodifiy jarayondan iborat bo‘ladi va bu jarayonda vaqt asosiy parametr bo‘ladi. Aynan shunday tizimlarni o‘rganish bilan ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasi shug‘ullanadi.

Aytilganlardan kelib chiqadiki, ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasini o‘rganish har xil tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlarini, ular orasidagi munosabatlarni, tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalarini topish bilan bog‘liq ekan. Shuning uchun birinchi paragrafda ehtimolliklar nazariyasining ba’zi asosiy tushunchalari va asosiy taqsimot qonunlari haqida qisqacha ma’lumotlarni keltiramiz.

Ushbu qo‘llanmada ommaviy xizmat ko‘rsatishning eng sodda modeli o‘rganiladi va bu modelni bir xizmat ko‘rsatish stansiyasi (aytaylik, avtomobillarni ta’mirlash xizmati) orqali oson tasvirlash mumkin. Stansiyaga mijozlar *eng sodda oqim* (§2) bo‘yicha, ya’ni bittadan keladi va kelish momentlari orasidagi vaqt ko‘rsatkichli taqsimot qonuniga ega bo‘ladi. Stansiyada bir nechta bir xil moslamalar (qurilmalar) bo‘lib, ular mijozlarga ularning kelish tartibida xizmat ko‘rsatadi (bitta moslama bitta mijozga xizmat ko‘rsatadi). Moslamalardan birida xizmat ko‘rsatib bo‘lingan mijoz tizimni, ya’ni stansiyani darhol tark etadi. Agar mijoz kelgan paytda stansiyadagi barcha moslamalar undan avval kelgan mijozlarga xizmat ko‘rsatish bilan band bo‘lsa, bu mijoz navbatga turadi va biror moslama bo‘shashini kutadi.

Biz navbatning o‘rtacha uzunligi (navbatda turgan mijozlar sonining matematik kutilmasi), mijozning xizmat ko‘rsatish boshlanguncha o‘rtacha kutish vaqti, stansiyada o‘tkazilgan o‘rtacha vaqt kabi stansiyaning xarakteristikalarini o‘rganamiz. Tabiiyki, qo‘yilgan masalalarni qarashda mijozlarning stansiyaga kelish lahzalari qanday qonunga bo‘ysinishi (kirish oqimi), bitta moslamaning bir mijozga xizmat ko‘rsatish vaqtining taqsimoti, stansiyaga kelgan mijozlar qanday tartibga bo‘ysinishi (xizmat ko‘rsatish tartibi) e’tiborga olinadi. Bunda ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasidagi asosiy modellardan biri bo‘lgan “Tug‘ilish va nobud bo‘lish” jarayonidan (§3) keng foydalanamiz.

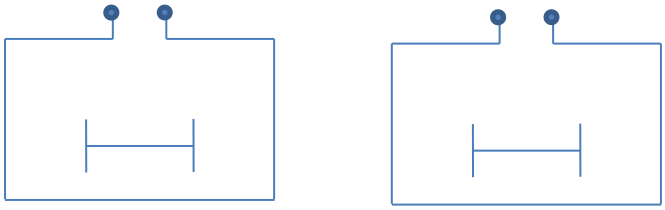
Ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasining o‘ziga xos muhim tomonlaridan biri unda qaralayotgan tasodifiy miqdorlarning vaqtga bog‘liq ravishda o‘zgarib turishidir. Masalan, do‘konga kiradigan xaridorlar sonining taqsimoti do‘kon yangi ochilgan birinchi kunlarda va bir necha oy o‘tgandan keyin bir xil bo‘lmaydi. Agar ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimi uzoq muddat davomida faoliyat ko‘rsatsa, ba’zi hollarda, undagi tasodifiy miqdorlarning vaqtga bog‘liqligi susaya boradi va bora-bora vaqtga bog‘liq bo‘lmay qoladi (tizim o‘zining doimiy mijozlariga ega bo‘lib qoladi). Tizimning bunday holatiga *statsionar holat* deyiladi. Agar bitta mijozga xizmat ko‘rsatish vaqti mijozlar kelish vaqtlari oralig‘idan katta bo‘lsa, bu tizim statsionar holatga ega bo‘la olmaydi. Tizimning statsionar holatida tasodifiylik yo‘qolmaydi, balki undagi tasodifiy miqdorlarning taqsimoti biror fiksirlangan momentda qanday bo‘lsa, boshqa ixtiyoriy momentda ham shunday bo‘ladi. Amaliyotda tizimning statsionar holatini o‘rganish muhim ahamiyatga ega va ushbu qo‘llanmada ko‘riladigan barcha turdagi tizimlar uchun ularning statsionar holati haqida fikr yuritiladi (§§ 4-8).

Ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasi shug‘ullanadigan masalalarga misol tariqasida [5] da qaralgan quyidagi masalaning qo‘yilishini qat’iy bo‘lmagan holda keltiramiz va ushbu kurs davomida unga aniqliklar kiritib, hal qilamiz.

Dengiz portini loyihalash masalasi

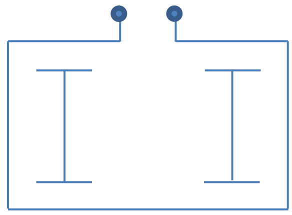
Dengiz portining bir xil mablag‘ hisobiga quriladigan uchta qurilish loyihasini qaraymiz.

I. Port ikkita bir-biriga bog‘liqsiz bo‘lgan terminaldan (yuklarni tushirish va yuklash joyi) iborat va ular bir xil samaradorlikka ega bo‘lib, kemalarning kirish oqimi taxminan teng bo‘lgan ikki qismga ajratiladi. (1-rasm)



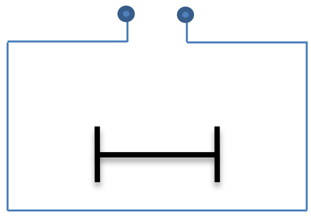
1-rasm.

II. Port bitta terminaldan iborat bo‘lib, unda ikkita bir xil quvvatli yuklash va tushirish joylari mavjud (2-rasm)



2-rasm.

III. Port bitta terminaldan iborat bo‘lib, unda samaradorligi I va II loyihalardagiga nisbatan ikki marta yuqori bo‘lgan bitta yuklash va tushirish joyidan iborat (3-rasm)



3-rasm.

Masala qaysi loyiha qulayligini (yaxshiligini) aniqlashdan iborat bo‘lib, bunda quyidagi xarakteristikalar solishtirilishi talab qilinadi:

1) bitta kema portga kelgandan keyin unga xizmat ko‘rsatish boshlanguncha o‘rtacha kutish vaqti;
2) bitta kemaning portda o‘tkazgan o‘rtacha vaqti (ya’ni, kutish vaqti bilan xizmat ko‘rsatish vaqti yig‘indisi)

§1. Ehtimolliklar nazariyasidan ba'zi ma'lumotlar

Ushbu paragrafda ehtimolliklar nazariyasining kelgusida bizga zarur bo'lgan ba'zi tushunchalari va formulalarini keltiramiz. *Tasodifiy hodisa* deganda, tajribaning elementar hodisalar fazosi Ω dagi elementar hodisalardan tuzilgan to'plam tushuniladi. Ya'ni, tasodifiy hodisa elementar hodisalar fazosi Ω ning qism to'plamidan iborat bo'ladi. A va B hodisalardan birortasi (kamida bittasi) ro'y berishidan iborat bo'lgan hodisa $A\cup B$, A va B hodisalarning ikkalasining ro'y berishidan iborat bo'lgan hodisa $A\cap B$ ko'rinishida ifodalanadi. A hodisaning ro'y bermasligidan iborat bo'lgan hodisa, A ga *teskari* (qarama-qarshi) *hodisa* deyiladi va $\overline{A}$ ko'rinishida belgilanadi.

Ω muqarrar hodisa bo'lsa, $\overline{\Omega}=\varnothing$ ro'y bermaydigan hodisa bo'ladi. A hodisa ro'y berishidan B hodisaning ham ro'y berishi kelib chiqsa, $A\subset B$ kabi belgilanadi va A *hodisa* B *hodisani ergashtiradi,* deb aytiladi. Tabiiyki, to'plamlarning birlashmasi va kesishmasining barcha xossalari hodisalar ustida ta'riflangan amallar uchun ham o'rinlidir.

$P(A)$ *ehtimollik*, bu tasodifiy hodisaning funksiyasi bo'lib, hodisaning ro'y berishlari nisbiy chastotasining kutilayotgan qiymatiga teng kattalikdir va u tasodifiy hodisaning ro'y berish imkoniyatini ko'rsatadi. Hodisaning ehtimolligi quyidagi asosiy xossalarga ega:

1) ixtiyoriy A hodisa uchun $0\le P(A)\le 1$;

2) $P(\varnothing)=0,\quad \mathrm{P}(\Omega)=1$;

3) $i\neq j$ bo'lganda $A_i\cap A_j=\varnothing,\ i,j=1,2,...$ bo'lsa ,

$$P(A_1\cup A_2\cup ...)=P(A_1)+P(A_2)+...$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

A hodisaning B hodisa ro'y berganligi sharti (ya'ni B hodisaning ro'y berganligi aniq bo'lsa) ostidagi *shartli ehtimolligi*

$$P_B(A)\equiv P\left(A/B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

formula orqali ta'riflanadi.

B hodisaning ro‘y bergan yoki ro‘y bermaganligi A hodisaning ro‘y berishiga ta’sir qilmasa, tabiiyki, $P\left(A/B\right) = P(A)$ bo‘ladi. Shuning uchun A va B hodisalar *bog‘liq emas* (bog‘liqsiz) deyiladi, agarda

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

bo‘lsa.

Agar $A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n = \Omega$ bo‘lib, ixtiyoriy $i \neq j$ larda $A_i \cap A_j = \varnothing$ bo‘lsa (ya’ni, tajriba natijasida A_i hodisalardan bittasi va faqat bittasi ro‘y bersa), ixtiyoriy B hodisa uchun

$$P(B) = P\left(B/A_1\right)P(A_1) + P\left(B/A_2\right)P(A_2) + \dots + P\left(B/A_n\right)P(A_n)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu munosabat ko‘plab tadbiqlarga ega va *to‘la ehtimollik formulasi* deyiladi.

Tasodifiy miqdor elementar hodisalar fazosi Ω da aniqlangan funksiyadir. ξ tasodifiy miqdor *diskret* bo‘lsa , ya’ni $P(\xi = x_i) = p_i,\ i = 1, 2, \dots,\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ bo‘lsa, uning *matematik kutilmasi* va *dispersiyasi* mos ravishda

$$M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \quad D\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - (M\xi)^2$$

formulalar yordamida hisoblanadi. Agar tasodifiy miqdor *uzluksiz* bo‘lib, uning *taqsimot funksiyasi* $F(x) = P(\xi < x)$ differensiallanuvchi, ya’ni *zichlik funksiyasi* $f(x) = F'(x)$ mavjud bo‘lsa, matematik kutilma va dispersiya

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx, \quad D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (M\xi)^2$$

formulalar orqali topiladi.

$\xi_1,\ \xi_2$ *bog‘liqsiz* (bog‘liq bo‘lmagan) tasodifiy miqdorlar deyiladi, agarda ixtiyoriy x, y haqiqiy sonlar uchun $\{\xi_1 < x\}$ va $\{\xi_2 < y\}$ hodisalar bog‘liqsiz bo‘lsa, ya’ni

$$F(x, y) = P(\xi_1 < x,\ \xi_2 < y) = P(\xi_1 < x)P(\xi_2 < y) = F_1(x)F_2(y)$$

bo‘lsa . Agar ξ_1 va ξ_2 bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar uzluksiz va zichlik funksiyalari $f_1(x)$ va $f_2(x)$ bo‘lsa, $\xi = \xi_1 + \xi_2$ tasodifiy miqdor ham uzluksiz bo‘ladi va uning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-t) f_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-t) f_1(t) dt$$

ko‘rinishda bo‘ladi va bu formula “tugun” formulasi deyiladi. Qo‘shimcha ravishda $P(\xi_1 \geq 0) = P(\xi_2 \geq 0) = 1$ bo‘lsa, oxirgi formulalarda interallash chegaralari 0 dan x gacha bo‘ladi.

Ixtiyoriy $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ tasodifiy miqdorlar yig‘indisining matematik kutilmasi qo‘shiluvchilar matematik kutilmalarining yig‘indisiga teng, ya’ni

$$M(\xi_1 + \xi_2 + ...\xi_n) = M\xi_1 + M\,\xi_2 + ... + M\xi_n$$

bo‘ladi. Agar ular o‘zaro bog‘liqsiz bo‘lsa,

$$M(\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot ... \cdot \xi_n) = M\xi_1 \cdot M\,\xi_2 \cdot ... \cdot M\xi_n,$$

$$D(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + ... + D\xi_n$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Endi bizga zarur bo‘lgan asosiy taqsimot turlariga to‘xtalamiz.

1. Bernulli taqsimoti. *Bunda ξ tasodifiy miqdor 0 va 1 qiymatlarni mos ravishda q va p ehtimolliklar bilan qabul qiladi, ya’ni*

$$P(\xi = 0) = q, \quad P(\xi = 1) = p, \quad p + q = 1.$$

Bu holda $M\xi = p, \quad D\xi = pq$ bo‘ladi.

2. Binomial taqsimot. S_n *tasodifiy miqdor* (n, p) *parametrli binomial taqsimot qonuniga ega deyiladi, agarda* $P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, 2, ..., n$ *bo‘lsa. Bu yerda* $0 < p < 1, \quad C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ *va Nyuton binomiga asosan*

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 1$$

bo‘ladi.

Ma'lumki $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liqsiz, bir xil Bernulli taqsimot qonuniga ega bo'lsa, $S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ (n, p) parametrli binomial taqsimot qonuniga ega bo'ladi (1.5 masalaga qarang) va matematik kutilma va dispersiyaning xossalariga ko'ra , $MS_n = np, \; DS_n = npq$ bo'ladi.

3.Puasson taqsimoti. ξ *tasodifiy miqdor* $\lambda > 0$ *parametrli Puasson taqsimot qonuniga ega deyiladi, agarda*

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

bo'lsa.

e^{λ} funksiyaning Makloren qatoriga yoyilmasidan foydalansak,

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1,$$

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$$

kyelib chiqadi. Shunga o'xshash $D\xi = \lambda$ tenglikni hosil qilish mumkin. Agar ξ_1 va ξ_2 tasodifiy miqdorlar λ_1 va λ_2 parametrli Puasson taqsimotiga ega bo'lib, ular bog'liqsiz, ya'ni ixtiyoriy $i, \; j = 1, 2, ...$ uchun

$$P(\xi_1 = i, \; \xi_2 = j) = P(\xi_1 = i) P(\xi_2 = j)$$

bo'lsa, $\xi_1 + \xi_2$ tasodifiy miqdor $\lambda_1 + \lambda_2$ parametrli Puasson taqsimoti bo'yicha taqsimlangan bo'ladi. Bu tasdiqni shartli ehtimollik va to'la ehtimollik formulasidan foydalanib, qiyinchiliksiz isbot qilsa bo'ladi (1.6 masalaga qarang).

4. Ko'rsatkichli taqsimot. τ *tasodifiy miqdor* $\lambda > 0$ *parametrli ko'rsatkichli (yoki eksponensial) taqsimot qonuniga ega deyiladi, agarda uning taqsimot funksiyasi*

$$F(x) = P(\tau < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

ko'rinishda bo'lsa. Bu holda τ *ga mos zichlik funksiyasi*

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

bo'ladi.

Bo'laklab integrallash yordamida τ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi mos ravishda

$$M\tau=\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda},$$

$$D\tau=M\tau^2-(M\tau)^2=\int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

ekanligini keltirib chiqarish qiyin emas (mustaqil ravishda tekshirib ko'ring).

Endi ko'rsatkichli taqsimot qonunining juda muhim bo'lgan bir xossasini ko'rib chiqamiz.

Lemma1. *τ tasodifiy miqdor λ - parametrli ko'rsatkichli taqsimot qonuniga ega bo'lsin. U holda ixtiyoriy $x>0,\ \ y>0$ uchun*

$$P\left(\tau>x+y \big/ \tau>x\right)=P(\tau>y) \qquad (2)$$

bo'ladi.

Isboti. A va B hodisalar uchun shartli ehtimollik

$$P\left(A/B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

formula orqali aniqlanar edi. Agar $A=\{\tau>x+y\},\ \ B=\{\tau>x\}$ deb olsak,

$$P\left(\tau>x+y \big/ \tau>x\right)=\frac{P\left(\{\tau>x+y\}\cap\{\tau>x\}\right)}{P(\tau>x)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Agar τ tasodifiy miqdor $x+y$ dan katta bo'lsa, u albatta x dan ham katta bo'ladi. Shuning uchun $A\subseteq B$ munosabat o'rinli bo'lib, undan $A\cap B=A$ va

$$P\left(\tau > x+y \middle/ \tau > x\right) = \frac{P\left(\tau > x+y\right)}{P(\tau > x)} \tag{3}$$

tengliklar kelib chiqadi. Ko‘rsatkichli taqsimot qonuniga ega bo‘lgan tasodifiy miqdor uchun (1) ga ko‘ra

$$P(\tau > x) = 1 - \mathrm{P}(\tau \le x) = e^{-\lambda x}$$

$$P(\tau > x+y) = e^{-\lambda(x+y)}$$

bo‘ladi. Bu tengliklardan va (3) dan lemmaning isboti kelib chiqadi.

Izoh. Yuqorida keltirilgan xossani yanada yaqqolroq tasavvur qilish uchun, faraz qilaylik, τ elektrik lampochkaning “yashash vaqti”, ya’ni lampochkaning yaroqsiz holga kelguncha yoritish muddati bo‘lsin. (2) munosabat shuni bildiradiki, agar lampochka x momentda ishlab turgan, ya’ni yaroqsiz holga kelmagan bo‘lsa, uning yana y vaqt davomida “yashash” ehtimolligi yangi lampochkaniki kabi bo‘ladi. Bu xossa “eskirmaslik” xossasi deb ham ataladi.

Endi matematikada ayniyatlarni, tengsizliklarni va boshqa munosabatlarni isbotlashda ko‘p qo‘llaniladigan *matematik induksiya* usulini eslatib o‘tamiz. Faraz qilaylik, biror $T(n)$ tasdiqni ixtiyoriy natural son n uchun to‘g‘riligini isbotlash talab qilinsin (matematik logika tilida aytganda, $T(n)$- natural sonlar to‘plamida berilgan predikat). Buning uchun

1) $T(n)$ tasdiq $n=1$ da o‘rinli ekanligi ko‘rsatiladi;

2) $n=k$ da, ya’ni $T(k)$ o‘rinli, deb faraz qilinadi;

3) $n=k+1$ da ham o‘rinli ekanligi isbotlanadi. Mantiqiy nuqtai nazardan qaralsa, shu bilan $T(n)$ tasdiq ixtiyoriy natural son n uchun isbot qilingan bo‘ladi.

§1 ga masalalar

1.1. Tasodifiy hodisalar ustida amallarning asosiy xossalarini yozing.

1.2. Ixtiyoriy A va B hodisalar uchun
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ayniyatlarni isbotlang.

1.3. Ixtiyoriy A va B hodisalar uchun

$$P(A \cup B) = P(A) + \mathrm{P(B)} - \mathrm{P}(A \cap B)$$

ekanligini isbotlang.

1.4. To‘la ehtimollik formulasini $n = 2$ uchun isbotlang.

1.5. $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ o‘zaro bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar $p > 0$ parametrli bir xil Bernulli taqsimotiga ega bo‘lsa, $S_n = \xi_1 + \xi_2 + ...\xi_n$ tasodifiy miqdor (n, p) parametrli binomial taqsimotiga egaligini ko‘rsating.

1.6. ξ_1, ξ_2 tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz bo‘lib, mos ravishda λ_1 va λ_2 parametrli Puasson taqsimotiga ega bo‘lsin. $\xi_1 + \xi_2$ va $\xi_1 - \xi_2$ tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlarini aniqlang.

1.7. τ_1, τ_2 tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz bo‘lib, mos ravishda λ_1 va λ_2 parametrli ko‘rsatkichli taqsimlangan bo‘lsin. $\tau_1 + \tau_2$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini toping.

1.8. 1.7. masala shartlari ostida $\tau = \min\{\tau_1, \tau_2\}$ tasodifiy miqdor $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ parametr bilan ko‘rsatkichli taqsimlanganligini isbotlang.

1.9. Matematik induksiya usulidan foydalanib,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}, \quad n = 1, 2, ...$$

N’yuton binomi formulasini isbotlang.

1.10. Matematik induksiya usulidan foydalanib, agar $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ tasodifiy miqdorlar mos ravishda $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ parametrli Puasson taqsimot qonuni bo‘yicha taqsimlangan va ular o‘zaro bog‘liqsiz bo‘lsa, $\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ tasodifiy miqdor $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$ parametrli Puasson taqsimot qonuniga ega ekanligini isbotlang.

§2. Talablarning eng sodda (Puasson) oqimi

$\tau_1, \tau_2, ...\tau_n, ...$ o‘zaro bog‘liqsiz $\lambda > 0$ parametrli ko‘rsatkichli taqsimot qonuniga ega tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo‘lsin. τ_i tasodifiy miqdorni xizmat ko‘rsatish stansiyasiga $(i-1)$- mijoz bilan i- mijoz kelish vaqtlari oralig‘i sifatida talqin qilish mumkin. Agar hisobni

t_0 momentdan boshlasak, birinchi mijoz stansiyaga $t_1 = t_0 + \tau_1$ momentda, ikkinchisi $t_2 = t_0 + \tau_1 + \tau_2$ momentda, va hokazo, $k-$ mijoz $t_k = t_0 + \tau_1 + \tau_2 + ... + \tau_k$ momentda keladi.

Ta'rif. *Agar* $\tau_1, \tau_2, ...\tau_n, ...$ *tasodifiy miqdorlar* λ *parametrli ko'rsatkichli taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'lsa,*

$$t_0 = 0, \ \ t_k = t_{k-1} + \tau_k, \quad k = 1, 2, ...$$

ko'rinishidagi $t_0, t_1, t_2, ... \left(\{t_k\}_{k=0}^{\infty} \right)$ *tasodifiy miqdorlar ketma-ketligiga eng sodda oqim yoki Puasson oqimi deyiladi.*

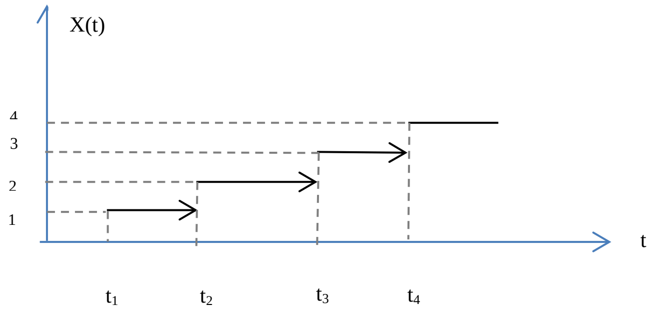
Agar mijozlar xizmat ko'rsatish stansiyasiga eng sodda oqimga mos ravishda kelsalar, keyin ko'ramizki ((9)), λ parametr stansiyaga vaqt birligi orasida kelgan mijozlar sonining matematik kutilmasiga, ya'ni o'rta qiymatiga teng bo'ladi.

Eslatib o'tamiz, ushbu qo'llanmada biz, asosan, kirish oqimi eng sodda oqim bo'lgan ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlarini qaraymiz.

Eng sodda oqim $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ uchun $X(t)$ orqali t momentgacha kelgan mijozlar sonini belgilaymiz; boshqacha aytganda,

$$X(t) = \max\{k \geq 0 : \ t_k \leq t\}.$$

Tabiiyki, $X(t)$ tasodifiy funksiya manfiy bo'lmagan butun sonlarni qabul qiladi va $t = t_1, t = t_2, ...$ momentlarda 1 birlikka ortib boradi. Bu funksiyaning grafigini tasvirlaymiz (1-rasm).



1-rasm.

t vaqt mobaynida stansiyaga aynan k ta $(k = 0, 1, 2, \ ...)$ mijozning kelish ehtimolligini

$$P_k(t) = P(X(t) = k)$$

orqali belgilaymiz.

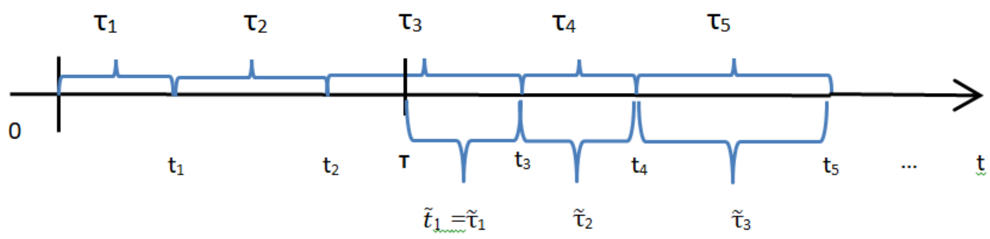
Teorema 1.

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0,1,2, \ldots$$

tenglik o'rinlidir.

Teorema 1 ni isbot qilishdan avval ba'zi yordamchi tushuncha va tasdiqlarni qaraymiz.

$\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ eng sodda oqim va $T > 0$ tasodifiy bo'lmagan vaqt momenti bo'lsin (2-rasm).



2-rasm.

T dan katta va unga eng yaqin bo'lgan t_k gacha bo'lgan vaqt oralig'ini $\tilde{\tau}_1$ orqali belgilaymiz, ya'ni

$$\tilde{\tau}_1 = \min\{t_k - T : t_k - T > 0\}.$$

Navbatdagi mijoz kelguncha ketgan vaqtni $\tilde{\tau}_2$ va h.k. belgilaymiz. 2-rasmda $\tau_1 = \tau_3 - T$, $\tau_2 = \tau_4$ va h.k. T momentdan keyin birinchi kelgan mijozning tartib raqami tasodifiy bo'ladi (2-rasmda bu 3 ga teng).

$$\tilde{\tau}_1 = t_k - T, \quad \tilde{\tau}_{1+j} = \tau_{k+j},$$

$$k = \min\{m \geq 1 : t_m > T\}, \quad j = 1,2,...,$$

$$\tilde{t}_0 = 0, \quad \tilde{t}_1 = \tilde{\tau}_1, \quad \tilde{t}_2 = \tilde{\tau}_1 + \tilde{\tau}_2$$

va h.k. belgilab, $\{\tilde{\tau}_k\}_{k=1}^{\infty}$ ketma-ketlik yordamida yangi

$$\{\tilde{t}\}_{k=0}^{\infty}$$

oqimni hosil qilamiz. Bunday qurilgan oqimni $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ oqimdan T qiymatga *siljigan oqim* deb ataymiz.

Lemma 1.1 dan to‘g‘ridan-to‘g‘ri quyidagi tasdiq kelib chiqadi.

Lemma 2. *Eng sodda oqim* $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ *dan* T *qiymatga siljigan* $\{\tilde{t}\}_{k=0}^{\infty}$ *oqim ham eng sodda oqim bo‘ladi.*

$X(t)$ funksiyaning $(a,b]$ yarim oraliqdagi orttirmasini

$$X\left((a,b]\right) = X(b) - X(a), \quad 0 \le a \le b < \infty$$

ko‘rinishda belgilaymiz. Demak, $X\left((a,b]\right)$ stansiyaga $a < t \le b$ vaqt oralig‘ida kelgan mijozlar soniga teng.

Lemma 3. *Ixtiyoriy* $0 \le a \le b < \infty$ *sonlar uchun*

$$P\Big(X\left((a,b]\right) = k\Big) = P\Big(X\left((0,b-a]\right) = k\Big), \quad k = 0,1,2,...$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Bu lemmaning isboti to‘g‘ridan-to‘g‘ri Lemma 2 dan kelib chiqishini tushunish qiyin emas.

Lemma 3 dagi tenglik $X(t)$ funksiyaning *bir jinsli orttirmalilik* xossasi deyiladi. Buning ma’nosi, $a < t \le b$ vaqt oralig‘ida kelgan mijozlar soni bo‘lgan $X\left((a,b]\right)$ ning taqsimot qonuni faqat shu oraliq uzunligi $b-a$ ga bog‘liq bo‘lar ekan.

Teorema 1 ning isboti. Tabiiyki, yetarli kichik Δt vaqt oralig‘ida birorta ham mijozning kelmaslik ehtimolligi

$$P_0(\Delta t) = P(X(\Delta t) = 0) = P(\tau_1 > \Delta t) = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + o\left(\Delta t\right) \quad (1)$$

bo‘ladi. Endi Δt vaqt oralig‘ida stansiyaga faqat bitta mijoz kelish ehtimolligi $P_1(\Delta t)$ ni aniqlaymiz. Bu ehtimollik, birinchi mijozning kelish momenti Δt dan kichik, ikkinchi mijozning kelish momenti Δt dan katta bo‘lish ehtimolligiga teng, ya’ni

$$P_1(\Delta t) = P(X(\Delta t) = 1) = P(\tau_1 < \Delta t,\ \tau_1 + \tau_2 > \Delta t) =$$

$$= P(\tau_1 < \Delta t) - \mathrm{P}(\tau_1 < \Delta t,\ \tau_1 + \tau_2 < \Delta t) = \mathrm{P}(\tau_1 < \Delta t) - P(\ \tau_1 + \tau_2 < \Delta t).$$

Oxirgi tenglik $\{\tau_1+\tau_2<\Delta t\}\subseteq\{\tau_1<\Delta t\}$ munosabatdan kelib chiqadi. Bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar yig‘indisining “tugun” formulasidan foydalanib,

$$P(\tau_1+\tau_2<\Delta t)=\int_0^{\Delta t}(1-e^{-\lambda(\Delta t-x)})d(1-e^{-\lambda x})=$$

$$=-\lambda\int_0^{\Delta t}(1-e^{-\lambda\Delta t}\cdot e^{\lambda x})\cdot e^{-\lambda x}dx=-\lambda\int_0^{\Delta t} e^{-\lambda x}dx+\lambda\int_0^{\Delta t} e^{-\lambda\Delta t}dx=$$

$$=e^{-\lambda\Delta t}-1+\lambda\Delta te^{-\lambda\Delta t}=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)-1+\lambda\Delta t+o(\Delta t)=o(\Delta t) \quad (2)$$

ni hosil qilamiz. $P(\tau_1<\Delta t)=1-\mathrm{P}(\tau_1>\Delta t)$ bo‘lganligi uchun (1) va (2) munosabatlardan

$$P_1(\Delta t)=P(X(\Delta t)=1)=\lambda\Delta t+o(\Delta t) \quad (3)$$

kelib chiqadi.

Hosil qilingan (1) , (3) tengliklardan Δt vaqt oralig‘ida bittadan ko‘p sondagi mijozlarning kelish ehtimolligi ham Δt ga nisbatan cheksiz kichik $(o(\Delta t))$ miqdor ekanligini ko‘rish mumkin, ya’ni

$$P(X(\Delta t)\geq 2)=P_2(\Delta t)+P_3(\Delta t)+...$$

$$=1-P(X(\Delta t)=0)-P(X(\Delta t)=1)=$$

$$=1-(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t))-(\lambda\Delta t+o(\Delta t))=o(\Delta t). \quad (4)$$

$P_n(t)$ ni ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimiga t vaqt mobaynida aynan n ta talab tushish ehtimolligi, deb talqin qilish mumkin. Tabiiyki, $\sum_{k=0}^{\infty}P_k(t)=1,$ chunki ixtiyoriy t vaqt mobaynida tizimga birorta ham talab tushmagan yoki qandaydir sondagi talablar tushgan bo‘lishi mumkin. Agar Δt yetarlicha kichik bo‘lsa, lemma 2 va (1)-(4) tengliklardan $n\geq 1$ da

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)P_0(\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t))=P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+o(\Delta t),$$

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)P_0(\Delta t) + \mathrm{P}_{n-1}(t)P_1(\Delta t) + P_{n-2}(t)P_2(\Delta t) + ... + P_0(t)P_n(\Delta t) =$$

$$= P_n(t)(1-\lambda\Delta t + o(\Delta t)) + P_{n-1}(t)(\lambda\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t) =$$

$$= P_n(t)(1-\lambda\Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t) \qquad (5)$$

kelib chiqadi. Haqiqatan ham (5) dagi birinchi tenglikning chap tomonida $t+\Delta t$ vaqt mobaynida birorta ham talab tushmaslik hodisasining ehtimolligi turibdi. Ravshanki, bu ehtimollik, bog‘liqsiz hodisalar ko‘paytmasining ehtimolligi formulasiga asosan, t momentgacha talab tushmaslik ehtimolligini Δt uzunlikdagi vaqt intervalida talab tushmaslik ehtimolligiga ko‘paytmasiga teng. Ikkinchi tenglik esa, to‘la ehtimollik formulasiga asoslanadi va bunda birinchi va ikkinchi hadlar e’tiborga olinadi, chunki Δt vaqt oralig‘ida bittadan ko‘p talablarning tushish ehtimolligi, (4) ga asosan, Δt ga nisbatan cheksiz kichik miqdordir. (5) tengliklarda mos ravishda $P_0(t)$ va $P_n(t)$ larni chap tomonga o‘tkazib va Δt ga bo‘lib, quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \quad ,$$

$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \, .$$

$\Delta t \to 0$ da limitga o‘tsak, chap tomonlar $P_n'(t) = \dfrac{dP_n(t)}{dt}$ hosilalarga intiladi va

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$

$$(6)$$

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t), \;\; n = 1, 2, ...$$

bo‘ladi. Bu esa, t ga nisbatan chiziqli differensial, n ga nisbatan esa, chiziqli ayirmali birinchi tartibli tenglamalardir.

(6) tenlamalarni bir necha usulda, xususan, quyidagi hosil etuvchi funksiya

$$P(z,t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n = P_0(t) + z P_1(t) + z^2 P_2(t) + ... \qquad (7)$$

yordamida hal etish mumkin. Agar hosil etuvchi funksiya $P(z,t)$ ma'lum bo'lsa, uni z bo'yicha n marta differensiallab, $n!$ ga bo'lib va $z=0$ qiymatni qo'yib, $P_n(t)$ ni topish mumkin, ya'ni

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n P(z,t)}{\partial z^n}\bigg|_{z=0}. \qquad (8)$$

Avval ta'kidlaganimizdek, $P_0(0)=1$, ya'ni $t=0$ boshlang'ich momentda tizimda talablar (mijozlar) bo'lmasin. Bu shartning buzilishi, ya'ni boshlang'ich $t=0$ momentda tizimda bir nechta talablarning bo'lishi $(P_i(0)=1,\ i \geq 1)$, ko'rish mumkinki, jiddiy qiyinchiliklarga olib kelmaydi. Shunday qilib,

$$P(z,0) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) = P_0(0) = 1.$$

Yana shuni qayd etamizki,

$$P(1,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mathrm{t}) = 1$$

va

$$\frac{\partial P(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mathrm{t})\, \mathrm{z}^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(\mathrm{t})\, \mathrm{z}^n.$$

Agar (6) tenglamalarning ikkala tomonini z^n ga ko'paytirib, so'ngra yig'ib chiqsak, chap tomonlarning yig'indisi $\dfrac{\partial P(z,t)}{\partial t}$ ga, o'ng tomondagi birinchi hadlarning yig'indisi $-\lambda P(z,t)$ ga, ikkinchi hadlarning yig'indisi esa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda P_{n-1}(\mathrm{t})\, \mathrm{z}^n = \lambda z P_0(t) + \lambda z^2 P_1(t) + ... = \lambda z P(\mathrm{z},t)$$

ga teng bo'ladi. Shunday qilib, (6) tenglamalar sistemasi hosil etuvchi $P(z,t)$ funksiya uchun

$$\frac{\partial P(z,t)}{\partial t} - \lambda(z-1)P(z,t) = 0$$

ko‘rinishidagi chiziqli differensial tenglamaga keladi. Bu esa, matematik analizning umumiy kurslarida o‘rganiladigan eng sodda birinchi tartibli oddiy differensial tenglama bo‘lib, uning umumiy yechimi

$$P(z,t) = Ce^{\lambda(z-1)t}$$

bo‘ladi. Bu yechim ekanligini o‘rniga qo‘yish bilan tekshirib ko‘rish mumkin. $P(z,0)=1$ boshlang‘ich shartni hisobga olsak, $C=1$ va

$$P(z,t) = e^{\lambda(z-1)t}$$

yechimga kelamiz. (8) formulaga asosan, talab qilingan

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}, \quad P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}, \dots, P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

natijaga kelamiz. Teorema 1 isbotlandi.

Agar $t=1$ deb olsak,

$$P_n(1) = P(X(1) = n)$$

stansiyaga vaqt birligi ichida kelgan mijozlar sonining taqsimotini beradi. Bu esa, yuqorida ko‘rganimizdek, λ parametrli Puasson taqsimotidir va

$$MX(1) = \lambda, \tag{9}$$

ya’ni, λ parametrli eng sodda oqim bilan stansiyaga vaqt birligi oralig‘ida kelgan mijozlar (ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimiga tushgan talablar) sonining matematik kutilmasi (o‘rta qiymati) shu λ parametrga teng bo‘lar ekan.

Demak, (9) ga ko’ra, t vaqt mobaynida eng sodda oqim bo‘yicha stansiyaga (ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimiga) kelgan mijozlar (tushgan talablar) soni λt parametrli Puasson taqsimot qonuniga bo‘ysinar ekan.

Lemma 4. *Ixtiyoriy m ta $(m \ge 2)$ kesishmaydigan*

$$\left(b_0, b_1\right], \left(b_1, b_2\right], \dots \left(b_{m-1}, b_m\right], \quad 0 = b_0 \le b_1 \le \dots \le b_m < \infty,$$

yarim oraliqlar uchun

$$X\left(\left(b_0, b_1\right]\right), X\left(\left(b_1, b_2\right]\right), \dots X\left(\left(b_{m-1}, b_m\right]\right)$$

tasodifiy miqdorlar o‘zaro bog‘liqsiz bo‘ladi, ya’ni ixtiyoriy manfiy bo‘lmagan butun $i_1, i_2, ..., i_m$ *sonlar uchun*

$$P\Big(X\left((b_0,b_1]\right)=i_1,\ X\left((b_1,b_2]\right)=i_2\ ,\ ...\ X\left((b_{m-1},b_m]\right)=i_m \Big)= \tag{10}$$

$$= P\Big(X\left((b_0,b_1]\right)=i_1)\cdot \mathrm{P}(X\left((b_1,b_2]\right)=i_2\ )\ ...\ P(X\left((b_{m-1},b_m]\right)=i_m \Big)$$

bo‘ladi.

Isboti. Lemma 3 va teorema 1 ga asosan lemma 4 ni isbotlash uchun

$$P\Big(X\left((b_0,b_1]\right)=i_1,\ X\left((b_1,b_2]\right)=i_2\ ,\ ...\ X\left((b_{m-1},b_m]\right)=i_m \Big)=$$

$$= e^{-\lambda(b_1-b_0)}\cdot\frac{(\lambda(b_1-b_0))^{i_1}}{i_1!}\cdot e^{-\lambda(b_2-b_1)}\cdot\frac{(\lambda(b_2-b_1))^{i_2}}{i_2!}... \tag{11}$$

$$...\ e^{-\lambda(b_m-b_{m-1})}\cdot\frac{(\lambda(b_m-b_{m-1}))^{i_m}}{i_m!}$$

ekanligini ko‘rsatish kifoya.

(11) munosabatni $k=i_1+i_2+...+i_m$ soni bo‘yicha matematik induksiya metodini qo‘llash bilan isbotlash mumkin.

$k=0$ bo‘lganda (10) ga asosan

$$P\Big(X\left((b_0,b_1]\right)=0,\ X\left((b_1,b_2]\right)=0,\ ...\ X\left((b_{m-1},b_m]\right)=0\Big)=$$

$$= e^{-\lambda(b_1-b_0)}\cdot e^{-\lambda(b_2-b_1)}...e^{-\lambda(b_m-b_{m-1})},$$

ya’ni (11) tenglik o‘rinli.

Faraz qilamiz, (11) formula barcha $k\le n$ lar uchun o‘rinli bo‘lsin.

$$k=i_1+i_2+...+i_m=n+1,\ \ s=\min\left\{\, j\ge 1:\ i_j\ge 1\right\}$$

bo‘lsa, to‘la ehtimollik formulasiga (§1) ko‘ra ,

$$P\equiv P\Big(X\left((b_0,b_1]\right)=i_1,\ X\left((b_1,b_2]\right)=i_2\ ,\ ...\ X\left((b_{m-1},b_m]\right)=i_m \Big)=$$

$$= \int_{b_{s-1}}^{b_s}\lambda e^{-\lambda u}P\Big(X\left((b_0,b_1]\right)=0,...,X\left((b_{s-2},b_{s-1}]\right)=$$

$$= 0, X\left(\left(u, b_s\right]\right) = i_s - 1,\ X\left(\left(b_s, b_{s+1}\right]\right) = i_{s+1}, \ldots,$$

$$\ldots, X\left(\left(b_{m-1}, b_m\right]\right) = i_m)du$$

bo‘ladi. Lemma 2 va qilgan farazimizga ko‘ra ($k = 0 + \ldots + 0 + i_s - 1 + i_{s+1} + \ldots + i_m = n$ bo‘lgani uchun)

$$P(X\left(\left(b_0, b_1\right]\right) = 0, \ldots,\ X\left(\left(b_{s-2}, b_{s-1}\right]\right) = 0, X\left(\left(u, b_s\right]\right) =$$

$$= i_s - 1, X\left(\left(b_s,\ b_{s+1}\right]\right) = i_{s+1}, \ldots.., X\left(\left(b_{m-1},\ b_m\right]\right) = i_m\ ) =$$

$$= P(X\left(\left(b_0,\ b_1\right]\right) = 0) \ldots P\left(X\left(\left(b_{s-2},\ b_{s-1}\right]\right) = 0\right) \cdot \mathrm{P}(\ X\left(\left(0,\ b_s - u\right]\right) =$$

$$= i_s - 1, X\left(\left(b_s - \mathrm{u},\ b_{s+1} - u\right]\right) = i_{s+1}, \ldots X\left(\left(b_{m-1} - u,\ b_m - u\right]\right) =$$

$$= i_m\ ) = e^{-\lambda(b_1 - b_0)} \cdots e^{-\lambda(b_{s-1} - b_{s-2})}.$$

$$.e^{-\lambda(b_s - u)} \cdot \frac{(\lambda(b_s - u))^{i_s - 1}}{(i_s - 1)!} \ldots\ e^{-\lambda(b_m - b_{m-1})} \cdot \frac{(\lambda(b_m - b_{m-1}))^{i_m}}{i_m!}.$$

munosabatlar o‘rinlidir. Shuning uchun

$$P = \int_{b_{s-1}}^{b_s} \lambda e^{-\lambda u} e^{-\lambda(b_s - u)} \cdot \frac{(\lambda(b_s - u))^{i_s - 1}}{(i_s - 1)!} \ldots e^{-\lambda(b_m - b_{m-1})} \cdot \frac{(\lambda(b_m - b_{m-1}))^{i_m}}{i_m!} du =$$

$$= e^{-\lambda b_s} \int_{b_{s-1}}^{b_s} \lambda \frac{(\lambda(b_s - u))^{i_s - 1}}{(i_s - 1)!} du \ldots e^{-\lambda(b_m - b_{m-1})} \cdot \frac{(\lambda(b_m - b_{m-1}))^{i_m}}{i_m!} =$$

$$= e^{-\lambda(b_1 - b_0)} \ldots e^{-\lambda(b_{s-1} - b_{s-2})} \cdot e^{-\lambda(b_s - b_{s-1})} \cdot \frac{(\lambda(b_s - b_{s-1}))^{i_s}}{i_s!} \ldots$$

$$\ldots e^{-\lambda(b_m-b_{m-1})}\cdot\frac{(\lambda(b_m-b_{m-1}))^{i_m}}{i_m!}.$$

Lemma isbot qilindi.

Lemma 4 da keltirilgan xossa $X(t)$ tasodifiy jarayon orttirmalarining *bog'liqsizlik* xossasi deyiladi.

Yuqoridagilardan xulosa qilib aytganda, $X(t)$ bir jinslilik, orttirmalari bog'liqsizlik xossalariga ega bo'lib, $X\left(\left(a,b\right]\right)$ orttirma $\lambda(b-a)$ parametrli Puasson taqsimotiga ega ekan. $X(t)$ ni *bir jinsli Puasson jarayoni* deb ataladi.

Endi eng sodda oqimning (demak, Puasson jarayonining) yana ikkita muhim xossalarini ko'rib chiqamiz.

Mos ravishda $\lambda^{(1)},\lambda^{(2)}$ parametrli ikkita bog'liqsiz eng sodda

$$\left\{t_k^{(1)}\right\}_{k=0}^{\infty}, \qquad \left\{t_k^{(2)}\right\}_{k=0}^{\infty}$$

oqimlar berilgan bo'lsin.

Ta'rif. *Agar $\{t_k\}$ to'plam $\left\{t_k^{(1)}\right\}$, $\left\{t_k^{(2)}\right\}$ to'plamlarning birlashmasidan iborat bo'lib, $\{t_k\}$ to'plam elementlari o'sish tartibida joylashtirilgan bo'lsa, $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ oqimga $\left\{t_k^{(1)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ va $\left\{t_k^{(2)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ oqimlarning qo'shilishidan hosil bo'lgan oqim deyiladi*.

Lemma 5. *Agar $\left\{t_k^{(1)}\right\}_{k=0}^{\infty}$, $\left\{t_k^{(2)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ mos ravishda $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ parametrli eng sodda oqimlar bo'lsa, ularning qo'shilishidan hosil bo'lgan $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ oqim $\lambda=\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}$ parametrli eng sodda oqim bo'ladi.*

Isboti. Agar $X^{(1)}(t)$, $X^{(2)}(t)$ mos ravishda $\left\{t_k^{(1)}\right\}_{k=0}^{\infty}$, $\left\{t_k^{(2)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ oqimlarga mos keluvchi Puasson jarayonlari bo'lsa, ravshanki, $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ oqimga

$$X(t)=X^{(1)}(t)+X^{(2)}(t)$$

jarayon mos keladi. $\lambda^{(1)}$ va $\lambda^{(2)}$ parametrli Puasson taqsimotiga ega bo‘lan bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar yig‘indisi $\lambda=\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}$ parametrli Puasson taqsimot qonuniga ega ekanligidan (§1, p.3) lemmaning isboti osongina kelib chiqadi.

Eng sodda

$$\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$$

oqimning ikkita oqimga ajralish jarayoniga to‘xtalamiz. Buning uchun bog‘liqsiz bir xil taqsimlangan faqat 0 va 1 qiymatlarni q va p ehtimollik bilan qabul qiladigan (ya’ni, Bernulli taqsimotiga ega bo‘lgan) $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n, ...$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini qaraymiz:

$$P(\xi_i=1)=p, \quad P(\xi_i=0)=q, \quad p+q=1, \quad p\geq 0, \quad q\geq 0, \quad i=1,2,....$$

$\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ eng sodda oqimni ikkita oqimga bo‘linishini quyidagicha amalga oshiramiz: agar $\xi_i=1$ bo‘lsa t_i ni birinchi oqimga, agarda $\xi_i=0$ bo‘lsa, t_i ni ikkinchi oqimga (to‘plamga) kiritamiz. Oqimning 2 ta oqimga bunday bo‘linishiga p *parametrli Bernulli bo‘linishi* deb ataladi.

Lemma 6. $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ *eng sodda oqimning* p *parametrli Bernulli bo‘linishidan hosil bo‘lgan* $\left\{t_k^{(1)}\right\}_{k=0}^{\infty}$, $\left\{t_k^{(2)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ *oqimlar mos ravishda* $\lambda^{(1)}=\lambda p$ *va* $\lambda^{(2)}=\lambda q$ *parametrli bog‘liq bo‘lmagan eng sodda oqimlar bo‘ladi.*

Lemmaning isboti quyida keltirilgan 2.5 masalaning yechilishidan kelib chiqadi.

Izoh. Agar boshlang‘ich $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ eng sodda oqimni mijozlarning kelish tartibiga qarab, birinchisiga juft raqamli mijozlarni, ya’ni t_{2k} larni, ikkinchisiga toq raqamli mijozlarni, ya’ni t_{2k+1} larni bo‘lib chiqsak, hosil bo‘lgan oqimlar eng sodda oqimlar bo‘lmaydi.

§ 2 ga masalalar

2.1. Do‘konga vaqt birligi oralig‘ida kiruvchi xaridorlar soni λ parametrli Puasson taqsimotiga ega bo‘lsin va har bir xaridor p ehtimollik bilan xarid qilsin. Do‘konga kirgan xaridorlarning xarid qilganlari soni λp parametrli Puasson taqsimot qonuniga ega ekanligini isbot qiling.

2.2.Lemma 5 ning to‘la isbotini keltiring.

2.3. Lemma 6 dan keyingi izohdagi tasdiqni isbotlang.

2.4. Bo‘lingan oqimlar bog‘liqsizligining isbotiga alohida e’tibor bergan holda Lemma 6 ning to‘la isbotini keltiring.

2.5. Xo‘randalar restoranga Puasson oqimiga mos ravishda keladilar va soatiga o‘rtacha 20 ta xo‘randa keladi. Restoran 11^{00} da ochiladi.

a) Agar 11^{07} da restoranda 18 ta xo‘randa bo‘lsa, soat 11^{12} da ularning soni 20 ta bo‘lish ehtimolligini toping.

b) Agar oxirgi xo‘randa restoranga 11^{25} da kirgan bo‘lsa, undan keyingi yangi xo‘randaning $11^{28}-11^{30}$ vaqt oralig‘ida kelish ehtimolligini toping.

2.6. Mahsulot 80 birlik hajmga (sig‘imga) ega bo‘lgan ombordan Puasson oqimiga mos ravishda bir kunda o‘rtacha 5 birlikdan olinadi.

a) Birinchi ikki kunda omborxonadan 10 birlik mahsulot olinishining ehtimolligini toping.

b) To‘rtinchi kunning oxiriga kelib omborxonada mahsulot qolmaslik ehtimolini toping.

2.7. Agar t_1- birinchi mijozning stansiyaga kelish momenti (ya’ni λ-ko‘rsatkichli tasodifiy miqdor) bo‘lsa, $\Delta > 0,\ \Delta \to 0$ da

$$P(t_1 \in (t,\ t+\Delta) = \lambda e^{-\lambda t} \cdot \Delta + o(\Delta)$$

ekanligini ko‘rsating. Eslatma: $\alpha(\Delta) = o(\Delta)$ bo‘ladi, agarda $\lim\limits_{\Delta \to 0} \dfrac{\alpha(\Delta)}{\Delta} = 0$ bo‘lsa.

§3. Tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayoni

Faraz qilaylik, biz qandaydir tirik mavjudotlar hamjamiyatining (yoki populyatsiyasining) vaqt bo‘yicha rivojlanishini o‘rganayotgan bo‘laylik. Bu qandaydir chegaralangan hududdagi hayvonot yoki o‘simliklar dunyosi bo‘lishi mumkin. Bizni faqat o‘rganilayotan hamjamiyatning (populyatsiyaning) eng asosiy ko‘rsatkichi (xarakteristikasi) bo‘lgan, undagi tirik mavjudotlar soni qiziqtirsin. Aniqlik uchun , aytaylik, dunyoning qolgan qismidan ajratilgan (izolyatsiya qilingan) o‘rmondagi (masalan, biror oroldagi) olmaxonlarning populyatsiyasi, ya’ni ular sonining ko‘payishi va kamayishi o‘rganilayotgan bo‘lsin. Olmaxonlar “o‘zlarining qonunlari” asosida ko‘payishi, nobud bo‘lishi mumkin va bizni t momentdagi olmaxonlar soni $X(t)$ qiziqtiradi. Ravshanki, $X(t)$ jarayon manfiy bo‘lmagan butun qiymatlarni qabul qiladi; agar qandaydir t_0 momentda olmaxonlar soni $X(t_0)=0$ bo‘lsa, u $t>t_0$ da o‘zgarmaydi, ya’ni olmaxonlar hamjamiyati (populyatsiyasi) yo‘qoladi. Bunday $X(t)$ jarayonni §2 dagi Puasson jarayoni singari “konstruktiv” holda quramiz.

Ikkita manfiy bo‘lmagan haqiqiy sonlar ketma-ketligi $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ berilgan bo‘lsin. Ularning birinchisi populyatsiyaning ko‘payishiga mos kelsa, ikkinchisi nobud bo‘lishiga mos keladi. Undan tashqari, ikkita bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan $\left\{\tau_i^+\right\}_{i=1}^{\infty}$, $\left\{\tau_i^-\right\}_{i=1}^{\infty}$ $\lambda=1$ parametrli ko‘rsatkichli taqsimlangan, har bir ketma-ketlik ichida o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketliklari berilgan bo‘lsin. Demak, $t\geq 0$ uchun

$$P(\tau_i^+>t)=P(\tau_i^->t)=e^{-t}$$

bo‘ladi. U holda $\dfrac{\tau_i^+}{\lambda_i}$ tasodifiy miqdorlar λ_i parametrli, $\dfrac{\tau_i^-}{\mu_i}$ tasodifiy miqdorlar esa, μ_i parametrli ko‘rsatkichli taqsimot qonuniga ega bo‘ladi, chunki

$$P\left(\frac{\tau_i^+}{\lambda_i} > t\right) = P(\tau_i^+ > \lambda_i t) = e^{-\lambda_i t}, \quad P\left(\frac{\tau_i^-}{\mu_i} > t\right) = P(\tau_i^- > \mu_i t) = e^{-\mu_i t}.$$

$X(t)$ jarayonni quyidagicha quramiz. $X(0) = i_0$, $i_0 \geq 1$ bo‘lsin. Agar

$$t_1 = \tau_1, \quad \tau_1 = \min\left\{\frac{\tau_i^+}{\lambda_{i_0}}, \ \frac{\tau_i^-}{\mu_{i_0}}\right\}$$

deb belgilasak, $X(t)$ jarayon $(0, t_1)$ vaqt oralig‘ida qiymatini o‘zgartirmaydi, ya’ni $X(t_0) = i_0$ bo‘yicha qoladi.

$$\frac{\tau_i^+}{\lambda_{i_0}} \ \text{va} \ \frac{\tau_i^-}{\mu_{i_0}}$$

momentlardan qaysi biri avval kelishiga qarab, t_1 momentda $X(t)$ jarayonning qiymati bir birlikka oshadi yoki kamayadi:

$$X(t_1) = i_1 = \begin{cases} i_0 + 1, \ \text{агар} \quad \dfrac{\tau_i^+}{\lambda_{i_0}} \leq \dfrac{\tau_i^-}{\mu_{i_0}} \quad \text{бўлса}, \\[2ex] i_0 - 1, \ \text{агар} \quad \dfrac{\tau_i^+}{\lambda_{i_0}} > \dfrac{\tau_i^-}{\mu_{i_0}} \quad \text{бўлса}. \end{cases}$$

Shunday qilib, $X(t)$ jarayonning t_1 nuqtadagi qiymati i_1 ga teng bo‘ladi. Agar

$$\tau_2 = \min\left\{\frac{\tau_2^+}{\lambda_{i_1}}, \ \frac{\tau_2^-}{\mu_{i_1}}\right\}, \quad t_2 = t_1 + \tau_2$$

belgilashlar kiritsak, $X(t)$ jarayonning o‘zgarishi (populyatsiyasi) (t_1, t_2) vaqt intervalida yuqoridagi qonuniyatga bo‘ysunadi, ya’ni (t_1, t_2) intervalda o‘zgarmaydi $(X(t) = i_1)$ va t_2 momentda bir birlikka ortadi, agarda

$$\frac{\tau_2^+}{\lambda_{i_1}} \leq \frac{\tau_2^-}{\mu_{i_1}}$$

bo‘lsa. Aks holda bir birlikka kamayadi. Agar $X(0) = 0$ bo‘lsa, $X(t)$ jarayonning qiymati

$$\tau_1 = \frac{\tau_1^+}{\lambda_0}$$

tasodifiy momentda bir birlikka ortadi, ya'ni $X(\tau_1) = 1$ bo'lib qoladi. $X(t)$ jarayonning aniqlanishi shu tariqa davom etadi.

Yuqoridagi tartibda aniqlangan $X(t),\ t \geq 0$ jarayon *vaqt bo'yicha bir jinsli tug'ilish va nobud bo'lish jarayoni* deyiladi. Uning taqsimoti

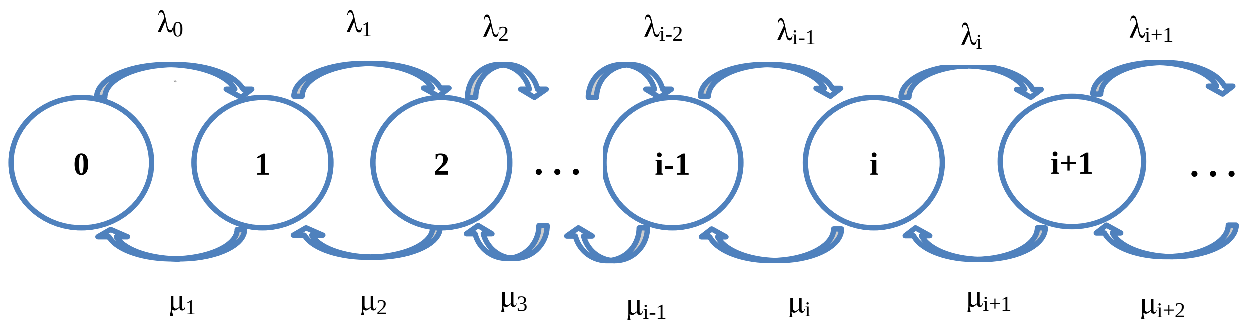
$$\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}, \quad \{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$$

parametrlar va boshlang'ich taqsimot, ya'ni $X(0)$ tasodifiy miqdorning

$$P_k(0) = P(X(0) = k),\ \ k = 0,1,2,...$$

taqsimoti orqali to'la aniqlanadi.

$X(t)$ jarayonning rivojlanishini yaqqolroq tasavvur qilish uchun quyidagi shakldagi diagrammadan foydalanish qulaydir
(1-rasm).



1-rasm.

Shaklning yuqori qismidagi yo'nalishlar (strelkachalar) jarayonning ko'payish dinamikasiga mos keladi: jarayon $i-$ holatdan $(i+1)-$ holatga λ_i intensivlik bilan o'tadi. Quyi qismdagi strelkachalar esa, jarayonning kamayish (nobud bo'lish) dinamikasiga mos keladi: jarayon $i-$ holatdan $(i-1)$- holatga μ_i intensivlik bilan o'tadi.

$$P_k(t) = P(X(t) = k),\ \ t \geq 0,\ \ k = 0,1,2,...$$

funksiyalar tug'ilish va nobud bo'lish jarayoni $X(t)$ ning taqsimotini aniqlaydi. Keyingi paragrafda bu funksiyalar qanoatlantiradigan differensial tenglamalar sistemasini keltiramiz.

Shuni ta’kidlash kerakki, parametrlarning har qanday

$$\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}, \quad \{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$$

ketma-ketligi uchun qiymati doimo chekli bo‘ladigan (buzilmagan) $X(t)$ jarayon mos kelavermaydi. Gap shundaki, agar $i \to \infty$ da λ_i sonlar juda tez o‘sadigan bo‘lsa, ya’ni ko‘payish juda katta intensivlikda (tezlikda) kechsa, u holda $X(t)$ jarayon qandaydir t momentda “portlashi” mumkin, ya’ni $X(t)$ ning ixtiyoriy sondan katta bo‘lish ehtimolligi musbat bo‘lib, cheksizlikkacha o‘sishi mumkin. Bunga misol qilib, bakteriyalarning qulay sharoitlarda ko‘payish jarayonini, portlashga olib keladigan ximik reaksiyalarni ifodalovchi jarayonlarni keltirish mumkin. Demak, tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayonlarining o‘rganishda

$$P(X(t) < \infty) = 1$$

bo‘lishi uchun zarur va yetarli shartlarni aniqlash muhim masalalardan hisoblanar ekan. Endi biz shu masala bilan shug‘ullanamiz.

Barcha $\mu_i = 0$ bo‘lgan tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayonlari *faqat ko‘payuvchi jarayonlar* sirasiga (qatoriga) kiradi. Agar barcha $\lambda_i = 0$ bo‘lsa, bunday jarayonlar *faqat kamayuvchi jarayonlar* deyiladi. Ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimi o‘z faoliyatini tizimda ma’lum sondagi mijozlar bor bo‘lgan holatda boshlab, xizmat ko‘rsatib bo‘lingan mijozlar μ_i intensivlik bilan tizimni tark etsa va yangi mijozlar kelmasa (yoki qabul qilinmasa), bunday tizimlar faqat kamayish jarayonlari orqali ifodalanadi. Bunday jarayonlarga misol qilib, do‘konga yangi tovarlar olib kelinmagan holda mavjud tovarlarni sotish jarayonini yoki yangi mahsulotlar kiritilmagan holda omborxonada mavjud bo‘lgan mahsulotlarni tegishli joylarga tarqatish jarayonini keltirish mumkin. Faqat ko‘payuvchi jarayonlarga ham shunga o‘xshash ko‘plab misollar keltirish mumkin.

Quyidagi lemma faqat ko‘payuvchi bo‘lgan $X(t)$ jarayonning chekli bo‘lishini kafolatlaydigan

$$\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$$

parametrlarga qo‘yiladigan zaruriy va yetarli shartlarni beradi.

Lemma 1. *Barcha* $i \geq 1$ *lar uchun* $\mu_i = 0$ *bo'lsin. U holda* $t > 0$ *ning ixtiyoriy chekli qiymatida* $P(X(t) < \infty) = 1$ *bo'lishi uchun*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti.

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X(t) = k)$$

belgilash kiritamiz. Biz hozircha isbotsiz qabul qiladigan quyidagi tengliklarni § 4 da isbot qilamiz:

$$S_n'(t) = -\lambda_n P_n(t), \quad t \geq 0, \quad n = 0,1,2,... \tag{1}$$

(1) dan $P_0(0) = 1,\ P_k(0) = 0,\ k = 1,2,...$ boshlang'ich shartlarga asosan,

$$1 - S_n(t) = -\int_0^t S_n{}'(u)du = \lambda_n \int_0^t P_n(u)du \tag{2}$$

tenglik kelib chiqadi. $S_n(t)$ n ga nisbatan o'suvchi, ya'ni n ortib borishi bilan uning qiymati ortib boradi.

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1$$

bo'lganligi uchun $\{1 - S_n(t)\}$ ketma – ketlik monoton kamayuvchi va quyidan chegaralangan bo'ladi. Shuning uchun

$$r(t) = \lim_{n \to \infty} (1 - S_n(t))$$

mavjud va ixtiyoriy n uchun $1 - S_n(t) \geq r(t)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. (2) munosabatlarga asosan,

$$\int_0^t P_n(u)du \geq \frac{r(t)}{\lambda_k},$$

$$\sum_{k=0}^{n} \int_0^t P_k(u)du = \int_0^t S_n(u)du \geq r(t) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda_k}$$

bo'ladi. $S_n(t) \leq 1$ tengsizlik o'rinli bo'lganidan

$$t=\int_0^t du \geq \int_0^t S_n(u)du \geq r(t)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\lambda_k}$$

tengsizliklarga ega bo‘lamiz. Ravshanki, agar

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}$$

uzoqlashuvchi bo‘lsa, ixtiyoriy $t>0$ uchun $r(t)=0$ bo‘ladi. Shu bilan biz lemmaning yetarlilik shartini, ya’ni

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}=\infty$$

shartdan ixtiyoriy $t\geq 0$ uchun $P(X(t)<\infty)=1$ kelib chiqishini isbotladik. Ikkinchi tomondan (2) ga asosan

$$\lambda_n\int_0^t P_n(u)du = 1-S_n(t)\leq 1,$$

ya’ni

$$\int_0^t P_n(u)du \leq \frac{1}{\lambda_n}$$

tengsizlik o‘rinli. Oxirgi tengsizliklardan

$$\int_0^t S_n(u)\,du=\sum_{k=0}^{n}\int_0^t P_k(u)\,du \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\lambda_k}$$

munosabatni hosil qilamiz. Shuning uchun

$$\int_0^t \lim_{n\to\infty} S_n(u)du \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Agar $P(X(t)<\infty)=1$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $u>0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} S_n(u)=1$$

bo‘ladi. Demak, t ning ixtiyoriy noldan katta qiymatida

$$\int_0^t \lim_{n\to\infty} S_n(u)du=\int_0^t du = t \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}$$

tengsizlik o‘rinlidir. Bundan esa,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}=\infty$$

munosabat kelib chiqadi. Shu bilan ixtiyoriy $t \geq 0$ uchun

$$P(X(t)<\infty)=1$$

o‘rinli bo‘lishidan

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}=\infty$$

kelib chiqishi ko‘rsatildi. Lemma 1 isbotlandi.

Endi $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ parametrli tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayoni $X(t)$ ga mos keluvchi $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$, $(\mu_i=0,\ i=1,2,...)$ parametrli faqat ko‘payish jarayoni bo‘lgan $X^+(t)$ jarayonni qaraymiz. $\{X(t)<\infty\}$ va $\{X^+(t)<\infty\}$ hodisalar uchun

$$\{X^+(t)<\infty\}\subseteq\{X(t)<\infty\}$$

munosabat o‘rinli ekanligini ko‘rish qiyin emas. Shuning uchun lemma 1 dan quyidagi natijani olish mumkin.

Natija. *Agar ixtiyoriy* $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ *parametrli tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayoni* $X(t)$ *uchun*

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}=\infty$$

shart bajarilsa, u holda ixtiyoriy $t \geq 0$ *uchun*

$$P(X(t)<\infty)=1$$

o‘rinli bo‘ladi.

Misol. Tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayoni $X(t)$ uchun $\lambda_i=ci^{\alpha}$, $i=1,2,...$ bo‘lsin. Agar $\alpha \leq 1$ bo‘lsa,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}$$

qator uzoqlashuvchi bo‘ladi va yuqoridagi natijaga asosan, $X(t)$ jarayon bir ehtimollik bilan chekli bo‘ladi. Agar $\alpha>1$ bo‘lib, $X(t)$ faqat ko‘payish jarayoni bo‘lsa, u holda

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}$$

qator yaqinlashuvchi bo‘ladi. Lemma 1 ga asosan, musbat ehtimollik bilan ixtiyoriy chekli t momentda “portlash” yuz berishi, ya’ni $X(t) = \infty$ bo‘lishi mumkin.

§ 3 ga masalalar

3.1. Parametrlari

$$\lambda_k = \begin{cases} (N-k)\lambda, & агар \ \ 0 \le k \le N \quad бўлса, \\ 0, & агар \ \ k > N \quad бўлса, \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} \mathrm{k}\,\mu, & агар \ \ 1 \le k \le N \quad бўлса, \\ 0, & агар \ \ k > N \quad бўлса, \end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘lgan tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayonini qaraymiz. Shu jarayonga mos keluvchi diagrammani tasvirlang.

3.2. Tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayonining parametrlari

$$\lambda_k = k\lambda + \alpha, \ \ k = 0,1,2,...$$

$$\mu_k = k\mu, \quad k = 1,2,...$$

bo‘lsa, unga mos keluvchi diagrammani tasvirlang.

3.3. Bir dona avtomobilga mo‘ljallangan avtomobillar to‘xtash joyini qaraymiz. Band bo‘lgan to‘xtash joyi μ parametrli ko‘rsatkichli taqsimotli tasodifiy τ^- vaqtda bo‘shaydi. To‘xtash joyiga avtomobillar λ parametrli ko‘rsatkichli taqsimlangan tasodifiy τ^+ vaqt oralig‘ida keladi. (To‘xtash joyi band bo‘lsa, navbatdagi kelgan avtomobil joy bo‘shashini kutmaydi, darhol ketadi). $X(t)$ avtomobillar to‘xtash joyidagi t momentdagi avtomobillar soni bo‘lsin. $X(t)$ ga mos keluvchi diagrammani yasang.

3.4. λ parametrli Puasson jarayoniga mos keladigan diagrammani tasvirlang.

3.5. Telefon orqali ma’lumot olmoqchi bo‘lgan mijozlar λ parametrli eng sodda oqimni tashkil etsin. Har bir so‘zlashuv μ ko‘rsatkichli tasodifiy vaqt davom etsin. Demak, tizimda ixtiyoriy t momentda $X(t)=1$ nafar mijoz bo‘lishi mumkin (telefon band) yoki $X(t)=0$ (telefon band emas) bo‘lishi mumkin. $X(t)$ ga mos keluvchi diagrammani chizing.

3.6. 3.5.-masalada telefonning bir nafar mijoz uchun xotirasi bo‘lsin, ya’ni mijoz qo‘ng‘iroq qilganda telefon band, lekin xotirasi band bo‘lmasa, avtomat trubkani qo‘yib, kutishni taklif qiladi. Telefon bo‘shaganda kutayotgan mijozning telefon qo‘ng‘irog‘i jiringlaydi. Agar telefon va xotira band bo‘lsa, mijozga xizmat ko‘rsatish rad etiladi. Agar $X(t)$ tizimdagi mijozlar soni bo‘lsa, unga mos diagrammani tasvirlang.

3.7. 3.5.-masalaning shartlarida avtomatik kommutator, ikkita telefon va har bir telefonning xizmat qiluvchi operatori bo‘lsin. Agar mijoz murojat qilgan paytda band bo‘lmagan telefon bo‘lsa, kommutator avtomatik ravishda mijozni shu telefonga yo‘naltiradi, aks holda mijoz rad etiladi. $X(t)$ tizimdagi mijozlar soni bo‘lsa, unga mos diagramma chizilsin.

3.8. 3.7.-masalaning shartlari ostida kommutator bir nafar mijozga xotirasi mavjud bo‘lsin. $X(t)$ tizimdagi mijozlar sonini ifodalasa, unga mos diagrammani yasang.

3.9. 3.7.-masala shartlarida har bir telefon bir nafardan mijoz uchun xotirasi mavjud bo‘lsin. Agar $X(t)$ sistemadagi mijozlar soniga teng bo‘lsa, shu jarayonga mos keluvchi diagramma aniqlansin.

3.10. $X(t)$ faqat ko‘payuvchi jarayon bo‘lsin. $(\mu_i=0,\ i=1,2,...)$. Ko‘payish intensivligi parametrlari λ_k lar quyidagicha bo‘lganda jarayon chekli bo‘lish $(P(X(t)<\infty)=1)$ yoki bo‘lmasligini aniqlang:

a) $\lambda_k = k\lambda+\alpha,\quad \lambda>0,\quad \alpha>0,\quad k=0,1,...$

б) $\lambda_0=1,\quad \lambda_{k+1}=(k+1)\lambda_k,\qquad k=0,1,...$

в) $\lambda_k=\gamma^k,\qquad k=0,1,...,\qquad \gamma>0$ ning har xil qiymatida.

3.11. Faqat ko‘payish jarayoniga misollar keltiring.

§4. Tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayonlari uchun differensial tenglamalar. Statsionar holat

$X(t)$ tasodifiy jarayon

$$\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}, \quad \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$$

koeffitsiyentlar ketma-ketliklari asosida qurilgan tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayoni bo‘lsin. Qandaydir $0 < a < \infty,\ 0 < b < \infty$ sonlar uchun

$$\lambda_k \le a + bk,\ \ k = 0,1,2,...$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘lsin, deb faraz qilamiz. Bu shart ixtiyoriy $t > 0$ qiymatlarda

$$P(X(t) < \infty) = 1$$

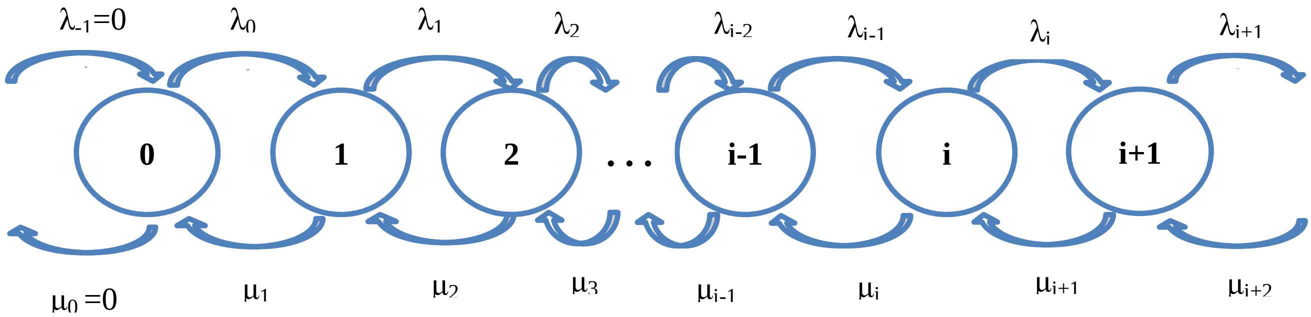
bo‘lishini, ya’ni $X(t)$ jarayon “portlashsiz” rivojlanishini ta’minlaydi (§3 dagi lemma 1 va 3.10. (a) masalaga qarang).

Bundan tashqari, $X(t)$ ga mos diagrammada har bir holatga (hattoki 0 holatga) yuqori strelka chap tomondan kelishini va bunda tug‘ilish (ko‘payish) intensivligi bo‘lgan λ nolga ham teng bo‘lishi mumkinligini (masalan, $\lambda_{-1} = 0$); har bir holatdan esa, quyidagi strelkalar chap tomonga qarab chiqishini va nobud bo‘lish intensivligi μ ham nolga teng bo‘lishi mumkinligini (masalan, $\mu_0 = 0$) kelishib olamiz. Diagrammani bunday qo‘shimcha kelishuvlar orqali to‘ldirish masalaning mohiyatini o‘zgartirmaydi, balki keyingi mulohazalarni yuritishda foydali bo‘ladi. Yuqoridagi kelishuvlar asosida $X(t)$ jarayonga mos keluvchi diagrammani chizamiz (1-rasm).

Avvalgiday, berilgan t momentdagi populyatsiya hajmi (olmaxonlar soni) $X(t)$ ning k ga teng bo‘lish ehtimolligini

$$P_k(t) = P(X(t) = k),\ \ k = 0,1,2,...$$

orqali belgilaymiz.



1-rasm.

1-rasmdagi diagrammaga mos keluvchi tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayoni $X(t)$ to‘la aniqlangan bo‘ladi, agarda uning boshlang‘ich holatini aniqlovchi

$$P_k = P(X(0)=k), \quad k=0,1,2,\ldots \tag{1}$$

ehtimolliklar berilgan bo‘lsa.

Lemma 1. *$X(t)$ jarayon 1-rasmdagi diagrammaga mos keluvchi tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayoni bo‘lib,* (1) *boshlang‘ich shartlar berilgan bo‘lsin. U holda bu jarayonning $P_k(t)$ xarakteristikalari (ehtimolliklari) quyidagi*

$$P_k'(t) = -(\lambda_k + \mu_k)P_k(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t), \quad k=0,1,2,\ldots \tag{2}$$

chiziqli differensial tenglamalar sistemasini va

$$P_k(0)=0, \quad k=0,1,2,\ldots, \quad \sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiradi.

E’tiborli tomoni shundaki, (2) tenglamalar sistemasida, umuman olganda, tenglamalar soni va noma’lumlar soni cheksiz ko‘p bo‘lishi mumkin.

(2) chiziqli tenglamalar sistemasidagi birinchi tenglama ($k=0$ bo‘lganda)

$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t)$$

ko‘rinishga ega bo‘lib, u (2) tenglamalar sistemasidan $\lambda_{-1}=0, \ \mu_0=0$ ekanligini hisobga olganda kelib chiqadi.

Isboti. $k \geq 1$ bo‘lsin. Yetarli kichik $\Delta > 0$ qiymatlarda

$$P_k(t+\Delta)=P(X(t+\Delta)=k)$$

ehtimollikni hisoblaymiz. Quyidagi tasodifiy hodisalarni qaraymiz:

$A_0(t,\Delta)=\{[t,t+\Delta]$ vaqt oralig‘ida $X(t)$ jarayon birorta ham sakrashni amalga oshirmadi},

$A_1(t,\Delta)=\{[t,t+\Delta]$ vaqt oralig‘ida $X(t)$ jarayon faqat bitta sakrashni amalga oshirdi},

$A_2(t,\Delta)=\{[t,t+\Delta]$ vaqt oralig‘ida $X(t)$ jarayon ikki yoki undan ko‘p sakrashni amalga oshirdi}.

U holda $\bigcup\limits_{i=0}^{2} A_i=\Omega$ - muqarrar hodisa, $A_i\cap A_j=\varnothing,\quad i\neq j,\quad i,j=0,1,2,$ ya’ni $A_0(t,\Delta),\ A_1(t,\Delta),\ A_2(t,\Delta)$ lar hodisalarning to‘la gruppasini tashkil etgani uchun shartli ehtimollik va to‘la ehtimollik formulalariga asosan,

$$P_k(t+\Delta)=P(X(t+\Delta)=k)=$$

$$=P\left(X(t+\Delta)=k \Big/ A_0(t,\Delta)\right)\cdot P(A_0(t,\Delta))+$$

$$+P\left(X(t+\Delta)=k \Big/ A_1(t,\Delta)\right)\cdot P(A_1(t,\Delta))+$$

$$+P\left(X(t+\Delta)=k \Big/ A_2(t,\Delta)\right)\cdot P(A_2(t,\Delta))=$$

$$=P(X(t+\Delta)=k;A_0(t,\Delta))+P(X(t+\Delta)=$$

$$=k;A_1(t,\Delta))+P(X(t+\Delta)=k;A_2(t,\Delta))=$$

$$=P(X(t)=k;A_0(t,\Delta))+P(X(t)=$$

$$=k+1,X(t+\Delta)=\mathrm{k},A_1(t,\Delta))+P(X(t)=$$

$$=k-1,X(t+\Delta)=\mathrm{k},A_1(t,\Delta))+P(X(t+\Delta)=k,A_2(t,\Delta))$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

τ_{k-1}^{+}, τ_k^{+}, τ_{k+1}^{+} tasodifiy miqdorlar mos ravishda λ_{k-1}, λ_k, λ_{k+1} parametrli, τ_{k-1}^{-}, τ_k^{-}, τ_{k+1}^{-} tasodifiy miqdorlar esa, mos ravishda μ_{k-1}, μ_k, μ_{k+1} parametrli ko‘rsatkichli taqsimlangan tasodifiy miqdorlar va ular o‘zaro bog‘liqsiz bo‘lsin. $\Delta \to 0$ da $e^{-\Delta} = 1 - \Delta + o(\Delta)$ bo‘lgani uchun

$$P(X(t) = k, A_0(t,\Delta)) = P(X(t) = \mathrm{k})\,\mathrm{P}(\tau_k^{+} > \Delta,\ \tau_k^{-} > \Delta) = \tag{3}$$

$$= \quad P_k(t)e^{-\lambda_k\Delta}e^{-\mu_k\Delta} = P_k(t)(1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta + o(\Delta))$$

bo‘ladi. Xuddi shunga o‘xshash,

$$P(X(t) = k-1, X(t+\Delta) = k, A_1(t,\Delta)) = P_{k-1}(\mathrm{t})\,\mathrm{P}(\tau_{k-1}^{+} \le \Delta, \tau_{k-1}^{-} > \Delta) =$$

$$= P_{k-1}(t)(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_{k-1}\Delta})\,\mathrm{e}^{-\mu_{k-1}\Delta} = P_{k-1}(t)(\lambda_{k-1}\Delta + o(\Delta))(1 - \mu_{k-1}\Delta + o(\Delta)) =$$

$$= P_{k-1}(t)(\lambda_{k-1}\Delta + o(\Delta)),$$

$$P(X(t) = k+1, X(t+\Delta) = k, A_1(t,\Delta)) = P_{k+1}(t)(\mu_{k+1}\Delta + o(\Delta))$$

munosabatlarni hosil qilamiz.

Endi

$$P(X(t+\Delta) = k, A_2(t,\Delta)) = o(\Delta)$$

munosabatni isbotlaymiz. Buning uchun

$$t_1^{*} = \max\{u < t + \Delta : X(u) \ne k\}$$

$X(t)$ jarayonning $t + \Delta$ momentgacha oxirgi sakrash momenti,

$$t_2^{*} = \max\{u < t_1^{*} : X(u) \ne X(t_1^{*})\}$$

$X(t)$ jarayonning t_1^{*} momentgacha oxirgi sakrash momenti, $\tau_1^{*} = t + \Delta - t_1^{*}$, $\tau_2^{*} = t_1^{*} - t_2^{*}$ belgilashlarni kiritamiz. U holda

$$\{X(t+\Delta)=k, A_2(t,\Delta)\}=\{X(t+\Delta)=k, t\le t_2^*\}\subseteq$$

$$\subseteq \; X(t+\Delta)=k,\ \tau_1^*\le\Delta,\ \tau_2^*\le\Delta\}$$

ekanligini tekshirish qiyin emas.

$$P(X(t+\Delta)=k,\ \tau_1^*\le\Delta,\ \tau_2^*\le\Delta)\le(1-e^{-\lambda_{k-1}\Delta})\cdot(1-e^{-\lambda_{k-2}\Delta})+$$

$$+(1-e^{-\lambda_{k-1}\Delta})\cdot(1-e^{-\mu_k\Delta})+(1-e^{-\mu_{k+1}\Delta})\cdot(1-e^{-\mu_{k+2}\Delta})+$$

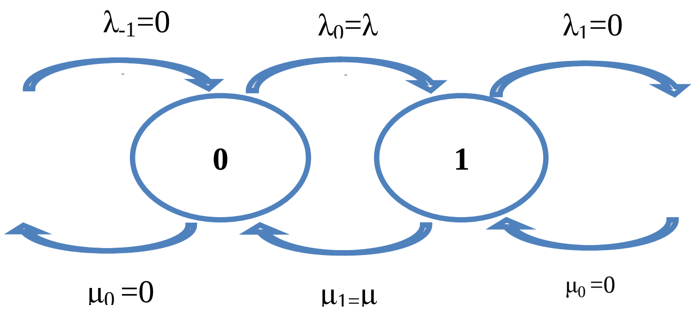
$$+(1-e^{-\mu_{k+1}\Delta})\cdot(1-e^{-\lambda_k\Delta})=o(\Delta)$$

munosabatlarni hisobga olib, yuqorida keltirilgan tengliklarni (3) ga qo‘yib, quyidagi

$$\frac{P_k(t+\Delta)-P_k(t)}{\Delta}=-(\lambda_k+\mu_k)P_k(t)+\lambda_{k-1}P_{k-1}(t)+\mu_{k+1}P_{k+1}(t)+\frac{o(\Delta)}{\Delta}$$

natijaga kelamiz. Oxirgi tenglikda $\Delta\to 0$ da limita o‘tib, (2) tenglamani hosil qilamiz. $k=0$ bo‘lgan holda isbot xuddi shu tartibda olib boriladi (bunda ba’zi qo‘shiluvchilar ishtirok etmaydi xolos). Lemma 1 isbotlandi.

Misol 1. $X(t)$ bir dona telefon apparatining ishlash jarayoniga mos bo‘lsin: agar t momentda telefon band bo‘lmasa, $X(t)=0,$ agar band bo‘lsa, $X(t)=1$ qiymatni qabul qiladi. Telefonning band bo‘lmaslik vaqt oraliqlari λ parametrli, band bo‘lish oraliqlari μ parametrli ko‘rsatkichli taqsimlangan, deb hisoblaymiz. U holda $X(t)$ tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayoni bo‘lib, unga quyidagi diagramma mos keladi (2-rasm):



2-rasm.

Lemma 1 ga ko‘ra $P_0(t)$ va $P_1(t)$ ehtimolliklar

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \quad P_1'(t) = -\mu P_1(t) + \lambda P_0(t) \qquad (4)$$

tenglamalar sistemasining

$$P_0(0) = p_0, \quad P_1(0) = p_1, \quad p_0 \ge 0, \quad p_1 \ge 0, \quad p_0 + p_1 = 1 \qquad (5)$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi bo‘ladi.

(4)-(5) masalaning yechimini topish uchun

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisalarni qaraymiz va (4) tenglamalar sistemasiga mos keluvchi

$$|A - zE| = \begin{vmatrix} -\lambda - z & \mu \\ \lambda & -\mu - z \end{vmatrix} = 0$$

xarakteristik tenglamani tuzamiz. Natijada yechimlari $z_1 = 0, \quad z_2 = -(\lambda + \mu)$ bo‘lgan $(\lambda + \mu)z + z^2 = 0$ tenglamani hosil qilamiz. $P_0(t)$ va $P_1(t)$ yechimlarni

$$P_0(t) = a + be^{-t(\lambda+\mu)}, \quad P_2(t) = c + de^{-t(\lambda+\mu)} \qquad (6)$$

ko‘rinishda qidiramiz. (6) ni (4) sistemaga qo‘yib va (5) boshlang‘ich shartlarni hisobga olib, a, b, c, d o‘zgarmaslarni topamiz.

$$a = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad c = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad b = p_0 - \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad d = p_1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Shunday qilib, qidirilgan ehtimolliklar

$$P_0(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\left(p_0-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)e^{-t(\lambda+\mu)}$$

$$P_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\left(p_1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)e^{-t(\lambda+\mu)}$$

bo‘ladi.

Ko‘rilgan masalada $P_0(t)$ va $P_1(t)$ ehtimolliklarning $t\to\infty$ dagi chekli limitlari

$$P_0=\lim_{t\to\infty}P_0(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu},\quad P_1=\lim_{t\to\infty}P_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

mavjud. Agar boshlang‘ich shartlar sifatida $p_0=P_0$ va $p_1=P_1$ limit qiymatlarni olsak, ixtiyoriy $t\geq 0$ uchun

$$P_0(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu},\quad P_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

kelib chiqadi, ya’ni (4) yechim t ga bog‘liq bo‘lmaydi.

Ta’rif. *$X(t)$ jarayon ergodik jarayon deyiladi, agarda uning $P_k(t)$ xarakteristikalari (ehtimolliklari) ning $t\to\infty$ dagi chekli limitlari*

$$\lim_{t\to\infty}P_k(t)=P_k \tag{7}$$

mavjud va

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_k=1$$

bo‘lsa. Bu holda (7) P_k limitlar ergodik jarayonning statsionar xarakteristikalari (ehtimolliklari) deyiladi.

Agar $X(t)$ ergodik jarayon bo‘lsa, uning P_k, $k=0,1,2,...$ statsionar xarakteristikalari quyidagi

$$-(\lambda_k+\mu_k)P_k+\lambda_{k-1}P_{k-1}+\mu_{k+1}P_{k+1}=0,\quad k=0,1,2,... \tag{8}$$

algebraik tenglamalar sistemasidan topiladi.

(8) algebraik tenglamalar sistemasi (2) differensial tenglamalar sistemasining ikki tomonidan $t\to\infty$ da limitga o‘tish natijasida hosil bo‘ladi. Bunda (2) ning chap tomonidagi hosilalar nolga teng bo‘ladi,

chunki $P_k(t)$ lar t ga bog‘liq bo‘lmay qoladi. (8) algebraik tenglamalarni ketma-ket yechib, P_k larni $(k=1,2,...)$ P_0 orqali ifodalash mumkin:

$$P_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0,\quad P_2=\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}P_0,\quad P_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}P_0.$$

Agar X(t) jarayon ergodik jarayon bo‘lsa,

$$P_0+P_1+\ldots P_k+\ldots=1$$

shart bajariladi va undan P_k, $k=0,1,2,...$ statsionar xarakteristikalarni topish mumkin.

$$P_0+P_1+\ldots P_k+\ldots=P_0+P_0\left(\frac{\lambda_0}{\mu_1}+\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}+\ldots+\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}+\ldots\right)=$$

$$=P_0+P_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}=P_0\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}\right)=1$$

tengliklardan quyidagi lemmaning isboti kelib chiqishini ko‘rish qiyin emas.

Lemma 2. *$X(t)$ tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayoni ergodik jarayon bo‘lishi uchun*

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}<\infty$$

bo‘lishi zarur va yetarlidir. Bu holda $X(t)$ jarayonning P_k statsionar xarakteristikalari

$$P_0=(S+1)^{-1},\ \ P_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}P_0,\quad k=1,2,...$$

formulalar yordamida topiladi.

Misol 1 da k faqat 0 va 1 qiymatlarni qabul qilishi mumkin va

$$S=\frac{\lambda_0}{\mu_1}=\frac{\lambda}{\mu},\quad P_0=\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right)^{-1}=\frac{\mu}{\lambda+\mu},\quad P_1=\frac{\lambda}{\mu}P_0=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

bo‘ladi.

§4 ga masalalar

4.1. 3.1 va 3.2 masalalarda keltirilgan tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayonlari uchun tizimda t momentda k nafar mijoz mavjud bo‘lishi ehtimolliklari $P_k(t)$ larni bog‘lovchi differensial tenglamalar sistemasini tuzing.

4.2. Ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimining ishlash tartibi $\lambda_0 = \lambda, \ \lambda_k = 0, \ k \neq 0, \ \mu_1 = \mu, \ \mu_k = 0, \ k \neq 0$ parametrli tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayoniga mos kelsin. $P_k(t)$ lar uchun differensial tenglamalar sistemasini tuzing va uni yeching. Yechimni $P_k = P_k(0)$ orqali ifodalang.

4.3. Ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimi faoliyati

$$\lambda_k = 0, \quad k = 0,1,2,...,$$

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu, & агар \quad 1 \le k \le 2 \quad бўлса, \\ 0, & агар \quad k > 2 \quad бўлса, \end{cases}$$

parametrli tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayoniga mos kelsin. $P_k(t)$ larni aniqlash uchun differensial tenglamalar sistemasini tuzing va uni yeching.

Javobni $P_k = P_k(0)$ orqali ifodalang.

4.4. Bitta xizmat qiluvchi moslamaga ega bo‘lgan ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimini qaraymiz. Kiruvchi eng sodda oqimning intensivligi λ ga teng va har bir talabga (mijozga) xizmat ko‘rsatish vaqti μ parametrli ko‘rsatkichli taqsimlangan bo‘lsin. Undan tashqari, ixtiyoriy mijoz α parametrli ko‘rsatkichli taqsimlangan vaqtdan keyin xizmat ko‘rsatish jarayoni tugamagan holda tizimni tark etishi mumkin. Bunday tizimga mos keluvchi diagrammani tasvirlang. $P_k(t) = P(X(t) = k)$ xarakteristikalar uchun differensial tenglamalar sistemasini tuzing. Tizimning statsionar holati uchun tenglamalar sistemasini tuzing va $\alpha = \mu$ bo‘lgan holda statsionar ehtimolliklarni toping.

4.5. 3.5 masaladagi ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimini qarang. Unga mos diagrammani chizing. $P_k(t) = P(X(t) = k)$ xarakteristikalar uchun differensial tenglamalar sistemasini tuzing. Statsionar holat uchun algebraik tenglamalar sistemasini tuzing va statsionar ehtimolliklarni toping.
4.6. 3.6 masaladagi ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimini qarang. Tizimga mos keluvchi diagrammani tasvirlang. $P_k(t) = P(X(t) = k)$ ehtimolliklar uchun differensial tenglamalar sistemasini tuzing. Statsionar holat uchun algebraik tenglamalar sistemasini tuzing va statsionar ehtimolliklarni toping.
4.7. 3.7 masaladagi ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimi uchun diagrammani hosil qiling (qaytadan). $P_k(t) = P(X(t) = k)$ xarakteristikalar uchun differensial tenglamalar sistemasini , statsionar holat uchun algebraik tenglamalar sistemasini tuzing va statsionar ehtimolliklarni toping.
4.8. 3.8 masaladagi ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimi uchun qaytadan diagramma chizing. $P_k(t) = P(X(t) = k)$ xarakteristikalar uchun differensial tenglamalar sistemasini , statsionar holat uchun algebraik tenglamalar sistemasini tuzing. Statsionar ehtimolliklarni toping.
4.9. 3.9 masalaga qarang. Tizimga mos keluvchi diarammani chizing. $P_k(t) = P(X(t) = k)$ xarakteristikalar uchun differensial, statsionar holat uchun algebraik tenglamalar sistemasini tuzing. Statsionar ehtimolliklarni toping.

§5. Ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimlarining asosiy turlari

Eng sodda ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimining elementlari: 1) kiruvchi oqim; 2) xizmat ko‘rsatuvchi moslama (yoki moslamalar); 3) xizmat ko‘rsatish tartibining tasnifidan iborat bo‘ladi. Eslatib o‘tamiz, kirish oqimi deganda tizimga mijozlar qiladigan talablarning tushish (mijozlarning kelish) momentlaridan hosil bo‘lgan $t_0 = 0, t_1, t_2, ...$ vaqt ketma-ketligi tushuniladi. Har bir $t = t_i$ momentda faqat bitta talab tushadi, deb hisoblaymiz. Talablarning tushish momentlari (mijozlarning kelish momentlari) orasidagi vaqt oraliqlarini $\tau_i = t_i - t_{i-1},\ i = 1, 2, ...$ orqali belgilaymiz. Odatda,

$$\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi o‘zaro bog‘liqsiz va bir xil taqsimlangan, deb qabul qilinadi va ularning umumiy taqsimot funksiyasini G_e (e- harfi ingliz tilidagi entrance - kirish so‘zidan olingan):

$$G_e = P(\tau_i < t), \quad i = 1, 2, ...$$

kabi belgilanadi.

Agar $\tau_1, \tau_2, ...$ tasodifiy miqdorlar λ parametrli ko‘rsatkichli taqsimlangan bo‘lsa, kirish oqimi λ parametrli eng sodda (Puasson) oqim deyiladi (§ 2 ga qarang).

Ko‘rsatkichli taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini

$$M(t) = M_{\lambda}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & агар \quad t \geq 0 \quad бўлса, \\ 0, & агар \quad t < 0 \quad бўлса, \end{cases}$$

ko‘rinishda belgilaymiz.

Mijozlarga xizmat ko‘rsatuvchi moslamaning tasnifi bitta mijozga xizmat ko‘rsatish vaqti bo‘lgan ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi G_s(s - harfi ingliz tilidagi service -xizmat ko‘rsatish so‘zidan olingan)

$$G_s(t) = P(\xi < t)$$

funksiyani berish bilan amalga oshiriladi.

Shunday qilib, ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimiga t_i momentda kelgan mijozga i raqami beriladi va unga ξ_i vaqt davomida xizmat ko‘rsatiladi. $\xi_1, \xi_2, ..$ tasodifiy miqdorlar o‘zaro bog‘liqsiz va umumiy $G_s(t)$ taqsimot funksiyaga ega, deb faraz qilinadi.

Agar xizmat ko‘rsatish tizimida xizmat ko‘rsatuvchi m ta bir xil moslamalar bo‘lsa, ularning har biri yuqorida keltirilgan tartibda ish yuritadi va ular bir-biriga bog‘liqsiz ravishda ishlaydi.

Agar bir nafar mijozga xizmat ko‘rsatish vaqti bo‘lgan ξ tasodifiy miqdor μ parametrli ko‘rsatkichli taqsimlangan bo‘lsa, uning taqsimot funksiyasini

$$M(t) = M_{\mu}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t}, & агар \quad t \geq 0 \quad бўлса, \\ 0, & агар \quad t < 0 \quad бўлса, \end{cases}$$

ko‘rinishida belgilaymiz.

Xizmat ko‘rsatish tizimiga kelgan mijozlar amal qilishi kerak bo‘lgan qoidalar majmuasi xizmat ko‘rsatish tartibini belgilaydi. Xizmat ko‘rsatish tartibining eng muhim tarkibiy qismlaridan biri navbat uzunligining maksimal (eng katta) qiymati bo‘lgan N hisoblanadi. N biror manfiy bo‘lmagan butun songa yoki cheksizga teng bo‘lishi mumkin. Faraz qilaylik, $N = \infty$ bo‘lsin. U holda mijoz xizmat ko‘rsatish tizimiga kelganda barcha xizmat ko‘rsatuvchi moslamalar band bo‘lsa, u navbatga turadi va xizmat ko‘rsatish tizimiga kelish tartibida hosil qilingan navbat qatorida birinchi o‘ringa kelguncha harakatlanadi. Undan keyin bu mijoz birinchi bo‘lib bo‘shagan moslamadan joy oladi va unga tasodifiy vaqt davomida xizmat ko‘rsatiladi. Mijozga xizmat ko‘rsatish yakunlanganda u tizimni darhol tark etadi.

Endi xizmat ko‘rsatish tizimida navbat uzunligi N chekli bo‘lgan holni qaraylik. Bunda mijoz sistemaga kelgan paytda barcha moslamalar band va unda navbat kutayotgan mijozlar soni N dan kichik bo‘lsa, u navbatga turadi. Agar mijoz kelganda tizimda navbatda turganlar soni N nafar bo‘lsa (undan ko‘p bo‘lishi mumkin emas!), u tizimni darhol tark etadi, ya’ni “yo‘qoladi” (u bundan keyin e’tiborga olinmaydi). Adabiyotlarda navbatning maksimal uzunligi N oddiygina qilib, *navbat uzunligi*, deb yuritiladi.

Yuqoridagi kabi aniqlangan ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimlari

$$< \cdot \mid \cdot \mid \cdot > (\cdot)$$

shaklda belgilanadi. Bunda burchakli qavs ichida birinchi o‘rinda mijozlarning tizimga kelish vaqt oralig‘ining taqsimot funksiyasi (ya’ni, kirish oqimining xarakteristikasi), ikkinchi o‘rinda bitta mijozga xizmat ko‘rsatishga ketadigan vaqtning taqsimot funksiyasi (ya’ni xizmat ko‘rsatish vaqtining xarakteristikasi) , uchinchi o‘rinda tizimdagi xizmat ko‘rsatuvchi moslamalarning soni, kichik qavs ichida esa, xizmat ko‘rsatish tartibi ko‘rsatiladi. Masalan,

$$< G_e \left| M_\mu \right| 2 > (\text{навбат узунлиги } N)$$

ko‘rinishidagi yozuv kirish oqimi G_e taqsimot qonuniga, har bir moslamada xizmat ko‘rsatish vaqti μ parametrli ko‘rsatkichli taqsimotga ega, xizmat ko‘rsatuvchi moslamalar soni ikkita va navbat uzunligi N bilan chegaralangan ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimiga mos keladi. Agar navbat uzunligi chegaralanmagan bo‘lsa, kichik qavs bo‘lmaydi.

Ushbu qo‘llanmada biz, asosan,

$$< M_\lambda \left| M_\mu \right| m > (\text{навбат узунлиги } N)$$

ko‘rinishidagi xizmat ko‘rsatish tizimlarini o‘rganamiz. Bunday tizimlar §§ 3,4 da o‘rganilgan tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayonlari yordamida bir qiymatli tasvirlanadi.

Endi

$$< M_\lambda \left| M_\mu \right| m > (\text{навбат узунлиги } N)$$

ko‘rinishidagi ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimlaridagi asosiy masalalarga to‘xtalamiz. Ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimining eng muhim xarakteristikalaridan biri t momentda tizimda mavjud bo‘lgan mijozlar sonini ko‘rsatuvchi $X(t)$ jarayondir.

Avvalgiday $X(t)$ jarayonning taqsimotini

$$P_k(t) = P(X(t) = k), \quad k = 0,1,2,...$$

ko‘rinishda belgilaymiz va u bilan bog‘liq bo‘lgan asosiy masalalar ro‘yxatini keltiramiz.

1. $P_k(t)$ ehtimolliklar qanoatlantiradigan differensial tenglamalar sistemasini tuzish;

2. $P_k(t)$ lar uchun aniq formulalar topish;

3. Statsionar xarakteristikalar

$$P_k = \lim_{t\to\infty} P_k(t), \quad \sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \tag{1}$$

mavjud bo‘ladigan shartlarni topish;

4. P_k statsionar ehtimolliklar qanoatlantiradigan algebraik tenglamalar sistemasini tuzish;

5. P_k larni topish.

Agar (1) limitlar mavjud bo‘lsa, xizmat ko‘rsatish tizimi uchun statsionar holat mavjud, deb aytamiz; P_k sonlar esa xizmat ko‘rsatish tizimining statsionar xarakteristikalari deb ataladi.

Xizmat ko‘rsatish tizimining yana bir muhim xarakteristikalaridan biri t momentda kelgan mijozning unga xizmat ko‘rsatish boshlanguncha kutgan vaqtiga teng bo‘lgan $q(t)$ jarayondir. Xizmat ko‘rsatish tizimining $q(t)$ xarakteristikasi bilan bog‘liq asosiy masalalar sifatida quyidagilarni keltirish mumkin.

6. Tizimga t momentda kelgan mijozga xizmat ko‘rsatish $t+x$ momentdan avval boshlanmaslik (ya’ni mijozning xizmat ko‘rsatish boshlanguncha kutish vaqti x vaqt birligidan kichik bo‘lmaslik) ehtimolligi

$$Q(t,x) = P(q(t) > x)$$

ni topish;

7. Agar tizim uchun statsionar holat mavjud bo‘lsa, shu statsionar holatda mijozning xizmat ko‘rsatilishini x vaqt birligidan ko‘proq vaqt kutish ehtimolligi

$$Q(x) = \lim_{t\to\infty} P(q(t) > x)$$

ni topish.

Misol 1. Bitta telefon apparatining ish jarayoni bilan bog‘liq bo‘lgan ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimini qaraylik:

$$< M_\lambda \left| M_\mu \right| 1 > (\textit{навбат узунлиги } 0)$$

Bu tizimga mos $X(t)$ jarayon

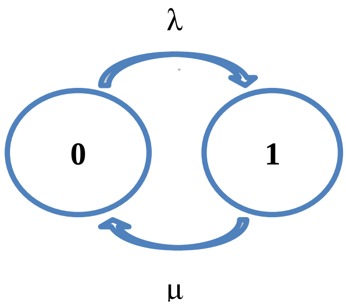


diagramma bilan aniqlanadigan tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayoni bo‘ladi. Shuning uchun $P_0(t)$, $P_1(t)$ funksiyalar § 4 da ko‘rilgan differensial tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi.

§ 5 ga masalalar

5.1. $< M|M|2 >$ xizmat ko‘rsatish tizimida bir nafar mijozga o‘rtacha xizmat ko‘rsatish vaqti 5 minut, ketma-ket kelgan mijozlar kelish momentlari orasidagi o‘rtacha farq 8 minutni tashkil etadi. Tizim yetarli uzoq vaqt faoliyat ko‘rsatadi. Quyidagilarni topish talab etiladi:

a) xizmat ko‘rsatuvchi moslamalarning ikkalasi ham band bo‘lish ehtimolligini;

b) hech bo‘lmaganda bitta moslamaning band bo‘lmaslik ehtimolligini;

c) ikkala xizmat ko‘rsatuvchi moslamalarning band bo‘lmaslik ehtimolligini.

5.2. Avtomobillar to‘xtash joyida 10 ta o‘rin bo‘lib, har bir o‘ringa faqat bitta avtomobil to‘xtashi mumkin. Avtomobillar to‘xtash joyiga avtomobillar eng sodda oqim (Puasson oqimi) ga mos ravishda keladi va bir soat ichida kelgan avtomobillarning o‘rtacha soni (ya’ni Puasson jarayonining parametri) 10 ga teng. Bitta avtomobilning to‘xtash joyida turish vaqtining davomiyligi o‘rtacha qiymati 10 minutga teng bo‘lgan ko‘rsatkichli taqsimlangan tasodifiy miqdorga teng. To‘xtash joyiga navbatdagi kelgan avtomobilning to‘xtash joyidan band bo‘lmagan o‘rinni topa olmaslik ehtimolini toping.

5.3. Avtomobillarga yonilg‘i quyish shahobchasida bir dona yonilg‘i quyish moslamasi mavjud va bu shahobchaga avtomobillar eng sodda (Puasson) oqimi bo‘yicha yonilg‘i quyishga keladi. Bir soat vaqt oralig‘ida shahobchaga keladigan avtomobillarning o‘rtacha soni 10 ga teng. Har bir avtomobilga xizmat ko‘rsatish vaqti ko‘rsatkichli taqsimlangan bo‘lib, uning o‘rta qiymati 5 minutga teng. Shahobchada 3 ta avtomobilga moslangan maxsus kutish maydonchasi mavjud. Navbatdagi avtomobil kelganda maxsus maydonchada bo‘sh o‘rin bo‘lmasa, u shahobcha tashqarisida kutadi. Shahobcha yetarli uzoq muddat ishlaydi. Quyidagilarni toping:

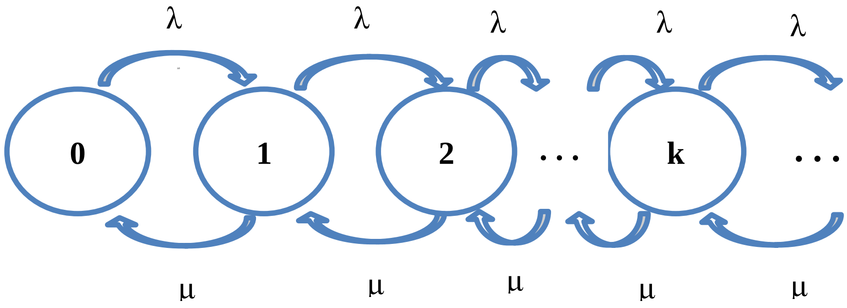
a) yonilg‘i quyish shahobchasiga kelgan avtomobil kutish uchun maxsus maydonchadan o‘rin topa olish ehtimolligini;

b) shahobchaga kelgan avtomobil maxsus maydonchadan tashqarida navbatga turishga majbur bo‘lish ehtimolligini.

§6. $<M\left|M\right|m>(\text{навбатли})$ tizimlari

1. $<M\left|M\right|1>(\text{навбатли})$ xizmat ko‘rsatish tizimi.

Avvalambor shuni ta’kidlab o‘tamizki, oxirgi kichik qavslar ichidagi “navbatli” iborasini “navbat uzunligi cheksiz” ma’nosida tushunamiz. $<M\left|M\right|1>(\text{навбатли})$ tizimning tuzilishi va ishlash qoidasi bilan tanishamiz. Unda faqat bitta xizmat ko‘rsatuvchi moslama mavjud va unga mijozlar λ parametrli eng sodda oqim bo‘yicha murojaat etadilar. Moslama har bir mijozga μ parametrli ko‘rsatkichli taqsimlangan tasodifiy vaqt davomida xizmat ko‘rsatadi. Agar tizimning xizmat ko‘rsatuvchi moslamasi band bo‘lsa, kelgan mijoz o‘zidan oldin kelgan mijozlarning barchasiga xizmat ko‘rsatib bo‘linguncha navbatda turib kutadi. Xizmat ko‘rsatish tizimida t momentda mavjud bo‘lgan mijozlar soni $X(t)$ shu t momentda moslamadagi mijoz (ya’ni xizmat ko‘rsatilayotgan mijoz, agar u bor bo‘lsa) va shu t momentda navbatda turgan mijozlar sonidan iborat. Tabiiyki, $X(t)$ tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayoni bo‘ladi va unga quyidagi 1-rasmdagi diagramma mos keladi:



1-rasm.

Parametrlar λ va μ larning qanday qiymatlarida $X(t)$ jarayonning statsionar holati mavjud bo‘ladi, ya’ni $X(t)$ jarayon qanday shartlar bajarilsa, ergodik bo‘ladi, degan masalani o‘rganamiz. Buning uchun §4 dagi lemma 2 ga asosan

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

qatorni yaqinlashishga tekshirishimiz zarur bo‘ladi. $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$ belgilash kiritamiz. U holda, ravshanki, $\rho<1$ bo‘lganda qaralayotgan qator yaqinlashuvchi, ya’ni $S<\infty$ va jarayonning statsionar holati mavjud bo‘ladi. Bu holda

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k=\frac{\rho}{1-\rho},\qquad P_0=(1+S)^{-1}=\left(1+\frac{\rho}{1-\rho}\right)^{-1}=1-\rho,$$

$$P_k=P_0\rho^k=(1-\rho)\rho^k,\quad k=1,2,\ldots$$

bo‘ladi. Agar $\rho\geq 1$ bo‘lsa, $S=\infty$ bo‘ladi.

Demak,

$$<M\left|M\right|1>(\textit{навбатли})$$

xizmat ko‘rsatish tizimida statsionar holat mavjud bo‘ladi faqat va faqat shu holdaki, qachonki $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}<1$ bo‘lsa. Bu holda tizimning statsionar xarakteristikalari

$$P_k=\lim_{t\to\infty}P(X(t)=k)$$

lar uchun

$$P_k = (1-\rho)\rho^k, \quad k = 0, 1, 2, ... \qquad (1)$$

o‘rinli bo‘ladi.

Endi xizmat ko‘rsatish tizimining yana bir muhim xarakteristikalaridan hisoblangan, t momentda tashrif buyurgan mijozning, unga xizmat ko‘rsatish boshlanguncha kutgan vaqti $q(t)$ ning taqsimoti haqida to‘xtalamiz. Mantiqan ravshanki, tizimning statsionar holatida $q(t)$ tasodifiy miqdorning taqsimoti t ga bog‘liq bo‘lmaydi, ya’ni

$$Q(x) = \lim_{t\to\infty} P(q(t) < x)$$

funksiya aniqlangan bo‘ladi. q orqali $Q(x)$ taqsimot funksiyaga ega bo‘lgan tasodifiy miqdorni belgilaymiz, ya’ni

$$P(q < x) = Q(x).$$

q tasodifiy miqdor xizmat ko‘rsatish tizimining “statsionar holatida”, ya’ni uzoq muddat ishlaganda murojat qilgan mijozning unga xizmat ko‘rsatish boshlanguncha kutgan vaqtini ifodalaydi.

Lemma 1. *Agar $\rho < 1$ bo‘lsa,*

$$P(q \geq x) = \rho e^{-(\mu-\lambda)x}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Demak, q tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$P(q < x) = \begin{cases} 1-\rho e^{-(\mu-\lambda)x}, & \text{агар} \quad x \geq 0 \quad \text{бўлса}, \\ 0, & \text{агар} \quad x < 0 \quad \text{бўлса}, \end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Isboti. X orqali tizimning statsionar holatida undagi mijozlar sonini belgilaymiz. U holda (1) ga asosan

$$P(X = k) = (1-\rho)\rho^k, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

bo‘ladi. $\{X = k\}, \ k = 0, 1, 2, ...$ hodisalarning to‘la gruppasini tashkil etgani uchun to‘la ehtimollik formulasiga asosan (§2 ga qarang), $x > 0$ bo‘lganda

$$P(q \geq x) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(q \geq x \middle/ X = k\right) P(X = k) \qquad (2)$$

tenglik kelib chiqadi.

$\Upsilon(t)$ μ parametrli Puasson jarayoni bo‘lsin. U holda

$$P\left(q \geq x \middle/ X = k\right) = P(\Upsilon(x) < k)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi. Haqiqatan ham, biz qarayotgan mijoz xizmat ko‘rsatish tizimidagi navbatda k - o‘rinda bo‘lsa, unga xizmat ko‘rsatish boshlanguncha o‘zidan oldingi $(k-1)$ ta mijozga xizmat ko‘rsatib bo‘linishini kutadi. §2 dagi lemma 2 ga asosan

$$P(\Upsilon(x) < k) = \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\mu x} \cdot \frac{(\mu x)^i}{i!}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Shuning uchun (2) ga ko‘ra ,

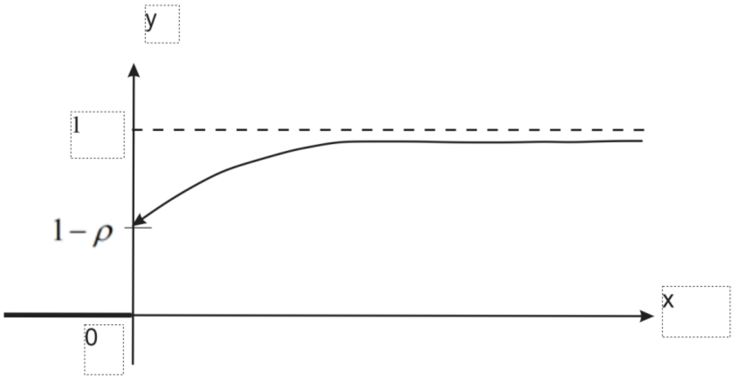
$$P(q \geq x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\mu x} \cdot \frac{(\mu x)^i}{i!} (1-\rho)\rho^k =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=i+1}^{\infty} (1-\rho)\rho^k \right) e^{-\mu x} \cdot \frac{(\mu x)^i}{i!} = (1-\rho) e^{-\mu x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho^{i+1} (\mu x)^i}{(1-\rho) i!} =$$

$$= \rho e^{-\mu x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mu x \rho)^i}{i!} = \rho e^{-\mu x} e^{\mu x \rho} = \rho e^{-(\mu - \lambda) x}$$

natija hosil bo‘ladi. Lemma 1 isbotlandi.

$y = P(q < x)$ taqsimot funksiyaning grafigini chizamiz.



Shakldan ko‘rinadiki, bu funksiya $x=0$ nuqtada birinchi tur uzilishga, ya’ni qiymati $1-\rho$ ga teng sakrashga ega.

Lemma 1 yordamida statsionar holatdagi tizimda mijozning xizmat ko‘rsatish boshlanguncha o‘rtacha kutish vaqtini, ya’ni q ning matematik kutilmasini osongina topish mumkin.

Natija. *Statsionar holatga ega bo‘lgan xizmat ko‘rsatish tizimlari uchun*

$$Mq=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

bo‘ladi.

Isboti. Ta’rif bo‘yicha

$$Mq=\int_0^\infty x(\mu-\lambda)\rho e^{-(\mu-\lambda)x}dx.$$

Agar integralda $(\mu-\lambda)x=y$ almashtirish bajarsak,

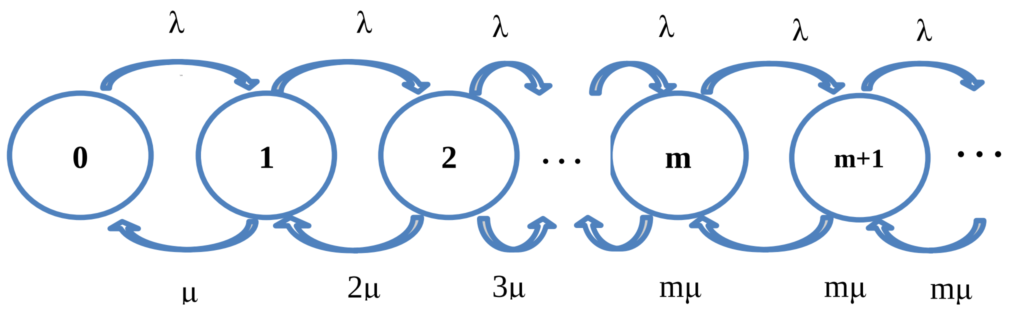
$$Mq=\frac{\rho}{\mu-\lambda}\int_0^\infty ye^{-y}dy=\frac{\rho}{\mu-\lambda}$$

hosil bo‘ladi. $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$ ekanligidan natija isboti kelib chiqadi.

Mq kattalik xizmat ko‘rsatishning muhim “sifat” ko‘rsatkichlaridan biri bo‘lib, u qancha kichik bo‘lsa, xizmat ko‘rsatish shuncha yaxshi bo‘ladi.

2. $<M\left|M\right|m>$*(навбатли) tizimi*

Endi $<M\left|M\right|m>(\textit{навбатли})$ xizmat ko‘rsatish tizimini qaraymiz, bunda m -ixtiyoriy natural son bo‘lib, u tizimdagi xizmat ko‘rsatuvchi bir xil turdagi moslamalar soni (masalan, avtomobillarga yonilg‘i quyish shohobchasidagi kolonkalar soni). $X(t)$ - xizmat ko‘rsatish tizimida t momentda mavjud bo‘lgan mijozlar soni bo‘lsin. U holda $X(t)$ tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayoni bo‘lib, unga quyidagi 2-rasmda keltirilgan diagramma mos keladi.



2-rasm.

Bu yerda tizimga mijozlar λ parametrli eng sodda oqim sifatida kelishi va har bir moslama har bir mijozga μ ko‘rsatkichli taqsimot qonuniga ega bo‘lgan tasodifiy vaqt davomida xizmat ko‘rsatishi e’tiborga olingan.

Diagrammada quyidagi (pastdagi) strelkalarga nima uchun bunday intensivliklar mos keladi? Agar tizimda qaralayotgan vaqtda m ta moslamadan i tasi $(i \leq m)$ band bo‘lsa, sistema $\{i\}$ holatdan $\{i-1\}$ holatga $\mu_i = i\mu$ intensivlik bilan o‘tadi. Chunki, bog‘liqsiz Puasson jarayonlari yig‘indisi yana Puasson jarayoni bo‘ladi va yig‘indining parametri qo‘shiluvchilar parametrlari yig‘indisiga tengdir. Agar m ta moslamalarning barchasi band bo‘lsa, tizim $\{i\}$ holatdan $\{i-1\}$ holatga $(i \geq m)$, tabiiyki, μm intensivlik bilan o‘tadi, chunki faqat m ta xizmat ko‘rsatuvchi moslama mavjud. Bu holda

$$S=\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda^i}{i!\,\mu^i}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!\,\mu^m}\left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^j=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda^i}{i!\,\mu^i}+\frac{\lambda^m\cdot\lambda/(m\mu)}{m!\,\mu^m\left(1-\dfrac{\lambda}{m\mu}\right)}$$

bo‘ladi. Ko‘rinib turibdiki, yuqoridagi qatorning yig‘indisi S chekli bo‘ladi, agarda

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}<m$$

bo‘lsa. Shunday qilib,

$$<M\,|M|\,m>(\textit{навбатли})$$

xizmat ko‘rsatish tizimining statsionar holati mavjud bo‘lishi uchun

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}<m$$

bo‘lishi zarur va yetarli ekan. Bu holda

$$P_k=\begin{cases}\dfrac{\rho^k}{m!(S+1)}, & \textit{агар}\quad 0\le k\le m\quad \textit{бўлса},\\[2ex] \dfrac{\rho^k}{m!\,m^{k-m}(S+1)}, & \textit{агар}\quad k\ge m\quad \textit{бўлса},\end{cases}$$

$$S=\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda^i}{i!\,\mu^i}+\frac{\lambda^m\cdot\lambda/(m\mu)}{m!\,\mu^m\left(1-\dfrac{\lambda}{m\mu}\right)}$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Xususiy holda, agar $m=2$ bo‘lsa,

$$S=\rho+\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^2\cdot{}^{\rho}\!/_{2}}{2\left(1-{}^{\rho}\!/_{2}\right)}=$$

$$=\frac{4\rho-2\rho^2+2\rho^2-\rho^3+\rho^3}{2(2-\rho)}=\frac{2\rho}{2-\rho},$$

$$P_k=\begin{cases}\dfrac{\rho^k\,(2-\rho)}{2!\,(2+\rho)}, & агар \quad 0\le k\le 2 \quad бўлса,\\[2ex] \dfrac{\rho^k\,(2-\rho)}{2^{k-1}(2+\rho)}, & агар \quad k\ge 2 \qquad бўлса,\end{cases}$$

natijaga ega bo‘lamiz.

Endi $<M\,|M|\,m>(навбатли)$ tizimning statsionar holatida tizimga kelgan mijozning unga xizmat ko‘rsatish boshlanguncha kutadigan vaqti q ning taqsimoti haqidagi tasdiqni isbotsiz keltiramiz (isbotini [2] dan topish mumkin).

Lemma 2. $<M\,|M|\,m>(навбатли)$ *tizimida*

$$P\,(q\ge x)=Re^{-(\mu m-\lambda)x},\quad M\,q=\frac{R}{\mu\,(m-\rho)}$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lib, bu yerda

$$R=\sum_{k=m}^{\infty}P_k=\frac{\rho^m}{(m-1)!\,(S+1)\,(m-\rho)}$$

tizimning statsionar holatida barcha m ta moslamalarning band bo‘lish ehtimolligidir.

Tizimdagi moslamalarning soni $m=2$ bo‘lganda
Lemma 2 dan

$$R=1-P_0-P_1=1-\frac{\rho^0\,(2-\rho)}{0!\,(2+\rho)}-\frac{\rho^1\,(2-\rho)}{1!\,(2+\rho)}=$$

$$= \frac{2+\rho-(2-\rho)-2\rho+\rho^2}{2+\rho} = \frac{\rho^2}{2+\rho}$$

kelib chiqadi. Shuning uchun

$$P(q \geq x) = \frac{\rho^2}{2-\rho}\, e^{-(2\mu-\lambda)x},$$

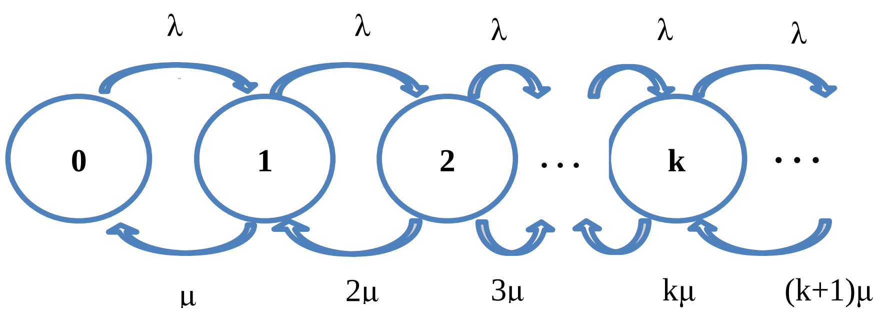
$$M\,q = \frac{R}{\mu(2-\rho)} = \frac{\rho^2}{(2+\rho)(2\mu-\lambda)}$$

bo‘ladi.

3. $<M\,|M|\infty>$ *xizmat ko‘rsatish tizimi*

Endi $<M\,|M|\infty>$ tizimni qaraymiz. Demak, bu tizimda xizmat ko‘rsatuvchi moslamalar soni cheksiz ko‘p. Bu modeldan tizimdagi xizmat ko‘rsatuvchi moslamalar soni yetarli katta bo‘lganda yoki haqiqatan ham cheksiz ko‘p bo‘lganda foydalanish mumkin. Bunday tizim sifatida baliq ovlanadigan dengizni misol keltirsak, undagi mijozlar baliqchilar hisoblanadi. Tabiiyki, dengizga kelgan har qanday baliqchi baliq ovlashi mumkin. Bu misolda tizimning asosiy xarakteristikasi bo‘lgan t momentdagi mijozlar soni $X(t)$ xizmat ko‘rsatilayotgan baliqchilar soni bo‘ladi. Yoki bunday tizimga xaridorlar o‘z-o‘ziga xizmat ko‘rsatadigan supermarketni misol keltirish mumkin. Bunda har bir xaridor o‘zi xizmat ko‘rsatish moslamasi bo‘ladi.

Ko‘rinib turibdiki, qaralayotgan xizmat ko‘rsatish tizimida navbat uzunligi bo‘lmaydi va unga quyidagi 3-rasmdagi diagramma mos keladi.



3-rasm

O‘zgarmas son

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} = e^{\rho} - 1$$

bo‘ladi. §5 dagi lemma 2 ga asosan bu tizim uchun statsionar holat mavjud va bu holda

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!}\, e^{-\rho}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

bo‘ladi.

Xulosa. $< M \,|\, M \,|\, m > (\textit{навбатли})$

xizmat ko‘rsatish tizimida statsionar holat (rejim) mavjud bo‘ladi faqat va faqat shu holdaki , qachonki $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < m$ bo‘lsa. Mijozning tizimda xizmat boshlanguncha kutgan vaqti bo‘lgan q tasodifiy miqdor

$$P(q \ge x) = R\, e^{-(\mu m - \lambda)x}$$

taqsimot funksiyaga ega bo‘lib,

$$M\,q = \frac{R}{\mu(m - \rho)}$$

bo‘ladi. Bu yerda R - statsionar holatda barcha moslamalarning band bo‘lish ehtimolligi.

§6 ga masalalar

6.1. Kirish oqimi λ parametrli eng sodda (Puasson) oqim bo‘lgan

$$< M \,|\, M \,|\, 3 > (\textit{навбатли})$$

xizmat ko‘rsatish tizimini qaraymiz. Har bir mijozga xizmat ko‘rsatishning o‘rtacha vaqti $1/\mu$ bo‘lib, $\lambda < 3\mu$ bo‘lsin (albatta, λ va $1/\mu$ lar bir xil o‘lchov birligiga ega, aytaylik, minut). Quyidagilarni toping:

a) $P_k(t)$ lar uchun differensial tenglamalar sistemasini;

b) P_k statsionar ehtimolliklarni;

c) statsionar holatda q xarakteristikaning taqsimot funksiyasini;

d) Mq matematik kutilmani.

6.2. 5.3.masalada yonilg‘i quyish shahobchasiga kelgan avtomobilning unga xizmat ko‘rsatish boshlanguncha talab etiladigan vaqtning o‘rta qiymatini toping.

6.3.Kirish oqimi soatiga $\lambda = 50$ intensivlikdagi Puasson oqimidan iborat bo‘lgan o‘z-o‘ziga xizmat ko‘rsatiladigan xizmat ko‘rsatish tizimini qaraymiz. Har bir mijoz o‘z-o‘ziga xizmat ko‘rsatish vaqtining o‘rta qiymati (matematik kutilmasi) 5 minutga teng bo‘lgan ko‘rsatkichli taqsimot qonuniga ega bo‘lsa, quyidagilarni toping:

a) ixtiyoriy t momentda tizimda xizmat ko‘rsatilayotgan mijozlarning o‘rtacha sonini;

b) xizmat ko‘rsatish tizimida mijozlarning bo‘lmaslik vaqtining taqsimot qonunini.

§7. Dengiz porti qurilishining uch loyihasi haqida

Dengiz porti qurilishining uch loyihasi haqidagi masala kirish qismida keltirilgan edi. Masalaning qo‘yilishini eslatamiz. Quyidagi uch loyihadan birini tanlash talab etiladi:

1. Ikkita bir xil samaradorlikka ega bo‘lib, bir-biriga bog‘liqsiz ravishda ishlaydigan terminallardan iborat bo‘lgan port qurish.
2. Bitta terminaldan iborat bo‘lib, ikkita bir xil quvvatda ishlaydigan yuklash va yuklarni tushirish joylari bo‘lgan port qurish.
3. Bitta terminaldan iborat bo‘lib, unda samaradorligi I va II loyihalardagiga nisbatan ikki marta yuqori bo‘lgan bitta yuklash va yuklarni tushirish joyidan tashkil topgan port qurish.

Ushbu loyihalardan qaysi birini tanlash maqsadga muvofiq? Qurilish xarajatlari uchala holda ham bir xil miqdordagi mablag‘ni tashkil etadi. Har bir loyihaga quyidagicha ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimini mos qo‘yamiz.

1. Birinchi loyihaga ikkita bir xil $< M_\lambda \left| M_\mu \right| 1 >$ xizmat ko‘rsatish tizimi mos keladi.

2. Ikkinchi loyihaga bitta $< M_{2\lambda} \left| M_{\mu} \right| 2 >$ xizmat ko‘rsatish tizimi mos keladi. Bunda kirish oqimining intensivligi 2λ ga teng bo‘lib, birinchi loyihadagi har bir tizimga kiruvchi oqim intensivligidan ikki marta katta.

3. Uchinchi loyihaga bitta $< M_{2\lambda} \left| M_{2\mu} \right| 1 >$ xizmat ko‘rsatish tizimi mos keladi. Bunda mavjud bo‘lgan yagona xizmat ko‘rsatuvchi moslamaning xizmat ko‘rsatish intensivligi birinchi va ikkinchi loyihalardagi moslamalarning xizmat ko‘rsatish intensivligidan ikki marta yuqori.

Bu loyihalarni taqqoslash uchun xizmat ko‘rsatish tizimining eng asosiy xarakteristikalaridan hisoblangan i - loyihada mijozning unga xizmat ko‘rsatish boshlanguncha kutgan vaqti $q_i \ (i = 1, 2, 3)$ larni qaraymiz va ularning matematik kutilmalari

$$\overline{q_i} = M\, q_i, \quad i = 1, 2, 3$$

larni hisoblaymiz.

Birinchi loyiha bo‘yicha

$$\overline{q_1} = M\, q_1 = \frac{\rho_1}{\mu(1 - \rho_1)}, \quad \rho_1 = \frac{\lambda}{\mu} = \rho.$$

Ikkinchi loyiha bo‘yicha

$$\overline{q_2} = M\, q_2 = \frac{\rho_2^2}{(2 + \rho_2)\, \mu\, (2 - \rho_2)}, \quad \rho_2 = \frac{2\lambda}{\mu} = 2\rho$$

bo‘lgani uchun

$$\overline{q_2} = \frac{4\rho^2}{(2 + 2\rho)\, \mu\, (2 - 2\rho)} = \frac{\rho^2}{\mu(1 - \rho^2)}$$

bo‘ladi.

Uchinchi loyihada

$$\overline{q_3} = M\, q_3 = \frac{\rho_3}{2\mu\, (1 - \rho_3)}, \quad \rho_3 = \frac{2\lambda}{2\mu} = \rho.$$

Shunday qilib,

$$\overline{q_1} = M\, q_1 = \frac{\rho}{\mu\, (1 - \rho)},$$

$$\overline{q_2} = M\,q_2 = \frac{\rho^2}{\mu\left(1-\rho^2\right)} = \overline{q_1}\;\frac{\rho}{1-\rho}\,,$$

$$\overline{q_3} = M\,q_3 = \frac{\rho}{2\mu\left(1-\rho\right)} = \frac{1}{2}\,\overline{q_1}$$

munosabatlarga ega bo‘ldik.

Yuqoridagilardan mijozning (kemaning) xizmat ko‘rsatish boshlanguncha kutish vaqti nuqtai nazaridan 3 ta loyihani solishtirish mumkin (kutish vaqti qancha kichik bo‘lsa, shuncha yaxshi). Birinchi loyiha qolgan ikkita loyihadan yomon. $\rho < 1$ bo‘lganda

$$\frac{\rho}{1+\rho} < \frac{1}{2}$$

bo‘lgani uchun ikkinchi loyiha uchinchi loyihadan yaxshi.

E’tibor berish kerakki “yaxshi” yoki “yomon” deganda, $\overline{q_1}, \overline{q_2}, \overline{q_3}$ xarakteristikalar nazarda tutilmoqda.

Endi uchta loyihani xizmat ko‘rsatish tizimining eng asosiy xarakteristikasi bo‘lgan kemaning (mijozning) portda (tizimda) ja’mi o‘tkazgan vaqti υ_i $(i=1, 2, 3)$ nuqtai nazardan solishtiramiz. Tabiiyki, υ_i qancha kichik bo‘lsa, shunchalik yaxshi bo‘ladi. Mijozning portda ja’mi o‘tkazgan vaqti xizmat ko‘rsatish boshlanguncha kutilgan vaqt q_i va mijozga xizmat ko‘rsatish vaqti ξ_i larning yig‘indisidan iborat, ya’ni

$$\upsilon_i = q_i + \xi_i\,,$$

$i=1, 2, 3$ - loyihalarning raqamlari. Eslatib o‘tamiz, mijozga xizmat ko‘rsatish tugagandan so‘ng, u tizimni darhol tark etadi. $\overline{\upsilon_i}$ son υ_i tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi bo‘lsin, ya’ni

$$\overline{\upsilon_i} = M\upsilon_i\,,\quad i=1, 2, 3\,.$$

U holda

$$\overline{\upsilon_i} = M\,q_i + \mathrm{M}\xi_i\,,\quad i=1, 2, 3$$

bo‘ladi. $\overline{\upsilon_i}$ larni hisoblash uchun uchta modeldagi o‘rtacha xizmat ko‘rsatish vaqtlarini topamiz:

$$M\xi_1 = \frac{1}{\mu}, \quad M\xi_2 = \frac{1}{\mu}, \quad M\xi_3 = \frac{1}{2\mu}.$$

Shunday qilib,

$$\overline{\upsilon_1} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-\rho)},$$

$$\overline{\upsilon_2} = \frac{\rho^2}{\mu(1-\rho^2)} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-\rho^2)},$$

$$\overline{\upsilon_3} = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)} + \frac{1}{2\mu} = \frac{1}{2\mu(1-\rho)},$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Demak, kemaning (mijozning) portda (tizimda) umumiy o‘tkazgan vaqti nuqtai nazaridan birinchi loyiha uchinchi loyihadan yomon. Ikkinchi va uchinchi loyihalarni solishtirish uchun

$$\frac{1}{1-\rho^2} \quad \text{va} \quad \frac{1}{2(1-\rho)}$$

sonlarni taqqoslash kerak. $0 < \rho < 1$ bo‘lganda

$$\frac{1}{1+\rho} > \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{1-\rho^2} > \frac{1}{2(1-\rho)}$$

bo‘ladi. Demak, uchinchi loyiha ikkinchi loyihaga nisbatan yaxshi ekan.

Xulosa qilib aytganda, q_i - xizmat ko‘rsatish boshlanguncha kutish vaqti nuqtai nazaridan qaraganda eng yaxshi loyiha ikkinchi loyiha, keyin uchinchi va birinchi loyihalar o‘rin egallaydi. Portda umumiy o‘tkazilgan vaqtga ($\overline{\upsilon_i}$) nisbatan esa, uchinchi loyiha eng yaxshi, undan keyin ikkinchi loyiha va eng yomoni birinchi loyiha hisoblanadi. Demak, port qurilishida qaysi loyihani tanlash kerakligi masalasida ikkinchi va uchinchi loyihalar raqobat qiladi. Oxirgi qarorni qabul qilishda, albatta, ba’zi qo‘shimcha sabablarni muhokama qilishga to‘g‘ri keladi.

§7 ga masalalar

7.1. Kichkina shaharchada uyali telefoniga qo‘ng‘iroq qilish mumkin bo‘lgan to‘rt nafar taksi haydovchisi aholiga xizmat ko‘rsatadi. Quyidagi bo‘lishi mumkin bo‘lgan holatlarni qaraymiz:

I. Taksi haydovchilarining barchasi alohida-alohida bir-biriga bog‘liqsiz ravishda ishlaydi, ya’ni to‘rtta bir xil

$$<M_{\lambda}\left|M_{\mu}\right|1>$$

tizimlar mavjud.

II. Taksi haydovchilari ikkitadan hamkorlikda ishlaydi, ya’ni ikkita

$$<M_{2\lambda}\left|M_{\mu}\right|2>,\ <M_{2\lambda}\left|M_{\mu}\right|2>$$

tizimlar tashkil qilingan.

III. Barcha to‘rtta taksi haydovchi bir jamoani tashkil qiladi va hamkorlikda ishlaydi, ya’ni bitta

$$<M_{4\lambda}\left|M_{\mu}\right|4>$$

xizmat ko‘rsatish tizimi mavjud.

IV. Ikkita haydovchi birgalikda, qolgan ikkitasi alohida bog‘liqsiz ravishda ishlaydi, ya’ni uchta

$$<M_{2\lambda}\left|M_{\mu}\right|2>,\ \ <M_{\lambda}\left|M_{\mu}\right|1>,\ \ <M_{\lambda}\left|M_{\mu}\right|1>$$

tizimlar bor.

V. Bir nafar haydovchi qolganlariga bog‘liqsiz alohida, qolgan uch nafari bir jamoa bo‘lib, hamkorlikda ishlaydi, ya’ni ular ikkita

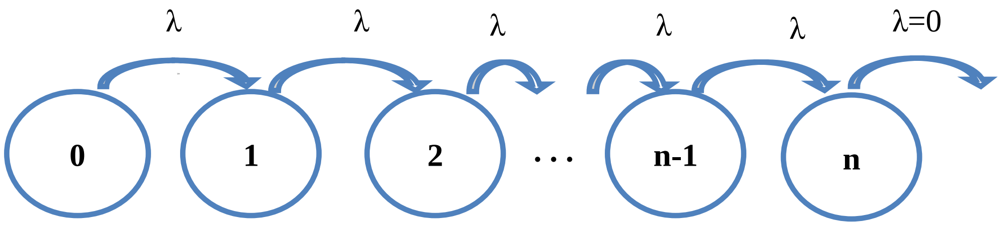
$$<M_{3\lambda}\left|M_{\mu}\right|3> \quad \text{va} \quad <M_{\lambda}\left|M_{\mu}\right|1>$$

tizimlarni tashkil etadi.

Barcha keltirilgan beshta xizmat ko‘rsatish tizimini xizmat ko‘rsatish boshlanguncha o‘rtacha kutish vaqti Mq nuqtai nazaridan taqqoslang.

§8. Ba’zi eng sodda ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimlari

1. Biror mexanizmning asosiy elementi λ parametrli ko‘rsatkichli taqsimlangan tasodifiy vaqtdan keyin ishdan chiqsin, ya’ni yaroqsiz holga kelsin. Yaroqsiz holga kelgan element zahirada mavjud bo‘lgan yangi xuddi shunday element bilan darhol almashtiriladi. Boshlang‘ich paytda zahiradagi yaroqli elementlar soni n ta bo‘lsin. $X(t)$ orqali t momentgacha yaroqsiz holga kelgan (ishdan chiqqan) elementlar sonini belgilaymiz. U holda , ravshanki , $X(t)$ faqat ko‘payish jarayoni (§3 ga qarang) bo‘ladi va unga quyidagi 1-rasmda keltirilgan diagramma mos keladi.



1-rasm.

Odatdagiday

$$P_k(t) = P(X(t) = k), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

funksiyalarni kiritamiz. Ular (lemma 1.4 ga qarang)

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$

$$P_1'(t) = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t)$$

$$\cdots$$

$$P_{n-1}'(t) = \lambda P_{n-1}(t) + \lambda P_{n-2}(t)$$

$$P_n'(t) = \lambda P_{n-1}(t),$$

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(t) = 1$$

differensial tenglamalar sistemasini va $P_0(0) = 1$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiradi. Bu tenglamalar sistemasidagi differensial tenglamalar $P_k(t), \quad k = 0,1, \ldots, n,$ funksiyalarga nisbatan birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalardir.

$$P_0(0)=1, \quad P_k(0)=0, \quad \mathrm{k}=1,\, 2,\, ...,n$$

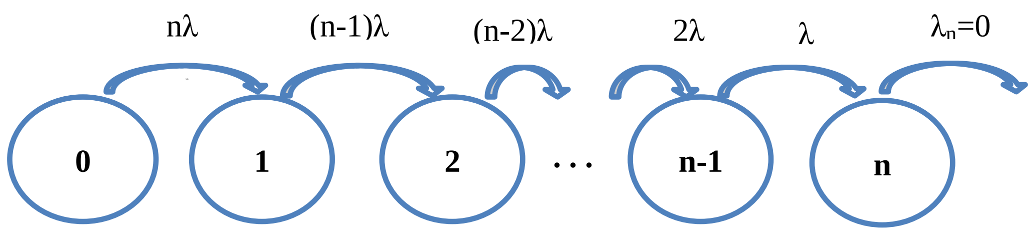
boshlang‘ich shartlarni hisobga olgan holda sistemadagi tenglamalarni ketma-ket yechib,

$$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, \quad 0\le k\le n-1,$$

$$P_n(t)=1-\sum_{k=0}^{n-1}P_k(t)$$

larni hosil qilamiz.

2. Mexanizmda n ta bir xil turdagi element ishlayotgan bo‘lsin. Ularning har biri, oldingi masaladagiga o‘xshab, λ parametrli ko‘rsatkichli tasodifiy vaqtdan keyin yaroqsiz holga keladi. Mexanizm ishdan to‘xtaydi, agar barcha n ta element yaroqsiz holga kelsa. $X(t)$ jarayon t momentgacha yaroqsiz holga kelgan elementlar soni bo‘lsa, u ham faqat ko‘payish jarayoni bo‘ladi va unga quyidagi 2-rasmdagi diagramma mos keladi.



2-rasm.

Bu holda

$$P_k(t)=P(X(t)=\mathrm{k}), \quad \mathrm{k}=0,\, 1,\, ...,n$$

funksiyalar

$$P_0'(t)=-n\lambda P_0(t)$$

$$P_1'(t)=-(n-1)\lambda P_1(t)+n\lambda P_0(t)$$

$$. \quad . \quad .$$

$$P_{n-1}'(t)=-\lambda P_{n-1}(t)+2\lambda P_{n-2}(t)$$

$$P_n'(t) = \lambda P_{n-1}(t),$$

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(t) = 1$$

differensial tenglamalar sistemasini va $P_0(0) = 1$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiradi.

Bu sistemaning yechimi

$$P_k(t) = C_n^k e^{-(n-k)\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^k, \quad 0 \le k \le n-1, \qquad (1)$$

ko‘rinishida bo‘lishini matematik induksiya usulida isbotlaymiz. $k = 0$ bo‘lganda

$$P_0(t) = e^{-n\lambda t}$$

ekanligini ko‘rish qiyin emas. (1) ni $k = i,\ \ 0 \le i \le n-1$ da o‘rinli, deb faraz qilamiz. $k = i+1$ da tenglamalar sistemasidan

$$P_{i+1}'(t) = -\lambda P_{i+1}(t) + 2\lambda P_i(t)$$

yoki farazimizga ko‘ra,

$$P_{i+1}'(t) = -\lambda P_{i+1}(t) + 2\lambda C_n^i e^{-(n-i)\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^i \qquad (2)$$

tenglamani hosil qilamiz. (2) tenglamadagi oxirgi qo‘shiluvchini $f(t)$ deb belgilasak, tenglama

$$P_{k+1}'(t) + \lambda P_{k+1}(t) = f(t),$$

uning yechimi esa,

$$P_{i+1}(t) = e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} f(t) dt$$

ekanligini hosil qilamiz. Oxirgi tenglikka $f(t)$ funksiyaning ifodasini qo‘yib,

$$P_0(0) = 1, \quad P_k(0) = 0, \quad 1 \le \mathrm{k} \le n$$

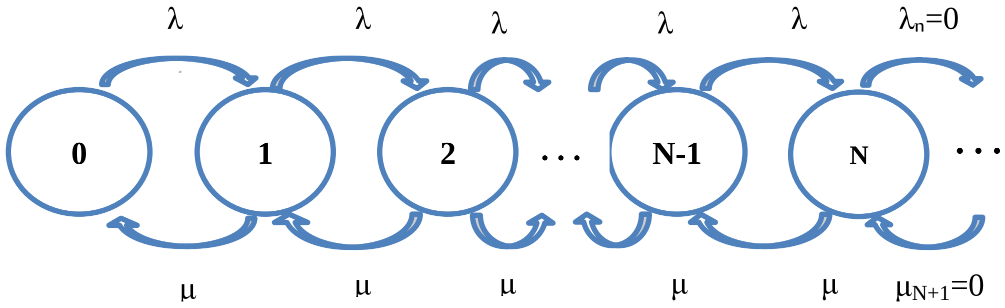
boshlang‘ich shartlardan foydalansak,

$$P_{i+1}(t) = C_n^{i+1} e^{-(n-i-1)\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{i+1} \qquad (3)$$

kelib chiqadi va shu bilan (1) munosabat isbotlandi.

3. $< M_\lambda \left| M_\mu \right| 1 > (\textit{навбат узунлиги} < N)$

tizimni qaraymiz. Bu xizmat ko‘rsatish tizimini quyidagi 3-rasmda keltirilgan diagrammaga mos keladigan $X(t)$ tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayoni ifodalaydi.



3-rasm.

Tabiiyki, λ va μ parametrlarning ixtiyoriy qiymatlarida tizimning statsionar holati mavjud bo‘lib,

$$S=\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda^k}{\mu^k}=\sum_{k=1}^{N}\rho^k=\frac{\rho^{N+1}-\rho}{\rho-1},$$

$$P_k=\lim_{t\to\infty}P_k(t)=\frac{\rho^{k+1}-\rho^k}{\rho^{N+1}-1},\quad 0\le k\le N$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi. Statsionar holatda tizimda mavjud bo‘lgan mijozlar sonining matematik kutilmasi

$$MX=\sum_{k=0}^{N}kP_k=\frac{\rho-1}{\rho^{N+1}-1}\sum_{k=0}^{N}k\rho^k$$

qiymatga teng bo‘lishi kelib chiqadi. Agar

$$\sum_{k=0}^{N}k\rho^k=\sum_{k=1}^{N}k\rho^k=\rho\sum_{k=1}^{N}k\rho^{k-1}=\rho\sum_{k=1}^{N}(\rho^k)'=$$

$$=\rho\left(\sum_{k=1}^{N}\rho^k\right)'=\rho\left(\frac{\rho^{N+1}-\rho}{\rho-1}\right)'_{\rho}=\rho\frac{1-(N+1)\rho^N+N\rho^{N+1}}{(\rho-1)^2}$$

ekanlini hisobga olsak,

$$MX=\rho\frac{1-(N+1)\rho^N+N\rho^{N+1}}{(\rho^{N+1}-1)(\rho-1)}$$

tenglikni hosil qilamiz.

$< M_\lambda \left| M_\mu \right| m > (навбат\, узунлиги < N)$ xizmat ko‘rsatish tizimi uchun $m \geq 2$ bo‘lganda yuqoridagiga o‘xshash munosabatlarni keltirib chiqarish mumkin.

§8 ga masalalar

8.1. (2) tenglamaning yechimi (3) ekanligining to‘la isbotini keltiring.

8.2. Avtomagistral chetida joylashgan kabobxona yonida bir dona avtomobilga to‘xtash joyi bo‘lib, bu joy band bo‘lsa, yo‘l bo‘yida yana 10 tagacha avtomobilga navbat kutish uchun joy ajratilgan. Agar bu joylarning barchasi band bo‘lsa, kabobxonaga to‘xtashni hoxlagan navbatdagi avtomobil to‘xtamay o‘tib ketadi. Statistik ma’lumotlarga ko‘ra , kabobxonaga eng sodda Puasson oqimi bilan o‘rtacha har 10 minutda 3 nafardan mijoz keladi. Har bir mijozga $\lambda = 3$ minut ko‘rsatkichli taqsimlangan tasodifiy vaqt oralig‘ida xizmat ko‘rsatiladi. Quyidagilarni hisoblang:

a) kabobxonada birorta ham mijoz bo‘lmaslik hodisasining ehtimolligini;

b) xizmat boshlanishini kutayotgan mijozlar sonining o‘rtacha sonini (matematik kutilmasini);

c) mijozning unga xizmat ko‘rsatish boshlanguncha o‘rtacha kutadigan vaqtini;

d) kabobxonadagi mijozlar sonining 10 nafardan ko‘p bo‘lish ehtimolligini.

8.3.Oshxonada xizmat ko‘rsatish uchun 50 nafar mijozga yetarli o‘rin bor. Mijozlar oshxonaga o‘rtacha soatiga 20 nafar eng sodda (Puasson) oqim sifatida keladi. Xizmat ko‘rsatish tezligi soatiga 22 nafar mijozni tashkil etadi. Barcha o‘rinlar band bo‘lsa, mijoz kutib turmaydi, qaytib ketadi.

a) Kelgan mijozning oshxonada bo‘sh o‘rin yo‘qligi uchun ovqatlanmay ketish hodisasining ehtimolligini toping;

b) Oshxonada bo‘sh o‘rinlar soni 3 tadan kam bo‘lish hodisasining ehtimolligini toping.

8.4.Poliklinikaga soatiga oʻrtacha $\lambda = 30$ nafar bemor Puasson oqimi boʻyicha tashrif buyuradi. Vrachning qabulxonasida 14 nafar bemor qabulni kutishi uchun oʻrin mavjud. Vrach har bir bemorga koʻrsatkichli taqsimlangan tasodifiy vaqt oraligʻida xizmat koʻrsatadi. Agar vrach bir soatda oʻrtacha 20 nafar bemorga xizmat koʻrsatsa, quyidagilarni toping:
a) vrach huzuriga kelgan bemorning navbat kutmaslik ehtimolligini;
b) bemorning vrach qabulxonasining kutish zalida boʻsh joy topa olish ehtimolligini;
c) bemorning poliklinikada oʻtkazgan umumiy (kutish va xizmat koʻrsatish) vaqtining matematik kutilmasini.
8.5. Bank boʻlimiga mijozlar Puasson oqimi boʻyicha soatiga oʻrtacha $\lambda = 36$ nafardan tashrif buyuradi. Har bir mijozga xizmat koʻrsatish vaqti $\mu = 0,035$ soat parametrli koʻrsatkichli taqsimotga ega. Kutish zaliga koʻpi bilan 30 nafar mijoz sigʻadi.
a) kutuvchilar soni 3 nafar boʻlish ehtimolligi 0,2 dan oshmasligi;
b) kutuvchilar sonining oʻrta qiymati 3 dan oshmasligi uchun bank boʻlimida xizmat koʻrsatuvchi nechta kassa boʻlishi kerak?
8.6. Valyutalarni almashtirish (ayirboshlash) shahobchasining ish faoliyatini qaraymiz. Mijozlar shahobchaga oʻrtacha har 6 minutda bir nafardan Puasson oqimi boʻyicha keladi. Har bir mijozga oʻrtacha 6 minut davomida xizmat koʻrsatiladi va xizmat koʻrsatish vaqti koʻrsatkichli taqsimlangan. Har bir xizmat koʻrsatilgan mijoz shahobchaga oʻrtacha bir dollar foyda keltiradi. Shahobcha bitta xizmat koʻrsatadigan kassa va ikkita kutish oʻrindigʻiga ega. Mijoz kelganda kutish oʻrindiqlari band boʻlsa, u tizimni darhol tark etadi. Shahobchaning ish faoliyatini yaxshilash uchun ikkita investitsion loyiha qaralmoqda:
a) 100 dollar mablagʻ hisobiga qoʻshimcha ikkita kutish oʻrindigʻi (jami toʻrtta boʻladi) tashkil etish;
b) 500 dollar mablagʻ hisobiga kutish oʻrindiqlari sonini 10 taga yetkazish.

Agar shahobcha kuniga 8 soatdan ishlasa, qilingan harajatlarni qoplash uchun talab etiladigan oʻrtacha vaqtni toping.

8.7. 8.6-masalani bitta mijozga xizmat ko‘rsatish o‘zgarmagan va shahobchaga Puasson oqimi bo‘yicha o‘rtacha har 12 minutda bitta mijoz keladigan holda yeching.

§9. Boshqa turdagi ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimlari haqida

Xizmat ko‘rsatish tizimiga mijozlarning kelish oralig‘idagi τ_i tasodifiy vaqtlar $G_e(x) = \mathrm{P}(\tau_i < x)$, $i-$ raqamli mijozga xizmat ko‘rsatish ξ_i vaqti $G_s(x) = \mathrm{P}(\xi_i < x)$ taqsimot funksiyalariga ega bo‘lsin. Bu yerda τ_i va ξ_i tasodifiy miqdorlar, umuman olganda , ko‘rsatkichli taqsimot qonuniga ega bo‘lishi shart emas; va $\tau_1, \tau_2, ...$ $(\xi_1, \xi_2, ...)$ tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz va bir xil taqsimlangan, deb hisoblaymiz.

$$M\tau_i = \frac{1}{\lambda} \text{ va } M\xi_i = \frac{1}{\mu}$$

belgilashlar kiritamiz va kirish oqimi λ intensivlikka, mijozlarga xizmat ko‘rsatish μ intensivlikka ega, degan iboralarni saqlab qolamiz.

Avvalgiday, $X(t)$ - t momentdagi xizmat ko‘rsatish tizimida mavjud bo‘lgan mijozlar soni bo‘lsin. Umumiy holda, $X(t)$ qiymatlarini o‘zgartiradigan momentlar orasidagi tasodifiy vaqt ko‘rsatkichli taqsimlangan bo‘lishi shart emas. Shuning uchun, umumiy holda $X(t)$ tug‘ilish va nobud bo‘lish jarayoni bo‘lmaydi. Bunday jarayonlarni o‘rganish uchun bizning kursimiz doirasidan tashqarida bo‘lgan anchagina murakkab matematik usullardan foydalanishga to‘g‘ri keladi. Biz bu yo‘nalishdagi ba’zi natijalarni sanab o‘tamiz xolos. Ularning isbotini [1-3] adabiyotlardan topish mumkin.

Agar avvalgiday $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ belgilashni qabul qilsak, quyidagi tasdiq o‘rinlidir.

Teorema. *Agar* $\rho < 1$ *bo‘lsa,* $X(t)$ *jarayon uchun statsionar holat mavjud, ya’ni* $P_k = \lim\limits_{t\to\infty} P(X(t) = k)$ *limit mavjud va* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ *bo‘ladi.*

Agar $\rho \geq 1$ bo'lsa, $X(t)$ uchun statsionar holat mavjud bo'lmaydi va t ning o'sishi bilan $X(t)$ ning qiymati cheksizlikka qarab ketadi.

Agar $\rho < 1$ bo'lsa, statsionar holatda mijozning unga xizmat ko'rsatish boshlanguncha kutadigan vaqti - q murakkab taqsimot qonuniga ega bo'ladi va uning aniq ko'rinishini topish juda murakkab masala hisoblanadi. Biroq, x ning yetarli katta qiymatlarida $P(q > x)$ uchun taqribiy formulalar keltirib chiqarilgan. Bu taqribiy formula

$$P(q > x) = Ce^{-\lambda_0 x}(1 + o(1)), \quad x \to \infty \tag{1}$$

ko'rinishga ega bo'lib, C va λ_0 larning aniq qiymatlari topilgan, masalan,

$$\lambda_0 = \sup\{\lambda : M\, e^{\lambda(\tau - \xi)} \leq 1\},$$

bu yerda $\tau -$ mijozlarning kelish momentlari orasidagi farq, $\xi -$ bitta mijozga xizmat ko'rsatish vaqti.

Mantiqan qaraganda, τ_i va ξ_i tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liqsiz bo'lmagan holda bitta xizmat ko'rsatuvchi moslamaga ega bo'lgan $(m = 1)$ yanada umumiyroq ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlarini qarash mumkin. Bu holda ham yetarli keng shartlar ostida $\rho < 1$ bo'lganda statsionar holatning mavjudligi, $\rho \geq 1$ bo'lganda esa, mavjud emasligi kelib chiqadi.

O'rganish yanada qiyinroq bo'lgan ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlariga

$$< G \big| G \big| m >$$

turdagi tizimlar kiradi (xizmat ko'rsatuvchi moslamalar soni $m > 1$). Bunday tizimlarda statsionar holat mavjud bo'lishi uchun $\rho < m$ shart yetarli hisoblanadi. Qaralayotgan tizimlar uchun $m = 2$ bo'lganda (1) ko'rinishdagi taqribiy formula yaqin o'tmishda topilgan bo'lib, $m \geq 3$ bo'lganda izlanishlar davom etmoqda.

§9 ga masalalar

9.1. Bitta xizmat ko'rsatuvchi moslamali xizmat ko'rsatish tizimiga tushadigan talablar Puasson oqimi bo'yicha bo'lsin. Bunda bir soat ichida tushadigan talablarning o‘rtacha chastotasi λ ga teng, deb olamiz. Bitta mijozga xizmat ko‘rsatish vaqti $5(\textit{минут}) < x < 15(\textit{минут})$ oralig‘ida tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor bo‘lsin, ya’ni uning zichlik funksiyasi $5 < x < 1$ oraliqda $p(x) = \frac{1}{10}$, qolgan x larda $p(x) = 0$ bo‘lsin.

a) λ ning qanday qiymatlarida tizimning statsionar holati mavjud bo‘lishini aniqlang;

b) statsionar holatda

$$\ln P(q > x) = \lambda_0 x(1 + o(1)), \quad x \to \infty$$

formuladagi λ_0 ni aniqlang ((1) formulaga qarang).

9.2. Bitta xizmat ko‘rsatuvchi moslamali xizmat ko‘rsatish tizimini qaraymiz. Ketma-ket tushadigan talablarning tushish vaqtlari orasida farq o‘zarmas bo‘lib, 10 minutga teng bo‘lsin. Har bir talabga xizmat ko‘rsatish vaqti $\mu = 5$ minut parametr bilan ko‘rsatkichli taqsimlangan bo‘lsa, quyidagilarni toping:

a) O‘zidan oldingi mijoz tizimga kirish momentida tizimda to‘rtta mijoz bo‘lgan bo‘lsa, mijozning tizimga kirish momentida tizimda ikkita mijoz bo‘lishining ehtimolligini;

b) O‘zidan oldingi mijoz tizimga kirish momentida tizimda ikkita mijoz bo‘lgan bo‘lsa, mijozning tizimga kirish momentida tizimda mavjud bo‘lgan mijozlar sonining matematik kutilmasini.

9.3. Avtomobillarning yuvish stansiyasiga har 15 minutda bitta mijoz keladi, ya’ni mijozlar kelish momentlari orasidagi vaqt tasodifiy emas. Har bir avtomobilga xizmat ko‘rsatish vaqti $(7,16)$ parametrli tekis taqsimlangan bo‘lsin (tabiiyki, bu vaqt o‘zgarmas bo‘la olmaydi, chunki u avtomobil hajmiga bog‘liq). Stansiyada faqat bitta xizmat ko‘rsatish moslamasi bor. Agar q - statsionar holatda xizmat ko‘rsatish boshlanishini kutish vaqti bo‘lsa,

$$\ln P(q > x) = \lambda_0 x(1 + o(1)), \quad x \to \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi λ_0 ni toping.

Adabiyotlar

1. Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и её приложения. М., Советское радио, 1971, 520 стр.
2. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М., Наука, 1987, 336 стр.
3. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания /Пер. с англ.М.,Машиностроение, 1979, 432 стр.
4. Таха Х. Введение в исследование операций. В 2 кн./Пер. с англ. М., Мир, 1985, Кн.2, 196 стр.
5. Джафаров К.А., Могульский А.А. Элементы теории массового обслуживания. Изд.ИМ СО РАН, 1997, 68 стр.
6. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания . М., Наука, 1972, 368 стр.

MUNDARIJA

VALI RAXIMDJANOVICH XODJIBAYEV

OMMAVIY XIZMAT KO'RSATISH NAZARIYASI ELEMENTLARI

O'QUV QO'LLANMA

Muharrir: M.Talipova
Texnik muharrir: G.Ibragimova
Sahifalovchi: G.Tadjibayeva

Bosishga ruxsat etildi: 28.09.2022 y. Bichimi 60x84 1/16
Ofis qog'ozi. Rizograf usulda. Times garniturasi.
Shartli bosma tabog'i 5,0. Nashr. Hisob tabog'i 4,5.
Adadi 200 nusxa. Buyurtma №28-09

«IMPRESS MEDIA» MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
Manzil: Toshkent shahri, Yakkasaroy tumani, Qushbegi, 6