

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.09/2025.27.12. T.01.01.M RAQAMLI ILMIY KENGASH

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY
UNIVERSITETI

SAPAYEV SHIXNAZAR OMON O‘G‘LI

O‘QQA NISBATAN SIMMETRIK JISMDAGI NOSTATSIONAR ISSIQLIK
TARQALISH MASALASINI SONLI MODELLASHTIRISH

05.01.07- Matematik modelashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui

TEXNIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYA
AVTOREFERATI

Toshkent – 2026

**Texnika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD)
по техническим наукам**

**Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD)
on technical sciences**

Sapayev Shixnazar Omon o'g'li

O'qqa nisbatan simmetrik jismdagi nostatsionar issiqlik tarqalish masalasini
sonli modellashtirish 3

Сапаев Шихназар Омон угли

Численное моделирование нестационарной задачи теплопереноса
в осесимметричной конструкции 21

Sapayev Shikhnazar Omon ugli

Numerical modeling of unsteady heat conduction in an axisymmetric body 41

E'lon qilingan ishlar ro'yxati

Список опубликованных работ
List of published works 45

**TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.09/2025.27.12. T.01.01.M RAQAMLI ILMIY KENGASH**

**MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY
UNIVERSITETI**

SAPAYEV SHIXNAZAR OMON O‘G‘LI

**O‘QQA NISBATAN SIMMETRIK JISMDAGI NOSTATSIONAR
ISSIQLIK TARQALISH MASALASINI SONLI MODELLASHTIRISH**

05.01.07- Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui

**TEXNIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYA
AVTOREFERATI**

Tashkent – 2026

Texnika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2025.1.PhD/T5534 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengashning veb sahifasida (www.tuit.uz) va "Ziyonet" Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:

Polatov Asxad Muxamedjanovich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Rasmiy opponentlar:

Muhamediyeva Dildora Kabilovna
texnika fanlari doktori, professor

Yusupov Yusuf Saidjonovich
fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Yetakchi tashkilot:

Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti

Dissertatsiya himoyasi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti huzuridagi DSc.09/2025.27.12. T.01.01.M raqamli Ilmiy kengashning 2026-yil "12" fevral da soat 16⁰⁰ dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100084, Toshkent shahri, Amir Temur ko'chasi, 108-uy. Tel.: (99871) 238-64-43, e-mail: tuit@tuit.uz).

Dissertatsiya bilan Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (405 raqam bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 100084, Toshkent shahri, Amir Temur ko'chasi, 108-uy. Tel.: (99871) 238-64-70.)

Dissertatsiya avtoreferati 2026-yil "2" fevral kuni tarqatildi.
(2026-yil "2" fevral dagi 4 raqamli ryestr bayonnomasi.)



M.M. Musayev
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash raisi,
texnika fanlari doktori, professor

E.Sh. Nazirova
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash ilmiy kotibi,
texnika fanlari doktori, professor

F.M. Nuraliyev
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi,
texnika fanlari doktori, professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahonda ilm-fan va texnika tadqiqotlarining dolzarb yo‘nalishlaridan biri – issiqlik ta’siriga uchraydigan turli muhandislik inshootlarining ishlashini aniqlik bilan hisoblash imkonini beruvchi modellarni yaratishdir. O‘qqa nisbatan simmetrik jismlarda issiqlik tarqalish jarayonlarini o‘rganish zamonaviy texnologiyalar va texnikaning rivoji uchun katta ahamiyatga ega. Sanoat, qishloq xo‘jaligi, aviatsiya, yadro energetikasi va raketa-kosmik texnologiyalarining rivojlanishi issiqlik tarqalishiga doir yangi masalalarni yuzaga keltirmoqda. Tadqiq qilinayotgan obyektlarning murakkab geometriyasi va tashqi ta’sirlarning xilma-xilligini inobatga olgan holda, issiqlik almashinuvi jarayonlarini baholash uchun sonli usullar va kompyuter texnologiyalaridan foydalanish zarur. Bunday masalalarning matematik modellari, hisoblash algoritmlari va dasturiy ta’minotlarini yaratish bo‘yicha AQSH, Kanada, Fransiya, Xitoy, Rossiya, Ukraina, Qozog‘iston, Ozarbayjon kabi davlatlarda keng ko‘lamli tadqiqotlar olib borilmoqda.

Jahonda zamonaviy kompyuter texnologiyalari va sonli modellashtirish usullari asosida o‘qqa nisbatan simmetrik jismlarda nostatsionar issiqlik tarqalish jarayonlarini hisoblash, tahlil qilish va uzoq vaqt oralig‘ida ularning rivojlanishini bashoratlash bo‘yicha keng qamrovli ilmiy-tadqiqot ishlari amalga oshirilmoqda. Bunday jarayonlarning matematik modellarini yaratish va ularni sonli usullarda yechish zamonaviy texnologiyalarni rivojlantirishda asosiy qadam hisoblanadi. Masalan, yuqori haroratli qurilmalarning ishonchliligini oshirish yoki energiya tejamkorligini ta’minlashda issiqlik jarayonlarini to‘g‘ri modellashtirish hal qiluvchi rol o‘ynaydi.

Respublikamizda so‘nggi yillarda sanoat, qishloq xo‘jaligi va qayta ishlash tarmoqlarini rivojlantirish, jumladan, zamonaviy axborot texnologiyalarini joriy etish, jarayonlarni boshqarishning avtomatlashtirilgan tizimlarini rivojlantirish bo‘yicha keng ko‘lamli chora-tadbirlar amalga oshirilmoqda. “Raqamli O‘zbekiston – 2030” strategiyasida bu boradagi vazifalar, jumladan, “davlat organlari faoliyatini raqamlashtirish, texnologik jarayonlarni avtomatlashtirish, sanoat korxonalarida zamonaviy axborot texnologiyalarini joriy qilish, korxona ta’minotining barcha bosqichlarini avtomatlashtirish, zamonaviy axborot tizimlari va dasturiy mahsulotlarni joriy etish hisobiga mahsulotlar sifatini yaxshilash, ishchi joylarni bosqichma-bosqich avtomatlashtirish hamda ishlab chiqarish jarayonlarini robotlashtirish ...”¹ kabi vazifalar belgilandi.

Ushbu dissertatsiya ishi O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2023-yil 11-sentabrda “O‘zbekiston – 2030” PF-158-son farmoni, 2022-yil 28-yanvardagi “2022 – 2026-yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida” PF-60-son farmoni, 2020-yil 28-apreldagi “Raqamli iqtisodiyot va elektron hukumatni keng joriy etish chora-tadbirlari to‘g‘risida” PQ-4699-son qarori, 2019 yil 23 oktabrdagi “2020-2030-yillarda O‘zbekiston Respublikasi

¹ “Raqamli O‘zbekiston — 2030”gi O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 5 oktabrdagi PF-6079-son Farmoni.

qishloq xo'jaligini rivojlantirish strategiyasini tasdiqlash to'g'risida" PF-5853-sonli qarori hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa meyoriy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishga ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga mosligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. "Axborotlashtirish va axborot-kommunikatsiya texnologiyalarini rivojlantirish" ustuvor yo'nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o'rganilganlik darajasi. Jismlarda issiqlik tarqalish jarayonlarining matematik modellarini ishlab chiqish va takomillashtirish va ularni sonli usullarda yechishga bag'ishlangan tadqiqot ishlari bir qancha chet el olimlari O. Zenkevich, L. Segerlind, A.A. Samarskiy, P.N. Vabishevich, N.P. Jukov, G.V. Kuznetsov, M.A. Sheremet, A.M. Lipanov, S.S. Makarov, L.M. Ivannikov, S. S. Nikulin, P.A. Mandrik, B.S. Petuxov, L.G. Genin, S.A. Kovalev, S.L. Solovyev, K. Frank, R.M. Manglik, S.B. Mark, W. David, N. Ozisik, H.V. David, P. Seshu, J.N. Reddy, S.V. Patankar, S. Wang, L. Zhang, X. Sun va boshqa xorijiy olimlarning ilmiy ishlarida tadqiq qilingan.

O'zbekiston Respublikasida jismlarda issiqlik tarqalish jarayonlarining matematik modellari, hisoblash usullari va shu kabi tadqiqotlarga F.B. Abutaliyev, M. Aripov, Sh. Nazirov, I.K. Xo'jayev, A.A. Xaljigitov, A. Begmatov, N. Ravshanov, A.Sh. Muxammadiyev, A.M. Polatov, I. Mirzayev, A. Ne'matov, E.Sh. Nazirova, Sh.A.Anarova va boshqa olimlar o'zlarining katta xissalarini qo'shganlar.

Yuqorida qayd etilgan hamda ko'plab xorijiy va mahalliy olimlarning sa'y-harakatlari natijasida nazariy va amaliy jihatdan ahamiyatga ega bo'lgan muhim natijalar qo'lga kiritilib, sanoat qurilmalari hamda qishloq xo'jaligida nostatsionar issiqlik tarqalish jarayonlarini har tomonlama tahlil qilish imkoniyati yaratilgan. Shu bilan birga, o'qqa nisbatan simmetrik jismlarda issiqlik tarqalish jarayonlarini e'tiborga oladigan matematik modellar va hisoblash algoritmlarini yaratish va takomillashtirish bilan bog'liq masalalar hali yetarli darajada o'rganilmagan.

Dissertatsiya mavzusining dissertatsiya bajarilgan oliy ta'lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog'liqligi. Dissertatsiya ishi Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universitetining ilmiy-tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq, UZB-Ind2021-87-sonli "Li simmetriyasi tahlili, giperbolik sistemalarning Lyapunov bo'yicha turg'unligini tahlil qilish va modellashtirish" (2021-2023) mavzusidagi loyiha doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi. O'qqa nisbatan simmetrik jismlarda issiqlik tarqalish jarayonlarini sonli modellashtirish. Hisoblash algoritmlari va dasturiy majmuasini ishlab chiqishdan iborat.

Tadqiqot vazifalari:

o'qqa nisbatan simmetrik jismlarda nostatsionar issiqlik tarqalish jarayonlarini o'rganishga doir ilmiy adabiyotlarni tahlil qilish;

murakkab geometriyaga ega o'qqa nisbatan simmetrik jismlarning kesimi geometriyasini visual ko'rinishda chizish va chekli elementlar to'rini qurish algoritmini ishlab chiqish;

o'qqa nisbatan simmetrik jismlarda nostatsionar issiqlik tarqalishi masalasini yechishda boshlang'ich va chegaraviy shartlarni grafik interfeys orqali aniqlash imkonini beruvchi dasturiy ta'minot modulini ishlab chiqish;

murakkab geometriyaga ega jismlarda nostatsionar issiqlik tarqalish masalasini chekli elementlar usulida hisoblash algoritmini ishlab chiqish;

bir jinsli bo'lmagan jismlarda nostatsionar issiqlik tarqalish masalasini chekli elementlar usulida hisoblash algoritmini ishlab chiqish;

o'qqa nisbatan simmetrik jismlardagi nostatsionar issiqlik tarqalish jarayonlarini asosiy ko'rsatkichlari bo'yicha hisoblash tajribalarini o'tkazish va ular asosida jarayonlarni tadqiq qilish.

Tadqiqot obyekti sifatida o'qqa nisbatan simmetrik jismlarda issiqlik tarqalish jarayoni qaraldi.

Tadqiqot predmetini bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan murakkab geometriyaga ega o'qqa nisbatan simmetrik jismlardagi nostatsionar issiqlik tarqalish jarayonini tadqiq etish uchun matematik modellar va sonli usullar, hisoblash algoritmlari hamda dasturiy majmuasi tashkil etadi.

Tadqiqotning usullari. Tadqiqot jarayonida matematik modellashirishda issiqlik tarqalish nazariyasiga asoslangan variatsion tamoyillar va gipotezalar, xususiyl hosilali tenglamalar sistemasini yechishning sonli usullari, diskret matematika, algoritmlash, kompyuter vositasida modellashirish va chekli elementlar usullari hamda dasturlash texnologiyalari uslublaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

murakkab geometriyaga ega jismlar uchun nostatsionar issiqlik tarqalish masalasini chekli elementlar usuli asosida sonli modeli va hisoblash algoritmi ishlab chiqildi;

bir jinsli bo'lmagan jismlarda nostatsionar issiqlik tarqalish masalasini chekli elementlar usuli asosida hisoblash algoritmi ishlab chiqildi;

murakkab geometriyaga ega jismlar kesimining visual ko'rinish asosida chekli elementlar to'rini qurish algoritmi ishlab chiqildi;

o'qqa nisbatan simmetrik jismlarda nostatsionar issiqlik tarqalishi masalasining boshlang'ich va chegaraviy shartlarini hisobga olish algoritmi yaratildi.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

o'qqa nisbatan simmetrik jismlarda issiqlik tarqalishining nostatsionar jarayonlarini o'rganish maqsadida sonli modellar ishlab chiqildi;

matematik apparat va dasturiy vositalar yordamida real o'qqa nisbatan simmetrik jismlarda issiqlik tarqalishining asosiy ko'rsatkichlari va parametrlari aniqlangan;

murakkab geometriyaga ega o'qqa nisbatan simmetrik jismlarda issiqlik tarqalish jarayoni tadqiq qilingan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Tadqiqot natijalarining ishonchliligi issiqlik tarqalish tenglamasi, uning chegaraviy shartlari va energiyaning saqlanish qonunlariga qat'iy asoslanganligi, shuningdek, sonli hisoblash natijalarining boshqa tizimlarda olingan yechimlar bilan solishtirilganligi bilan tasdiqlanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati.

Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati o'qqa nisbatan simmetrik jismlarda nostatsionar issiqlik tarqalish jarayonlarni tahlil qilish hamda bashoratlash uchun matematik modellashtirish va hisoblash eksperimenti metodologiyasini rivojlantirish bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati o'qqa nisbatan simmetrik jismlarda issiqlik tarqalish jarayonini tadqiq qilishdan iborat.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Dissertatsiya doirasida olib borilgan tadqiqotlar natijasida ishlab chiqilgan algoritmlar va yaratilgan dasturiy majmua asosida:

o'qqa nisbatan simmetrik jismlarda nostatsionar issiqlik tarqalish jarayonini chekli elementlar usuli asosida hisoblash algoritmi va dasturiy vositasi "UzXCMG" MCHJ qo'shma korxonasida joriy qilingan (O'zbekiston Respublikasi Xorazm viloyati hokimligining 2025 yil 25 apreldagi 6-1556 sonli ma'lumotnomasi). Uzoq vaqt yuqori temperatura maydoni ta'sirida bo'lgan o'qqa nisbatan simmetrik konstruksiya elementlarining ekspluatatsiya ishonchliligini, mustahkamligini ta'minlashga va hisoblashlarni o'tkazishga ketadigan vaqt sarfini 8-12 % ga qisqartirish imkonini bergan;

o'qqa nisbatan simmetrik konfiguratsiyaga ega gaz pechkasining ichki issiqlik manbai va tashqi muhit bilan issiqlik almashinishini hisobga olish orqali statsionar issiqlik tarqalish masalasi bo'yicha chekli elementlar usuli asosida hisoblash algoritmi va dasturiy vositasi "XORAZM TEX" MCHJ Klasterning Xonqa tumani bo'limiga joriy qilingan (O'zbekiston Respublikasi Xorazm viloyati hokimligining 2025 yil 25 apreldagi 6-1556 sonli ma'lumotnomasi). Gaz pechkasining haroratining maksimal va minimal qiymatlari tadqiq qilingan. Hisob kitoblarni yuritish ishlari aniqligi, 1.15 marta, tezligini esa 1.25 martaga oshganligi sababli ketadigan vaqt sarfini 10-12 % ga qisqartirish imkonini bergan;

issiqlik tarqalish masalalarini sonli modellashtirish va masalani yechish algoritmlarini ishlab chiqishda Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universitetida 2021-2023 yillar davomida bajarilgan UZB-Ind-2021-87-sonli "Li simmetriyasi tahlili, giperbolik sistemalarning Lyapunov bo'yicha turg'unligini tahlil qilish va modellashtirish" grant loyihasida (O'zbekiston Milliy universiteti 2025 yil 2 maydagi 04/11-5701 sonli ma'lumotnomasi);

xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishda sohaning diskret to'plamini hosil qilish va masalani yechish algoritmlarini ishlab chiqishda Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universitetida 2022-2026 yillarga mo'ljallangan F22020092877 – sonli "Birjinslimas g'ovak muhitlarda anomal moddalar ko'chishi va suyuqliklar sizishi jarayonlarining matematik modellarini tuzish va sonli tadqiq etish" grant loyihasida (Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti 2025 yil 17 maydagi 10-2434 sonli ma'lumotnomasi) xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemalarini sonli modellashtirish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari, jumladan 13 ta xalqaro va 4 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o'tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e'lon qilinganligi. Tadqiqot mavzusi bo'yicha jami 28 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O'zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya

komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etishga tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 8 ta maqola, undan 2 tasi xorijiy jurnallarda nashr qilingan, shuningdek 3 ta EHM uchun dasturiy mahsulot qayd etilganligi haqida guvohnoma olingan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya ishi kirish, to‘rtta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati, shartli belgilar va atamalar ro‘yxati va ilovalardan iborat bo‘lib, hajmi 116 betni tashkil qiladi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

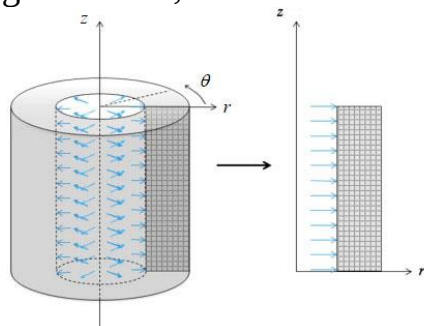
Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarruriyati asoslangan, tadqiqotning O‘zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalari taraqqiyotining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, tadqiqotning maqsad va vazifalari belgilab olingan, tadqiqot obyekti va predmeti aniqlangan, olingan natijalarning ishonchliligi asoslangan, ishning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarini amaliyotga joriy etilganlik holati hamda nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning **“O‘qqa nisbatan simmetrik jismdagi issiqlik tarqalish masalasini matematik modellash tirish bo‘yicha tadqiqotlar tahlili va masalaning qo‘yilishi”** deb nomlangan birinchi bobida so‘ngi yarim asrda o‘qqa nisbatan simmetrik jismlardagi nostatsionar issiqlik tarqalishi jarayonlarni o‘rganish bo‘yicha nashr qilingan ilmiy ishlar tahlili keltirilgan. O‘qqa nisbatan simmetrik jismlarda nostatsionar issiqlik tarqalishi masalasini qo‘yilishi, sonli modellash tirish va chekli elementlar usulida tavsifi keltirilgan.

Silindrik koordinatalar sistemasida nostatsionar issiqlik tarqalishi quyidagi differensial tenglama bilan tavsiflanadi:

$$K_{rr} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} K_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{K_{\theta\theta}}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q(r, z) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

bunda $K_{rr}, K_{\theta\theta}, K_{zz}$ – mos yo‘nalishlardagi issiqlik o‘tkazish koeffitsientlari; $T = T(r, \theta, z, t)$ – temperatura; ρ – jism zichligi, c – solishtirma issiqlik sig‘imi, $Q = Q(r, z)$ – jism ichidagi issiqlik ajratish manbalarining quvvati; r – simmetriya o‘qidan markazigacha bo‘lgan masofa; θ – azimutal burchak.



1-rasm. O‘qqa nisbatan simmetrik jism ko‘rinishi

Agar uch o‘lchamli jism Oz o‘qqa nisbatan geometrik simmetriyaga ega bo‘lsa, u holda bu jism o‘qqa nisbatan simmetrik jism deb ataladi (1-rasm). Bundan tashqari, o‘rganilayotgan fizik miqdor azimutal burchakga bog‘liq bo‘lmasa, u holda (1) differensial tenglama quyidagicha bo‘ladi:

$$K_{rr} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} K_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} + K_{zz} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q(r, z) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2)$$

(2) tenglama bilan ikki turli ko‘rinishdagi chegaraviy shartlar qaraladi. Agar chegaraning bir necha qismida temperatura ma’lum bo‘lsa, quyidagicha tasvirlanadi (Dirixle sharti):

$$T = T_s(r, z, t), \quad (3)$$

bunda T_s – jism sirtidagi harorat.

Agarda jismning sirtida q issiqlik oqimi berilganda (Neyman sharti) yoki $h(T - T_b)$ konvektiv issiqlik almashishi yuz bersa (Nyuton-Rixman sharti) chegaraviy shart quyidagi ko‘rinishni oladi:

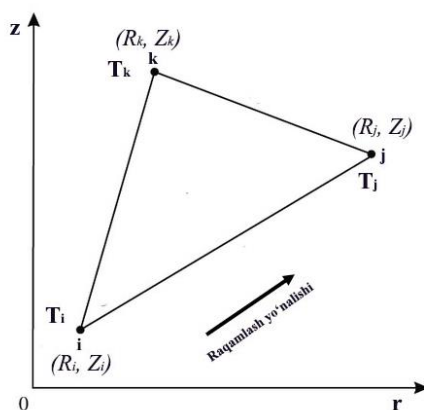
$$K_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} l_r + K_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} l_z + q + h(T - T_b) = 0, \quad (4)$$

bunda h – issiqlik almashish koeffitsiyenti; T_b – tashqi muhit temperaturasi; l_r, l_z – yo‘nalishlar kosinuslari; q – issiqlik oqimi (agarda issiqlik jismdan tarqalsa musbat hisoblanadi).

Issiqlik oqimi q va konvektiv issiqlik yo‘qotilishi $h(T - T_b)$ yuza chegarasining bir xil joyida bir vaqtda uchramaydi. Agar konvektiv uzatish hisobiga issiqlik yo‘qotish mavjud bo‘lsa u holda issiqlik oqimi hisobiga issiqlik uzatilishi yoki yutilishi sodir bo‘lmaydi va aksincha. Agar konvektiv issiqlik almashish mavjud bo‘lmasa, bundan tashqari, issiqlik oqimi nolga teng bo‘lsa, issiqlik izolyatsiyasi chegaraviy sharti quyidagicha bo‘ladi: $\frac{dT}{dn} = 0$.

Masalani yechish uchun uning variatsion ko‘rinishi ko‘rib chiqiladi, bu esa taqribiy yechish usullaridan foydalanishga imkon beradi. Ushbu usullardan biri – chekli elementlar usuli. Yuqorida keltirilgan (3) va (4) chegaraviy shartlardan tashkil topgan (2) tenglamaning yechimi quyidagi funksionalni minimumini aniqlashga ekvivalent:

$$\Phi(T) = \int_V \frac{1}{2} \left[r K_{rr} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + r K_{zz} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 - 2 \left(r Q - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right) T \right] dV + \int_{S_1} q T dS + \int_{S_2} \frac{h}{2} (T - T_b)^2 dS, \quad (5)$$



2-rasm. Uchburchak chekli element

Uchburchak elementda (2-rasm) issiqlik tarqalishi quyidagi ko‘pxad ko‘rinishida approksimatsiya qilinadi: $T(r, z, t) = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z$.

Element uchun issiqlik funksiyasi quyidagi formula bilan beriladi:

$$T^{(e)} = \begin{bmatrix} N_i(r, z) & N_j(r, z) & N_k(r, z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i(t) \\ T_j(t) \\ T_k(t) \end{Bmatrix}; \quad (6)$$

bunda T_i, T_j, T_k – tugun nuqtalardagi temperatura qiymatlari, N_i, N_j, N_k - shakl funksiyalari:

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i r + c_i z); \quad N_j = \frac{1}{2A}(a_j + b_j r + c_j z); \quad N_k = \frac{1}{2A}(a_k + b_k r + c_k z);$$

$$\begin{cases} a_i = R_j Z_k - R_k Z_j, \\ b_i = Z_j - Z_k, \\ c_i = R_k - R_j, \end{cases} \quad \begin{cases} a_j = R_k Z_i - R_i Z_k, \\ b_j = Z_k - Z_i, \\ c_j = R_i - R_k, \end{cases} \quad \begin{cases} a_k = R_i Z_j - R_j Z_i, \\ b_k = Z_i - Z_j, \\ c_k = R_j - R_i, \end{cases}$$

bunda A – uchburchak yuzasi,

$$\text{gradiyent matritsasi} \quad [B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\text{jismning issiqlik o'tkazuvchanlik matritsasi} \quad [D] = \begin{bmatrix} rK_{rr} & 0 \\ 0 & rK_{zz} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

bunda $r = (R_i + R_j + R_k) / 3$ simmetriya o'qidan elementning markazigacha bo'lgan masofani anglatadi.

e -chekli element uchun vaqtga nisbatan (6) differensial tenglama quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = [N(r, z)]^{(e)} \frac{\partial \{T\}^{(e)}}{\partial t}. \quad (9)$$

(5)-funktionalga (6)-(9) ifodalarni qo'yib quyidagini hosil qilish mumkin:

$$\Phi = \sum_{e=1}^m \Phi_e = \sum_{e=1}^m \left[\frac{1}{2} \cdot \int_{V_e} \{T\}^T [B]_e^T [D]_e [B]_e \{T\} dV + \int_{V_e} \rho c [N]_e \{T\} [N]_e \frac{\partial \{T\}}{\partial t} dV - \int_{V_e} r Q [N]_e \{T\} dV \right] +$$

$$+ \sum_{e=1}^m \left[\int_{S_{2e}} q [N]_e \{T\} dS + \int_{S_{3e}} \frac{h}{2} \{T\}^T [N]_e^T [N]_e \{T\} dS - \int_{S_{3e}} h T_b [N]_e \{T\} dS + \int_{S_{3e}} \frac{h}{2} T_b^2 dS \right].$$

Funktionalni minimallashtirish natijasida quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \{T\}} = \frac{\partial}{\partial \{T\}} \sum_{e=1}^m \Phi_e = \sum_{e=1}^m \frac{\partial \Phi_e}{\partial \{T\}} = 0. \quad (10)$$

Chekli elementlarning har biri (10) umumiy yig'indiga qo'shgan hissasini matritsali differensial tenglama shaklida ifodalash mumkin:

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial \{T\}} = [C]_e \frac{\partial \{T\}_e}{\partial t} + [K]_e \{T\}_e - \{F\}_e^q - \{F\}_e^g - \{F\}_e^h,$$

bu yerda elementning issiqlik o'tkazuvchanlik matritsasi:

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]_e^T [D]_e [B]_e dV + \int_{S_{3e}} h [N]_e^T [N]_e dS,$$

elementning issiqlik sig'imi matritsasi:

$$[C]_e = \int_{V_e} \rho c [N]_e^T [N]_e dV.$$

Har bir tugun nuqtaning q zichlikdagi issiqlik oqimi, Q ichki issiqlik manbasi va konvektiv issiqlik o'tkazuvchanlik vektorlari mos ravishda quyidagicha:

$$\{F\}_e^q = - \int_{S_{2e}} q [N]_e^T dS; \quad \{F\}_e^g = \int_{V_e} r Q [N]_e^T dV; \quad \{F\}_e^h = \int_{S_{3e}} h T_b [N]_e^T dS.$$

Barcha elementlarning hissalarini qo'shilganda, differensial tenglamalar sistemasini quyidagicha hosil qilish mumkin:

$$[C] \frac{\partial}{\partial t} \{T\} + [K] \{T\} = \{F\}^q + \{F\}^g + \{F\}^h, \quad (11)$$

bunda $[K]$ - umumlashgan issiqlik o'tkazuvchanlik matritsasi.

Differensial tenglamani (11) yechishda, markaziy ayirma sxemasi asosida chekli ayirmalar usulini qo'llashni ko'rib chiqamiz. Ushbu tenglama quyidagi shaklda yoziladi:

$$[C] \frac{\partial}{\partial t} \{T\} + [K] \{T\} = \{F\}, \quad (12)$$

bunda $\{F\} = \{F\}^q + \{F\}^g + \{F\}^h$.

$\Delta t = t_{n+1} - t_n$ vaqt oralig'ining o'rta nuqtadagi umumlashgan $\{T\}$ vektorining hosilasi quyidagicha ifodalaniladi:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{T\} = \frac{1}{\Delta t} (\{T\}_{n+1} - \{T\}_n). \quad (13)$$

Vaqt oralig'ining o'rta nuqtasida umumlashgan temperatura va tugunlardagi nuqtaviy yuklanish vektori quyidagicha aniqlanadi:

$$\{T\} = \frac{1}{2} (\{T\}_{n+1} + \{T\}_n), \quad (14) \quad \{F\} = \frac{1}{2} (\{F\}_{n+1} + \{F\}_n). \quad (15)$$

Yuqoridagi (12) differensial tenglamaga (13) - (15) ifodalarini qo'llab, quyidagi takroriy bog'lanish formulasini hosil qilamiz:

$$\left([K] + \frac{2}{\Delta t} [C] \right) \{T\}_{n+1} = \left(\frac{2}{\Delta t} [C] - [K] \right) \{T\}_n + 2 \{F\}. \quad (16)$$

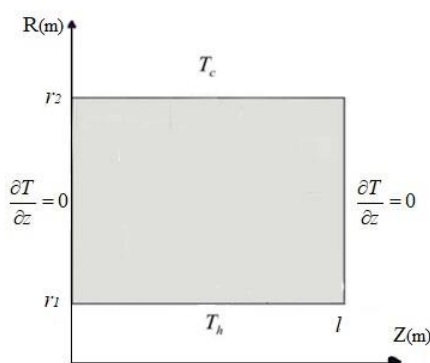
Vaqt oralig'ining boshida tugun nuqtaning temperaturasi bilgan holda, (16) munosabat yordamida har bir vaqt oralig'idagi temperaturani hisoblash mumkin.

Dissertatsiyaning **“O'qqa nisbatan simmetrik jismlarda nostatsionar issiqlik tarqalish masalasini sonli modellashtirish”** deb nomlangan ikkinchi bobida oddiy va murakkab geometrik konfiguratsiyaga ega, shuningdek, bir jinsli bo'lmagan o'qqa nisbatan simmetrik jismlar uchun nostatsionar issiqlik tarqalish jarayonlarini chekli elementlar usuli yordamida kompyuterda modellashtirish masalalari yoritilgan.

O'qqa nisbatan simmetrik bo'lgan bir jinsli materialdan yasalgan silindrda nostatsionar issiqlik tarqalish jarayoni tadqiq qilish uchun chekli elementlar usuli qo'llaniladi. Ishlab chiqilgan hisoblash algoritmi va dasturiy ta'minoti asosida muayyan masalalarning sonli yechimi berilgan va temperatura taqsimlanish maydoni o'rganildi. Olingan yechimlar Elcut dasturida olingan natijalar bilan solishtirilgan va izotermalari keltirilgan.

Issiqlik tarqalish masalasi o'qqa nisbatan simmetrik silindrning kesimida qaraladi (2-rasm). Boshlang'ich va chegaraviy shartlar quyidagicha yoziladi:

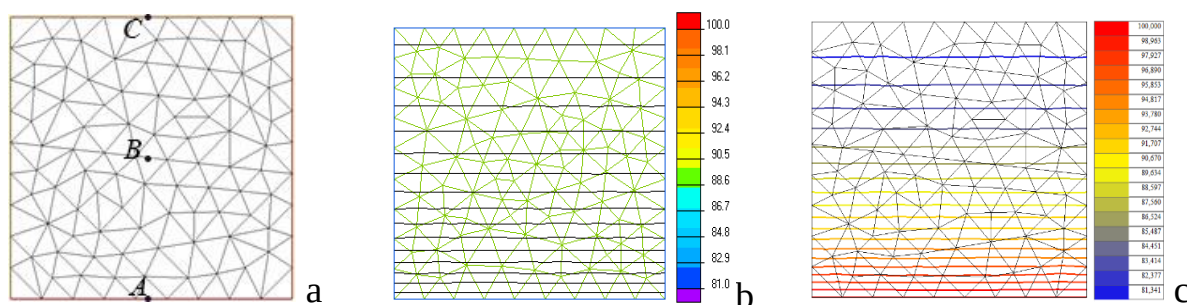
$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ t = 0 : T(r, z, 0) = T_0, 0 \leq z \leq l, r_1 \leq r \leq r_2; \\ r = r_1 = 0.2 : T(r_1, z, t) = T_h, t > 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r = r_2 = 0.7 : -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(r_2, z, t) = h(T(r_2, z, t) - T_c); \\ \frac{\partial T}{\partial z}(r, 0, t) = 0; \\ \frac{\partial T}{\partial z}(r, l, t) = 0. \end{array} \right.$$



3-rasm. Yechim sohasi va chegara shartlari

Yaratilgan hisoblash algoritmini to'g'riligini takidlash uchun, bir jinsli bo'lgan po'latdan yasalgan doimiy qalinlikka ega bo'lgan silindrli qobiqda nostatsionar issiqlik tarqalish masalasi ko'rib chiqiladi (3-rasm). Silindrli po'lat qobiq o'lchamlari $r_2 = 0.7m$, ichki radius $r_1 = 0.2m$ va $l = 0.5m$. Po'lat quyidagi termofizik xususiyatlarga ega: $\lambda = 46 W / (m^{\circ}C)$, $\rho = 7800 kg / m^3$, $c = 460 J / (kg \cdot ^{\circ}C)$. Silindrli qobiqning ichki chegarasida doimiy temperatura saqlanadi: $r_1 = 0.2m$ da $T_h = 100^{\circ}C$ va $r_2 = 0.7m$ da $T_c = 20^{\circ}C$ bo'lgan tashqi muhit bilan konvektsiya mavjud. Yon chegaralarda issiqlik izolyatsiya mavjud. Silindrning boshlang'ich temperaturasi $T_0 = 50^{\circ}C$.

4.a-rasmda silindr kesimining chekli elementli to'r umumiy tasviri keltirilgan. 4.b–4.c-rasmlarda esa mos ravishda Elcut dasturiy paketida va chekli elementlar usuli asosida ishlab chiqilgan algoritm natijalari izotermalari taqdim etilgan. Vaqtning $t = 36000s$ grafik taqqoslash natijalarining yaqinligini ko'rsatadi.



4-rasm. Chekli elementli to'rning umumiy ko'rinishi va izotermalar

1-jadvalda silindr kesimining nazorat nuqtalaridagi haroratning sonli qiymatlari $t = 36000s$ da taqqoslangan. Taqdim etilgan natijalar shuni ko'rsatadiki, hisoblangan yechimlar Elcut dasturiy ta'minoti natijalari bilan yetarlicha aniqlikda

mos keladi. Bu esa ishlab chiqilgan sonli model hamda masalani yechish algoritmining to‘g‘riligini tasdiqlaydi.

1-jadval

Temperatura maydoning nazorat nuqtalaridagi sonli qiymatlari

Nuqtalar	A	B	C
Elcut	100	87.76	82.82
ChEU	100	87.52	82.76

Murakkab geometriya ega keramik ko‘za devorlarida nostatsionar issiqlik tarqalish masalasini yechish ko‘rib chiqiladi, bu masalada vaqt bo‘yicha harorat taqsimotini aniqlash kerak: jismning ichki yuzasidan doimiy $T = 373K$ va tashqi yuzasidan issiqlik almashinish koeffitsienti $h = 10W / (m^2K)$ bo‘lgan $T_h = 313K$ konveksiya mavjud. Ko‘zaning simmetriya kesimi va o‘lchamlari 5.a-rasmda keltirilgan. Keramikaning termofizik xususiyatlari quyidagicha:

$$\lambda = 1.5 W / (mK), \rho = 2000 kg / m^3, c = 900 J / (kg K).$$

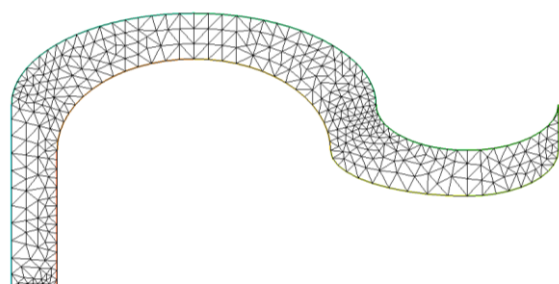
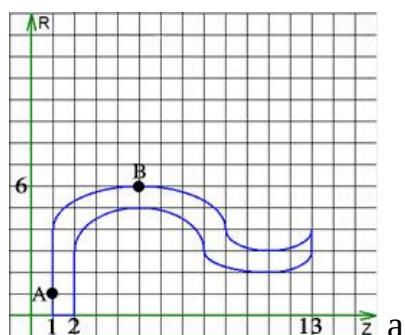
Jismning boshlang‘ich temperaturasi $T_0 = 283K$, vaqt qadami $\Delta t = 30 s$.

Masalani chekli elementlar usuli yordamida yechish maqsadida jismning kesimi 700 ta uchburchak element va 429 ta tugun nuqtalarga bo‘lindi (5.b-rasm). Turli vaqt momentlarida ($t = 60, 120$ va $180 s$) hosil bo‘lgan temperatura izotermalari 6-rasmda keltirilgan. Issiqlik oqimi harorat gradientlari ta‘sirida jismning ichki sirtidan uning tashqi sirtiga yo‘naladi. $A(1 sm, 1 sm)$ va $B(5 sm, 6 sm)$ nazorat nuqtalaridagi temperatura qiymatlarining vaqt bo‘yicha o‘zgarishi 2-jadvalda keltirilgan.

2-jadval

Nazorat nuqtalardagi temperatura qiymatlari

Nuqtalar	t = 60 s	t = 120 s	t = 180 s
$A(1 sm, 1 sm)$	366.85	369.09	369.19
$B(5 sm, 6 sm)$	358.97	367.53	368.37



b

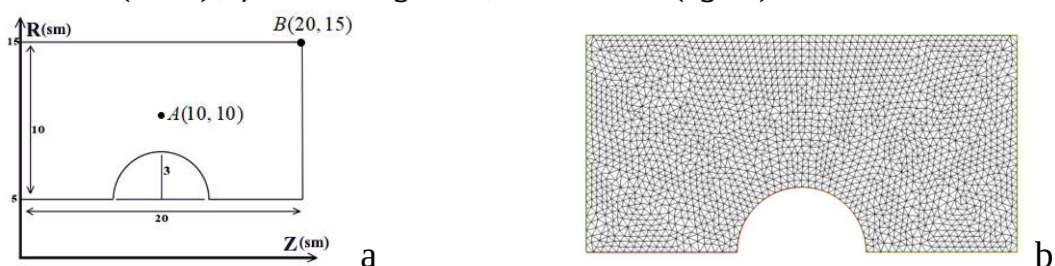
5-rasm. Jismning simmetriya kesimi (a) va chekli elementlar to‘ri (b)



6-rasm. t = 60, 120 va 180 sekundlardagi izotermalar

Bu paragrafda o'qqa nisbatan simmetrik jismdagi nostatsionar issiqlik tarqalish masalasini sonli yechimlarini ishonchliligini baholash uchun hisoblash tajribalari o'tkazildi va murakkab geometriyaga ega o'z ichiga ikki qo'shimcha qoplamani olgan bir jinsli bo'lmagan o'qqa nisbatan simmetrik jismda nostatsionar issiqlik tarqalish masalasini ko'ramiz.

Po'latdan yasalgan o'qqa nisbatan simmetrik jismda issiqlik tarqalishining nostatsionar masalasi ko'rib chiqiladi, bu yerda jismdagi harorat taqsimotini aniqlash kerak. O'qqa nisbatan simmetrik jismning kesimi ko'rinishi va o'lchamlari 7.a-rasmda keltirilgan. Jismning ichki yuzasidan doimiy $T_h = 100^\circ\text{C}$ issiqlik berilgan. Yon sirtlardan $T_c = 20^\circ\text{C}$ tashqi muhit bilan issiqlik almashinish mavjud. Tashqi muhit bilan issiqlik almashinish koeffitsiyenti $h = 10\text{W} / (\text{K} \cdot \text{m}^2)$. Jismning boshlang'ich ($t = 0\text{s}$) harorati $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Po'lat quyidagi termofizik xususiyatlarga ega: $\lambda = 46\text{W} / (\text{m}^\circ\text{C})$, $\rho = 7800\text{kg} / \text{m}^3$, $c = 460\text{J} / (\text{kg}^\circ\text{C})$.



7-rasm. O'qqa nisbatan simmetrik jism kesimi va chekli elementlar to'ri

Boshlang'ich va chegaraviy shartlar quyidagicha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ t = 0 : T(r, z, 0) = T_0, 0 \leq z \leq 20, 5 \leq r \leq 15; \\ r = 5, 0 \leq z \leq 7 : T(5, z, t) = T_h; \\ (r-5)^2 + (z-10)^2 = 9 : T(r, z, t) = T_h; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} r = 5, 13 \leq z \leq 20 : T(5, z, t) = T_h; \\ r = 15, 0 \leq z \leq 20 : -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(15, z, t) = h(T(15, z, t) - T_c); \\ 5 \leq r \leq 15, z = 0 : \frac{\partial T}{\partial r}(r, 0, t) = 0; \\ 5 \leq r \leq 15, z = 20 : \frac{\partial T}{\partial r}(r, 20, t) = 0. \end{array} \right.$$

Olingan natijalarning ishonchliligini tekshirish uchun chekli elementlar sonini ko'paytirishning yechimlarning yaqinlashuviga ta'sirini sonli o'rganish bilan bog'liq hisoblash tajribasi o'tkazildi. 3-jadvalda turli variantlarda diskret modelidagi chekli elementlar va tugunlar soni keltirilgan.

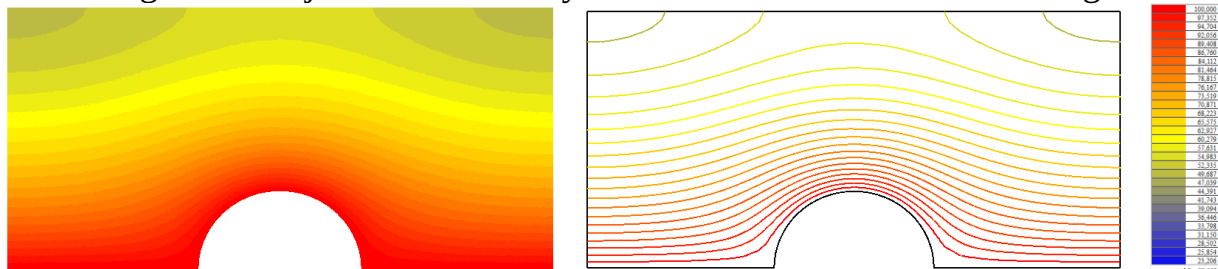
3-jadval

60 sekundagi nazorat nuqtalaridagi harorat ($^\circ\text{C}$)

Variant	Chekli elementlar	Tugun nuqtalar	Koordinata A(10sm, 10sm)	A (%)	Koordinata B(20sm, 15sm)	B (%)
1	156	98	75,823	4,3	50,297	6,4
2	622	350	72,554		47,062	
3	1388	752	71,108	1,9	45,394	3,5
4	2492	1323	71,005	0,14	45,494	0,22

Nazorat nuqtalarining 60 sekundagi harorat ko'rsatkichlari 3-jadvalda keltirilgan (vaqt qadami $\Delta t = 6s$). Eksperimental natijalarni tahlil qilish, chekli elementlar soni ortirilgani sababli, harorat qiymatlarining yaqinlashishini tasdiqlaydi. 8.b-rasmda chekli elementlar to'ring 4-varianti keltirilgan.

Harorat maydoning 60-sekundagi 4-variant diskret modelida yechilgan masalaning sonli natijalari vizualizatsiyasi va izotermalari 8-rasmda berilgan.



8-rasm. Harorat maydoning 60-sekundagi vizualizatsiyasi va izotermalari

O'z ichiga ikki qo'shimcha qoplamani olgan bir jinsli bo'lmagan murakkab o'qqa nisbatan simmetrik mis jismda nostatsionar issiqlik tarqalish masalasi ko'rib chiqiladi. O'qqa nisbatan simmetrik jismning kesimi va qo'shimcha qoplamalarning joylashuvi 9.a-rasmda keltirilgan. Jismning ichki yuzasidan doimiy $T_s = 100^\circ C$ issiqlik berilgan (vaqt qadami $\Delta t = 5s$). Yon sirtlardan $T_{tm} = 0^\circ C$ tashqi muhit bilan issiqlik almashinish mavjud. Tashqi muhit bilan issiqlik almashinish koefitsiyenti $h = 10 W / (K \cdot m^2)$. Jismning boshlang'ich ($t = 0s$) harorati $T_0 = 50^\circ C$. Mis (1, 9.a-rasm) quyidagi termofizik xususiyatlarga ega:

$$\lambda_1 = 384 W / (m^\circ C), \rho_1 = 8800 kg / m^3, c_1 = 381 J / (kg^\circ C).$$

Qo'shimcha qoplama materialining termofizik xususiyatlari: po'lat (2, 9.a-rasmda):

$$\lambda_2 = 46 W / (m^\circ C), \rho_2 = 7800 kg / m^3, c_2 = 460 J / (kg^\circ C),$$

va temir (3, 9.a-rasmda):

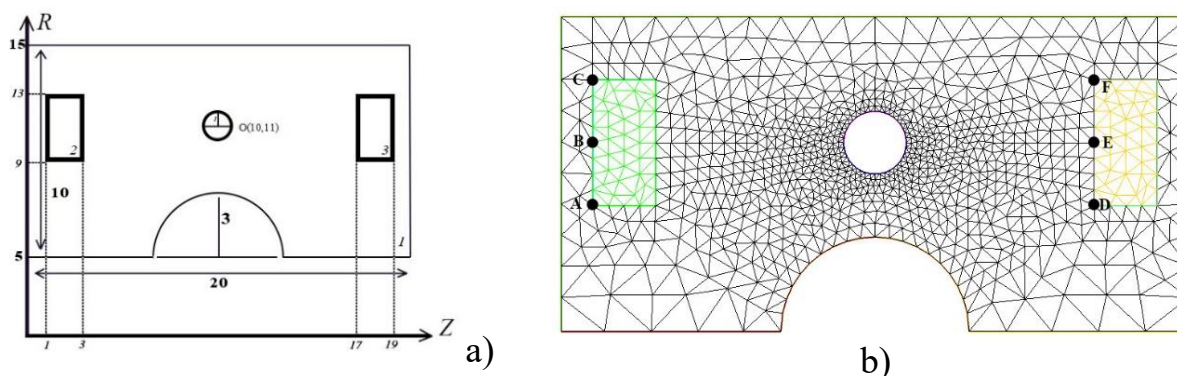
$$\lambda_3 = 71 W / (m^\circ C), \rho_3 = 7900 kg / m^3, c_3 = 460 J / (kg^\circ C).$$

Boshlang'ich va chegaraviy shartlar quyidagicha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right); \\ t = 0: T(r, z, 0) = T_0, 0 \leq z \leq 20, 5 \leq r \leq 15; \\ r = 5, 0 \leq z \leq 7: T(5, z, t) = T_s; \\ (r-5)^2 + (z-10)^2 = 9: T(r, z, t) = T_s; \\ r = 5, 13 \leq z \leq 20: T(5, z, t) = T_s; \\ r = 15, 0 \leq z \leq 20: -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(15, z, t) = h(T(15, z, t) - T_c); \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 5 \leq r \leq 15, z = 0: \frac{\partial T}{\partial r}(r, 0, t) = 0; \\ 5 \leq r \leq 15, z = 20: \frac{\partial T}{\partial r}(r, 20, t) = 0; \\ (r-11)^2 + (r-10)^2 = 1: \frac{\partial T}{\partial r}(r, z, t) = 0, \frac{\partial T}{\partial z}(r, z, t) = 0; \\ 9 \leq r \leq 13, 1 \leq z \leq 3: \rho = \rho_2, c = c_2, \lambda = \lambda_2; \\ 9 \leq r \leq 13, 17 \leq z \leq 19: \rho = \rho_3, c = c_3, \lambda = \lambda_3. \end{array} \right.$$

Bir jinsli bo'lmagan o'qqa nisbatan simmetrik jism kesimining chekli elementli to'ring umumiy ko'rinishi 9.b-rasmda keltirilgan. Masalani yechishda foydalaniladigan chekli elementlar to'ri quyidagi parametrlarni o'z ichiga oladi: 979 ta tugun nuqta, 1848 ta chekli element, tenglamalar sistemasining o'lchami $n=979$, nolga teng bo'lmagan elementlar joylashgan lentaning kengligi 34 ga teng, yakuniy hisoblash vaqti esa 60 sekundni tashkil etadi (vaqt qadami $\Delta t = 5s$).

O'qqa nisbatan simmetrik jism kesimining nazorat nuqtalaridagi ($t = 30$ s) harorat qiymati bir jinsli bo'lgan va bir jinsli bo'lmagan holati 4-jadvalda taqqoslanadi. Berilgan natijalar shuni ko'rsatadiki temir va po'lat materiallarining fizik xususiyatlari turli bo'lgani sabab temperatura qiymatlari farqli ko'rinishda.



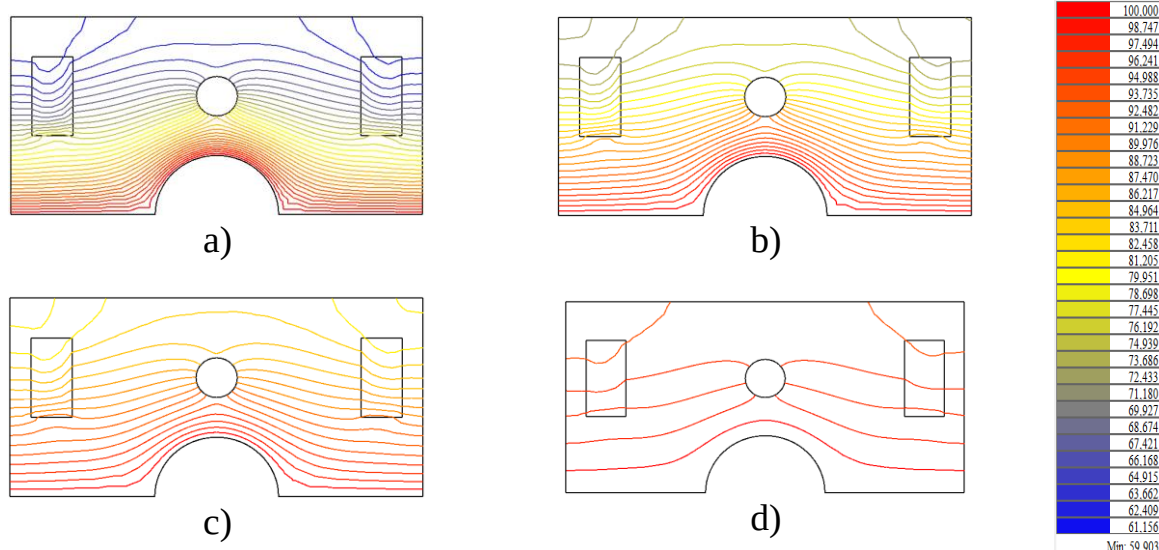
9-rasm. O'qqa nisbatan simmetrik jismning kesimi va chekli elementlar to'ri

4-jadval

Harorat maydoning sonli qiymatlari

Nuqta Material	A(1, 9)	B(1, 11)	C(1, 13)	D(17, 9)	E(17, 11)	F(17, 13)
Bir jinsli	96,554	95,433	94,719	96,697	95,548	94,791
Bir jinsli bo'lmagan	96,478	94,418	93,295	96,698	94,957	93,751

Aniqlikni ta'minlash maqsadida, 10-rasmida $t = 5, 10, 15$ va 30 sekundlardagi izotermalar tasvirlangan. Vaqt o'tishi bilan bir jinsli bo'lmagan o'qqa nisbatan simmetrik jismda qo'shimchalarning ta'siri yaqqol namoyon bo'lishi kuzatiladi.



10-rasm. $t = 5, 10, 15$ va 30 sekundlardagi izotermalar

Dissertatsiyaning “Chekli elementlar to'rini yaratish va tenglamalar sistematisni yechish algoritmlari” nomli uchinchi bobida o'qqa nisbatan simmetrik jismlarda nostatsionar issiqlik tarqalish jarayonini sonli modelashtirishda

qo‘llaniladigan chekli elementlar to‘rini yaratish va hosil bo‘lgan tenglamalar sistemasini yechish algoritmlari ishlab chiqilgan.

Chekli elementlar usulida masalani yechish uchun dastlab tadqiq etilayotgan jism kesimining chekli elementlar to‘ri yaratiladi. Jismning geometriyasi murakkab bo‘lsa, uning kesimi uchun chekli elementlar to‘rini qurish jarayoni ancha murakkab kechadi. Murakkab geometriyaga ega o‘qqa nisbatan simmetrik jism kesimini chekli elementli to‘rini qurish algoritmi ishlab chiqilgan.

Agar, kesimning diskret modelini qurish algoritmi mavjud bo‘lsa biz bu sohani kanonik soha deb aniqlaymiz. Murakkab kesim p ta kanonik sohalardan tashkil topgan bo‘lsa chekli elementlar to‘ri quyidagi to‘plamlar yig‘indisi bilan tavsiflanadi: $\Omega = \sum_{i=1}^p \Omega_i$, bu yerda Ω_i - i chi kanonik soha diskret to‘plami.

Har bir kanonik soha quyidagi to‘plam elementlaridan tashkil topadi: $\Omega = \{N, M, MK, MN\}$, bu yerda N - tugun nuqtalar soni; M - chekli elementlar soni; MK - tugun nuqtalar koordinatalarining massivi; MN - har bir chekli elementdagi tugun nuqtalar nomerlarining massivi.

Shunga asosan ikkita $\Omega_1 = \{N_1, M_1, MK_1, MN_1\}$ va $\Omega_2 = \{N_2, M_2, MK_2, MN_2\}$ kanonik soha chegaralaridagi tugun nuqtalarining ustma-ust tushishlik sharti quyidagi munosabatdan iborat: $|r_i - r_j| < \varepsilon \ \& \ |z_i - z_j| < \varepsilon$, bunda $(r_i, z_i) \in MK_1$ ($i=1, 2, \dots, N_1$), $(r_j, z_j) \in MK_2$ ($j=1, 2, \dots, N_2$), $\varepsilon > 0$ - yetarlicha kichik musbat haqiqiy son.

Agar Ω_1 va Ω_2 ikki kanonik soha to‘plamlarining birlashishida murakkab kesim topologiyasi shartlari bajarilsa, u holda hosil bo‘lgan to‘plamning chekli elementli ko‘rinishi quyidagi shaklga ega bo‘ladi: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, bunda $N = N_1 + N_2 - q$; $M = M_1 + M_2$; $MK = MK_1 \cup \overline{MK_2}$; $MN = MN_1 \cup MN_2$; $q = |MK_1 \cap MK_2|$ - kanonik soha to‘plamlari ulanadigan chegarasida ustma-ust tushadigan tugunlar soni; $\overline{MK_2}$ - koordinatalari ustma-ust tushadigan tugun nuqtalarini hisobga olmagan holdagi Ω_2 to‘plamning tartiblangan koordinatalar to‘plami; MN_2 - Ω_2 to‘planing qayta nomerlangan tugunlarning tartiblangan to‘plami.

Dissertatsiyaning “**O‘qqa nisbatan simmetrik jismdagi nostatsionar issiqlik tarqalish masalasini hisoblash algoritmi va dasturiy majmui**” nomli to‘rtinchi bobida, masalani yechish algoritmi hamda o‘qqa nisbatan simmetrik jismlarda nostatsionar issiqlik tarqalishi jarayonini o‘rganishga mo‘ljallangan dasturiy ta’minotning tuzilishi va funksional imkoniyatlari bayon etilgan. Yaratilgan dasturiy ta’minot asosida amaliy masala sifatida o‘qqa nisbatan simmetrik jismda vaqtga bo‘g‘liq issiqlik tarqalish masalasi yechilgan va hisoblash eksperimenti bajarilgan.

O‘qqa nisbatan simmetrik jismlarda nostatsionar issiqlik tarqalish masalasini chekli elementlar usuli asosida yechish *algoritmi* quyidagi bosqichlardan iborat:

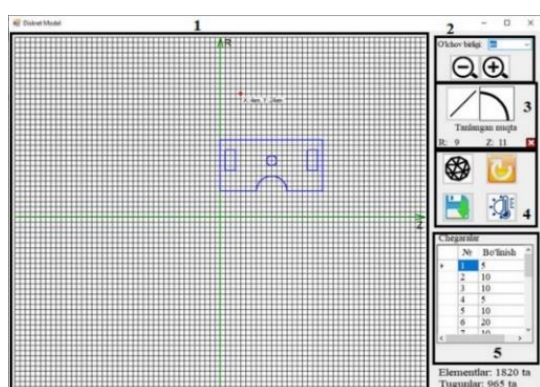
o‘qqa nisbatan simmetrik jism kesimining chekli elementli modelini yaratish; shakl funksiyalarini aniqlash; vaqt bo‘yicha iteratsion jarayonni tashkil etish; har bir

chekli element uchun takrorlashni amalga oshirish; chekli elementning asosiy tenglamalarini hosil qilish; chekli elementlar tenglamalari asosida global tizim matritsasini shakllantirish; hosil bo'lgan chiziqli tenglamalar sistemasini yechish; natijalarni chop qilish; issiqlik tarqalish jarayonini vizuallashtirish.

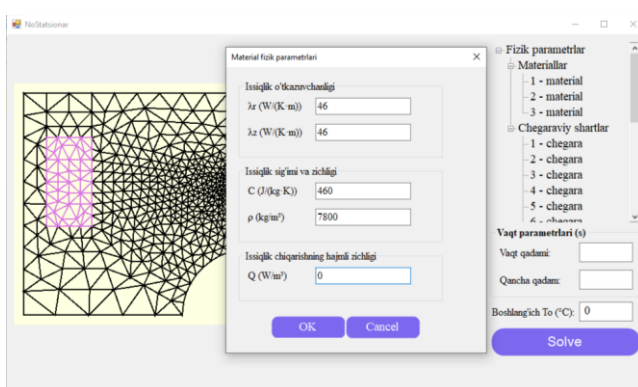
O'qqa nisbatan simmetrik jismlarda nostatsionar issiqlik tarqalish masalalarini yechish jarayonini avtomatlashtirish *dasturiy majmuasi* va uning tarkibiy tuzilmasi ishlab chiqilgan. Ushbu dasturiy majmuaning tarkibiy tuzilmasidagi modullar quyidagicha:

murakkab geometriyaga ega o'qqa nisbatan simmetrik jism kesimining chekli elementli modelini yaratish moduli;

o'qqa nisbatan simmetrik jismlarda issiqlik tarqalish jarayonidagi boshlang'ich va chegaraviy shartlarni grafik interfeys orqali aniqlash va masalani yechish moduli; olingan sonli natijalarni vizuallashtiruvchi modul.



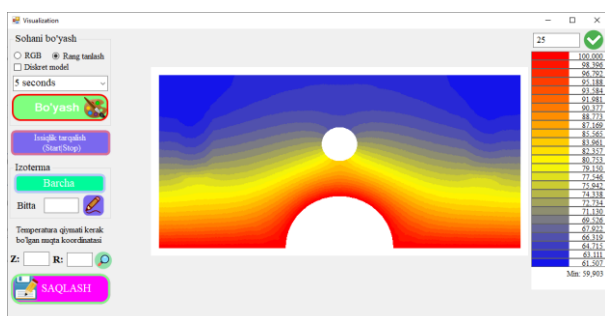
a)



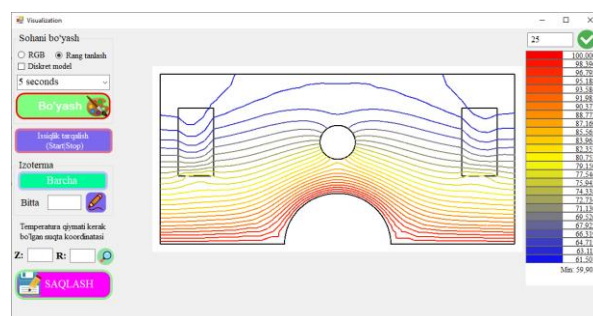
b)

11-rasm. Dasturning chekli elementlar to'ri yaratish va hisoblash jarayoni modullari

Chekli elementlar modelini yaratish moduli (11.a-rasm) quyidagi beshta qismdan iborat: ishchi soha; o'lchov birligi va kattalashtirish; chegara turini tanlash; chekli elementlar to'ri ustida amallar; chegaralar. Nostatsionar issiqlik tarqalish masalasini yechish moduli (11.b-rasm) quyidagi uchta asosiy qismdan iborat: materiallar, chegaraviy shartlar va vaqt parametrlari.



a)



b)

12-rasm. Dasturning vizuallashtirish modulidagi temperatura maydoni va izotermalar

Olingan sonli natijalarni vizuallashtirish moduli asosida temperatura maydoni (12.a-rasm) va izotermalarni (12.b-rasm) tahlil qilish mumkin.

XULOSA

«O‘qqa nisbatan simmetrik jismdagi nostatsionar issiqlik tarqalish masalasini sonli modellash tirish» mavzusidagi dissertatsiya ishi yuzasidan olib borilgan tadqiqotlar natijasida quyidagi xulosalar taqdim etildi:

1. Murakkab geometriyaga ega o‘qqa nisbatan simmetrik jism kesmining vizual komponentalar asosida grafik tasvirini yaratish va chekli elementlar to‘rini avtomatik generatsiyalash algoritmi ishlab chiqildi. Jism kesimini diskret modelini yaratishga imkon berdi.

2. Bir jinsli bo‘lgan po‘latdan yasalgan doimiy qalinlikka ega bo‘lgan silindrlı qobiqda nostatsionar issiqlik tarqalish masalasi yechildi hamda uning natijalari chuqur tahlil qilindi. Yechilgan masalaning sonli yechimlari ishonchliligini tekshirish maqsadida, ushbu geometrik va fizik parametrlar asosida Elcut dasturiy paketi yordamida olingan natijalar bilan solishtirma tahlil o‘tkazildi. Taqqoslash natijalari hisoblash algoritmining to‘g‘riligini tasdiqladi.

3. Murakkab geometriyaga ega bo‘lgan o‘qqa nisbatan simmetrik jismlarda nostatsionar issiqlik tarqalish masalasi o‘rganildi. Ushbu masalani yechish uchun taklif etilgan algoritmning to‘g‘riligi elementlar sonini orttirish orqali olingan sonli yechimlarning yaqinlashuvi asosida isbotlandi.

4. Bir jinsli bo‘lmagan o‘qqa nisbatan simmetrik jismda nostatsionar issiqlik tarqalish masalasining chekli elementlar usuli asosida sonli modeli ishlab chiqildi. Ishlab chiqilgan dasturiy ta‘minot asosida issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasining sonli yechimi amalga oshirildi. Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatadiki, agar jism tarkibidagi turli materiallarning issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsienti asosiy materialnikidan ancha farq qilsa, issiqlik tarqalishi jarayonidagi farqlar yanada yaqqol namoyon bo‘ladi. Xususan, issiqlik o‘tkazuvchanligi past bo‘lgan materiallar issiqlik oqimining tarqalish tezligini kamaytiradi. Shu maqsadda, issiqlik o‘tkazuvchanligi jihatidan bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan o‘qqa nisbatan simmetrik jismlar uchun bir xil chegaraviy shartlar asosida masalalar yechilib, olingan sonli natijalar jadval va izotermalar yordamida taqqoslab tahlil qilindi.

5. Yaratilgan algoritm va dasturiy ta‘minot asosida olingan sonli natijalarni vizual tahlil qilish maqsadida kesimdagi harorat taqsimotini rangli gradientlar orqali tasvirlash va izotermalarni chizish imkonini beruvchi dasturiy modul ishlab chiqildi. Dasturiy modul issiqlik tarqalish jarayonini vizuallashtirishga imkon berdi.

6. Dissertatsiya doirasida olib borilgan tadqiqotlar natijasida ishlab chiqilgan algoritmlar va yaratilgan dasturiy taminot “UzXCMG” MCHJ qo‘shma korxonasida hamda Xorazm viloyati “XORAZM TEX” MCHJ Klasterning Xonqa tumani bo‘limiga joriy qilingan. Natijada:

uzoq vaqt yuqori temperatura maydoni ta‘sirida bo‘lgan o‘qqa nisbatan simmetrik konstruksiya elementlarining ekspluatatsiya ishonchliligi va mustahkamligini ta‘minlashga xizmat qilgan;

o‘qqa nisbatan simmetrik pechkasida ichki issiqlik manbai va tashqi muhit bilan issiqlik almashinish jarayonlarini hisobga olgan holda issiqlik tarqalishi jarayonini sonli modellash tirish natijasida hisob-kitoblarning aniqligi 1,15 baravarga oshdi hamda hisoblash vaqtining 10–12% ga qisqarishiga erishildi.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.09/2025.27.12. T.01.01.M
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ТАШКЕНТСКОМ
УНИВЕРСИТЕТЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО
УЛУГБЕКА**

САПАЕВ ШИХНАЗАР ОМОН УГЛИ

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ
ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ТЕЛЕ**

05.01.07 – Математическое моделирование. Численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ТЕХНИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Ташкент – 2026

Тема диссертации доктора философии (PhD) по техническим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за номером B2025.1.PhD/T5534

Диссертация выполнена в Ташкентском университете информационных технологий.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице научного совета (www.tuit.uz) и на Информационно-образовательном портале "ZiyoNet" (www.ziyo.net).

Научный руководитель:

Полатов Асхад Мухамеджанович
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

Мухамедиева Дилдора Кабиловна
доктор технических наук, профессор

Юсупов Юсуф Саиджонович
доктор философии (PhD) по физико-математическим наукам

Ведущая организация:

Самаркандский государственный университет
имени Шарафа Рашидова

Защита диссертации состоится "12" февраля 2026 г. в 16⁰⁰ часов на заседании Научного совета DSc.09/2025.27.12. T.01.01.M при Ташкентском университете информационных технологий. (Адрес: 100084, г. Ташкент, ул. Амира Темура, 108. Тел.: (99871) 238-64-43; e-mail: tuit@tuit.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Ташкентского университета информационных технологий (регистрационный номер № 405). (Адрес: 100084, г. Ташкент, ул. Амира Темура, 108. Тел.: (99871) 238-64-70).

Автореферат диссертации разослан "2" февраля 2026 года.

(протокол рассылки № 4 от "2" февраля 2026 г.).



М.М. Мусаев

Председатель научного совета по
присуждению учёных степеней, д.т.н., профессор

Э.Ш. Назирова

Ученый секретарь научного совета по
присуждению учёных степеней, д.т.н. профессор

Ф.М. Нуралиев

Председатель научного семинара при
научном совете по присуждению учёных
степеней, д.т.н. профессор

Введение (аннотация к диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. В мире одним из актуальных направлений науки и техники является разработка моделей, позволяющих с высокой точностью рассчитывать функционирование различных инженерных сооружений, подвергающихся тепловому воздействию. Изучение процессов теплопередачи в телах, симметричных относительно оси, имеет большое значение для развития современных технологий и техники. Развитие промышленности, сельского хозяйства, авиации, ядерной энергетики и ракетно-космических технологий порождает новые задачи, связанные с распространением тепла. Учитывая сложную геометрию исследуемых объектов и разнообразие внешних воздействий, для оценки процессов теплообмена необходимо использовать численные методы и компьютерные технологии. В таких странах, как США, Канада, Франция, Китай, Россия, Украина, Казахстан и Азербайджан, ведутся масштабные исследования, направленные на создание математических моделей, вычислительных алгоритмов и программного обеспечения для решения подобных задач.

В мире на основе современных компьютерных технологий и методов численного моделирования проводятся широкомасштабные научно-исследовательские работы, направленные на расчет, анализ и долгосрочное прогнозирование процессов нестационарного распространения тепла в осесимметричных телах. Создание математических моделей таких процессов и их решение численными методами является важнейшим этапом в развитии современных технологий. Например, при повышении надежности высокотемпературных установок или обеспечении энергоэффективности правильное моделирование тепловых процессов играет решающую роль.

В последние годы в нашей Республике реализуются масштабные меры по развитию промышленности, сельского хозяйства и перерабатывающих отраслей, включая внедрение современных информационных технологий и развитие автоматизированных систем управления процессами. В стратегии «Цифровой Узбекистан – 2030» определены задачи в этом направлении, в частности: «цифровизация деятельности государственных органов, автоматизация технологических процессов, внедрение современных информационных технологий на промышленных предприятиях, автоматизация всех этапов снабжения предприятий, повышение качества продукции за счёт внедрения современных информационных систем и программных продуктов, поэтапная автоматизация рабочих мест и роботизация производственных процессов ...»¹.

Данная диссертационная работа в определённой степени способствует реализации задач, предусмотренных Указом Президента Республики Узбекистан от 11 сентября 2023 года № PF -158 «О стратегии “Узбекистан – 2030”», Указом от 28 января 2022 года № PF -60 «О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022 – 2026 годы», Постановлением от 28 апреля 2020 года № PF -4699 «О мерах по широкому внедрению цифровой экономики и системы

электронного правительства», а также Постановлением от 23 октября 2019 года № РР – 5853 «Об утверждении стратегии развития сельского хозяйства Республики Узбекистан на 2020 – 2030 годы» и другими нормативными документами, регулирующими данную сферу деятельности.

Соответствие исследований приоритетным направлениям развития науки и техники Республики. Данное исследование является частью IV республиканского проекта развития науки и технологий. Оно выполнено в рамках приоритетного направления “Информатизация и развитие информационно-коммуникационных технологий”.

Степень изученности проблемы. Разработка и совершенствование математических моделей процессов теплопередачи в телах, а также их решение численными методами стали предметом исследований многих зарубежных учёных, таких как О. Зенкевич, Л. Сегерлинд, А.А. Самарский, П.Н. Вабишевич, Н.П. Жуков, Г.В. Кузнецов, М.А. Шеремет, А.М. Липанов, С.С. Макаров, Л.М. Иванников, С.С. Никулин, П.А. Мандрик, Б.С. Петухов, Л.Г. Генин, С.А. Ковалёв, С.Л. Соловьёв, К. Франк, Р.М. Манглик, С.Б. Марк, У. Дэвид, Н. Озисик, Х.В. Дэвид, П. Сешу, Дж.Н. Редди, С.В. Патанкар, С. Ван, Л. Чжан, С. Сунь и других иностранных исследователей.

В Республике Узбекистан значительный вклад в разработку математических моделей процессов теплопередачи в телах, методов вычислений и аналогичных исследований внесли такие учёные, как Ф.Б. Абуталиев, М. Арипов, Ш. Назиров, И.К. Хужаев, А.А. Халджигитов, А. Бегматов, Н. Равшанов, А.Ш. Мухаммадиев, А.М. Полатов, И. Мирзаев, А. Нематов, Э.Ш. Назирова, Ш.А. Анарова и другие исследователи.

В результате усилий вышеупомянутых, а также многих зарубежных и отечественных учёных были получены важные теоретические и практические результаты, имеющие значительное научное и прикладное значение. Это позволило проводить всесторонний анализ нестационарных процессов теплопередачи в промышленных установках и сельском хозяйстве. Однако вопросы, связанные с разработкой и совершенствованием математических моделей и вычислительных алгоритмов, учитывающих процессы теплопередачи в телах, симметричных относительно оси, до настоящего времени изучены недостаточно полно.

Связь темы диссертации с планами научно-исследовательской работы высшего учебного заведения, в котором выполняется диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом научно-исследовательских работ Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека в рамках проекта № UZB-Ind2021-87 на тему «Анализ симметрии Ли, исследование устойчивости гиперболических систем по Ляпунову и моделирование» (2021 – 2023 гг.).

Цель исследования. Численное моделирование процессов теплопроводности в осесимметричных телах, а также разработка вычислительных алгоритмов и программного комплекса.

Задачи исследования:

анализ научной литературы, посвящённой исследованию нестационарных процессов теплопередачи в осесимметричных телах;

разработка алгоритма построения геометрии сечения и создания сетки конечных элементов для осесимметричных тел сложной формы в визуальной форме;

разработка программного модуля, обеспечивающего определение начальных и граничных условий через графический интерфейс при решении задачи нестационарного теплообмена в осесимметричных телах;

разработка алгоритма вычисления нестационарной задачи теплопроводности в телах сложной геометрии на основе метода конечных элементов;

разработка алгоритма вычисления нестационарной задачи теплопроводности в неоднородных телах на основе метода конечных элементов;

проведение расчётных экспериментов по основным показателям нестационарных процессов теплообмена в осесимметричных телах и исследование этих процессов на их основе.

Объект исследования процесс теплообмена в осесимметричных телах.

Предметом исследования являются математические модели и численные методы нестационарного процесса теплообмена в осесимметричных телах с однородной и неоднородной сложной геометрией, эффективные вычислительные алгоритмы и программное обеспечение для его решения.

Методы исследования. В процессе исследования для математического моделирования использовались вариационные принципы и гипотезы, основанные на теории теплообмена, численные методы решения систем частных производных уравнений, дискретная математика, алгоритмизация, компьютерное моделирование, методы конечных элементов, а также технологии программирования.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

создана численная модель и разработан вычислительный алгоритм решения нестационарной задачи теплопроводности для тел сложной геометрии на основе метода конечных элементов;

разработан вычислительный алгоритм решения нестационарной задачи теплопроводности для неоднородных тел на основе метода конечных элементов;

разработан алгоритм построения конечно-элементной сетки на основе визуального представления поперечного сечения тел сложной геометрии;

реализован алгоритм учета начальных и граничных условий задачи нестационарного теплоотвода в осесимметричных телах.

Практическими результатами исследования являются:

разработаны численные модели для изучения нестационарных процессов теплообмена в осесимметричных телах;

математический аппарат и программные средства позволили определить основные показатели и параметры теплообмена в реальных осесимметричных телах;

исследован процесс теплообмена в осесимметричных телах сложной геометрии.

Достоверность результатов исследования. Достоверность результатов исследования подтверждается строгой постановкой уравнений теплообмена, граничных условиях и закона сохранения энергии, а также сопоставлением численных результатов с решениями, полученными другими численными методами.

Научно-практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования объясняется развитием методологии математического моделирования и вычислительного эксперимента для анализа и прогнозирования нестационарных процессов теплообмена в осесимметричных телах.

Практическая значимость результатов исследования заключается в изучении процессов теплообмена в осесимметричных телах.

Внедрение результатов исследования. Разработанные алгоритмы и созданный программный комплекс в результате проведённых диссертационных исследований позволили:

алгоритм расчёта и программное средство для нестационарного теплообмена в осесимметричных телах на основе метода конечных элементов внедрены на совместном предприятии ООО «UzXCMG» (справка Хокимията Хорезмской области Республики Узбекистан от 25 апреля 2025 г., № 6-1556). Это позволило обеспечить эксплуатационную надёжность и прочность элементов осесимметричной конструкции, подвергавшихся длительному воздействию высокотемпературной среды, а также сократить время, затрачиваемое на расчёты, на 8-12 %;

алгоритм расчёта и программное средство для задачи стационарного теплообмена в осесимметричной конфигурации газовой печи с учётом внутреннего источника тепла и теплообмена с внешней средой на основе метода конечных элементов внедрены в отделение кластера ООО «XORAZM TEX» в Хонкасском районе (справка Хокимията Хорезмской области Республики Узбекистан от 25 апреля 2025 г., № 6-1556). Были исследованы максимальные и минимальные значения температуры газовой печи. Точность ведения расчётных работ увеличилась в 1,15 раза, скорость выполнения – в 1,25 раза, что позволило сократить затраты времени на 10 – 12 %;

при численном моделировании задач теплопроводности и разработке алгоритмов их решения использованы результаты, полученные в ходе выполнения грантового проекта № UZB-Ind-2021-87 «Анализ симметрий Ли, исследование устойчивости гиперболических систем по Ляпунову и их моделирование», реализованного в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека в 2021–2023 годах (справка Национального университета Узбекистана от 2 мая 2025 года № 04/11-5701);

при решении систем дифференциальных уравнений в частных производных для формирования дискретного множества области и разработки алгоритмов решения задачи предоставлена возможность численного моделирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений в рамках грантового проекта № F22020092877 «Построение математических моделей и численное исследование процессов переноса аномальных веществ и фильтрации жидкостей в однородных пористых средах» на 2022–2026 годы в Самаркандском государственном университете имени Шарафа Рашидова (справка Самаркандского государственного университета имени Шарафа Рашидова от 17 мая 2025 г., № 10-2434).

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 13 международных и 4 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме исследования всего опубликовано 28 научных работ, из них 8 статей – в научных изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов докторских диссертаций, 2 статьи – в зарубежных журналах, а также получены 3 свидетельства о регистрации программных продуктов для ЭВМ.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы, перечня условных обозначений и терминов, а также приложений, общий объем составляет 116 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и необходимость темы диссертационной работы, показано соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий в Республике Узбекистан, определены цель и задачи исследования, объект и предмет исследования, обоснована достоверность полученных результатов, раскрыта теоретическая и практическая значимость работы, приведены сведения о внедрении результатов исследования в практику, опубликованных научных работах, а также дана информация о структуре диссертации.

В первой главе диссертационной работы “**Анализ исследований по математическому моделированию задачи теплообмена в осесимметричных телах и постановка задачи**” представлен обзор научных работ последних пятидесяти лет по изучению нестационарных процессов теплообмена в осесимметричных телах, изложена постановка задачи нестационарного теплообмена, описание численного моделирования и метода конечных элементов, определены цель и основные вопросы исследования.

Нестационарный теплообмен в цилиндрической системе координат описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$K_{rr} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} K_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{K_{\theta\theta}}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q(r, z) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

здесь $K_{rr}, K_{\theta\theta}, K_{zz}$ – коэффициенты теплопроводности в соответствующих направлениях; $T = T(r, \theta, z, t)$ – температура; ρ – плотность материала тела, c – удельная теплоёмкость материала тела, $Q = Q(r, z)$ – мощность источников тепла внутри тела; r – расстояние от оси симметрии до центра; θ – азимутальный угол.

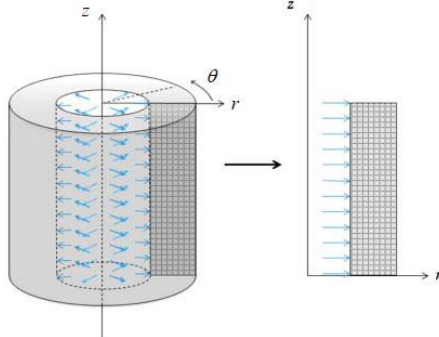


Рис. 1. Форма осесимметричного тела

Если трёхмерное тело обладает геометрической симметрией относительно оси Oz , то такое тело называется осесимметричным (рис. 1). Кроме того, если рассматриваемая физическая величина не зависит от азимутального угла, то дифференциальное уравнение (1) примет вид:

$$K_{rr} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} K_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} + K_{zz} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q(r, z) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2)$$

с уравнением (2) рассматриваются два типа граничных условий. Если температура известна на нескольких участках границы, она описывается следующим образом (условие Дирихле):

$$T = T_s(r, z, t), \quad (3)$$

здесь T_s – температура на поверхности тела.

Если на поверхности тела задан поток тепла q (условие Неймана) или происходит конвективный теплообмен $h(T - T_b)$ (условие Ньютона–Рихмана), граничное условие принимает следующий вид:

$$K_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} l_r + K_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} l_z + q + h(T - T_b) = 0, \quad (4)$$

здесь h – коэффициент теплообмена; T_b – температура окружающей среды; l_r, l_z – направляющие косинусы; q – тепловой поток (он считается положительным, если от тела исходит тепло).

Тепловой поток q и конвективные теплотери $h(T - T_b)$ не происходят одновременно в одной и той же точке поверхности. Если имеется теплоотдача за счёт конвекции, то передача или поглощение тепла за счёт теплового потока не происходит и наоборот. Если конвективный теплообмен отсутствует, а тепловой поток равен нулю, граничное условие тепловой изоляции принимает

следующий вид: $\frac{dT}{dn} = 0$.

Вариационная представление задачи рассматривается с целью использования приближенных методов решения. Одним из таких методов

является метод конечных элементов. Решение уравнения (2) с граничными условиями (3) и (4), указанными выше, эквивалентно определению минимума следующего функционала:

$$\Phi(T) = \int_V \frac{1}{2} \left[rK_{rr} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + rK_{zz} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 - 2 \left(rQ - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right) T \right] dV + \int_{S_1} qT dS + \int_{S_2} \frac{h}{2} (T - T_b)^2 dS, \quad (5)$$

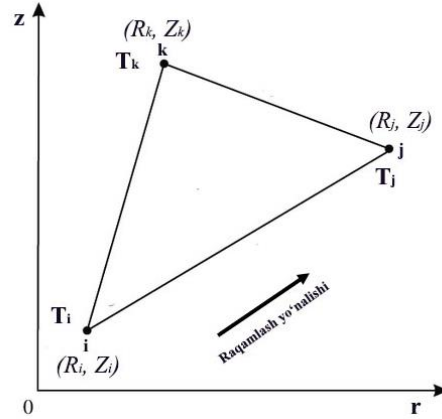


Рис. 2. Треугольный конечный элемент

Температура в треугольном конечном элементе аппроксимируется линейным полиномом: $T(r, z, t) = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z$.

Функция формы для температуры элемента определяется следующей формулой:

$$T^{(e)} = \begin{bmatrix} N_i(r, z); & N_j(r, z); & N_k(r, z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i(t) \\ T_j(t) \\ T_k(t) \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

здесь T_i, T_j, T_k – значения температуры в узлах, N_i, N_j, N_k – функции формы:

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i r + c_i z); \quad N_j = \frac{1}{2A} (a_j + b_j r + c_j z); \quad N_k = \frac{1}{2A} (a_k + b_k r + c_k z);$$

$$\begin{cases} a_i = R_j Z_k - R_k Z_j; \\ b_i = Z_j - Z_k; \\ c_i = R_k - R_j; \end{cases} \quad \begin{cases} a_j = R_k Z_i - R_i Z_k; \\ b_j = Z_k - Z_i; \\ c_j = R_i - R_k; \end{cases} \quad \begin{cases} a_k = R_i Z_j - R_j Z_i; \\ b_k = Z_i - Z_j; \\ c_k = R_j - R_i; \end{cases}$$

где A – площадь треугольника,

градиентная матрица

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}, \quad (7)$$

матрица теплопроводности тела

$$[D] = \begin{bmatrix} rK_{rr} & 0 \\ 0 & rK_{zz} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

здесь $r = (R_i + R_j + R_k) / 3$ обозначает расстояние от оси симметрии до центра элемента.

Для e -конечного элемента дифференциальное уравнение по времени (6) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = [N(r, z)]^{(e)} \frac{\partial}{\partial t} \{T\}^{(e)}. \quad (9)$$

Подставив выражения (6)–(9) в функционал (5), можно получить следующее:

$$\begin{aligned} \Phi = \sum_{e=1}^m \Phi_e = \sum_{e=1}^m & \left[\frac{1}{2} \cdot \int_{V_e} \{T\}^T [B]_e^T [D]_e [B]_e \{T\} dV + \int_{V_e} \rho c [N]_e \{T\} [N]_e \frac{\partial}{\partial t} \{T\} dV - \int_{V_e} r Q [N]_e \{T\} dV \right] + \\ & + \sum_{e=1}^m \left[\int_{S_{2e}} q [N]_e \{T\} dS + \int_{S_{3e}} \frac{h}{2} \{T\}^T [N]_e^T [N]_e \{T\} dS - \int_{S_{3e}} h T_b [N]_e \{T\} dS + \int_{S_{3e}} \frac{h}{2} T_b^2 dS \right]. \end{aligned}$$

В результате минимизации функционала получается следующая система уравнений:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \{T\}} = \frac{\partial}{\partial \{T\}} \sum_{e=1}^m \Phi_e = \sum_{e=1}^m \frac{\partial \Phi_e}{\partial \{T\}} = 0. \quad (10)$$

Вклад каждого конечного элемента (10) в общую сумму может быть представлен в виде матричного дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial \{T\}} = [C]_e \frac{\partial}{\partial t} \{T\}_e + [K]_e \{T\}_e - \{F\}_e^q - \{F\}_e^g - \{F\}_e^h,$$

где матрица теплопроводности элемента:

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]_e^T [D]_e [B]_e dV + \int_{S_{3e}} h [N]_e^T [N]_e dS,$$

матрица теплоемкости элемента:

$$[C]_e = \int_{V_e} \rho c [N]_e^T [N]_e dV.$$

В каждой узловой точке, тепловой поток q , внутренний источник тепла Q и векторы конвективной теплопроводности задаются соответственно следующим образом:

$$\{F\}_e^q = - \int_{S_{2e}} q [N]_e^T dS; \quad \{F\}_e^g = \int_{V_e} r Q [N]_e^T dV; \quad \{F\}_e^h = \int_{S_{3e}} h T_b [N]_e^T dS.$$

Суммируя вклады всех элементов, можно получить следующую систему дифференциальных уравнений:

$$[C] \frac{\partial}{\partial t} \{T\} + [K] \{T\} = \{F\}^q + \{F\}^g + \{F\}^h, \quad (11)$$

здесь $[K]$ - обобщённая матрица теплопроводности.

При решении дифференциального уравнения (11) используется метод конечных разностей на основе центральной разностной схемы. Это уравнение записывается в следующей форме:

$$[C] \frac{\partial}{\partial t} \{T\} + [K] \{T\} = \{F\}, \quad (12)$$

здесь $\{F\} = \{F\}^q + \{F\}^g + \{F\}^h$.

Вектор обобщённой температуры $\{T\}$ в средней точке временного интервала $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ определяется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{T\} = \frac{1}{\Delta t}(\{T\}_{n+1} - \{T\}_n). \quad (13)$$

В средней точке временного интервала обобщённая температура и вектор точечных нагрузок в узлах определяются следующим образом:

$$\{T\} = \frac{1}{2}(\{T\}_{n+1} + \{T\}_n), \quad (14) \quad \{F\} = \frac{1}{2}(\{F\}_{n+1} + \{F\}_n), \quad (15)$$

Применяя выражения (13) – (15) к дифференциальному уравнению (12), получаем следующую рекуррентную формулу:

$$\left([K] + \frac{2}{\Delta t}[C]\right)\{T\}_{n+1} = \left(\frac{2}{\Delta t}[C] - [K]\right)\{T\}_n + 2\{F\}. \quad (16)$$

Зная температуру узловых точки в начале временного интервала, с помощью соотношения (16) возможно вычисление температуры на каждом последующем временном шаге.

Во второй главе диссертации под названием **“Численное моделирование нестационарного теплопереноса в телах осесимметричных”** рассмотрены решение задачи компьютерного моделирования процессов нестационарного теплопереноса методом конечных элементов для тел с простой и сложной геометрической конфигурацией, а также для неоднородных осесимметричных тел.

Для исследования нестационарного теплопереноса в цилиндре из однородного материала с осесимметричной конфигурацией применяется метод конечных элементов. На основе разработанного вычислительного алгоритма и программного обеспечения получено численное решение конкретных задач и изучено распределение температуры в области. Полученные решения сопоставлены с результатами, полученными в программе Elcut, и представлены изотермы.

Задача теплопереноса рассматривается на сечении цилиндра осесимметричной конфигурации (рис. 2). Начальные и граничные условия записываются следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ t = 0 : T(r, z, 0) = T_0, 0 \leq z \leq l, r_1 \leq r \leq r_2; \\ r = r_1 = 0.2 : T(r_1, z, t) = T_h, t > 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r = r_2 = 0.7 : -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(r_2, z, t) = h(T(r_2, z, t) - T_c); \\ \frac{\partial T}{\partial z}(r, 0, t) = 0; \\ \frac{\partial T}{\partial z}(r, l, t) = 0. \end{array} \right.$$

Для проверки корректности разработанного вычислительного алгоритма рассмотрена задача нестационарного теплопереноса в цилиндрической оболочке постоянной толщины, выполненной из однородного металла (рис. 3). Размеры цилиндрической оболочки: внешний радиус $r_2 = 0.7\text{ м}$, внутренний радиус $r_1 = 0.2\text{ м}$ и длина $l = 0.5\text{ м}$. Сталь обладает следующими

термофизическими свойствами: $\lambda = 46 \text{ Вт} / (\text{м}^\circ\text{С})$, $\rho = 7800 \text{ кг} / \text{м}^3$, $c = 460 \text{ Дж} / (\text{кг}^\circ\text{С})$. На внутренней границе цилиндрической оболочки поддерживается постоянная температура: при $r_1 = 0.2 \text{ м}$ $T_h = 100^\circ\text{С}$, а при $r_2 = 0.7 \text{ м}$ $T_c = 20^\circ\text{С}$ предусмотрена конвекция с окружающей средой. На боковых границах имеется тепловая изоляция. Начальная температура цилиндра $T_0 = 50^\circ\text{С}$.

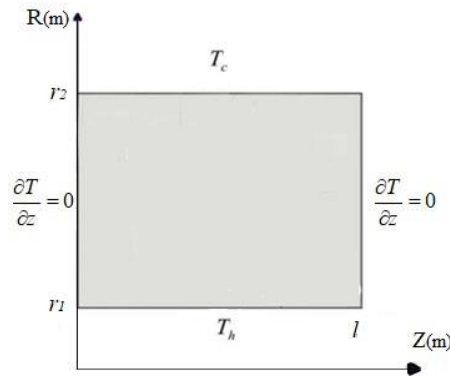


Рис. 3. Область решения и граничные условия

На рис. 4.а представлено общее изображение конечно-элементной сетки сечения цилиндра. На рисунках 4.б и 4.с, соответственно, приведены изотермы, полученные в программном пакете Elcut и с использованием алгоритма, разработанного на основе метода конечных элементов. Графическое сравнение результатов при времени $t = 36000 \text{ с}$ показывает их совпадение.

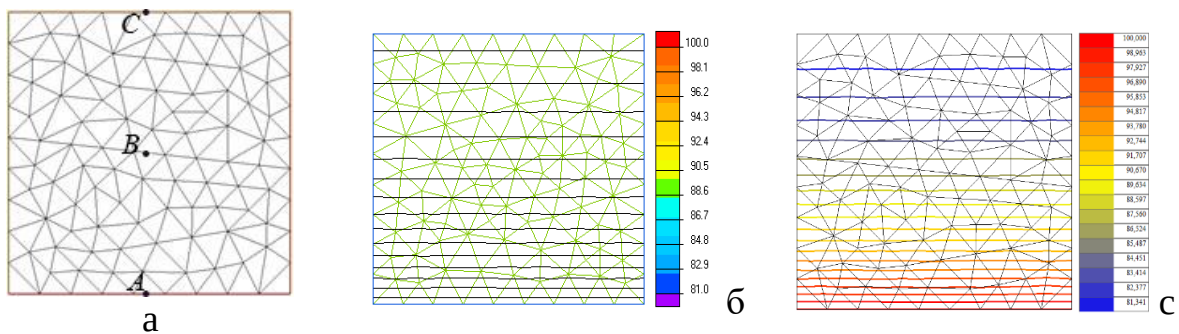


Рис. 4. Общий вид конечно-элементной сетки и изотермы

В табл. 1 приведено сравнение численных значений температуры в контрольных точках сечения цилиндра при времени $t = 36000 \text{ с}$. Представленные результаты показывают, что полученные вычислительные решения достаточно точно согласуются с результатами, полученными с помощью программного обеспечения Elcut. Это подтверждает корректность разработанной численной модели и алгоритма решения задачи.

Таблица 1

Численные значения температурного поля в контрольных точках

Точки	A	B	C
Elcut	100	87.76	82.82
МКЭ	100	87.52	82.76

Рассматривается задача нестационарного теплораспространения в стенках керамического сосуда сложной геометрии, в которой необходимо определить распределение температуры во времени. На внутренней поверхности сосуда поддерживается постоянная температура $T = 373\text{ K}$, а на внешней поверхности осуществляется конвекция с коэффициентом теплоотдачи $h = 10\text{ Вт} / (\text{м}^2\text{ K})$ при температуре окружающей среды $T_h = 313\text{ K}$. Симметричное сечение сосуда и его размеры приведены на рис. 5.а. Теплофизические характеристики керамического материала следующие:

$$\lambda = 1.5\text{ Вт} / (\text{м K}), \rho = 2000\text{ кг} / \text{м}^3, c = 900\text{ Дж} / (\text{кг K}).$$

Начальная температура тела составляет $T_0 = 283\text{ K}$, шаг по времени $\Delta t = 30\text{ с}$.

Для решения задачи методом конечных элементов сечение тела разбито на 700 треугольных элементов и 429 узлов (рис. 5.б). Изотермы температуры, полученные для различных моментов времени ($t = 60, 120$ и 180 с), представлены на рис. 6. Тепловой поток под воздействием температурных градиентов направлен от внутренней поверхности тела к его внешней. Изменение температуры во времени в контрольных точках $A(1\text{ см}, 1\text{ см})$ и $B(5\text{ см}, 6\text{ см})$ приведены в табл. 2.

Таблица 2

Значения температуры в контрольных точках

Точки	$t = 60\text{ с}$	$t = 120\text{ с}$	$t = 180\text{ с}$
$A(1\text{ см}, 1\text{ см})$	366.85	369.09	369.19
$B(5\text{ см}, 6\text{ см})$	358.97	367.53	368.37

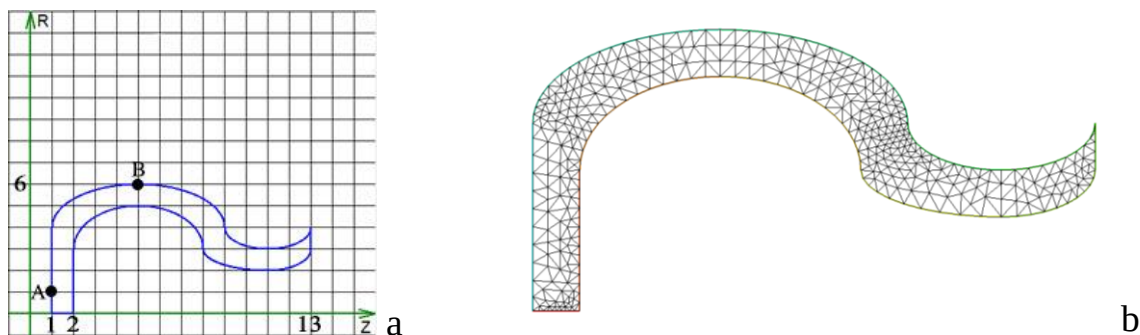


Рис. 5. Симметричное сечение тела (а) и сетка конечных элементов (б)



Рис. 6. Изотермы при $t = 60, 120$ и 180 с

В данном параграфе представлены результаты вычислительных экспериментов, проведенных для оценки достоверности численного решения задачи нестационарной теплопроводности в осесимметричном теле. Также рассматривается задача нестационарного распространения тепла в

осесимметричном теле сложной геометрии, содержащем два дополнительных покрытия.

Рассматривается нестационарная задача распространения тепла в осесимметричном теле, изготовленном из стали, где требуется определить распределение температуры в теле. Вид сечения и размеры осесимметричного тела приведены на рис. 7а. На внутренней поверхности тела поддерживается постоянная температура $T_h = 100^\circ\text{C}$. На боковых поверхностях происходит теплообмен с внешней средой с температурой $T_c = 20^\circ\text{C}$. Коэффициент теплообмена с внешней средой составляет $h = 10 \text{ Вт} / (\text{К м}^2)$. Начальная температура тела ($t = 0 \text{ с}$) равна $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Сталь обладает следующими теплофизическими свойствами: $\lambda = 46 \text{ Вт} / (\text{м}^\circ\text{C})$, $\rho = 7800 \text{ кг} / \text{м}^3$, $c = 460 \text{ Дж} / (\text{кг}^\circ\text{C})$.

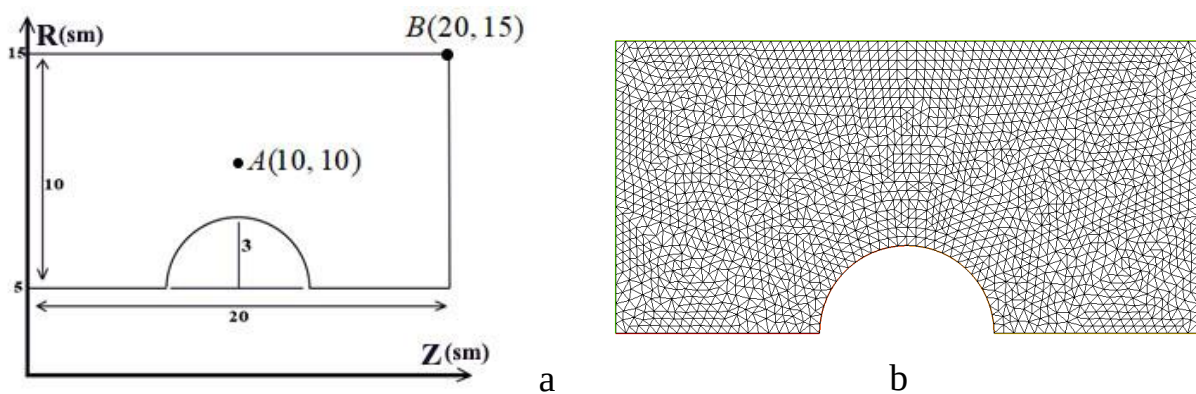


Рис. 7. Сечение осесимметричного тела и сетка конечных элементов

Начальные и граничные условия формулируются следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ t = 0 : T(r, z, 0) = T_0, 0 \leq z \leq 20, 5 \leq r \leq 15; \\ r = 5, 0 \leq z \leq 7 : T(5, z, t) = T_h; \\ (r - 5)^2 + (z - 10)^2 = 9 : T(r, z, t) = T_h; \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} r = 5, 13 \leq z \leq 20 : T(5, z, t) = T_h; \\ r = 15, 0 \leq z \leq 20 : -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(15, z, t) = h(T(15, z, t) - T_c); \\ 5 \leq r \leq 15, z = 0 : \frac{\partial T}{\partial r}(r, 0, t) = 0; \\ 5 \leq r \leq 15, z = 20 : \frac{\partial T}{\partial r}(r, 20, t) = 0. \end{array} \right.$$

Для проверки достоверности полученных результатов был проведен вычислительный эксперимент, связанный с численным исследованием влияния увеличения количества конечных элементов на сходимость решения. В табл. 3 приведено количество конечных элементов и узлов в дискретных моделях для различных вариантов сетки.

Значения температуры в контрольных точках в момент времени 60 секунд приведены в табл. 3 (шаг по времени $\Delta t = 6 \text{ с}$). Анализ результатов эксперимента подтверждает сходимость значений температуры по мере увеличения числа конечных элементов. На рис. 7.б представлен вариант 4 сетки конечных элементов.

Таблица 3

Температура в контрольных точках в момент времени 60с (°C)

Вариант	Конечные элементы	Узловые точки	Координата А (10см, 10 см)	А (%)	Координата В (20 см, 15 см)	В (%)
1	156	98	75,823	4,3	50,297	6,4
2	622	350	72,554		47,062	
3	1388	752	71,108	1,9	45,394	3,5
4	2492	1323	71,005	0,14	45,494	

На рис. 8 представлена визуализация численных результатов решения задачи и изотермы температурного поля в момент времени 60 с, полученные на дискретной модели варианта 4.

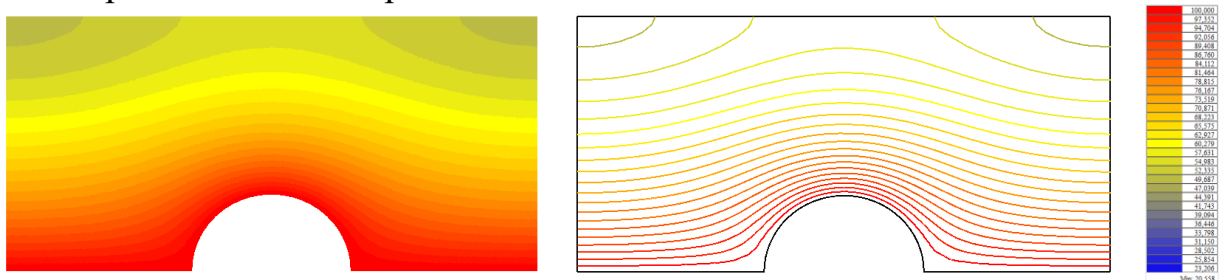


Рис. 8. Визуализация и изотермы температурного поля в момент времени 60 сек.

Рассматривается нестационарная задача распространения тепла в сложном осесимметричном теле из меди, содержащем два дополнительных покрытия и состоящем из разнородных материалов. Сечение осесимметричного тела и расположение дополнительных покрытий показаны на рис. 9.а На внутренней поверхности тела поддерживается постоянная температура $T_s = 100^\circ\text{C}$ (шаг по времени $\Delta t = 5\text{с}$). На боковых поверхностях происходит теплообмен с внешней средой с температурой $T_m = 0^\circ\text{C}$. Коэффициент теплообмена с внешней средой составляет $h = 10\text{Вт} / (\text{К м}^2)$. Начальная температура тела ($t = 0\text{с}$) равна $T_0 = 50^\circ\text{C}$. Медь (область 1 на рис. 9.а) обладает следующими теплофизическими свойствами:

$$\lambda_1 = 384\text{Вт} / (\text{м } ^\circ\text{C}), \rho_1 = 8800\text{кг} / \text{м}^3, c_1 = 381\text{Дж} / (\text{кг } ^\circ\text{C}),$$

Теплофизические параметры материала дополнительного покрытия: сталь (область 2 на рис. 9.а):

$$\lambda_2 = 46\text{Вт} / (\text{м } ^\circ\text{C}), \rho_2 = 7800\text{кг} / \text{м}^3, c_2 = 460\text{Дж} / (\text{кг } ^\circ\text{C}),$$

и железо (область 3 на рис. 9.а):

$$\lambda_3 = 71\text{Вт} / (\text{м } ^\circ\text{C}), \rho_3 = 7900\text{кг} / \text{м}^3, c_3 = 460\text{Дж} / (\text{кг } ^\circ\text{C}).$$

Начальные и граничные условия формулируются следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right); \\ t = 0: T(r, z, 0) = T_0, 0 \leq z \leq 20, 5 \leq r \leq 15 \\ r = 5, 0 \leq z \leq 7: T(5, z, t) = T_s; \\ (r-5)^2 + (z-10)^2 = 9: T(r, z, t) = T_s; \\ r = 5, 13 \leq z \leq 20: T(5, z, t) = T_s; \\ r = 15, 0 \leq z \leq 20: -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(15, z, t) = h(T(15, z, t) - T_c); \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 5 \leq r \leq 15, z = 0: \frac{\partial T}{\partial r}(r, 0, t) = 0; \\ 5 \leq r \leq 15, z = 20: \frac{\partial T}{\partial r}(r, 20, t) = 0; \\ (r-11)^2 + (z-10)^2 = 1: \frac{\partial T}{\partial r}(r, z, t) = 0, \frac{\partial T}{\partial z}(r, z, t) = 0; \\ 9 \leq r \leq 13, 1 \leq z \leq 3: \rho = \rho_2, c = c_2, \lambda = \lambda_2; \\ 9 \leq r \leq 13, 17 \leq z \leq 19: \rho = \rho_3, c = c_3, \lambda = \lambda_3. \end{array} \right.$$

Общий вид сетки конечных элементов для сечения неоднородного осесимметричного тела представлен на рис. 9.6 Сетка конечных элементов, используемая для решения задачи, включает следующие параметры: 979 узловых точек, 1848 конечных элементов; размерность системы уравнений составляет $n = 979$, ширина ленты, содержащей ненулевые элементы, равна 34; общее время расчета составило 60 сек. (шаг по времени $\Delta t = 5c$).

В табл. 4 сравниваются значения температуры в контрольных точках сечения осесимметричного тела в момент времени $t = 30c$ для однородного и неоднородного случаев. Полученные результаты показывают, что из-за различий в физических свойствах материалов железа и стали распределение температурных значений имеет различный характер.

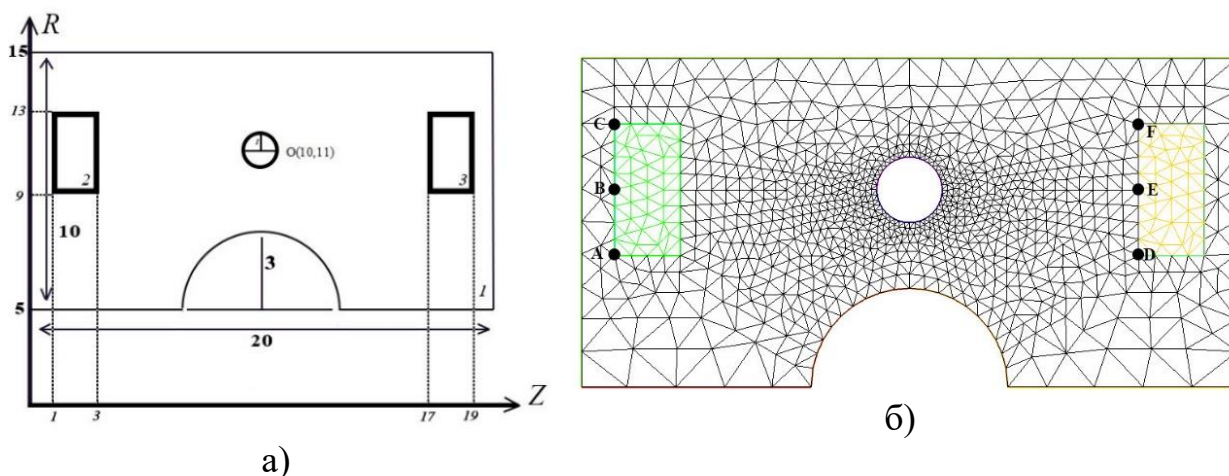


Рис. 9. Сечение осесимметричного тела и сетка конечных элементов

Таблица 4

Численные значения температурного поля

Точка Материал	A(1, 9)	B(1, 11)	C(1, 13)	D(17, 9)	E(17, 11)	F(17, 13)
Однородный	96,554	95,433	94,719	96,697	95,548	94,791
Неоднородный	96,478	94,418	93,295	96,698	94,957	93,751

Для обеспечения наглядности, на рис. 10 изображены изотермы в моменты времени $t = 5, 10, 15$ и 30 секунд. Наблюдается, что с течением времени влияние дополнительных покрытий в неоднородном осесимметричном теле проявляется более явно.

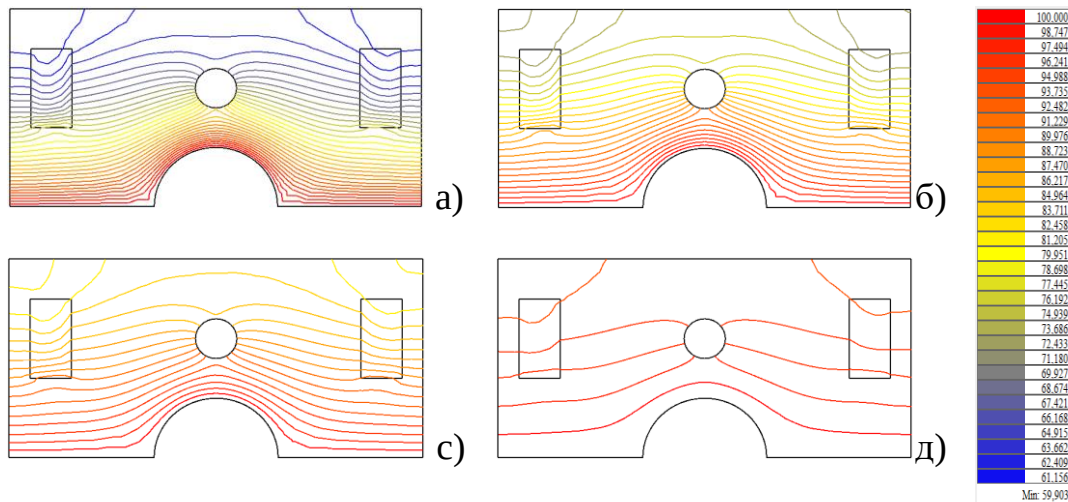


Рис. 10. Изотермы в моменты времени $t = 5, 10, 15$ и 30 секунд

В третьей главе диссертации, озаглавленной “Разработка алгоритмов построения сетки конечных элементов и решения системы уравнений”, разработаны алгоритмы построения сетки конечных элементов и решения полученной системы уравнений, которые применяются для численного моделирования процесса нестационарного распространения тепла в телах, симметричных относительно оси.

При решении задачи методом конечных элементов первоначально строится сетка конечных элементов для исследуемого поперечного сечения тела. Если геометрия тела является сложной, процесс построения сетки конечных элементов для его сечения оказывается значительно трудоемким. Был разработан алгоритм построения сетки конечных элементов для поперечного сечения осесимметричного тела со сложной геометрией.

Если для построения дискретной модели сечения существует алгоритм решения, то данную область мы определяем как каноническая. Если сложное сечение состоит из p канонических областей, то сетка конечных элементов описывается суммой следующих множеств: $\Omega = \sum_{i=1}^p \Omega_i$, здесь Ω_i - дискретная

модель i -ой канонической области.

Каждая каноническая область формируется из следующего набора элементов: $\Omega = \{N, M, MK, MN\}$, где: N - число узловых точек; M - количество конечных элементов; MK - массив координат узловых точек; MN - массив номеров узловых точек по конечным элементам.

Условие совпадения узловых точек на границах двух канонических подобластей $\Omega_1 = \{N_1, M_1, MK_1, MN_1\}$ и $\Omega_2 = \{N_2, M_2, MK_2, MN_2\}$ определяется следующим соотношением: $|r_i - r_j| < \varepsilon$ & $|z_i - z_j| < \varepsilon$, где: $(r_i, z_i) \in MK_1$ ($i = 1, 2, \dots, N_1$), $(r_j, z_j) \in MK_2$ ($j = 1, 2, \dots, N_2$), $\varepsilon > 0$ - достаточно малое положительное действительное число.

Если при объединении двух множеств канонических подобластей Ω_1 и Ω_2 выполняются условия топологии сложного области, то результирующее

множество в виде конечных элементов будет иметь следующую форму: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где: $N = N_1 + N_2 - q$; $M = M_1 + M_2$; $MK = MK_1 \cup \overline{MK_2}$; $MN = MN_1 \cup MN_2$; $q = |MK_1 \cap MK_2|$ – количество совпадающих узлов на соединяемой границе канонических подобластей; $\overline{MK_2}$ – упорядоченное множество координат множества Ω_2 , за исключением координат совпадающих узловых точек; MN_2 – упорядоченное множество перенумерованных узлов множества Ω_2 .

В четвёртой главе диссертации, озаглавленной “**Алгоритм и программный комплекс для решения задачи нестационарного распространения тепла в осесимметричном теле**”, изложены алгоритмы решения задачи, а также структура и функциональные возможности программного обеспечения, предназначенного для исследования процесса нестационарного распространения тепла в осесимметричных телах. На основе созданного программного обеспечения в качестве практической задачи была решена задача нестационарного распространения тепла в осесимметричном теле и проведён вычислительный эксперимент.

Алгоритм решения задачи нестационарного распространения тепла в осесимметричных телах на основе метода конечных элементов состоит из следующих этапов:

- построение конечно-элементной модели сечения осесимметричного тела; определение функций формы; формирование итерационного процесса по времени; выполнение вычислений для каждого конечного элемента; формирование основных уравнений для конечного элемента; построение глобальной матрицы системы на основе уравнений конечных элементов; решение полученной системы линейных уравнений; вывод результатов; визуализация процесса распространения тепла.

Разработан программный комплекс для автоматизации решения задач нестационарного распространения тепла в осесимметричных телах и его структурная архитектура.

Структурная архитектура данного программного комплекса включает следующие модули:

- модуль построения конечно-элементной модели сечения осесимметричного тела со сложной геометрией;
- модуль задания начальных и граничных условий для процесса теплопередачи в осесимметричных телах через графический интерфейс и решения задачи;
- модуль визуализации полученных численных результатов.

Модуль построения конечно-элементной модели (рис. 11.а) состоит из следующих пяти частей: рабочая область; единица измерения и масштабирование; выбор типа границы; операции над сеткой конечных элементов; границы.

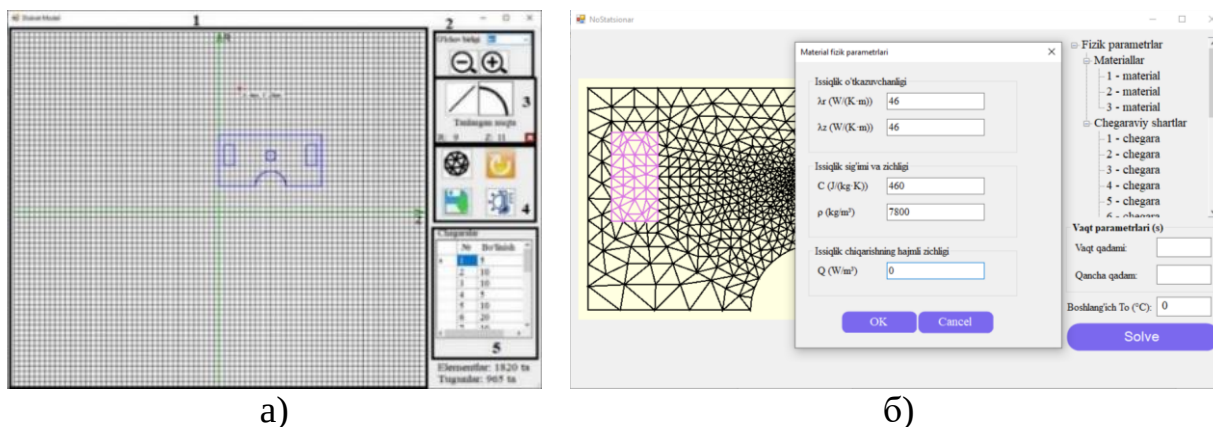


Рис. 11. Модули процесса создания сетки конечных элементов и вычислений в программе

Модуль решения задачи нестационарного теплопереноса (рис. 11.б) состоит из трёх основных разделов: материалы, граничные условия и параметры по времени.

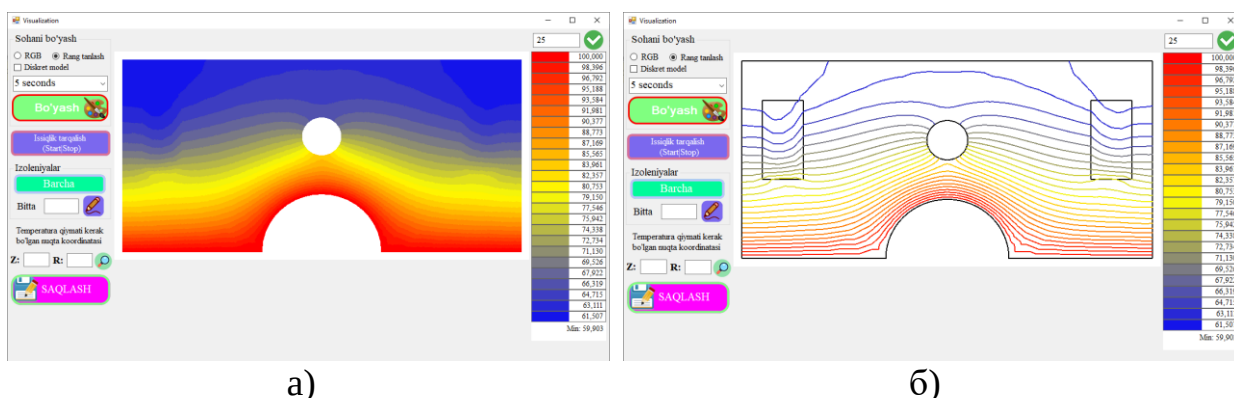


Рис. 12. Температурное поле и изотермы в модуле визуализации программы

На основе модуля визуализации полученных численных результатов можно проанализировать температурное поле (рис. 12а) и изотермы (рис. 12б).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам исследований, проведенных в рамках диссертационной работы на тему «Численное моделирование нестационарного теплопереноса в осесимметричном теле», были сформулированы следующие выводы:

1. Разработан алгоритм автоматической генерации сетки конечных элементов и формирования графического изображения поперечного сечения осесимметричного тела сложной геометрией на основе визуальных компонентов. Это позволило создать дискретную модель сечения тела.

2. Решена задача нестационарного теплопереноса в цилиндрической оболочке постоянной толщины, изготовленной из однородной стали, и проведен анализ полученных результатов. Для проверки достоверности численных решений данной задачи был выполнен сравнительный анализ с результатами, полученными с помощью программного пакета Elcut при тех же геометрических и физических параметрах. Результаты сравнения подтвердили правильность алгоритма.

3. Исследована задача нестационарного теплопереноса в осесимметричных телах со сложной геометрией. Корректность предложенного алгоритма для решения данной задачи была подтверждена на основе сходимости численных решений, полученных при увеличении числа элементов.

4. На основе метода конечных элементов разработана численная модель решения задачи нестационарного теплопереноса в неоднородном осесимметричном теле. На основе разработанного программного обеспечения получено численное решение задачи теплопроводности. Результаты исследования показывают, что если коэффициент теплопроводности различных материалов в составе тела существенно отличается от коэффициента теплопроводности основного материала, различия в процессе распространения тепла проявляются более отчетливо. В частности, материалы с низкой теплопроводностью снижают скорость распространения теплового потока. С этой целью для однородных и неоднородных осесимметричных тел были решены задачи при одинаковых граничных условиях, а полученные численные результаты подвергнуты сравнительному анализу с использованием табличных значений и изотерм.

5. Разработан программный модуль, позволяющий визуально анализировать полученные численные результаты путем отображения распределения температуры в сечении с помощью цветовых градиентов и построения изотерм. Программный модуль обеспечил возможность визуализации процесса теплопереноса.

6. В результате исследований, проведенных в рамках диссертации, разработанные алгоритмы и созданное программное обеспечение были внедрены на совместном предприятии «UzXCMG» и в отделении Ханкинского района кластера «XORAZM TEX». В результате:

обеспечено повышение эксплуатационной надежности и прочности элементов осесимметричных конструкций, находящихся под длительным воздействием поля высоких температур;

в результате численного моделирования теплопередачи в газовой печи осесимметричной конфигурации с учётом внутренних источников тепла и теплообмена с внешней средой, точность расчётов повысилась в 1,15 раза при одновременном сокращении времени вычислений на 10–12%.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.09/2025.27.12. T.01.01.M AT TASHKENT UNIVERSITY OF
INFORMATION TECHNOLOGIES**

**NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER MIRZO
ULUGBEK**

SAPAYEV SHIXNAZAR OMON UGLI

**NUMERICAL MODELING OF UNSTEADY HEAT CONDUCTION IN AN
AXISYMMETRIC BODY**

05.01.07 – Mathematical modeling. Numerical methods and program complexes

**DISSERTATION ABSTRACT OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD)
ON TECHNICAL SCIENCES**

Tashkent – 2026

The theme of doctor of philosophy (PhD) on technical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2025.1.PhD/T5534

The dissertation has been prepared at National university of Uzbekistan Named After Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume the website (www.tuit.uz) and on the website of "Ziyonet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz.)

Scientific adviser:

Polatov Askhad Mukhamedjanovich

Doctor of physical and mathematical sciences, professor

Official opponents:

Muhamediyeva Dildora Kabilovna

Doctor of technical sciences, professor

Yusupov Yusuf Saidjonovich

Doctor of Philosophy (PhD) in Physics and Mathematics

Leading organization:

Samarkand State University named after Sharof Rashidov

The defense of dissertation will take place "12" february 2026 at 16⁰⁰ at the meeting of Scientific Council No. DSc.09/2025.27.12. T.01.01.M at Tashkent University of Information Technologies (Address: 100084, Tashkent city, Amir Temur street, 108. Ph.: (+99871) 238-64-43, e-mail: tuit@tuit.uz).

The dissertation can be reviewed at the Information Resource Centre of Tashkent University of Information Technologies (is registered under No. 405). (Address: 100084, Tashkent city, Amir Temur street, 108. Ph.: (+99871) 238-64-70, e-mail: tuit@tuit.uz).

Abstract of the dissertation sent out on "2" february 2026 y.

(mailing report No. 4 on "2" february 2026 y.).



M.M. Musaev

Chairman of the scientific council
awarding scientific degrees,
Doctor of Technical Sciences, professor

E.Sh. Nazirova

Scientific secretary of scientific council
awarding scientific degrees,
Doctor of Technical Sciences, professor

F.M. Nuraliyev

Chairman of the academic
seminar under the scientific council
awarding scientific degrees,
Doctor of Technical Sciences, professor

INTRODUCTION (abstract of Ph.D. dissertation)

The aim of the research work. The study involves the numerical modeling of heat conduction processes in axisymmetric bodies, as well as the development of computational algorithms and software.

The object of the research is the process of heat conduction in axisymmetric bodies.

The scientific novelty of the research is as follows:

a numerical model and a computational algorithm based on the finite element method have been developed for solving the transient (time-dependent) heat conduction problem in bodies with complex geometry;

a computational algorithm based on the finite element method has been developed for solving the transient (time-dependent) heat conduction problem in inhomogeneous bodies;

an algorithm for constructing a finite element mesh based on the visual representation of cross-sections of bodies with complex geometry has been developed;

an algorithm that takes into account the initial and boundary conditions of the transient heat conduction problem in axisymmetric bodies has been developed.

Implementation of research results. Based on the algorithms developed and the software package created as part of the dissertation research, the following implementations have been carried out:

algorithms and a software package developed for simulating transient heat conduction processes in axisymmetric bodies using the finite element method have been implemented at the joint venture “UzXCMG” LLC (reference no. 6-1556 dated April 25, 2025, issued by the Khorezm regional administration, Republic of Uzbekistan). This implementation made it possible to ensure the operational reliability and structural strength of axisymmetric construction elements subjected to prolonged high-temperature exposure, while reducing computation time by approximately 8–12%;

an algorithm and software solution for steady-state heat conduction analysis in a gas furnace with an axisymmetric configuration—taking into account internal heat sources and heat exchange with the external environment—have been introduced at the Khonka district branch of the “KHORAZM TEX” LLC Cluster (Reference No. 6-1556 dated April 25, 2025, issued by the Khorezm regional administration, Republic of Uzbekistan). As a result, the maximum and minimum temperature values within the furnace were investigated. Improved computational accuracy (by a factor of 1.15) and speed (by a factor of 1.25) enabled a reduction in processing time by approximately 10–12%;

in the numerical modeling of heat conduction problems and the development of solution algorithms, the results obtained within the framework of the grant project No. UZB-Ind-2021-87 “Lie symmetry analysis, Lyapunov stability analysis of hyperbolic systems, and their modeling,” carried out at the Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan during 2021–2023, were utilized (Certificate of the National University of Uzbekistan dated May 2, 2025, No. 04/11-5701);

in the process of constructing a discrete set of the domain and developing algorithms for solving problems based on partial differential equations, opportunities for numerical modeling of systems of partial differential equations were created at Sharof Rashidov Samarkand state university within the framework of the 2022–2026 grant project no. F22020092877, titled “Development of mathematical models and numerical investigation of anomalous substance transport and fluid filtration processes in inhomogeneous porous media” (according to reference no. 10-2434 dated may 17, 2025, issued by Sharof Rashidov Samarkand state university).

Structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, four chapters, a conclusion, a list of references, a list of symbols and terms, and appendices, with a total length of 116 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo'lim (I часть; part I)

1. Икрамов А.М., Жуманиёзов С.П., Сапаев Ш.О. Компьютерное моделирование двумерных стационарных задач теплопроводности с учетом точечных источников тепла МКЭ // Проблемы вычислительной и прикладной математики, 2021, № 3(33). С. 44 – 53. (05.00.00; № 23).
2. Полатов А, М., Икрамов А. М., Жуманиёзов С. П., Сапаев Ш. О. Компьютерное моделирование двумерных нестационарных задач теплопроводности для неоднородных тел МКЭ // Проблемы вычислительной и прикладной математики, 2022, № 2(39). С. 61 – 71. (05.00.00; № 23).
3. Полатов А, М., Икрамов А. М., Сапаев Ш. О. Компьютерное моделирование осесимметрической задачи переноса тепла в трехмерных телах // Проблемы вычислительной и прикладной математики, 2023, № 3(49). С. 33 – 41. (05.00.00; № 23).
4. Полатов А, М., Икрамов А. М., Сапаев Ш. О. Компьютерное моделирование задачи радиального течения воды к скважине методом конечных элементов // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2023. № 6(53). С. 75-81. (05.00.00; № 23).
5. Polatov A.M, Sapayev Sh.O., Matyakubov M.M. Numerical simulation of non-stationary heat conduction in axisymmetric bodies // Bulletin of TUIT: Management and Communication Technologies. 2025. № 1(2). Pp. 1-7. (05.00.00; 25.02.2025 № 283/7.1-son rayyosat qarori).
6. Sapayev Sh. Numerical Modeling of Unsteady Heat Transfer in a Non-Homogeneous Axisymmetric Body // International Journal Of Advanced Research In Science, Engineering And Technology, 2025. № 1(12). Pp. 26-33. (05.00.00; №8).
7. Sapayev Sh. Osesimmetrik jismlarda nostatsionar issiqlik tarqalish masalasini chekli elementlar usulida sonli modellashtirish // Fan va jamiyat, 2025. № 1(1). B. 26-31. (05.00.00; № 37).
8. Sapayev Sh. Bir jinsli bo'lmagan murakkab osesimmetrik jismda nostatsionar issiqlik tarqalish masalasini chekli elementlar usulida sonli modellashtirish // Fan va jamiyat, 2025. № 2(1). B. 35-39. (05.00.00; № 37).

II bo'lim (II часть; part II)

9. Polatov A.M., Ikramov A.M., Sapayev Sh.O., Matyakubov M. Numerical modeling of unsteady heat transfer in an axisymmetric body made of non-homogeneous material using the finite element method // International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices, EDM, Conference Proceedings, Tashkent, 2025. Pp. 2220–2224.
10. Polatov A.M., Ikramov A.M., Jumanioyov S.P., Sapayev Sh.O. Computer simulation of two-dimensional unsteady-state heat conduction problems for inhomogeneous bodies by the FEM // Modern Problems of Applied Mathematics

and Information Technology (MPAMIT 2021), Journal *AIP Conf. Proc*, № 2781, 020019, Fergana, 2021. Pp. 01-06.

11. Askhad Polatov, Akhmat Ikramov, Shikhnazar Sapayev, Jahongir Odilov, Study of the effect of geometrical features on the temperature field of a cylindrical structure // International Scientific Conference “Modern Problems of Applied Science and Engineering – 2024”, Journal *AIP Conf. Proc*, № 3244, 020017, Samarkand, 2024. Pp. 01-06.

12. Akhmat Ikramov, Askhad Polatov, Shikhnazar Sapayev, Odilov Jahkongir, Numerical modeling of water flow to a well by finite element method // International Conference On Modern Problems And Perspectives Of Applied Mathematics: Mppam2024, Journal *AIP Conf. Proc*, № 3356, 020007, Qarshi, 2025. Pp. 01-06.

13. Akhmat Ikramov, Askhad Polatov, Shikhnazar Sapayev, Sardor Jumanioyozov, Jahkongir Odilov, Computer simulation of the calculation of piezometric head of groundwater flow // International Conference On Modern Problems And Perspectives Of Applied Mathematics: Mppam2024, Journal *AIP Conf. Proc*, № 3356, 020006, Qarshi, 2025. Pp. 01-07.

14. Sardor Jumanioyozov, Rakhimjon Rakhimov, Azizbek Khasanov, Shikhnazar Sapayev, Numerical simulation of two-dimensional steady-state heat conduction problems with point heat sources using the finite element method // International Conference On Modern Problems And Perspectives Of Applied Mathematics: Mppam2024, Journal *AIP Conf. Proc*, № 3356, 020015, Qarshi, 2025. Pp. 01-07.

15. Икрамов А.М., Жуманиёзов С.П., Сапаев Ш.О., Адамбаев У.Э. “Компьютерное моделирование двумерных стационарных задач теплопроводности МКЭ”. Амалий математика ва ахборот технологияларининг замонавий муаммолари халқаро миқёсидаги илмий-амалий анжуман. Бухоро – 2021. 57-60 б.

16. Полатов А. М., Икрамов А.М., Жуманиёзов С.П., Сапаев Ш.О. “Расчет двумерных нестационарных задач теплопроводности для композиционных материалов МКЭ”. Амалий математика ва ахборот технологияларининг замонавий муаммолари халқаро миқёсидаги илмий-амалий анжуман. 11-12 май. Бухоро – 2022. 326-327 б.

17. Икрамов А.М., Полатов А. М., Жуманиёзов С.П., Сапаев Ш.О. “Алгоритм построения дискретной модели составных областей”. Амалий математика ва ахборот технологияларининг замонавий муаммолари халқаро миқёсидаги илмий-амалий анжуман. 11-12 май. Бухоро – 2022. 350-351 б.

18. Икрамов А.М., Полатов А.М., Жуманиёзов С.П., Сапаев Ш.О. “Численный анализ распространения тепла при контактном взаимодействии с окружающей средой”. I-Международная научная конференция «Научные основы использования информационных технологий нового уровня и современные проблемы Автоматизации» Беларусь 25-26 апреля 2022 года. 167-169 с.

19. Икрамов А.М., Полатов А.М., Жуманиёзов С.П., Сапаев Ш.О. “Расчет физически нелинейного деформирования бoroалюминия с эллиптическим отверстием”. I-Международная научная конференция «Научные основы использования информационных технологий нового уровня и современные проблемы Автоматизации» Беларусь 25-26 апреля 2022 года. 180-181 с.

20. A.M.Полатов, Ш.О.Сапаев “Компьютерное моделирование осесимметрической задачи переноса тепла в трехмерных телах МКЭ”. “Fan va texnika kelajagini shakllantirish” xalqaro ilmiy-amaliy anjuman. 1-3 noyabr 2023-yil, Toshkent, 120-123 b.
21. Полатов А.М., Икрамов А.М., Сапаев Ш.О. “Компьютерное моделирование задачи радиального течения воды к скважине метода конечных элементов”. «Innovative research in science» International scientific-online conference. 19 декабрь 2023 года. Беларусь, 57-60 с.
22. Asxad Polatov, Shixnazar Sapayev “Cheksiz ko‘rinishdagi silindrda statsionar issiqlik uzatish masalasini chekli elementlar usulida yechish”. «Raqamli texnologiyalar va iqtisodiyot: zamonaviy muammolari va istiqbollari» mavzusida Respublika ilmiy-amaliy konferensiya. 24-25-aprel 2024-yil. Toshkent, 638-640 b.
23. А.М. Полатов, А.М. Икрамов, Ш.О. Сапаев “Компьютерное моделирование температурного поля при тепловом потоке в осесимметричных телах сложной конструкции”. «Вычислительные модели и технологии» (CMT2024), 27-апрель 2024 года. Toshkent, 132-135 с.
24. Asxad Polatov, Shixnazar Sapayev “Solving the problem of stationary heat distribution in a complex cylindrical structure by the finite element method”. «Amaliy matematikaning zamonaviy muammolari va istiqbollari» mavzusidagi Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi. Qarshi, 2024 yil 24-25-may. 29-31 b.
25. Жуманиёзов С.П., Сапаев Ш.О. “Компьютерное моделирование двумерных нестационарных задач теплопроводности с учетом точечных источников тепла МКЭ”. «Amaliy matematikaning zamonaviy muammolari va istiqbollari» mavzusidagi Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi. Qarshi, 2024 yil 24-25-may. 129-132 b.
26. Ikramov A.M., Jumanioyozov S.P., Sapayev Sh.O. Ikki o‘lchovlik statsionar issiqlik tarqalish masalasini chekli elementlar usulida echishda olingan sonli natijalarni vizuallashtirish dasturi. № DGU 10744, 08.04.2021.
27. Polatov A.M., Ikramov A.M., Jumanioyozov S.P., Sapayev Sh.O. Bir jinsli bo‘lmagan jisimlarda ikki o‘lchovlik nostatsionar issiqlik tarqalish masalasini chekli elementlar usulida echish dasturi. № DGU 16331, 21.05.2022
28. Polatov A.M., Ikramov A.M., Sapayev Sh.O., Adambayev U.E. O‘qqa nisbatan simmetrik issiqlik tarqalish masalasini chekli elementlar usulida yechish dasturi. № DGU 20239320, 24.11.2023.

Avtoreferat “Muhammad al-Xorazmiy avlodlari” ilmiy jurnali
tahririyatida tahrirdan o‘tkazildi va o‘zbek, rus, ingliz
tillaridagi matnlarini mosligi tekshirildi.

Bichimi 60x84¹/₁₆. Raqamli bosma usulida chop etildi. Times New
Roman garniturasida. Shartli bosma tabog‘i: 3. Adadi 100. Buyurtma № 15.
«O‘zR Fanlar Akademiyasi Asosiy kutubxonasi» bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100170, Toshkent sh., Ziyolilar ko‘chasi 13-uy.