

**TOSHKENT DAVLAT TRANSPORT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.10/2025.27.12. FM/T.01.08 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI

MATANOV MUHAMMAD CHARSHAMIYEVICH

**G'OVAK-ELASTIK YARIM FAZOLI MUHITDA RELEY TO'LQINLARI
TARQALISHINING MATEMATIK MODEL**

**05.01.07- Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui
(fizika-matematika fanlari)**

**fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Toshkent – 2026

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации
доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

**Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on
physical-mathematical sciences**

Matanov Muhammad Charshamiyevich

G'ovak-elastik yarim fazoli muhitda Reley to'lqinlari tarqalishining matematik modeli 3

Матанов Мухаммад Чаршамиевич

Математическая модель распространения волн Рэлея в пористо-упругой полупространственной среде 21

Matanov Muhammad Charshamievich

Mathematical Modeling of Rayleigh Wave Propagation in Poroelastic Half-Space Media 41

E'lon qilingan ishlar ro'yxati

Список опубликованных работ
List of published works 45

**TOSHKENT DAVLAT TRANSPORT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.10/2025.27.12. FM/T.01.08 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI

MATANOV MUHAMMAD CHARSHAMIYEVICH

**G'OVAK-ELASTIK YARIM FAZOLI MUHITDA RELEY TO'LQINLARI
TARQALISHINING MATEMATIK MODEL**

**05.01.07- Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui
(fizika-matematika fanlari)**

**fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Toshkent – 2026

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2025.4.PhD/FM1434 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Qarshi davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (<http://tstu.uz>) va "ZiyoNet" ta'lim axborot tarmog'ida (www.ziynet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:

Xolmurodov Abdulxamid Erkinovich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Rasmiy opponentlar:

Normurodov Chori Begaliyevich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Azamov Siroj Sobirovich
fizika-matematika fanlari falsafa doktori (PhD), dotsent

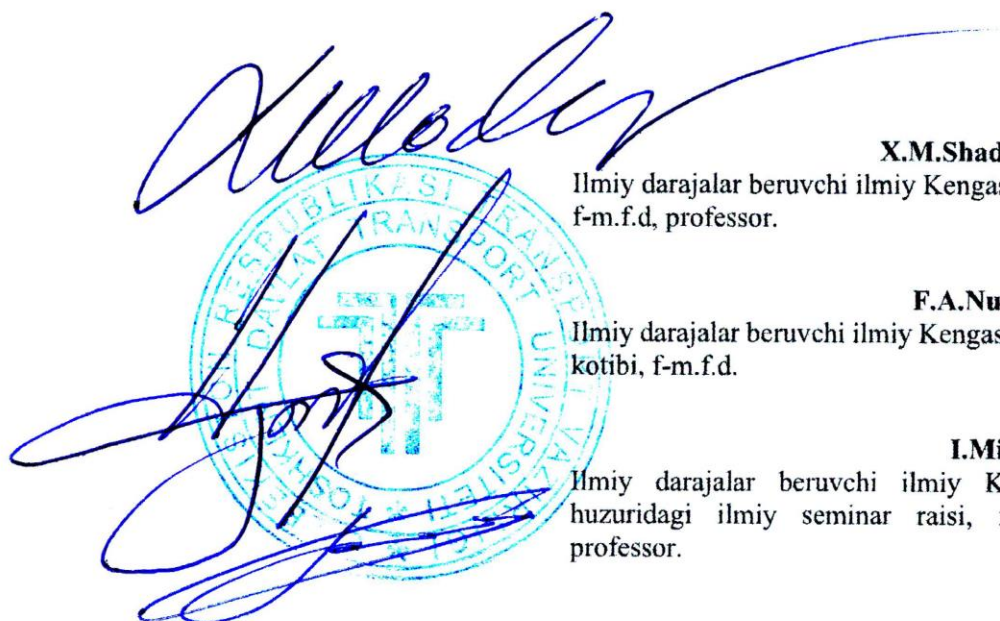
Yetakchi tashkilot:

Samarqand davlat universiteti

Dissertatsiya himoyasi Toshkent Davlat Transport universiteti huzuridagi PhD.10/2025.27.12. FM/T.01.08 raqamli Ilmiy kengashning 2026-yil «29» 10 soat 15:00 dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100167, Toshkent sh., Mirobod tumani, Temiryo'chilar ko'chasi, 1-uy. Tel.: (+998 71) 299 00 01, faks: (+998 71) 293 57 54, e-mail: rektorat@tstu.uz).

Dissertatsiya bilan Toshkent Davlat Transport universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (390 raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 100167, Toshkent sh., Mirobod tumani, Temiryo'chilar ko'chasi, 1-uy. Tel.: (+998 71) 299 05 66).

Dissertatsiya avtoreferati 2026-yil 16 10 kuni tarqatildi.
(2026-yil "22" 06 dagi 6- raqamli reestr bayonnomasi)



X.M.Shadimetov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy Kengash raisi,
f-m.f.d, professor.

F.A.Nuraliyev
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy Kengash ilmiy
kotibi, f-m.f.d.

I.Mirzayev
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy Kengash
huzuridagi ilmiy seminar raisi, f-m.f.d,
professor.

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahonda olib borilayotgan ko'plab ilmiy-amaliy tadqiqotlar natijasida zamonaviy geofizika, geotexnika va muhandislik seysmologiyasida murakkab ko'p fazali muhitlarda to'liq jarayonlarini o'rganish sezilarli darajada kengayib bormoqda. Dunyo miqyosida zilzilalar, texnogen tebranishlar, portlashlar va boshqa dinamik ta'sirlar natijasida hosil bo'ladigan to'liq maydoni inshootlarning barqarorligi, seysmik xavfsizligi va ekspluatatsion ishonchliligiga bevosita ta'sir ko'rsatmoqda. Geotexnika sohasidagi yangi yondashuvlar yirik inshootlar seysmik xavfsizligini oshirishda muhitlarning dinamik xossalarini chuqur tahlil qilishni talab qilmoqda. Ayniqsa, suvga to'yingan tuproq, cho'kindi qatlamlar, tosh jinslari va sun'iy kompozitlar kabi g'ovak-elastik muhitlarda qattiq hamda g'ovak suyuqlikning o'zaro ta'siri tufayli to'liqlarning tarqalishi, so'nishi, aks etishi va energiya almashinuvi ancha murakkab ahamiyat kasb etadi. Shu jihatdan bunday muhitlarda yuzaga keladigan to'liq jarayonlarini ishonchli matematik modellar asosida to'liq o'rganish va foydalanish muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

Jahonda g'ovak-elastik yarim fazoli muhitlarda tarqaladigan to'liqlar orasida Reley to'liqlarini modellashtirish va tadbiqlariga oid keng ko'lamli ilmiy tadqiqot ishlari olib borilmoqda. Bu borada, yer sirti bo'ylab tarqaluvchi yuzaki to'liqlar, amplitudaning sirt yaqinida katta bo'lishi sababli inshootlarga eng kuchli ta'sir ko'rsatadigan seysmik omillardan Reley to'liqlarining tarqalish tezligi, dispersiyasi, amplituda kamayishi va so'nish xususiyatlari muhitning g'ovakligi, elastiklik parametrlari, suyuqlikning yopishqoqligi, to'yinganlik darajasi hamda interfeys xossalarini o'rganish orqali modellar ishlab chiqilmoqda. Shu bilan birga, Reley to'liqlarini g'ovak-elastik yarim fazoda tadqiq etish qonuniyatlarini tahlil qilishga alohida e'tibor berilmoqda.

Respublikamizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbig'iga ega bo'lgan matematik fizika, muhandislik, gidromexanika, geofizika va geologiya sohalaridagi murakkab amaliy masalalarni matematik modellashtirish, ularning analitik va sonli yechimlarini ishlab chiqish yuzasidan keng qamrovli chora-tadbirlar amalga oshirilib, muayyan natijalarga erishilmoqda. 2020–2023-yillarda O'zbekiston Respublikasida matematika fanlari bo'yicha ta'lim sifatini yaxshilash, ilmiy-tadqiqotlarning samaradorligi va amaliy ahamiyatini oshirish, jumladan, differensial tenglamalar nazariyasi, matematik fizika, hisoblash matematikasi, matematik modellashtirish va sonli metodlarni rivojlantirish bo'yicha muhim vazifalar belgilab berilgan¹. Ushbu vazifalarni amalga oshirishda, g'ovak-elastik yarim fazoli muhitda Reley to'liqlari tarqalishining matematik modelini qurish, Biot nazariyasi asosida ikki fazali muhitdagi bog'langan to'liq tenglamalarini tahlil qilish, sirt to'liqlarining tezligi, dispersiyasi va so'nish qonuniyatlarini aniqlash hamda ularni zamonaviy sonli usullar va algoritmik yondashuvlar asosida amaliy masalalarni yechish, ularni kompyuter texnologiyalari yordamida tahlil qilish va optimallashtirish muhim ahamiyat kasb etmoqda.

¹ O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 – yil 7 – maydagi “Matematika sohasidagi ta'lim sifatini oshirish va ilmiy – tadqiqotlarni rivojlantirish chora – tadbirlari to'g'risida” gi PQ – 4708 – sonli qarori.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevral PF-4947-sonli “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi, 2022-yil 28-yanvar PF-60 sonli “2022-2026- yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi farmonlari, 2017-yil 17-fevral PQ-2789 -sonli “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2017-yil 20-aprel PQ-2909-sonli “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2018-yil 27-aprel PQ-3682-sonli “Innovatsion g‘oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2020 -yil 7 -may PQ – 4708 -sonli “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari, hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa me‘yoriy-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya ishi muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV “Matematika, mexanika, informatika va matematik modellashtirish” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Ma’lumki, geotexnika va geofizika bugungi kunda fan va texnikaning deyarli barcha sohalarida o‘z o‘rniga ega. Hayotimizning ajralmas qismiga aylangan bu sohaning shakllanishiga bir qator buyuk olimlar o‘z hissasini qo‘shgan. G‘ovak-elastik muhitlarda to‘lqin tarqalishini modellashtirish masalasi XX asr o‘rtalaridan boshlab ilmiy tadqiqotlarning muhim yo‘nalishlaridan biriga aylandi. Ushbu sohaning fundamental nazariy asoslari Biot M.A. tomonidan ishlab chiqilgan bo‘lib, u ikki fazali muhitlar - qattiq faza va suyuqlik bilan to‘yingan g‘ovak tizimlar - uchun dinamik tenglamalarni taklif etdi. Keyinchalik Biot nazariyasi asosida suvga to‘yingan g‘ovak muhitlarda bo‘ylama, ko‘ndalang va Reley to‘lqinlarining tarqalishi, ularning dispersiyasi va energiya so‘nishi bo‘yicha ko‘plab tadqiqotlar olib borildi. Klassik elastodinamikada esa yarim fazoda yuzaki to‘lqinlar nazariyasi Rayleigh L., Love A. va boshqa olimlar tomonidan rivojlantirildi. So‘nggi yillarda g‘ovak-elastik yarim fazolarda to‘lqinlarning tarqalishi bilan bir qatorda, ularning aks etishi, garmonik fundamental yechimlari, integral tenglamalar asosidagi sonli modellashtirilishi ham keng o‘rganildi. Keyingi o‘n yilliklarda Biot modeli asosida Chenevert (1989), Carcione (2007), de la Puente va boshqalar (2008), Gurevich (2010) kabi olimlar suvga to‘yingan qatlamlarning seysmik tahlilini o‘rgandilar. Bundan tashqari Reley to‘lqinlari va yarim fazodagi elastik to‘lqin nazariyasi bo‘yicha klassik olimlar: Love A.E. (UK), Rayleigh Lord, Guz A.N. (Ukraine). G‘ovak-elastik muhitlarda Reley to‘lqinlari bo‘yicha Carcione S. (Italy), Norris D. (USA), Gilbert K. (USA), Booker J.F. (USA) zamonaviy tadqiqotchilar hisoblanadi.

O‘zbekistonda ham ushbu yo‘nalishda salmoqli ilmiy maktab shakllangan. Xususan, akademik X.A. Raxmatulin tomonidan ko‘p fazali muhitlar mexanikasi va aralashmalar harakati nazariyasiga asos solingan bo‘lib, uning ishlari g‘ovak muhitlarda qattiq faza va suyuq fazaning o‘zaro bog‘langan harakatini modellashtirish uchun nazariy asos bo‘lib xizmat qiladi. Shuningdek, Yo. Soatov, T. Artikov, Sh.

Narimov va boshqa olimlarning elastik, qovushqoq-elastik va g'ovak muhitlarda to'lg'in tarqalishi, kuchlanish-deformatsiyalanish holati va chegaraviy masalalarga oid ishlari mazkur tadqiqot mavzusi bilan bevosita bog'liqdir. Ushbu ishlarda olingan natijalar Biot tipidagi ikki fazali model, hajmiy va sirt to'lg'inlarining dispersiyasi hamda so'nishini tahlil qilishda muhim nazariy manba vazifasini bajaradi. Bundan tashqari Imomnazarov X.X., Xolmurodov A.E., Shukurov A.M., G'oziyev K.S., Omonov A.T., Lesov K.S., Umarov X.X., Jurayev G'. va boshqa olimlar elastik, akustik va g'ovak muhitlarda to'lg'in jarayonlari, to'g'ri va teskari masalalar, Reley, SH-to'lg'in², Love to'lg'ini³ hamda Stoneley to'lg'inlari⁴, ko'p qatlamli va murakkab geometrik sohalarida nostatsionar dinamik muammolarni tadqiq etganlar. Mavjud tadqiqotlarda elastik muhitlarda sirt to'lg'inlari tarqalishi, g'ovak-elastik yarim fazoda Reley to'lg'inlarining ayrim xususiyatlari hamda qoplamali anizotrop tizimlardagi to'lg'in jarayonlari ko'proq alohida-alohida tadqiq etilgan. Biroq suvga to'yingan g'ovak-elastik yarim fazoda to'lg'inlarning tarqalishi va aks etish jarayonlarini Reley to'lg'inlari nazariyasi bilan uzviy bog'liq holda o'rganish, shuningdek noideal interfeysli gradatsiyalangan piezoelektrik qoplama qatlamga ega anizotrop yarim fazoda Reley tipidagi sirt to'lg'inlarining dispersiya va so'nish xususiyatlarini yagona matematik model asosida tahlil qilish masalalari yetarlicha yoritilmagan. Shu sababli mazkur dissertatsiyada g'ovak-elastik va qoplamali anizotrop yarim fazoli muhitlarda Reley to'lg'inlari tarqalishining matematik modellarini ishlab chiqish hamda ularning dinamik xususiyatlarini kompleks tadqiq etish maqsad qilib olingan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta'lim yoki ilmiy-tadqiqot muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog'liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Qarshi davlat universitetining ilmiy-tadqiqot ishlari rejasidagi "Bir jinsli bo'lmagan g'ovak muhitlarda anomal moddalar ko'chishi va suyuqliklar sizishi jarayonlarining matematik modellarini tuzish va sonli tadqiq etish" mavzusi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi. G'ovak-elastik yarim fazoda Reley to'lg'inlari tarqalishining matematik modelini tuzish.

Tadqiqotning vazifalari.

biotning ikki fazali muhit nazariyasi asosida suyuqlikka to'yingan g'ovak-elastik muhitda qattiq faza va g'ovaklardagi suyuqlik harakatining o'zaro bog'langan takomillashtirilgan matematik modelini ishlab chiqish;

g'ovak-elastik yarim fazoli muhitda P1, P2 va S to'lg'inlarining hosil bo'lishi, tarqalish tezligi, so'nishi hamda erkin sirt va chegaraviy sohalarida aks etish qonuniyatlarini matematik jihatdan asoslash;

² SH-to'lg'in — *Shear Horizontal wave* atamasining qisqartmasi bo'lib, siljish deformatsiyasi gorizontaal yo'nalishda sodir bo'ladigan va zarrachalar harakati to'lg'in tarqalish yo'nalishiga perpendikulyar bo'lgan ko'ndalang elastik to'lg'inni bildiradi.

³ Love to'lg'ini — qatlamli elastik muhitlarda tarqaluvchi sirt to'lg'ini bo'lib, unda zarrachalar harakati gorizontaal siljish xarakteriga ega bo'ladi. Bu to'lg'in odatda elastik qatlam va yarim fazo chegarasi ta'sirida yuzaga keladi.

⁴ Stoneley to'lg'ini — ikki turli elastik yoki g'ovak-elastik muhit chegarasi bo'ylab tarqaluvchi interfeys to'lg'ini bo'lib, uning amplitudasi chegaradan uzoqlashgan sari har ikki muhitda so'nib boradi.

g'ovak-elastik yarim fazoda Reley tipidagi sirt to'liqlarining chuqurlik bo'yicha so'navchi yechimlarini hosil qilish, sekulyar tenglamasini keltirib chiqarish hamda dispersiya va so'nish xususiyatlarini tahlil qilish;

g'ovak-elastik yarim fazoli muhit uchun integral tenglamalar va garmonik fundamental yechimlarni qurish, ularni chegaraviy elementlar usuli asosida sonli yechish algoritmini ishlab chiqish;

qoplamali anizotrop yarim fazoda Reley to'liqlari tarqalishini matematik modelini ishlab chiqish va sonli tahlil qilish.

Tadqiqotning obyekti. G'ovak-elastik yarim fazoli muhitlar va ularda yuzaga keladigan hajmiy hamda Reley to'liqlari, shuningdek noideal interfeysli gradatsiyalangan piezoelektrik qoplama qatlamga ega anizotrop yarim fazolardagi sirt to'liqlar jarayonlari.

Tadqiqotning predmeti. G'ovak-elastik va qoplamali anizotrop muhitlarda to'liqlarning tarqalishini tavsiflovchi Biot tipidagi differensial tenglamalar, garmonik asosiy tenglamalar, integral tenglamalar, fundamental yechimlar, dispersion munosabatlar, chegaraviy elementlar usuli asosidagi sonli yechimlar.

Tadqiqotning usullari. Tadqiqotda garmonik tahlil, integral tenglamalar usuli, chegaraviy elementlar usuli, matematik modellashirishning nazariy va amaliy uslublaridan foydalanildi.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi:

suyuqlikka to'yingan g'ovak-elastik yarim fazoli muhitda qattiq faza va g'ovaklardagi suyuqlik harakati o'zaro bog'langan holda qaralib, Biot nazariyasi asosidagi matematik model inersiya, elastiklik, g'ovak bosimi, filtratsion ta'sir va fazalararo o'zaro ta'sirni hisobga olgan holda takomillashtirilgan;

g'ovak-elastik muhitda P1, P2 va S to'liqlarining tarqalishi, aks etishi va tarqalish qonuniyatlari matematik jihatdan asoslangan;

g'ovak-elastik yarim fazoda Reley tipidagi sirt to'liqlari uchun chuqurlik bo'yicha so'navchi yechimlar va sekulyar tenglama hosil qilingan;

g'ovak-elastik yarim fazoli muhit uchun garmonik fundamental yechimlar, chegaraviy integral tenglamalar va ularni chegaraviy elementlar usuli asosida sonli yechish algoritmi ishlab chiqilgan;

qoplamali anizotrop yarim fazoda Reley to'liqlari tarqalishi matematik modellashirilgan va sonli tahlil qilingan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

suvga to'yingan g'ovak-elastik yarim fazoli muhitda Reley to'liqlari, hajmiy to'liqlarning tarqalishi va aks etish jarayonlarini hisoblashga mo'ljallangan sonli algoritmlar ishlab chiqilgan;

g'ovak-elastik va qoplamali anizotrop yarim fazoli muhitlarda sirt to'liqlari xarakteristikalarini aniqlash uchun hisoblash sxemalari va grafik tahlil vositalari shakllantirildi. Olingan natijalar mavjud tadqiqot natijalari bilan taqqoslangan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Dissertatsiya ishida olingan ilmiy natijalarning ishonchliligi qo'llanilgan matematik modellarning Biotning ikki fazali muhit nazariyasi, elastiklik nazariyasi va sirt to'liqlari nazariyasiga asoslanganligi, masalaning fizik mazmuniga mos chegaraviy shartlar qo'yilganligi, hosil qilingan sekulyar tenglamalar, fundamental yechimlar va integral tenglamalarning xususiy

hollarda klassik natijalar bilan mos kelishi, chegaraviy elementlar usuli asosida ishlab chiqilgan sonli algoritmlarning barqarorligi hamda olingan natijalarning mavjud nazariy va sonli natijalar bilan muvofiqligi orqali asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqotning ilmiy ahamiyati shundaki, unda g'ovak-elastik yarim fazoli muhitlarda Reley to'lqinlarining tarqalishini tavsiflovchi nazariy model chuqurlashtirildi, hajmiy to'lqinlarning tarqalishi va aks etishi bilan bog'liq jarayonlar umumiy to'lqin nazariyasi nuqtayi nazaridan tahlil qilindi, shuningdek qoplamali anizotrop yarim fazolarda Reley to'lqinlari tarqalishining kengaytirilgan modeli taklif etildi. Bu natijalar murakkab muhitlarda to'lqin jarayonlarini chuqurroq anglash, ularning parametrik sezgirligini aniqlash va keyingi tadqiqotlar uchun ilmiy-metodik asos yaratadi.

Tadqiqotning amaliy ahamiyati esa ishlab chiqilgan modellar va algoritmlarning seysmik xavfsizlikni baholash, g'ovak-elastik muhitlardagi inshootlarning dinamik barqarorligini tahlil qilish, hisoblash me'yorlarini takomillashtirish, yer osti kommunikatsiyalari va poydevor tizimlarini loyihalash, shuningdek qoplamali funksional materiallar hamda akustoelektron qurilmalarni tadqiq etishda qo'llanish imkoniyati bilan belgilanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. G'ovak elastik yarim fazoli muhitda to'lqinlar tarqalishi bo'yicha olingan natijalar asosida:

g'ovak elastik yarim fazoli muhitda to'lqinlar tarqalishining dispersiya xossalarini aniqlash, turli elastik parametrlar ostida amplituda va tezliklarni hisoblash, chegaraviy elementlar usuli asosida sonli modellashtirishni amaliyotga tatbiq etish kabi natijalardan FZ-2020092877-sonli fundamental loyihada qo'llanilgan (Samarqand davlat universitetining 2026-yil 8-maydagi 10-2403-sonli ma'lumotnomasi). Natijada g'ovak-elastik muhitlarda to'lqin tarqalishini modellashtirish, chegaraviy shartlar asosidagi sonli yechish usullarini takomillashtirish hamda dispersiya va amplituda xossalarini hisoblash imkonini bergan.

reley to'lqinlarining tarqalishi, dinamik xossalari, dispersiya va energiya so'nishi bilan bog'liq hisoblash algoritmlari chegaraviy elementlar usuli asosida olingan ilmiy natijalardan Rossiya Fanlar akademiyasi Sibir bo'limining (2025-yil 25-sentabrda №15301-son tasdiqnomasi) № 0251-2021-2024 sonli fundamental-amaliy yo'nalishdagi loyiha ishlarida tatbiq etilgan. Natijalar seysmik jarayonlarni modellashtirish, matematik geofizika masalalari va monitoring tizimlarida foydalanish uchun ilmiy asos bo'lib xizmat qilgan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur dissertatsiya natijalari 9 ta ilmiy-amaliy anjumanda, jumladan 4 ta xalqaro va 5 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o'tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e'lon qilinishi. Dissertatsiya mavzusi bo'yicha jami 20 ta ilmiy ish chop etilgan. Ulardan 11 ta maqola O'zbekiston Respublikasi OAK tomonidan tavsiya etilgan ilmiy jurnallarda, 3 tasi xorijiy ilmiy jurnallarda, 8 tasi respublika ilmiy jurnallarda nashr etilgan. Shuningdek, EHM uchun yaratilgan 3 ta maxsus dasturiy vosita bo'yicha mualliflik guvohnomalari olingan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va qisqacha tavsifi. Dissertatsiya kirish, uchta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati va ilovalardan iborat bo'lib, jami 115 betni tashkil etadi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi asoslangan, tadqiqotning O'zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalarini rivojlantirishning ustuvor yo'nalishlariga muvofiqligi ko'rsatilgan, dissertatsiya mavzusi bo'yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi va muammoning o'rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi va vazifalari shakllantirilgan, tadqiqot obyekti va predmeti bayon qilingan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari o'rganilgan. Olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining amaliyotga joriy qilinganligi, chop etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi haqida ma'lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiya ishining **“G'ovak-elastik muhitda to'liq tenglamalari”** deb nomlangan birinchi bobi yordamchi-nazariy xarakterga ega bo'lib, unda tadqiqotning keyingi boblari uchun zarur bo'lgan asosiy tushunchalar, fizik-matematik yondashuvlar va metodologik asoslar bayon qilingan. Chegaraviy elementlar usuli asosida mazkur modellarni sonli yechish yo'llari, ushbu jarayonda yuzaga keladigan nazariy va hisoblash muammolari, tenglamalarni diskretlashtirish strategiyasi hamda usulni aniq modellarga tatbiq etish masalalari batafsil bayon etilgan. Bundan tashqari, turli interfeyslar uchun qo'yilgan chegara shartlari va ularning matematik ifodalanishi tahlil qilinib, keyingi boblarda o'rganiladigan to'liq jarayonlarini modellashtirish uchun zarur bo'lgan nazariy asoslar shakllantirilgan.

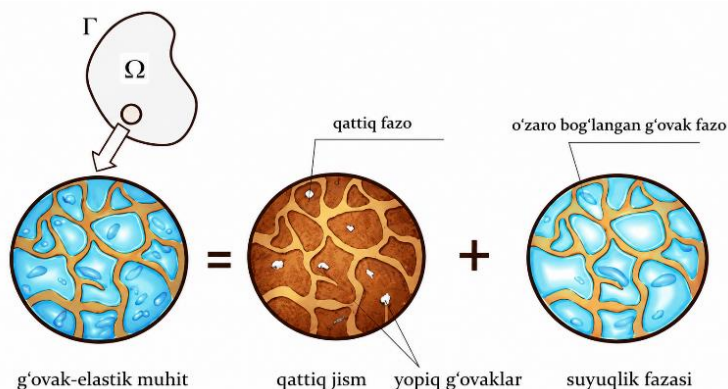
Ta'rif 1. G'ovak-elastik muhit deb ichki tuzilmasida g'ovaklar mavjud bo'lgan, qattiq jism va g'ovaklarda joylashgan suyuqlik yoki gaz fazasidan tashkil topgan ikki fazali muhitga aytiladi. Bunday muhitlarda makroskopik deformatsiya jarayoni qattiq jismning elastik reaksiyasi bilan g'ovakdagi suyuqlikning nisbiy harakati o'zaro bog'langan holda kechadi.

G'ovaklik muhitning asosiy parametrlaridan biri bo'lib, u umumiy g'ovaklik, o'zaro bog'langan g'ovaklik va o'zaro bog'liq bo'lmagan g'ovaklikka ajratiladi. O'zaro bog'langan g'ovaklar suyuqlik harakatini ta'minlaydi, yopiq g'ovaklar esa asosan zichlik va elastik xossalarga ta'sir ko'rsatadi. Mazkur parametrlar o'rtasidagi bog'lanish quyidagicha ifodalanadi:

$$\varphi_{\text{total}} = \varphi_{\text{eff}} + \varphi_{\text{no eff}}.$$

Bu formula g'ovak muhitning tarkibiy tuzilmasini tavsiflaydi. Agar g'ovaklar to'liq suyuqlik bilan to'ldirilgan bo'lsa, muhit to'yingan g'ovak-elastik muhit deb ataladi, qisman suyuqlik va gaz bilan to'ldirilgan hol esa qisman to'yingan muhit sifatida qaraladi.

G'ovak-elastik muhit nazariyasining shakllanishi Terzagiyning konsolidatsiya modeli hamda M.A.Biotning ikki fazali muhitlar nazariyasiga borib taqaladi. Terzagiy modeli bir o'lchamli zichlashish jarayonini tavsiflagan bo'lsa, Biot nazariyasi qattiq jism va g'ovak suyuqlikning dinamik o'zaro ta'sirini umumiy holda ifodalash imkonini berdi. Dissertatsiyada aynan Biotning chiziqli ikki fazali modeli asosiy tayanch nazariya sifatida qabul qilingan.



1-rasm. G'ovak jism - qattiq jism va g'ovak fazoning o'zaro birikkan tuzilmasidan iborat muhit.

Mazkur modelda qattiq fazaning siljishi $u = (u_x, u_y, u_z)$ va suyuq fazaning siljishi $U = (U_x, U_y, U_z)$ bilan ifodalanadi. Shuningdek, muhitning g'ovakligi ϕ , suyuqlikning yopishqoqligi η , Darse o'tkazuvchanligi k , Biot modullari Q va R , hamda effektiv zichlik koeffitsiyentlari $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$ kabi parametrlar to'lqin tarqalishini belgilovchi asosiy kattaliklar sifatida tanlangan.

Elastik, skalyar va g'ovak-elastik muhitlar uchun boshqaruv tenglamalari qiyosiy tarzda keltirilgan. Bu yondashuv g'ovak-elastik modelning qaysi hadlari qattiq jism, qaysi hadlari esa g'ovak suyuqlik harakati bilan bog'liq ekanini yaqqol ko'rsatadi.

Izotrop chiziqli elastik muhit uchun asosiy harakat tenglamasi:

$$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot u) + X = \rho \ddot{u} \quad (1.1)$$

ko'rinishda yoziladi. Bu yerda λ va μ — Lamé konstantalari, X — hajm kuchlari vektori, ρ — zichlik, u esa siljish vektoridir. Mazkur tenglamadan bo'ylama va ko'ndalang to'lqinlar ajratib olinadi va ularning tezliklari mos ravishda

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.2)$$

munosabatlar bilan aniqlanadi.

Skalyar muhit, xususan suv uchun bosim maydoni quyidagi to'lqin tenglamasi bilan tavsiflanadi:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \ddot{p} = \nabla \cdot X' \quad (1.3)$$

G'ovak-elastik muhit uchun qattiq va suyuqlik fazalarining bog'langan harakati quyidagi asosiy sistemaga keltiriladi:

$$\mu \nabla^2 u + \left(\lambda + \mu + \frac{Q^2}{R} \right) \nabla e + Q \nabla \varepsilon + X = \rho_{11} \ddot{u} + \rho_{12} \ddot{U} + b(\dot{u} - \dot{U}), \quad (1.4)$$

$$\nabla(Qe + R\varepsilon) + X' = \rho_{12} \ddot{u} + \rho_{22} \ddot{U} - b(\dot{u} - \dot{U}). \quad (1.5)$$

Bu yerda $e = \nabla \cdot u$ qattiq fazaning hajmiy deformatsiyasi, $\varepsilon = \nabla \cdot U$ suyuqlik fazasining hajmiy kengayishi, b esa dissipatsiya doimiysidir. Mazkur bog'langan sistema g'ovak-elastik muhitda bo'ylama va ko'ndalang to'lqinlarning ikki fazali tabiatini tushuntirib beradi.

Chiziqli elastik va g'ovak-elastik muhitlar uchun asosiy tenglamalar

Muhit turi	Asosiy tenglama	Izoh
Elastik muhit	$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u) + X = \rho \ddot{u}$	Bo'ylama va ko'ndalang to'lqinlar mavjud
Izotrop muhit	$\nabla^2 p - (1/c^2) \ddot{p} = \nabla \cdot X'$	Bosim to'lqini uchun model
G'ovak-elastik muhit	$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu + Q^2/R) \nabla e + Q \nabla \varepsilon + X = \rho_{11} \ddot{u} + \rho_{12} \ddot{U} + b(\dot{u} - \dot{U})$	Qattiq va suyuqlik fazalari bog'langan

Jadvaldan ko'rinadiki, g'ovak-elastik model elastik va skalyar modellarni umumlashtiradi. Aynan shu umumlashma Reley to'lqinlari tezligi, g'ovaklik, to'yinganlik, interfeys hamda yopishqoqlikka sezgiriligini tavsiflash imkonini beradi.

Dissertatsiyada garmonik vaqt bog'liqligi $\exp(i\omega t)$ qabul qilinib, tenglamalar chastotaga o'tkazilgan. Elastik muhitda P va S to'lqinlar tezliklari aniq ajralib chiqsa, g'ovak-elastik muhitda bo'ylama to'lqinlarning ikki turi va bitta siljishli to'lqin yuzaga keladi. Ko'ndalang to'lqin uchun qattiq va suyuqlik fazalarining aylanishlari o'rtasidagi bog'lanish hamda tarqalish tezligi muhit parametrlariga bog'liq holda ifodalangan:

$$\Omega = \Lambda \omega, \quad k_s^2 = \frac{\rho \omega^2}{\mu}. \quad (1.6)$$

Bu ifodalar g'ovak-elastik muhitda suyuqlikning yopishqoqligi va qo'shimcha inersiya tufayli siljishli to'lqin tezligi chastotaga bog'liq ravishda o'zgarishini ko'rsatadi. Elastik holatdan farqli ravishda, bu yerda to'lqin soni murakkab kattalik bo'lib, uning haqiqiy qismi faza tezligini, mavhum qismi esa amplituda so'nishini belgilaydi.

Chegaraviy elementlar usuli (CHEU) birinchi bobning asosiy hisoblash vositasi sifatida tanlangan. Ushbu usulda sohaning butun hajmi emas, balki faqat chegarasi diskretlashtiriladi. Shu sababli yarim fazo va cheksiz sohalar uchun sun'iy chegaralarsiz modellashtirish imkoniyati yuzaga keladi.

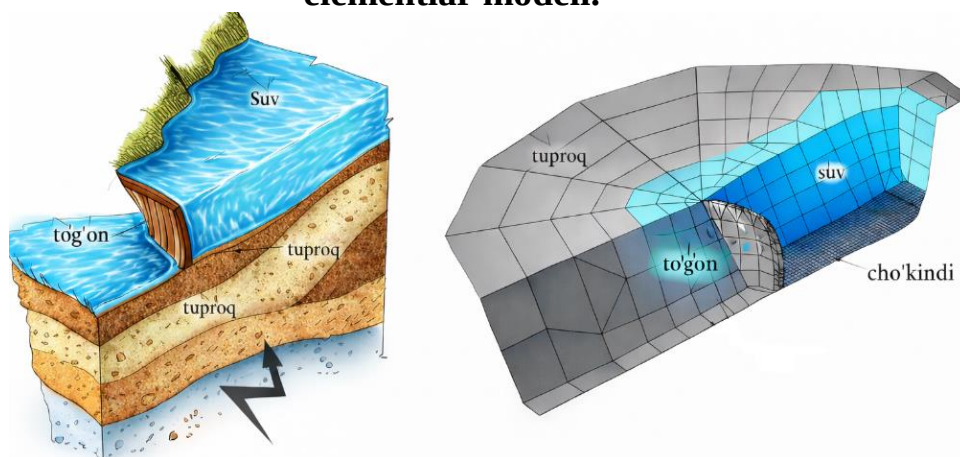
Ta'rif 2. Chegaraviy elementlar usuli — bu chegaradagi o'zgaruvchilar va ularning hosilalarini fundamental yechimlar yordamida integral tenglama ko'rinishida bog'lovchi sonli usuldir. Elastodinamik holatda uning asosiy formulasi quyidagicha yoziladi:

$$c_{ij} u_j(\xi) + \int_{\Gamma} T_{ij}^*(x, \xi) u_j(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(x, \xi) t_j(x) d\Gamma. \quad (1.7)$$

Bu yerda U_{ij}^* va T_{ij}^* fundamental yechimlar, u_j siljishlar, t_j esa kuchlanishlarning chegaraviy qiymatlaridir. Dissertatsiyada aynan shu yondashuv keyinchalik qoziq-tuproq tizimlari, to'g'on-suv-cho'kindi sistemasi va yarim fazoli sirt to'lqinlarini tadqiq etishda qo'llanilgan.



2-rasm. Integrallashgan qoziq–tuproq tizimi va unga mos chegaraviy elementlar modeli.



3-rasm. To'g'on–tuproq–suv–cho'kindi bog'langan tizimi va unga mos chegaraviy elementlar modeli.

Birinchi bobda, g'ovak-elastik muhitlar uchun fizik-matematik model ishlab chiqildi, boshqaruv tenglamalari tizimlashtirildi, garmonik holatdagi to'liqlar ajratildi hamda CHEUning nazariy asosi yaratildi. Dissertatsiyaning keyingi boblari aynan shu nazariy tayanchga asoslanadi. Elastik, skalyar va g'ovak-elastik muhitlar uchun tenglamalar o'zaro bog'langan yagona mantiqiy zanjirda bayon qilinib, yarim fazoli muhitlar uchun integral yondashuvning ustunligi ko'rsatilgan.

Dissertatsiyaning **“G'ovak-elastik muhitda jismlarning o'zaro ta'sir muammolar”** deb nomlangan ikkinchi bobida g'ovak-elastik muhitdagi o'zaro ta'sir jarayonlari xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasi yordamida ifodalangan. Bobning muhim nazariy natijalaridan biri sifatida Biot tipidagi boshlang'ich-chegaraviy masala uchun yechimning mavjudligi va yagonaligi asoslangan. Reley to'liqlari bilan inshootlar, jumladan qoziqli poydevorlar, to'g'onlar va tunnellar o'rtasidagi o'zaro ta'sirni tavsiflovchi fizik model qurildi hamda jism sirtidagi kuchlanish–siljish uzluksizligi shartlari CHEU formulalari asosida yechildi. Qoziq guruhlarida to'liq energiyasining qayta taqsimlanishi g'ovak muhit uchun matematik modellashtirildi va ushbu hodisaning inshootlar dinamik barqarorligiga ta'siri baholandi. Yaratilgan modellar asosida dispersiya egri chiziqlari, amplituda kamayishi va to'liq maydoni taqsimotini aks ettiruvchi kompyuter dasturi ishlab chiqildi, olingan natijalar mavjud nazariy va eksperimental ma'lumotlar bilan taqqoslash orqali verifikatsiya qilindi.

Teorema 1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ yetarlicha silliq chegarali soha, $T > 0$ bo'lsin. Quyidagi Biot tipidagi boshlang'ich-chegaraviy masalani qaraymiz:

$$\begin{cases} \rho_s u_{tt} - \nabla \cdot (2\mu \varepsilon(u) + \lambda(\nabla \cdot u)I - \alpha p I) = f(x, t), \\ mp_{tt} + bp_t + \alpha \nabla \cdot u_t - \kappa \Delta p = g(x, t), \end{cases} \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = v^0(x), \quad p(x, 0) = p^0(x), \quad p_t(x, 0) = w^0(x), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad p|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Agar $\rho_s > 0, \mu > 0, \lambda + \frac{2}{n}\mu > 0, m > 0, b \geq 0, \kappa > 0$ va boshlang'ich ma'lumotlar hamda (2.2) ning o'ng tomonlari

$$\begin{aligned} u^0 \in H_0^1(\Omega)^n, \quad v^0 \in L^2(\Omega)^n, \quad p^0 \in H_0^1(\Omega), \quad w^0 \in L^2(\Omega), \\ f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^n), \quad g \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \end{aligned}$$

bo'lsa, u holda ushbu masalaning yechimi mavjud va yagonadir:

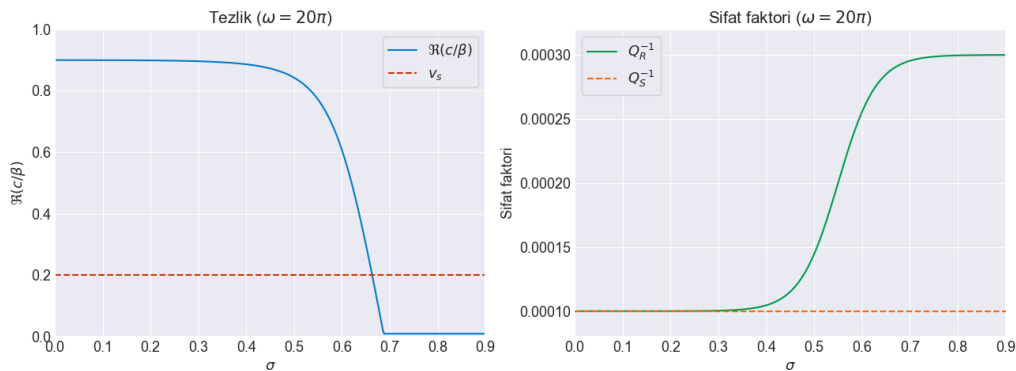
$$\begin{aligned} u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)^n) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)^n), \\ p \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Agar ma'lumotlar yetarlicha silliq bo'lsa, yechim klassik bo'ladi.

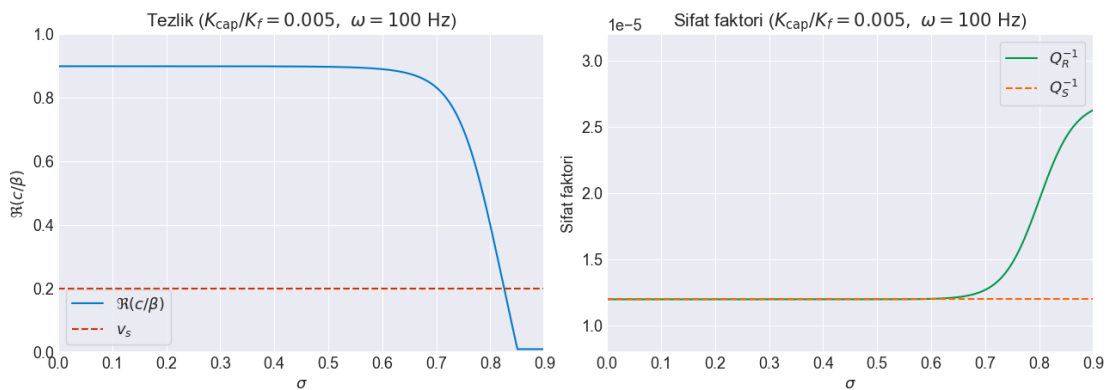
Bobning navbatdagi qismida qisman to'yingan g'ovak-elastik muhitdagi Reley to'liqlari o'rganilgan. Dissertatsiyada qisman to'yinmaganlik, kapillyar bosim, suyuqlik yopishqoqligi va muhit anelastikligining Reley to'liqini tezligi va sifat faktoriga ta'siri maxsus o'lchamsiz xarakteristikalar orqali tahlil qilingan:

$$\Re(c/\beta), \quad v_s = \sqrt{\Re(\beta^2)}, \quad Q^{-1}, \quad Q_s^{-1}. \quad (2.3)$$

Bu kattaliklar murakkab tezlik c ning haqiqiy va mavhum qismlari orqali Reley to'liqini faza tezligi, amplituda kamayishi va energiya yo'qotilishini tavsiflaydi. Sonli tajribalar shuni ko'rsatdiki, to'yinish darajasi oshishi bilan ayrim chastota diapazonlarida Reley to'liqini tezligi keskin o'zgaradi, sifat faktori esa notekis tarzda ortadi yoki kamayadi.



4-rasm. Tezlikning o'zgarishi $\Re(c/\beta)$ va $v_s = \sqrt{\Re(\beta^2)}$, shuningdek sifat faktorining (Q^{-1} va Q_s^{-1}) to'yinish darajasi σ va chastota ω ga bog'liqligi.



5-rasm. To‘yinish σ va kapillyar bosim (K_{cap} / K_l) o‘zgarganda Reley to‘lqini tezligi hamda sifat faktorining o‘zgarishi.

Olingan natijalar Reley to‘lqinlari tezligi faqat qattiq jism parametrlari bilan emas, balki qisman to‘yinmaganlik, kapillyar ta’sir va fazalararo dissipatsiya bilan ham boshqarilishini ko‘rsatdi. Demak, geofizik monitoringda sirt to‘lqinlaridan foydalanganda muhitning to‘yinganlik darajasi va g‘ovak suyuqlik yopishqoqligi kabi omillarni hisobga olish zarur.

Ikkinchi bobda g‘ovak-elastik yarim fazoga botirilgan qoziqli poydevorlarning dinamik tebranishi CHEU yordamida modellashdirilgan. Bu yerda qoziq va muhit interfeysida muvozanat va moslik shartlari asosiy rol o‘ynaydi.

Ta’rif 3. Qoziq va muhit interfeysida muvozanat sharti shuni anglatadiki, elastik qoziq bilan g‘ovak-elastik muhit tutashgan sirtida har ikki muhitning kuchlanish komponentalari Nyutonning uchinchi qonuniga ko‘ra muvozanatda bo‘ladi:

$$\sigma^{(p)} \cdot n = \sigma^{(s)} \cdot n. \quad (2.4)$$

Mazkur shart qoziq–tuproq kontaktida dinamik yuklanishlarning uzatilishi va qaytishi mexanizmini tavsiflaydi. To‘liq bog‘langan holatda muvozanat va moslik munosabatlari quyidagi ko‘rinishda yozilgan:

$$\tau_n + t_n^{(p)} = 0, \quad \tau_t + t_t^{(p)} = 0, \quad (2.5)$$

$$u_n = u_n^{(p)} = U_n, \quad u_t = u_t^{(p)}. \quad (2.6)$$

O‘tkazuvchan yoki o‘tkazmaydigan qoziq holatlarida suyuqlikning normal siljishi yoki g‘ovak bosimi uchun turlicha interfeys shartlari qo‘yiladi. Dissertatsiyada aynan shu farqlar qoziq–muhit tizimining dinamik qattiqligiga sezilarli ta’sir ko‘rsatishi ko‘rsatilgan.

2-jadval.

Qoziq–muhit tizimida asosiy parametrlar ta’sirining umumiy tavsifi

Parametr	Kuzatilgan ta’sir	Muhandislik talqini
Chastota ω	Dinamik qattqlik va qarshilik o‘zgaradi, rezonans zonalar paydo bo‘ladi	Inshootlarning xavfli tebranish diapazonlarini aniqlash kerak
G‘ovaklik φ	Gorizontal qattqlik kamayadi, so‘nish ortadi	Yumshoq va g‘ovak tuproqlarda seysmik ta’sir kuchayishi mumkin
Qoziqlar oralig‘i s / d	Guruh effekti va o‘zaro ta’sir kuchi o‘zgaradi	Optimal joylashtirish muhim
Interfeys sharti	Drenajlangan va izolatsiyalangan holatlarda natijalar farqlanadi	Kontakt sharoitini real tanlash zarur

Sonli tajribalarda g'ovak tuproqlarda gorizontallikning pasayishi, vertikal qattqlikning esa deyarli o'zgarmasligi aniqlandi. Qoziqlar guruhi uchun dinamik qarshilik chastotaga, qoziqlar orasidagi masofa va tuproq parametrlariga sezilarli bog'liq bo'lib, rezonans zonalarini asosiy effekt hisoblanadi.

Bu model mavjud tajribaviy va nazariy natijalar bilan solishtirilgan. Taqqoslashlar shuni ko'rsatdiki, CHEU asosida qurilgan model Reley to'lqinining tezligi, amplituda so'nishi, dinamik qattqlik va rezonans zonalarini yetarli aniqlik bilan ifodalaydi.

Dissertatsiyaning **“G'ovak-elastik va qoplamali anizotrop yarim fazalarda hajmiy hamda reley to'lqinlarining tarqalish qonuniyatlari”** deb nomlangan uchinchi bobining dastlabki qismida yarim fazoda P , SV va SH tipdagi hajmiy to'lqinlarning tarqalishi va aks etishi qaralgan. Yuzaning erkin shartlari, fazalararo bog'lanish va g'ovak-elastik muhitning ikki fazali tabiati hisobga olinib, aks etish koeffitsiyentlari va kritik burchaklar aniqlashtirilgan.

Mazkur tahlil shuni ko'rsatadiki, yarim fazoning sirt shartlari va ichki parametrlari nafaqat Reley to'lqini yuzaga kelishiga, balki kiruvchi hajmiy to'lqinlarning qayta taqsimlanishi va energiya almashinishiga ham kuchli ta'sir ko'rsatadi. Shu sababli uchinchi bobdagi natijalar seysmik to'lqinlarning sirt yaqinida qanday o'zgarishini tushuntirish uchun muhimdir.

Dissertatsiyaning eng muhim natijalaridan biri Biot tipidagi izotrop g'ovak-elastik yarim fazoda Reley to'lqinining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremaning isbotlanishidir. Potensiallar usuli asosida qattiq va suyuqlik fazalarining maydonlari uchta qism-to'lqin superpozitsiyasi ko'rinishida izlanadi va erkin sirt uchun drenajlangan shartlar qo'llanadi:

$$K(c)A = 0. \quad (3.1)$$

Bu yerda A — amplitudalar vektori, $K(c)$ esa tezlikka bog'liq koeffitsiyentlar matritsasi. Trivial bo'lmagan yechim mavjud bo'lishi uchun sekulyar tenglama

$$F(c) = \det K(c) = 0 \quad (3.2)$$

hosil qilinadi.

Reley tipidagi sirt rejim uchun potensiallar garmonik ko'rinishda olinadi:

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{m=1}^2 A_m e^{b_m z} e^{i(kx - \omega t)}, & \chi &= \sum_{m=1}^2 \alpha_m A_m e^{b_m z} e^{i(kx - \omega t)}, \\ \psi &= B e^{b_3 z} e^{i(kx - \omega t)}, & \eta &= \beta B e^{b_3 z} e^{i(kx - \omega t)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sirt shartlari va 3 ta gomogen tenglama: Erkin va drenajlangan sirt uchun quyidagi 3 ta chegaraviy shart qabul qilinadi:

$$\sigma_{zz}(x, 0, t) = 0, \quad \sigma_{xz}(x, 0, t) = 0, \quad p(x, 0, t) = 0. \quad (3.4)$$

Amplitudalarga nisbatan quyidagi uchta gomogen algebraik tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} c_{11}A_1 + c_{12}A_2 + c_{13}B = 0, \\ c_{21}A_1 + c_{22}A_2 + c_{23}B = 0, \\ c_{31}A_1 + c_{32}A_2 + c_{33}B = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Bu yerda c_{ij} ko'effitsiyentlar Biot modullari, zichlik ko'effitsiyentlari, to'liq soni k , chastota ω , so'nish ko'effitsiyentlari b_m , shuningdek α_m va β amplituda nisbatlariga bog'liq.

Bu sistemaning trivial bo'lmagan yechimga ega bo'lishi uchun ko'effitsiyentlar matritsasi singulyar bo'lishi zarur va yetarli: $\det \mathbf{C}(c) = 0$.

Qulaylik uchun $F(c) = \det \mathbf{C}(c)$ deb belgilaymiz. U holda drenajlangan erkin sirt uchun Reley to'liqining sekulyar tenglamasi

$$F(c) = 0 \quad (3.6)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Reley to'liqining fazaviy tezligi c_R ushbu tenglamaning ildizi sifatida aniqlanadi: $F(c_R) = 0$.

Teorema 2. Biot tipidagi izotrop g'ovak-elastik yarim fazoda Reley tipidagi sirt to'liqini potentsiallar usuli yordamida (3.3) ko'rinishda qabul qilinsin. Erkin va drenajlangan sirt uchun chegaraviy shartlar

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{xz}|_{z=0} = 0, \quad p|_{z=0} = 0$$

ko'rinishda berilsin. Agar barcha so'nish parametrlar uchun $\text{Re} b_m > 0$, $m = 1, 2, 3$, ya'ni yechim chuqurlik bo'yicha kamayuvchi bo'lsa, $F(c) = \det \mathbf{C}(c)$ sekulyar funksiya $(0, c_s^*)$ oraliqda uzluksiz bo'lsa va $F(0)F(c_s^*) < 0$ tengsizlik bajarilsa, u holda $F(c_R) = 0$ tenglamaning kamida bitta $c_R \in (0, c_s^*)$ ildizi mavjud bo'ladi. Bu ildiz Biot tipidagi g'ovak-elastik yarim fazoda drenajlangan erkin sirt bo'ylab tarqaluvchi Reley to'liqining fazaviy tezligini aniqlaydi.

Agar qo'shimcha ravishda $F'(c) < 0$, $c \in (0, c_s^*)$ shart bajarilsa, u holda $F(c) = 0$ tenglamaning ildizi yagona bo'ladi.

Barcha maydonlar bitta erkin amplituda orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$u = A_1 u(z) e^{i(kx - \omega t)}, \quad w = A_1 w(z) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (3.7)$$

$$U = A_1 U(z) e^{i(kx - \omega t)}, \quad W = A_1 W(z) e^{i(kx - \omega t)}. \quad (3.8)$$

Bu ifodalar Reley to'liqini qattiq jism va suyuqlik tebranishlarining bog'langan yig'indisi ekanini ko'rsatadi. Unda ikki bo'ylama va bitta siljishli qism-to'liq ishtirok etadi. Shuning uchun g'ovaklik, to'yinganlik, Biot modullari, effektiv zichliklar va yopishqoq bog'lanish b qiymati Reley to'liqini tezligiga va so'nishiga bevosita ta'sir qiladi.

Uchinchi bobning yakuniy qismida gradient piezoelektrik qatlam bilan qoplangan anizotrop elastik yarim fazoda Reley to'liqlarining tarqalishi o'rganilgan. Qoplama va asosiy qatlam noideal interfeys bilan ajratilgan bo'lib, mexanik moslashuvchanlik va dielektrik o'tkazuvchanlik parametrlarining ta'siri holat-fazo usuli asosida tahlil qilingan.

Asosiy tenglamalar quyidagicha yoziladi:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i, \quad D_{i,i} = 0, \quad (3.9)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l} + e_{kij} \phi_{,k}, \quad D_i = e_{ikl} u_{k,l} - \varepsilon_{ik} \phi_{,k}. \quad (3.10)$$

To'liqin harakati uchun yechim

$$\{u, \phi\} = \{\hat{u}(z), \hat{\phi}(z)\} e^{ik(x-vt)} u, \quad (3.11)$$

ko‘rinishda izlanadi. Holat vektori $\eta(z) = [u_x, u_z, \phi, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, D_z]^T$ deb olinib, boshqaruv tenglamalari birinchi tartibli matritsaviy differensial tenglamaga keltiriladi:

$$\frac{d\eta(z)}{dz} = A(z)\eta(z). \quad (3.12)$$

Gradatsiyalangan qatlam uchun uzatish matritsasi to‘g‘ridan-to‘g‘ri hisoblanishi qiyin bo‘lgani sababli Magnus yoyilmasi va sakkizinchi tartibli diagonal Padé yaqinlashuvi qo‘llanilgan. Bu yondashuv qatlam xossalari chuqurlik bo‘yicha uzluksiz o‘zgaradigan holatlarni yuqori aniqlik bilan hisoblash imkonini beradi.

Noideal interfeys modelida siljish va potensialdagi sakrashlar interfeys tortishi hamda normal siljish bilan chiziqli bog‘langan. Mexanik moslashuvchanlik R_m va dielektrik parametr R_d yoki $\kappa\gamma$ interfeys xossalarini boshqaruvchi asosiy kattaliklar sifatida tanlangan. Material parametrlarining gradatsiyasi quyidagi umumiy qonuniyat bilan tavsiflangan:

$$P(z) = P^{(b)} + [P^{(t)} - P^{(b)}] f(z/H). \quad (3.13)$$

3-jadval.

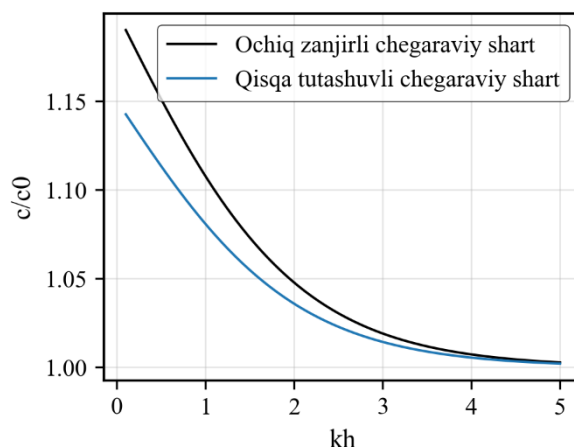
Asosiy qatlam (izotrop elastik yarim fazo) konstantalari

λ , GPa	μ , GPa	ρ_s , kg/m^3
78.5	16.1	2200

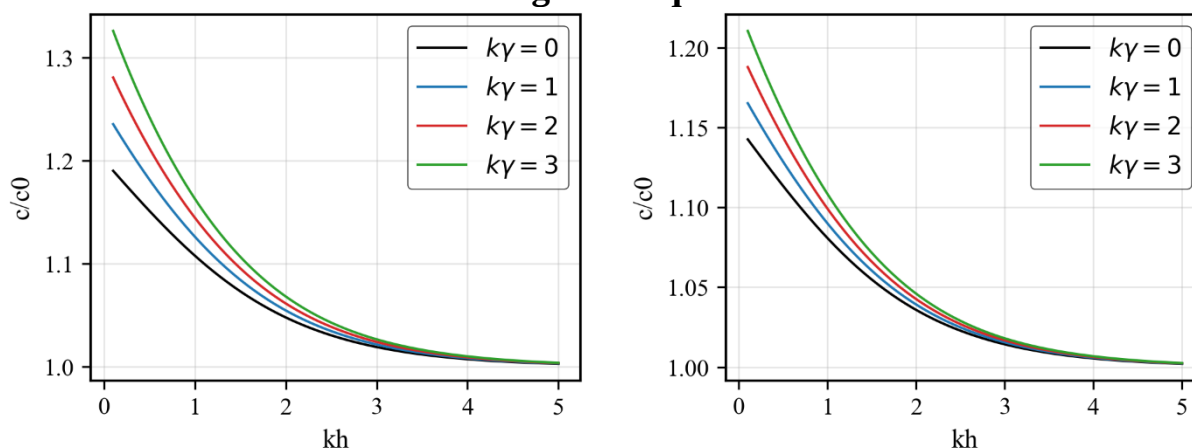
4-jadval.

Jismning qoplama qatlami pastki qismidagi ($z = H$) standart konstantalari

Elastik c_{ij} (GPa)	Piezoelektrik e_{ij} (C / m ²)	Dielektrik ϵ_{ij} (nF / m)	Zichlik ρ_c (kg / m ³)
$c_{11} = 151$	$e_{31} = -5.1$	$\epsilon_{11} = 15$	7,500
$c_{12} = 98$	$e_{33} = 27$	$\epsilon_{33} = 13.27$	
$c_{13} = 96$	$e_{15} = 17$		
$c_{33} = 124$			
$c_{44} = 23$			

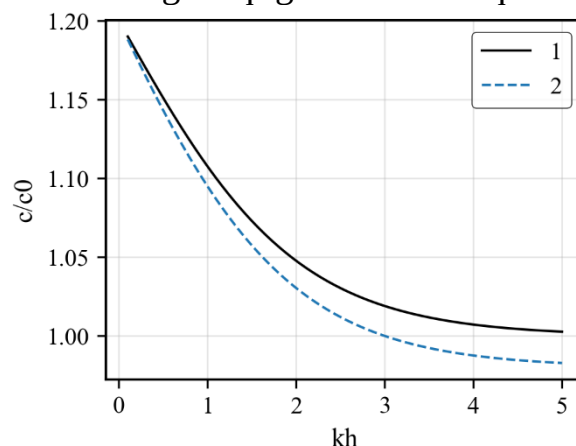


6-rasm. Ideal interfeysga ega bir jinsli qoplama qatlam uchun dispersiya egri chiziqlari.



7-rasm. Dielektrik jihatdan yuqori o'tkazuvchi interfeysda interfeys parametri $k\gamma$ ning sirt to'liqini tezligiga ta'siri: (a) ochiq zanjir; (b) qisqa tutashuv.

Ushbu ish natijalari va elektr jihatdan ochiq zanjirli chegaraviy shartlar ostida taqdim etilgan natijalar o'rtasidagi bevosita taqqoslashni ko'rsatadi. Ikkala yechim ham tekshirilgan chastota oralig'i bo'ylab juda yaxshi moslikni namoyon etadi. Yuqori chastotalarda kuzatiladigan kichik tafovutlar (5% chegarasida) sonli amalga oshirishdagi farqlar bilan izohlanishi mumkin. Umuman olganda, ushbu etalon taqqoslash taklif etilgan modelning aniqligi va sonli barqarorligini tasdiqlaydi.



8-rasm. Olingan natijaning mavjud ish natijasi bilan taqqoslanishi

Mukammal yopishtirilgan interfeys orqali tutashtirilgan bir jinsli qoplama qatlamga ega elastik yarim fazo uchun, ochiq zanjirli chegaraviy shartlardagi sirt to'liqini faza tezligining taqqoslanishi. 1-egri chiziq ushbu ish natijalarini, 2-egri chiziq esa Salah-Njeh-Ghozlen⁵ ishlaridagi etalon yechimni ifodalaydi.

Sonli tahlillar shuni ko'rsatadiki, mexanik moslashuvchanlik R_m ortishi bilan Reley to'liqini tezligi kamayadi. Dielektrik parametr R_d yoki $k\gamma$ ning ta'siri esa interfeys turiga va sirtning elektr chegaraviy shartiga bog'liq. Ayrim holatlarda sirtning elektr jihatdan qisqa tutashtirilishi interfeys nuqsonlarining mexanik ta'sirini qisman yopilishi mumkin.

⁵ I. Ben Salah , A. Njeh , M.H. Ben Ghozlen , A theoretical study of the propagation of Rayleigh waves in a functionally graded piezoelectric material, Ultrasonics 52 (2) (2012) 306–314 .

Taklif etilgan usul etalon natijalar bilan solishtirilganda tekshirilgan chastota diapazonida yuqori aniqlikni namoyish qildi. Bu esa gradatsiyalangan piezoelektrik qatlamlar va noideal interfeysli kompozitlarda sirt akustik to'liqlari dispersiyasini boshqarish uchun dissertatsiyada ishlab chiqilgan matematik model va sonli sxemaning samaradorligini tasdiqlaydi.

Ushbu ishda g'ovak-elastik muhitda Reley to'liqlarini tadqiq etish uchun C# dasturlash tilida modulli dasturiy ta'minot ishlab chiqildi. Dastur tarkibida material parametrlarini kiritish, to'liq xossalari tahlil qilish, to'liq turlarini ajratish, CHEU asosida diskret modelni shakllantirish va algebraik sistemani yechish, shuningdek Reley to'liqiga oid tezlik, amplituda va boshqa xarakteristikalarini aniqlash modullari mujassamlashtirilgan. Dasturiy majmua hisoblash natijalarini jadval, sonli qiymatlar va grafiklar ko'rinishida taqdim etib, parametrlarning to'liq jarayonlariga ta'sirini qiyosiy tahlil qilish imkonini beradi.

XULOSA

Ushbu dissertatsiya ishida suvga to'yingan g'ovak-elastik yarim fazoda Reley to'liqlarining tarqalishi, hajmiy to'liqlarning erkin sirtga urilgandagi aks etish qonuniyatlari, shuningdek noideal interfeysli gradatsiyalangan piezoelektrik qoplama qatlama ega anizotrop yarim fazoda sirt to'liqlari dispersiyasi Biotning ikki fazali muhit nazariyasi, sirt to'liqlari nazariyasi hamda chegaraviy elementlar usuli asosida kompleks tarzda tadqiq qilindi. Tadqiqot davomida analitik, integral va sonli yondashuvlar o'zaro uyg'unlashtirilib, to'liq jarayonlarining asosiy fizik-matematik xususiyatlari ochib berildi. Olingan natijalar quyidagicha umumlashtiriladi:

1. Biotning ikki fazali muhit nazariyasi asosida suvga to'yingan g'ovak-elastik yarim fazoning fizik-matematik modeli ishlab chiqildi va uning mexanik, gidravlik hamda dissipativ parametrlar bilan bog'liq asosiy tenglamalari shakllantirildi.

2. G'ovak-elastik muhitda P, SV va SH tipdagi hajmiy to'liqlarning tarqalishi, erkin sirt va chegaraviy sohalarida aks etishi, shuningdek to'liq turlari orasidagi almashinish mexanizmlari matematik jihatdan asoslandi.

3. G'ovak-elastik yarim fazoda Reley to'liqlari uchun potentsiallar usuliga asoslangan matematik model qurildi, xarakteristik va sekulyar tenglamalar hosil qilindi hamda dispersiya va amplituda so'nishi qonuniyatlari aniqlashtirildi.

4. G'ovak-elastik yarim fazoli muhit uchun garmonik fundamental yechimlar va chegaraviy integral tenglamalar sistemasi qurilib, ularni chegaraviy elementlar usuli asosida sonli yechish algoritmi ishlab chiqildi.

5. Noideal interfeysli gradatsiyalangan piezoelektrik qoplamali anizotrop yarim fazoda Reley to'liqlarining tarqalish modeli ishlab chiqildi, interfeys noidealligi, gradient profil, elektr chegaraviy shartlar va material parametrlarining to'liq xarakteristikalariga ta'siri sonli tajribalar asosida baholandi.

Xulosa qilib aytganda, dissertatsiyada g'ovak-elastik yarim fazoda hajmiy va sirt to'liqlari tarqalishini tavsiflovchi analitik, integral va sonli yondashuvlar yagona ilmiy konsepsiya doirasida birlashtirildi. Natijada Reley to'liqlarining dispersiyasi, so'nishi, energiya dissipatsiyasi, interfeys ta'siri va inshootlar bilan o'zaro ta'siri

chuqur tahlil qilinib, muhandislik seysmikasi, geofizika va sirt akustik qurilmalar nazariyasi uchun muhim ilmiy hamda amaliy natijalar olindi.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ PhD
ПРИ ТАШКЕНТСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ ТРАНСПОРТНОМ
УНИВЕРСИТЕТЕ, № PhD. 10/2025.27.12. FM/T.01.08**

КАРШИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТАНОВ МУХАММАД ЧАРШАМИЕВИЧ

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН РЭЛЕЯ В
ПОРИСТО-УПРУГОЙ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕННОЙ СРЕДЕ**

**05.01.07 – Математическое моделирование. Численные методы и программные
комплексы (физико-математические науки)**

**Автореферат диссертации на соискание учёной степени философского доктора (PhD) по
физико-математическим наукам**

Ташкент – 2026

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей Аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за номером B2025.4.PhD/FM1434.

Диссертация выполнена в Каршинском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (<https://tstu.uz>) и на Информационно-образовательном портале «Ziynet» (www.ziynet.uz).

Научный руководитель: Холмуродов Абдулхамид Эркинович
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: Нормуродов Чори Бегалиевич
доктор физико-математических наук, профессор
Азамов Сирож Собирович
доктор философии (PhD) по физико-математическим наукам, доцент

Ведущая организация: Самаркандский государственный университет

Защита диссертации состоится «29» 10 2026 года в 15:00 часов на заседании Научного совета PhD.10/2025.27.12.FM/T.01.08 при Ташкентском государственном транспортном университете. (Адрес: 100167, г. Ташкент, Мирабадский район, улица Темирийулчилар, дом 1, комната _____. Тел.: (+99871) 299-00-01, факс: (+99871) 293 57 54, e-mail: rektorat@tstu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Ташкентского государственного транспортного университета (регистрационный номер 390). (Адрес: 100167, г. Ташкент, ул. Темирийулчилар, д. 1. Тел.: (+998 71) 299 05 66).

Автореферат диссертации разослан «16» 10 2026 года.
(Протокол реестра рассылки № 6 от «22» 10 2026 года).



Х.М.Шадиметов
Председатель научного совета по
присуждению учёных степеней, д.ф.-м.н.,
профессор

Ф.А.Нуралиев
Ученый секретарь научного совета по
присуждению учёных степеней, д.ф.-м.н.

И.Мирзаев
Председатель научного семинара при
Учёном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотации диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и необходимость темы диссертации. В результате многочисленных научно-практических исследований, проводимых в мире, изучение волновых процессов в сложных многофазных средах в современной геофизике, геотехнике и инженерной сейсмологии значительно расширяется. В мировом масштабе волновое поле, возникающее вследствие землетрясений, техногенных колебаний, взрывов и других динамических воздействий, оказывает непосредственное влияние на устойчивость, сейсмическую безопасность и эксплуатационную надежность сооружений. Новые подходы в области геотехники требуют глубокого анализа динамических свойств сред при повышении сейсмической безопасности крупных сооружений. Особенно в пороупругих средах, таких как водонасыщенные грунты, осадочные слои, горные породы и искусственные композиты, вследствие взаимодействия твердого скелета и поровой жидкости распространение, затухание, отражение волн и обмен энергией приобретают более сложное значение. В этом отношении полное изучение и использование волновых процессов, возникающих в таких средах, на основе достоверных математических моделей имеет важное значение.

В мире проводятся широкомасштабные научные исследования, посвященные моделированию и приложениям волн Рэлея среди волн, распространяющихся в пороупругих полупространственных средах. В этом направлении разрабатываются модели путем изучения скорости распространения, дисперсии, уменьшения амплитуды и характеристик затухания волн Рэлея, являющихся одними из наиболее сильно воздействующих на сооружения сейсмических факторов среди поверхностных волн, распространяющихся вдоль земной поверхности, вследствие большой амплитуды вблизи поверхности, а также с учетом пористости среды, упругих параметров, вязкости жидкости, степени насыщенности и свойств интерфейса. Вместе с тем особое внимание уделяется анализу закономерностей исследования волн Рэлея в пороупругом полупространстве.

В нашей республике осуществляются широкомасштабные меры по математическому моделированию сложных прикладных задач в областях математической физики, инженерии, гидромеханики, геофизики и геологии, имеющих научное и практическое применение фундаментальных наук, а также по разработке их аналитических и численных решений, и достигаются определенные результаты. В 2020-2023 годах в Республике Узбекистан поставлены важные задачи по повышению качества образования в области математических наук, повышению эффективности и практической значимости научных исследований, включая «Математический и функциональный анализ, алгебру, теорию дифференциальных уравнений, теорию вероятностей и математическую статистику, математическую физику, теорию функций комплексной переменной, вычислительную математику и дискретную математику»⁶ При реализации данных задач важное значение приобретают

⁶ Президента Республики Узбекистан № ПП-4708 от 7 мая 2020 года “О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики” (Источник: <https://lex.uz/docs/-4807552>).
24

построение математической модели распространения волн Рэлея в пороупругом полупространстве, анализ связанных волновых уравнений в двухфазной среде на основе теории Биота, определение закономерностей скорости, дисперсии и затухания поверхностных волн, а также решение прикладных задач на основе современных численных методов и алгоритмических подходов, их анализ и оптимизация с помощью компьютерных технологий.

Указы Президента Республики Узбекистан № ПФ-4947 от 7 февраля 2017 г. «О стратегии действий по развитию Республики Узбекистан в экономике», № ПФ-60 от 28 января 2022 г. «О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы», № ПП-2789 от 17 февраля 2017 г. «О мерах по совершенствованию организации, управления и финансирования деятельности Академии наук, научно-исследовательской работы в стране», № 20 апреля 2017 г., № ПП-2909 «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», № ПП-3682 «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы реализации инновационных идей, технологий и проектов». Данная диссертационная работа в определенной степени способствует выполнению задач, поставленных в Постановлении Правительства Республики Узбекистан № ПП-4708 от 7 мая 2020 г. «О мерах по совершенствованию системы реализации инновационных идей, технологий и проектов». «Качество образования и развитие научных исследований в области математики», а также другие нормативно-правовые документы, касающиеся этой деятельности.

Актуальность исследования для приоритетных направлений развития науки и техники Республики. Данное исследование выполнено в рамках IV приоритетного направления развития науки и технологий республики — «Математика, механика, информатика и математическое моделирование».

Степень изученности проблемы. Как известно, что геотехника и геофизика сегодня занимают свое место практически во всех областях науки и техники. В формирование данной области, ставшей неотъемлемой частью нашей жизни, внесли вклад ряд выдающихся ученых. Задача моделирования распространения волн в пороупругих средах с середины XX века стала одним из важных направлений научных исследований. Фундаментальные теоретические основы данной области были разработаны М.А. Биотом, который предложил динамические уравнения для двухфазных сред — пористых систем, состоящих из твердого тела и насыщенных жидкостью. В дальнейшем на основе теории Биота были проведены многочисленные исследования по распространению продольных, поперечных и рэлеевских волн в водонасыщенных пористых средах, их дисперсии и затуханию энергии. В классической эластодинамике теория поверхностных волн в полупространстве была развита Л. Рэлеем, А. Лавом и другими учеными. В последние годы наряду с распространением волн в пороупругих полупространствах широко изучались также их отражение, гармонические фундаментальные решения и численное моделирование на основе интегральных уравнений. В последующие десятилетия на основе модели Биота такие ученые, как Chenevert (1989), Carcione (2007), de la Puente и др. (2008), Gurevich (2010), исследовали сейсмический анализ водонасыщенных слоев. Кроме того, к классическим ученым в области рэлеевских волн и теории

упругих волн в полупространстве относятся: Love A.E. (Великобритания), Rayleigh Lord (John William Strutt), Guz A.N. (Украина). Современными исследователями в области рэлеевских волн в пороупругих средах являются Carcione S. (Италия), Norris D. (США), Gilbert K. (США), Booker J.F. (США).

В Узбекистане также сформировалась значимая научная школа по данному направлению. В частности, академиком Х.А. Рахматулиным были заложены основы механики многофазных сред и теории движения смесей, а его труды служат теоретической базой для моделирования взаимосвязанного движения твёрдой и жидкой фаз в пористых средах. Кроме того, работы Ё. Соатова, Т. Артикова, Ш. Наримова и других учёных, посвящённые распространению волн, напряжённо-деформированному состоянию и краевым задачам в упругих, вязкоупругих и пористых средах, непосредственно связаны с тематикой настоящего исследования. Полученные в этих работах результаты являются важным теоретическим источником при анализе двухфазных моделей типа Био, а также дисперсии и затухания объёмных и поверхностных волн. Наряду с этим, Х.Х. Имомназаров, А.Э. Холмуродов, А.М. Шукуров, К.С. Гозиев, А.Т. Омонов, К.С. Лесов, Х.Х. Умаров, Г. Жураев и другие учёные исследовали волновые процессы в упругих, акустических и пористых средах, прямые и обратные задачи, волны Рэлея, SH-волны⁷, волны Лява⁸ и волны Стоунли⁹, а также нестационарные динамические задачи в многослойных средах и областях со сложной геометрией. В существующих исследованиях распространение поверхностных волн в упругих средах, отдельные особенности волн Рэлея в пороупругом полупространстве, а также волновые процессы в покрытых анизотропных системах изучались преимущественно отдельно. Однако вопросы изучения процессов распространения и отражения волн в водонасыщенном пороупругом полупространстве в неразрывной связи с теорией волн Рэлея, а также анализа дисперсионных и затухающих свойств поверхностных волн рэлеевского типа в анизотропном полупространстве с градиентным пьезоэлектрическим покрывающим слоем и неидеальным интерфейсом на основе единой математической модели недостаточно освещены.

В связи с этим в настоящей диссертации поставлена цель разработки математических моделей распространения волн Рэлея в пороупругих и покрытых анизотропных полупространственных средах, а также комплексного исследования их основных динамических характеристик.

Связь диссертационного исследования с планами научных исследований высшего или научно-исследовательского учреждения, в котором выполнена диссертация. Работа выполнена в соответствии с научной темой Каршинского государственного университета: «Разработка

⁷ SH-волна — сокращение от термина *Shear Horizontal wave*; обозначает поперечную упругую волну, при которой сдвиговая деформация происходит в горизонтальном направлении, а движение частиц перпендикулярно направлению распространения волны.

⁸ Волна Лява — поверхностная волна, распространяющаяся в слоистых упругих средах, при которой движение частиц имеет характер горизонтального сдвига. Такая волна, как правило, возникает под влиянием границы между упругим слоем и полупространством.

⁹ Волна Стоунли — интерфейсная волна, распространяющаяся вдоль границы раздела двух различных упругих или пористо-упругих сред; её амплитуда убывает в обеих средах по мере удаления от границы раздела.

математических моделей и численное исследование процессов аномального переноса веществ и фильтрации жидкостей в неоднородных пористых средах».

Цель исследования. Разработка математической модели распространения волн Рэлея в пороупругом полупространстве.

Задачи исследования:

разработка усовершенствованной математической модели взаимосвязанного движения твёрдой фазы и жидкости в порах в насыщенной жидкостью пороупругой среде на основе двухфазной теории среды Био;

математически обосновать закономерности возникновения, скорости распространения, затухания волн P_1 , P_2 и S в пороупругом полупространстве, а также их отражения от свободной поверхности и граничных областей;

получить убывающие по глубине решения для поверхностных волн рэлеевского типа в пороупругом полупространстве, вывести секулярное уравнение, а также проанализировать их дисперсионные и затухающие свойства;

построить интегральные уравнения и гармонические фундаментальные решения для пороупругого полупространства, разработать алгоритм их численного решения на основе метода граничных элементов;

разработать математическую модель распространения волн Рэлея в анизотропном полупространстве с покрывающим слоем и выполнить её численный анализ.

Объект исследования. Пороупругие полупространства и возникающие в них объёмные и рэлеевские волны, а также поверхностные волновые процессы в анизотропных полупространствах с градиентным пьезоэлектрическим покрывающим слоем и неидеальным интерфейсом.

Предметы исследования. Дифференциальные уравнения биотовского типа, основные уравнения в гармонической постановке, интегральные уравнения и фундаментальные решения, дисперсионные соотношения, а также численные алгоритмы на основе метода граничных элементов, описывающие распространение волн в пороупругих и анизотропных средах с покрывающим слоем.

Методы исследования. В исследовании применены методы гармонического анализа, интегральных уравнений и граничных элементов, а также теоретические и прикладные подходы математического моделирования.

Научная новизна исследования:

в насыщенной жидкостью пороупругой полупространственной среде движение твёрдой фазы и жидкости в порах рассмотрено во взаимосвязанной постановке, при этом математическая модель, основанная на теории Био, усовершенствована с учётом инерционных и упругих эффектов, порового давления, фильтрационного воздействия и межфазного взаимодействия;

математически обоснованы закономерности распространения и отражения волн P_1 , P_2 и S в пороупругой среде;

получены убывающие по глубине решения для поверхностных волн рэлеевского типа в пороупругом полупространстве и выведено секулярное уравнение;

построены гармонические фундаментальные решения и граничные интегральные уравнения для пороупругого полупространства, а также разработан алгоритм их численного решения на основе метода граничных элементов;

выполнено математическое моделирование и численный анализ распространения волн Рэлея в анизотропном полупространстве с покрывающим слоем.

Практические результаты исследования следующие:

разработаны численные алгоритмы, предназначенные для расчета процессов распространения волн Рэлея, объемных волн и их отражения в водонасыщенном пороупругом полупространстве;

сформированы вычислительные схемы и средства графического анализа для определения характеристик поверхностных волн в пороупругих и покрытых анизотропных полупространственных средах. Полученные результаты сопоставлены с результатами существующих исследований.

Достоверность результатов исследований. Достоверность научных результатов, полученных в диссертационной работе, обосновывается тем, что применённые математические модели основаны на теории двухфазной среды Биота, теории упругости и теории поверхностных волн; тем, что заданы граничные условия, соответствующие физическому содержанию задачи; тем, что полученные секулярные уравнения, фундаментальные решения и интегральные уравнения в частных случаях согласуются с классическими результатами; а также устойчивостью численных алгоритмов, разработанных на основе метода граничных элементов, и соответствием полученных результатов существующим теоретическим и численным результатам.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость исследования заключается в том, что в нём углублена теоретическая модель, описывающая распространение волн Рэлея в пороупругих полупространственных средах, процессы, связанные с распространением и отражением объёмных волн, проанализированы с точки зрения общей теории волн, а также предложена расширенная модель распространения волн Рэлея в покрытых анизотропных полупространствах. Эти результаты создают научно-методическую основу для более глубокого понимания волновых процессов в сложных средах, определения их параметрической чувствительности и проведения последующих исследований.

Практическая значимость исследования определяется возможностью применения разработанных моделей и алгоритмов при оценке сейсмической безопасности, анализе динамической устойчивости сооружений в пороупругих средах, совершенствовании расчётных норм, проектировании подземных коммуникаций и фундаментных систем, а также при исследовании покрытых функциональных материалов и акустоэлектронных устройств.

Внедрение результатов исследований. На основе результатов, полученных по распространению волн в пороупругой полупространственной среде:

результаты, связанные с определением дисперсионных свойств распространения волн в пороупругой полупространственной среде, вычислением амплитуд и скоростей при различных упругих параметрах, а также внедрением численного моделирования на основе метода граничных элементов в практику, были использованы в прикладном проекте № ФЗ-2020092877 (справка №10-2403 от 8 мая 2026 года Самаркандского государственного университета). В результате это позволило моделировать распространение волн в пороупругих средах, совершенствовать методы численного решения на основе граничных условий, а также вычислять дисперсионные и амплитудные свойства.

научные результаты, полученные на основе метода граничных элементов, включая вычислительные алгоритмы, связанные с распространением волн Рэлея, их динамическими свойствами, дисперсией и затуханием энергии, были внедрены в работы фундаментально-прикладного проекта № 0251-2021-2024 Сибирского отделения Российской академии наук (подтверждение №15301 от 25 сентября 2025 года). Полученные результаты послужили научной основой для использования при моделировании сейсмических процессов, решении задач математической геофизики и в системах мониторинга.

Апробация результатов исследования. Результаты настоящей диссертации были обсуждены на 9 научно-практических конференциях, в том числе на 4 международных и 5 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации всего опубликовано 20 научных работ. Из них 11 статей опубликованы в научных журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан, 3 — в зарубежных научных журналах, 8 — в республиканских научных журналах. Кроме того, получены авторские свидетельства на 3 специальные программные средства, созданные для ЭВМ.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Общий объём диссертации составляет 115 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, показано соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы. Сформулированы цель и задачи исследования, изложены объект и предмет исследования, раскрыты научная новизна и практические результаты исследования. Также освещены теоретическая и практическая значимость полученных результатов, приведены сведения о внедрении результатов исследования в практику, опубликованных работах и структуре диссертации.

Первая глава диссертационной работы, озаглавленная «**Волновые уравнения в пороупругой среде**», имеет вспомогательно-теоретический характер. В ней изложены основные понятия, физико-математические подходы и методологические

основы, необходимые для последующих глав исследования. Подробно рассмотрены способы численного решения данных моделей на основе метода граничных элементов, теоретические и вычислительные проблемы, возникающие в этом процессе, стратегия дискретизации уравнений, а также вопросы применения данного метода к конкретным моделям. Кроме того, проанализированы граничные условия, задаваемые для различных интерфейсов, и их математическое представление, в результате чего сформированы теоретические основы, необходимые для моделирования волновых процессов, рассматриваемых в последующих главах.

Определение 1. Пористо-упругой средой называется двухфазная среда, имеющая в своей внутренней структуре поры и состоящая из твёрдого тела, а также жидкой или газовой фазы, расположенной в порах. В таких средах макроскопический процесс деформирования протекает при взаимосвязанном взаимодействии упругой реакции твёрдого тела и относительного движения жидкости в порах.

Пористость является одним из основных параметров среды и подразделяется на общую пористость, взаимосвязанную пористость и невязанную пористость. Взаимосвязанные поры обеспечивают движение жидкости, тогда как замкнутые поры в основном оказывают влияние на плотность и упругие свойства. Связь между указанными параметрами выражается следующим образом:

$$\varphi_{\text{total}} = \varphi_{\text{eff}} + \varphi_{\text{no eff}}.$$

Данная формула описывает структурное строение пористой среды. Если поры полностью заполнены жидкостью, такая среда называется насыщенной пористо-упругой средой, а состояние, при котором поры частично заполнены жидкостью и газом, рассматривается как частично насыщенная среда.

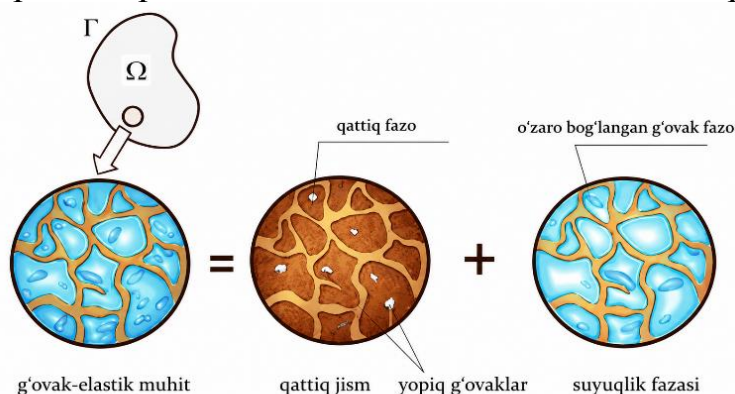


Рис. 1. Пористое тело представляет собой среду, образованную взаимосвязанной структурой твёрдого тела и порового пространства.

Формирование теории пористо-упругой среды восходит к модели консолидации Терцаги и теории двухфазных сред М. А. Биота. Если модель Терцаги описывала одномерный процесс уплотнения, то теория Биота позволила в общем виде выразить динамическое взаимодействие твёрдого тела и поровой жидкости. В диссертации именно линейная двухфазная модель Биота принята в качестве основной базовой теории.

В данной модели смещение твёрдой фазы описывается вектором $u = (u_x, u_y, u_z)$, а смещение жидкой фазы — вектором $U = (U_x, U_y, U_z)$. Кроме

того, в качестве основных величин, определяющих распространение волн, приняты пористость среды φ , вязкость жидкости η , дарсианская проницаемость k , модули Биота Q и R , а также коэффициенты эффективной плотности $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$.

Управляющие уравнения для упругой, скалярной и пористо-упругой сред приведены в сравнительном виде. Такой подход наглядно показывает, какие члены пористо-упругой модели относятся к движению твёрдого тела, а какие — связаны с движением поровой жидкости.

Для изотропной линейно-упругой среды основное уравнение движения записывается в виде

$$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u) + X = \rho \ddot{u} \quad (1.1)$$

где λ и μ — постоянные Ламе, X — вектор объёмных сил, ρ — плотность, а u — вектор смещения. Из данного уравнения выделяются продольные и поперечные волны, скорости которых определяются соответственно соотношениями

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.2)$$

Скалярная среда, в частности вода, описывается следующим волновым уравнением для поля давления:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \ddot{p} = \nabla \cdot X' \quad (1.3)$$

Для пористо-упругой среды связанное движение твёрдой и жидкой фаз приводится к следующей основной системе:

$$\mu \nabla^2 u + \left(\lambda + \mu + \frac{Q^2}{R} \right) \nabla e + Q \nabla \varepsilon + X = \rho_{11} \ddot{u} + \rho_{12} \ddot{U} + b(\dot{u} - \dot{U}), \quad (1.4)$$

$$\nabla(Qe + R\varepsilon) + X' = \rho_{12} \ddot{u} + \rho_{22} \ddot{U} - b(\dot{u} - \dot{U}). \quad (1.5)$$

Здесь $e = \nabla \cdot u$ — объёмная деформация твёрдой фазы, $\varepsilon = \nabla \cdot U$ — объёмное расширение жидкой фазы, а b — постоянная диссипации. Данная связанная система объясняет двухфазную природу продольных и поперечных волн в пористо-упругой среде.

Таблица 1.

Основные уравнения для линейно-упругих и пористо-упругих сред

Тип среды	Основное уравнение	Пояснение
Упругая среда	$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u) + X = \rho \ddot{u}$	Имеются продольные и поперечные волны
Изотропная среда	$\nabla^2 p - (1/c^2) \ddot{p} = \nabla \cdot X'$	Модель для волны давления
Пористо-упругая среда	$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu + Q^2/R) \nabla e + Q \nabla \varepsilon + X = \rho_{11} \ddot{u} + \rho_{12} \ddot{U} + b(\dot{u} - \dot{U})$	Твёрдая и жидкая фазы связаны

Из таблицы видно, что пористо-упругая модель обобщает упругую и скалярную модели. Именно такое обобщение позволяет описывать

чувствительность скорости волн Рэлея к пористости, насыщенности, интерфейсу и вязкости.

В диссертации принята гармоническая временная зависимость $\exp(i\omega t)$ и уравнения приведены к частотной области. Если в упругой среде скорости P и S -волн чётко разделяются, то в пористо-упругой среде возникают два типа продольных волн и одна сдвиговая волна. Для поперечной волны связь между вращениями твёрдой и жидкой фаз, а также скорость распространения выражаются в зависимости от параметров среды следующим образом:

$$\Omega = \Lambda \omega, \quad k_s^2 = \frac{\rho \omega^2}{\mu}. \quad (1.6)$$

Эти выражения показывают, что в пористо-упругой среде вследствие вязкости жидкости и дополнительной инерции скорость сдвиговой волны изменяется в зависимости от частоты. В отличие от упругого случая, здесь волновое число является комплексной величиной, причём его действительная часть определяет фазовую скорость, а мнимая часть — затухание амплитуды.

Метод граничных элементов (МГЭ) выбран в качестве основного вычислительного средства первой главы. В данном методе дискретизируется не весь объём области, а только её граница. Благодаря этому возникает возможность моделирования полупространств и бесконечных областей без введения искусственных границ.

Определение 2. Метод граничных элементов — это численный метод, связывающий граничные переменные и их производные в виде интегрального уравнения с помощью фундаментальных решений. В эластодинамическом случае его основная формула записывается следующим образом:

$$c_{ij} u_j(\xi) + \int_{\Gamma} T_{ij}^*(x, \xi) u_j(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(x, \xi) t_j(x) d\Gamma. \quad (1.7)$$

Здесь U_{ij}^* и T_{ij}^* — фундаментальные решения, u_j — перемещения, а t_j — граничные значения напряжений. В диссертации именно данный подход в дальнейшем применён при исследовании систем «свая–грунт», системы «плотина–вода–осадочный слой», а также поверхностных волн в полупространстве.

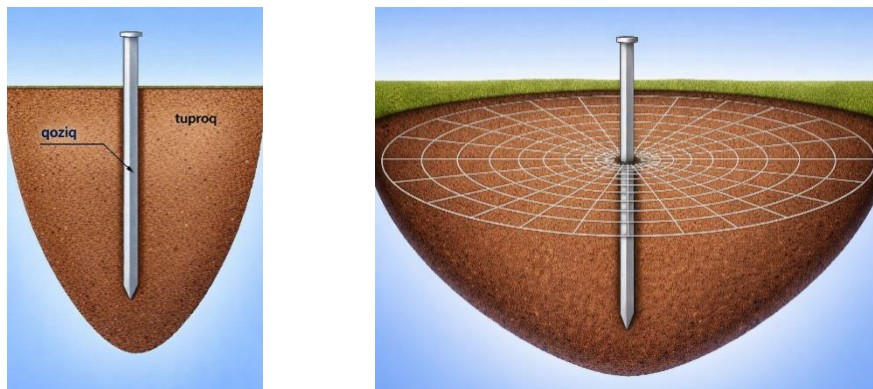


Рис. 2. Интегрированная система взаимодействия сваи и грунта и соответствующая модель на основе метода граничных элементов.

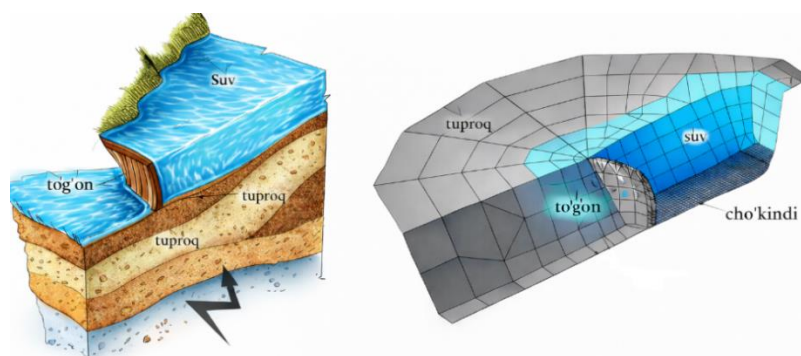


Рис. 3. Связанная система взаимодействия плотины, грунта, воды и донных отложений и соответствующая модель на основе метода граничных элементов.

В первой главе была разработана физико-математическая модель для пористо-упругих сред, систематизирована система управляющих уравнений, выделены волны в гармоническом случае, а также создана теоретическая основа метода граничных элементов. Последующие главы диссертации опираются именно на данный теоретический фундамент. Уравнения для упругих, скалярных и пористо-упругих сред изложены в виде единой логически взаимосвязанной системы, при этом показано преимущество интегрального подхода для полупространственных сред.

Во второй главе диссертации, озаглавленной «Проблемы взаимодействия тел в пористо-упругой среде», процессы взаимодействия в пористо-упругой среде описаны с помощью системы дифференциальных уравнений в частных производных. В качестве одного из важных теоретических результатов главы обоснованы существование и единственность решения начально-краевой задачи типа Биота. Построена физическая модель, описывающая взаимодействие волн Рэлея с сооружениями, в частности со свайными фундаментами, плотинами и тоннелями, а условия непрерывности напряжений и перемещений на поверхности тела решены на основе формул метода граничных элементов. Для пористой среды выполнено математическое моделирование перераспределения волновой энергии в свайных группах и дана оценка влияния данного явления на динамическую устойчивость сооружений. На основе разработанных моделей создана компьютерная программа, отражающая дисперсионные кривые, уменьшение амплитуды и распределение волнового поля, а полученные результаты верифицированы путём сопоставления с существующими теоретическими и экспериментальными данными.

Теорема 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — достаточно гладкая ограниченная область, $T > 0$. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу типа Биота:

$$\begin{cases} \rho_s u_{tt} - \nabla \cdot (2\mu \varepsilon(u) + \lambda(\nabla \cdot u)I - \alpha p I) = f(x, t), \\ m p_{tt} + b p_t + \alpha \nabla \cdot u_t - \kappa \Delta p = g(x, t), \end{cases} \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = v^0(x), \quad p(x, 0) = p^0(x), \quad p_t(x, 0) = w^0(x), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad p|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Если $\rho_s > 0$, $\mu > 0$, $\lambda + \frac{2}{n}\mu > 0$, $m > 0$, $b \geq 0$, $\kappa > 0$ а также начальные данные

и правые части в (2.2) удовлетворяют условиям

$$u^0 \in H_0^1(\Omega)^n, \quad v^0 \in L^2(\Omega)^n, \quad p^0 \in H_0^1(\Omega), \quad w^0 \in L^2(\Omega),$$

$$f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^n), \quad g \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

то данная задача имеет единственное решение:

$$u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)^n) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)^n),$$

$$p \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Если данные являются достаточно гладкими, то решение будет классическим.

В следующей части главы исследованы волны Рэлея в частично насыщенной пористо-упругой среде. В диссертации влияние частичной ненасыщенности, капиллярного давления, вязкости жидкости и анэластичности среды на скорость волны Рэлея и фактор качества проанализировано с помощью специальных безразмерных характеристик:

$$\Re(c/\beta), \quad v_s = \sqrt{\Re(\beta^2)}, \quad Q^{-1}, \quad Q_s^{-1}. \quad (2.3)$$

Эти величины через действительную и мнимую части комплексной скорости ссс характеризуют фазовую скорость волны Рэлея, уменьшение амплитуды и потери энергии. Численные эксперименты показали, что с увеличением степени насыщения в некоторых диапазонах частот скорость волны Рэлея резко изменяется, тогда как фактор качества неравномерно возрастает или уменьшается.

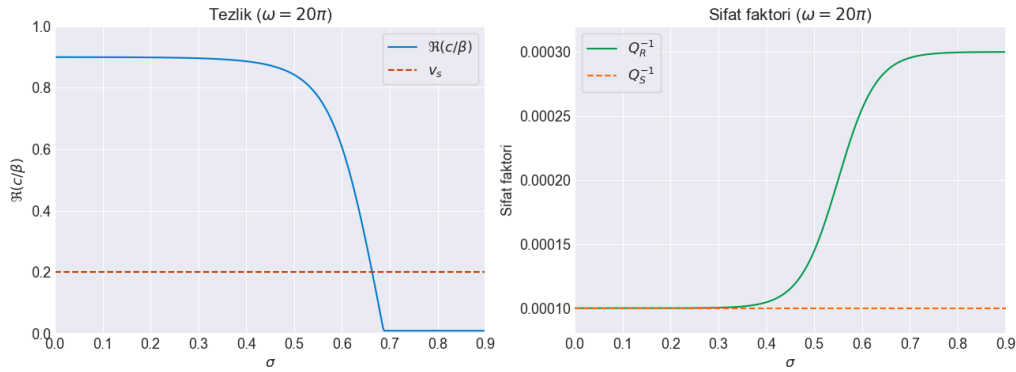


Рис. 4. Зависимость изменения скорости $\Re(c/\beta)$ и $v_s = \sqrt{\Re(\beta^2)}$, а также фактора качества (Q^{-1} и Q_s^{-1}) от степени насыщения σ и частоты ω .

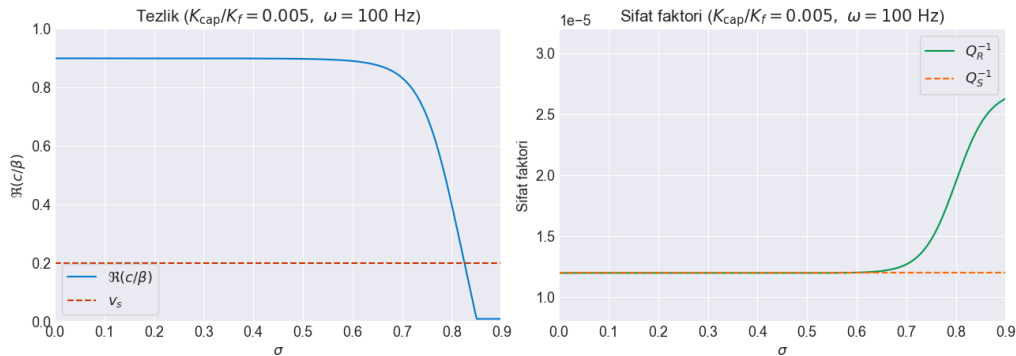


Рис. 5. Изменение скорости волны Рэлея и фактора качества при изменении степени насыщения σ и капиллярного давления (K_{cap}/K_l).

Полученные результаты показали, что скорость волн Рэлея определяется не только параметрами твёрдого тела, но и частичной ненасыщенностью, капиллярным воздействием и межфазной диссипацией. Следовательно, при использовании поверхностных волн в геофизическом мониторинге необходимо учитывать такие факторы, как степень насыщенности среды и вязкость поровой жидкости.

Во второй главе с помощью метода граничных элементов выполнено моделирование динамических колебаний свайных фундаментов, заглублённых в пористо-упругое полупространство. При этом основную роль играют условия равновесия и сопряжения на интерфейсе между свайей и средой.

Определение 3. Условие равновесия на интерфейсе сваи и среды означает, что на поверхности контакта упругой сваи и пористо-упругой среды компоненты напряжений в обеих средах находятся в равновесии согласно третьему закону Ньютона:

$$\sigma^{(p)} \cdot n = \sigma^{(s)} \cdot n. \quad (2.4)$$

Данное условие описывает механизм передачи и отражения динамических нагрузок в контакте «свая–грунт». В случае полного сцепления соотношения равновесия и сопряжения записываются в следующем виде:

$$\tau_n + t_n^{(p)} = 0, \quad \tau_t + t_t^{(p)} = 0, \quad (2.5)$$

$$u_n = u_n^{(p)} = U_n, \quad u_t = u_t^{(p)}. \quad (2.6)$$

В случаях проницаемой или непроницаемой сваи для нормального смещения жидкости или порового давления задаются различные интерфейсные условия. В диссертации показано, что именно эти различия оказывают существенное влияние на динамическую жёсткость системы «свая–среда».

Таблица 2.

Общее описание влияния основных параметров в системе «свая–среда»

Параметр	Наблюдаемое влияние	Инженерная интерпретация
Частота ω	Изменяются динамическая жёсткость и сопротивление, возникают резонансные зоны	Необходимо определять опасные диапазоны колебаний сооружений
Пористость ϕ	Горизонтальная жёсткость уменьшается, затухание возрастает	В мягких и пористых грунтах возможно усиление сейсмического воздействия
Расстояние между сваями s / d	Изменяются групповой эффект и сила взаимного влияния	Важно оптимальное размещение
Условие интерфейса	В дренированных и изолированных случаях результаты различаются	Необходимо реалистично выбирать условия контакта

В численных экспериментах установлено, что в пористых грунтах горизонтальная жёсткость уменьшается, тогда как вертикальная жёсткость почти не изменяется. Для группы свай динамическое сопротивление существенно зависит от частоты, расстояния между сваями и параметров грунта, при этом основным эффектом считаются резонансные зоны.

Данная модель была сопоставлена с имеющимися экспериментальными и теоретическими результатами. Сопоставления показали, что модель, построенная на основе метода граничных элементов, с достаточной точностью описывает скорость волны Рэлея, затухание амплитуды, динамическую жёсткость и резонансные зоны.

В начальной части третьей главы диссертации, озаглавленной «Закономерности распространения объёмных и рэлеевских волн в пористо-упругих и покрытых анизотропных полупространствах», рассмотрены распространение и отражение объёмных волн типов P , SV и SH в полупространстве. С учётом свободных условий на поверхности, межфазного взаимодействия и двухфазной природы пористо-упругой среды определены коэффициенты отражения и критические углы.

Проведённый анализ показывает, что поверхностные условия и внутренние параметры полупространства оказывают сильное влияние не только на возникновение волны Рэлея, но и на перераспределение падающих объёмных волн и обмен энергией. Поэтому результаты, полученные в третьей главе, имеют важное значение для объяснения того, каким образом сейсмические волны изменяются вблизи поверхности.

Одним из важнейших результатов диссертации является доказательство теоремы о существовании и единственности волны Рэлея в изотропном пористо-упругом полупространстве типа Биота. На основе метода потенциалов поля твёрдой и жидкой фаз ищутся в виде суперпозиции трёх частичных волн, а для свободной поверхности задаются дренированные условия:

$$K(c)A = 0. \quad (3.1)$$

Здесь A — вектор амплитуд, а $K(c)$ — матрица коэффициентов, зависящих от скорости. Для существования нетривиального решения получается секулярное уравнение

$$F(c) = \det K(c) = 0 \quad (3.2)$$

Для поверхностного режима типа Рэлея потенциалы принимаются в гармоническом виде:

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{m=1}^2 A_m e^{b_m z} e^{i(kx - \omega t)}, & \chi &= \sum_{m=1}^2 \alpha_m A_m e^{b_m z} e^{i(kx - \omega t)}, \\ \psi &= B e^{b_3 z} e^{i(kx - \omega t)}, & \eta &= \beta B e^{b_3 z} e^{i(kx - \omega t)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Граничные условия на поверхности и три однородных уравнения. Для свободной дренированной поверхности принимаются следующие три граничных условия:

$$\sigma_{zz}(x, 0, t) = 0, \quad \sigma_{xz}(x, 0, t) = 0, \quad p(x, 0, t) = 0. \quad (3.4)$$

Отсюда относительно амплитуд получается следующая система трёх однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} c_{11}A_1 + c_{12}A_2 + c_{13}B = 0, \\ c_{21}A_1 + c_{22}A_2 + c_{23}B = 0, \\ c_{31}A_1 + c_{32}A_2 + c_{33}B = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Здесь коэффициенты c_{ij} зависят от модулей Био, коэффициентов плотности, волнового числа k , частоты ω , коэффициентов затухания b_m , а также от амплитудных соотношений α_m и β .

Для того чтобы данная система имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы матрица коэффициентов была вырожденной: $\det \mathbf{C}(c) = 0$.

Для удобства обозначим $F(c) = \det \mathbf{C}(c)$.

Тогда секулярное уравнение волны Рэлея для свободной дренированной поверхности принимает вид

$$F(c) = 0. \quad (3.6)$$

Фазовая скорость волны Рэлея c_R определяется как корень данного уравнения:

$$F(c_R) = 0.$$

Теорема 2. Пусть в изотропном пороупругом полупространстве биотовского типа поверхностная волна Рэлея задана методом потенциалов в виде (3.3). Для свободной дренированной поверхности граничные условия имеют вид

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{xz}|_{z=0} = 0, \quad p|_{z=0} = 0$$

Если для всех параметров затухания выполняется условие $\text{Re} b_m > 0$, $m = 1, 2, 3$, то есть решение убывает по глубине, секулярная функция $F(c) = \det \mathbf{C}(c)$ непрерывна на интервале $(0, c_s^*)$ и выполняется неравенство $F(0)F(c_s^*) < 0$ то уравнение $F(c_R) = 0$ имеет по крайней мере один корень $c_R \in (0, c_s^*)$.

Этот корень определяет фазовую скорость волны Рэлея, распространяющейся вдоль свободной дренированной поверхности пороупругого полупространства биотовского типа.

Если дополнительно выполняется условие $F'(c) < 0$, $c \in (0, c_s^*)$, то корень уравнения $F(c) = 0$ является единственным.

Все поля выражаются через одну свободную амплитуду следующим образом:

$$u = A_1 u(z) e^{i(kx - \omega t)}, \quad w = A_1 w(z) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (3.7)$$

$$U = A_1 U(z) e^{i(kx - \omega t)}, \quad W = A_1 W(z) e^{i(kx - \omega t)}. \quad (3.8)$$

Эти выражения показывают, что волна Рэлея представляет собой связанную суперпозицию колебаний твёрдого тела и жидкости. При этом участвуют две продольные и одна сдвиговая частичные волны. Следовательно, пористость, степень насыщения, модули Биота, эффективные плотности и коэффициент вязкого взаимодействия b непосредственно влияют на скорость и затухание волны Рэлея.

В заключительной части третьей главы исследовано распространение волн Рэлея в анизотропном упругом полупространстве, покрытом градиентным пьезоэлектрическим слоем. Покрытие и основной слой разделены неидеальным интерфейсом, а влияние параметров механического согласования и

диэлектрической проводимости проанализировано на основе метода состояний и фаз.

Основные уравнения записываются следующим образом:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i, \quad D_{i,i} = 0, \quad (3.9)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l} + e_{kij} \phi_{,k}, \quad D_i = e_{ikl} u_{k,l} - \varepsilon_{ik} \phi_{,k}. \quad (3.10)$$

Решение для волнового движения ищется в виде

$$\{u, \phi\} = \{\hat{u}(z), \hat{\phi}(z)\} e^{ik(x-vt)} u, \quad (3.9)$$

при этом вектор состояния принимается в виде $\eta(z) = [u_x, u_z, \phi, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, D_z]^T$ и управляющие уравнения приводятся к матричному дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\frac{d\eta(z)}{dz} = A(z)\eta(z). \quad (3.11)$$

Поскольку для градуированного слоя прямое вычисление матрицы переноса является затруднительным, применены разложение Магнуса и диагональное аппроксимирование Паде восьмого порядка. Данный подход позволяет с высокой точностью рассчитывать случаи, в которых свойства слоя непрерывно изменяются по глубине.

В модели неидеального интерфейса скачки смещения и потенциала линейно связаны с интерфейсным усилием и нормальным смещением. В качестве основных величин, управляющих свойствами интерфейса, приняты параметры механического согласования R_m и диэлектрический параметр R_d или $k\gamma$. Градация параметров материала описана следующим общим законом:

$$P(z) = P^{(b)} + [P^{(t)} - P^{(b)}] f(z/H). \quad (3.12)$$

Таблица 3.

Константы основного слоя (изотропного упругого полупространства).

λ , GPa	μ , GPa	ρ_s , kg / m ³
78.5	16.1	2200

Таблица 4.

Стандартные константы нижней части покрывающего слоя тела ($z=H$)

Упругие c_{ij} (GPa)	Пьезоэлектрические e_{ij} (C / m ²)	Диэлектрические ε_{ij} (nF / m)	Плотность ρ_c (kg / m ³)
$c_{11} = 151$	$e_{31} = -5.1$	$\varepsilon_{11} = 15$	7,500
$c_{12} = 98$	$e_{33} = 27$	$\varepsilon_{33} = 13.27$	
$c_{13} = 96$	$e_{15} = 17$		
$c_{33} = 124$			
$c_{44} = 23$			

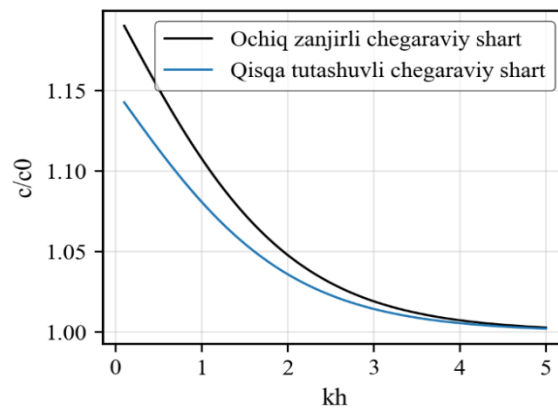


Рис. 6. Дисперсионные кривые для однородного покрывающего слоя с идеальным интерфейсом.

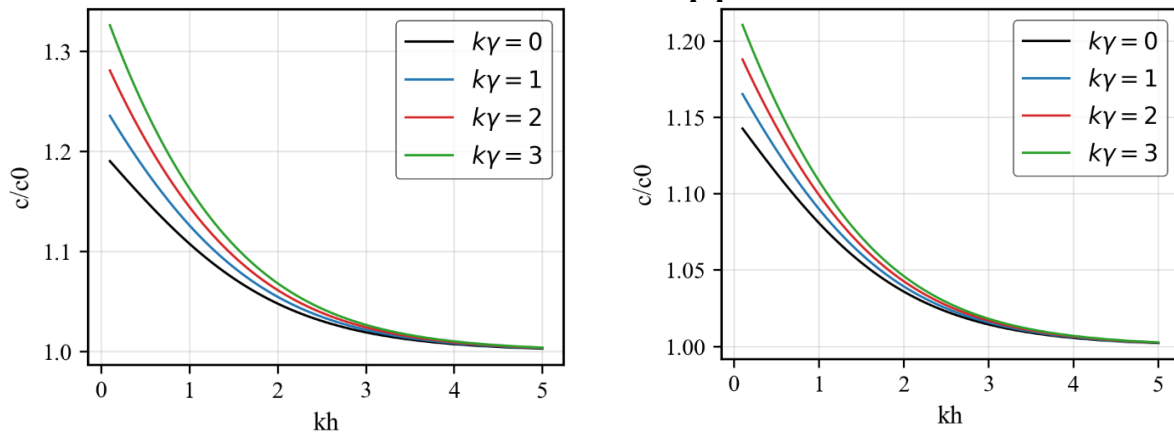


Рис. 7. Влияние интерфейсного параметра $k\gamma$ на скорость поверхностной волны при диэлектрически высокопроводящем интерфейсе: (а) разомкнутая цепь; (б) короткое замыкание.

Показывает непосредственное сопоставление результатов настоящей работы и результатов, представленных при электрически разомкнутых граничных условиях. Оба решения демонстрируют очень хорошее согласование во всём исследованном диапазоне частот. Незначительные расхождения, наблюдаемые на высоких частотах (в пределах 5%), могут быть объяснены различиями в численной реализации. В целом данное эталонное сопоставление подтверждает точность и численную устойчивость предложенной модели.

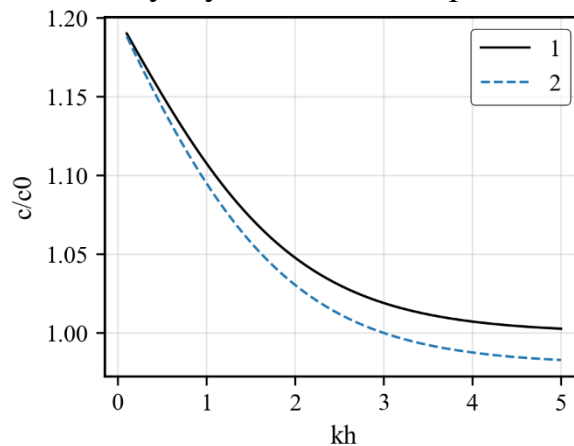


Рис. 8. Сравнение полученного результата с результатом существующей работы.

Сопоставление фазовой скорости поверхностной волны при граничных условиях разомкнутой цепи для упругого полупространства с однородным покрывающим слоем, соединённым через идеально склеенный интерфейс. Кривая 1 отражает результаты настоящей работы, а кривая 2 — эталонное решение, представленное в работе Salah–Njeh–Ghozlen¹⁰.

Численные анализы показывают, что с увеличением механической податливости R_m скорость волны Рэлея уменьшается. Влияние диэлектрического параметра R_d или $k\gamma$ зависит от типа интерфейса и электрических граничных условий на поверхности. В отдельных случаях электрическое короткое замыкание поверхности может частично экранировать механическое влияние дефектов интерфейса.

Предложенный метод при сопоставлении с эталонными результатами продемонстрировал высокую точность во всём исследованном диапазоне частот. Это подтверждает эффективность разработанных в диссертации математической модели и численной схемы для управления дисперсией поверхностных акустических волн в градуированных пьезоэлектрических слоях и композитах с неидеальным интерфейсом.

В настоящей работе для исследования волн Рэлея в пористо-упругой среде было разработано модульное программное обеспечение на языке программирования C#. В состав программы включены модули ввода параметров материала, анализа волновых свойств, выделения типов волн, формирования дискретной модели на основе метода граничных элементов и решения алгебраической системы, а также определения скорости, амплитуды и других характеристик волны Рэлея. Программный комплекс предоставляет результаты вычислений в виде таблиц, численных значений и графиков, что позволяет выполнять сравнительный анализ влияния параметров на волновые процессы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной диссертационной работе комплексно исследованы распространение волн Рэлея в водонасыщенном пористо-упругом полупространстве, закономерности отражения объёмных волн при их падении на свободную поверхность, а также дисперсия поверхностных волн в анизотропном полупространстве с градуированным пьезоэлектрическим покрывающим слоем и неидеальным интерфейсом на основе теории двухфазных сред Биота, теории поверхностных волн и метода граничных элементов. В ходе исследования были согласованно объединены аналитический, интегральный и численный подходы, в результате чего раскрыты основные физико-математические особенности волновых процессов. Полученные результаты обобщаются следующим образом:

1. Разработана физико-математическая модель водонасыщенного пороупругого полупространства на основе теории двухфазной среды Биота и

¹⁰ I. Ben Salah , A. Njeh , M.H. Ben Ghozlen, A theoretical study of the propagation of Rayleigh waves in a functionally graded piezoelectric material, Ultrasonics 52 (2) (2012) 306–314.

сформированы её основные уравнения, связанные с механическими, гидравлическими и диссипативными параметрами.

2. Математически обоснованы распространение объёмных волн типов Р, SV и SH в пороупругой среде, их отражение от свободной поверхности и граничных областей, а также механизмы преобразования между различными типами волн.

3. Построена математическая модель волн Рэлея в пороупругом полупространстве на основе метода потенциалов, получены характеристические и секулярные уравнения, а также уточнены закономерности дисперсии и амплитудного затухания.

4. Для пороупругого полупространства построены гармонические фундаментальные решения и система граничных интегральных уравнений, разработан алгоритм их численного решения на основе метода граничных элементов.

5. Разработана модель распространения волн Рэлея в анизотропном полупространстве с градиентным пьезоэлектрическим покрытием и неидеальным интерфейсом; на основе численных экспериментов оценено влияние неидеальности интерфейса, градиентного профиля, электрических граничных условий и материальных параметров на волновые характеристики.

В заключение следует отметить, что в диссертации аналитический, интегральный и численный подходы к описанию распространения объёмных и поверхностных волн в пористо-упругом полупространстве объединены в рамках единой научной концепции. В результате глубоко проанализированы дисперсия, затухание, диссипация энергии, влияние интерфейса и взаимодействие волн Рэлея с сооружениями, а также получены важные научные и практические результаты для инженерной сейсмологии, геофизики и теории поверхностно-акустических устройств.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC
DEGREES PhD.10/2025.27.12.FM/T.01.08
TASHKENT STATE TRANSPORT UNIVERSITY**

KARSHI STATE UNIVERSITY

MATANOV MUHAMMAD CHARSHAMIEVICH

**MATHEMATICAL MODELING OF RAYLEIGH WAVE PROPAGATION IN
POROELASTIC HALF-SPACE MEDIA**

**05.01.07 – Mathematical modelling. Numerical methods and complexes of applications
(Physical and mathematical sciences)**

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

Tashkent – 2026

The theme of the dissertation for the Doctor of Philosophy (PhD) degree in Physical and Mathematical sciences has been registered with the Higher Attestation Commission of the Ministry of Higher Education, Science, and Innovation of the Republic of Uzbekistan, under the number № B2025.4.PhD/FM1434.

The dissertation was completed at Karshi state university.

The abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific Council (<https://tsu.uz>) and the website of "Ziyonet" information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific adviser: **Kholmurodov Abdulkhamid Erkinovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

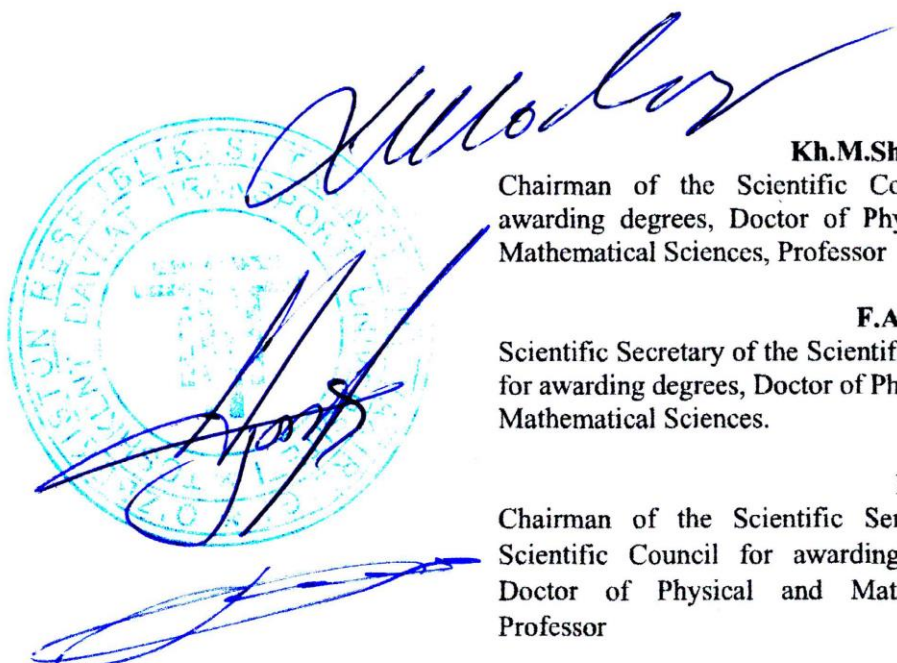
Official opponents: **Normurodov Chori Begaliyevich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Azamov Siroj Sobirovich
Doctor of Philosophy (PhD) in Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor

Leading organization: **Samarkand State University**

The defense will take place "29" "10" 2026 at 15:00 p.m. under the PhD.10/2025.27.12.FM/T.01.08 Scientific Council at the Tashkent State Transport University (Address: 1, Temiryolchilar Street, Tashkent 100167, Uzbekistan, room № _____ Phone (+99871) 299-00-01, fax: (+99871) 239-57-54, e-mail: rektorat@tsu.uz).

The dissertation is available for review in Information-Resource Center of the Tashkent State Transport University. (Registration number: № 390) (Address: 1, Temiryolchilar Street, Tashkent 100167, Uzbekistan. Phone (+99871) 299-05-66).

Abstract of dissertation was distributed on "16" "10" 2026.
(mailing report № 6 on "22" "10" 2026).



Kh.M.Shadimetov
Chairman of the Scientific Council for
awarding degrees, Doctor of Physical and
Mathematical Sciences, Professor

F.A.Nuraliev
Scientific Secretary of the Scientific Council
for awarding degrees, Doctor of Physical and
Mathematical Sciences.

I.Mirzaev
Chairman of the Scientific Seminar the
Scientific Council for awarding degrees,
Doctor of Physical and Mathematical,
Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The purpose of the study construction of a mathematical model for the propagation of Rayleigh waves in a porous-elastic half-space.

The object of the research work the dissertation research was carried out within the framework of the research plan of Karshi State University on the topic “Development of Mathematical Models and Numerical Investigation of Anomalous Substance Transport and Fluid Seepage Processes in Heterogeneous Porous Media.”.

The scientific novelty of the research is as follows:

- in a fluid-saturated poroelastic half-space, the motion of the solid phase and the fluid in the pores is considered in a coupled formulation, and the mathematical model based on Biot’s theory has been improved by taking into account inertia, elasticity, pore pressure, filtration effects, and interphase interaction;
- the propagation, reflection, and transmission laws of P1, P2, and S waves in a porous-elastic medium have been mathematically substantiated;
- depth-decaying solutions and the secular equation for Rayleigh-type surface waves in a porous-elastic half-space have been derived;
- harmonic fundamental solutions, boundary integral equations, and a numerical solution algorithm based on the boundary element method have been developed for a porous-elastic half-space medium;
- Rayleigh wave propagation in a coated anisotropic half-space has been mathematically modelled and numerically analysed.

Implementation of the research results. Based on the results obtained on wave propagation in a poroelastic half-space medium:

The results related to determining the dispersion properties of wave propagation in a porous-elastic half-space medium, calculating amplitudes and velocities under various elastic parameters, and applying numerical modelling based on the boundary element method were used in the fundamental project No. FZ-2020092877 (Certificate No. 10-2403 of Samarkand State University dated May 8, 2026). As a result, these findings made it possible to model wave propagation in porous-elastic media, improve numerical solution methods based on boundary conditions, and calculate dispersion and amplitude characteristics.

The scientific results obtained on the basis of the boundary element method, including computational algorithms related to the propagation, dynamic properties, dispersion, and energy attenuation of Rayleigh waves, were implemented in the fundamental-applied research project No. 0251-2021-2024 of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Certificate No. 15301 dated September 25, 2025). The results served as a scientific basis for use in modelling seismic processes, solving problems of mathematical geophysics, and developing monitoring systems.

Publication of the research results. A total of 20 scientific works have been published on the topic of the dissertation. Of these, 11 articles were published in

scientific journals recommended by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan, 3 articles in foreign scientific journals, and 8 articles in republican scientific journals. In addition, copyright certificates have been obtained for 3 special software tools developed for computers.

The structure and brief description of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, a list of references, and appendices, comprising a total of 115 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo'lim (1 часть; part 1)

1. Matanov M.Ch. Elastik va g'ovak-elastik muhitlardagi to'liq tenglamalarini chegaraviy elementlar usuli orqali hosil qilish, QarDU xabarlaril Ilmiy-nazariy, uslubiy jurnal, 2024 (1)2 // [https://qarshidu.uz/source/Ilmiy%20jurnal/PDF/2024/QarDU%20xabarlari.2024\(1\)1.Aniq%20fanlar.pdf](https://qarshidu.uz/source/Ilmiy%20jurnal/PDF/2024/QarDU%20xabarlari.2024(1)1.Aniq%20fanlar.pdf)
2. Kholmurodov A., Matanov, M., Kuzratov M. (2024, November). Propagation of harmonic plane waves in an elastic half-space. Field equations. In AIP Conference Proceedings (Vol. 3244, No. 1, p. 020019). AIP Publishing LLC. (Scopus) // <https://pubs.aip.org/aip/acp/article-abstract/3244/1/020019/3322718/Propagation-of-harmonic-plane-waves-in-an-elastic?redirectedFrom=PDF>
3. Kholmurodov A.E., Matanov M.Ch. Seismic excitation model of half-space propagation of Rayleigh waves. "Problems of computational and applied mathematics" No. 6(62) 2024 // <https://journals.airi.uz/index.php/pvpm/article/view/84>
4. Kholmurodov A., Matanov M., Kuzratov M. Reflection of sv waves in the elastic half-space. field equations for angles of incidence less than the critical one, this equation analysis and graphing program QarDU xabarlaril Ilmiy-nazariy, uslubiy jurnal, Maxsus son, 2024 // [https://qarshidu.uz/source/Maxsus%20son%202024%20\(3\).pdf](https://qarshidu.uz/source/Maxsus%20son%202024%20(3).pdf)
5. Matanov M.Ch. Integral equations and harmonic fundamental solutions for wave equations in poroelastic media. SamDU ilmiy axborotnomasi 1/2 (149) 2025 // <https://axborotnoma.uz/en/research/3297/>
6. Matanov M.Ch. Harmonic fundamental solutions and boundary integral equations for wave propagation in elastic, scalar and poroelastic media. O'zMU xabarlaril // Вестник НУУз ACTA NUUz 2025 2/1/1 // <https://journals.nuu.uz/index.php/actanuuz/issue/view/177/651>
7. Матанов М.Ч. Метод граничных элементов в гармонических задачах и его применение для решения связанных моделей BuxDU ilmiy axboroti 3(2025) // https://buxdu.uz/media/jurnallar/ilmiy_axborot/ilmiy_axborot_3_son_2025_1.pdf
8. Matanov M.Ch. Qisman to'yingan g'ovak-elastik muhitda Reley to'liqlari. Scientific Bulletin. Physical and Mathematical Research Vol 7. Iss 3. 2025 // [https://fizmatjournal.adu.uz/web/files/files/НоваяПапка/Jurnal%202025\(3\)/Matematika%20%2077-87.pdf](https://fizmatjournal.adu.uz/web/files/files/НоваяПапка/Jurnal%202025(3)/Matematika%20%2077-87.pdf)
9. Kholmurodov A. Matanov M., (2025). A comprehensive theoretical framework for surface wave propagation in layered liquid-porous systems with incompressible saturated constituents. International Journal of Applied Mathematics, 38(12s), 2388-2402. // <https://ijamjournal.org/ijam/publication/index.php/ijam/article/view/1556>
10. Kholmurodov A., Matanov, M. (2026). Rayleigh Wave Propagation in an Anisotropic Half-Space with a Graded Piezoelectric Capping Layer and a Non-Ideal Interface. Engineering, Technology & Applied Science Research, 16(2), 33766-33775. (Scopus Q2) // <https://etasr.com/index.php/ETASR/article/view/15548/6443>
11. Matanov M.Ch., Kholmurodov A.E. Modeling and Analysis of Rayleigh-Type Surface Waves in Elastic Solids with Double Porosity, Acta NUUz, 2026, No 2/1, pp. 61-67.67 // <https://journals.nuu.uz/index.php/actanuuz/article/view/11806>

II bo'lim (2 Частъ; Part 2)

12. Matanov M.Ch. Equilibrium conditions for the two-speed classical continuum in the context of thermodynamics Journal of Engineering and Technology (JET) ISSN(P):2250-2394; ISSN(E): Applied Vol. 13, Issue 2, Dec 2023, 73-76

13. Xolmurodov A.E. Matanov M.Ch. Ikki tezlikli termodinamika masalalarida gidrodinamik Eyler tenglamalari Innovations in technology and science education in volume #2 issue#9, april 2023 // <https://zenodo.org/records/7955734>

14. Kholmurodov A.E., Matanov M.C., Kuzratov M.A. (2024). Reflection of sv waves in the elastic half-space. Field equations for angles of incidence less than the critical one Amaliy matematikaning zamonaviy muammolari va istiqbollari, 1(01). // <https://ojs.qarshidu.uz/index.php/mp/article/view/395>

15. Kholmurodov A.E., Matanov M.Ch., Kuzratov M.A. Deterministic excitation model compatible with a free field seismic record Of the ix international scientific conference “actual problems of applied mathematics and Information technologies al-Khwarizmi 2024”

16. Matanov M. Hybrid Green's function approach for time-domain analysis of stratified half-spaces “Algebra, analiz, topologiya va hisoblash matematikasining dolzarb muammolari” xalqaro ilmiy konferensiyasi 30-31-May, 2025-yil

17. Матанов М. Ч. Математическое моделирование распространения волн Рэлея в пористо-упругих полупространственных средах Matematik fizikaning zamonaviy usullari va ularning tadbirlari akademik Sh.A. Alimov tavalludining 80 yilligiga bag'ishlangan respublika ilmiy anjumani Toshkent shahri, 22-24-aprel, 2025 yil

18. Matanov M.Ch. Soil Structure Interaction Problems. Impedance of Piled Foundations in Saturated Soils International Conference on Management and Control in Solving Engineering Problems (MaCoSEP 2025) // <https://macosep.cyber.az/2025/papers/01.03.pdf>

19. Matanov M.Ch. Development of synthetic accelerograms and baseline correction methods for deterministic modeling of seismic wave propagation Digital transformation and artificial intelligence (2025) 3 (2), 100-108 // <https://dtai.uz/articles/development-of-synthetic-accelerograms-and-baseline-correction-methods-for-deterministic-modeling-of-seismic-wave-propagation/>

20. Matanov M.Ch. Stability and accuracy of the hybrid method for dynamic half-space models under sinusoidal impulsive surface loads. International journal of science 2025, 2 (1), 15-20 // <https://worldlyjournals.com/index.php/IJS/article/view/9544>

21. M.Matanov. “Nochiziqli teskari dinamik masalalarni yechish algoritmi” // O'zbekiston Respublikasi Adliya vazirligi huzuridagi Intellectual mulk agentligi. Elektron hisoblash mashinalari uchun yaratilgan dasturning rasmiy ro'yxatdan o'tkazilganligi to'g'risidagi guvohnoma № DGU 27962. 09.10.2023.

22. M.Matanov. “Elastik yarim fazoda garmonik tekislik to'lqinlarining tarqalishini baholash algoritmi” // O'zbekiston Respublikasi Adliya vazirligi huzuridagi Intellectual mulk agentligi. Elektron hisoblash mashinalari uchun yaratilgan dasturning rasmiy ro'yxatdan o'tkazilganligi to'g'risidagi guvohnoma №DGU 40991. 25.06.2024.

23. M.Matanov. “Qisman to'yingan g'ovak-elastik muhitda Reley to'lqinlari tarqalishining matematik modeli” // O'zbekiston Respublikasi Adliya vazirligi huzuridagi Intellectual mulk agentligi. Elektron hisoblash mashinalari uchun yaratilgan dasturning rasmiy ro'yxatdan o'tkazilganligi to'g'risidagi guvohnoma № DGU 54877. 22.09.2025.

Avtoreferat «Public Publish Printing» nashriyotida
tahrirdan o‘tkazildi.

2770248



Bosishga ruxsat etildi: 10.10.2026-yil
Bichimi 60x84 $\frac{1}{16}$, “Times New Roman”
garniturada raqamli bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog‘i 3,0. Adadi: 100. Buyurtma: №93.

«Public Publish Printing» MChJ
bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent, M.Ulug‘bek tum., Moylisoy, 22.