TOSHKENT DAVLAT TRANSPORT UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI PhD.15/03.06.2023.FM/T.73.08 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MUHAMMAD AL-XORAZMIY NOMIDAGI TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI QARSHI FILIALI

TURDIYEV ULUG‘BEK QAYUMOVICH

BYURGERS TURIDAGI TENGLAMALAR BILAN IFODALANUVCHI JARAYONLARNI MATEMATIK MODELLASHTIRISH

05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui (fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Toshkent-2024

UDK 532.5

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата дисертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of the doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences

**TOSHKENT DAVLAT TRANSPORT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.15/03.06.2023.FM/T.73.08 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

MUHAMMAD AL-XORAZMIY NOMIDAGI TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI QARSHI FILIALI

TURDIYEV ULUG‘BEK QAYUMOVICH

BYURGERS TURIDAGI TENGLAMALAR BILAN IFODALANUVCHI JARAYONLARNI MATEMATIK MODELLASHTIRISH

05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui (fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Toshkent-2024

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2019.4.PhD/FM451 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Qarshi filialida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb sahifasida (www.tstu.uz) va «ZiyoNet» Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Imomnazarov Xolmatjon Xudaynazarovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor (Rossiya, HM va MG ITI)
Rasmiy opponentlar:	**Jabborov Nasriddin Mirzaodilovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Azamov Siroj Sobirovich fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), dotsent
Yetakchi tashkilot:	**Raqamli texnologiyalar va sun'iy intellektni rivojlantirish ilmiy tadqiqot instituti**

Dissertatsiya himoyasi Toshkent davlat transport universitetida huzuridagi PhD.15/03.06.2023.FM/T.73.08 raqamli Ilmiy Kengashning 2024 yil « 7 » may soat 14⁰⁰ dagi majlisida bo'lib o'tadi.

Dissertatsiya bilan Toshkent davlat transport universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (155 raqam bilan ro'yxatga olingan). Manzil: 100167, Тошкент, Темирйўлчилар кўчаси, 1 уй. Тел.: (99871) 299-00-01;факс: (99871) 293-57-54; e-mail: rektorat@tstu.uz.

Dissertatsiya avtoreferati 2024 yil «24» aprel kuni tarqatildi.
(2024 yil «24» aprel dagi 1 raqamli reyestr bayonnomasi).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI TRANSPORT VAZIRLIGI TOSHKENT DAVLAT TRANSPORT UNIVERSITETI

X.M.Shadimetov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy Kengash raisi, f-m.f.d, professor

F.A.Nuraliyev
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy Kengash ilmiy kotibi, f-m.f.d, professor

I.Mirzayev
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy Kengash huzuridagi ilmiy seminar raisi, f-m.f.d, professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruriyati. Jahon miqyosida olib borilayotgan ko‘plab ilmiy-amaliy tadqiqotlar, aksariyat hollarda, metrologiya va okeanologiya sohalarida ko‘p fazali siqiluvchan muhitlar uchun dinamik jarayonlarni modellashtirish, shuningdek, mantiya jinslaridagi konvektiv massa almashinishi, filtratsion oqimlar va turli geologik jarayonlarning matematik modellari uchun sonli-analitik usullarni yaratish masalalariga keltiriladi. Fazalararo intensiv massa almashinuvi kuzatiladigan neft va gaz konlarini ishga tushirish va ulardan foydalanish jarayonida tabiiy qatlamlardagi flyuidlar oqimini hisoblashda ko‘p fazali muhitlar modelini yechish matematik modellashtirish va hisoblash matematikasi sohalari bo‘yicha olib borilayotgan tadqiqotlarning ob’ekti hisoblanadi. Shu sababli, ikki tezlikli gidrodinamikada yuzaga keladigan bir o‘lchovli Byurgers tipidagi tenglamalar sistemasi uchun Koshi va chegaraviy masalalalarni sonli yechish sxemalari hamda algoritmlarni qurish, dasturiy vositalar majmuini yaratish amaliy matematikaning muhim vazifalaridan biri bo‘lib qolmoqda.

Jahonda ko‘p fazali oqimlarni modellashtirish va aralash elliptik-giperbolik tipdagi tenglamalar sistemasi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni keng tadqiq etishda boshlang‘ich-chegaraviy shartlarning nokorrekt qo‘yilishi bilan bog‘liq bo‘lgan qiyinchiliklarni bartaraf etish uchun o‘zgarmas bosimli modelning turli giperbolik ko‘rinishdagi matematik modellarini tuzish va ularni sonli usullar yordamida yechishga qaratilgan ilmiy tadqiqotlar olib borilmoqda. Ushbu yo‘nalishda, jumladan Byurgers tipidagi tenglamalar va ularning sistemasi orqali ifodalanuvchi modellar metrologiya, okeanologiya neft va gaz sohalarida keng qo‘llash bo‘yicha tadqiqotlar ustivor hisoblanmoqda. Shu bilan birga, o‘zgarmas bosimga ega bo‘lgan qo‘shsuyuqlikli muhitda nochiziqli to‘lqinlar tarqalishining matematik modelini takomillashtirish, ikki tezlikli gidrodinamikada yuzaga keladigan Byurgers tipidagi bir o‘lchovli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini yechish dolzarb vazifalardan hisoblanmoqda.

Respublikamizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tadbiqiga ega bo‘lgan matematik fizika, mexanika, seysmologiya, neft-gaz va energetika sohalaridagi masalalarning modellashtirish va sonli-analitik yechish usullarini ishlab chiqish kabi dolzarb yo‘nalishlarda tadqiqotlar amalga oshirilmoqda. Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risidagi qarorda «Funksional analiz, algebra, differensial tenglamalar, matematik fizika, matematik modellashtirish, hisoblash matematikasi va diskret matematika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» kabi ustuvor yo‘nalishlar bo‘yicha xalqaro standartlar darajasidagi ilmiy izlanishlar olib borish vazifalari belgilab berilgan[1]. Qaror ijrosini ta’minlashda o‘zgarmas bosimga ega bo‘lgan qo‘shsuyuqlikli muhitda nochiziqli to‘lqinlar tarqalishining matematik modelini qurish va sonli yechish, jumladan Byurgers turidagi tenglamalar bilan

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 7 maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy- tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” gi PQ-4708-son Qarori. www.lex.uz.

ifodalanuvchi jarayonlarni matematik modellashtirish, ularning sonli usullari va samarali hisoblash algoritmlarini ishlab chiqish muhim hisoblanadi.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 8-oktabrdagi PF-5847-son “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi farmoni, 2021-yil 1-apreldagi PF-6198-son “Ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish bo‘yicha davlat boshqaruvi tizimini takomillashtirish to‘g‘risida”gi farmoni, 2022-yil 28-yanvardagi PF-60-son “2022-2026 yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida” gi farmoni, 2019-yil 27-apreldagi PQ-3682-son “Innovatsion g‘oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori, 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi. Dissertatsiya ishi O‘zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalari rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika”ning ustuvor yo‘nalishiga mos keladi.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Ma’lumki, fizika, biologiya, iqtisodiyot, kimyo va qator boshqa fanlardagi jarayonlarni tavsiflashda nochiziqli modellardan foydalaniladi, bu modellar nochiziqli differensial tenglamalarga olib kelinadi. Bunday masalalarni hal qilishda bir qator xorijiy olimlar katta hissa qo‘shishgan, jumladan L.D.Landau va Y.M.Lifshits, I.Prigojin va P.Mazur (suyuq geliy gidrodinamikasi bo‘yicha ishlar), L.S.Leybenzon (g‘ovak muhitlarda suyuqliklar mexanikasiga oid ishlar), Y.I.Frenkel (nam tuproqlarda seysmodinamik hodisalar bilan bog‘liq ishlar), N.A.Slezkin (pulpaning harakati), G.I.Barenblatt (turbulent oqimda muallaq zarrachalarning harakati), F.I.Frankl va S.G.Teletov, S.S.Kutateladze va M.A.Stirikovich (gaz-suyuqlikli oqimlar gidravlikasi) olimlarning ishlaridan boshlanadi. Ikki fazali muhitni modellashtirishda bir tezlikli va ikki tezlikli yondoshuvlarni e’tirof etish mumkin (Nigmatulin, 1978). Bir tezlikli yondoshuvda geterogen xususiyatlar kinetik koeffitsiyentlar va termodinamik parametrlar qiymatlari orqali yoki tenglamalarga boshqa fazalarning mavjudligini hisobga oluvchi qo‘shimcha hadlarning qo‘shilishi orqali ifodalanadi. Ikki tezlikli yondoshuvda fazalar tezliklarining turli ekanligidan kelib chiquvchi mexanik va termodinamik ta’sirlarni hisobga olib, ikki fazaning birgalikdagi harakatini ifodalovchi tenglamalar qaraladi. Ikki fazali muhitni bir tezlikli modellar orqali o‘rganishda model qurish va sonli usullarni qo‘llash bo‘yicha P.H.Roberts, D.E.Loper va V.N.Dorovskiy ilmiy tadqiqotlar olib borishgan.

Ma’lumki ikki fazali muhitlarning matematik modellarini qurish va o‘rganishga doir dastlabki tadqiqotlar X.A.Raxmatulin tomonidan amalga oshirilgan va bir-biriga kirib boruvchi kontinuumlar tushunchasi kiritilgan. S.K.Godunovning tadqiqotlarida birinchi bo‘lib maxsus differensial tenglamalar sinfi ajratilgan va mazkur sistemani simmetrik ko‘rinishga keltirish ishlari batafsil tahlil qilingan.

N.N.Yanenko, A.A.Samarskiy, G.V.Demidov, V.A.Novikov va Z.G.Gegechkori ishlarida chiziqli tenglamalar uchun kuchsiz approksimatsiya usuli tadqiq qilingan. Nochiziqli tenglamalar uchun kuchsiz approksimatsiya usulining yaqinlashuvchanligi bo‘yicha birinchi natijalar G.I.Marchuk va G.V.Demidovlarga tegishgi bo‘lib, ular qisqa muddatli ob-havo prognozi masalalarining biri uchun bo‘laklash usulining yaqinlashuvchanligini isbotlagan. Y.Y.Belov va G.V.Demidov V.F.Raputalar Byurgers tipidagi kvazichiziqli tenglamalar sistemasi uchun kuchsiz approksimatsiya usulining yaqinlashuvchanligini o‘rganishgan.

Bugungi kungacha, mazkur sohani muvaffaqiyatli rivojlantirgan olimlar sifatida D.F.Fayzullayev, F.B.Abutaliyev, N.M.Muxidinov, R.Sadullayev, A.Begmatov, M.Aripov, Ch.B.Normurodov, N.Ravshanov, B.X.Xujayarov, X.X.Imomnazarov, N.M.Jabborov, A.Ne’matov, A.E.Xolmurodov, B.J.Mamasoliyev, E.Sh.Nazirova kabi olimlarni e’tirof etish mumkin. Sohaga oid tadqiqotlar tahlili shuni ko‘rsatadiki, ko‘p fazali muhitdagi jarayonlarni matematik modellashtirish, ularning sonli usullari va samarali hisoblash algoritmlarini ishlab chiqish, shu bilan birga hisoblash tajribalari sonli natijalarini vizual formada ikki va uch o‘lchamli grafiklarda taqdim etish hozirgi kunda yetarli darajada o‘rganilmagan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim yoki ilmiy-tadqiqot muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Qarshi filiali ilmiy-tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq “Axborot-kommunikatsiya texnologiyalaridan foydalangan holda ishlab chiqarish ob’ektlar atrof-muhiti holatini monitoring qilish kompleks tizimini ishlab chiqish” doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi Byurgers turidagi tenglamalar bilan ifodalanuvchi jarayonlarni matematik modellashtirish va ikki tezlikli gidrodinamikada yuzaga keladigan bir o‘lchovli Byurgers tipidagi tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini yechishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

o‘zgarmas bosimga ega bo‘lgan qo‘shsuyuqlikli muhitda nochiziqli to‘lqinlar tarqalishining matematik modelini takomillashtirish;

qo‘shsuyuqlikli muhit tenglamalar sistemasining xususiy holi sifatida Riman tipidagi tenglamalar sistemasini olish;

o‘zgarmas bosimga ega qo‘shsuyuqlikli muhitda nochiziqli to‘lqinlar tarqalishining matematik modelini harakatlanuvchi to‘lqin ko‘rinishidagi yechimini topish;

ikki tezlikli gidrodinamikada yuzaga keladigan Byurgers tipidagi bir o‘lchovli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini yechish;

Byurgers tipidagi bir o‘lchovli tenglamalar sistemasini sonli usulda yechish va kompyuterda hisoblash tajribalarini o‘tkazishga mo‘ljallangan dasturiy ta’minotni ishlab chiqish.

Tadqiqotning obyekti murakkab reologiyali qo‘shsuyuqlikli o‘zgarmas bosimga ega bo‘lgan muhitdan iborat.

Tadqiqotning predmeti nochiziqli to‘lqinlar tarqalishining dinamik masalalarini matematik modellashtirish hamda ularning xossalarini sonli tadqiq qilishdan iborat.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiyada matematik fizika va differensial tenglamalarni yechishning sonli usullari hamda sonli yechimlarni qurish uchun chekli ayirmali sxema ko‘rinishidagi matematik va sonli modellashtirishning usullari, hisoblash matematikasi usullari va funksional tahlildan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

o‘zgarmas bosimga ega bo‘lgan qo‘shsuyuqlikli muhit harakatining matematik modeli saqlanish qonunlari usuli asosida takomillashtirilgan;

takomillashgan qo‘shsuyuqlikli muhit tenglamalar sistemasining xususiy holi sifatida Riman tipidagi tenglamalar sistemasi qurilgan;

Riman tipidagi tenglamalar sistemasining yechimi harakatdagi to‘lqinlar yordamida topilgan, hamda ushbu yechim uchun nochiziqli tenglamalar sistemasi ko‘rinishidagi formula keltirib chiqarilgan;

ikki tezlikli gidrodinamikada yuzaga keladigan Byurgers tipidagi bir o‘lchovli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi kuchsiz approksimatsiya usuli yordamida yechilgan;

Byurgers tipidagi bir o‘lchovli tenglamalar sistemasi chekli ayirmalar usulda yechilgan va hosil qilingan algoritm yordamida kompyuterda hisoblash tajribalarini o‘tkazishga mo‘ljallangan dasturiy ta’minot yaratilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

Burgers tipidagi tenglamalar sistemasi uchun quyilgan chegaraviy masalaning sonli yechish sxemasi qurilgan;

Burgers tipidagi sistema uchun davriy masala sonli yechilgan va kompyuterda hisoblash tajribalarini o‘tkazishga mo‘ljallangan dasturiy ta’minot yaratilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Tadqiqot natijalarining ishonchliligi matematik model tenglamalarining giperbolik tipga tegishli bo‘lishi, termodinamika qonunlari bilan mosligi asosida qurilgan matematik modelning korrektligi, tadqiqot usullarining matematik qat’iyligi va matematik apparatdan korrekt foydalanilishi hamda olingan natijalarni bir fazali muhitlar uchun o‘xshash masalalarning aniq yechimlari bilan taqqoslashga asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati qo‘shsuyuqlikli muhit tenglamalari bilan bog‘liq bo‘lgan murakkab jarayonlarni yangicha yondashish asosida matematik modellashtirish va chekli-ayirmalar usulini qo‘llanishi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati olingan natijalar turli geologik va texnologik jarayonlarning matematik modellarini o‘rganishda, dissipativ yaqinlashishda g‘ovak-elastiklikning to‘g‘ri va teskari dinamik masalalarini yechishda foydalanish mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Dissertatsiyada olingan natijalar quyidagi yo‘nalishlarda amaliyotga joriy qilingan:

qo‘shsuyuqlikli muhit tenglamalar sistemasining harakatlanuvchi to‘lqin ko‘rinishidagi yechimidan 0315-2019-0005 raqamli “Ikki fazali muhitning termodinamik jihatdan mos keladigan matematik modelini kesishish effektli dissipativ yaqinlashishda matematik modellashtirish” grant loyihasida ikki tezlikli muhitlar dinamikasining amaliy geofizik masalalarini nazariy va sonli tadqiq qilishda foydalanilgan (Rossiya Fanlar Akademiyasi Sibir bo‘limi Hisoblash matematikasi va matematik geofizika institutining 2022 yil 9 dekabrdagi 15301/6-01-29-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qo‘llanilishi, qo‘shsuyuqlikli muhit uchun to‘g’ri dinamik masalani yechish imkonini bergan.

o‘zgarmas bosimga ega bo‘lgan qo‘shsuyuqlikli muhit harakatining takomillashgan matematik modelidan OT-Atex-2018-340 “Ikki tezlikli muhitlar dinamikasining amaliy geofizik masalalarini nazariy va sonli tadqiq qilish” loyihasida qo‘shsuyuqlikli bir bosimli muhitda nochiziqli to‘lqinlar tarqalish jarayonining matematik modelini qurishda foydalanilgan (Qarshi davlat universitetining 2022 yil 14 apreldagi 04/1706-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qo‘llanilishi, Burgers tipidagi tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini yechish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Tadqiqot natijalari **17** ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, shu jumladan, **14** ta Xalqaro va **3** ta Respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami **28** ta ilmiy ishlar chop ettirilgan. O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya Komissiyasi tomonidan doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda jami **8** ta maqola, shulardan **4** ta xorijiy va **4** ta respublika ilmiy jurnallarida chop etilgan hamda elektron hisoblash mashinalari uchun dasturni rasmiy ro‘yxatdan o‘tkazish to‘g‘risidagi **3** ta guvohnoma olingan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya ishi kirish, uchta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati va ilovalardan tashkil topgan. Dissertatsiya asosiy qismining hajmi **98** betdan iborat.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, dissertatsiya mavzusi bo‘yicha mamlakatimiz va xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi berilgan va muammoning o‘rganilganlik darajasi yoritilgan, tadqiqot maqsadi va vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqot ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon etilgan, olingan natijalarning ilmiy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarini amaliyotga joriy qilish, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning “**Zaruriy tushunchalar**” deb nomlangan birinchi bobi yordamchi xarakterga ega bo‘lib, unda dissertatsiyada foydalanilgan zaruriy tushunchalar keltirilgan: tengsizliklar, funksional fazolar, funksional tahlilning ayrim tushunchalari, birinchi tartibli xususiy hosilari chiziqli tenglamalar, ikkinchi tartibli parabolik tenglama uchun maksimum prinsipi va birinchi tartibli hosilalar uchun aprior baholashlar keltirilgan.

Quyidagicha umum qabul qilingan belgilashlarni kiritamiz:

R^n fazoda $\partial\Omega$ bo‘lakli silliq chegaraga ega bo‘lgan Ω sohani va $\bar{\Omega}$ da uzluksiz, normasi $\|f\|_{C(\bar{\Omega})} = \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} |f(\mathbf{x})|$ bo‘lgan $f(\mathbf{x})$ funksiyalar $C(\bar{\Omega})$ fazosini olaylik. M - $\bar{\Omega}$ sohada uzluksiz bo‘lgan funksiyalarning cheksiz to‘plami bo‘lsin ($M \subset C(\bar{\Omega})$).

Ta’rif. Agar ixtiyoriy $\{x_n\} \subset M$ ketma-ketlikdan fundamental qismiy ketma-ketlikni ajratish mumkin bo‘lsa, X normallashtirilgan fazoning M to‘plami kompakt to‘plam deyiladi.

M to‘plamning $C(\bar{\Omega})$ da kompaktligi masalasi qiziqarlidir. Buni aniqlash uchun funksiyalarning tekis chegaralanganligi va tekis darajada uzluksizligi tushunchalarini kiritamiz va Arselaning kompaktlik haqidagi teoremasini keltiramiz.

Ta’rif. Agar shunday K doimiy mavjud bo‘lib, barcha $f \in M$ lar uchun $\|f\|_{C(\bar{\Omega})} \le K$ bo‘lsa, u holda M to‘plamning funksiyalari $C(\bar{\Omega})$ da tekis chegaralangan deyiladi.

Ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun sho‘nday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son mavjud bo‘lib, $|x' - x''| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x', x'' \in \bar{\Omega}$ hamda barcha $f \in M$ lar uchun $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\bar{\Omega}$ da M funksiyalar oilasi tekis darajada uzluksiz deyiladi.

Teorema 1 (Arsela). $M \subset C(\bar{\Omega})$ to‘plam $C(\bar{\Omega})$ da kompakt bo‘lishi uchun M to‘plamdagi funksiyalar $\bar{\Omega}$ da tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz bo‘lishi zarur va yetarli.

Ta’rif. Agar shunday $x \in X$ element mavjud bo‘lsaki, har bir $F \in X'$ funksional uchun $< F, x >= \lim\limits_{n\to\infty} < F, x_n >$ tenglik bajarilsa, u holda X dagi $\{x_n\}$ elementlar ketma-ketligi x elementga kuchsiz yaqinlashadi deyiladi.

Bunda x element x_n ketma-ketlikning kuchsiz limiti deyiladi va quyidagicha belgilanadi: $x_n \xrightarrow{кучсиз} x$. Agar x_n ketma-ketlik x elementga kuchsiz yaqinlashsa, u holda $\|x\| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \|x_n\|$ tengsizlik o'rinlidir.

Dissertatsiyaning ikkinchi bobi **"Ikki tezlikli gidrodinamikaning termodinamik muvofiqlashtirilgan matematik modeli"** deb nomlangan bo'lib, qo'shsuyuqlikli muhitlarda nochiziqli to'lqinlarning tarqalishini tavsiflash uchun xususiy hosilali nochiziqli tenglamalar sistemasi tuzilishi muhokama qilingan.

Nochiziqli to'lqinlarning qo'shsuyuqlikli muhitda tarqalishini dissipativ bo'lmagan va dissipativ yaqinlashishda tavsiflovchi xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasi olingan.

Matematik modellarni qurish uchun tutash muhitlar mexanikasining eng samarali usullaridan biri bo'lgan – saqlanish qonunlari usulidan foydalanilgan, bu usul geterofazali muhitlar dinamikasining fizikaviy jihatdan korrekt, termodinamik asoslangan tenglamalar sistemasini olish imkonini beradi. Bu usul doirasida dinamik tenglamalar fundamental fizikaviy tamoyillarni muvofiqlashtirish protsedurasi asosida quriladi: saqlanish qonunlarining va termodinamikaning birinchi qonunining bajarilishi, model tenglamalarining Galiley almashtirishlariga nisbatan invariantliligi.

Dissipativ jarayonlar chiziqli muvozanatsiz termodinamika vositalari yordamida tavsiflanadi. Kiritiladigan dissipativ oqimlar saqlanish qonunlari va tenglamalarining Galiley almashtirishlariga nisbatan invariantliligiga mos keladi. Modellashtirilayotgan muhitning termodinamik xossalari geterofazali muhit holat tenglamasini berilishi bilan aniqlanadi. Bunday yondashuv asosida qurilgan matematik model termodinamik moslashgan va ichki jihatdan ziddiyatga ega bo'lmagan hisoblanadi, bunda modelni qurish jarayoni modelning dissipativ bo'lmagan tenglamalarining giperbolik tipda bo'lishini ta'minlaydi. Ham dissipativ, ham dissipativ bo'lmagan yaqinlashuvda qo'shsuyuqlikli muhitlarda nochiziq to'lqinlar tarqalishini tavsiflovchi differensial tenglamalar sistemasi olingan. Beshinchi paragrafda ikki tezlikli gidrodinamikaning xususiy holi sifatida Byurgers tipidagi kvazichiziqli tenglamalar sistemasi qurilgan. Bu sistema ikki tezlikli gidrodinamika uchun umumlashgan Navye-Stoks sistemasidan bir bosimliligi va siqilishga ega emaslik shartlari bilan farq qiladi.

Dissipativ holatda o'zgarmas bosimli sistema uchun izotermik jarayonda ikki tezlikli muhitning harakat tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga ega

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + div(\rho_1 \mathbf{u}) = 0, \qquad (1), \qquad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_2 \mathbf{v}) = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u},\nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\nu_1}{\rho}\Delta\mathbf{u} + \frac{\nu_1 + 3\mu_1}{3\rho}\nabla\,\mathrm{div}\mathbf{u} + \frac{\rho_2}{2\rho}\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2 + \mathbf{F} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\nu_2}{\rho}\Delta\mathbf{v} + \frac{\nu_2 + 3\mu_2}{3\rho}\nabla\,\mathrm{div}\mathbf{v} - \frac{\rho_1}{2\rho}\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2 + \mathbf{F} \qquad (4)$$

(1)-(4) tenglamalar sistemasi ikki tezlikli kontinuum holat tenglamasi bilan mos keladi $p = p\left(\rho, (\mathbf{u}-\mathbf{v})^2\right)$.

(3) va (4) tenglamalarni ekvivalent shaklda yozib olamiz

$$\rho_1\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\left(\mathbf{u}^2\right) - \mathbf{u}\times \operatorname{rot}\mathbf{u}\right) = -\nabla p + \nu_1\Delta\mathbf{u} + \frac{\nu_1 + 3\mu_1}{3}\nabla \operatorname{div}\mathbf{u} + \frac{\rho_2}{2}\nabla\left(\mathbf{u}-\mathbf{v}\right)^2 + \rho\mathbf{F} \quad (5)$$

$$\rho_2\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\left(\mathbf{v}^2\right) - \mathbf{v}\times \operatorname{rot}\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \nu_2\Delta\mathbf{v} + \frac{\nu_2 + 3\mu_2}{3}\nabla \operatorname{div}\mathbf{v} - \frac{\rho_1}{2}\nabla\left(\mathbf{u}-\mathbf{v}\right)^2 + \rho\mathbf{F} \quad (6)$$

Bu tenglamalardan vaqt o‘tishi bilan uyurmalar o‘zgarishini aniqlaydigan boshqa tenglamalarni keltirib chiqarish mumkin. Buning uchun (5), (6) tenglamalarning ikkala qismiga rot operatorini qo‘llaymiz.

To‘yinganlik o‘zgarmas bo‘lgan, qaytar gidrodinamik hol uchun siqiluvchi muhitning ikki tezlikli gidrodinamikasi tenglamalari sistemasi quyidagi ko‘rinishga ega

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \qquad \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u_k\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\rho_2}{2\rho}\nabla\left(\mathbf{u}-\mathbf{v}\right)^2 + \mathbf{F}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_k\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{\rho_1}{2\rho}\nabla\left(\mathbf{u}-\mathbf{v}\right)^2 + \mathbf{F}, \quad (9)$$

Qovushqoqlik koeffitsiyentlari bilan aniqlangan dissipativ holda esa qism sistema quyidagicha ifodalanadi

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \qquad \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u_k\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \eta_1\Delta\mathbf{u} + \frac{\rho_2}{2\rho}\nabla\left(\mathbf{u}-\mathbf{v}\right)^2 + \mathbf{F}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_k\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \eta_2\Delta\mathbf{v} - \frac{\rho_1}{2\rho}\nabla\left(\mathbf{u}-\mathbf{v}\right)^2 + \mathbf{F}, \quad (12)$$

Bu yerda η_1 va η_2 - qism sistemalarning kinematik qovushqoqligi.

(7)-(9) va (10)-(12) tenglamalar sistemasi mos ravishda ko‘pfazali muhit uchun Eyler va Navye-Stoks tenglamalar sistemasining umumlashgan ko‘rinishi.

(10)-(12) sistemaning qismi sifatida Byurgers tipidagi tenglamalar sistemasi olindi. Bir o‘lchamli holatda ushbu sistema quyidagi ko‘rinishga ega

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \eta_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\frac{\rho_2}{\rho_1}(u-v) + F, \quad (13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \eta_2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(u-v) + F, \quad (14)$$

(13) va (14) formulalarda -fazalararo ishqalanish koeffitsiyent, g‘ovak muhitlar uchun Darsi koeffitsiyentining analogi hisoblanadi.

Mazkur bobning oltinchi paragrafida qo‘shsuyuqlikli muhitda to‘lqin tarqalishini taviflash uchun Riman tipidagi tenglamalar sistemasi va Byurgers tipidagi tenglamalar sistemasi olingan. Bu Byurgers tipidagi tenglamalar sistemasi uchta asosiy ta’sirni tavsiflaydi: energiyaning spektr bo‘yicha nochiziqli qayta taqsimoti, qism-sistemalar qovushqoqliklarining ta’siri, shuningdek fazalararo ishqalanish kabi effektlarni.

Ishqalanish koeffitsiyenti bilan aniqlanuvchi dissipativ holda (13), (14) sistema ikki tezlikli gidrodinamika sistemasidan bosimni o‘zgarmasligi va siqilishga ega emaslik sharti bilan farq qiladi. Shu sababli, Byurgers tipidagi sistema bilan bog‘langan muammolar, ayrim hollarda o‘zgarmas bosimga ega bo‘lgan ikki tezlikli gidrodinamika sistemasi deb ataladi. $\eta_1 = 0$ va $\eta_2 = 0$ holni sodda kvazichiziqli tenglamalar sistemasini beruvchi qovushqoqsiz Byurgers tipidagi tenglamalar sistemasi yoki Riman tipidagi sistema deb ataymiz

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -b(u-v), \quad (15) \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \varepsilon b(u-v), \quad (16)$$

Bu yerda $\varepsilon = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}$ - o‘lchovsiz musbat doimiy.

Y.D.Zeldovich massa kuchlari mavjud bo‘lmaganda $(F = 0)$ bir tezlikli holda qovushqoq bo‘lmagan erkin sistemani o‘zaro ta’sirlashmaydigan zarralarga ega siyraklashgan gaz evolyutsiyasini tavsiflaydigan tenglamalar sifatida qarashni taklif qilgan. Uning g‘oyasiga ko‘ra, asosda yotuvchi zarralarning sof kinematikasi massaning taqsimlanishida hususiyatlarga olib kelish mumkin va yer yuzida moddaning bir jinsli bo‘lmasligiga sababchidir.

“O‘zgarmas bosimga ega bo‘lgan ikki tezlikli muhit tenglamalar sistemasi uchun kuchsiz approksimatsiya usuli” deb nomlangan uchinchi bobda ikkinchi bobda olingan, o‘zgarmas bosimga ega bo‘lgan ikki tezlikli muhitda nochiziqli to‘lqin tenglamalari bilan tavsiflanadigan matematik modelning differensial tenglamalari uchun qo‘yiladigan masalalar nazariy va sonli tadqiq qilingan.

Funksional analiz va differensial tenglamalar sohalaridan ma’lumotlar keltirilgan: kuchsiz approksimatsiya usuli, kuchsiz approksimatsiya usulining umumiy ta’rifi, kuchsiz approksimatsiya usulining yaqinlashishi teoremasi, ikkinchi tartibli xususiy hosilali bir turdagi chiziqli tenglama uchun kuchsiz approksimatsiya usuli, Byurgers tenglamasi uchun Koshi masalasi.

Dissipativ holda qo‘shsuyuqlikli muhitda nochiziqli to‘lqinlarning tarqalishini tavsiflovchi Byurgers tipidagi tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi ko‘rib chiqilgan. (13), (14) Byurgers tipidagi tenglamalar sistemasi uchun ta’sir etuvchi kuchlarni hisobga olmagan holda ($F(t,x) = 0$) $\Pi_{[0,T]} = \left\{(t,x) : 0 \le t \le T, x \in R^1\right\}$ sohada quyidagi boshlang‘ich shartlarga ega Koshi masalasini ko‘rib chiqamiz.

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \qquad v\big|_{t=0} = v_0(x), \qquad x \in R^1. \qquad (17)$$

Bizni (13), (14) Byurgers tipidagi tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasining $u(t,x), v(t,x) \in C^{1,2}\left(\Pi_{[0,T]}\right)$ xossalarga ega bo‘lgan yechimlari qiziqtiradi - bir marta t bo‘yicha va ikki marta x bo‘yicha uzluksiz differensiallanuvchi funksialar sinfi. Kuchsiz approksimatsiya usuli bilan Byurgers tipidagi bir o‘lchovli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

(13), (14), (17) masalaning $u_0(x)$, $v_0(x)$ Koshi masalalariga to‘xtalamiz. Faraz qilaylik, $u_0(x), v_0(x) \in C^2\left(R^1\right)$ va

$$\left|\frac{d^n u_0(x)}{dx^n}\right| \le c_n, \qquad \left|\frac{d^n v_0(x)}{dx^n}\right| \le \tilde{c}_n, \qquad x \in R^1, \qquad n = 0,1,2, \tag{18}$$

bu yerda c_n, $\tilde{c}_n$ - biror berilgan manfiy bo‘lmagan o‘zgarmaslar.

Avval, Koshi shartlari cheksiz differensiallanuvchi bo‘lgan holini ko‘rib chiqamiz. Faraz qilamizki, $u_0(x), v_0(x) \in C^\infty\left(R^1\right)$ va

$$\left|\frac{d^n u_0(x)}{dx^n}\right| \le c_n, \qquad \left|\frac{d^n v_0(x)}{dx^n}\right| \le \tilde{c}_n, \qquad x \in R^1, \qquad n = 0,1,2,\ldots, \tag{19}$$

Kuchsiz approksimatsiya usuliga ko‘ra, (13), (14), (18) Koshi masalasini quyidagi masala bilan approksimatsiyalaymiz:

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = 3\eta_1 u^\tau_{xx}, \qquad \frac{\partial v^\tau}{\partial t} = 3\eta_2 v^\tau_{xx}, \qquad n\tau < t \le \left(n + \frac{1}{3}\right)\tau, \tag{20}$$

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} + 3u^\tau u^\tau_x = 0, \qquad \frac{\partial v^\tau}{\partial t} + 3v^\tau v^\tau_x = 0, \qquad \left(n + \frac{1}{3}\right)\tau < t \le \left(n + \frac{2}{3}\right)\tau, \tag{21}$$

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = -3\tilde{b}(u^\tau - v^\tau), \qquad \frac{\partial u^\tau}{\partial t} = 3b(u^\tau - v^\tau), \qquad \left(n + \frac{2}{3}\right)\tau < t \le \left(n+1\right)\tau, \tag{22}$$

$$u^\tau(0,x) = u_0(x), \qquad v^\tau(0,x) = v_0(x), \tag{23}$$

bu yerda $\tilde{b} = \dfrac{\rho_2}{\rho_1} b$, $N\tau = t^*$, $N > 1$ - butun son, $n = 0,1,\ldots,N-1$, va t^* doimiy (24) tengsizlikni qanoatlantiradi (quyida keltirilgan).

Izoh 1. (20)-(23) masala yechimini tuzishda birinchi kasr qadamlarda issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun Koshi masalasi yechiladi, ikkinchi kasr qadamlarda - ko‘chish tenglamasi uchun Koshi masalasi, uchinchi kasr qadamlarda esa - oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi yechiladi. Masalaning yechimi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$u^\tau = u_0(x) + \frac{3\tilde{b}}{\bar{b}}(v_0(x) - u_0(x))\left(1 - e^{-\bar{b}t}\right),$$

$$v^\tau = v_0(x)e^{-\bar{b}t} + \frac{3\tilde{b}}{\bar{b}} v_0(x)\left(1 - e^{-\bar{b}t}\right) + \frac{3\tilde{b}}{\bar{b}} u_0(x)\left(1 - e^{-\bar{b}t}\right),$$

bu yerda $\bar{b} = 3(b + \tilde{b})$.

(19) munosabatlar bajarilgan bo‘lsin va c_1, $\tilde{c}_1$ ва t^* doimiylar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$1 - c_1 t^* > 0, \qquad 1 - \tilde{c}_1 t^* > 0 \tag{24}$$

U holda $\Pi_{\left[0,t^*\right]}$ sohxada u^τ va v^τ yechim mavjud va t, x o‘zgaruvchilar bo‘yicha o‘zining barcha hosilalari bilan chegaralangan.

Bizga aniqki, ixtiyoriy fiksirlangan τ da (20)-(23) masalaning u^τ va v^τ yechimi τ kattalikka bog‘liq bo‘lmagan xolda chegaralangan

$$\left|u^\tau(t,x)\right| \le c_0, \qquad \left|v^\tau(t,x)\right| \le \tilde{c}_0. \tag{25}$$

Yuqorida keltirilgan mulohazalarni takrorlab, u^τ va v^τ yechimlarning x bo‘yicha ixtiyoriy tartibli xususiy xosilalari τ bo‘yicha chegaralanganligini ko‘rsatish mumkin:

$$\left|\frac{\partial^k u^\tau(t,x)}{\partial x^k}\right| \le C_k, \qquad \left|\frac{\partial^k v^\tau(t,x)}{\partial x^k}\right| \le \tilde{C}_k, \ (t,x)\in \Pi_{[0,t^*]}, \quad k=0,1,\ldots \tag{26}$$

bu yerda C_k, $\tilde{C}_k$ - biror musbat o‘zgarmaslar bo‘lib, $C_k \le c_k$, $\tilde{C}_k \le \tilde{c}_k$.

(25), (26) tengsizliklar va (20)-(23) tenglamalardan τ bo‘yicha tekis baholashlar kelib chiqadi:

$$\left|\frac{\partial^{k+1} u^\tau(t,x)}{\partial t\partial x^k}\right| \le s_k, \qquad \left|\frac{\partial^{k+1} v^\tau(t,x)}{\partial t\partial x^k}\right| \le \tilde{s}_k, \ (t,x)\in \Pi_{[0,t^*]}, \quad k=0,1,\ldots \tag{27}$$

Bu baholashlardan u^τ, v^τ va ularning x bo‘yicha ixtiyoriy tartibli hosilalari $\Pi_{[0,t^*]}$ da tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

Arsela teoremasiga asosan, diagonal usuli bilan $\{u^\tau\}$, $\{v^\tau\}$ ketma-ketlikning $\Pi_{[0,t^*]}$ sohaning har bir chegaralangan qism sohasida o‘zining x bo‘yicha barcha hosilalari bilan mos ravishda u va v funksiyalarga tekis yaqinlashuvchi $\{u^{\tau_k}\}$, $\{v^{\tau_k}\}$ qism ketma ketliklarini tanlab olish mumkin, buning natijada u va v funksiyalar x bo‘yicha ixtiyoriy tartibli hosilaga ega bo‘ladi va quyidagi munosabatlar bajariladi

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \qquad v\big|_{t=0} = v_0(x), \tag{28}$$

$$\left|\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial x^k}\right| \le C_k, \qquad \left|\frac{\partial^k v(t,x)}{\partial x^k}\right| \le \tilde{C}_k, \ (t,x)\in \Pi_{[0,t^*]}, \quad k=0,1,\ldots \tag{29}$$

Yechimning yagonaligi standart usul bilan isbotlanadi.

Natijada, u^τ, v^τ funksiyalar ketma-ketliklarining o‘zi ham $\tau \to 0$ da o‘zining barcha xosilalari bilan $\Pi_{[0,t^*]}$ da mos ravishda u va v ga tekis yaqinlashadi. $u_0(x), v_0(x) \in C^2\left(R^1\right)$ bo‘lgan hol o‘rtacha funksiyalar yordamida isbotlanadi.

Shunday qilib, quyidagi Teorema isbotlangan.

Teorema 2. $u_0(x), v_0(x)$ - funksiyalar (3.3) shartni qanoatlantirsin. U holda (20)-(23) masalaning $u^\tau(t,x)$ va $v^\tau(t,x)$ yechimi $\Pi_{[0,T]}$ sohada $\tau \to 0$ da (13), (14), (17) masalaning $u^\tau(t,x)$ va $v^\tau(t,x)$ yechimiga tekis yaqinlashadi. $\dfrac{\partial^k u(t,x)}{\partial x^k}$, $\dfrac{\partial^k v(t,x)}{\partial x^k}$, $k=0,1,$ hosilalar $\Pi_{[0,T]}$ sohada $u(t,x)$ va $v(t,x)$ ning tegishli hosilalariga tekis yaqinlashadi.

Riman tipidagi tenglamalar sistemasining harakatdagi to‘lqin ko‘rinishidagi yechimi uchun nochiziqli tenglamalar sistemasi ko‘rinishidagi formula olindi. (15), (16) sistema yechimini harakatdagi to‘lqin shaklida izlaymiz. $\xi = x - ct$ yangi o‘zgaruvchi kiritamiz va

$$u(x,t) = U(\xi), \qquad v(x,t) = V(\xi), \tag{30}$$

Shunday qilib, $U(\xi)$, $V(\xi)$ funksiyalar

$$-cU^{'} + UU^{'} = -b(U - V), \quad -cV^{'} + VV^{'} = \varepsilon b(U - V)$$

ko‘rinishdagi oddiy differensial tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi. Bu yerda C- t vaqt momentida x yo‘nalishi bo‘yicha bir yo‘nalishli harakatdagi to‘lqin tezligi. Bundan, $\tilde{U} = (U - c)^2, \tilde{V} = (V - c)^2$ funksialarga nisbatan murakkab bo‘lmagan o‘zgartirishlarni amalga oshirib, quyidagi oddiy differensial tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\tilde{U}^{'} = -2b\left(\sqrt{\tilde{U}} - \sqrt{\tilde{V}}\right), \quad (31) \qquad \tilde{V}^{'} = 2\varepsilon b\left(\sqrt{\tilde{U}} - \sqrt{\tilde{V}}\right). \quad (32)$$

(31) tenglamani ikkala tomonini ε ga ko‘paytirib va hosil bo‘lgan tenglamani (32) tenglamaga qo‘shsak, quyidagi tenglama hosil bo‘ladi $\left(\varepsilon\tilde{U} + \tilde{V}\right)^{'} = 0$.

Yuqoridagi tenglamani integrallab, $\tilde{U}, \tilde{V}$ funksialar orasidagi bog‘liqlikka ega bo‘lamiz:

$$\tilde{U}, \tilde{V} : \varepsilon\tilde{U} + \tilde{V} = C_1, \tag{33}$$

bu yerda C_1 - biror musbat doimiy.

(31) tenglamadan $\tilde{V}$ ni topib, (33) tenglamani hisobga olib, $\tilde{U}$ ga nisbatan quyidagi differensial tenglama hosil bo‘ladi

$\tilde{U}^{'} = 2b\left(\sqrt{C_1 - \varepsilon\tilde{U}} - \sqrt{\tilde{U}}\right)$, uning yechimi ushbu

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^{3/2}}\left(-2\sqrt{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\tilde{U}} + \sqrt{C_1 - \varepsilon\tilde{U}}\right) + \sqrt{C_1}\left(2\text{ArcTanh}\left[\frac{\sqrt{\tilde{U}}\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{C_1}}\right] - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\ln\left[C_1(1+\varepsilon) - \tilde{U}(1+\varepsilon)^2\right] + \ln\left[C_1\left(\left(\sqrt{C_1}\sqrt{1+\varepsilon} + \sqrt{C_1 - \tilde{U}\varepsilon}\right)^2 - \tilde{U}\varepsilon^2\right)\right]\right)\right) = 2b\xi + C_2, \tag{34}$$

ko‘rinishga ega, bu yerda C_2 -integrallash doimiysi. (34) munosabat tegishli o‘zgartirishlardan so‘ng quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\sqrt{\tilde{U}} + \sqrt{C_1 - \varepsilon\tilde{U}} - \frac{\sqrt{C_1}}{2\sqrt{1+\varepsilon}}\left(2\text{ArcTanh}\left[\frac{\sqrt{\tilde{U}}\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{C_1}}\right] - \ln\left[C_1(1+\varepsilon) - \tilde{U}(1+\varepsilon)^2\right] + \right.$$

$$\left. + \ln\left[C_1\left(\left(\sqrt{C_1}\sqrt{1+\varepsilon} + \sqrt{C_1 - \tilde{U}\varepsilon}\right)^2 - \tilde{U}\varepsilon^2\right)\right]\right) = -b(1+\varepsilon)\xi + C_2 \cdot$$

Dastlabki $U(\xi)$, $V(\xi)$ funksiyalarga qaytib, Riman tipidagi (15), (16) sistemaning harakatdagi to‘lqinlar ko‘rinishidagi umumiy yechimiga ega bo‘lamiz

$$V-c=\pm\sqrt{C_1-\varepsilon(U-c)^2}\,,$$

$$U-c+\sqrt{C_1-\varepsilon(U-c)^2}-\frac{\sqrt{C_1}}{2\sqrt{1+\varepsilon}}\left(2\text{ArcTanh}\left[\frac{(U-c)\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{C_1}}\right]-\right.$$

$$-\ln\left[C_1(1+\varepsilon)-(U-c)^2(1+\varepsilon)^2\right]+$$

$$\left.+\ln\left[C_1\left(\left(\sqrt{C_1}\sqrt{1+\varepsilon}+\sqrt{C_1-(U-c)^2\varepsilon}\right)^2-(U-c)^2\varepsilon^2\right)\right]\right)=-b\left(1+\varepsilon\right)\xi+C_2$$

O‘zgarmas bosimga ega bo‘lgan qo‘shsuyuqlikli muhitda nochiziqli to‘lqinlarning tarqalishini ko‘rib chiqamiz. Faqat fazalar qovushqoqliklari va fazalararo ishqalanish koeffitsiyenti bilan bog‘liq effektlarni inobatga olamiz. Bu holda bunday masala (13), (14) sistema va quyidagi boshlang‘ich-chegaraviy shartlar bilan tavsiflanadi

$$u(x,0)=e^{-x^2}\,,v(x,0)=0.1\cdot e^{-x^2}\,, \tag{35}$$

$$u(-4,t)=u(4,t)\,,v(-4,t)=v(4,t), \tag{36}$$

Berilgan masalani yechish uchun vaqt bo‘yicha birinchi tartibli va fazo bo‘yicha ikkinchi tartibli approksimatsiyali oshkor chekli ayirmali sxemani qo‘llaymiz

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+u_j^n\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}=\nu_1\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}-b(u_j^n-v_j^n)\,, \tag{37}$$

$$\frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\tau}+v_j^n\frac{v_j^n-v_{j-1}^n}{h}=\nu_2\frac{v_{j+1}^n-2v_j^n+v_{j-1}^n}{h^2}+\varepsilon b(u_j^n-v_j^n)\,. \tag{38}$$

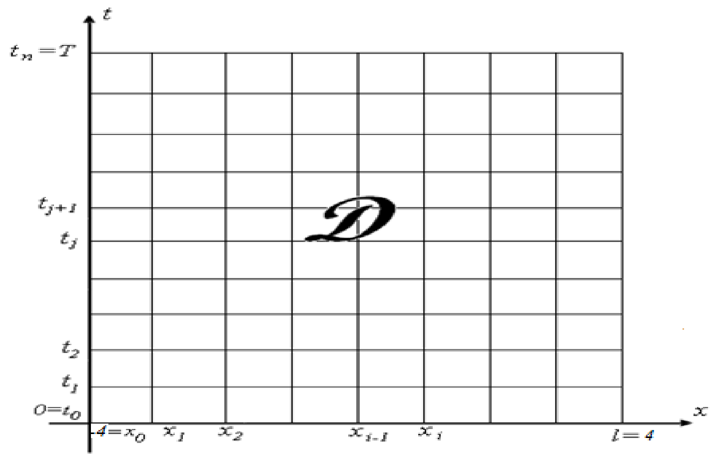
(37) va (38) ifodalarda τ, h - mos ravishda, vaqt va fazo bo‘yicha diskretlash qadamlari.

(13), (14) muhitning test modeli uchun nochiziqli to‘lqinlar tarqalishini modellashtirish natijalari keltirilgan. Ushbu modelning fizikaviy xaraktrestikalari quyidagi qiymatlarni qabul qilgan:

$$\nu_1=0.75\cdot 10^{-4}\ \frac{\text{м}^2}{\text{сек}},\qquad \nu_2=0.75\cdot 10^{-4}\ \frac{\text{м}^2}{\text{сек}},\qquad b=0.2\ \frac{\text{м}^3}{\textit{кг}\cdot\text{сек}}\,.$$

Boshlang‘ich va chegaraviy shartlar (35) va (36) dagi kabi aniqlanadi.

(13), (14) masalaning yechimini D= $\{-4 \le x \le 4,\ 0 \le x \le T\}$ sohada aniqlanishi talab etilsin (1 – rasmga qarang).



1 - rasm. To‘rlar usuli

-4= $x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_{i-1} < x_i <\ldots< x_m$ =4 nuqtalar bilan [-4; 4] kesmani *m* ta o‘zaro teng bo‘laklarga bo‘lamiz. Bu bo‘laklarning uzunligini *h* orqali belgilaymiz. $x_0, x_1, x_2,\ldots, x_{i-1}, x_i,\ldots, x_m$ nuqtalardan perpendikulyar kesmalar o‘tkazamiz.

[0; T] kesmani $0 = t_0 < t_1 < t_2 <\ldots< t_j < t_{i+1} <\ldots< t_N = T$ nuqtalar bilan *N* ta o‘zaro teng bo‘laklarga bo‘lamiz. Bu bo‘laklar uzunliklarini τ orqali belgilaymiz. t_0, t_1, $t_2,\ldots,t_j$, $t_{i+1},\ldots,t_N$ nuqtalardan perpedikulyar kesmalar o‘tkazamiz. Natijada D soha to‘r bilan qoplanadi va $u(t,x)$, $v(t,x)$ funksiyalarning qiymatlarini bu to‘r tugunlarida aniqlash masalasi qo‘yiladi.

(35) differensial tenglamalar sistemasida xususiy hosilalarni chekli ayirmalar nisbati bilan taqriban almashtirib, quyidagi chekli ayirmali tenglamalar sistemasi hosil qilinadi:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+u_j^n\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}=\nu_1\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}-b(u_j^n-v_j^n)\,,$$

$$j=1,2,\ldots,m-1,\ n=0,1,\ldots,N-1 \qquad (39)$$

$$\frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\tau}+v_j^n\frac{v_j^n-v_{j-1}^n}{h}=\nu_2\frac{v_{j+1}^n-2v_j^n+v_{j-1}^n}{h^2}+\varepsilon b(u_j^n-v_j^n)\,,$$

$$j=1,2,\ldots,m-1,\ n=0,1,\ldots,N-1 \qquad (40)$$

u yerda j va n - chekli ayirmali to‘r tuguni nomerlari, τ va h - mos ravishda, t va x o‘zgaruvchilar bo‘yicha to‘r qadamlari. Bu yerdan $u(t,x)$ va $v(t,x)$ funksiyalar qiymatlarini to‘r tugunlarida vaqt bo‘yicha qadam-baqadam hisoblash algoritmi kelib chiqadi:

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\tau\cdot u_j^n\cdot\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}+\tau\cdot\nu_1\cdot\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}-\tau\cdot b\cdot(u_j^n-v_j^n),$$

$$j=1,2,\ldots,m-1,\ n=0,1,\ldots,N-1 \qquad (41)$$

$$v_j^{n+1}=v_j^n-\tau\cdot v_j^n\cdot\frac{v_j^n-v_{j-1}^n}{h}+\tau\cdot\nu_2\cdot\frac{v_{j+1}^n-2v_j^n+v_{j-1}^n}{h^2}+\tau\cdot\varepsilon\cdot b\cdot(u_j^n-v_j^n)\,.$$

$$j=1,2,\ldots,m-1,\ n=0,1,\ldots,N-1 \qquad (42)$$

$u(t,x)$ va $v(t,x)$ funksiyalar qiymatlarini hisoblash algoritmi (36) munosabatlarga asosan quyidagicha amalga oshiriladi. $n=0$ bo‘lganda (35) formulalar ushbu

$$u_j^0 = e^{-(x_j)^2}, \quad j=0,1,...,m \qquad (43) \qquad v_j^0 = 0{,}1\cdot e^{-(x_j)^2}, \quad j=0,1,...,m \qquad (44)$$

ko‘rinishga keladi. Bu yerda “0” yuqori indeks t vaqt bo‘yicha nolinchi qatlamni anglatadi. Bu qatlamda (35) boshlang‘ich shartlar berilgan. (13) va (14) munosabatlarning chap va o‘ng tomonlaridagi ifodalarning qiymatlarini (36) chegaraviy shartlardan aniqlanadi.

$$u_{-4}^{n+1} = u_{-4}^n,\ u_4^{n+1} = u_4^n,\ n=0,1,...,N-1 \ (45) \qquad v_{-4}^{n+1} = v_{-4}^n,\ v_4^{n+1} = v_4^n,\ n=0,1,...,N-1 (46)$$

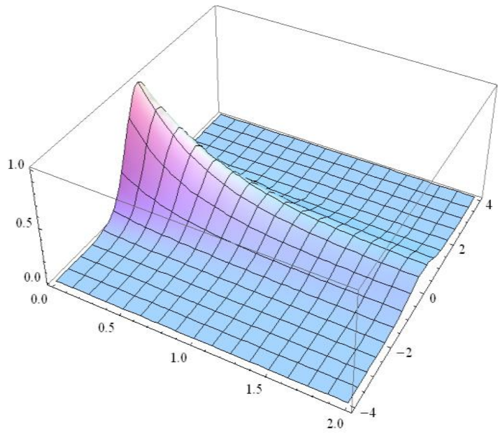
Shunday qilib, $u(t,x)$ va $v(t,x)$ funksiyalar qiymatlari vaqt bo‘yicha har bir qatlamda (41) va (42) formulalar yordamida hisoblandi. Chap va o‘ng chegaradagi qiymatlari (45) va (46) formulalar yordamida hisoblanadi.

To‘r tugunlarida $u(t,x)$ va $v(t,x)$ funksiyalar qiymatlarini yuqorida tavsiflangan algoritmlar bo‘yicha hisoblash mumkin. Ularning qiymatlarini o‘zgartirib, ko‘p variantli hisoblashlarni o‘tkazish mumkin.

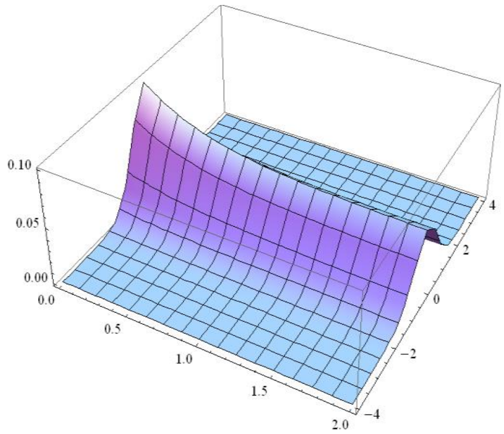
Yuqoridagi algoritm yordamida $u(t,x)$ va $v(t,x)$ funksiyalar qiymatlarini sonli hisoblashga mo‘ljallangan dasturiy ta’minot ishlab chiqildi. Dasturli ta’minot Python tili asosida tuzilgan.

Tuzilgan dasturiy ta’minotda (13) va (14) tenglamalardagi fizik parametrlarning qiymatlari v_1, v_2, b va ε hamda to‘r qadamlarining qiymatlari m, N, T, a=-4, c=4 lar foydalanuvchi tomonidan kiritiladi. Kiritilgan qiymatlardan foydalanib, yuqoridagi algoritm asosida $u(t,x)$ va $v(t,x)$ funksiyaning qiymatlari aniqlanadi va sonli qiymatlari hamda fazoviy shakldagi vizual grafigi hosil qilinadi.

Grafik material tadqiqot ishining 1-ilovasida keltirilgan. Natijalar ishlab chiqilgan algoritm va dasturiy ta’minot qo‘yilgan masalani yechish imkonini berishini ko‘rsatdi (2-ilovada keltirilgan). Sonli hisoblash (37), (38) sxema bo‘yicha amalga oshirildi.



2-rasm. $u(t,x)$ .uchun grafik



3-rasm. $v(t,x)$ uchun grafik

Yuqoridagi grafiklarda $u(t,x)$ va $v(t,x)$ to‘lqin maydonlarini modellashtirish natijalarini taqdim etilgan. Natijalardan to‘lqin maydonlarining so‘nishi aniq ko‘rinadi.

XULOSA

1. Qo‘shsuyuqlikli muhitda nochiziqli to‘lqinlarning tarqalishini tavsiflash uchun chiziqli bo‘lmagan xususiy hosilali tenglamalarni hosil qilish muhokama etildi. Nochiziqli to‘lqinlarning qo‘shsuyuqlikli muhitda tarqalishini dissipativ bo‘lmagan va dissipativ yaqinlashishda tavsiflovchi xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasi olindi.

2. Riman va Byurgers tipidagi tenglamalar sistemalari olindi. Ikkinchi sistema energiyaning spektr bo‘ylab nochiziqli qayta taqsimlanishi, qism tizimlarning qovushqoqligi, shuningdek fazalararo ishqalanish koeffitsiyenti ta’siri kabi uchta asosiy effektni tavsiflaydi.

3. Ikki tezlikli gidrodinamikada yuzaga keladigan Byurgers tipidagi tenglamalarning bir o‘lchovli sistemasi uchun Koshi masalasi yechildi. Kuchsiz approksimatsiya usuli bilan Byurgers tipidagi bir o‘lchovli sistema uchun Koshi masalasi yechiminining mavjudligi va yagonaligi isbotlandi.

4. Riman tipidagi tenglamalar sistemasining harakatdagi to‘lqin ko‘rinishidagi yechimi ko‘rib chiqildi. Uning yechimi uchun nochiziqli tenglamalar sistemasi ko‘rinishdagi formula olindi.

5. Byurgers tipidagi tenglamalar sistemasi uchun davriy masala sonli yechilib, kompyuterda hisoblash tajribalari o‘tkazildi.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD. PhD.15/03.06.2023.FM/T.73.08 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ТАШКЕНТСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ ТРАНСПОРТНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

КАРШИНСКИЙ ФИЛИАЛ ТАШКЕНТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ИМЕНИ МУХАММАДА АЛ-ХОРАЗМИЙ

ТУРДИЕВ УЛУГБЕК КАЮМОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЯМИ ТИПА БЮРГЕРСА

05.01.07 – Математическое моделирование. Численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент – 2024

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссия при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан под B2019.4.PhD/FM451.

Диссертация выполнена в Каршинском филиале Ташкентского университета информационных технологий.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб странице (www.tstu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Имомназаров Холматжон Худайназарович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Жабборов Насриддин Мирзаодилович** доктор физико-математических наук, профессор
	Азамов Сирож Собирович доктор философии по физико-математическим наукам (PhD), доцент
Ведущая организация:	**Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта**

Защита диссертации состоится «7» мая 2024 г. в 14⁰⁰ часов на заседании научного совета PhD.15/03.06.2023.FM/T.73.08 при Ташкентский государственный транспортный университета. (Адрес: Ташкент, Мирабадский район, улица Темирйулчилар, дом 1 Тел.: (99871) 227-12-24; факс: (99871) 246-53-21, 246-02-24; e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре (регистрационный номер №155). (Адрес: Ташкент, Мирабадский район, улица Темирйулчилар, дом 1. Тел.: (99871) 227-12-24.

Автореферат диссертации разослан «24» 04 2024 года.
(протокол рассылки № 1 от «24» 04 2024 г.).

Х.М.Шадиметов
Председатель научного совета по присуждению учёных степеней, д.ф.-м.н., профессор.

Ф.А.Нуралиев
Ученый секретарь научного совета по присуждению учёных степеней, д.ф.-м.н. профессор.

И.Мирзаев
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор.

ВВЕДЕНИЕ (аннотации диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. В мире проводимые научно-практические исследования уделяются в большинстве случаев в области метрологии и океанологии, представляют собой моделирование динамических процессов в многофазных сжимаемых средах, а также численно-аналитические модели конвективного массопереноса в мантийных породах, фильтрации потоков и математических моделей различных геологических процессов. Решение модели многофазных сред при расчете течения флюидов в природных пластах при вводе и эксплуатации месторождений нефти и газа с интенсивным межфазным массообменом является объектом исследований в области математического моделирования и вычислительной математики. По этой причине одной из важных задач прикладной математики является построение схем и алгоритмов численного решения задач Коши и краевых задач, а также создание комплекса программных средств для системы одномерных уравнений типа Бюргерса. возникающие в двухскоростной гидродинамике.

В мире проводятся научные исследования, направленные на исследование начально-краевых задач моделирования многофазных течений и смешанной эллиптико-гиперболической системы уравнений, в которых особое внимание уделяется построению различных гиперболических математических моделей модели постоянного давления и использованию численных методов при их решении с целью преодоления трудностей, связанных с некорректной установкой начальных граничных условий. В этом направлении приоритет отдается исследованиям моделям, представленными уравнениями типа Бюргерса и их системам, которые широко используются в областях метрологии, океанологии, нефти и газа. Вместе с тем, совершенствование математической модели распространения нелинейных волн в двухжидкостной среде с постоянным давлением, решение задачи Коши для системы одномерных уравнений типа Бюргерса, возникающей в двухскоростной гидродинамике является актуальной задачей.

В республике большое внимание уделяется таким актуальным направлениям, как развитие численно-аналитических методов решения задач в области математической физики, механики, сейсмологии, нефти и газа, энергетики, имеющих научное и практическое применение фундаментальных наук. В постановлении о мерах по повышению качества образования в области математики и развитию научных исследований определены задачи проведения научных исследований на уровне международных стандартов по таким приоритетным направлениям, как «функциональный анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, математическая физика, математические моделирование, вычислительная математика и дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика»[2]. Для выполнения поставленных

[2]Постановление Президента Республики Узбекистан от 7 мая 2020 года № PQ-4708 «О мерах по повышению качества образования в области математики и развитию научных исследований». www.lex.uz.

задач важно построить и численно решить математическую модель распространения нелинейных волн в двухжидкостной среде с постоянным давлением, в частности математическое моделирование процессов, представленных уравнениями типа Бюргерса, разработка их численных методов и эффективных алгоритмов расчета, являющиеся востребованными.

Данная диссертация, в определенной степени, служит выполнению задач, обозначенных в Указах Президента Республики Узбекистан №УП-5847 от 8 октября 2019 года «Об утверждении концепции развития системы высшего образования Республики Узбекистан до 2030 года», №УП-6198 от 1 апреля 2021 года «О совершенствовании системы государственного управления развитием научной и инновационной деятельности», №УП-60 «О стратегии развития нового Узбекистана на 2022-2026 годы» от 28 января 2022 года, постановлениях № ПП-3682 от 27 апреля 2019 года «Инновационное решение «О мерах» по дальнейшему совершенствованию системы реализации идей, технологий и проектов», № ПП-4708 от 7 мая 2020 г. «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполненов соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Известно, что нелинейные модели используются для описания процессов в физике, биологии, экономике, химии и ряде других наук и сводятся к нелинейным дифференциальным уравнениям. Большой вклад в решение подобных задач внесли ряд зарубежных ученых, в том числе Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица, И.Пригожина и П.Мазура (работы по гидродинамике жидкого гелия), Л.С.Лейбензона (работы по механике жидкости в пористых средах), Я.И. Френкеля (работы, связанные с сейсмическими явлениями во влажных грунтах), Н.А.Слезкина (движение пульпы), Г.И.Баренблата (движение взвешенных частиц в турбулизованном потоке), Ф.И. Франкля и С.Г.Телетова (получение гидродинамических уравнений двухфазной среды методами осреднения), С.С.Кутателадзе и М.А.Стыриковича (гидравлика газожидкостных потоков).

При моделировании двухфазных сред можно выделить два различных односкоростных и двухскоростных подхода (Нигматулин, 1978). В односкоростном подходе гетерогенные свойства представляются кинетическими коэффициентами и значениями термодинамических параметров или добавлением в уравнения дополнительных членов, учитывающих присутствие других фаз. В двухскоростном подходе рассматриваются уравнения совместного движения двух фаз с учетом механических и термодинамических эффектов, возникающих из-за разных скоростей фаз. Иаучные исследования по моделированию и применению численных методов при исследовании двухфазной среды с помощью односкоростных моделей проведены П.Х.Робертсом, Д.Э.Лопером и В.Н.Доровскиим.

Известно, что первые исследования по построению и изучению математических моделей двухфазных сред были проведены Х.А.Рахматулиным и введено понятие взаимопроникающих континуумов. В работах С.К.Годунова впервые выделен специальный класс дифференциальных уравнений и показано, что данную систему можно представить в виде симметрической системы. В работах Н.Н.Яненко, А.А.Самарского, Г.В.Демидова, В.А.Новикова и З.Г.Гегечкори исследованы метод слабой аппроксимации для линейных уравнений. Первые результаты о сходимости метода слабой аппроксимации для нелинейных уравнений принадлежат Г.И.Марчуку и Г.В.Демидову, доказавшим сходимость метода расщепления для одной из задач краткосрочного прогноза погоды. Ю. Я. Беловым и Г.В.Демидовым и В.Ф.Рапутой исследована сходимость метода слабой аппроксимации для различных вариантов расщепления квазилинейной системы уравнений типа Бюргерса.

В настоящее время к числу учённых, успешно развивающих данную область можно отметить, Д.Ф.Файзуллаева, Ф.Б.Абуталиева, Н.М.Мухиддинова, Р.Садуллаева, А.Бегматова, М. Арипова, Ч.Б.Нормуродова, Н. Равшанова, Б.Х.Хужаярова, Х.Х.Имомназарова, Н.М.Жабборова, А.Неъматова, А.Э.Холмуродова, Б.Ж.Мамасолиева, Э.Ш.Назировой и других. Анализ исследований в данной области показывает, что в настоящее время в недостаточной степени изучено математическое моделирование процессов в многофазных средах, разработка численных методов и эффективных алгоритмов расчета, а также визуализация численных результатов вычислительных экспериментов в двумерных и трехмерных графиках.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнена диссертация. Диссертационное исследование выполнено в соответствии с планом научно-исследовательских Каршинского филиала Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада аль-Хорезми в рамках «Разработка комплексной системы мониторинга состояния окружающей среды производственных объектов с применением информационно-коммуникационных технологий».

Целью исследования является математическое моделирование процессов, представленных уравнениями типа Бюргерса, и решение задачи Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса, возникающей в двухскоростной гидродинамике

Задачи исследования:

усовершенствование математической модели распространения нелинейных волн в двухжидкостной среде с постоянным давлением;

получить систему уравнений типа Римана, как частный случай системы уравнений двухжидкостной среды;

найти решение математической модели распространений волн в двухжидкостной среде с постоянным давлением в виде бегущих волн;

решение задачи Коши для системы одномерных уравнений типа Бюргерса, возникающей в двухскоростной гидродинамике;

численно решить одномерную систему уравнений типа Бюргерса и разработать программу, предназначенную для проведения вычислительных экспериментов на ЭВМ.

Объект исследования. Объектом исследования является двухжидкостная среда с постоянным давлением со сложной реологией.

Предмет исследования. Предметом исследования является математическое моделирование динамических задач распространения нелинейных волн, а также численное исследование их свойств.

Методы исследования. В диссертации использованы численные методы решения дифференциальных уравнений и уравнений математической физики, также методы математического и численного моделирования в виде конечно-разностных схем, методы вычислительной математики и функционального анализа для построения численных решений.

Научная новизна исследования заключается в следующем**:**

усовершенствована математическая модель движения двухжидкостной среды с постоянным давлением на основе метода законов сохранения;

в качестве частного случая усовершенствованной системы уравнений двухжидкостной среды построена система уравнений типа Римана;

решение системы уравнений типа Римана найдено с помощью движущихся волн и для данного решения выведена формула в виде системы нелинейных уравнений;

методом слабой аппроксимации решена задача Коши для системы одномерных уравнений типа Бюргерса, встречающейся в двухскоростной гидродинамике;

методом конечных разностей решена система одномерных уравнений типа Бюргерса, с использованием созданного алгоритма создано программное обеспечение, предназначенное для проведения вычислительных экспериментов на компьютере.

Практические результаты исследования. Решена задача Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса, возникающей в двухскоростной гидродинамике, численно решена периодическая задача для системы типа Бюргерса и разработано программное обеспечение для проведения вычислительных экспериментов.

Достоверность результатов исследования.

Достоверность результатов исследования обосновывается корректностью математической модели на основе подхода, обеспечивающего гиперболичность уравнений модели и их согласованность с законами термодинамики, математической строгостью методов исследования и корректным использованием математического аппарата, также путем сравнения полученных решений с точными решениями в аналогичных постановках для однофазных сред.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования основана на новом подходе к сложным процессам, связанным с уравнениями двухжидкостной среды, основанном на математическом моделировании и использовании метода конечных разностей.

Практическая значимость результатов исследования объясняется тем, что полученные результаты могут быть использованы при исследовании математических моделей различных геологических и технологических процессов, в диссипативном приближении, при решении задач прямой и обратной динамики пороупругости.

Внедрение результатов исследования. Результаты, полученные в диссертации, внедрены в практику в следующих направлениях:

решения системы уравнений двухжидкостной среды в виде движущейся волны использовались при теоретическом и численном исследовании практических геофизических вопросов динамики двухскоростных сред в рамках гранта №0315-2019-0005 «Математическое моделирование термодинамически согласованной математической модели двухфазных сред в диссипативном приближении с перекрестными эффектами» (№ 15301/6-01-29 от 9 декабря 2022 года Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской Академии Наук). Применение научных результатов позволило решить правильную динамическую задачу для двухжидкостных сред.

усовершенственная математическая модель движения двухжидкостной среды с постоянным давлением использована для построения математической модели процесса распространения нелинейных волн в двухжидкостной среде с постоянным давлением в рамках проекта ОТ-Атех-2018-340 «Теоретическое и численное исследования прикладных геофизических задач динамики двухскоростных сред» 2018-2020 гг. (справка № 04/1706 от 14 апреля 2022 года Каршинского государственного университета). Применение научных результатов позволило решить задачу Коши для системы уравнений типа Бюргерса.

Апробация результатов исследования. Результаты исследования обсуждались на 17 научно-практических конференциях, в том числе, на 14 международных и 3 республиканских научно-практических конференциях. **Публикации результатов исследования.** По теме диссертации опубликованы 28 научные работы, из них 8 статей в журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан, в том числе 4 в иностранных, 4 в республиканских журналах, получены 3 свидетельства регистрации программных продуктов для ЭВМ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка использованной литературы. Текст диссертации изложен на 98 страницах

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и восстребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор отечественных и зарубежных научных исследований по теме диссертации и освещена степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимости полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации под названием «**Вспомогательные утверждения**» является вспомогательной, в которой приведены вспомогательные утверждения: неравенства, функциональные пространства, некоторые понятия функционального анализа, линейных уравнений в частных производных первого порядка, принцип максимума и априорные оценки первых производных для параболического уравнения второго порядка.

Рассмотрим ограниченную в R^n область Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ и $C(\bar{\Omega})$ – пространство непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций $f(\mathbf{x})$ с нормой $\|f\|_{C(\bar{\Omega})}=\max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}|f(\mathbf{x})|$. Пусть M —некоторое бесконечное множество непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций ($M\subset C(\bar{\Omega})$).

Определение. Множество M нормированного пространства X называется компактным, если из каждой последовательности $\{x_n\}\subset M$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Интересен вопрос о компактности множества M в $C(\bar{\Omega})$. Для этого введем понятия равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности функций и сформулируем теорему Арцела о компактности.

Определение. Говорят, что функции множества M равномерно ограничены в $C(\bar{\Omega})$, если существует постоянная K, такая что $\|f\|_{C(\bar{\Omega})}\le K$ для всех $f\in M$.

Определение. Говорят, что функции множества M равностепенно непрерывны в $\bar{\Omega}$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любых $x',x''\in\bar{\Omega}$, удовлетворяющих неравенству $|x'-x''|<\delta$, имеет место неравенство $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$, выполняющееся для всех $f\in M$.

Теорема 1. (Арцела). Для того чтобы множество $M\subset C(\bar{\Omega})$ было компактно в $C(\bar{\Omega})$, необходимо и достаточно, чтобы функции из M были равномерно ограничены в $C(\bar{\Omega})$ и равностепенно непрерывны в $\bar{\Omega}$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ элементов из X называется слабо сходящейся, если существует такой элемент $x \in X$, что для каждого функционала $F \in X'$ выполняется равенство $< F, x >= \lim\limits_{n\to\infty} < F, x_n >$.

При этом говорят, что x является слабым пределом последовательности x_n, и обозначают это следующим образом: $x_n \xrightarrow{сл.} x$.

Если x_n сходится слабо к x, то справедливо неравенство $\|x\| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \|x_n\|$.

Во второй главе диссертации, названной "**Термодинамически согласованная математическая модель двухскоростной гидродинамики**", обсуждены построения нелинейных уравнений с частыми производными для описания распространения нелинейных волн в двухжидкостной среде. Получена система дифференциальных уравнений с частными производными, описывающая распространения нелинейных волн в двухжидкостной среде как в бездиссипативном, так и в диссипативном приближении.

Для построения математических моделей предлагается использовать один из наиболее эффективных методов механики сплошных сред – метод законов сохранения, позволяющий получать физически корректные, термодинамически согласованные систем уравнений динамики гетерофазных сред. Динамические уравнения в рамках этого метода строятся на основе процедуры согласования фундаментальных физических принципов: выполнение законов сохранения, первого начала термодинамики и Галилеевой инвариантности уравнений модели. Диссипативные процессы описываются средствами линейной неравновесной термодинамики. Вводимые диссипативные потоки соответствуют законам сохранения и Галилеевой инвариантности уравнений. Термодинамические свойства моделируемой среды определяются заданием уравнения состояния гетерофазной среды. Построенная в рамках такого подхода математическая модель является термодинамически согласованной и внутренне непротиворечивой, причем процедура построения обеспечивает гиперболичность бездиссипативных уравнений рассматриваемой модели. Получена система дифференциальных уравнений, описывающая распространения нелинейных волн в двухжидкостных средах, как в бездиссипативном, так и в диссипативном приближении. В пятом параграфе получена квазиленейная система уравнений типа Бюргерса, как частный случай двухскоростной гидродинамики. Данная система отличается от системы Навье-Стокса для двухжидкостной среды отсутствием давления и условиями несжимаемости

Уравнения движения двухскоростной среды в диссипативном случае с постоянным давлением в системе в изотермическом случае имеет вид

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{u}) = 0, \qquad (1) \qquad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{v}) = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\nu_1}{\rho}\Delta \mathbf{u} + \frac{\nu_1 + 3\mu_1}{3\rho}\nabla \operatorname{div}\mathbf{u} + \frac{\rho_2}{2\rho}\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2 + \mathbf{F}, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{\nu_2}{\rho}\Delta\mathbf{v}+\frac{\nu_2+3\mu_2}{3\rho}\nabla\operatorname{div}\mathbf{v}-\frac{\rho_1}{2\rho}\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2+\mathbf{F}. \quad (4)$$

Система уравнений (1)-(4) замыкается уравнением состояния двухскоростного континуума $p=p\left(\rho,(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2\right)$.

Перепишем уравнения (3) и (4) в эквивалентном виде

$$\rho_1\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla\left(\mathbf{u}^2\right)-\mathbf{u}\times\operatorname{rot}\mathbf{u}\right)=-\nabla p+\nu_1\Delta\mathbf{u}+\frac{\nu_1+3\mu_1}{3}\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}+\frac{\rho_2}{2}\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2+\rho\mathbf{F}, \quad (5)$$

$$\rho_2\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla\left(\mathbf{v}^2\right)-\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}\right)=-\nabla p+\nu_2\Delta\mathbf{v}+\frac{\nu_2+3\mu_2}{3}\nabla\operatorname{div}\mathbf{v}-\frac{\rho_1}{2}\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2+\rho\mathbf{F}, \quad (6)$$

Из этих уравнений можно вывести другие, определяющие изменение вихрей с течением времени. Для этого применим к обеим частям уравнений (5), (6) оператор rot.

Система уравнений двухскоростной гидродинамики сжимаемой среды в случае постоянства насыщенности в обратимом гидродинамическом случае имеет вид:

$$\operatorname{div}(\mathbf{u})=0, \qquad \operatorname{div}(\mathbf{v})=0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+u_k\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{\rho_2}{2\rho}\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2+\mathbf{F}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+v_k\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho}\nabla p-\frac{\rho_1}{2\rho}\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2+\mathbf{F}, \quad (9)$$

а в диссипативном случае, обусловленном коэффициентами вязкостей, подсистема имеет вид

$$\operatorname{div}(\mathbf{u})=0, \qquad \operatorname{div}(\mathbf{v})=0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+u_k\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\eta_1\Delta\mathbf{u}+\frac{\rho_2}{2\rho}\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2+\mathbf{F}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+v_k\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\eta_2\Delta\mathbf{v}-\frac{\rho_1}{2\rho}\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2+\mathbf{F}, \quad (12)$$

Системы уравнений (7)-(9) и (10)-(12) являются обобщением системы уравнений Эйлера и Навье-Стокса для многофазной среды, соответственно.

Подклассом системы (10)-(12) являются системы уравнений типа Бюргерса. В одномерном случае данная система имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\eta_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-b\frac{\rho_2}{\rho_1}(u-v)+F, \ (13), \qquad \frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=\eta_2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+b(u-v)+F, \ (14)$$

В формулах (13) и (14) b - коэффициент межфазного трения, который является аналогом коэффициента Дарси для пористых сред.

В шестом параграфе данной главы получена система уравнений типа Римана для описания распространения волн в двухжидкостной среде. Получена также система уравнений типа Бюргерса. Она описывает три основных эффекта: нелинейное перераспределение энергии по спектру, влияние вязкостей подсистем, а также эффект межфазного трения.

Система (13), (14) отличается от системы двухскоростной гидродинамики в диссипативном случае обусловленной коэффициентом трения, отсутствием давления и условием несжимаемости. По этой причине проблемы, связанные с системой типа Бюргерса, систему иногда называют двухскоростной гидродинамикой с постоянным давлением. Случай $\eta_1 = 0$ и $\eta_2 = 0$ будем называть невязкой системой типа Бюргерса или системой типа Римана, которая дает простейшую квазилинейную систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -b(u - v), \quad (15) \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \varepsilon b(u - v), \quad (16)$$

где $\varepsilon = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}$ - безразмерная положительная постоянная.

Зельдович предложил рассматривать невязкую свободную систему в односкоростном случае в отсутствии массовых сил $(F = 0)$ как уравнение, описывающее эволюцию разреженного газа невзаимодействующих частиц. Согласно его идее, чистая кинематика лежащих в основе частиц может привести к особенностям в распределении массы и ответственна за неоднородность вещества во Вселенной.

Третья глава под названием **«Метод слабой аппроксимации для системы уравнений двухжидкостной среды с постоянным давлением»** посвящена теоретическому и численному исследованию задач для дифференциальных уравнений, полученных во второй главе математеческой модели, описываемой уравнениями нелинейных волн в двухскоростной среде постоянным давлением. Приведены сведения из области функционального анализа и дифференциальных уравнений: общая формулировка метода слабой аппроксимации, теорема сходимости метода слабой аппроксимации, метод слабой аппроксимации для одного типа линейноге уравнения в частных производных второго порядка, задача Коши для уравнения Бюргерса.

Рассмотрена задача Коши для системы уравнений типа Бюргерса, описывающая распространение нелинейных волн в двухжидкостной среде в диссипативном случае.

Для системы уравнений типа Бюргерса (13), (14) в отсутствии массовых сил ($F(t,x) = 0$) в полосе $\Pi_{[0,T]} = \left\{(t,x) : 0 \le t \le T, x \in \mathbb{R}^1\right\}$ рассмотрена задача Коши со следующими начальными данными

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \qquad v\big|_{t=0} = v_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^1. \qquad (17)$$

Нас интересуют решения задачи Коши для системы уравнений типа Бюргерса (13), (14) со свойствами $u(t,x), v(t,x) \in C^{1,2}\left(\Pi_{[0,T]}\right)$ - класс функций один раз непрерывно дифференцируемых по t и два раза непрерывно дифференцируемых по x.

Методом слабой аппроксимации доказаны существование и единственность решения задачи Коши для одномерной системы типа Бюргерса.

Рассмотрим относительно данных Коши $u_0(x)$, $v_0(x)$ задачи (13), (14), (17). Предположим, что $u_0(x), v_0(x) \in C^2\left(\mathbb{R}^1\right)$ и

$$\left|\frac{d^n u_0(x)}{dx^n}\right| \le c_n, \qquad \left|\frac{d^n v_0(x)}{dx^n}\right| \le \tilde{c}_n, \qquad x \in R^1, \qquad n = 0,1,2, \tag{18}$$

где c_n, $\tilde{c}_n$ - некоторые заданные неотрицательные постоянные.

В начале рассмотрен случай бесконечно дифференцируемых данных Коши. Предположим, что $u_0(x), v_0(x) \in C^\infty\left(\mathbb{R}^1\right)$ и

$$\left|\frac{d^n u_0(x)}{dx^n}\right| \le c_n, \quad \left|\frac{d^n v_0(x)}{dx^n}\right| \le \tilde{c}_n, \qquad x \in \mathbb{R}^1, \qquad n = 0,1,2,\ldots, \tag{19}$$

Следуя методу слабой аппроксимации, задачу Коши (13), (14), (17) аппроксимируем задачей

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = 3\eta_1 u^\tau_{xx}, \qquad \frac{\partial v^\tau}{\partial t} = 3\eta_2 v^\tau_{xx}, \qquad n\tau < t \le \left(n + \frac{1}{3}\right)\tau, \tag{20}$$

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} + 3u^\tau u^\tau_x = 0, \qquad \frac{\partial v^\tau}{\partial t} + 3v^\tau v^\tau_x = 0, \qquad \left(n + \frac{1}{3}\right)\tau < t \le \left(n + \frac{2}{3}\right)\tau, \tag{21}$$

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = -3\tilde{b}(u^\tau - v^\tau), \quad \frac{\partial u^\tau}{\partial t} = 3b(u^\tau - v^\tau), \quad \left(n + \frac{2}{3}\right)\tau < t \le (n+1)\tau, \tag{22}$$

$$u^\tau(0,x) = u_0(x), \qquad v^\tau(0,x) = v_0(x), \tag{23}$$

где $\tilde{b} = \dfrac{\rho_2}{\rho_1} b$, $N\tau = t^*$, $N > 1$ - целое, $n = 0,1,\ldots,N-1$, и постоянная t^* удовлетворяет неравенству (24) (см. ниже).

Замечание 1. При построении решения задачи (20)-(23) на первых дробных шагах решается задача Коши для уравнения теплопроводности, а на вторых дробных шагах - задача Коши для уравнения переноса, а на третьих дробных шагах - задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение задачи имеет вид

$$u^\tau = u_0(x) + \frac{3\tilde{b}}{\bar{b}}(v_0(x) - u_0(x))\left(1 - e^{-\bar{b}t}\right),$$

$$v^\tau = v_0(x)e^{-\bar{b}t} + \frac{3\tilde{b}}{\bar{b}} v_0(x)\left(1 - e^{-\bar{b}t}\right) + \frac{3\tilde{b}}{\bar{b}} u_0(x)\left(1 - e^{-\bar{b}t}\right),$$

где $\bar{b} = 3(b + \tilde{b})$.

Пусть выполнены соотношения (19) и постоянные c_1, $\tilde{c}_1$ и t^* удовлетворяют условиям

$$1 - c_1 t^* > 0, \qquad 1 - \tilde{c}_1 t^* > 0 \qquad . \tag{24}$$

Тогда решение u^τ и v^τ в полосе $\Pi_{\left[0,t^*\right]}$ существует и ограничено вместе со всеми своими производными по переменным t, x.

Очевидно, что при любом фиксированном τ решение u^τ и v^τ задачи (20)-(23) ограничены независимо от величины τ

$$\left|u^\tau(t,x)\right| \le c_0, \qquad \left|v^\tau(t,x)\right| \le \tilde{c}_0. \tag{25}$$

Повторяя рассуждения, проведенные выше, можно показать ограниченность частных производных решений u^τ и v^τ по x любого порядка равномерно по τ:

$$\left|\frac{\partial^k u^\tau(t,x)}{\partial x^k}\right| \le C_k, \qquad \left|\frac{\partial^k v^\tau(t,x)}{\partial x^k}\right| \le \tilde{C}_k, \ (t,x)\in \Pi_{\left[0,t^*\right]}, \quad k=0,1,\dots \tag{26}$$

где C_k, $\tilde{C}_k$ - некоторые положительные постоянные, такие что $C_k = c_k, \tilde{C}_k = \tilde{c}_k$.

Из неравенств (25), (26) и уравнений (20)-(23) следуют равномерные по τ оценки:

$$\left|\frac{\partial^{k+1} u^\tau(t,x)}{\partial t\partial x^k}\right| \le s_k, \qquad \left|\frac{\partial^{k+1} v^\tau(t,x)}{\partial t\partial x^k}\right| \le \tilde{s}_k, \ (t,x)\in \Pi_{\left[0,t^*\right]}, \quad k=0,1,\dots \tag{27}$$

Из этих оценок следует, что u^τ, v^τ и их производные по x любого порядка равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в $\Pi_{\left[0,t^*\right]}$. На основании теоремы Арцела, диагональным способом можно выбрать подпоследовательности $\left\{u^{\tau_k}\right\}$, $\left\{v^{\tau_k}\right\}$ последовательностей $\left\{u^{\tau}\right\}$, $\left\{v^{\tau}\right\}$, сходящиеся в $\Pi_{\left[0,t^*\right]}$ к функциям u и v , соответственно вместе со всеми производными по x, равномерно в каждой ограниченной области полосы $\Pi_{\left[0,t^*\right]}$, вследствие чего функции u и v имеют производные любого порядка по x и выполняются соотношения

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \qquad v\big|_{t=0} = v_0(x), \tag{28}$$

$$\left|\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial x^k}\right| \le C_k, \qquad \left|\frac{\partial^k v(t,x)}{\partial x^k}\right| \le \tilde{C}_k, \ (t,x)\in \Pi_{\left[0,t^*\right]}, \quad k=0,1,\dots \tag{29}$$

Единственность решения доказывается стандартным способом. Следовательно, и сами последовательности функций u^τ, v^τ при $\tau \to 0$, сходятся равномерно в $\Pi_{\left[0,t^*\right]}$ к u и v соответственно, вместе со всеми производными. Случай, когда $u_0(x), v_0(x) \in C^2\left(\square^{1}\right)$, доказывается с помощью средних функций. Таким образом доказана следующая

Теорема 2. Пусть функции $u_0(x), v_0(x)$ удовлетворяют условию (19). Тогда решения $u^\tau(t,x)$ и $v^\tau(t,x)$ задачи (20)-(23) сходятся при $\tau \to 0$ равномерно в $\Pi_{[0,T]}$ к решению $u^\tau(t,x)$ и $v^\tau(t,x)$ задачи (13), (14), (17).

Производные $\dfrac{\partial^k u(t,x)}{\partial x^k}$, $\dfrac{\partial^k v(t,x)}{\partial x^k}$, $k = 0,1,\ldots$, сходятся равномерно в $\Pi_{[0,T]}$ к соответствующим производным от $u(t,x)$ и $v(t,x)$.

Получена формула для решения системы уравнений типа Римана в виде бегущих волн в виде системы нелинейных уравнений.

Решение системы (15), (16) ищем в виде бегущей волны. Вводим новую переменную $\xi = x - ct$ и

$$u(x,t) = U(\xi), \qquad v(x,t) = V(\xi), \tag{30}$$

где c - скорость однонаправленной бегущей волны в направлении x в момент времени t. Таким образом, функции $U(\xi)$, $V(\xi)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$-cU' + UU' = -b(U - V), \qquad -cV' + VV' = \varepsilon b(U - V).$$

Отсюда, после несложных преобразований относительно функций $\tilde{U} = (U - c)^2, \tilde{V} = (V - c)^2$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\tilde{U}' = -2b\left(\sqrt{\tilde{U}} - \sqrt{\tilde{V}}\right), \quad (31) \qquad \tilde{V}' = 2\varepsilon b\left(\sqrt{\tilde{U}} - \sqrt{\tilde{V}}\right). \tag{32}$$

Умножая обе стороны уравнения (31) на ε и складывая полученное уравнение с уравнением (32), получим $\left(\varepsilon\tilde{U} + \tilde{V}\right)' = 0$.

Отсюда, после интегрирования, получим связь между функциями $\tilde{U}, \tilde{V}$:

$$\varepsilon\tilde{U} + \tilde{V} = C_1, \tag{33}$$

где C_1 - некоторая положительная постоянная.

Из (31), после исключения $\tilde{V}$, с учетом (33), получим относительно $\tilde{U}$ дифференциальное уравнение $\tilde{U}' = 2b\left(\sqrt{C_1 - \varepsilon\tilde{U}} - \sqrt{\tilde{U}}\right)$,решение, которого имеет вид

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^{3/2}}\Bigg(-2\sqrt{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\tilde{U}} + \sqrt{C_1 - \varepsilon\tilde{U}}\right) + \sqrt{C_1}\Bigg(2\mathrm{ArcTanh}\left[\frac{\sqrt{\tilde{U}}\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{C_1}}\right] - \\ -\ln\left[C_1(1+\varepsilon) - \tilde{U}(1+\varepsilon)^2\right] + \\ +\ln\left[C_1\left(\left(\sqrt{C_1}\sqrt{1+\varepsilon} + \sqrt{C_1 - \tilde{U}\varepsilon}\right)^2 - \tilde{U}\varepsilon^2\right)\right]\Bigg)\Bigg) = 2b\xi + C_2, \tag{34}$$

где C_2 - постоянная интегрирования.

Соотношение (34) после некоторых преобразований примет вид:

$$\sqrt{\tilde{U}} + \sqrt{C_1 - \varepsilon\tilde{U}} - \frac{\sqrt{C_1}}{2\sqrt{1+\varepsilon}}\Bigg(2\mathrm{ArcTanh}\left[\frac{\sqrt{\tilde{U}}\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{C_1}}\right] - \\ -\ln\left[C_1(1+\varepsilon) - \tilde{U}(1+\varepsilon)^2\right] + \\ +\ln\left[C_1\left(\left(\sqrt{C_1}\sqrt{1+\varepsilon} + \sqrt{C_1 - \tilde{U}\varepsilon}\right)^2 - \tilde{U}\varepsilon^2\right)\right]\Bigg) = -b(1+\varepsilon)\xi + C_2.$$

Возвращаясь к исходным функциям $U(\xi)$, $V(\xi)$, получим общее решение системы типа Римана (15), (16) в виде бегущих волн

$$V-c=\pm\sqrt{C_1-\varepsilon(U-c)^2}\,,$$

$$U-c+\sqrt{C_1-\varepsilon(U-c)^2}-\frac{\sqrt{C_1}}{2\sqrt{1+\varepsilon}}\left(2\mathrm{ArcTanh}\left[\frac{(U-c)\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{C_1}}\right]-\right.$$

$$-\ln\left[C_1(1+\varepsilon)-(U-c)^2(1+\varepsilon)^2\right]+$$

$$\left.+\ln\left[C_1\left(\left(\sqrt{C_1}\sqrt{1+\varepsilon}+\sqrt{C_1-(U-c)^2\varepsilon}\right)^2-(U-c)^2\varepsilon^2\right)\right]\right)=-b\left(1+\varepsilon\right)\xi+C_2$$

Рассмотрим распространение нелинейных волн в двухжидкостной среде постоянным давлением. Будем учитывать только эффекты, связанные с вязкостями фаз и коэффициентом межфазного трения. В этом случае такая задача описывается системой (13), (14) и следующими начальными и краевыми условиями

$$u(x,0)=e^{-x^2},\ v(x,0)=0.1\cdot e^{-x^2},\ (35)\quad u(-4,t)=u(4,t),\ v(-4,t)=v(4,t).\ (36)$$

Для решения данной задачи используем явную разностную схему с первым порядком аппроксимации по времени и второй по пространству

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+u_j^n\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}=\nu_1\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}-b(u_j^n-v_j^n)\,, \quad (37)$$

$$\frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\tau}+v_j^n\frac{v_j^n-v_{j-1}^n}{h}=\nu_2\frac{v_{j+1}^n-2v_j^n+v_{j-1}^n}{h^2}+\varepsilon b(u_j^n-v_j^n)\,. \quad (38)$$

В формулах (37) и (38) τ, h - соответствующие шаги дискретизации по времени и пространству.

Представлены результаты численного моделирования распространения нелинейных волн для тестовой модели среды (13), (14). Физические характеристики данной модели принимали следующие значения:

$$\nu_1=0.75\cdot10^{-4}\ \frac{\text{м}^2}{\text{сек}},\qquad \nu_2=0.75\cdot10^{-4}\ \frac{\text{м}^2}{\text{сек}},\qquad b=0.2\ \frac{\text{м}^3}{кг\cdot\text{сек}}.$$

Начальные и краевые условия были как в (35) и (36).

Требуется найти решение задачи (13), (14) в области **D**= {-4 ≤ x ≤ 4, 0 ≤ x ≤ T} (см рис-1.).

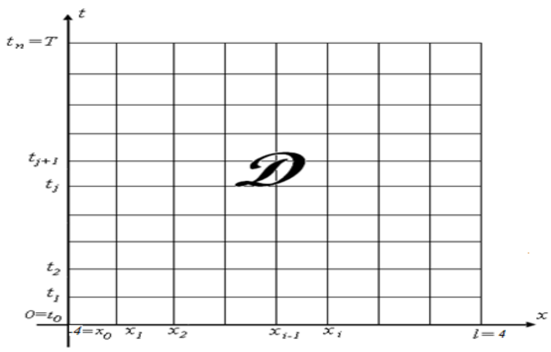


Рис-1. Метод сеток

Точками $-4 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_m = 4$ отрезок [-4; 4] делим на одинаковые m частей. Длину этих частей обозначим h. Через точки x . $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_m$ проведём перпендикулярные отрезки.

Отрезок [0; T] точками $0=t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_j < t_{i+1} < \ldots < t_N = T$ разделим на взаимно одинаковые N части. Длину этих частей обозначим τ. Через точки $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_j, t_{i+1}, \ldots, t_N$ проведём перпендикулярные отрезки. В итоге **D** область покроется сеткой и ставится задача определения значений функций $u(t,x)$, $v(t,x)$ в узлах сетки. Вместо системе дифференциальных уравнений (35) путем приближенной замены частных производных отношением конечных разностей образуется следующая система конечно-разностных уравнений:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} + u_j^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = \nu_1 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - b(u_j^n - v_j^n),$$
$$j = 1,2,\ldots,m-1, \; n = 0,1,\ldots,N-1 \qquad (39)$$

$$\frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\tau} + v_j^n \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{h} = \nu_2 \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{h^2} + \varepsilon b(u_j^n - v_j^n),$$
$$j = 1,2,\ldots,m-1, \; n = 0,1,\ldots,N-1 \qquad (40)$$

здесь j и n- номера конечно-разностных узлов, τ и h - соответственно, шаги сетки для переменных t и x. Отсюда выводится алгоритм последовательности расчета значений функций $u(t,x)$ и $v(t,x)$ в узлах сети:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \tau \cdot u_j^n \cdot \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} + \tau \cdot \nu_1 \cdot \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - \tau \cdot b \cdot (u_j^n - v_j^n),$$
$$j = 1,2,\ldots,m-1, \; n = 0,1,\ldots,N-1 \qquad (41)$$

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \tau \cdot v_j^n \cdot \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{h} + \tau \cdot \nu_2 \cdot \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{h^2} + \tau \cdot \varepsilon \cdot b \cdot (u_j^n - v_j^n).$$
$$j = 1,2,\ldots,m-1, \; n = 0,1,\ldots,N-1 \qquad (42)$$

На основе условий (36) алгоритм расчёта значений функций $u(t,x)$ и $v(t,x)$ выполняется в следующем порядке. При $n=0$ формулы (35) будут иметь следующий вид:

$$u_j^0 = e^{-(x_j)^2}, \quad j = 0,1,\ldots,m \quad (43), \qquad v_j^0 = 0{,}1 \cdot e^{-(x_j)^2}, \quad j = 0,1,\ldots,m \qquad (44)$$

Здесь верхний индекс “0” представляет нулевой слой по времени t. В этом слое даны начальные условия (35). Значения левых и правых сторон выражений (2.13) и (2.14) определяется из краевых условий (36).

$$u_{-4}^{n+1} = u_{-4}^n, \; u_4^{n+1} = u_4^n, \; n = 0,1,\ldots,N-1 \; (45), \qquad v_{-4}^{n+1} = v_{-4}^n, \; v_4^{n+1} = v_4^n, \; n = 0,1,\ldots,N-1 \; (46)$$

Значения функций $u(t,x)$ и $v(t,x)$ по времени вычисляется для каждого слоя из формул (41) и (42). Левые и правые краевые значения вычисляются по формулам (45) и (46).

Значение функций $u(t,x)$ и $v(t,x)$ на узлах сетки можно вычислить на основе вышеуказанного алгоритма. Меняя их значения, можно провести многовариантовые расчёты.

На основе данного алгоритма разработано программное обеспечение для численного расчета значений функций $u(t,x)$ и $v(t,x)$. Программное обеспечение подготовлено на основе языка Python. В разработанную программу значения физических величин v_1, v_2, b и ε в уравнениях (13) и (14) и значения сетки m, N, T, a=-4, c=4 вводятся пользователем. Используя введенные значения, определяются значения функций $u(t,x)$ и $v(t,x)$ на основе вышеописанного алгоритма и генерируются числовые значения, а также визуальный график пространственной формы. Графический материал приведен в Приложении 1. Результаты показали, что разработанный алгоритм и программное обеспечение позволяют решить поставленную задачу. (Приложение 2) Численный расчет велся по схеме (37), (38).

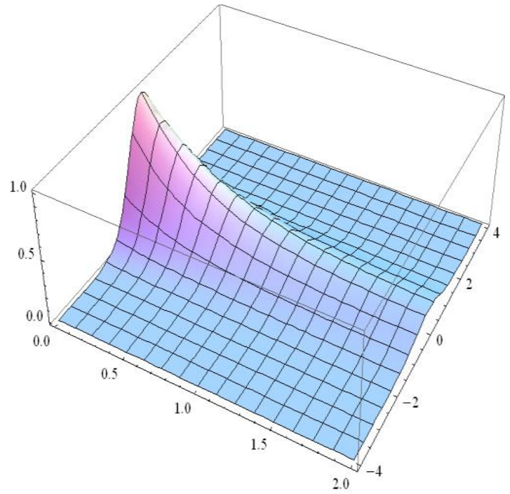


Рис-2. График для $u(t,x)$.

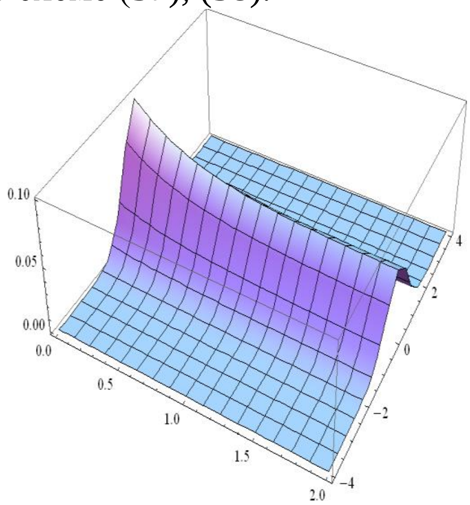


Рис-3. График для $v(t,x)$.

Указанном выше графиках представлены результаты моделирования волновых полей $u(t,x)$ и $v(t,x)$. Из представленных результатов отчетливо видны затухания волновых полей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1.Обсуждены построения нелинейных уравнений с частыми производными для описания распространения нелинейных волн в двухжидкостной среде. Получена система дифференциальных уравнений с частными производными, описывающая распространения нелинейных волн в двухжидкостной среде как в бездиссипативном, так и в диссипативном приближении.

2.Получены системы уравнений типа Римана и Бюргерса. Вторая система описывает три основных эффекта: нелинейное перераспределение энергии по спектру, влияние вязкостей подсистем, а также коэффициента межфазного трения.

3.Рассмотрена задача Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса, возникающей в двухскоростной гидродинамике. Методом слабой аппроксимации доказано существование и единственность решения задачи Коши для одномерной системы типа Бюргерса.

4.Рассмотрено решение системы уравнений типа Римана в виде бегущих волн. Получена формула для ее решения в виде системы нелинейных уравнений.

5.Численно решена периодическая задача для системы типа Бюргерса. Проведены численные эксперименты.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES PhD.15/03.06.2023.FM/T.73.08 AT TASHKENT STATE TRANSPORT UNIVERSITY

KARSHI BRANCH TASHKENT UNIVERSITY OF INFORMATION TECHNOLOGIES NAMED AFTER MUHAMMAD AL-KHWARIZMI

TURDIEV ULUGBEK KAYUMOVICH

MATHEMATICAL MODELING OF PROCESSES DESCRIBED BY BURGERS-TYPE EQUATIONS

05.01.07 – Mathematical modelling. Numerical methods and complexes of applications (Physical and mathematical sciences)

CONTENT OF DISSERTATION ABSTRACT OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PHD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2024

The theme of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of higher education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under number B2019.4.PhD/FM451.

Dissertation has been prepared at the Karshi branch Tashkent university of information technologies.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website (www.tstu.uz) and on the website of "Ziyonet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz.)

Scientific adviser:	**Imomnazarov Kholmatjon Khudaynazarovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Russia, HM and MG ITI)
Official opponents:	**Jabborov Nasriddin Mirzaodilovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Azamov Siroj Sobirovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Dotsent
Leading organization:	**Digital technologies and artificial intelligence research institute**

The defense will take place "7" may 2024 at 2^{00} pm at the meeting of Scientific council PhD.15/03.06.2023.FM/T.73.08 at Tashkent state transport university (Address 100167, Tashkent city, Mirabad district, University Street, 1. Ph.: (+99871) 227-12-24; fax: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

The dissertation can be reviewed at the Information Resource Centre of Tashkent University of Information Technologies (is registered under No 3. (Address: 100167, Tashkent city, Mirabad district, University street, 1. Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on "24" april 2024 y.
(Dispatching protocol No 1 on "24" april 2024 y.).

Kh.M.Shadimetov
Chairman of the scientific council awarding scientific degrees, D.F.M.S., professor

F.A.Nuraliev
Scientific secretary of scientific council awarding scientific degrees, D.F.M.S., professor

I.Mirzaev
Deputy Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S., professor

INTRODUCTION (Abstract of PhD thesis)

The aim of the research is to mathematically model the processes represented by Burgers-type equations and to solve the Cauchy problem for the one-dimensional system of Burgers-type equations that occurs in two-speed hydrodynamics.

The object of the research is a two-fluid medium with constant pressure and complex rheology.

The scientific novelty of the research is as follows:

the mathematical model of the movement of a two-fluid environment with constant pressure was improved based on the method of conservation laws;

a system of Riemann-type equations was constructed as a special case of the system of equations of an improved two-fluid medium;

the solution of the system of Riemann-type equations was found using moving waves, and a formula in the form of a system of nonlinear equations was derived for this solution;

the Cauchy problem for the system of one-dimensional equations of the Burgers type that occurs in two-speed hydrodynamics is solved using the weak approximation method;

the system of one-dimensional equations of the Burgers type was solved by the finite difference method, and with the help of the resulting algorithm, a computer software designed for carrying out computational experiments was created.

Implementation of the research results. The results obtained in the dissertation were put into practice in the following areas:

From the solution of the system of equations of a two-fluid medium in the form of a moving wave was used in the grant project number 0315-2019-0005 “Mathematical modeling of a thermodynamically compatible mathematical model of a two-phase medium in the cross-effect dissipative approximation” on the theoretical and numerical research of practical geophysical issues of the dynamics of two-speed environments (Reference No. 15301/6-01-29 dated December 9, 2022 of the Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of the Siberian Department of the Russian Academy of Sciences). The application of scientific results made it possible to solve the correct dynamic problem for a two-fluid environment.

From the improved mathematical model of the motion of a two-fluid medium with constant pressure OT-Atex-2018-340 in the project “Theoretical and numerical study of practical geophysical issues of dynamics of two-speed environments” was used to build a mathematical model of the process of propagation of nonlinear waves in a double-fluid one-pressure environment (Reference No. 04/1706 of Karshi State University dated April 14, 2022). The application of scientific results made it possible to solve the Cauchy problem for the Burgers-type system of equations.

The structure and volume of the research work. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, and a list of references. The text of the dissertation is presented on 98 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I-bo‘lim (1 часть; part 1)

1. Имомназаров Х.Х., Турдиев У.К. Исследование здачи Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса методом слабой аппроксимации//Проблемы информатики. № 3 (44)/2019.-С. 20-30. (05.00.00, № 67)
2. Turdiev Ulugbek. The Cauchy problem for a one-dimensional system of Burgers type equations arising in two-speed hydrodynamics // European science review. № 3-4/2019. -P. 25-27. (23, GIF=1.44)
3. Турдиев У.К. Задача Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргера, возникающей в двухскоростной гидродинамике// Иновацион технологиялар., №1(37)/2020. -С. 26-29. (05.00.00, №38)
4. Turdiyev U. Q. Ikki tezlikli gidrodinamikada vujudga keladigan byurgers tipidagi bir o'lchovli tenglamalar sistemasi uchun koshi masalasini zaif approksimatsiya usuli // NamDU ilmiy axborotnomasi. №10/2020. –B. 29-36. (01.00.00, №14)
5. Turdiev U., Imomnazarov Kh. A system of equations of the two-velocity hydrodynamics without pressure // AIP Conference Proceedings. 2021. -P. 070002-1–070002-5. (3, Scopus IF=0.4)
6. Турдиев.У.К. Задача Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса// Муҳаммад Ал-Хоразмий авлодлари. № 4 (18)/2021. -С. 153-157. (05.00.00, №10)
7. Турдиев У.К. Метод слабой аппроксимации для задачи коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса возникающей в двухскоростной гидродинамике // Фан ва жамият. №1/2022. -С. 93-95. (05.00.00,№37, 01.000.00,№15)
8. Imomnazarov, B.K., Turdiev, U.K., Erkinova, D.A. Weak approximation method for the cauchy problem for a one–dimensional system of hopf–type equations mathematical notes of nefuthis link is disabled // Mathematical Notes of NEFU. 29(4)/ 2022. -P. 11–20. (3, Scopus IF=0.167).

II bo‘lim (2 Часть; Part 2)

9. Имомназаров. Х.Х, Турдиев У.Қ. Об одной начально- красвой задачи для одномерной системы пороупругости// Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий ал Хоразми. Международная конференция. НУУз им. М.Улугбека 2012г. С. 47-48
10. У.Қ.Турдиев, Ф.Э.Қодиров. Задача Коши для одномерной системы уравнений типи Бюргерея возникающей в двухекростной гидродинамике // Образование, наука, инновации: вклад молодых исследователей Симпозиум “Фундаменттальные и прикладные исследования в физике, химии, математике и инфоматике” 26 апреля. 2018 г. Кемерова. С. 25-27.

11. Х. Х. Имомназаров, У. К. Турдиев. Об одной системе уравнений типа Бюргерса, возникающей в двухжидкостной среде // Международная научная конференция «Дистанционные методы зондирования Земли и фотограмметрия, мониторинг окружающей среды, геоэкология» : сб. материалов в 2 т. Т. 2. – Новосибирск : СГУГиТ. 2018, С. 95.

12. Kholmurodov A.E., Turdiev U. On one system of the burgers type equations//Amaliy matematika va informatsion texnologiyalarning dolzarb muammolari Mejdunarodnaya konferensiya.Toshkent,3-15sentabr 2018 y.S 71

13. Турдиев У.К. Система управнений типа римана, ознакающая в двухжидкостной среде. // Обратные и некорректные задачи. Международная конференция Самарканд, Узбекистан, 2-4 октябрь 2019 г. С. 25-29.

14. Турдиев У.К. Исследование корректности задачи коши для системы управнений типа бюргерса методом слабой аппроксимации. // Обратные и некорректные задачи. Международная конференция Самарканд, Узбекистан, 2-4 октябрь 2019 г. С. 26-31.

15. Б.Х.Имомназаров,У.Қ.Турдиев Применение метода слабой аппроксимации для исследования задача Коши для системы типа Бюргерса,// Международная конференция Қарши, Узбекистан, 4-5 октябрь 2019 г. С.143-146.

16. У.Қ.Турдиев, Х.Х.Имомназаров Некоторые интересные классы систем уравнений возникающих вдвухфазной среде. // Международная конференция Қарши, Узбекистан, 4-5 октябрь 2019 г. С. 184-187.

17. У.Қ.Турдиев, Х.Х.Имомназаров Численное решение некоторых задача для системы типа Хопфа. // Международная конференция Қарши, Узбекистан, 4-5 октябрь 2019 г. С. 187-189.

18. У.Қ.Турдиев, Х.Х.Имомназаров Система уравнений типа Римана, возникающая в двухжидкостной среде. // Международная конференция Қарши, Узбекистан, 4-5 октябрь 2019 г. С. 189-192.

19. Имомназаров Б. Х., Dang Quang A., Турдиев У. К., Коробов П. В. для Задача Коши для системы уравнений типа Бюргерса.// Математическое икомпьютерное моделирование естественно-научных и соыиальных проблем // Международная конференция Пенза 3-6 июня 2019 г.С 9-14.

20. Турдиев У.К. Метод слабой аппроксимации для задачи Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса.// Математик моделлаштириш, ҳисоблаш математикаси ва дастурий таъминот инженериясининг долзарб муаммолари. Республика илмий анжумани материаллари / Қарши давлат университети. 2020, С. 243.

21. Турдиев У. К. Численое решение одномерной системы уравнений двухскоростной гидродинамики с постоянным давлением // Hududlarda raqamli iqtisodiyotni rivojlantirish istiqbollari: muammolar va yechimlar, respublika ilmiy-amaliy anjumani ma’ruzalar to‘plami 2021 yil 23-24 aprel, С. 280.

22. Дилмурадов Н., Турдиев У.К. Метод слабой аппроксимации для задачи коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса возникающей в двухскоростной гидродинамике // Математик физика ва математик

моделлаштиришнинг замонавий муаммолари: Халқаро илмий конференция материаллари (3–4 Декабрь 2021, Қарши, Ўзбекистон).–Қарши. 2021. С. 127.

23. Turdiyev Ulugbek Qayumovich. Byurgers tipidagi tenglamalar sistemasini sonli echish va algoritmini tuzish // “Raqamli transformatsiya jarayoniga axborot texnologiyalarini joriy etishda ma’lumotlarni himoyalash muammolari va yechimlari” Respublika ilmiy-amaliy anjumani. 13 may 2022 y, Қарши, Ўзбекистон. B. 52-54.

24. Турдиев Улугбек Қаюмович, Хужаев Лочин Хусанович Решение и моделирование задачи коши Algoritmlar va dasturlashning dolzarb muammolari // Xalqaro ilmiy-amaliy anjuman materiallari toʻplami. 2023 yil 19-20 may. Qarshi. B. 71-74

25. Soipnazarov Jonibek Muxammadiyevich, Turdiyev Ulugbek Qayumovich. SKALYAR VA VEKTOR MAYDON NAZARIYASI. Algoritmlar va dasturlashning dolzarb muammolari // Xalqaro ilmiy-amaliy anjuman materiallari toʻplami. 2023 yil 19-20 may. Qarshi. B.91-94

26. U.Q.Turdiyev, S.J.Turayev. Дифференциал тенгламаларни сонли усулларда тақрибий ечимини топиш учун электрон дастур // Oʻzbekiston Respublikasi Adliya vazirligi huzuridagi Intellektual mulk agentligi. Elektron hisoblash mashinalari uchun yaratilgan dasturning rasmiy roʻyxatdan oʻtkazilganligi toʻgʻrisidagi guvohnoma № DGU 06116. 26.02.2019.

27. U.Q.Turdiyev. Byurgers tipidagi tenglamalarni tizimi uchun kuchsiz yaqinlashish usulida Koshi masalasini yechish dasturini yaratish // Oʻzbekiston Respublikasi Adliya vazirligi huzuridagi Intellektual mulk agentligi. Elektron hisoblash mashinalari uchun yaratilgan dasturning rasmiy roʻyxatdan oʻtkazilganligi toʻgʻrisidagi guvohnoma №DGU 12962. 08.11.2021.

28. L.X.Xujayev. U.Q.Turdiyev. Босимга эга бўлмаган қўшсюқликли муҳитда ночизиқли тўлқинларнинг тарқалишини математик моделлаштириш ва алгаритими // Oʻzbekiston Respublikasi Adliya vazirligi huzuridagi Intellektual mulk agentligi. Elektron hisoblash mashinalari uchun yaratilgan dasturning rasmiy roʻyxatdan oʻtkazilganligi toʻgʻrisidagi guvohnoma № DGU 25094. 27.05.2023.

Avtoreferat “TDTU xabarnomasi” Ilmiy-amaliy jurnali tahriryatida tahrirdan o‘tkazildi va o‘zbek, rus, ingiliz tillari matnlarni mosligi tekshirildi.
(23.04.2024 y)

Qog’oz bichimi: 84x60 .1/16. Rizograf bosma usuli «Times New Roman» garniturasi.
Shartli bosma tabog‘i: 2,8 b.t. Adadi 100 nusxa. Buyurtma № 43-9/2024.
Nashirga ro‘hsat etildi: 24.04.2024 y.

Toshkent davlat transport universiteti bosmahonasida chop etildi
Bosmaxona manzili: 100167, Toshkent sh., Temiryo‘lchilar ko‘chasi, 1-uy.