

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/2025.27.12.FM.10.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH

V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

XALXADJAYEV BAXTIYOR BATIROVICH

**TO‘RTINCHI TARTIBLI IKKINCHI TUR ARALASH TIPDAGI
TENGLAMA UCHUN TO‘G‘RI VA TESKARI MASALALAR**

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

FIZIKA - MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

Farg‘ona – 2026

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по
физико-математическим наукам**

**Content of the dissertation abstract of Doctor of Philosophy (PhD) in Physical
and Mathematical Sciences**

Xalxadjayev Baxtiyor Batirovich

To'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun to'g'ri va teskari
masalalar..... 3

Халхаджаев Бахтиёр Батирович

Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного типа второго рода
четвертого порядка..... 21

Khalkhadzhayev Bakhtiyor Batirovich

Direct and inverse problems for fourth order mixed-type equations of the
second kind..... 41

E'lon qilingan ishlar ro'yxati

Список опубликованных работ
List of published works 45

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/2025.27.12.FM.10.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH

V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

XALXADJAYEV BAXTIYOR BATIROVICH

**TO‘RTINCHI TARTIBLI IKKINCHI TUR ARALASH TIPDAGI
TENGLAMA UCHUN TO‘G‘RI VA TESKARI MASALALAR**

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

FIZIKA - MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

Farg‘ona – 2026

Fizika - matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida №B 2025.3.PhD/FM1348 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutida bajarilgan.
Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida (www.fdu.uz) va «Ziyonet» Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:

Djamalov Sirojiddin Zuxriddinovich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Rasmiy opponentlar:

Karimov Kamoliddin To'ychiboyevich
fizika-matematika fanlari doktori, dotsent

Zunnunov Raximjon Temirbekovich
fizika-matematika fanlari doktori, katta ilmiy hodim

Yetakchi tashkilot:

O'zbekiston Milliy universiteti.

Dissertatsiya himoyasi Farg'ona davlat universiteti huzuridagi PhD.03/2025.27.12.FM.10.04 raqamli Ilmiy kengashning 2026-yil «27» 08 soat 10⁰⁰ da majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 150100, Farg'ona shahar, Murabbiylar ko'chasi, 19-uy. Tel.: (+99873) 244-44-02, faks: (+99873) 244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz).

Dissertatsiya bilan Farg'ona davlat universitetining Axborot - resurs markazida tanishish mumkin (___ raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 150100, Farg'ona shahar, Murabbiylar ko'chasi, 19- uy. Tel.: (+99873) 244-44-94.

Dissertatsiya avtoreferati 2026-yil «12» 08 kuni tarqatildi.

(2026-yil «10» 08 da 6 raqamli reyestr bayonnomasi).



Sh.T.Karimov

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., dotsent

I.U.Xaydarov

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d., dotsent

Yu.P.Apakov

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida olib borilayotgan ko‘plab amaliy masalalarni tadqiq etish aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni hal qilishga olib keladi. Aralash tipdagi tenglamalar nazariyasining asosiy tushunchalari matematik fizikaning klassik masalalarini tadqiq etish jarayonida shakllanib, hozirgi kunda amaliy masalalarni yechishda keng qo‘llanilmoqda. Biroq zamonaviy tabiatshunoslik muammolari yangi masalalarni sifatli qo‘yish va o‘rganish zaruriyatini keltirib chiqarmoqda. Bunga nolokal masalalar sinfi yaqqol misol bo‘la oladi. So‘nggi o‘n yilliklarda xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun nolokal masalalar ko‘plab matematiklar tomonidan faol tadqiq etilmoqda. Ushbu tadqiqotlarda aralash tipdagi tenglamalar uchun nolokal masalalarni o‘rganishning muhimligi ta’kidlangan. Bu masalalarning trans-tovushli gaz dinamikasi, Alfven tezligi orqali ifodalanuvchi magnitogidrodinamik jarayonlar hamda fizika va mexikaning boshqa muammolari bilan uzviy bog‘liqligi sababli, ularni o‘rganish aralash tipdagi tenglamalar nazariyasining dolzarb yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi.

Dunyoda so‘nggi yillarda matematik fizika tenglamalari uchun nolokal chegaraviy va teskari masalalarni qo‘yish hamda ularni tadqiq etish, shuningdek, yechish usullarini ishlab chiqishga qiziqish ortib bormoqda. Bu borada turli nolokal chegaraviy shartli masalalarni bayon qilish va o‘rganishga alohida e’tibor qaratilmoqda. Bugungi kunga qadar ushbu yo‘nalishda ko‘plab ilmiy tadqiqotlar olib borilib, asosan matematik fizikaning klassik tenglamalari uchun nolokal chegaraviy va teskari masalalar yetarlicha chuqur o‘rganilgan. Shu bilan birga, ikkinchi va yuqori tartibli aralash tipdagi tenglamalar uchun nolokal chegaraviy va teskari masalalarni o‘rganish yetarli darajada rivojlanmagan. Hozirgi vaqtda fanning rivojlanishi ushbu sinf tenglamalar uchun yangi nolokal chegaraviy va teskari masalalarni qo‘yish, ularni tadqiq etish hamda samarali yechish usullarini ishlab chiqishni talab etmoqda.

Mamlakatimizda xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasi bilan uzviy bog‘langan hamda ilmiy va amaliy tadbirlarga ega bo‘lgan fundamental yo‘nalishlarni, xususan, mexanika, matematik biologiya hamda gazlar va suyuqliklar dinamikasi fanlarini rivojlantirish bo‘yicha keng qamrovli chora-tadbirlar amalga oshirilib, muayyan natijalarga erishilmoqda. 2020–2023-yillarda O‘zbekiston Respublikasida matematika fanlari bo‘yicha ta’lim sifatini yaxshilash, ilmiy-tadqiqotlarning natijadorligi va amaliy ahamiyatini oshirish maqsadli dasturida algebra, differensial tenglamalar va ularning tatbiqlari, chiziqsiz dinamik sistemalar, matematik modellash, stoxastik tahlil, funksional tahlil, tibbiy-biologik informatika hamda hisoblash matematikasi fanlarining ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish matematika fanining asosiy vazifalari sifatida belgilangan¹. Ushbu vazifalarni

¹ O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4387-son qarori

amalga oshirishda, xususan, ilmiy-tadqiqot natijalarini ilm-fanning turdosh sohalarida qo'llash maqsadida noklassik tipdagi tenglamalar, xususan, aralash tipdagi tenglamalarni yechish muhim ahamiyatga ega.

O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017-yil 18-maydagi 292-son qarorida matematika sohasidagi ilmiy faoliyatning asosiy vazifalari sifatida belgilangan bo'lib, mazkur yo'nalishlarda ilmiy tadqiqotlar olib borish dolzarb vazifalardan biri hisoblanadi. Ushbu dissertatsiya ishining mavzusi va tadqiqot obyekti O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi PF-4947-son, 2017-yil 17-fevraldagi PF-2789-son, 2017-yil 20-apreldagi PQ-2909-son, 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son hamda 2020-yil 7-maydagi PF-4708-son qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga mosligi. Ushbu tadqiqot O'zbekiston Respublikasida fan va texnologiyalarni rivojlantirishning IV. "Matematika, mexanika va informatika" ustuvor yo'nalishiga muvofiq bajarilgan.

Muammoning o'rganilganlik darajasi. XX asrning o'rtalaridan boshlab xususiy hosilali tenglamalar uchun nolokal chegaraviy masalalarni o'rganishga katta e'tibor qaratila boshlandi. Ushbu yo'nalishdagi dastlabki tadqiqotlar qatoriga A.V. Bitsadze va A.A. Samarskiyning ishlari kiradi. Ularning ishlarida elliptik tenglamalarning ma'lum bir sinfi uchun fazoviy-nolokal masalalar qo'yilib, o'ziga qo'shma bo'lmagan spektral masalalar o'rganilgan. Keyinchalik bu masala Bitsadze-Samarskiy masalasi deb nom olgan. Nolokal chegaraviy masalalar nazariyasi A.V. Bitsadze, M.S. Salohiddinov, T.J. Jo'rayev, A.A. Dezin, A.I. Kojanov, T.Sh. Kalmenov va boshqa ko'plab olimlarning ishlarida rivojlantirilgan.

Ma'lumki, A.V. Bitsadze o'z maqolasida aralash tipdagi tenglamalar uchun Dirixle masalasining nokorrekt qo'yilganligini ko'rsatgan. Shundan kelib chiqib, Dirixle masalasi shartlarining to'g'ri ekanligini ta'minlovchi, chegarani to'liq qamrab oluvchi boshqa shartlar bilan almashtirish mumkinmi, degan tabiiy savol qo'yilgan. Aralash tipdagi tenglamalar uchun bunday nolokal chegaraviy masalalar ilk bor F.I. Frankl tomonidan gaz va aerodinamika masalalarida taklif etilgan. A.N. Terexov, S.N. Glazatov, K.B. Sabitov, M.G. Karatoprakliyev va S.Z. Djamalov ishlarida ikkinchi tartibli aralash tipdagi tenglamalar uchun nolokal masalalar o'rganilib, ularning yechimlarining mavjudligi va yagonaligi Sobolev fazolarida tadqiq qilingan.

Nolokal chegaraviy masalalarni o'rganish jarayonida ularning teskari masalalar bilan uzviy bog'liqligi aniqlangan. Xususiy hosilali tenglamalar nazariyasida teskari masalalar differensial tenglamaning yechimi bilan bir qatorda uning ayrim koeffitsiyentlari yoki o'ng tomonini aniqlashga doir masalalar sifatida qaraladi. Lokal va nolokal chegaraviy shartli ikkinchi tartibli aralash tipdagi tenglamalar uchun chiziqli teskari masalalar A.G. Megrabov, K.B. Sabitov, S.Z. Djamalov, S.G. Pyatkov va R.R. Ashurovlarning ishlarida o'rganilgan. Yuqori tartibli aralash tipdagi tenglamalari uchun lokal chegaraviy masalalar T.J. Jo'rayev, A.Sopuev, Yu.P. Apakov, S.M. Mamajanov, M.S. Salohiddinov, Dj.Amanov va

A.V.Yuldashevalarning ishlarida klassik usullar bilan, V.N.Vragov va I.Ye.Yegorovlarning ishlarida esa funksional usullar bilan o'rganilgan. Shu bilan birga, yuqori tartibli (xususan, to'rtinchi tartibli) aralash tipdagi tenglamalar uchun nolokal chegaraviy shartli to'g'ri va teskari masalalar yetarli darajada tadqiq etilmagan. Ushbu dissertatsiya ishida mazkur yo'nalishdagi mavjud bo'shliqni qisman to'ldirish maqsad qilingan hamda nolokal masalalarni o'rganishda modifikatsiyalangan Galyorkin usuli, aprior baholash va " ε regulyarizatsiya" usullaridan foydalanilgan.

Dissertatsiya mavzusining dissertatsiya bajarilgan oliy ta'lim muassasasining ilmiy – tadqiqot ishlari rejalari bilan bog'liqligi. Dissertatsiya ishi O'zR FA Matematika instituti "Differensial tenglamalar va ularning tatbiqlari" laboratoriyasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejasi doirasida hamda O'zR FA Matematika institutining F-FA-2021-424 "Butun va kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechish" mavzusidagi ilmiy granti asosida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi to'rtinchi tartibli ikkinchi turdagi aralash tipdagi tenglama uchun nolokal chegaraviy va chiziqli teskari masalalar nazariyasini rivojlantirishdan iborat.

Tadqiqot vazifalari quyidagilardan iborat:

Sobolev fazolarida to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun yarim nolokal chegaraviy masalalarning kuchsiz umumlashgan yechimlarining mavjudligi, yagonaligi, regulyarligi va silliqqligini tadqiq qilish;

Sobolev fazolarida to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun davriy tipdagi nolokal chegaraviy masalalarning kuchsiz umumlashgan yechimlarining mavjudligi, yagonaligi, regulyarligi va silliqqligini tadqiq qilish;

Sobolevning anizotrop fazolarida to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun yarim nolokal chegaraviy shartli chiziqli teskari masalalarning korrektiligini isbotlash;

Sobolevning anizotrop fazolarida to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun davriy tipdagi nolokal chegaraviy shartli chiziqli teskari masalalarning korrektiligini isbotlash.

Tadqiqotning obyekti: to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglamalar va kichik parametrli beshinchi tartibli yuklangan differensial tenglamalar sistemalaridan iborat.

Tadqiqotning predmeti to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglamalar uchun to'g'ri va teskari masalalarni o'rganishni o'z ichiga oladi.

Tadqiqotning usullari: dissertatsiyada funksional tahlil, matematik fizika, qatorlar va operatorlarning spektral nazariyasi, " ε regulyarizatsiya", modifikatsiyalangan Galyorkin usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

Sobolev fazolarida to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun yarim nolokal chegaraviy masalalarning kuchsiz umumlashgan va umumlashgan regulyar yechimlarining mavjudligi, yagonaligi hamda silliqlik xossalari funksional tahlil va aprior baholash usullaridan foydalanib isbotlangan;

Sobolev fazolarida to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun davriy tipdagi nolokal chegaraviy masalalarning kuchsiz umumlashgan va umumlashgan regulyar yechimlarining mavjudligi, yagonaligi hamda silliqlik xossalari "ε regulyarizatsiya" va modifikatsiyalangan Galyorkin usuli yordamida asoslangan;

Sobolevning anizotrop fazolarida to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun yarim nolokal chegaraviy shartli chiziqli teskari masalalarning korrektiligi funksional tahlil usullari asosida isbotlangan;

Sobolevning anizotrop fazolarida to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun davriy tipdagi nolokal chegaraviy shartli chiziqli teskari masalalarning korrektiligi differensial tenglamalarning yuklangan sistemalariga keltirish usuli yordamida asoslangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat: davriy tipdagi nolokal va yarim nolokal chegaraviy shartli to'g'ri masalalar hamda to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglamalar uchun chiziqli teskari masalalar o'rganilgan va takomillashtirilgan. Taklif etilgan tadqiqot usullarini turli fizik-kimyoviy, biologik, tibbiy tomografiya va seysmologik geofizik jarayonlarni o'rganishda qo'llash mumkin.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi: matematik isbotlar funksional tahlil, matematik fizika, operatorlarning spektral nazariyasiga, shuningdek, matematik fikrlash va hisob-kitoblarning qat'iyligiga asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati: tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati shundaki, ushbu ishda olingan ilmiy natijalarni yuqori tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar va yuqori tartibli aralash tipdagi tenglamalar nazariyasini rivojlantirishda qo'llash mumkin. Xususan, bu natijalar yuqori tartibli xususiy hosilali va aralash tipdagi differensial tenglamalar nazariyasini yanada rivojlantirish uchun foydalanish mumkin.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati ularning fizik-kimyoviy, biologik, tibbiy va seysmologik jarayonlarni o'rganishda qo'llanilishi mumkinligida namoyon bo'ladi. Xususan, ikkinchi va yuqori tartibli aralash tipdagi tenglamalar uchun nolokal va teskari masalalarni o'rganish orqali gazodinamika, tovush tezligiga yaqin va undan yuqori bo'lgan jarayonlar, Alfven tezligi yordamida magnitogidrodinamik jarayonlar hamda boshqa fizik-mexanik jarayonlarni o'rganish va bashorat qilish mumkin bo'ladi. Bu esa jarayon parametrlarini to'g'ri tanlash imkonini beradi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. To'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglamalar uchun to'g'ri va teskari masalalar bo'yicha olingan ilmiy natijalar asosida:

nolokal chegaraviy shartlar bilan berilgan to'g'ri va teskari masalalarni yechishga oid ilmiy natijalar № NIOKTR 122041800029-5 raqamli xorijiy grant doirasidagi "Asosiy va aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy va boshqaruv masalalari hamda ularni taqsimlangan parametrli tizimlarni o'rganishga tadbirlari" mavzusidagi ilmiy tadqiqot ishlarida foydalanilgan (Rossiya Fanlar akademiyasi Kabardino-Balkar ilmiy markazining Amaliy matematika va avtomatlashtirish instituti, 2025-yil 25-martdagi № 01/13-40 ma'lumotnomasi). Natijada, aralash tipdagi tenglamalar uchun nolokal shartlarga ega chegaraviy masalalarning

yechimlarini sonli qayta ishlash hamda ushbu masalalarning matematik modellarini yaratish imkonini bergan;

aralash tipdagi tenglamalarni tadqiq qilishda, xususan, reaksiya-diffuziya tenglamalaridan bosim taqsimoti va qanot atrofida oqim dinamikasini modellashtirishga oid ilmiy natijalar, O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi Mexanika va inshootlar seysmik mustahkamligi institutida bajarilgan № IL-21071166-sonli "Shamolning past tezligi uchun mo'ljallangan vertikal o'qli shamol turbinasini yaratish" mavzusidagi innovatsion loyihani bajarilishida foydalanilgan (O'zFA, Mexanika va inshootlar seysmik mustahkamligi institutining 2025-yil 10-dekabrda 1704-3-sonli ma'lumotnomasi). Natijada Galyorkin usullari yordamida taqribiy yechimlar uchun olingan baholash usullari past tezlikdagi oqimlarni aniqroq simulyatsiya qilishga, qanotlarning shakli va joylashuvini optimallashtirishga imkon bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Ushbu tadqiqot natijalari 3 ta xalqaro va 5 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokama qilindi.

Tadqiqot natijalarining e'lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo'yicha jami 15 ta ilmiy ish chop qilingan bo'lib, ulardan 8 tasi ilmiy maqola, shulardan 2 tasi xorijiy ilmiy jurnallarda, 6 tasi esa O'zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining falsafa doktori dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan mahalliy ilmiy jurnallarda chop etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Dissertatsiyaning hajmi 100 betni tashkil etadi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga muvofiqligi asoslangan, dissertatsiya mavzu bo'yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar tahlili berilgan, muammoning o'rganilganlik darajasi yoritilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, ob'ekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ilmiy ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo'yicha ma'lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning **"To'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun yarim nolokal chegaraviy masalaning bir qiymatli yechilishi haqida"** deb nomlangan birinchi bobida to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun yarim nolokal chegaraviy shartli to'g'ri masalaning kuchsiz umumlashgan yechimining bir qiymatli yechilishi, regulyar yechimning mavjudligi va yagonaligi isbotlangan, hamda umumlashgan yechimning silliqiligi o'rganilgan.

Ushbu bobning birinchi paragrafida, dissertatsiyaning keyingi paragraflarda qo'yilgan masalalar yechimining mavjud va yagonaligini isbotlash uchun zarur bo'lgan funksional fazolar ta'riflari, shuningdek, tegishli tengsizliklar va lemmalar keltirilgan.

Endigi vazifamiz kelgusida qo'yilgan masalalarni yechish uchun zarur bo'lgan

ba'zi funksional fazolar va belgilashlarni kiritishimiz kerak.

Faraz qilaylik

$$G = (0,1) \times (0,T) \times (0,\ell) = Q \times (0,\ell) = \{(x,t,y); 0 < x < 1, 0 < t < T < +\infty, 0 < y < \ell < +\infty\}$$

uch o'lchamli R^3 fazoda chegaralangan parallelepiped bo'lsin.

$L_2(G)$ bilan G sohada kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar fazosini belgilaymiz, undagi skalyar ko'paytma va normani quyidagicha kiritamiz:

$$(u,v)_0 = \int_G u v dx dt dy, \quad \|u\|_0 = \|u\|_{L_2(G)} = \left(\int_G u^2 dx dt dy \right)^{1/2}$$

Faraz qilaylik $Q = (0,1) \times (0,T)$ bo'lsin, u holda $L_2(Q)$ fazodagi normani

$$\|u\|_{L_2(Q)} = \left(\int_Q u^2 dx dt \right)^{1/2} \text{ ko'rinishda belgilaymiz.}$$

$W_2^2(Q)$ orqali Sobolev fazosini va undagi skalyar ko'paytmani

$$(u,v)_2 = \int_Q (uv + u_x v_x + u_t v_t + u_{tt} v_{tt} + u_{xt} v_{xt} + u_{xx} v_{xx}) dx dt$$

va normani

$$\|u\|_2^2 = \int_Q (u^2 + u_t^2 + u_x^2 + u_{xx}^2 + u_{xt}^2 + u_{tt}^2) dx dt,$$

ko'rinishda belgilaymiz. Xususan, $W_2^0(Q) = L_2(Q)$.

$L_p(Q), (1 \leq p < \infty)$ orqali Q sohada aniqlangan va Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiyalardan iborat va chekli

$$\|u\|_{L_p(Q)} = \left(\int_Q |u|^p dx dt \right)^{1/p}$$

normaga ega bo'lgan Banach fazosini belgilaymiz.

Faraz qilaylik, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ yetarlicha silliq chegaraga ega bo'lgan soha va $Q = \Omega \times (0,T)$ silindrik soha bo'lsin. U holda $W_p^m(Q)$ fazo orqali barcha m -chi tartibli umumlashgan hosilalarigacha $L_p(Q)$ fazoga tegishli bo'lgan funksiyalarning Sobolev fazosi belgilanib, undagi norma quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$\|u\|_{W_p^m(Q)} = \left(\int_Q \left(|u|^p + \sum_{k=0}^m \sum_{(k)} |D^{(k)} u|^p \right) dx dt \right)^{1/p},$$

bu yerda

$$D^{(k)} u = \frac{\partial^{k_0+k_1+k_2+\dots+k_n} u(x,t)}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}, |k| = \sum_{i=0}^n k_i.$$

$C^\ell(Q) (\ell = 0,1,2,\dots)$ orqali biz Q sohada ℓ - tartibli hosilalarigacha uzluksiz bo'lgan funksiyalar fazosini belgilaymiz. Xususan,

$$C^0(Q) = C(Q), \|u\|_{C(Q)} = \max_{(x,t) \in Q} |u(x,t)|.$$

$$\text{Umumiy holda } \|u\|_{C^\ell(Q)} = \|u\|_{C(Q)} + \sum_{|k| \leq \ell} \|D^{(k)}u\|_{C(Q)}.$$

Keyinchalik, chiziqli teskari masalalarning to'g'ri qo'yilishini (korrektiligini) o'rganish uchun biz quyidagi normal $W_2^{\ell,s}(G)$ Sobolevning anizotrop fazosini aniqlashimiz kerak:

$$\|u\|_{W_2^{\ell,s}(G)}^2 = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \mu_k^4)^s \|u_k(x,t)\|_{W_2^\ell(Q)}^2, \quad (\text{A})$$

bu yerda $3 \leq s, 4 \leq \ell$ ixtiyoriy chekli musbat butun sonlar, $u_k(x,t), k=1,2,3,\dots$ funksiyalar esa, quyidagi xos funksiyalar $Y_k(y) = \{\sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \mu_k y\}$ va xos sonlar $\mu_k = \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2, k=1,2,3,\dots$, bo'yicha $u(x,t,y)$ funksiyaning Furiye koeffitsiyentlaridir.

$W_2^\ell(Q)$ Sobolev fazosidagi norma esa quyidagicha aniqlanadi:

$$\|\mathcal{J}\|_{W_2^\ell(Q)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq \ell} \int_Q |D^\alpha \mathcal{J}|^2 dx dt,$$

α multiindeks, D^α esa x va t o'zgaruvchilar bo'yicha umumlashgan hosila.

Ma'lumki $W_2^{\ell,s}(G)$ fazo (A) norma bilan Banach fazosini tashkil qiladi.

Turli xil aprior baholarni chiqarishda biz ko'pincha quyidagi tengsizliklardan foydalanamiz:

Gyolder tengsizligi. $\forall u \in L_p(Q)$ va $\forall v \in L_q(Q)$ bo'lsin, bu yerda $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

U holda quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$\left| \int_Q uv dx dt \right| \leq \left(\int_Q |u|^p dx dt \right)^{1/p} \left(\int_Q |v|^q dx dt \right)^{1/q}.$$

Yung tengsizligi.

$$\forall u, v \in R, \forall \sigma > 0, p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ holda } |u \cdot v| \leq \frac{\sigma u^p}{p} + \frac{\sigma^{-1} v^q}{q}.$$

Koshining σ tengsizligi (Yung tengsizligining $p = q = 2$ bo'lgandagi holi).

$$\forall u, v \in R, \forall \sigma > 0, 2|u \cdot v| \leq \sigma u^2 + \frac{v^2}{\sigma}.$$

Keyinchalik chiziqli teskari masalalarni o'rganish uchun bizga Sobolevning joylashtirish teoremlaridan kelib chiqadigan quyidagi baholar kerak bo'ladi:

$$\|\mathcal{J}\|_{C^\alpha(Q)}^2 \leq c_{\alpha+2} \|\mathcal{J}\|_{W_2^{\alpha+2}(Q)}^2.$$

Bu yerda $c_{\alpha+2} (\alpha=0,1)$ – orqali turli musbat sonlarni belgilaymiz.

c_1 – orqali esa $c_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^8}{(1+\mu_k^4)^3}$ yaqinlashuvchi qatorni belgilaymiz.

Qisqartirib akslantirish prinsipi To‘la metrik X fazoda fazo elementlarini yana shu fazo elementlariga o‘tkazuvchi A operator berilgan bo‘lsin. Bundan tashqari, X dan olingan barcha x va y lar uchun

$$\rho(A(x), A(y)) \leq \alpha \rho(x, y)$$

bo‘lsin, bu yerda $\alpha < 1$ x va y ga bog‘liq emas. U holda shunday yagona x_0 nuqta mavjudki $A(x_0) = x_0$. Bu yerda $\rho(x, y)$ – elementlar orasidagi masofa.

1-ta’rif. Agar quyidagi ikkita shart bajarilsa, A operator B fazoda qisqartirib akslantirish deb ataladi:

1) agar $\phi \in B$ bo‘lsa, u holda $A\phi \in B$, ya’ni $A: B \rightarrow B$;

2) agar ϕ_1 va ϕ_2 lar B ga tegishli ixtiyoriy ikkita elementlar bo‘lsa, u holda $\|A\phi_1 - A\phi_2\|_B \leq \rho \|\phi_1 - \phi_2\|_B$, bu yerda $\rho < 1$.

1-teorema (Banax). To‘la metrik fazoda aniqlangan har qanday qisqartirib akslantirish yagona qo‘zg‘almas nuqtaga ega.

2-teorema (Kuchsiz kompaktlik haqida). Faraz qilaylik, B – Banax fazosi va $\{x_n\}$ - normada chegaralangan ketma-ketlik bo‘lsin. U holda $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan, B fazoning x nuqtasiga kuchsiz yaqinlashuvchi $\{x_{n_j}\}$ qisman ketma-ketlik ajratib olishimiz mumkin va uning uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli bo‘ladi:

$$\|x\| \leq \lim_{n_j \rightarrow \infty} \|x_{n_j}\| \leq \overline{\lim_{n_j \rightarrow \infty}} \|x_{n_j}\|.$$

3-teorema. Agar ixtiyoriy $\varphi(x) \in L_2(\Omega)$ uchun $\int_{\Omega} g(x)\varphi(x)dx = 0$ o‘rinli bo‘lsa, u holda $L_2(\Omega)$ ning deyarli hamma joyida $g(x) = 0$ bo‘ladi.

Ushbu bobning ikkinchi paragrafida to‘rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun yarim nolokal chegaraviy masalaning $W_2^2(Q)$ Sobolev fazosidagi kuchsiz umumlashgan yechimi yagona ekanligi isbotlangan.

$Q = (0,1) \times (0,T) = \{(x,t); 0 < x < 1; 0 < t < T < +\infty\}$ sohada to‘rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi quyidagi tenglamani ko‘rib chiqamiz:

$$L_2 u = Pu + Mu = f(x,t), \quad (1)$$

bu yerda $Pu = \sum_{i=0}^4 K_i(x,t) D_t^i u$, $Mu = au_{xxxx} - bu_{xxtt} - cu_{xx}$, $D_t^i u = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}$ ($i = \overline{0,4}$),

$D_t^0 u = u$; a, b, c har xil musbat sonlar.

Faraz qilaylik (1) tenglamaning barcha koeffitsiyentlari $\overline{Q}$ da yetarlicha silliq funksiyalar bo‘lsin, hamda ular uchun quyidagi shartlar bajarilgan bo‘lsin: $K_4(x,t) = K_4(t)$, $K_4(0) = K_4(T) = 0$, $K_{4t}(0) = K_{4t}(T)$ va barcha $x \in [0,1]$ uchun $K_i(x,0) = K_i(x,T)$, ($i = \overline{0,3}$).

(1) tenglama ikkinchi tur aralash tipdagi tenglamalar guruhiga tegishli bo‘ladi, chunki $[0,T]$ kesma ichida $K_4(t)$ funksiyaning ishorasiga t o‘zgaruvchi bo‘yicha hech qanday cheklolar qo‘yilmaydi.

Yarim nolokal chegaraviy masala. $W_2^2(Q)$ Sobolev fazosida (1) tenglamaning quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, p = 0, 1, 2 \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, u_{xx}|_{x=0} = u_{xx}|_{x=1} = 0 \quad (3)$$

$u(x,t)$ kuchsiz umumlashgan yechimi topilsin.

Bu yerda γ noldan farqli son bo‘lib, uning qiymatiga keyinroq aniqlik kiritiladi.

Keyinchalik bizga qo‘yilgan masalani tadqiq qilish uchun, quyidagi ta’rif va yordamchi belgilashlarni kiritamiz:

$W_1(Q)$ orqali quyidagi funksiyalar sinfini aniqlaymiz:

$$W_1(Q) = \left\{ \mathcal{G} \in W_2^4(Q), \gamma D_t^p \mathcal{G}|_{t=0} = D_t^p \mathcal{G}|_{t=T}, p = \overline{0,2}; \mathcal{G}|_{x=0} = \mathcal{G}|_{x=1} = 0, \mathcal{G}_x|_{x=0} = \mathcal{G}_x|_{x=1} = 0 \right\}.$$

Endi bichiziqli formalarni aniqlaymiz: $\forall \mathcal{G} \in W_1(Q)$

$$\Lambda(u, \mathcal{G}) \equiv (Pu, \mathcal{G})_0 = (K_4 u_{tt}, \mathcal{G}_{tt})_0 - ((K_3 - 2K_{4t})u_{tt}, \mathcal{G}_t)_0 + \left(\sum_{i=0}^2 b_i D_t^i u, \mathcal{G} \right)_0,$$

bu yerda $b_i \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$, $b_2(x,t) = K_{4tt} - K_{3t} + K_2$, $b_1 = K_1$, $b_0 = K_0$;

$$m(u, \mathcal{G}) \equiv (Mu, \mathcal{G}) = ((au_{xx} - bu_{tt}), \mathcal{G}_{xx})_0 - (cu_{xx}, \mathcal{G})_0.$$

2-ta’rif. Ixtiyoriy $\mathcal{G} \in W_1(Q)$ funksiya uchun quyidagi:

$$\Lambda(u, e^{-\lambda t} \mathcal{G}) + m(u, e^{-\lambda t} \mathcal{G}) = (f, e^{-\lambda t} \mathcal{G})_0, \lambda = \frac{2}{T} \ln |\gamma| > 0, |\gamma| > 1$$

tenglik bajarilsa, u holda $u(x,t) \in W_2^2(Q)$ funksiya (1)-(3) masalaning kuchsiz umumlashgan yechimi deb ataladi.

4-teorema. Faraz qilaylik (1) tenglamaning koeffitsiyentlari uchun yuqorida keltirilgan shartlar o‘rinli bo‘lsin, bundan tashqari (1) tenglamaning koeffitsiyentlari uchun quyidagi shartlar bajarilgan bo‘lsin: $K_1(x,t) > 0$ yetarlicha katta funksiya va barcha $(x,t) \in \bar{Q}$ lar uchun quyidagi tengsizliklar $-(2K_3 - 3K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta_3 > 0$, $2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0$, $\lambda K_0 - K_{0t} \geq \delta_1 > 0$ o‘rinli bo‘lsin, bu yerda $\lambda = \frac{2}{T} \ln |\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$. U holda ixtiyoriy $f(x,t) \in L_2(Q)$ funksiya uchun (1)-(3) masalaning $w_2^2(Q)$ Sobolev fazosidagi kuchsiz umumlashgan yechimi yagona va mavjud bo‘lib, uning uchun quyidagi $\|u\|_{w_2^2(Q)}^2 \leq c_i \|f\|_0^2$ aprior baho o‘rinli bo‘ladi.

Bundan keyin c_i ($i = 1, 2, \dots$) orqali har xil o‘zgarmas sonlarni belgilaymiz.

1-teorema Galyorkin, aprior baholar va “ ε regularizatsiya” usullari yordamida isbot qilingan.

Birinchi bobning uchinchi paragrafida to‘rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun yarim nolokal chegaraviy masalaning $W_2^4(Q)$ Sobolev fazosidagi umumlashgan regulyar yechimi mavjud va yagona ekanligi isbotlangan.

Q sohada to‘rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi (1) tenglama uchun (2), (3) yarim nolokal chegaraviy masalani ko‘rib chiqamiz.

Faraz qilaylik, (1) tenglamaning barcha koefitsiyentlari $\bar{Q}$ sohada yetarlicha silliq funksiyalar bo‘lsin.

3-ta’rif. (1)-(3) masalaning umumlashgan regulyar yechimi deb, $W_2^4(Q)$ Sobolev fazosidagi masalaning umumlashgan yechimiga aytiladi (ya’ni, (1) tenglamaga kiruvchi barcha umumlashgan hosilalar $L_2(Q)$ fazosiga tegishli bo‘lishi kerak bo‘ladi).

5-teorema. Faraz qilaylik (1) tenglamaning koefitsiyentlari uchun yuqorida keltirilgan barcha shartlar o‘rinli bo‘lsin, bundan tashqari, (1) tenglamaning koefitsiyentlari uchun quyidagi tengsizliklar bajarilgan bo‘lsin: ixtiyoriy $(x,t) \in \bar{Q}$, $K_1(x,t) > 0$ yetarlicha katta funksiya, $K_3(x,t) < 0$ va $\|K_3\|_{C^2(\bar{Q})}$ yetarlicha katta son, $-(2K_3 + (2j-3)K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta_3 > 0$, $(j = \overline{0,2})$ $2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0$, $\lambda K_0 - K_{0t} \geq \delta_1 > 0$, $\lambda = \frac{2}{T} \ln|\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$. U holda $\gamma f(x,0) = f(x,T)$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $f(x,t) \in W_2^1(Q)$ funksiya uchun (1)-(3) masalaning $W_2^4(Q)$ fazodagi yagona umumlashgan regulyar yechimi mavjud bo‘lib, uning uchuni $\|u\|_{W_2^4(Q)}^2 \leq c_2 \|f\|_1^2$ baho o‘rinli bo‘ladi.

Ushbu 5-teorema modifikatsiyalangan Galyorkin usuli, aprior baholash va “ε regulyarizatsiya” usullari yordamida isbot qilingan.

Ushbu bobning to‘rtinchi paragrafida to‘rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi (1) tenglama uchun (2), (3) yarim nolokal chegaraviy masalaning umumlashgan yechimini silliqqligi tadqiq qilingan.

Ma’lumki ushbu bobning oldingi paragrafida biz ushbu (1)-(3) masala umumlashgan regulyar yechimining yagonaligi va mavjudligi, ya’ni $u(x,t) \in W_2^4(Q)$ ni tadqiq qilgan edik.

Ushbu bobning to‘rtinchi paragrafida tenglamaning o‘ng tomoni va koefitsiyentlari uchun ma’lum shartlar bajarilganda, to‘rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi (1) tenglama uchun (2), (3) yarim nolokal chegaraviy masalaning umumlashgan yechimining silliqqligi $W_2^{m+4}(Q)$, $(m \in N \cup \{0\})$ Sobolev fazolarida o‘rganilgan.

Quyida (1) tenglamaning koefitsiyentlari yopiq $\bar{Q}$ sohada yetarlicha differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsin deb faraz qilamiz.

6-teorema. Faraz qilaylik, 5-teoremaning barcha shartlari bajarilgan bo‘lsin, bundan tashqari, barcha $p = 0,1,2,3,\dots,m$ va $q = 0,1,2,3,\dots,m$; lar uchun va barcha $(x,t) \in \bar{Q}$ larda $-2((K_3 + m \cdot K_{4t}) + (2j-3)K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta > 0$, $j = 0,1,2$ va har

qanday $x \in [0,1]$ uchun $D_t^{p+1} K_4|_{t=0} = D_t^{p+1} K_4|_{t=T}$; $D_t^q K_i|_{t=0} = D_t^q K_i|_{t=T}$,
 $(i=0,1,2,3)$ shartlar o'rinli bo'lsin. U holda $\gamma D_t^q f|_{t=0} = D_t^q f|_{t=T}$ shartlarni
qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $f(x,t) \in W_2^{m+1}(Q)$ funksiya uchun (1)-(3) masalaning
 $W_2^{m+4}(Q), (m \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ Sobolev fazolarida yechimi mavjud va yagona bo'lib,
uning uchun quyidagi baho o'rinli bo'ladi:

$$\|u\|_{W_2^{m+4}(Q)}^2 \leq c_{m+2} \|u\|_{W_2^{m+1}(Q)}^2,$$

Ushbu 6-teorema modifikatsiyalangan Galyorkin usuli, aprior baholash va "ε regularizatsiya" usullari hamda parabolik tenglama uchun nolokal masala yechimining silliqigidan foydalangan holda isbot qilingan.

Dissertatsiya ishining ikkinchi bobi "To'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun davriy tipdagi nolokal chegaraviy masalaning bir qiymatli yechilishi haqida" deb nomlangan bo'lib, modifikatsiyalangan Galyorkin usuli, aprior baholash va "ε regularizatsiya" usullaridan foydalanib, to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun davriy tipdagi nolokal chegaraviy masala kuchsiz umumlashgan yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlandi. Shuningdek, umumlashgan yechimning regularlik va silliqiligi xususiyatlari ham tadqiq qilingan.

Ikkinchi bobning birinchi paragrafida to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun davriy tipdagi nolokal chegaraviy masalaning kuchsiz umumlashgan yechimini mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

Q sohada (1) tenglama uchun quyidagi davriy tipdagi nolokal chegaraviy shartli masalani qaraymiz:

Davriy tipdagi nolokal chegaraviy shartli masala: $W_2^2(Q)$ Sobolev fazosidan (1) tenglamaning, quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}; \quad p = 0, 1, 2 \quad (4)$$

$$D_x^q u|_{x=0} = D_x^q u|_{x=1}; \quad q = 0, 1, 2, 3. \quad (5)$$

kuchsiz umumlashgan $u(x,t)$ yechimi topilsin. Bu yerda γ noldan farqli son bo'lib, unga quyida aniqlik kiritiladi.

Faraz qilaylik (1) tenglamaning koeffitsiyentlari uchun 1-bob 2§ dagi shartlar bajarilgan bo'lsin.

Keyinchalik bizga qo'yilgan masalani tadqiq qilish uchun, quyidagi ta'rif va yordamchi belgilashlarni kiritamiz:

$W_2(Q)$ orqali quyidagi funksiyalar sinfini aniqlaymiz:

$$W_2(Q) = \left\{ \vartheta \in W_2^4(Q), \gamma D_t^p \vartheta|_{t=0} = D_t^p \vartheta|_{t=T}, p = \overline{0, 2}; D_x^q \vartheta|_{x=0} = D_x^q \vartheta|_{x=1}; q = 0, 1, 2, 3. \right\}.$$

4-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\vartheta \in W_2(Q)$ funksiya uchun quyidagi:

$$\Lambda(u, e^{-\lambda t} \vartheta) + m(u, e^{-\lambda t} \vartheta) = (f, e^{-\lambda t} \vartheta)_0, \quad \lambda = \frac{2}{T} \ln |\gamma|, \quad |\gamma| > 1$$

integral tenglik bajarilsa, u holda $u(x,t) \in W_2^2(Q)$ funksiya (1), (4), (5) masalaning kuchsiz umumlashgan yechimi deb ataladi.

7-teorema. Faraz qilaylik (1) tenglamaning koeffitsiyentlari uchun yuqorida sanab o'tilgan shartlar o'rinli bo'lsin, bundan tashqari (1) tenglamaning koeffitsiyentlari uchun quyidagi shartlar bajarilgan bo'lsin: $K_1(x,t) > 0$ yetarlicha katta funksiya bo'lsin, va barcha $(x,t) \in \bar{Q}$ lar uchun $-(2K_3 - 3K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta_3 > 0$, $2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0$, $\lambda K_0 - K_{0t} \geq \delta_1 > 0$ tengsizliklar o'rinli bo'lsin. Bu yerda $\lambda = \frac{2}{T} \ln|\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$. U xolda ixtiyoriy $f(x,t) \in L_2(Q)$ funktsiya uchun (1),(4),(5) masalaning Sobolev fazosidagi umumlashgan yagona yechimi mavjud bo'ladi va uning uchun quyidagi aprior baho o'rinli:

$$\|u\|_{W_2^2(Q)}^2 \leq c_1 \|f\|_0^2.$$

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun davriy tipdagi nolokal chegaraviy masalaning umumlashgan regulyar yechimini mavjudligi va yagonaligi tadqiq qilingan.

5-ta'rif. (1), (4),(5) masalaning umumlashgan regulyar yechimi deb, masalaning $W_2^4(Q)$ Sobolev fazosidagi umumlashgan yechimiga aytiladi. (ya'ni, (1) tenglamaga kiruvchi barcha umumlashgan hosilalar $L_2(Q)$ fazosiga tegishli bo'ladi.)

8-teorema. (1) tenglamaning koeffitsiyentlari uchun yuqorida sanab o'tilgan shartlar o'rinli bo'lsin, bundan tashqari, (1) tenglama koeffitsiyentlari uchun quyidagi tengsizliklar bajarilgan bo'lsin: Ihtiyoriy $(x,t) \in \bar{Q}$, $K_1(x,t) > 0$ yetarlicha katta funksiya, $K_3(x,t) < 0$ va $\|K_3\|_{C^2(\bar{Q})}$ yetarlicha katta son, $-(2K_3 - 3K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta_3 > 0$, $2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0$, $\lambda K_0 - K_{0t} \geq \delta_1 > 0$ tengsizliklar bajariladigan bo'lsin, bu yerda $\lambda = \frac{2}{T} \ln|\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$. U xolda ixtiyoriy $f(x,t) \in L_2(Q)$ funktsiya uchun (1),(4),(5) masalaning $W_2^4(Q)$ Sobolev fazosida umumlashgan yagona regulyar yechimi $u(x,t)$ mavjud bo'ladi va uning uchun quyidagi aprior baho o'rinli:

$$\|u\|_{W_2^4(Q)}^2 \leq c_2 \|f\|_1^2$$

Ikkinchi bobning uchinchi paragrafida to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun davriy tipdagi nolokal chegaraviy masalaning umumlashgan yechimini silliqiligi o'rganilgan.

Faraz qilaylik, $0 \leq m$ butun chekli son bo'lsin. Endi (1), (4), (5) masala yechimining $W_2^{m+4}(Q)$ Sobolev fazolaridagi silliqilgini o'rganishga o'tamiz. Quyida (1) tenglama koeffitsiyentlari yopiq $\bar{Q}$ sohada yetarlicha differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin deb faraz qilamiz.

9-teorema. Faraz qilaylik, 8-teoremaning barcha shartlari bajarilgan bo'lsin, bundan tashqari, barcha $p = 0, 1, 2, 3, \dots, m$ va $q = 0, 1, 2, 3, \dots, m$; lar uchun va barcha $(x,t) \in \bar{Q}$ larda $-2((K_3 + mK_{4t}) - (2j - 3)K_{4t} + \lambda K_4) \geq \delta > 0$, $j = 0, 1, 2$ tengsizliklar

o‘rinli bo‘lsin va har qanday $x \in [0,1]$ uchun $D_t^{p+1}K_4|_{t=0} = D_t^{p+1}K_4|_{t=T}$, $D_t^q K_i|_{t=0} = D_t^q K_i|_{t=T}$, ($i = 0,1,2,3$) shartlar o‘rinli bo‘lsin. U holda, $\gamma D_t^q f|_{t=0} = D_t^q f|_{t=T}$ shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $f(x,t) \in W_2^{m+1}$ funksiya uchun (1), (4), (5) masalaning $W_2^{m+4}(Q)$ Sobolev fazolaridagi umumlashgan yechimi mavjud va yagona bo‘lib, uning uchun quyidagi aprior baholar o‘rinli bo‘ladi:

$$\|u\|_{W_2^{m+4}(Q)}^2 \leq c_{m+2} \|u\|_{W_2^{m+1}(Q)}^2, \quad (m = 0,1,2,\dots)$$

9-teorema aprior baholash va “ ε regularizatsiya” usullari yordamida isbot qilingan.

Dissertatsiya ishining uchinchi bobi “To‘rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun chiziqli teskari masalalarning korrektiligi haqida” deb nomlangan bo‘lib, bu bobda parallelepipedda uch o‘lchamli to‘rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun chiziqli teskari masalalar yechimining mavjudligi va yagonaligi o‘rganilgan.

Uchinchi bobning birinchi paragrafida yarim nolokal chegaraviy shartli chiziqli teskari masalaning korrektiligi o‘rganilgan.

Uch o‘lchamli parallelepipedda

$G = (0,1) \times (0,T) \times (0,\ell) = Q \times (0,\ell) = \{(x,t,y); 0 < x < 1; 0 < t < T < +\infty; 0 < y < \ell.\}$ to‘rtinchi tartibli, ikkinchi tur aralash tipdagi tenglamani ko‘rib chiqamiz.

$$Lu = Pu + Mu + Nu = \psi(x,t,y), \quad (6)$$

bu yerda $Pu = \sum_{i=0}^4 K_i(x,t) D_t^i u$; $Mu = au_{xxxx} - bu_{xxtt} - cu_{xx}$; $Nu = u_{yyyy}$,

$$K_4(x,t) = K_4(t), \quad K_4(0) = K_4(T) = 0, \quad K_{4t}(0) = K_{4t}(T), \quad a, b, c - \text{const} > 0, \quad D_t^i u = \frac{\partial^i u}{\partial t^i},$$

$$i = \overline{0,4}, \quad D_t^0 u = u.$$

(6) tenglama to‘rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglamalar guruhiga tegishli bo‘lib, $K_4(t)$ funksiya ishorasiga $[0,T]$ kesma ichida t o‘zgaruvchi bo‘yicha hech qanday cheklovlar qo‘yilmaydi.

Kelgusida $\psi(x,t,y) = g(x,t,y) + h(x,t) \cdot f(x,t,y)$ deb faraz qilamiz, bu yerda $g(x,t,y)$ va $f(x,t,y)$ berilgan ma’lum funksiyalar, $h(x,t)$ funksiya esa aniqlanishi kerak bo‘lgan funksiya.

Chiziqli teskari masala. G sohada (6) tenglamani qanoatlantiruvchi shunday $\{u(x,t,y), h(x,t)\}$ funksiyalarni topish kerakki, $u(x,t,y)$ funksiya quyidagi chegaraviy shartlarni

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}; \quad p = 0,1,2 \quad (7)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad u_{xx}|_{x=0} = u_{xx}|_{x=1} = 0 \quad (8)$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=\ell} = 0, \quad u_{yy}|_{y=0} = u_{yy}|_{y=\ell} = 0 \quad (9)$$

va $h(x,t)$ funksiyani topish uchun qo‘shimcha

$$u(x, t, \ell_0) = \varphi_0(x, t), \quad 0 < \ell_0 < \ell < +\infty, \quad (10)$$

shartni qanoatlantirsin va $h(x, t)$ funksiya bilan birga $U = \{(u, h) | u \in W_2^{4,3}(G); h \in W_2^4(Q)\}$ sinfga tegishli bo'lsin.

Bu yerda $W_2^{4,3}(G)$ orqali Sobolevning anizotrop fazosi belgilangan (ushbu fazo dissertasiyaning 1-bob 1 paragrafida keltirilgan).

6-ta'rif. (6) - (10) teskari masalaning umumlashgan regulyar yechimi deb (6) tenglamani va (7) - (10) shartlarni G sohaning deyarli hamma joyida qanoatlantiruvchi $u(x, t, y) \in U$ funksiyaga aytiladi.

Quyidagi shartlarning bajarilishini talab qilamiz.

Faraz qilaylik, (6) tenglamaning barcha koefitsiyentlari $\bar{Q}$ sohada yetarlicha silliq funksiyalar bo'lsin va berilgan $\varphi_0(x, t)$ funksiyaning o'ng tomoni va koefitsiyentlariga nisbatan quyidagi shartlar bajarilgan bo'lsin:

1-shart (Nolokallik sharti). Barcha $x \in [0, 1]$ lar uchun, $K_i(x, 0) = K_i(x, T)$ $i = \overline{0, 3}$ va $\gamma g(x, 0, y) = g(x, T, y)$, $\gamma f(x, 0, y) = f(x, T, y)$ munosabatlar o'rinli bo'lsin. Bundan tashqari (6) tenglama koefitsiyentlari uchun quyidagi shartlar bajarilgan bo'lsin: *ihyoriy* $(x, t) \in \bar{Q}$ uchun $K_1(x, t) > 0$ yetarlicha katta funksiya, $K_3(x, t) < 0$ va $\|K_3\|_{C^2(\bar{Q})}$ yetarlicha katta son, $-(2K_3 + (2j - 3)K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta_3 > 0$, $(j = 0, 1, 2)$, $2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0$, $\lambda K_0 - K_{0t} \geq \delta_1 > 0$, bu yerda $\lambda = \frac{2}{T} \ln|\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$.

Silliqlik sharti. $g(x, t, \ell_0) = g_0(x, t) \in C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q})$, $f(x, t, \ell_0) = f_0(x, t) \in C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q})$, $|f_0(x, t)| \geq \eta > 0$, $f \in W_2^{3,3}(G)$, $g \in W_2^{1,3}(G)$.

2-shart. $\varphi_0(x, t) \in W_2^5(Q)$, $\gamma D_t^p \varphi_0|_{t=0} = D_t^p \varphi_0|_{t=T}$, $p = 0, 1, 2, 3$, $\varphi_0|_{x=0} = \varphi_0|_{x=1} = 0$, $\varphi_{0xx}|_{x=0} = \varphi_{0xx}|_{x=1} = 0$.

3-shart. Shunday $\sigma > 0$ mavjud bo'lsinki, uning uchun quyidagi tengsizliklar o'rinli bo'lsin: $\delta_0 - 31e^{\lambda T} \sigma^{-1} = \delta > 0$, $q = M \|f\|_{W_2^{3,3}(G)}^2 < 1$, bu yerda $\delta_0 = \min\{\delta_3, \delta_2, \lambda a, \lambda b, \lambda c, \delta_1\}$, $M = \sigma e^{\lambda T} m(\ell \delta)^{-1} \eta^{-2} \|f_0\|_{C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q})}^2$, $m = 10c_1 c_2 c_3$ musbat son, c_i lar 1-bob 1 paragrafida keltirilgan Sobolevning joylashtirish teoremasidagi o'zgaras sonlar.

10-teorema. Faraz qilaylik, (6) tenglamaning koefitsiyentlari uchun yuqorida keltirilgan 1,2 va 3 shartlar o'rinli bo'lsin. U holda ko'rsatilgan U sinfga (6)-(10) chiziqli teskari masala yagona yechimga ega bo'ladi.

(6)-(10) chiziqli teskari masala yechimning korrektiligi integral energiya usuli, maxsus aprior baholash va qisqartirib akslantirish usullari yordamida isbotlangan.

Uchinchi bobning ikkinchi paragrafida to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun davriy tipdagi nolokal chegaraviy shartli chiziqli teskari masalaning korrektiligi o'rganilgan.

Uch o'lchovli G parallelepipedda uch o'lchamli to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi (6) tenglamani ko'rib chiqamiz.

Chiziqli teskari masala. G sohada (6) tenglamani qanoatlantiruvchi shunday $\{u(x,t,y), h(x,t)\}$ funksiyalarni topish kerakki, $u(x,t,y)$ funksiya quyidagi davriy tipdagi nolokal chegaraviy shartlarni

$$\gamma D_t^q u|_{t=0} = D_t^q u|_{t=T}, \quad q = 0, 1, 2 \quad (11)$$

$$D_x^p u|_{x=0} = D_x^p u|_{x=1}, \quad p = 0, 1, 2, 3, \quad (12)$$

$$D_y^p u|_{y=0} = D_y^p u|_{y=\ell}, \quad p = 0, 1, 2, 3. \quad (13)$$

va $h(x,t)$ funksiyani topish uchun $u(x,t,y)$ qo'shimcha

$$u(x,t,\ell_0) = \varphi_0(x,t), \quad 0 < \ell_0 < \ell < +\infty \quad (14)$$

shartni qanoatlantirsin va $h(x,t)$ funksiya bilan birga $U = \{(u,h) | u \in W_2^{4,3}(G); h \in W_2^4(Q)\}$ sinfga tegishli bo'lsin.

Bu yerda $W_2^{4,3}(G)$ orqali Sobolevning anizotrop fazosini belgilaymiz. (Bu fazo 1-bob 1-§ da aniqlangan)

7-ta'rif. (6), (11) - (14) teskari masalaning umumlashgan regulyar yechimi deb (6) tenglamani va (11) - (14) chegaraviy shartlarni G sohaning deyarli hamma joyida qanoatlantiruvchi $u(x,t,y) \in U$ funksiyaga aytiladi.

Quyidagi shartlar bajarilishini talab qilamiz.

Faraz qilaylik, (6) tenglamaning barcha koefitsiyentlari $\bar{Q}$ sohada yetarlicha silliq funksiyalar bo'lsin va berilgan $\varphi_0(x,t)$ funksiyalar va tenglamaning o'ng tomonidagi funksiya va tenglama koefitsiyentlariga nisbatan quyidagi shartlar bajarilgan bo'lsin:

4-shart (Nolokallik sharti). Barcha $x \in [0,1]$ lar uchun, $K_i(x,0) = K_i(x,T)$ ($i = \overline{0,3}$), $\gamma g(x,0,z) = g(x,T,z)$, $\gamma f(x,0,z) = f(x,T,z)$ munosabatlar o'rinli bo'lsin. Bundan tashqari (6) tenglama koefitsiyentlari uchun quyidagi shartlar bajarilsin: Ihtiyoriy $(x,t) \in \bar{Q}$ uchun $K_1(x,t) > 0$ yetarlicha katta funksiya, $K_3(x,t) < 0$ va $\|K_3\|_{C^2(\bar{Q})}$ yetarlicha katta son, $-(2K_3 + (2j-3)K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta_3 > 0$ ($j = \overline{0,2}$), $2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0$, $\lambda K_0 - K_{0t} \geq \delta_1 > 0$, bu yerda $\lambda = \frac{2}{T} \ln|\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$.

Silliqlik sharti. $g(x,t,\ell_0) = g_0(x,t) \in C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q})$, $f(x,t,\ell_0) = f_0(x,t) \in C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q})$, $|f_0(x,t)| \geq \eta > 0$, $f \in W_2^{3,3}(G)$, $g \in W_2^{1,3}(G)$.

5-shart. $\varphi_0(x,t) \in W_2^5(Q)$, $\gamma D_t^q \varphi_0|_{t=0} = D_t^q \varphi_0|_{t=T}$, $q = 0, 1, 2, 3, 4$; $D_x^p \varphi_0|_{x=0} = D_x^p \varphi_0|_{x=1}$, $p = 0, 1, 2, 3$.

6-shart. Shunday $\sigma > 0$ mavjud bo'lsinki, uning uchun quyidagi tengsizliklar o'rinli bo'lsin: $\delta_0 - 31e^{\lambda T} \sigma^{-1} > \delta > 0$, $q = M \|f\|_{W_2^{3,3}(G)}^2 < 1$, bu yerda

$\delta_0 = \min\{\delta_3, \delta_2, \lambda a, \lambda b, \lambda c, \delta_1\}$, $M = \sigma \lambda^4 m (\ell \delta)^{-1} e^{\lambda T} \eta^{-2} \|f_0\|_{C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q})}^2$, $m = 10c_1 c_2 c_3$ musbat o'zgarmas, c_1, c_2, c_3 -lar 1-bob 1-paragrafida keltirilgan Sobolevning joylashtirish teoremasidagi o'zgarmas sonlar.

11-teorema. Faraz qilaylik, (6) tenglamaning koeffitsiyentlari uchun yuqorida keltirilgan 4,5 va 6 shartlar o'rinli bo'lsin. U holda ko'rsatilgan U sinfda (6), (11) - (14) chiziqli teskari masala yagona yechimga ega bo'ladi.

(6), (11) - (14) chiziqli teskari masala yechimning korrektiligi integral energiya usuli, maxsus aprior baholash, ketma-ket yaqinlashishlar va qisqartirib akslantirish usullari yordamida isbotlangan.

XULOSA

Dissertatsiya ishi to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglamalar uchun nolokal chegaraviy shartli to'g'ri va teskari masalalarni kuchsiz, regulyar umumlashgan yechimlarining mavjudligi, yagonaligi va ularning silliqliklarini o'rganishga bag'ishlangan.

Xulosa qilib aytganda, tadqiqot natijalari bo'yicha quyidagi xulosalarga kelish mumkin:

1. Ikkinchi tur to'rtinchi tartibli aralash tipdagi tenglamalar uchun yarim nolokal chegaraviy shartli to'g'ri masalalarning $W_2^2(G)$ Sobolev fazosida umumlashgan yechimining yagonaligi va mavjudligi haqidagi teoremlar isbotlangan, shuningdek to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun yarim nolokal chegaraviy shartli to'g'ri masalalar regulyar yechimining bir qiymatliligi haqidagi teoremlar va $W_2^{m+4}(G), (m \in N \cup \{0\})$ Sobolev fazolarida umumlashgan yechimning silliqlik masalasi o'rganilgan.

2. Ikkinchi tur to'rtinchi tartibli aralash tipdagi tenglamalar uchun davriy tipdagi nolokal chegaraviy shartli to'g'ri masalalarning $W_2^2(G)$ Sobolev fazosida kuchsiz umumlashgan yechimining yagonaligi va mavjudligi haqidagi teoremlar isbotlangan, shuningdek to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun davriy tipdagi nolokal chegaraviy shartli to'g'ri masalalar regulyar yechimining bir qiymatliligi haqidagi teoremlar va $W_2^{m+4}(G), (m \in N \cup \{0\})$ Sobolev fazolarida umumlashgan yechimning silliqlik masalasi o'rganilgan.

3. Sobolevning anizotrop fazosida parallelepipedda uch o'lchamli to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun yarim nolokal chegaraviy shartli chiziqli teskari masalalar yechimining mavjudligi va yagonaligi teoremlari isbotlangan.

4. Sobolevning anizotrop fazosida parallelepipedda uch o'lchamli to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun davriy tipdagi nolokal chegaraviy shartli chiziqli teskari masalalar yechimining mavjudligi va yagonaligi teoremlari isbotlangan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/2025.27.12.FM.10.04 ПО
ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ФЕРГАНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. В.И. РОМАНОВСКОГО

ХАЛХАДЖАЕВ БАХТИЁР БАТИРОВИЧ

**ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ
СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА**

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Фергана – 2026

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико – математическим наукам зарегистрирована в Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за №В 2025.3.PhD/FM1348.

Диссертация выполнена в институте Математики имени В.И.Романовского АН РУз.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб – странице Научного совета (www.fdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (www.ziynet.uz).

Научный руководитель: Джамалов Сирожиддин Зухридинович
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: Каримов Камолиддин Туйчибоевич
доктор физико-математических наук, доцент

Зуннунов Рахимжон Темирбекович
доктор физико-математических наук, с.н.с

Ведущая организация: Национальный университет Узбекистана.

Защита диссертации состоится «27» 08 2026 года в 10⁰⁰ часов на заседании Научного совета PhD.03/2025.27.12.FM.10.04 при Ферганском государственном университете. (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, дом 19. Тел: (+99873) 244-44-02, факс: (+99873) 244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно – ресурсном центре Ферганского государственного университета (зарегистрирована за №796 (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, дом 19). Тел.: (+99873) 244-44-94.

Автореферат диссертации разослан «12» 08 2026 года.
(протокол рассылки №6 от «10» 08 2026 года).



Ш.Т. Каримов
Заместитель председателя научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., доцент

И.У. Хайдаров
Ученый секретарь научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н., доцент

Ю.П. Апаков
Заместитель председателя научного семинара при научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Исследование многих прикладных задач, проводимых в мировом масштабе, приводит к постановке и решению краевых задач для уравнений смешанного типа. Основные понятия теории уравнений смешанного типа сформировались в процессе исследования классических задач математической физики и в настоящее время широко применяются при решении прикладных задач. Однако современные проблемы естествознания требуют постановки и исследования новых задач. Ярким примером этого являются нелокальные задачи. В последние десятилетия нелокальные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных активно исследуются многими математиками. В этих исследованиях подчёркивается важность изучения нелокальных задач для уравнений смешанного типа. Поскольку такие задачи тесно связаны с трансзвуковой газовой динамикой, магнитогидродинамическими процессами, описываемыми скоростью Альфена, а также с другими проблемами физики и механики, их исследование является одним из актуальных направлений теории уравнений смешанного типа.

В последние годы в мире возрастает интерес к постановке и исследованию нелокальных краевых и обратных задач для уравнений математической физики, а также к разработке методов их решения. В этом направлении уделяется особое внимание формулировке и изучению различных задач с нелокальными краевыми условиями. К настоящему времени в данной области выполнено значительное количество исследований, в которых в основном глубоко изучены нелокальные краевые и обратные задачи для классических уравнений математической физики. Вместе с тем, для уравнений смешанного типа второго и более высоких порядков такие задачи изучены недостаточно. Современное развитие науки требует постановки новых нелокальных краевых и обратных задач для данного класса уравнений, их исследования и разработки эффективных методов их решения.

В нашей стране также реализуются широкомасштабные меры по развитию фундаментальных направлений, тесно связанных с теорией дифференциальных уравнений в частных производных и обладающих как научной, так и практической значимостью. В частности, проводятся научные исследования в таких областях, как механика, математическая биология, а также динамика газов и жидкостей. В 2020–2023 годах в рамках программы, направленной на повышение качества образования по математике², эффективности научных исследований и их практической значимости в Республике Узбекистан, определены приоритетные направления, включающие алгебру, дифференциальные уравнения и их приложения,

²Постановление Президента Республики Узбекистан, от 09.07.2019 г. № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан»

нелинейные динамические системы, математическое моделирование, стохастический анализ, функциональный анализ, медико-биологическую информатику и вычислительную математику. В этих направлениях проведение научных исследований на уровне международных стандартов определено в качестве одной из основных задач математической науки. При реализации указанных задач особое значение имеет решение уравнений неклассического типа, в частности, уравнений смешанного типа.

Постановлением Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года № 292 определены основные задачи научной деятельности в области математики, в числе которых проведение научных исследований по указанным направлениям является одной из актуальных задач. Тема и объект диссертационного исследования соответствуют задачам, определённым в Указах и Постановлениях Президента Республики Узбекистан от 7 февраля 2017 года № ПФ-4947, от 17 февраля 2017 года № ПФ-2789, от 20 апреля 2017 года № ПП-2909, от 9 июля 2019 года № ПП-4387, а также от 7 мая 2020 года № ПФ-4708, а также в других нормативно-правовых документах, относящихся к данной сфере деятельности, и данное диссертационное исследование в определённой степени служит реализации поставленных в них задач.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. “Математика, механика и информатика”.

Степень изученности проблемы. С середины XX века изучению нелокальных краевых задач для уравнений в частных производных стало уделяться большое внимание. К числу первых исследований в данном направлении относятся работы А.В. Бицадзе и А.А. Самарского. В этих работах были поставлены и исследованы пространственно-нелокальные задачи для определенного класса эллиптических уравнений, приводящие к изучению несамосопряженных спектральных задач. Впоследствии данная задача получила название задачи Бицадзе–Самарского. Теория нелокальных краевых задач получила дальнейшее развитие в работах А.В. Бицадзе, М.С. Салахитдинова, Т.Д. Джураева, А.А. Дезина, А.И. Кожанова, Т.Ш. Кальменова и других ученых.

Как известно, в работах А.В. Бицадзе показано, что задача Дирихле для уравнений смешанного типа является некорректной. В связи с этим возникает вопрос о замене условий задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу и обеспечивающими корректность задачи. Впервые такие нелокальные краевые задачи были предложены Ф.И. Франклем при исследовании задач газовой динамики и аэродинамики. В работах А.Н. Терехова, С.Н. Глазатова, К.Б. Сабитова, М.Г. Каратопраклиева и С.З. Джамалова изучены нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа второго порядка, в частности, исследованы вопросы существования и единственности решений в весовых пространствах Соболева.

В процессе изучения нелокальных краевых задач была установлена их тесная взаимосвязь с обратными задачами. Под обратными задачами в теории

уравнений в частных производных понимаются задачи, в которых наряду с решением уравнения требуется определить его коэффициенты или правую часть. В дальнейшем линейные обратные задачи для уравнений смешанного типа второго порядка с локальными и нелокальными краевыми условиями исследовались в работах А.Г. Меграбова, К.Б. Сабитова, С.З. Джамалова, С.Г. Пяткова и Р.Р. Ашурова. Для уравнений смешанного типа более высокого порядка локальные краевые задачи изучались классическими методами в работах Т.Д. Джураева, А. Сопуева, Ю.П. Апакова, С.М. Мамажанова, М.С. Салахитдинова, Дж. Аманова и А.В. Юлдашевой, а также функциональными методами в работах В.Н. Врагова и И.Е. Егорова. Вместе с тем, нелокальные краевые задачи и линейные обратные задачи для уравнений смешанного типа высокого порядка, в частности четвертого порядка, изучены недостаточно. В связи с этим в настоящей диссертационной работе предпринята попытка частично восполнить данный пробел. При этом используются методы “ ε -регуляризации”, в сочетании с модифицированным методом Галеркина и априорных оценок.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ лаборатории «Дифференциальные уравнения и их приложения» в Институте математики АН РУз и с научным грантом F-FA-2021-424 “Решение краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных целого и дробного порядков” в Институте математики АН РУз.

Цель исследования является развитие теории нелокальных краевых и линейных обратных задач для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка.

Задачи исследования:

исследование существования, единственности, регулярности и гладкости слабых обобщённых решений полунелокальных краевых задач для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка в пространствах Соболева;

исследование существования, единственности, регулярности и гладкости слабых обобщённых решений нелокальных краевых задач периодического типа для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка в пространствах Соболева;

доказательство корректности линейных обратных задач с полунелокальными краевыми условиями для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка в анизотропных пространствах Соболева;

доказательство корректности линейных обратных задач с нелокальными краевыми условиями периодического типа для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка в анизотропных пространствах Соболева;

Объектом исследования являются уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка, уравнения пятого порядка с малым параметром, нагруженные дифференциальные уравнения для перечисленных уравнений.

Предметом исследования являются прямые и обратные задачи для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка.

Методы исследования: в диссертации использованы методы функционального анализа, математической физики, спектральной теории операторов и рядов.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

доказаны существование, единственность, регулярность и гладкость слабых обобщённых и обобщённых регулярных решений полунелокальных краевых задач для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка в пространствах Соболева с использованием методов функционального анализа и априорных оценок;

обоснованы существование, единственность, регулярность и гладкость слабых обобщённых и обобщённых регулярных решений нелокальных краевых задач периодического типа для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка в пространствах Соболева с применением метода “ ε -регуляризации” и модифицированного метода Галёркина;

доказана корректность линейных обратных задач с полунелокальными краевыми условиями для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка в анизотропных пространствах Соболева на основе методов функционального анализа;

обоснована корректность линейных обратных задач с нелокальными краевыми условиями периодического типа уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка в анизотропных пространствах Соболева с использованием метода сведения к нагруженным системам дифференциальных уравнений.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

усовершенствованы прямые задачи с полунелокальными и нелокальными краевыми условиями периодического типа и линейные обратные задачи для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка. Предложенные методы исследования могут быть использованы при изучении различных физико-химических, биологических, медицинских и сейсмологических процессов.

Достоверность результатов исследования подтверждается строгим использованием методов функционального анализа, математической физики, спектральной теории операторов для решения прямых и линейных обратных задач.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования заключается в том, что научные результаты, полученные в данной работе, могут быть использованы при развитии теории дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка, а также уравнений смешанного типа высокого порядка. В частности, данные результаты могут быть использованы для дальнейшего

развития теории дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка и уравнений смешанного типа.

Практическая значимость результатов исследования проявляется в возможности их применения при изучении физико-химических, биологических, медицинских и сейсмологических процессов. В частности, изучение нелокальных и обратных задач для уравнений смешанного типа второго и высокого порядков позволяет исследовать и прогнозировать газодинамические процессы, процессы, протекающие при скоростях, близких к скорости звука и превышающих её, магнитогидродинамические процессы с использованием скорости Альфена, а также другие физико-механические процессы. Это позволяет правильно выбирать параметры процессов.

Внедрение результатов исследования. На основе научных результатов, полученных по прямым и обратным задачам для уравнений смешанного типа второго рода четвёртого порядка:

научные результаты, посвящённые решению прямых и обратных задач с нелокальными краевыми условиями, были использованы в научно-исследовательских работах в рамках зарубежного гранта № НИОКТР 122041800029-5 по теме «Краевые и управленческие задачи для основных и смешанных уравнений и их приложения к изучению систем с распределёнными параметрами» (Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, справка от 25 марта 2025 года № 01/13-40). В результате появилась возможность численной обработки решений краевых задач с нелокальными условиями для уравнений смешанного типа, а также создания математических моделей этих задач;

научные результаты, полученные при исследовании уравнений смешанного типа, в том числе уравнений реакция-диффузия, применительно к моделированию распределения давления и динамики потока вокруг крыла, были использованы при выполнении инновационного проекта № IL-21071166 «Создание вертикально-осевой ветровой турбины, предназначенной для низких скоростей ветра», реализованного в Институте механики и сейсмостойкости сооружений Академии наук Республики Узбекистан (справка Института механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз от 10 декабря 2025 года № 1704-3). В результате методы оценки, полученные для приближённых решений с помощью методов Галёркина, позволили более точно симулировать течения при низких скоростях, оптимизировать форму и расположение лопастей.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 3 международных и 5 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано всего 15 научных работы, в том числе 8 научных статей, из них 2 опубликована в зарубежных научных журналах, 6 опубликованы в отечественных научных журналах, рекомендованных Высшей аттестационной

комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов докторских диссертаций.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объём диссертации составляет 100 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность и необходимость темы диссертации, освещается совместимость исследования с приоритетными направлениями развития науки и техники республики, указывается уровень изученности проблемы, описываются цель задачи, объект и предмет исследования, описываются научная новизна и практические результаты исследования, раскрывается теоретическая и практическая значимость полученных результатов, информация о внедрении результатов исследования, сведения об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «Об однозначной разрешимости полунелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода четвёртого порядка», доказана однозначная разрешимость слабого обобщенного решения, единственность и существование регулярного решения и изучено гладкость обобщенного решения некоторой прямой задачи с полунелокальной краевой условиями для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка.

В первом параграфе этой главы приводятся некоторые известные факты из теории функционального анализа, в том числе понятия гильбертовых и банаховых пространств, скалярных произведений и норм в этих пространствах, различные неравенства и леммы из теории краевых задач для уравнений в частных производных, которые необходимы для получения основных результатов. В дальнейшем для решения поставленных прямых и обратных задач нам необходимо ввести определения следующих функциональных пространств и некоторые обозначения.

Пусть

$G = (0,1) \times (0,T) \times (0,\ell) = Q \times (0,\ell) = \{(x,t,y); 0 < x < 1, 0 < t < T < +\infty, 0 < y < \ell < +\infty\}$
– ограниченный параллелепипед в трехмерном пространстве R^3 .

Определим $L_2(Q)$ –пространство квадратично суммируемых функций со скалярным произведением и нормой:

$$(u,v)_0 = \int_G uv dx dt, \|u\|_0 = \|u\|_{L_2(Q)} = \left(\int_G u^2 dx dt \right)^{1/2},$$

Пусть $Q = (0,1) \times (0,T)$, тогда норму в пространстве $L_2(Q)$ обозначим следующим образом: $\|u\|_{L_2(Q)} = \left(\int_Q u^2 dx dt \right)^{1/2}$.

Обозначим через $W_2^2(Q)$ пространство Соболева со скалярным произведением $(u, v)_2^2 = \int_Q (uv + u_x v_x + u_t v_t + u_{tt} v_{tt} + u_{xt} v_{xt} + u_{xx} v_{xx}) dx dt$

и нормой $\|u\|_2^2 = \int_Q (u^2 + u_t^2 + u_x^2 + u_{xx}^2 + u_{xt}^2 + u_{tt}^2) dx dt$.

В частности, через $W_2^0(Q) = L_2(Q)$ обозначим пространство квадратично суммируемых функций.

Через $L_p(Q)$, $(1 \leq p < \infty)$ обозначим банахово пространство, состоящее из всех определенных и измеримых (по Лебегу) на Q функций, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{L_p(Q)} = \left(\int_Q |u|^p dx dt \right)^{1/p}.$$

Пусть $\Omega \subset R^n$ с достаточно гладкой границей $Q = \Omega \times (0, T)$. Через $W_p^m(Q)$ обозначим пространство Соболева, состоящее из всех элементов $L_p(Q)$, которые имеют все обобщенные производные до порядка m , суммируемые со степенью p . Норма в $W_p^m(Q)$ определяется равенством

$$\|u\|_{W_p^m(Q)} = \left(\int_Q (|u|^p + \sum_{k=0}^m \sum_{(k)} |D^{(k)}u|^p) dx dt \right)^{1/p},$$

где $D^{(k)}u = \frac{\partial^{k_0+k_1+k_2+\dots+k_n} u(x, t)}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}, |k| = \sum_{i=0}^n k_i$.

Через $C^\ell(Q)$ ($\ell = 0, 1, 2, \dots$) определим пространство непрерывных в Q функций, имеющих непрерывные в Q производные до порядка ℓ включительно,

$$C^0(Q) = C(Q), \|u\|_{C(Q)} = \sup_{(x, t) \in Q} |u(x, t)|.$$

В общем случае $\|u\|_{C^\ell(Q)} = \|u\|_{C(Q)} + \sum_{|k| \leq \ell} \|D^{(k)}u\|_{C(Q)}$.

В дальнейшем для исследования корректности линейных обратных задач, нам необходимо определить анизотропную пространства Соболева $W_2^{\ell, s}(G)$ с нормой

$$\|u\|_{W_2^{\ell, s}(G)}^2 = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \mu_k^4)^s \|u_k(x, t)\|_{W_2^\ell(Q)}^2, \quad (A)$$

где $3 \leq s$, $4 \leq \ell$ — любые конечные положительные целые числа, а функции $u_k(x, t)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ являются коэффициентами Фурье функции $u(x, t, y)$ по

системе $Y_k(y) = \{\sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \mu_k y\}$, $\mu_k = \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2, k = 1, 2, 3, \dots$

Норма в пространстве Соболева $W_2^\ell(Q)$ определяется следующим образом: $\|g\|_{W_2^\ell(Q)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq \ell} \int_Q |D^\alpha g|^2 dx dt$, α – это мультииндекс, D^α – обобщённая производная по переменным x и t . Очевидно, что пространство $W_2^{\ell,s}(G)$ с нормой (А) является банаховым пространством.

При выводе различных априорных оценок мы часто будем использовать следующие неравенства:

Неравенство Гельдера. Пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда для любых функций $u \in L_p(Q)$ и $v \in L_q(Q)$ справедливо следующее неравенство:

$$\left| \int_Q uv dx dt \right| \leq \left(\int_Q |u|^p dx dt \right)^{1/p} \left(\int_Q |v|^q dx dt \right)^{1/q}.$$

Неравенство Юнга.

$$\forall u, v \in R, \forall \sigma > 0, p, q > 1, |u \cdot v| \leq \frac{\sigma u^p}{p} + \frac{\sigma^{-1} v^q}{q} \text{ при } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Неравенство Коши с σ (неравенство Юнга при $p = q = 2$)

$$\forall u, v \in R, \forall \sigma > 0, 2|u \cdot v| \leq \sigma u^2 + \frac{v^2}{\sigma}.$$

В дальнейшем для исследования линейных обратных задачи нам понадобятся следующие оценки, которые следуют из теорем вложений Соболева:

$$\|g\|_{C^\alpha(Q)}^2 \leq c_{\alpha+2} \|g\|_{W_2^{\alpha+2}(Q)}^2.$$

Здесь через $c_{\alpha+2}$ ($\alpha = 0, 1, 2, 3$) – обозначим положительный различные числа. Через c_1 – обозначим сходящийся ряд $c_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^8}{(1 + \mu_k^4)^3}$.

Метод сжимающих отображений. Пусть в полном метрическом пространстве X дан оператор A , переводящий элементы пространства X снова в элементы этого пространства. Пусть, кроме того, для всех x и y из X $\rho(A(x), A(y)) \leq \alpha \rho(x, y)$, где $\alpha < 1$ и не зависит от x и y . Тогда существует одна и только одна точка x_0 , такая, что $A(x_0) = x_0$. Здесь $\rho(x, y)$ – расстояние между элементами x и y пространства X .

Определение 1. Оператор A называется сжимающим на пространстве B , если выполнены следующие два условия:

- 1) если $\phi \in B$, то $A\phi \in B$, т.е. $A: B \rightarrow B$;
- 2) если ϕ_1, ϕ_2 – произвольные два элемента B , то $\|A\phi_1 - A\phi_2\|_B \leq \rho \|\phi_1 - \phi_2\|_B$, где $\rho < 1$.

Теорема 1 (Банаха). *Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве, имеет одну и только одну неподвижную точку.*

Теорема 2 (О слабо компактности). *Пусть B – банахово пространство и $\{x_n\}$ – последовательность, ограниченная по норме в B . Тогда из $\{x_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n_j}\}$, слабо сходящуюся к некоторой точке x пространства B , и справедливо следующее неравенство*

$$\|x\| \leq \liminf_{n_j \rightarrow \infty} \|x_{n_j}\| \leq \overline{\lim}_{n_j \rightarrow \infty} \|x_{n_j}\|.$$

Теорема 3. *Если для любого $\varphi(x) \in L_2(\Omega)$ справедливо $\int_{\Omega} g(x)\varphi(x)dx = 0$, то функция $g(x) = 0$ почти всюду в $L_2(\Omega)$.*

Во втором параграфе этой главы доказаны существование и единственность слабого обобщённого решения полунелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода четвёртого порядка в пространстве Соболева $W_2^2(Q)$.

В области $Q = (0,1) \times (0,T) = \{(x,t); 0 < x < 1; 0 < t < T < +\infty\}$ рассмотрим уравнений смешанного типа второго рода четвертого порядка

$$L_2 u = Pu + Mu = f(x,t). \quad (1)$$

Здесь $Pu = \sum_{i=0}^4 K_i(x,t) D_t^i u$, $Mu = au_{xxxx} - bu_{xxtt} - cu_{xx}$ где $D_t^i u = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}$, $(i = \overline{0,3})$,

$D_t^0 u = u$; a, b, c – некоторые положительные числа.

Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в $\overline{Q}$, и для них выполняются следующие условия: $K_4(x,t) = K_4(t)$, $K_4(0) = K_4(T) = 0$; $K_{4t}(0) = K_{4t}(T)$, а также для всех $x \in [0,1]$ $K_i(x,0) = K_i(x,T)$, $(i = \overline{0,3})$.

Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $K_4(t)$ по переменной t внутри отрезка $[0,T]$ не налагается никаких ограничений.

Полунелокальная краевая задача: Найти обобщённое решение $u(x,t)$ уравнения (1) из пространства Соболева $W_2^2(Q)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}; \quad p = 0,1,2 \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0; \quad u_{xx}|_{x=0} = u_{xx}|_{x=1} = 0 \quad (3)$$

где γ величина отличная от нуля, которая будет уточнена ниже.

В дальнейшем нам необходимы следующее определение и вспомогательные предложения.

Через $W_1(Q)$ определим следующий класс функций:

$$W_1(Q) = \left\{ \vartheta \in W_2^2(Q), \gamma D_t^p \vartheta|_{t=0} = D_t^p \vartheta|_{t=T}, p = \overline{0,2}; \vartheta|_{x=0} = \vartheta|_{x=1} = 0, \vartheta_x|_{x=0} = \vartheta_x|_{x=1} = 0 \right\}$$

Определим следующие билинейные формы: $\forall \vartheta \in W_1(Q)$

$$\Lambda(u, \vartheta) \equiv (Pu, \vartheta)_0 = (K_4 u_{tt}, \vartheta_{tt})_0 - ((K_3 - 2K_{4t})u_{tt}, \vartheta_t)_0 + \left(\sum_{i=0}^2 b_i D_t^i u, \vartheta \right)_0,$$

где $b_i \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$; $b_2(x, t) = K_{4tt} - K_{3t} + K_2$; $b_1 = K_1$; $b_0 = K_0$;
 $m(u, \vartheta) \equiv (Mu, \vartheta) = ((au_{xx} - bu_{tt}), \vartheta_{xx})_0 - (cu_{xx}, \vartheta)_0$.

Определение 2. Функция $u(x, t) \in W_2^2(Q)$ называется слабым обобщённым решением задачи (1)-(3), если для любой функции $\forall \vartheta \in W_1(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\Lambda(u, e^{-\lambda t} \vartheta) + m(u, e^{-\lambda t} \vartheta) = (f, e^{-\lambda t} \vartheta)_0, \lambda = \frac{2}{T} \ln |\gamma| > 0, |\gamma| > 1$$

Теорема 4. Пусть выполнены выше перечисленные условия для коэффициентов уравнения (1), $K_1(x, t) > 0$ – достаточно большая функция; кроме того, пусть выполнены следующие условия для коэффициентов уравнения (1): $-(2K_3 - 3K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta_3 > 0$, $2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0$, $\lambda K_0 - K_{0t} \geq \delta_1 > 0$ для любых $(x, t) \in \overline{Q}$ где $\lambda = \frac{2}{T} \ln |\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$. Тогда если для любого $f(x, t) \in L_2(Q)$ существует единственное слабое обобщенное решение $u(x, t)$ задачи (1)-(3) из пространства Соболева $W_2^2(Q)$, и для нее справедлива следующая априорная оценка $\|u\|_{W_2^2(Q)}^2 \leq c \|f\|_0^2$.

Далее через c_i – обозначим различные положительные постоянные.

Теорема-1 доказана с помощью методами “ ε -регуляризации”, в сочетании с модифицированным методом Галеркина и априорных оценок.

В третьем параграфе этой главы рассматривается однозначное разрешимости регулярного обобщенного решения полунелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка в пространстве Соболева $W_2^4(Q)$.

В области Q рассмотрим уравнения (1) смешанного типа второго рода четвертого порядка с полунелокальными краевыми условиями (2), (3).

Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в $\overline{Q}$, и для них выполняются следующие условия:

$K_4(0) = K_4(T) = 0$, $D_t^p K_4|_{t=0} = D_t^p K_4|_{t=T}$, $(p = 1, 2)$; $K_i(x, 0) = K_i(x, T)$ $i = \overline{0, 3}$ для всех $x \in [0, 1]$.

Определение 3. Регулярным решением задачи (1)-(3) называется обобщённое решение задачи из пространства Соболева $W_2^4(Q)$ (то есть все

обобщённые производные входящие в уравнение (1) должны принадлежать в пространству $L_2(Q)$).

Теорема 5. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены все приведенные выше условия, и, кроме того, справедливы следующие неравенства: для любых $(x,t) \in \bar{Q}$ функция $K_1(x,t) > 0$ является достаточно большой, $K_3(x,t) < 0$ и величина $\|K_3\|_{C^2(\bar{Q})}$ достаточно большое число, кроме того, $-(2K_3 - (2j-3)K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta_3 > 0$ ($j = \overline{0,2}$), $2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0$, $\lambda K_0 - K_{0t} \geq \delta_1 > 0$, для любых $(x,t) \in \bar{Q}$, где $\lambda = \frac{2}{T} \ln|\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$. Тогда для любой функции $f(x,t) \in W_2^1(Q)$ удовлетворяющую условию $\gamma f(x,0) = f(x,T)$ существует единственное регулярное решение $u(x,t)$ задачи (1)-(3) из пространства Соболева $W_2^4(Q)$, и для нее справедливо следующая априорная оценка $\|u\|_{W_2^4(Q)}^2 \leq c_2 \|f\|_1^2$.

Теорема 5 доказана с помощью методами “ ε -регуляризации”, в сочетании с модифицированным методом Галеркина и априорных оценок.

В четвертом параграфе этой главы изучена гладкость обобщенного решения полунелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка.

В предыдущем параграфе данной главы мы для этой задачи исследовали вопросы единственность и существование регулярного обобщенного решения задачи, то есть $u(x,t) \in W_2^4(Q)$.

В четвертом параграфе этой главы изучена гладкость обобщенного решения полунелокальной краевой задачи (2), (3) для (1) уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка в пространствах Соболева $W_2^{m+4}(Q)$, ($m \in N \cup \{0\}$) при выполнении определенных условий для правой части и коэффициентов уравнения (1).

Предположим, что коэффициенты уравнения (1) являются достаточно дифференцируемыми функциями в замкнутой области $\bar{Q}$.

Теорема 6. Пусть выполнены все условия теоремы 5, кроме того, для всех $p = 0,1,2,3,\dots,m$ и $q = 0,1,2,3,\dots,m$; а также для всех $(x,t) \in \bar{Q}$, справедливо неравенство $-2((K_3 + m \cdot K_{4t}) + (2j-3)K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta > 0$, $j = 0,1,2$. Кроме того, для любого $x \in [0,1]$ выполняются условия $D_t^{p+1}K_4|_{t=0} = D_t^{p+1}K_4|_{t=T}$, $D_t^q K_i|_{t=0} = D_t^q K_i|_{t=T}$, ($i = 0,1,2,3$) Тогда для любой функции $f(x,t) \in W_2^{m+1}(Q)$, такой, что $\gamma D_t^q f|_{t=0} = D_t^q f|_{t=T}$ существует, причем единственное, решение задачи (1)-(3) в пространствах Соболева $W_2^{m+4}(Q)$, ($m \in N \cup \{0\}$), для которого справедливы следующие оценки:

$$\|u\|_{W_2^{m+4}(Q)}^2 \leq c_{m+2} \|u\|_{W_2^{m+1}(Q)}^2.$$

Теорема 6 доказана с помощью методов “ ε -регуляризации”, в сочетании с модифицированным методом Галеркина и априорных оценок, а также используя гладкость нелокальных краевых задач для параболического уравнения.

Во второй главе диссертации, названной «Об однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи периодического типа для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка» изучена однозначная разрешимость слабого обобщённого решения одной нелокальной краевой задачи периодического типа для уравнения смешанного типа второго рода четвёртого порядка. Установлены также свойства регулярности и гладкости решений рассматриваемых задач.

В первом параграфе второй главы доказана однозначная разрешимость слабого обобщённого решения нелокальной краевой задачи периодического типа для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка

В области Q будем рассматривать следующую нелокальную краевую задачу периодического типа для уравнения (1):

Нелокальная краевая задача периодического типа: Найти слабое обобщенное решение уравнения (1) в пространстве Соболева $W_2^2(Q)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}; \quad p = 0, 1, 2 \quad (4)$$

$$D_x^q u|_{x=0} = D_x^q u|_{x=1}; \quad q = 0, 1, 2, 3. \quad (5)$$

γ - отличное от нуля число, которое будет уточнено ниже.

В дальнейшем нам необходимы следующее определение и вспомогательные предложения.

Через $W_2(Q)$ определим следующий класс функций:

$$W_2(Q) = \left\{ \vartheta \in W_2^4(Q), \gamma D_t^p \vartheta|_{t=0} = D_t^p \vartheta|_{t=T}, p = \overline{0, 2}; D_x^q \vartheta|_{x=0} = D_x^q \vartheta|_{x=1}; q = 0, 1, 2, 3. \right\}.$$

Определение 4. Функция $u(x, t) \in W_2^2(Q)$ называется слабым обобщённым решением задачи (1), (4)-(5), если для любой функции $\vartheta \in W_2(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\Lambda(u, e^{-\lambda t} \vartheta) + m(u, e^{-\lambda t} \vartheta) = (f, e^{-\lambda t} \vartheta)_0, \quad \lambda = \frac{2}{T} \ln |\gamma|, \quad |\gamma| > 1$$

Теорема 7. Пусть выполнены выше перечисленные условия для коэффициентов уравнения (1), $K_1(x, t) > 0$ – достаточно большая функция; кроме того, пусть выполнены следующие условия для коэффициентов уравнения (1); $-(2K_3 - 3K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta_3 > 0$, $2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0$,

$\lambda K_0 - K_{0t} \geq \delta_1 > 0$, для любых $(x, t) \in \overline{Q}$, где $\lambda = \frac{2}{T} \ln |\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$. Тогда для любого $f(x, t) \in L_2(Q)$, существует единственное обобщенное решение $u(x, t)$

задачи (1),(4),(5) из пространства Соболева $W_2^2(Q)$, и для нее справедлива следующая оценка

$$\|u\|_{W_2^2(Q)}^2 \leq c_1 \|f\|_0^2.$$

Во втором параграфе второй главы доказана однозначная разрешимость регулярного решения уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка с нелокальными краевыми условиями периодического типа.

Определение 5. Назовем функцию $u(x,t)$ регулярным решением задачи (1), (4),(5), если $u \in W_2^4(Q)$ удовлетворяет уравнению (1) и краевые условия (4),(5) почти всюду в области Q . (то есть все обобщенные производные входящие уравнения (1) должны принадлежать в пространстве $L_2(Q)$)

Теорема 8. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены все приведенные выше условия, и, кроме того, справедливы следующие неравенства: для любых $(x,t) \in \bar{Q}$ функция $K_1(x,t) > 0$ является достаточно большой, $K_3(x,t) < 0$ и величина $\|K_3\|_{C^2(\bar{Q})}$ достаточно большое число, кроме того, $-(2K_3 - 3K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta_3 > 0$, $2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0$, $\lambda K_0 - K_{0t} \geq \delta_1 > 0$, для любых $(x,t) \in \bar{Q}$, где $\lambda = \frac{2}{T} \ln|\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$. Тогда для любого $f(x,t) \in L_2(Q)$, удовлетворяющую условию $\gamma f(x,0) = f(x,T)$ существует единственное регулярное решение $u(x,t)$ задачи (1),(4),(5) из пространства Соболева $W_2^4(Q)$, и для нее справедлива следующая априорная оценка:

$$\|u\|_{W_2^4(Q)}^2 \leq c_2 \|f\|_1^2$$

В третьем параграфе второй главы, изучается гладкость решения нелокальной краевой задачи периодического типа для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка.

Предположим, что $0 \leq m$ – целое конечное число. Теперь перейдём к изучению гладкости решения задачи (1), (4), (5) в пространствах Соболева $W_2^{m+4}(Q)$. Ниже для простоты предположим, что коэффициенты уравнения (1) достаточно дифференцируемы функции в замкнутой области $\bar{Q}$.

Теорема 9. Пусть выполнены все условия теоремы 8, кроме того, для всех $p = 0, 1, 2, 3, \dots, m$ и $q = 0, 1, 2, 3, \dots, m$; а также для всех $(x,t) \in \bar{Q}$, справедливо неравенство $-2((K_3 + mK_{4t}) - (2j - 3)K_{4t} + \lambda K_4) \geq \delta > 0$, $j = 0, 1, 2$ кроме того, для любого $x \in [0, 1]$ выполняются условия $D_t^{p+1} K_4|_{t=0} = D_t^{p+1} K_4|_{t=T}$, $D_t^q K_i|_{t=0} = D_t^q K_i|_{t=T}$, $(i = 0, 1, 2, 3)$. Тогда для любой функции $f(x,t) \in W_2^{m+1}(Q)$, такой, что $\gamma D_t^q f|_{t=0} = D_t^q f|_{t=T}$ существует, причем единственное, решение задачи (1), (4), (5) в пространствах Соболева $W_2^{m+4}(Q)$, $(m \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, для которого справедливы следующие оценки:

$$\|u\|_{W_2^{m+4}(Q)}^2 \leq c_{m+2} \|u\|_{W_2^{m+1}(Q)}^2, \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Теорема 9 доказана методами априорных оценок и “ε-регуляризации”.

В третьей главе диссертации, названной “О корректности линейных обратных задач для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка” изучены существования и единственности решения линейных обратных задач для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка в анизотропных пространствах Соболева.

В первом параграфе данной главы исследуется корректность линейной обратной задаче с полунелокальным краевым условием.

В трехмерном параллелепипеде

$$G = (0, 1) \times (0, T) \times (0, \ell) = Q \times (0, \ell) = \{(x, t, y); 0 < x < 1; 0 < t < T < +\infty; 0 < y < \ell.\}$$

рассмотрим уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка

$$Lu = Pu + Mu + Nu = \psi(x, t, y). \quad (6)$$

$$\text{Здесь} \quad Pu = \sum_{i=0}^4 K_i(x, t) D_t^i u, \quad Mu = au_{xxxx} - bu_{xxtt} - cu_{xx}, \quad Nu = u_{yyyy}, \quad \text{где}$$

$$K_4(x, t) = K_4(t), \quad K_4(0) = K_4(T) = 0, \quad K_{4t}(0) = K_{4t}(T), \quad a, b, c - \text{const} > 0,$$

$$D_t^i u = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}, \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4), \quad D_t^0 u = u.$$

Уравнение (6) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $K_4(t)$ по переменной t внутри отрезка $[0, T]$ не налагается никаких ограничений.

В дальнейшем будем предполагать, что

$$\psi(x, t, y) = g(x, t, y) + h(x, t) \cdot f(x, t, y),$$

где $g(x, t, y)$ и $f(x, t, y)$ – заданные функции, а функция $h(x, t)$ подлежит определению.

Линейная обратная задача. Найти функции $\{u(x, t, y), h(x, t)\}$, удовлетворяющие уравнению (6) в области G , такие, что функция $u(x, t, y)$ удовлетворяет следующим краевым условиям

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \quad p = 0, 1, 2 \quad (7)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad u_{xx}|_{x=0} = u_{xx}|_{x=1} = 0 \quad (8)$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=\ell} = 0, \quad u_{yy}|_{y=0} = u_{yy}|_{y=\ell} = 0 \quad (9)$$

и дополнительному условию

$$u(x, t, \ell_0) = \varphi_0(x, t) \quad \text{где} \quad 0 < \ell_0 < \ell < +\infty, \quad (10)$$

и вместе с функцией $h(x, t)$ принадлежит классу

$$U = \{(u, h) | u \in W_2^{4,3}(G); h \in W_2^4(Q)\}.$$

Здесь через $W_2^{4,3}(G)$ обозначено анизотропное пространство Соболева (определение пространства приведены в параграфе 1 главы 1 диссертации).

Определение 6. Регулярным решением обратной задачи (6)-(10) будем называть функцию $u(x, t, y) \in U$, удовлетворяющую уравнению (6) почти всюду в области G , с условиями (7)-(10).

Будем требовать выполнения следующих условий.

Пусть все коэффициенты уравнения (6) достаточно гладкие функции в области $\bar{Q}$ и пусть выполнены следующие условия относительно коэффициентов, правой части уравнения (6) и заданной функции $\varphi_0(x, t)$.

Условие 1 (Нелокальность). Для всех $x \in [0, 1]$ выполняется $K_i(x, 0) = K_i(x, T)$, при $i = \overline{0, 3}$ а также соотношения $\gamma g(x, 0, z) = g(x, T, z)$, $\gamma f(x, 0, z) = f(x, T, z)$. Кроме того, коэффициенты уравнения (6) должны удовлетворять следующим условиям: для любых $(x, t) \in \bar{Q}$ функция $K_1(x, t) > 0$ является достаточно большой, $K_3(x, t) < 0$ и величина $\|K_3\|_{C^2(\bar{Q})}$ достаточно большое число, кроме того, $-(2K_3 + (2j - 3)K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta_3 > 0$, $(j = 0, 1, 2)$; $2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0$, $\lambda K_0 - K_{0t} \geq \delta_1 > 0$, где $\lambda = \frac{2}{T} \ln |\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$.

Гладкость. $g(x, t, \ell_0) = g_0(x, t) \in C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q})$, $f(x, t, \ell_0) = f_0(x, t) \in C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q})$, $|f_0(x, t)| \geq \eta > 0$, $f \in W_2^{3,3}(G)$, $g \in W_2^{1,3}(G)$.

Условие 2. $\varphi_0(x, t) \in W_2^5(Q)$, $\gamma D_t^p \varphi_0|_{t=0} = D_t^p \varphi_0|_{t=T}$, $p = 0, 1, 2, 3$;
 $\varphi_0|_{x=0} = \varphi_0|_{x=1} = 0$, $\varphi_{0xx}|_{x=0} = \varphi_{0xx}|_{x=1} = 0$

Условие 3. Существует такое $\sigma > 0$, что для него справедливы следующие неравенства: $\delta_0 - 31e^{\lambda T} \sigma^{-1} = \delta > 0$, $q = M \|f\|_{W_2^{3,3}(G)}^2 < 1$, где

$$\delta_0 = \min\{\delta_3, \delta_2, \lambda a, \lambda b, \lambda c, \delta_1\}, \quad M = \sigma e^{\lambda T} m(\ell \delta)^{-1} \eta^{-2} \|f_0\|_{C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q})}^2, \quad m = 10c_1 c_2 c_3$$

положительная постоянная, а c_i – константы из теоремы вложения Соболева, приведённые в параграфе 1 главы 1.

Теорема 10. Пусть выполнены вышеперечисленные условия 1, 2 и 3 для коэффициентов уравнения (6). Тогда существует единственное решение линейной обратной задачи (6)-(10) из указанного класса U .

Корректность линейной обратной задачи (6)-(10) доказана на основе метода интегралов энергии, специальных априорных оценок и сглаживающих отображений.

Во втором параграфе третьей главы изучается корректность линейной обратной задаче с нелокальным краевым условием периодического типа для

трёхмерного уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка в параллелепипеде.

В трёхмерном параллелепипеде G рассмотрим уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка (6).

Линейная обратная задача. Найти функции $\{u(x, t, y), h(x, t)\}$, удовлетворяющие уравнению (6) в области G , такие, что функция $u(x, t, y)$ удовлетворяет следующими нелокальными краевыми условиями периодического типа:

$$\gamma D_t^q u|_{t=0} = D_t^q u|_{t=T}; \quad q = 0, 1, 2 \quad (11)$$

$$D_x^p u|_{x=0} = D_x^p u|_{x=1}; \quad p = 0, 1, 2, 3, \quad (12)$$

$$D_y^p u|_{y=0} = D_y^p u|_{y=\ell}; \quad p = 0, 1, 2, 3. \quad (13)$$

и дополнительному условию

$$u(x, t, \ell_0) = \varphi_0(x, t), \quad \text{где } 0 < \ell_0 < \ell < +\infty \quad (14)$$

и вместе с функциями $h(x, t)$ принадлежит классу

$$U = \{(u, h) | u \in W_2^{4,3}(G); h \in W_2^4(Q)\}.$$

Здесь через $W_2^{4,3}(G)$ обозначено анизотропное пространство Соболева.

Определение 7. Регулярным решением задачи (6), (11)-(14) будем называть функцию $u(x, t, y) \in U$, удовлетворяющую уравнению (6) почти всюду в области G и с краевыми условиями (11)-(14).

Будем требовать выполнения следующих условий.

Пусть все коэффициенты уравнения (6) достаточно гладкие функции в области $\bar{Q}$, и пусть выполнены следующие условия относительно коэффициентов, правой части уравнения (6) и заданной функции $\varphi_0(x, t)$;

Условие 4 (Нелокальность). Для всех $x \in [0, 1]$ выполняется $K_i(x, 0) = K_i(x, T)$, при $i = \overline{0, 3}$ а также соотношения $\gamma g(x, 0, z) = g(x, T, z)$, $\gamma f(x, 0, z) = f(x, T, z)$. Кроме того, коэффициенты уравнения (6) должны удовлетворять следующим условиям: для любых $(x, t) \in \bar{Q}$ функция $K_1(x, t) > 0$ является достаточно большой, $K_3(x, t) < 0$ и величина $\|K_3\|_{C^2(\bar{Q})}$ достаточно большое число, кроме того, $-(2K_3 + (2j - 3)K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta_3 > 0$ ($j = \overline{0, 2}$), $2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0$, $\lambda K_0 - K_{0t} \geq \delta_1 > 0$, где $\lambda = \frac{2}{T} \ln |\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$.

Гладкость. $g(x, t, \ell_0) = g_0(x, t) \in C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q})$, $f(x, t, \ell_0) = f_0(x, t) \in C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q})$, $|f_0(x, t)| \geq \eta > 0$, $f \in W_2^{3,3}(G)$, $g \in W_2^{1,3}(G)$.

Условие 5. $\varphi_0(x, t) \in W_2^5(Q)$, $\gamma D_t^q \varphi_0|_{t=0} = D_t^q \varphi_0|_{t=T}$, $q = 0, 1, 2, 3, 4$;
 $D_x^p \varphi_0|_{x=0} = D_x^p \varphi_0|_{x=1}$, $p = 0, 1, 2, 3$.

Условие 6. Существует такое $\sigma > 0$, что для него справедливы следующие неравенства: $\delta_0 - 31e^{\lambda T} \sigma^{-1} > \delta > 0$, $q = M \|f\|_{W_2^{3,3}(G)}^2 < 1$, где $\delta_0 = \min\{\delta_3, \delta_2, \lambda a, \lambda b, \lambda c, \delta_1\}$, $M = \sigma e^{\lambda T} m(\ell \delta)^{-1} \eta^{-2} \|f_0\|_{C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q})}^2$, $m = 10c_1 c_2 c_3$ положительная постоянная, а c_1, c_2, c_3 — константы из теоремы вложения Соболева, приведённые в параграфе 1 главы 1.

Теорема 11. Пусть выполнены вышеперечисленные условия 4, 5 и 6 для коэффициентов уравнения (6). Тогда существует единственное решение линейной обратной задачи (6), (11) - (14) из указанного класса U .

Корректность линейной обратной задачи (6), (11) - (14) доказана на основе метода интегралов энергии, специальных априорных оценок и сжимающих отображений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена развитию теории общих методов решения нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа второго рода четвёртого порядка а также изучению вопросов корректности, по Адамару линейных обратных задач для уравнения смешанного типа второго рода четвёртого порядка, а также для бесконечной системы нагруженных дифференциальных уравнений смешанного типа второго рода четвёртого порядка и для уравнений пятого порядка с малым параметром.

В заключение можно сделать следующие выводы по результатам исследований:

1. Доказаны теоремы единственности и существования слабого обобщённого решения полунелокальной краевой задачи в пространстве Соболева $W_2^2(G)$, а также изучены теоремы об однозначной разрешимости регулярного решения и вопрос гладкости обобщённого решения прямых задач с полунелокальными краевыми условиями для уравнения смешанного типа второго рода четвёртого порядка, в пространствах Соболева $W_2^{m+4}(G), (m \in N \cup \{0\})$

2. Доказаны теоремы единственности и существования слабого обобщённого решения нелокальной краевой задачи периодического типа в пространстве Соболева $W_2^2(G)$, а также изучены теоремы об однозначной разрешимости регулярного решения и вопрос гладкости обобщённого решения прямых задач с нелокальными краевыми условиями периодического типа для уравнения смешанного типа второго рода четвёртого порядка, в пространствах Соболева $W_2^{m+4}(G), (m \in N \cup \{0\})$

3. В анизотропном пространстве Соболева доказаны теоремы единственности и существования решения линейных обратных задач с полунелокальными краевыми условиями для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода четвёртого порядка в параллелепипеде.

4. В анизотропном пространстве Соболева доказаны теоремы единственности и существования решения линейных обратных задач с нелокальными краевыми условиями периодического типа для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода четвёртого порядка в параллелепипеде.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES
PhD.03/2025.27.12.FM.10.04 FERGANA STATE UNIVERSITY

UNIVERSITY V.I. ROMANOVSKY INSTITUTE OF MATHEMATICS

KHALKHADZHAEV BAKHTIYOR BATIROVICH

**DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR A MIXED-TYPE FOURTH-
ORDER EQUATION OF THE SECOND KIND**

01.01.02 – Differential Equations and Mathematical Physics

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

Fergana – 2026

The theme of Dissertation of Doctor of Philosophy (PhD) on Physical and Mathematical Sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number №B2025.3.PhD/FM1348.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website (www.fdu.uz) and the "ZiyoNet" information and educational portal (www.ziynet.uz).

Scientific supervisor:

Dzhamalov Sirojiddin Zuxriddinovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Official opponents:

Karimov Kamoliddin Tuychiboyevich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Dotsent

Zunnunov Raximjon Temirbekovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher

Leading organization:

National University of Uzbekistan

Defense will take place «27» «08» 2026 at 10⁰⁰ at the meeting of Scientific Council number PhD.03/2025.27.12.FM.10.04 at Fergana State University. (Address: Murabbiylar str. 19, Fergana, Uzbekistan, 150100, Phone: (+99873)244-44-02, fax: (+99873)244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Fergana State University (is registered № 796). (Address: Murabbiylar str. 19, Fergana, Uzbekistan, 150100, Phone: (+99873)244-44-94).

Abstract of dissertation sent out on «12» «08» 2026 year.
(Mailing report № 6 on «10» «08» 2026 year).



Sh.T.Karimov

Deputy chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S., Dotsent

I.U.Khaydarov

Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, C.Ph.M.S., Dotsent

Yu.P.Apakov

Deputy chairman of the Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research is to formulate and investigate semi-nonlocal and nonlocal boundary value problems, as well as linear inverse problems for fourth-order mixed-type equations of the second kind, to establish their well-posedness in Sobolev and anisotropic Sobolev spaces, and to develop effective analytical methods for proving the existence, uniqueness, and smoothness of generalized solutions.

The object of the research work is fourth-order mixed-type partial differential equations of the second kind, including equations with semi-nonlocal and nonlocal boundary conditions, fifth-order equations with a small parameter, and associated loaded differential equations.

The scientific novelty of the research consists of the following:

- to investigate the existence, uniqueness, regularity, and smoothness properties of weak generalized solutions to semi-nonlocal boundary value problems for a fourth-order mixed-type equation of the second kind in Sobolev spaces;

- to investigate the existence, uniqueness, regularity, and smoothness properties of weak generalized solutions to periodic-type nonlocal boundary value problems for a fourth-order mixed-type equation of the second kind in Sobolev spaces;

- to prove the correctness of linear inverse problems with semi-nonlocal boundary conditions for a fourth-order mixed-type equation of the second kind in anisotropic Sobolev spaces;

- to prove the correctness of linear inverse problems with periodic-type nonlocal boundary conditions for a fourth-order mixed-type equation of the second kind in anisotropic Sobolev spaces.

A methodological approach based on ε -regularization, the modified Galyorkin method, and a priori estimates has been developed for the analysis of direct and inverse problems for higher-order mixed-type equations.

Implementation of research results is as follows: Based on the scientific results obtained on direct and inverse problems for fourth-order mixed-type equations of the second kind:

- scientific results devoted to solving direct and inverse problems with nonlocal boundary conditions were used in research work carried out under foreign grant No. NIOKTR 122041800029-5 titled *"Boundary Value Problems and Control Problems for Fundamental and Mixed Types of Equations and Their Application to the Study of Systems with Distributed Parameters"* (Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, reference letter dated March 25, 2025, No. 01/13-40). As a result, it became possible to numerically process solutions of boundary value problems with nonlocal conditions for mixed-type equations, as well as to develop mathematical models of these problems;

- scientific results obtained in the study of mixed-type equations, including reaction-diffusion equations, related to modeling pressure distribution and flow dynamics around a blade, were used in the implementation of innovation project No. IL-21071166 *"Creation of a vertical-axis wind turbine designed for low wind speeds"* carried out at the Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures

of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (reference letter of the Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures of the ASRUz dated December 10, 2025, No. 1704-3). As a result, the estimation methods obtained for approximate solutions using Galerkin methods made it possible to more accurately simulate low-speed flows and to optimize the shape and placement of the blades.

E'lon qilingan ishlar ro'yxati
Список опубликованных работ
List of published works

I bo'lim (I часть; part I)

1. Khalkhadzhaev B., Yusupov Sh., Mambetsapaev K. On a weak generalized solution of a mixed-type fourth order equation of the second kind // Scientific Reports of Bukhara State University. – 2023. – № 8. – С. 9–15. (01.00.00, № 14).
https://buxdu.uz/media/jurnallar/ilmiy_axborot/ilmiy_axborot_8_son_2023.pdf

2. Джамалов С., Халхаджаев Б., Юсупов Ш. Об однозначной разрешимости полунелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода четвёртого порядка // Бюллетень Института математики. – 2024. – № 2. – С. 35–42. (01.00.00, № 17).
<https://drive.google.com/file/d/1A9W9enwr01pJJrBm3DSCaNMCLxX3oYtK/view>

3. Dzhmalov S.Z., Khalkhadzhaev B.B., Tuychiyeva S.T. On the smoothness of a generalized solution of a semi-nonlocal boundary value problem for a fourth-order equation // Journal of Contemporary Applied Mathematics. – 2024. – Vol. 14, № 2. – P. 107–120. (3. Scopus, IF=0,115).
<https://journalcam.com/wp-content/uploads/2024/12/140210.pdf>

4. Халхаджаев Б.Б. Об однозначной разрешимости регулярного решения уравнения смешанного типа второго рода четвёртого порядка с нелокальными краевыми условиями периодического типа // Вестник НУУз. – 2025. – № 2/2. – С. 220–227. (01.00.00, № 8).
<https://journals.nuu.uz/index.php/actanuuz/article/view/9964>

5. Dzhmalov S.Z., Khalkhadzhaev B.B., Yusupov Sh.B. On smoothness of the solution to a nonlocal boundary value problem of periodic type for a fourth-order mixed-type equation of the second kind // ACTA NUUz. Exact Sciences. – 2025. – Vol. 2, No. 1. – P. 10–19. (01.00.00, № 8).
<https://journals.nuu.uz/index.php/actanuuz/article/view/9950>

6. Dzhmalov S.Z., Pyatkov S.G., Khalkhadzhaev B.B. On regular solvability of one nonlocal boundary value problem for a mixed type equation of the second kind of the fourth order // Uzbek Mathematical Journal. – 2025. – Vol. 69, № 2. – P. 86–95. (3. Scopus, IF =0,153).
<https://doi.org/10.29229/uzmj.2025-2-8>

7. Dzhmalov S.Z., Khalkhadzhaev B.B. Linear inverse problem for a three-dimensional fourth-order mixed-type equation of the second kind with semi-nonlocal boundary conditions in a parallelepiped // Lobachevskii Journal of

Mathematics. – 2026. – Vol. 47, № 4. – P. 1497–1509. (3. Scopus, IF=0,42).
<https://zenodo.org/records/21279044>, <https://doi.org/10.1134/S1995080225611798>

8. Dzhamalov S.Z., Khalkhadzhaev B.B. On a linear inverse problem with nonlocal boundary conditions of periodic type for a three-dimensional equation of mixed type of the second kind of the fourth order in a parallelepiped // Uzbek Mathematical Journal. – 2025. – Vol. 69, № 1. – P. 57–70. (01.00.00, № 6). (3. Scopus, IF =0,153). <https://doi.org/10.29229/uzmj.2025-1-6>

II bo‘lim (II часть; part II)

9. Халхаджаев Б.Б. О слабом обобщённом решении полунелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода четвёртого порядка. // ЎзФА Ёш олимлар ахборотномаси. – 2024. – № 2. – С. 58–66.
<https://cyberleninka.ru/article/n/o-slabom-obobschennom-reshenii-polunelokalnoy-kraevoy-zadachi-dlya-uravneniya-smeshannogo-tipa-vtorogo-roda-chetvertogo-poryadka>

10. Джамалов С.З., Халхаджаев Б.Б. Об одной линейной обратной задаче с полунелокальными краевыми условиями для трёхмерного уравнения смешанного типа второго рода четвёртого порядка в параллелепипеде // Zamonaviy analiz va matematik fizika masalalari: Respublika ilmiy-amaliy konferensiya materiallari to‘plami. – Samarqand, 16–17-sentabr 2024-yil. B. 245–246.
<https://www.scribd.com/document/800206167/Toplam-Conf-Samarkand-2024>

11. Джамалов С.З., Халхаджаев Б.Б. О единственности слабого обобщённого решения уравнения смешанного типа второго рода четвёртого порядка // VII Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, инф. физики». – Нальчик, 4–8 декабря 2023. –С. 99–100. <https://binak.niipma.ru/wp-content/uploads/2026/03/Сборник-материалов-BINAK-2023.pdf>

12. Джамалов С.З., Халхаджаев Б.Б., Юсупов Ш.Б. Об однозначной разрешимости обобщённого решения полунелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода четвёртого порядка // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамич. системам. – Суздаль, РФ, 28 июня – 3 июля 2024.–С. 154–155.
<https://www.mathnet.ru/ConfLogos/2405/abstracts.pdf>

13. Джамалов С.З., Холхужаев Б.Б. Линейные обратные задачи для трёхмерного уравнения смешанного типа четвёртого порядка // Марчуковские научные чтения. Международная конференция. – Новосибирск, 7–11 октября 2024. – С. 102.
<https://conf.icmmg.nsc.ru/event/12/attachments/81/179/Тезисы%20ММНЧ%202024%203.pdf>

14. Халхаджаев Б.Б., Джамалов С.З. Об одной линейной обратной задаче с нелокальными краевыми условиями периодического типа для трёхмерного уравнения смешанного типа второго рода четвёртого порядка в параллелепипеде // Международная научная конференция. – Уфа, 2–5 октября 2024. <https://conf-bashedu-fmit.ru/static/media/Программа%20УОМШ-24.f973325c.pdf>

15. Халхаджаев Б.Б., Юсупов Ш.Б. О слабом обобщённом решении полунелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода четвёртого порядка // Республиканская научно-практическая конференция «Современные проблемы и перспективы прикладной математики». – Карши, 24–25 мая 2024 г. – С. 528–530.
<https://ojs.qarshidu.uz/index.php/mp/article/view/651>

Avtoreferat Farg‘ona davlat universiteti «FarDU. Ilmiy xabarlar – Научный вестник. ФерГУ» ilmiy – metodik jurnal tahririyatida tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

FDU “Nusxa ko‘paytirish bo‘limi”da chop etildi. 2026-yil.

Bosishga ruxsat etildi: 2026-y.

Bichimi 60/84 1/16. Ofest qog‘ozi

Nashriyot bosma tabog‘i-3

Shartli bosma tabog‘i-1,5

Adadi 50 nusxa.

150100. Farg‘ona shahri Murabbiylar ko‘chasi, 19-uy

