

**ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI URGANCH DAVLAT
UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/2025.27.12.FM.06.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

**ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI URGANCH DAVLAT
UNIVERSITETI**

ISMOILOV OXUNJON BAHRAM O'G'LI

**MANFIY TARTIBLI KORTEVEG-DE FRIZ VA MODIFITSERLANGAN
KORTEVEG-DE FRIZ TENGLAMALARINI TESKARI SPEKTRAL
MASALALAR USULLARI YORDAMIDA INTEGRALLASH**

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Urganch – 2026

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по
физико-математическим наукам**

**Contents of dissertation abstract of the doctor of philosophy (PhD) on physical-
mathematical sciences**

Ismoilov Oxunjon Bahram o'g'li

Manfiy tartibli Korteveg-de Friz va modifitsirlangan Korteveg-de Friz tenglamalarini
teskari spektral masalalar usullari yordamida integrallash.....3

Исмоилов Охунжон Бахрам угли

Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза и модифицированного
уравнения Кортевега-де Фриза отрицательного порядка методами обратной
спектральной задачи.....21

Ismoilov Okhunjon Bahram ugli

Integration of the negative order Korteweg-de Vries equation and the modified
Korteweg-de Vries equation by the inverse scattering method.....41

E'lon qilingan ishlar ro'uxati

Список опубликованных работ

List of published works.....45

**ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI URGANCH DAVLAT
UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/2025.27.12.FM.06.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

**ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI URGANCH DAVLAT
UNIVERSITETI**

ISMOILOV OXUNJON BAHRAM O'G'LI

**MANFIY TARTIBLI KORTEVEG-DE FRIZ VA MODIFITSIRLANGAN
KORTEVEG-DE FRIZ TENGLAMALARINI TESKARI SPEKTRAL
MASALALAR USULLARI YORDAMIDA INTEGRALLASH**

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Urganch – 2026

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2025.4.PhD/FM1401 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti Xorazm hududiy bo'linmasi va Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida (www.ik-mat.urdu.uz) va "ZiyoNet" Axborot ta'lim portalida (www.ziynet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:

O'razboyev Gayrat O'razaliyevich

fizika-matematika fanlari doktori, dotsent

Rasmiy opponentlar:

Baltayeva Umida Ismoilovna

fizika-matematika fanlari doktori, professor

Raximov Ilxam Davronbekovich

fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori,
PhD

Yetakchi tashkilot:

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti

Dissertatsiya himoyasi Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti huzuridagi PhD.03/2025.27.12.FM.06.02 raqamli Ilmiy kengashning _____ yil "____" _____ soat _____:_____ dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 220100, Urganch sh., H.Olimjon ko'chasi, 14-uy. Tel.: (+99862) 224-66-11, faks: (+99862) 224-67-00, e-mail: ik-mat.urdu@umail.uz)

Dissertatsiya bilan Urganch davlat universiteti Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (_____ raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 220100, Urganch sh., H.Olimjon ko'chasi, 14-uy. Tel.: (+99868) 224-67-00).

Dissertatsiya avtoreferati _____ yil "____" _____ kuni tarqatildi.

(_____ yil _____ (oy)dagi _____ raqamli reestr bayonnomasi).

A. A. Atamuratov

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d.

A. A. Reyimberganov

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.n.

B. A. Babajanov

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., professor.

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va ahamiyati. Jahonda olib borilayotgan ko'plab ilmiy va amaliy tadqiqotlarda Shturm-Liuvill operatori uchun qo'yilgan to'g'ri va teskari spektral masalalarni tadqiq qilishga alohida ahamiyat berilmoqda. Hozirgi kunda rivojlangan mamlakatlarda spektral analizning to'g'ri va teskari masalalari zamonaviy matematik fizikaning evolyutsion tenglamalari yechimlarini topish va yechimning sinfini aniqlashda muhim ahamiyatga ega bo'lmoqda. Bundan tashqari bu masalalar radiotexnika, nochiziqli optika, kvant mexanikasi, amorf jismlarning kristallik xossalari modellashirishda muhim o'rin tutmoqda. Shturm-Liuvill operatori uchun sochilish nazariyasining va davriy koeffitsientli Shturm-Liuvill operatoriga qo'yilgan teskari spektral masalalari usullaridan foydalanib Korteveg-de Friz (KdF) tenglamasi uchun qo'yilgan Koshi masalasini yechish algoritmi nochiziqli muhitlarda ultraqisqa impulslarning tarqalishi, nochiziqli elektrodinamikaning ayrim masalalari o'rganishda, jumladan yuqorida aytib o'tilgan sohalarida muhim ahamiyatga ega bo'lmoqda.

Jahonda tez kamayuvchi va davriy funksiyalar sinflarida qo'shimcha hadlarga ega nochiziqli manfiy tartibli KdF tenglamasiga qo'yilgan Koshi masalasining yechimini topish algoritmini tuzish bo'yicha tadqiqotlarga ustuvor ahamiyat berilmoqda va keng tadqiq etilmoqda. Bu borada spektral analiz usullari plazma fizikasi, nochiziqli optika, kvant mexanikasi, gidrodinamika sohalarida keng qo'llanilmoqda. Shu sababli, tez kamayuvchi va davriy funksiyalar sinflarida manfiy tartibli KdF tenglamasi bilan bir qatorda, yuklangan hadli nochiziqli manfiy tartibli KdF tenglamasining yechimini mavjudligi, ular o'zgaras amplitudali solitonsimon va tekis yaqinlashuvchi funksional qator ko'rinishida bo'lishini ko'rsatishga imkon beruvchi tadqiqotlarni rivojlantirish dolzarb vazifalardan hisoblanmoqda.

Respublikamizda matematik fizikaning nochiziqli evolyutsion tenglamalarining yechimlarini Shturm-Liuvill operatoriga qo'yilgan to'g'ri va teskari spektral masalalar usulidan foydalanib aniqlash hamda topilgan yechimlarni amaliyotda qo'llash bo'yicha keng ko'lamli chora-tadbirlar amalga oshirilmoqda. Xususan, birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi spektral nazariyasi masalalarini o'rganishga e'tibor kuchaydi hamda sochilish nazariyasining to'g'ri va teskari masalalari usullaridan foydalanib zamonaviy matematik fizikaning manfiy tartibli nochiziqli evolyutsion tenglamalarining soliton yechimlarini qurish bo'yicha muhim natijalarga erishildi. Matematika sohasidagi ilmiy tadqiqot ishlari ko'lamini kengaytirish, ularning natijadorligi va amaliy ahamiyatini oshirish, matematika va uning tatbiqlari bo'yicha tadqiqotlarni rivojlantirish sohaning asosiy vazifalari etib belgilangan¹. Ushbu vazifalarni amalga oshirishda, xususan zamonaviy matematik fizikaning nochiziqli evolyutsion tenglamalarni integrallashda muhim ahamiyat kasb etuvchi differensial operatorlar spektral nazariyasini muhim ilmiy ahamiyatga ega.

O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 29-oktabrdagi PF-6097-son "Ilm-fanni 2030-yilgacha rivojlantirish Konsepsiyasini tasdiqlash to'g'risida"gi va 2022-yil 28-yanvardagi PF-60-son "2022-2026-yillarga mo'ljallangan Yangi

¹ O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 7 maydagi "Matematika sohasidagi ta'lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi PQ-4708-son qarori.

O'zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to'g'risida"gi Farmonlari, 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son "Matematika ta'limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo'llab-quvvatlash, shuningdek, O'zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyaning V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora tadbirlari to'g'risida"gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlantirishning ustuvor yo'nalishlariga muvofiqligi. Ushbu tadqiqot O'zbekiston Respublikasida fan va texnikani rivojlantirishning IV. "Matematika, mexanika va informatika" ustuvor yo'nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o'rganilganlik darajasi. Chiziqli Shturm-Liuvill operatorini sochilish nazariyasini berilganlari orqali tiklashga teskari masala deyiladi. Shturm-Liuvill operatori uchun qo'yilgan teskari spektral masala sochilish nazariyasining berilganlari orqali ilk bor L.D. Faddeev keyinchalik V.A. Marchenko, B.M. Levitan va boshqa olimlar tomonidan yechilgan. Sochilish nazariyasining teskari masalasini yechish usuli ilk bor 1967-yilda Gardner, Grin, Kruskal, Miuralar tomonidan klassik KdF tenglamasini integrallash jarayoniga qo'llaniladi. Shu bilan bir qatorda uning N solitonli yechimini ham topdilar. 1968-yilda Laks sochilish nazariyasining teskari masalasi usuli umumiy xarakterga ega ekanligini ko'rsatdi va KdF tenglamasining yuqori tartibli analoglarini topishga muvaffaq bo'ldi.

Navbatdagi dolzarb muammolardan yana biri bu klassik KdF tenglamasini davriy funksiyalar sinfida integrallash, boshqacha aytganda KdF tenglamasini soliton yechimlarining davriy analoglarini topishdan iborat. 1974-yilda S.P. Novikov KdF tenglamasi va uning yuqori tartibli umumlashmalarining har bir statsionar davriy yechimi chekli zonali potensial bo'lishi va u kvazidavriy funksiyalardan iborat ekanligini ko'rsatib berdi. Shu yilning o'zida A.R. Its, V.B. Matveev va B.A. Dubrovin, S.P. Novikovlar chekli zonali davriy va kvazidavriy funksiyalar sinfida klassik KdF tenglamasining integrallanuvchi bo'lishi Xill operatoriga qo'yilgan teskari spektral masalalar usulidan foydalanib ko'rsatilgan. Shu bilan bir qatorda klassik KdF tenglamasining chekli zonali yechimi uchun oshkor formula topilgan.

Davriy funksiyalar sinfini ikkita qism to'plamga ajratish maqsadga muvofiq ya'ni chekli zonali davriy funksiyalar sinfi va cheksiz zonali davriy funksiyalar sinfi. Cheksiz zonali davriy potensialga misol ilk bor 1922-yilda E.L. Ince tomonidan kiritilgan bo'lib bu holatda Xill operatorining spektridagi barcha lakunalarning ochiq bo'lishi isbotlangan. Yuqorida keltirilgan mulohazalardan ko'rinadiki chekli zonali davriy potenciallar sinfi ham cheksiz zonali davriy potenciallar sinfi ham bo'sh to'plam emas. Shuning uchun davriy cheksiz zonali funksiyalar sinfida nochiziqli evolyutsion tenglamalarga qo'yilgan Koshi masalasining yechimga egaligini ko'rsatish muommosi zamonaviy matematik fizikaning dolzarb (aktual) masalalaridan biri hisoblanadi. Davriy funksiyalar sinfida manbali KdF tenglamasining integrallanuvchiligi ilk bor 2010-yilda A.B. Xasanov, A.B. Yaxshimuratovlarning maqolasida isbotlangan. Davriy funksiyalar sinfida

manbali manfiy tartibli KdF tenglamasining integrallanuvchiligi ilk bor 2022-yilda G.O'. O'razboyev va M.M. Xasanovlarning maqolasida isbotlangan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya tugallangan oliy o'quv yurti yoki ilmiy-tadqiqot muassasasining ilmiy tadqiqot rejalari bilan bog'liqligi. Dissertatsiya Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti ilmiy-tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq "Differensial operatorlar spektral nazariyasining noxiziqli evolyutsion tenglamalarga tadbiqlari" nomli ilmiy-tadqiqot ishlari rejasi doirasida amalga oshirilgan.

Tadqiqotning maqsadi. Shturm-Liuvill va Dirak operatorlariga qo'yilgan teskari spektral masalalarini yechish usullaridan foydalanib manfiy tartibli KdF tenglamasini va modifitsirlangan Korteveg-de Friz (mKdF) tenglamalarini tez kamayuvchi va davriy funksiyalar sinflarida integrallashdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

manfiy tartibli KdF tenglamasi uchun qo'yilgan Koshi masalasini tez kamayuvchi funksiyalar sinfida sochilish nazariyasining teskari masalalari usulidan foydalanib yechish;

tez kamayuvchi funksiyalar sinfida Shturm-Liuvill operatoriga qo'yilgan sochilish nazariyasining teskari masalasini yechish usulidan foydalanib moslangan manbali manfiy tartibli KdF tenglamasini integrallanuvchi ekanligini isbotlash

Dirak operatori uchun teskari spektral masalani yechish usulidan foydalangan holda, yuklangan hadli manfiy tartibli mKdF tenglamasiga qo'yilgan Koshi masalasini yechimga egaligini davriy funksiyalar sinfida isbotlash;

Dirak operatoriga qo'yilgan teskari spektral masalani yechish usulidan foydalanib, manfiy tartibli integral manbali mKdF tenglamasini davriy funksiyalar sinfida integrallanuvchanligini isbotlash.

Tadqiqot obyekti manfiy tartibli KdF va mKdF tenglamalarini teskari spektral masalalar usullari yordamida integrallash masalalari tadqiq qilishdan iborat.

Tadqiqot predmeti Shturm-Liuvill va Dirak operatorlari uchun sochilish nazariyasining teskari spektral masalalari usullarini manfiy tartibli noxiziqli evolyutsion tenglamalarni integrallash jarayoniga tatbiq etishdan iborat.

Tadqiqot usullari. Dissertatsiya ishida matematik fizika, matematik analiz, funksional analiz, differensial operatorlarning spektral nazariyasi, kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi va differensial tenglamalarni yechish usullari qo'llanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

manfiy tartibli KdF tenglamasiga qo'yilgan Koshi masalasini tez kamayuvchi funksiyalar sinfida Shturm-Liuvill operatori uchun sochilish nazariyasining teskari masalasi usulidan foydalanib integrallanuvchi ekanligi isbotlangan;

moslangan manbali manfiy tartibli KdF tenglamasi tez kamayuvchi funksiyalar sinfida Shturm-Liuvill operatoriga qo'yilgan sochilish nazariyasining teskari masalasini yechish usulidan foydalanib yechilgan

manfiy tartibli yuklangan hadli mKdF tenglamasining integrallanuvchanligi Dirak operatoriga qo'yilgan teskari spektral masalasini yechish usulidan foydalanib davriy funksiyalar sinfida isbotlangan;

manfiy tartibli integral manbali mKdF tenglamasining integrallanuvchanligi Dirak operatoriga qo'yilgan teskari spektral masalasini yechish usulidan foydalanib davriy funksiyalar sinfida isbotlangan;

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

tez kamayuvchi va davriy funksiyalar sinflarida manfiy tartibli KdF va mKdF tenglamalariga qo'yilgan Koshi masalalarini yechish algoritmidan foydalanib moslangan manbali, integral manbali va yuklangan hadli mKdF tenglamasi uchun qo'yilgan Koshi masalasining solitonsimon va davriy yechimlari aniq ko'rinishi topilgan;

manfiy tartibli KdF tenglamasini tez kamayuvchi va davriy funksiyalar sinflarida integrallash algoritmidan foydalangan holda soliton va davriy to'lqinlarning tarqalish tezliklari o'zgarishlari va amplitudasi o'zgarmay qolishini aniqlashga tadbqiq qilingan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi oddiy differensial tenglamalar, integral tenglamalar, teskari spektral masalalar, matematik fizika tenglamalari, matematik tahlil va funksional analiz usullaridan foydalanilganligi hamda matematik mulohazalar va isbotlarning qat'iyiligi bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati – zamonaviy matematik fizikaning har xil turdagi yuklangan hadlarga va manbalarga ega manfiy tartibli KdF va mKdF tenglamalarini tez kamayuvchi va davriy funksiyalar sinfida integrallash mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati manfiy tartibli KdF tenglamasi sayoz sathdagi to'lqinlarning harakatini ifodalaydi, biz taklif qilgan algoritm yordamida manfiy tartibli KdF tenglamasini soliton to'lqin tarqalishi jarayoniga ham qo'llash mumkin, bu holda soliton to'lqinlarning tarqalish tezligi oshishi yoki kamayishi mumkin, lekin ularning amplitudasi o'zgarmaydi. Bu esa iqtisodiy jihatdan ancha kam mablag' talab qilgan holda uzatiladigan signallar sifatini yaxshilash va doimiy ravishda uzulishlarsiz ishlashini taminlashga hizmat qilishi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Manfiy tartibli KdF va mKdF tenglamalarini tez kamayuvchi hamda davriy funksiyalar sinflarida integrallash bo'yicha olingan natijalar asosida:

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universitetida A.Sadullayev rahbarligida 2020-2022 yillarda bajarilgan UT-OT-2020-1 raqamli "Monje-Amper tenglamasi va ekstremal plyurisubgarmonik funksiyalar" mavzusidagi fundamental loyihada foydalanilgan (O'zbekiston Milliy universitetining 2025-yil 28-noyabrdagi ma'lumotnomasi). Jumladan, dissertatsiyada ishlab chiqilgan manfiy tartibli nochiziqli evolyutsion tenglamalarni integrallash algoritmi nochiziqli bo'lgan bir jinsli kompleks Monje-Amper tenglamasini yechimlarini aniqlashda qo'lanilgan. Ilmiy natijalarning qo'llanilishi, kompleks Monje-Amper operatorining spektrini, jumladan xos qiymat va xos funksiyalarini xususiyatlarini o'rganish imkonini bergan;

manfiy tartibli KdF tenglamasini tez kamayuvchi funksiyalar sinfida integrallash natijasida olingan natijalardan Novosibirsk davlat universitetida 2018-2022 yillarda bajarilgan 18-29-10086 - sonli "Kechikuvchi argumentli va yuqori tartibli differensial tenglamalar sistemasi. Nazariya va tadbqiqar" granti bo'yicha ishlarni bajarishda foydalanilgan (Novosibirsk davlat universitetining 2025-yil 1-dekabrdagi

ma'lumotnomasi). Olingan natijalar kechikuvchi argumentlar va yuqori tartibli differensial tenglamalar sistemasi bilan nochizikli tenglamalar uchun yangi muammolarni o'rganish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarini aprobatsiyasi. Ushbu tadqiqot natijalari 5 ta ilmiy-amaliy anjulanlarda, jumladan 2 ta xalqaro va 3 respublika anjumanlarida muhokamadan o'tgan.

Tadqiqot natijalarini e'lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo'yicha 5 ta ilmiy ish chop qilingan, shulardan, O'zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining falsafa doktori dissertatsiyalarini himoya qilishda tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 5 ta maqola, jumladan 3 tasi xorijiy va 2 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Dissertatsiya hajmi 87 betni tashkil qiladi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va ahamiyati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga mosligi ko'rsatilgan, dissertatsiya mavzusi bo'yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhlari, masalaning o'rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi va vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo'yicha ma'lumotlar berilgan.

Dissertatsiya ishining **“Butun o'qda berilgan Shturm – Liuvill va Dirak uchun to'g'ri va teskari masalaning spectral nazariyasi”** deb nomlanuvchi birinchi bobida KdF tenglamasini tez kamayuvchi funksiyalar sinfida va mKdF tenglamasini davriy funksiyalar sinfida integrallash uchun zaruriy ma'lumotlar keltirilgan, shu bilan birga yechimni topish algoritmi taklif etilgan va misollar ishlab ko'rsatilgan.

Mazkur bobning birinchi paragrafida butun o'qda berilgan Shturm-Liuvill

$$Ly \equiv -y'' + u(x)y = k^2 y, (-\infty < x < \infty) \quad (1.1)$$

tenglamasining ushbu

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |u(x)| dx < \infty \quad (1.2)$$

tez kamayuvchi funksiyalar sinfida qaralgan. Shturm-Liuvill tenglamasining Yost yechimlarini $f(x, k)$ va $g(x, k)$ orqali belgilangan. Ma'lumki, bu yechimlar uchun quyidagi asimptotik formulalar o'rinli bo'ladi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, k) \exp(-ikx) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x, k) \exp(ikx) = 1, \quad \text{Im } k = 0. \quad (1.3)$$

Noldan farqli haqiqiy k larda $\{f(x, k), f(x, -k)\}$ va $\{g(x, k), g(x, -k)\}$ funksiyalar juftliklari (1.1) differensial tenglamaning chiziqli erkli yechimlarini tashkil qiladi. Shuning uchun quyidagi

$$\begin{aligned} f(x, k) &= b(k)g(x, k) + a(k)g(x, -k), \\ g(x, k) &= -b(-k)f(x, k) + a(k)f(x, -k) \end{aligned} \quad (1.4)$$

yoyilmalar o'rinli bo'ladi²:

Bu yerda $f(x, k)$, $g(x, k)$ Yost yechimlari k o'zgaruvchi bo'yicha yuqori yarim tekislikka analitik davom ettiriladi. (1.4) tenglikdagi $a(k, t)$ va $b(k, t)$ funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

$$1. \quad a(k) = -\frac{1}{2ik} W\{f(x, k), g(x, k)\}, \quad (1.5)$$

bu yerda $W\{f(x, k), g(x, k)\} \equiv f(x, k)g'(x, k) - f'(x, k)g(x, k)$.

2. Haqiqiy k larda

² Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля, (Наука, М., 1984).

$$\begin{aligned} b(-k) &= \overline{b(k)}, \quad a(-k) = \overline{a(k)}, \\ |a(k)|^2 &= 1 + |b(k)|^2; \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$3. \quad a(k) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad b(k) = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad \text{при } k \rightarrow \pm \infty;$$

4. $a(k)$ funksiya $\text{Im } k > 0$ yuqori yarim tekislikka analitik davom qiladi hamda chekli sondagi oddiy nollarga ega bo'ladi, ya'ni $k_n = i\chi_n$, ($\chi_n > 0$), $n=1,2,\dots,N$. Bundan tashqari, bu nollarning kvadrati $L(t)$ operatorning oddiy xos qiymatlaridan iborat bo'ladi, ya'ni $\lambda_n = -\chi_n^2$, $n=1,2,\dots,N$.

5. $a(z)$ funksiyaning $\text{Im } z > 0$ yuqori yarim tekislikda o'zining $i\chi_n$, $n=1,2,\dots,N$ nollari orqali va quyidagi

$$a(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - i\chi_j}{z + i\chi_j} \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |r^+(k)|^2)}{k - z} dk \right\}$$

formula yordamida qayta tiklanadi, bu yerda $r^+(k) = \frac{b(-k)}{a(k)}$ - funksiya $\text{Im } k = 0$ da berilgan funksiya. (1.5) tenglik hamda $a(k)$, $\text{Im } k > 0$ funksiyaning xossasidan quyidagi

$$g(x, i\chi_j) = B_j f(x, i\chi_j), \quad j=1,2,\dots,N. \quad (1.7)$$

tenglik kelib chiqadi. Bundan tashqari $f(x, k)$ va $g(x, k)$ Yost yechimlari uchun quyidagi Levin tasvirlari o'rinli:

$$f(x, k) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} A^+(x, z) e^{ikz} dz, \quad g(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x A^-(x, z) e^{-ikz} dz, \quad (1.8)$$

bu yerda $A^{\pm}(x, y, t)$ yadrolar $u(x, t)$ funksiya bilan quyidagicha bog'langan:

$$u(x) = \mp 2 \frac{d}{dx} A^{\pm}(x, x). \quad (1.9)$$

Ta'rif 1.1. Ushbu $\{r^+(k, t), \chi_1(t), \chi_2(t), \dots, \chi_N(t), B_1(t), B_2(t), \dots, B_N(t)\}$ to'plamga L operatorning sochilish nazariyasining berilganlari (S.N.B) deyiladi.

Ta'rif 1.2. L operatorning sochilish nazariyasining berilganlarini topishga to'g'ri masala, sochilish nazariyasining berilganlari orqali Shturm-Liuvill operatorining $u(x)$, $x \in \mathbb{R}$ potensialini topish masalasiga teskari masala deyiladi.

(1.8) Levin tasviridagi $A^+(x, y)$ yadro ushbu

$$\begin{aligned} \Omega^+(x+y) + A^+(x, y) + \int_x^{\infty} A^+(x, z) \Omega^+(z+y) dz &= 0, \quad (y > x), \\ \Omega^-(x+y) + A^-(x, y) + \int_{-\infty}^x A^-(x, z) \Omega^-(z+y) dz &= 0, \quad (y < x). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Gelfand-Levitan-Marchenko integral tenglamasining yechimi bo'lib, bu yerda

$$\Omega^{\pm}(x) = -\sum_{n=1}^N \frac{iB_n}{\frac{da(z)}{dz} \Big|_{z=i\lambda_n}} e^{\mp \lambda_n x} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r^{\pm}(k) e^{\pm ikx} dx, \quad (1.11)$$

tenglik orqali aniqlanadi.

Lemma 1.1. Agar $y(x, \lambda)$ va $z(x, \mu)$ funksiyalar mos ravishda $Ly(x, \lambda) = \lambda y(x, \lambda)$ va $Lz(x, \mu) = \mu z(x, \mu)$ tenglamalarni yechimi bo'lsa u holda quyidagi tenglik o'rinli

$$\frac{d}{dx} W\{y(x, \lambda), z(x, \mu)\} = (\lambda - \mu)y(x, \lambda)z(x, \mu).$$

Mazkur bobning ikkinchi paragrafida butun o'qda davriy potentsialli Dirak operatori uchun zaruriy ma'lumotlar keltirib o'tilgan.

Quyidagi Dirak sistemasi qaralgan

$$Ly \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ q(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (1.12)$$

bu yerda $q(x)$ haqiqiy uzluksiz π davrli funksiya, λ esa kompleks parametr

(1.12) tenglamaning ushbu $c(0, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $s(0, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlarini $c(x, \lambda) = \begin{pmatrix} c_1(x, \lambda) & c_2(x, \lambda) \end{pmatrix}^T$ va $s(x, \lambda) = \begin{pmatrix} s_1(x, \lambda) & s_2(x, \lambda) \end{pmatrix}^T$ orqali belgilaymiz.

Ta'rif 1.3. $\Delta(\lambda) = c_1(\pi, \lambda) + s_2(\pi, \lambda)$ funksiya Dirak operatori uchun Lyapunov funksiyasi yoki Xill diskriminanti deyiladi.

Yuqorida keltirilgan (1.12) tenglama ikkita chiziqli erkli yechimlarga ega va ular quyidagi ko'rinishda

$$\psi^{\pm}(\lambda) = c(x, \lambda) + \frac{s_2(\pi, \lambda) - c_1(\pi, \lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s_1(\pi, \lambda)} s(x, \lambda)$$

bo'ladi. Bu yechimlar Floke yechimlari deyiladi. Davriy potentsialli (1.12) Dirak operatori xos qiymatga ega emas, uning spektri uzluksiz bo'lib, u quyidagi to'plamdan iborat:

$$E = \{\lambda \in \mathbb{R} : -2 \leq \Delta(\lambda) \leq 2\} = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}),$$

ushbu $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \in \mathbb{Z}$ intervallarga lakunalar deyiladi. Bu yerda $\lambda_n = \lambda_n(t)$ ushbu $\Delta(\lambda, t) = \pm 2$ tenglamaning ildizlaridan iborat bo'lib, ular (1.12) tenglamaga qo'yilgan davriy ($y(0, t) = y(\pi, t)$) yoki yarimdavriy ($y(0, t) = -y(\pi, t)$) chegaraviy masalaning xos qiymatlaridan iborat bo'ladi.

Ta'rif 1.4. Ushbu $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in \mathbb{Z}$ sonlar va $\sigma_n = \text{sign}\{s_2(\pi, \xi_n) - c_1(\pi, \xi_n)\}$, $n \in \mathbb{Z}$ ishoralarga (1.12) tenglamaning spektral parametrlari deyiladi. ξ_n o'z lakunasining cheti bilan ustma-ust tushganida $\sigma_n = 1$ deb qabul qilamiz.

Ta'rif 1.5. Lakunalarining chetlari λ_n , $n \in \mathbb{Z}$ hamda ξ_n , $\sigma_n = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$ spektral parametrlarga (1.12) tenglamaning spektral berilganlari deyiladi.

Ta’rif 1.6. (1.12) tenglamaning spektral berilganlarini topish masalasiga to‘g‘ri masala deyiladi, aksincha, spektral berilganlar orqali (1.12) tenglamaning koeffitsientlarini topish masalasiga teskari spektral masala deyiladi.

Agar (1.12) tenglamada $q(x)$ ning o‘rniga $q(x + \tau)$ ni qarasak, u holda topilgan spektr $\tau : \lambda_n(\tau) = \lambda_n$, $n \in \mathbb{Z}$ parametr ga bog‘liq bo‘lmaydi, lekin $\tau : \xi_n(\tau), \sigma_n(\tau)$ spektral parametrlar τ ga bog‘liq bo‘ladi. Topilgan spektral parametrlar quyidagi Dubrovin – Trubovits tenglamalar sistemasi analogini qanoatlantiradi:

$$\frac{d\xi_n}{d\tau} = (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau) \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}} \times \\ \times \{2\xi_n + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k)\}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

bu yerda

$$\xi_n(0) = \xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}], \quad \sigma_n(0) = \sigma_n = \pm 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

berilgan spektral parametrlar. Shu bilan birga $\sigma_n(\tau) = \pm 1$ ishoraning qiymati $\xi_n(\tau)$ spektral parametr o‘z lakunasining chetiga kelganda qarama-qarshisiga o‘zgaradi.

Ushbu $\{\lambda_n, n \geq 0, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \geq 1\}$ to‘plam esa $L(\tau, 0)$ operatorning spektral berilganlari. Dubrovin-Trubovits tenglamalar sistemasi va quyidagi

$$q(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau) h(\xi_n(\tau))$$

izlar formulasi teskari spektral masalani yechishga imkon beradi.

Mazkur dissertatsiya ishining **“Moslangan manbali manfiy tartibli Korteveg-de Friz tenglamasini tez kamayuvchi funksiyalar sinfida integrallash”** deb nomlangan ikkinchi bobining birinchi paragrafida manfiy tartibli KdF tenglamasini umumiy yechimini topish algoritmi berilgan va shu algoritm asosida misollar yechib ko‘rsatilgan. Ushbu bobning ikkinchi paragrafida esa moslangan manbali manfiy tartibli KdF tenglamasi qaralgan va sochilish nazariyasini teskari masalalar usuli yordamida yechish algoritmi keltirib chiqarilgan va shu algoritm asosida misol yechib ko‘rsatilgan.

Mazkur bobning birinchi paragrafida ushbu

$$\begin{cases} u_t = 2vv_x, \\ v_{xx} = uv, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

KdF tenglamalar oilasiga kiruvchi tenglamani qaraymiz. Bu tenglamada ushbu

$$w = v^2 + \frac{1}{2}$$

almashtirishni bajarish orqali yuqoridagi tenglamani quyidagi yangi ko‘rinishga o‘tib olamiz

$$\begin{cases} u_t = w_x, \\ w_{xxx} = 4uw_x + 2u_x w - u_x, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \quad (2.1)$$

Hosil bo‘lgan (2.1) tenglamani

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

boshlang'ich shart bilan qaraymiz, bu yerda $u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi haqiqiy funksiya:

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|) |u_0(x)| dx < \infty$$

2. Operator $L_0 y \equiv -y'' + u_0(x)y = k^2 y$, $x \in \mathbb{R}^1$ musbat bo'lgan N ta oddiy xos qiymatlarga ega $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \dots, \lambda_N(0)$.

Faraz qilaylik, (2.1)-(2.3) masalada $u(x, t)$ funksiya $x \rightarrow \pm\infty$ da tez kamayuvchi funksiya. Bundan tashqari $u(x, t)$ va $w(x, t)$ funksiyalar yetarlicha silliq va quyidagi shartlarni qanoatlantiradi

$$u \in C_{x,t}^{1,1}(\mathbb{R}), w \in C_{x,t}^{3,0}(\mathbb{R}),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|) (|u(x, t)| + |u_t(x, t)|) dx < \infty, \text{ barcha } t \in \mathbb{R}_+$$

$$w(x, t) \rightarrow 0, w_x(x, t) \rightarrow 0, w_{xx}(x, t) \rightarrow 0, x \rightarrow \pm\infty.$$

Mazkur paragrafning asosiy natijasi quyidagi teoremda keltirilgan.

Teorema 2.1. Agar $(u(x, t), w(x, t))$ funksiyalar juftliklari (2.1)-(2.3) masalaning yechimlari bo'lsa, u holda $u(x, t)$ potensial bilan berilgan $L(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t)$ operatorning sochilish nazariyasining berilganlari t bo'yicha o'zgarishi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{\partial r^+(k, t)}{\partial t} = -\frac{i}{2k} r^+(k, t), k \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\frac{dB_n(t)}{dt} = -\frac{B_n(t)}{2\chi_n(t)}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

$$\frac{d\chi_n(t)}{dt} = 0, n = 1, 2, \dots, N.$$

Xulosa 2.1. Olingan natija sochilish nazariyasining berilganlarini evolyutsiyasini to'liq aniqlaydi va (2.1)-(2.3) masalani yechish algoritmini qurishga imkon beradi.

Misol 2.1. Quyidagi Koshi masalasini:

$$\begin{cases} u_t = w_x, \\ w_{xxx} = 4uw_x + 2u_x w - u_x, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \end{cases}$$

ushbu $u(x, 0) = -\frac{2}{ch^2 x}$ boshlang'ich shart bilan qaraylik. Yuqoridagilar yordamida Koshi masalasining umumiy yechimini topamiz:

$$u(x, t) = -\frac{2}{ch^2 \left(x + \frac{t}{2}\right)}, \quad w(x, t) = -\frac{1}{ch^2 \left(x + \frac{t}{2}\right)}.$$

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida tez kamayuvchi funksiyalar sinfida manbali manfiy tartibli KdF tenglamasiga qo'yilgan Koshi masalasi sochilish nazariyasining teskari masalalar usuli yordamida yechilgan

$$\begin{cases} u_t = 2vv_x + G, \\ v_{xx} = uv, \end{cases} \quad (2.4)$$

bu yerda $G = G(x, t)$ – berilgan silliq funksiya bo'lib, x o'zgaruvchi bo'yicha tez kamayadi:

$$G(x, t) = o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad \forall t > 0.$$

O'rganilayotgan (2.4) tenglamalar sistemasi quyidagi boshlang'ich shart bilan ko'rib chiqilgan:

$$u(x)|_{t=0} = u_0(x), \quad (2.5)$$

bu yerda $u_0(x)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |u_0(x)| dx < \infty,$$

2. Operator $L_0 y \equiv -y'' + u_0(x)y = k^2 y$, $x \in \mathbb{R}^1$ musbat bo'lgan N ta oddiy xos qiymatlarga ega $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \dots, \lambda_N(0)$

Faraz qilaylik, (2.4)-(2.5) masalada $u(x, t)$ funksiya $x \rightarrow \pm\infty$ da tez kamayuvchi bo'lsin, bundan tashqari $u(x, t)$ va $v(x, t)$ yetarlicha silliq va quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left((1 + |x|) |u| + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \right) dx < \infty, \quad t \geq 0, \quad (2.6)$$

$$v^2(x, t) \rightarrow 1, \quad v_x(x, t) \rightarrow 0, \quad v_{xx}(x, t) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Mazkur paragrafning asosiy natijasi quyidagi lemmada keltirilgan.

Lemma 2.1. Agar $(u(x, t), v(x, t))$ funksiyalar juftliklari (2.4)-(2.6) masalaning yechimlari bo'lsa, u holda $u(x, t)$ potensial bilan berilgan $L(t)$ operatorning sochilish nazariyasining berilganlari t bo'yicha o'zgarishi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{\partial r^+(k, t)}{\partial t} = -\frac{i}{k} r^+(k, t) - \frac{1}{2ika^2(k)} \int_{-\infty}^{+\infty} Gg^2 dx, \quad \text{Im } k = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{dB_n(t)}{dt} = -\frac{B_n}{\chi_n} - \frac{1}{2\chi_n} \int_{-\infty}^{+\infty} Gg(x, i\chi_n, t) h_n(x, t) dx, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2.8)$$

$$\frac{d\chi_n(t)}{dt} = -\frac{1}{2\chi_n} \int_{-\infty}^{+\infty} G\Phi_n(x, t) dx, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2.9)$$

bu yerda $\Phi_n(x, t)$ funksiya $L(t)$ operatorning $\lambda_n = -\chi_n^2(t)$, $n = 1, 2, \dots, N$ xos qiymatlariga mos normollovchi xos funksiyasi.

Mazkur bobning uchinchi paragrafida tez kamayuvchi funksiyalar sinfida moslangan manbali manfiy tartibli KdF tenglamasiga qo'yilgan Koshi masalasi

sochilish nazariyasining teskari masalalar usuli yordamida yechilgan. Ushbu moslangan manbali manfiy tartibli KdF tenglamalar sistemasini

$$\begin{cases} u_t = 2vv_x + 4 \sum_{m=1}^N \frac{\partial}{\partial x} |\varphi_m|^2, \\ v_{xx} = uv, \\ -\varphi_m'' + u\varphi_m = \lambda_m \varphi_m, m=1,2,\dots,N, t>0, x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.10)$$

quyidagi boshlang'ich shart bilan birga qaraymiz

$$u(x,t)|_{t=0} = u_0(x), x \in \mathbb{R}, \quad (2.11)$$

bu yerda $\varphi_m = \varphi_m(x,t)$, $m=1,2,\dots,N$ funksiya $L(t)$ operatorning $\lambda_m = -\chi_m^2$, $m=1,2,\dots,N$ xos qiymatlariga mos normollovchi xos funksiyasi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_m(x,t)|^2 dx = A_m(t), m=1,2,\dots,N \quad (2.12)$$

bu yerda $u_0(x)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|u_0(x)|dx < \infty;$$

2. Operator $L_0 y \equiv -y'' + u_0(x)y = k^2 y$, $x \in \mathbb{R}^1$ musbat bo'lgan N ta oddiy xos qiymatlarga ega $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \dots, \lambda_N(0)$

Faraz qilaylik, (2.4)-(2.5) masalada $u(x,t)$ funksiya $x \rightarrow \pm\infty$ da tez kamayuvchi bo'lsin, bundan tashqari $u(x,t)$ va $v(x,t)$ yetarlicha silliq va quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left((1+|x|)|u| + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \right) dx < \infty, t \geq 0, \quad (2.13)$$

$$v^2(x,t) \rightarrow 1, v_x(x,t) \rightarrow 0, v_{xx}(x,t) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty.$$

Mazkur paragrafning asosiy natijasi quyidagi teoremda keltirilgan.

Teorema 2.2. Agar $(u(x,t), v(x,t))$ funksiyalar juftliklari (2.4)-(2.6) masalaning yechimlari bo'lsa, u holda $u(x,t)$ potensial bilan berilgan $L(t)$ operatorning sochilish nazariyasining berilganlari t parametr bo'yicha o'zgarishi quyidagicha o'zgaradi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r^+(k,t)}{\partial t} &= -\frac{i}{k} r^+(k,t), \operatorname{Im} k = 0, \\ \frac{dB_n(t)}{dt} &= \left(-\frac{1}{\chi_n} + 2A_n(t) \right) B_n(t), n=1,2,\dots,N, \\ \frac{d\chi_n}{dt} &= 0, n=1,2,\dots,N. \end{aligned}$$

Misol 2.2. Quyidagi moslangan manbali manfiy tartibli KdF tenglamalar sistemasini:

$$\begin{cases} u_t = 2vv_x + 4 \sum_{m=1}^N \frac{\partial}{\partial x} |\varphi_m|^2, \\ v_{xx} = uv, \\ -\varphi_m'' + u\varphi_m = \lambda_m \varphi_m, m=1,2,\dots,N, t>0, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ushbu $u(x,0) = -\frac{2}{ch^2x}$ boshlang'ich shart bilan qaraylik. Yuqoridagilar yordamida Koshi masalasining umumiy yechimini topamiz:

$$u(x,t) = -\frac{2}{ch^2(x-\gamma(t))}, v(x,t) = -\frac{1}{ch^2(x-\gamma(t))}, \varphi_1(x,t) = \frac{\sqrt{2A(t)}}{2ch(x-\gamma(t))}$$

bu yerda $\gamma(t) = \frac{1}{2} \left(-t + 2 \int_0^t A(\tau) d\tau \right).$

Dissertatsiya ishining **“Modifitsirlangan manfiy tartibli Korteveg-de Friz tenglamasini davriy funksiyalar sinfida integrallash”** deb nomlangan uchinchi bobi uchta paragrafni o‘z ichiga olgan. Birinchi paragrafida davriy funksiyalar sinfida yuklangan hadli manfiy tartibli mKdF tenglamasiga qo‘yilgan Koshi masalasi davriy funksiyalar sinfida integrallangan.

Uchinchi bobning birinchi paragrafida, quyidagi manfiy tartibli mKdF tenglamasi

$$\begin{cases} q_{xt} = -2q\mu_t + \gamma(t)q(0,t)q, \\ \mu_x = -q^2 \end{cases} \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

ushbu

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \mu(x,t)|_{x=0} = \mu_0(t), [q_t(x,t) - \mu_t(x,t)]|_{x=0} = \beta(t), \quad (3.2)$$

boshlang'ich shart bilan x bo'yicha π -davriy bo'lgan va ushbu

$$\begin{aligned} q(x,t) &\in C_x^1(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0), \\ \mu(x,t) &\in C_x^1(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0), \end{aligned} \quad (3.3)$$

silliqlik shartini qanoatlantiradigan $q(x,t)$ haqiqiy funksiyani topish talab etilsin:

$$q(x+\pi,t) \equiv q(x,t), \mu_t(x+\pi,t) = \mu_t(x,t) \quad x \in \mathbb{R}, t>0$$

bunda $q_0(x) \in C^3(\mathbb{R})$ berilgan haqiqiy funksiya. Bu yerda $\mu_0(t) \in C^1[0,\infty)$ va $\beta(t) \in C[0,\infty)$ oldindan berilgan uzluksiz va chegaralangan funksiyalar. Mazkur paragrafning asosiy natijasi quyidagi teoremda bayon qilingan.

Teorema 3.1. Agar $(q(x,t), \mu(x,t))$ funksiyalar juftligi (3.1)-(3.3) masalaning yechimi bo'lsa, u holda ushbu Dirak operatorining λ_n , $n \in \mathbb{Z}$ spektri τ va t parametrlarga bog'liq bo'lmaydi, bunda $\xi_n(\tau, t)$, $n \in \mathbb{Z}$ spektral parametrlar esa ushbu Dubrovin tenglamalar sistemasi analogini

$$\dot{\xi}_n = \frac{1}{\xi_n} (-1)^n \sigma_n(t) h_n(\xi) \left\{ q_t(0,t) - \mu_t(0,t) + \frac{\gamma(t)q(0,t)}{2} \right\}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (3.4)$$

bu yerda $h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}$

hamda ushbu

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0(0), \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0(0), n \geq 1 \quad (3.5)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradi. Bu yerda $\sigma_n(\tau)$ ishoralar, $\xi_n(\tau)$ spektral parametr $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$ o'z lakunasining chetiga kelganda qarama-qarshisiga o'zgaradi.

Ushbu $\{\lambda_n, n \geq 0, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \geq 1\}$ to'plam esa $L(\tau, 0)$ operatorning spektral berilganlari.

Uchinchi bobning ikkinchi paragrafida Dubrovin tenglamalar sistemasi uchun qo'yilgan Koshi masalasi yechimining mavjud va yagonaligi isbotlangan.

Uchinchi bobning oxirgi paragrafida, quyidagi manfiy tartibli mKdF tenglamasi

$$\begin{cases} q_{xt} = -2q\mu_t + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda, t) s_1(\pi, \lambda, t) (\psi_1^+ \psi_2^- + \psi_2^+ \psi_1^-) d\lambda, \\ \mu_x = -q^2 \end{cases} \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

ushbu

$$q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \mu(x, t)|_{x=0} = \mu_0(t), [q_t(x, t) - \mu_t(x, t)]|_{x=0} = \beta(t), \quad (3.7)$$

boshlang'ich shart bilan x bo'yicha π -davriy bo'lgan va ushbu

$$\begin{aligned} q(x, t) &\in C_x^1(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0), \\ \mu(x, t) &\in C_x^1(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0) \end{aligned} \quad (3.8)$$

silliqlik shartini qanoatlantiradigan $q(x, t)$ haqiqiy funksiyani topish talab etilsin:

$$q(x + \pi, t) \equiv q(x, t), \mu_t(x + \pi, t) = \mu_t(x, t) \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

bunda $q_0(x) \in C^3(\mathbb{R})$ berilgan haqiqiy funksiya. Qaralayotgan masalada $\gamma(\lambda, t) \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$ oldindan berilgan haqiqiy, uzluksiz funksiya va ushbu asimptotikaga ega $\gamma(\lambda, t) = \underline{O}(1/\lambda^4)$, $\lambda \rightarrow \infty$, $\psi^\pm = (\psi_1^\pm(x, \lambda, t), \psi_2^\pm(x, \lambda, t))^T$ - Dirak tenglamasining Floke yechimlari

$$L(t)y \equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega(x, t)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

bu yerda

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x, t) \\ q(x, t) & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1(x, t) \\ y_2(x, t) \end{pmatrix}$$

$s(x, \lambda, t) = (s_1(x, \lambda, t), s_2(x, \lambda, t))^T$ lar orqali (3.9) tenglamaning ushbu $s(0, \lambda, t) = (0, 1)^T$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini belgilaymiz.

Mazkur paragrafning asosiy natijasi quyidagi teoremda bayon qilingan.

Teorema 3.2. Agar $(q(x, t), \mu(x, t), \psi^+(x, \lambda, t), \psi^-(x, \lambda, t))$ funksiyalar juftligi (3.6)-(3.8) masalaning yechimi bo'lsa, u holda Dirak operatorining λ_n , $n \in \mathbb{Z}$ spektri τ va t parametrlarga bog'liq bo'lmaydi, bunda $\xi_n(\tau, t)$, $n \in \mathbb{Z}$ spektral parametrlar esa ushbu Dubrovin tenglamalar sistemasi analogini

$$\dot{\xi}_n = \frac{1}{\xi_n} (-1)^n \sigma_n(t) h_n(\xi) \left\{ q_t(0, t) - \mu_t(0, t) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda \gamma(\lambda, t) s_1(\pi, \lambda, t)}{\xi_n^2 - \lambda^2} d\lambda \right\}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (3.10)$$

hamda ushbu

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0(0), \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0(0), \quad n \geq 1 \quad (3.11)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradi, bu yerda

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}.$$

Bu yerda $\sigma_n(\tau)$ ishoralar $\xi_n(\tau)$ spektral parameter $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$ o'z lakunasining chetiga kelganda qarama-qarshisiga o'zgaradi. Ushbu $\{\lambda_n, n \geq 0, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \geq 1\}$ to'plam esa $L(\tau, 0)$ operatorning spektral berilganlari.

XULOSA

Ushbu dissertatsiya tez kamayuvchi funksiyalar sinfida manfiy tartibli KdF tenglamasini integrallash va davriy funksiyalar sinfida manfiy tartibli mKdF tenglamasini integrallashga bag'ishlangan.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilar:

1. Shturm-Liuvill operatori uchun sochilish nazariyasining teskari masalasi usulidan foydalanib, tez kamayuvchi funksiyalar sinfida manfiy tartibli KdF tenglamasining integrallanuvchanligi isbotlangan;

2. Shturm-Liuvill operatori uchun sochilish nazariyasining teskari masalasi usulidan foydalanib, moslangan manbali manfiy tartibli KdF tenglamasining integrallanuvchanligi isbotlangan;

3. Dirak operatori uchun teskari spektral masala usulidan foydalanib, davriy funksiyalar sinfida yuklangan hadli va integral manbali manfiy tartibli mKdF tenglamasining integrallanuvchanligi isbotlangan;

4. Dubrovin differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasining yechimi mavjud va yagonaligi isbotlangan.

Olingan natijalar dissertatsiya tadqiqot maqsadlariga erishilganligini tasdiqlaydi. Olingan barcha natijalar teskari spektral masala usuli yordamida nochiziqli evolyutsion tenglamalarni integrallash nazariyasiga katta hissa qo'shadi.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/2025.27.12.FM.06.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ПРИ УРГЕНЧСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ИМЕНИ АБУ РАЙХАНА
БЕРУНИ**

**УРГЕНЧСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
АБУ РАЙХАНА БЕРУНИ**

ИСМОИЛОВ ОХУНЖОН БАХРАМ УГЛИ

**ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА И
МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА
ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА МЕТОДАМИ ОБРАТНОЙ
СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ**

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим
наукам**

Ургенч – 2026

Тема диссертации доктора философии (PhD) зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при министерстве Высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за № B2025.4.Phd/FM1401.

Диссертация выполнена в Хорезмском территориальном подразделении Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан и Ургенчском государственном университете имени Абу Райхана Беруни.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-mat.urdu.uz) и на Информационно-образовательном портале “ZiyoNet” (www.ziyo.net).

Научный руководитель:

Уразбоев Гайрат Уразалиевич

доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты:

Балтаева Умида Исмаиловна

доктор физико-математических наук, профессор

Рахимов Илхам Давронбекович

доктор философии по физико-математическим наукам

Ведущая организация:

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

Защита диссертации состоится “___” _____ 2026 года в _____ : _____ часов на заседании Научного совета PhD.03/2025.27.12.FM.06.02 при Ургенчском государственном университете имени Абу Райхана Беруни. (Адрес: 220100, г.Ургенч, ул. Х. Алимджана, дом 14. Тел: (+99862) 224-66-11, факс: (+99862) 224-67-00, e-mail: ik-mat.urdu@umail.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Ургенчском государственном университете имени Абу Райхана Беруни. (зарегистрирована за № _____). (Адрес: 220100, г.Ургенч, ул. Х. Алимджана, дом 14. Тел:(+99862) 224-66-11, факс: (+99862) 224-67-00).

Автореферат диссертации разослан “___” _____ 2026 года.

(протокол рассылки № _____ от “___” _____ 2026 года).

А. А. Атамуратов

Председатель Научного совета по присуждению ученой степени, д.ф-м.н.

А. А. Рейимбергенов

Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученой степени, к.ф-м.н.

Б. А. Бабажанов

Председатель Научного семинара при научном совете по присуждению ученой степени, д.ф-м.н, профессор.

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Во многих научных и прикладных математических исследованиях проводимых в мире особое внимание уделяется исследованию прямых и обратных спектральных задач для оператора Штурма-Лиувилля. В настоящее время прямые и обратные задачи спектрального анализа играют важную роль при нахождении решений эволюционных уравнений современной математической физики и определения класса их решений. Кроме того, эти задачи актуальны в радиотехнике, нелинейной оптике, квантовой механике и моделировании кристаллических свойств аморфных тел. Алгоритмы решения задач Коши, поставленных для уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ) и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (мКдФ), с использованием методов обратной задачи теории рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля и обратной спектральной задачи для оператора Дирака с периодическими коэффициентами, имеют существенное значение при изучении распространения ультракоротких импульсов в нелинейных средах, в некоторых задачах нелинейной электродинамики, включая вышеупомянутые области.

В настоящее время приоритетное внимание уделяется исследованиям разработки алгоритма нахождения решения задачи Коши, поставленной для нелинейного уравнения КдФ отрицательного порядка и уравнения мКдФ отрицательного порядка с дополнительными членами в классах быстроубывающих и периодических функций. Поэтому актуальными являются исследования, позволяющих показать, что наряду с уравнением КдФ отрицательного порядка в классах быстро убывающих и периодических функций существуют решения нелинейного уравнения КдФ отрицательного порядка и модифицированного уравнения КдФ отрицательного порядка с нагруженными и дополнительными членами, которые имеют солитообразную форму с постоянной амплитудой и представимы в виде равномерно сходящегося функционального ряда.

В нашей республике осуществляются масштабные меры направленные на определения решений нелинейных эволюционных уравнений математической физики методом прямых и обратных спектральных задач для оператора Штурма-Лиувилля, а также на практическое применение полученных решений. В частности, особое внимание уделяется изучению задач спектральной теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В результате достигнуты значительные результаты в построении солитообразных решений нелинейных эволюционных уравнений отрицательного порядка современной математической физики с использованием методов прямых и обратных задач теории рассеяния. Расширение сферы научных исследований в области математики, повышение их эффективности и практической значимости определены в качестве приоритетных направлений развития исследований в области математики и ее приложений³. При выполнении этих задач, в частности

³ Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП-4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», от 07.05.2020 г.

для интегрирования нелинейных эволюционных уравнений современной математической физики, важное научное значение имеет изучение существования решений задачи Коши для уравнения КдФ отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе быстроубывающих функций и уравнения мКдФ отрицательного порядка в классе периодических и быстроубывающих функций методами обратных спектральных задач

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит реализации задач, постановленных в Указах и постановлениях Президента Республики Узбекистан от 29 октября 2020 года УП-6097 «Об утверждении Концепции развития науки до 2030 года» и от 28 января 2022 года УП-60 «О Стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы», от 9 июля 2019 года № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан», а также в других нормативных правовых актах, касающихся данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Восстановления линейного оператора Штурма-Лиувилля по данным рассеяния называют обратной задачей. Обратная задача по данным рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля изучалась Л.Д. Фаддеевым, В.А. Марченко, Б.М. Левитаном и другими учёными. Метод решения обратной задачи теории рассеяния впервые был применен в 1967 году Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой к процессу интегрирования классического КдФ. Тогда же ими было найдено его солитонное решение. В 1968 году Лакс показал, что метод обратной задачи теории рассеяния имеет общий характер, и сумел найти аналоги уравнения КдФ более высокого порядка.

Другой актуальной проблемой является интегрирование классического уравнения КдФ в классе периодических функций, иными словами нахождение периодических аналогов солитонных решений уравнения КдФ. В 1974 г. С.П. Новиков показал, что всякое стационарное периодическое решение уравнения КдФ и его обобщений более высокого порядка является конечнозонным потенциалом и состоит из квазипериодических функций. В том же году А.Р. Итс, В.Б. Матвеев и Б.А. Дубровин, С.П. Новиков с помощью метода обратных спектральных задач, поставленных над оператором Хилла, показали, что классическое уравнение КдФ интегрируемо в классе конечнозонных периодических и квазипериодических функций. Ими была найдена явная формула для конечнозонного решения классического уравнения КдФ.

Класс периодических функций целесообразно разделить на два подмножества: класс периодических конечнозонных функций и класс периодических бесконечнозонных функций. Пример периодического бесконечнозонного потенциала впервые был введен в 1922 году Э. Л. Инсом.

При этом было доказано, что все лакуны в спектре оператора Хилла открыты. Из приведенных выше рассуждений видно, что класс периодических конечнозонных потенциалов и класс периодических бесконечнозонных потенциалов не являются пустыми множествами. Поэтому задача доказательства разрешимости задачи Коши, поставленной для нелинейных эволюционных уравнений в классе периодических бесконечнозонных функций является одной из актуальных в современной математической физике. Интегрируемость классического уравнения КдФ с источником в классе периодических функций впервые была доказана в 2010 году в статье А. Б. Хасанова и А. Б. Яхшимуратова. Интегрируемость уравнения КдФ отрицательного порядка с источником в классе периодических функций впервые была доказана в 2022 году в статье Г.У. Уразбоева и М.М. Хасанова.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ высшего образовательного или научно-исследовательского учреждения, где выполнена диссертация. Диссертация выполнена в рамках плана научно-исследовательских работ «Приложения спектральной теории дифференциальных операторов к нелинейным эволюционным уравнениям» Ургенчского государственного университета имени Абу Райхана Беруни.

Цель исследования Интегрирование уравнения КдФ отрицательного порядка и уравнения мКдФ отрицательного порядка методами обратной спектральной задачи с использованием методов решения обратных задач для оператора Штурма-Лиувилля и оператора Дирака.

Задачи исследования:

используя метод обратной задачи теория рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля показать интегрируемость уравнения КдФ отрицательного порядка в классе быстроубывающих функций;

изучение интегрируемости уравнения КдФ отрицательного порядка с самосогласованным источником методом обратной задачи теории рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля;

доказательство разрешимости задачи Коши для уравнения мКдФ отрицательного порядка с нагруженным членом и интегральным источником в классе периодических функций;

доказательство существования и единственности глобального решения уравнения мКдФ отрицательного порядка с нагруженным членом и интегральным источником в классе периодических функций.

Объектом исследования являются уравнения КдФ отрицательного порядка с самосогласованным источником и уравнения мКдФ отрицательного порядка с нагруженным членом и интегральным источником в классе быстроубывающих и периодических функций.

Предметом исследования является применение метода обратной задачи рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля, а также обратной спектральной задачи по спектральным данным оператора Дирака к интегрированию нелинейных эволюционных уравнений.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы математической физики, математический анализ, функциональный анализ, спектральная теория дифференциальных операторов, теория функций комплексных переменных и методы решения дифференциальных уравнений.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

используя метод обратной задачи теории рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля, доказана интегрируемость уравнения КдФ отрицательного порядка в классе «быстроубывающих» функций;

используя метод обратной задачи теории рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля, доказана интегрируемость уравнения КдФ отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе «быстроубывающих» функций;

используя метод обратной спектральной задачи для оператора Дирака, доказана разрешимость задачи Коши для уравнения мКдФ отрицательного порядка с нагруженным членом в классе периодических функций;

используя метод обратной спектральной задачи для оператора Дирака доказана интегрируемость уравнения мКдФ отрицательного порядка с интегральным источником в классе периодических функций.

Практическими результатами являются следующие:

из алгоритмов, использованных для нахождения убывающих и периодических решений задачи Коши для уравнения КдФ отрицательного порядка и уравнения мКдФ отрицательного порядка с источниками, найдены точные солитонные и периодические решения;

используя алгоритм интегрирования уравнения КдФ и уравнения мКдФ отрицательного порядка в классе быстроубывающих и периодических функций обнаружено, что скорость распространения солитона и периодических волн увеличивается или уменьшается, а их амплитуды не меняются.

Достоверность результатов исследования основана на методах математической физики, спектрального и функционального анализа при решении обратных спектральных задач для дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля и Дирака с убывающими и периодическими коэффициентами, а также применении к решению нелинейных эволюционных уравнений, математических рассуждений, основанных на строгих доказательствах.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость работы заключается в том, что нелинейные эволюционные уравнения в современной математической физике могут быть интегрированы в классе убывающих и периодических функций.

Практическая значимость результатов исследований основывается на их применении в нелинейной оптике, радиотехнике, электродинамике и современной математической физике.

Внедрение результатов исследования. Результаты данной диссертационной работы на тему «Интегрирование уравнений Кортевега-де Фриза отрицательного порядка и модифицированных уравнений Кортевега-де Фриза с помощью методов обратной спектральной задачи», выполненной для получения ученой степени доктора философии (PhD) по физико-

математическим наукам, были использованы в фундаментальном проекте UT-OT-2020-1 на тему «Уравнение Монжа-Ампера и экстремальные плюрисубгармонические функции», выполненном в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека под руководством А. Садуллаева в 2020-2022 годах. В частности, разработанный в диссертации алгоритм интегрирования нелинейных эволюционных уравнений отрицательного порядка был применен для нахождения решений нелинейного однородного комплексного уравнения Монжа-Ампера. Применение научных результатов позволило исследовать свойства спектра комплексного оператора Монжа-Ампера, включая характеристики собственных значений и собственных функций. (Рекомендация Национального университета Узбекистана от 28 ноября 2025 года).

В научном исследовании проведено интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза отрицательного порядка в классе «быстроубывающих» функций с помощью метода обратной задачи рассеяния, поскольку в нем существенно используется решение задачи о восстановлении потенциала оператора Штурма-Лиувилля на всей оси по данным рассеяния. Получены аналитические решения, изучены свойства солитонных структур и разработаны методы их анализа в эволюционных нелинейных системах. Полученные результаты вносят вклад в развитие теории интегрируемых систем и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Результаты были использованы сотрудниками кафедры дифференциальных уравнений ММФ НГУ при проведении работ по гранту РФФИ № 18-29-10086 – «Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом. Теория и приложения» (2018–2022). Эти результаты являлись полезными в теоретических исследованиях и при разработке алгоритмов. Полученные результаты позволили рассмотреть новые задачи для нелинейных уравнений с запаздывающим аргументом и для классов систем дифференциальных уравнений большой размерности. (Рекомендация Новосибирского государственного университета от 1 декабря 2025 г.).

Апробация результатов исследования. Результаты исследований обсуждались на 5 научно-практических конференциях, в том числе 2 международных и 3 республиканских.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 5 научных работ, из них 5 статей опубликовано в научных изданиях, рекомендованных к защите докторских диссертаций ВАК Республики Узбекистан, в том числе 2 в зарубежных и 3 в республиканских научных журналах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 87 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации, и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации «Прямые и обратные задачи спектральной теории операторов Штурма-Лиувилля и Дирака на всей оси», приведены хорошо известные, но необходимые исходные данные, основные обозначения, определения, понятия и основные теоремы, необходимые для интегрирования уравнения КдФ отрицательного порядка в классе быстроубывающих и периодических функций.

В первом параграфе первой главы рассматривается следующее уравнение Штурма – Лиувилля на всей оси

$$Ly \equiv -y'' + u(x)y = k^2 y, (-\infty < x < \infty) \quad (1.1)$$

с действительной функцией $u(x)$ (потенциалом), удовлетворяющей условию «быстроубываемости»

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |u(x)| dx < \infty. \quad (1.2)$$

Обозначим через $f(x, k)$ и $g(x, k)$ решения Йоста уравнения (1.1) с асимптотиками

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, k) \exp(-ikx) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x, k) \exp(ikx) = 1, \quad \text{Im} k = 0. \quad (1.3)$$

При условии (1.2) такие решения существуют, определяются асимптотиками (1.3) однозначно.

При этом вещественные пары функций $\{f(x, k), f(x, -k)\}$ и $\{g(x, k), g(x, -k)\}$ являются парами линейно независимых решений уравнения (1.1), поэтому

$$\begin{aligned} f(x, k) &= a(k)g(x, k) + b(k)g(x, -k) \\ g(x, k) &= -b(-k)f(x, k) + a(k)f(x, -k). \end{aligned} \quad (1.4)$$

По переменной k решения Йоста $f(x, k)$ и $g(x, k)$ аналитически продолжаются в верхнюю полуплоскость $\text{Im} k > 0$.

Коэффициенты $a(k)$ и $b(k)$ обладают следующими свойствами:

$$1. \quad a(k) = -\frac{1}{2ik} W \{ f(x, k), g(x, k) \}, \quad (1.5)$$

где

$$W \{ f(x, k), g(x, k) \} \equiv f(x, k)g'(x, k) - f'(x, k)g(x, k).$$

2. При действительных k

$$\begin{aligned} b(-k) &= \overline{b(k)}, \quad a(-k) = \overline{a(k)}, \\ |a(k)|^2 &= 1 + |b(k)|^2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$3. \quad a(k) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad b(k) = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad \text{при } k \rightarrow \pm \infty.$$

4. Функция $a(k)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\text{Im } k > 0$ и имеет там конечное число нулей, $k_n = i\chi_n$, ($\chi_n > 0$), $n = 1, 2, \dots, N$ эти нули являются простыми, причем $\lambda_n = -\chi_n^2$ собственное значение оператора L_0 .

5. При $\text{Im } z > 0$ функция $a(z)$ восстанавливается по своим нулям $i\chi_n$, $n = 1, 2, \dots, N$ и функции $r^+(k) = \frac{b(-k)}{a(k)}$ заданной на действительной оси по формуле

$$a(z) = \prod_{n=1}^N \frac{z - i\chi_n}{z + i\chi_n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |r^+(k)|^2)}{k - z} dk \right\}.$$

Из второго равенства формулы (1.4) и (1.5), с учётом четвертого свойства функции $a(k)$, получим следующее соотношение:

$$g(x, i\chi_j) = B_j f(x, i\chi_j), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.7)$$

Для решений Йоста задачи (1.1) - (1.2) справедливы следующие интегральные представления:

$$f(x, k) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} A^+(x, t) e^{ikt} dt, \quad (1.8)$$

$$g(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{-x} A^-(x, t) e^{-ikt} dt, \quad (1.9)$$

где ядра $A^+(x, y)$ и $A^-(x, y)$ связаны с потенциалом соотношениями:

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} A^+(x, x), \quad u(x) = 2 \frac{d}{dx} A^-(x, x). \quad (1.10)$$

Ядра $A^+(x, y)$ и $A^-(x, y)$ являются решениями интегральных уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко:

$$\Omega^+(x + y) + A^+(x, y) + \int_x^{\infty} A^+(x, z) \Omega^+(z + y) dz = 0, \quad (y > x) \quad (1.11)$$

$$\Omega^-(x + y) + A^-(x, y) + \int_{-\infty}^x A^-(x, z) \Omega^-(z + y) dz = 0, \quad (y < x),$$

где функция задаётся выражением:

$$\Omega^{\pm}(x) = - \sum_{n=1}^N \frac{iB_n}{\frac{da(z)}{dz} \Big|_{z=i\chi_n}} e^{\mp \chi_n x} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r^{\pm}(k) e^{\pm ikx} dk, \quad (1.12)$$

а $a(z)$ - аналитическое продолжение функции $a(k)$ при $(\text{Im } k = 0)$ в верхнюю комплексную полуплоскость.

Определение 1.1. Набор $\{r^+(k), B_1, B_2, \dots, B_N, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N\}$ называется данными рассеяния для задачи (1.1)–(1.2).

Определение 1.2. Прямая задача рассеяния состоит в определении данных рассеяния по потенциалу $u(x)$, а обратная в восстановлении по данным рассеяния потенциала $u(x)$ уравнения (1.1).

Рассмотрим функцию

$$h_n(x) = \frac{\frac{d}{dk}(g(x, k) - B_n f(x, k)) \Big|_{k=i\chi_n}}{i\chi_n}, \quad n=1, 2, \dots, N. \quad (1.13)$$

Нетрудно показать, что функция $h_n(x)$ является решением уравнения

$$Ly = -\chi_n^2 y, \quad n=1, 2, \dots, N.$$

Отсюда, на основании (1.13), выводим асимптотики для

$$h_n(x) \rightarrow e^{\chi_n x}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (1.14)$$

$$h_n(x) \rightarrow -B_n e^{-\chi_n x}, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (1.15)$$

Из асимптотик (1.14) и (1.15) следуют следующие выражения:

$$\begin{aligned} W\{h_n(x), f(x, i\chi_n)\} &= -2\chi_n, \quad n=1, 2, \dots, N, \\ W\{h_n(x), g(x, i\chi_n)\} &= -2B_n\chi_n. \end{aligned} \quad (1.16)$$

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма

Лемма 1.1. Пусть функции $y(x, \lambda)$ и $z(x, \mu)$ являются решениями уравнений $Ly(x, \lambda) = \lambda y(x, \lambda)$ и $Lz(x, \mu) = \mu z(x, \mu)$, соответственно. Тогда справедливо равенство

$$\frac{d}{dx} W\{y(x, \lambda), z(x, \mu)\} = (\lambda - \mu) y(x, \lambda) z(x, \mu).$$

Из этой леммы, в частности, следует ортогональность собственных функций, соответствующих различным собственным значениям.

Во втором параграфе рассматривается система уравнений Дирака на всей прямой

$$Ly \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ q(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.17)$$

где $q(x)$ – действительная непрерывная функция из класса $C^1(\mathbb{R})$, имеющая период π , а λ – комплексный параметр.

Обозначим через $c(x, \lambda) = (c_1(x, \lambda), c_2(x, \lambda))^T$ и $s(x, \lambda) = (s_1(x, \lambda), s_2(x, \lambda))^T$ решения уравнения (1.17), удовлетворяющие начальным условиям $c(0, \lambda) = (1, 0)^T$ и $s(0, \lambda) = (0, 1)^T$.

Функция $\Delta(\lambda) = c_1(\pi, \lambda) + s_2(\pi, \lambda)$ называется функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла для оператора Дирака (1.17). Следующее утверждение составляет содержание теоремы Флоке: при $\Delta^2(\lambda) - 4 \neq 0$ уравнение (1.17)

имеет два линейно независимых решения имеющие вид: $\psi^\pm(x, \lambda) = \rho_\pm^{\frac{x}{\pi}} \cdot p^\pm(x, \lambda)$

, где $p^\pm(x, \lambda)$ – π -периодические вектор-функции по x и $\rho_\pm = (\Delta(\lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4})/2$; при $\Delta(\lambda) = 2$ уравнение (1.17) имеет решение с периодом π ; при $\Delta(\lambda) = -2$ уравнение (1.17) имеет решение с антипериодом π . Если положить $\psi_1^\pm(0, \lambda) = 1$, то

$$\psi^\pm(x, \lambda) = c(x, \lambda) + \frac{s_2(\pi, \lambda) - c_1(\pi, \lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s_1(\pi, \lambda)} s(x, \lambda).$$

Эти решения принято называть решениями Флоке. Спектр оператора (1.17) состоит из следующего множества

$$E = \{\lambda \in \mathbb{R} : -2 \leq \Delta(\lambda) \leq 2\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right\}.$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \in \mathbb{Z}$ называются лакунами.

Корни уравнения $s_1(\pi, \lambda) = 0$ обозначим через ξ_n , $n \in \mathbb{Z}$. Числа ξ_n совпадают с собственными значениями задачи Дирихле $y_1(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$ для системы (1.17) и выполняются соотношения $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Определение 1.3. Числа $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in \mathbb{Z}$ и знаки $\sigma_n = \text{sign}\{s_2(\pi, \xi_n) - c_1(\pi, \xi_n)\}$, $n \in \mathbb{Z}$ называются спектральными параметрами задачи (1.17).

Определение 1.4. Спектральные параметры ξ_n, σ_n , $n \in \mathbb{Z}$ и границы спектра λ_n , $n \in \mathbb{Z}$ называются спектральными данными задачи (1.17).

Определение 1.5. Нахождение спектральных данных задачи (1.17) называется прямой задачей, а восстановление коэффициента $q(x)$ по спектральным данным называется обратной задачей.

Если в задаче (1.17) вместо $q(x)$ рассмотреть $q(x + \tau)$, то спектр полученной задачи не будет зависеть от параметра τ : $\lambda_n(\tau) \equiv \lambda_n$, $n \in \mathbb{Z}$, а спектральные параметры будут зависеть от параметра τ : $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n \in \mathbb{Z}$. Эти спектральные параметры удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина-Трубовица:

$$\frac{d\xi_n}{d\tau} = 2(-1)^{n-1} \sigma_n(\tau) h_n(\xi) \xi_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}.$$

Знак $\sigma_n(\tau)$ меняется на противоположный при каждом столкновении $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Система уравнений Дубровина-Трубовица, а также следующая формула следов

$$q(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau) h_n(\xi(\tau)) \quad (1.18)$$

дают метод решения обратной спектральной задачи.

Лемма 1.2 Если вектор-функция $(y_1, y_2)^T$ является решением системы (1.17), то выполняются следующие тождества:

$$\begin{aligned} 2y_2 y_1 &= \frac{1}{2\lambda} [y_2^2 - y_1^2]' + \frac{1}{\lambda} q(y_1^2 + y_2^2), \\ \frac{1}{2} [y_2^2 + y_1^2]' &= q(y_1^2 - y_2^2). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Вторая глава диссертации называется «Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе «быстроубывающих» функций.

В первом параграфе второй главы «Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза отрицательного порядка методом обратной задачи рассеяния», с помощью метода обратной задачи рассеяния доказывается существование решения уравнения КдФ отрицательного порядка.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} u_t = 2vv_x, \\ v_{xx} = uv, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

которая называется уравнения КдФ отрицательного порядка и включается в иерархию уравнений КдФ.

Далее, выполняя следующую замену переменных:

$$w = v^2 + \frac{1}{2}$$

преобразуем приведенное выше уравнение к новому виду:

$$\begin{cases} u_t = w_x \\ w_{xxx} = 4uw_x + 2u_x w - u_x, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \quad (2.1)$$

Мы рассматриваем уравнения (2.1) с начальным условием:

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

где $u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – действительная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|) |u_0(x)| dx < \infty.$$

2) Оператор $L_0 y \equiv -y'' + u_0(x)y = k^2 y$, $x \in \mathbb{R}^1$ имеет N простых отрицательных собственных значений $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \dots, \lambda_N(0)$.

Предположим, что в задаче (2.1) - (2.2) функция $u(x, t)$ является быстро убывающей при $x \rightarrow \pm\infty$. Кроме того, функции $u(x, t)$ и $w(x, t)$ достаточно гладкие и удовлетворяют следующим условиям:

$$u \in C^{1,1}(\mathbb{R}), w \in C^{3,0}(\mathbb{R}),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)(|u(x,t)|+|u_t(x,t)|)dx < \infty, \text{ для всех } t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.3)$$

$$w(x,t) \rightarrow 0, w_x(x,t) \rightarrow 0, w_{xx}(x,t) \rightarrow 0, x \rightarrow \pm\infty.$$

Основной результат этого параграфа сформулирован в следующей теореме.

Теорема 2.1. Если пара функций $(u(x,t), w(x,t))$ является решением задачи (2.1)-(2.3), то данные рассеяния оператора $L(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t)$ с потенциалом $u(x,t)$ меняются по t следующим образом:

$$\frac{\partial r^+(k,t)}{\partial t} = -\frac{i}{2k} r^+(k,t), \text{ при } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\frac{dB_n(t)}{dt} = -\frac{B_n(t)}{2\chi_n(t)}, \quad n=1,2,\dots,N,$$

$$\frac{d\chi_n(t)}{dt} = 0.$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет построить алгоритм нахождения решения задачи (2.1) - (2.3).

Пример 2.1. Теперь рассмотрим следующую задачу Коши

$$\begin{cases} u_t = w_x, \\ w_{xxx} = 4uw_x + 2u_x w - u_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \end{cases}$$

при начальном условии $u(x,0) = -\frac{2}{ch^2 x}$.

Применяя теорему 2.1, восстановим потенциал и получим $u(x,t), w(x,t)$

$$u(x,t) = -\frac{2}{ch^2 \left(x + \frac{t}{2}\right)}, \quad w(x,t) = -\frac{1}{ch^2 \left(x + \frac{t}{2}\right)}.$$

Во втором параграфе второй главы диссертации «**Уравнение Кортевега-де Фриза отрицательного порядка с источником и преобразование данных рассеяния**» с помощью метода обратной задачи рассеяния доказывается существование решения уравнения КдФ отрицательного порядка с источником.

Рассмотрим систему уравнений КдФ отрицательного порядка с источником:

$$\begin{cases} u_t = 2vv_x + G, \\ v_{xx} = uv \end{cases} \quad (2.4)$$

где $G(x,t)$ – заданная гладкая функция, «быстроубывающая» по переменной x :

$$G(x,t) = o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad \forall t > 0.$$

Исследуемая система уравнений (2.4) рассматривается с начальным условием:

$$u(x)|_{t=0} = u_0(x), \quad (2.5)$$

где функция $u_0(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|u_0(x)|dx < \infty.$$

2. Оператор Штурма - Лиувилля $L_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$ имеет N простых отрицательных собственных значений: $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \dots, \lambda_N(0)$.

Предположим, что в задаче (2.4)-(2.5) функция $u(x,t)$ является быстро убывающей при $x \rightarrow \pm\infty$. Кроме того, функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ достаточно гладкие и удовлетворяют следующим условиям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left((1+|x|)|u| + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \right) dx < \infty, t \geq 0, \quad (2.6)$$

$$v^2(x,t) \rightarrow 1, v_x(x,t) \rightarrow 0, v_{xx}(x,t) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty.$$

Основной результат этого параграфа сформулирован в следующей основной лемме.

Лемма 2.1. Если потенциал оператора $L(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t)$ является решением задачи Коши (2.4)-(2.5) в классе функций, удовлетворяющих условию (2.6). то данные рассеяния оператора $L(t)$ изменяются по t следующим образом:

$$\frac{\partial r^+(k,t)}{\partial t} = -\frac{i}{k} r^+(k,t) - \frac{1}{2ika^2(k)} \int_{-\infty}^{+\infty} Gg^2 dx, \text{Im } k = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{dB_n(t)}{dt} = -\frac{B_n}{\chi_n} - \frac{1}{2\chi_n} \int_{-\infty}^{+\infty} Gg(x, i\chi_n, t) h_n(x, t) dx, \quad (2.8)$$

$$\frac{d\chi_n(t)}{dt} = -\frac{1}{2\chi_n} \int_{-\infty}^{+\infty} G\Phi_n(x, t) dx, n=1, 2, \dots, N \quad (2.9)$$

где $\Phi_n(x, t)$ нормированные собственные функции оператора $L(t)$ соответствующие собственным значениям $\lambda_n = -\chi_n^2(t)$, $n=1, 2, \dots, N$.

В третьем параграфе второй главы диссертации «Решение задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником», с помощью метода обратной задачи рассеяния доказывается существование решения уравнения КдФ отрицательного порядка с самосогласованным источником.

Рассмотрим следующую систему уравнений Кортевега-де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником:

$$\begin{cases} u_t = 2vv_x + 4 \sum_{m=1}^N \frac{\partial}{\partial x} |\varphi_m|^2, \\ v_{xx} = uv, \\ -\varphi_m'' + u\varphi_m = \lambda_m \varphi_m, \quad m=1,2,\dots,N, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.10)$$

В рассматриваемой задаче $\varphi_m = \varphi_m(x, t)$, $m=1,2,\dots,N$ собственная функция оператора $L(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t)$, соответствующая собственному значению $\lambda_m(t) = -\chi_m^2(t)$, $m=1,2,\dots,N$ и нормированная условием

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_m(x, t)|^2 dx = A_m(t), \quad m=1,2,\dots,N \quad (2.11)$$

где $A_m(t)$, $m=1,2,\dots,N$ - заданные положительные, непрерывные функции.

В данном параграфе исследуется решение задачи Коши для системы (2.10) - (2.11) с начальным условием:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.12)$$

где $u_0(x)$ действительная функция, удовлетворяющая условию:

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |u_0(x)| dx < \infty \quad (2.13)$$

2. Оператор Штурма-Лиувилля $L_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$ имеет N простых отрицательных собственных значений $\lambda_1(0)$, $\lambda_2(0)$, ..., $\lambda_N(0)$.

Задача (2.10) - (2.12) рассматривается относительно неизвестных функций $u(x, t)$, $v(x, t)$, $\varphi_m(x, t)$, $\lambda_m(t)$, $m=1,2,\dots,N$. Предполагается, что функция $u(x, t)$, $v(x, t)$ обладает требуемой гладкостью, достаточно быстро стремится к нулю при $x \rightarrow \pm \infty$ и удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left((1 + |x|) |u(x, t)| + \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right| \right) dx < \infty \quad (2.14)$$

Основной результат этого параграфа сформулирован в следующей теореме

Теорема 2.2. Если функции $u(x, t)$ и $v(x, t)$ являются решениями задачи

Коши (2.10)-(2.12), то данные рассеяния оператора $L(t) := -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t)$

меняются по t следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r^+(k, t)}{\partial t} &= -\frac{i}{k} r^+(k, t), \quad \text{Im } k = 0, \\ \frac{dB_n(t)}{dt} &= \left(-\frac{1}{\chi_n} + 2A_n(t) \right) B_n(t), \quad n=1,2,\dots,N \end{aligned}$$

$$\frac{d\chi_n}{dt} = 0, \quad n=1, 2, \dots, N.$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет построить алгоритм нахождения решения задачи (2.10)-(2.12).

Теперь приведем пример:

Пример 2.2. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t = 2vv_x + 4 \sum_{m=1}^N \frac{\partial}{\partial x} |\varphi_m|^2, \\ v_{xx} = uv, \\ -\varphi_m'' + u\varphi_m = \lambda_m \varphi_m, \quad m=1, 2, \dots, N, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.15)$$

при начальной функции

$$u(x, 0) = -\frac{2}{\operatorname{ch}^2 x}. \quad (2.16)$$

Решая прямую задачу для оператора L_0 , а именно, находятся данные рассеяния:

$$N=1, \quad r^+(k, 0) = \frac{b(-k, 0)}{a(k, 0)} = 0, \quad B_1(0) = 1, \quad \chi_1(0) = 1.$$

для оператора L_0 . Применяя указанную теорему 2.2, получаем следующие данные рассеяния:

$$r^+(k, t) = 0, \quad B_n(t) = e^{2\gamma(t)}, \quad \chi_n = 1,$$

где

$$\gamma(t) = \frac{1}{2} \left(-t + 2 \int_0^t A(\tau) d\tau \right).$$

В результате решения обратной задачи рассеяния находим потенциал $u(x, t)$:

$$u(x, t) = -\frac{2}{\operatorname{ch}^2(x - \gamma(t))}.$$

Подставляя найденное решение $u(x, t)$ в уравнение (2.15), получим соответствующую функцию $\varphi_1(x, t)$:

$$\varphi_1(x, t) = \frac{\sqrt{2A(t)}}{2\operatorname{ch}(x - \gamma(t))}.$$

В третьей главе диссертации под названием «**Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических функций**» доказано разрешимость задачи Коши для модифицированного уравнения КдФ отрицательного порядка в классе периодических функций.

В первом параграфе третьей главы рассматривается уравнение мКдФ отрицательного порядка с нагруженным членом

$$\begin{cases} q_{xt} = -2q\mu_t + \gamma(t)q(0,t)q, \\ \mu_x = -q^2 \end{cases} \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

со следующими условиями

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \quad \mu(x,t)|_{x=0} = \mu_0(t), \quad [q_t(x,t) - \mu_t(x,t)]|_{x=0} = \beta(t) \quad (3.2)$$

где $q_0(x) \in C^3(\mathbb{R})$, $\beta(t) \in C[0, \infty)$, $\gamma(t) \in C[0, \infty)$, и $\mu_0(t) \in C^1[0, \infty)$ заданные действительные функции, $q_0(x)$ имеет период π , а функции $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ ограничены. Требуется найти действительные решения $q(x,t)$ и $\mu(x,t)$ задачи (3.1) – (3.2), которые удовлетворяют условиям гладкости

$$\begin{aligned} q(x,t) &\in C_x^1(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0), \\ \mu(x,t) &\in C_x^1(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0). \end{aligned} \quad (3.3)$$

и следующие условия периодичности по переменной x

$$q(x + \pi, t) = q(x, t), \quad \mu_t(x + \pi, t) = \mu_t(x, t), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

В рассматриваемой задаче $\gamma(\lambda, t) \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$ заданная действительная, непрерывная функция, имеющая равномерную асимптотику $\gamma(\lambda, t) = \underline{O}(1/\lambda^4)$, $\lambda \rightarrow \infty$, $\psi^\pm = (\psi_1^\pm(x, \lambda, t), \psi_2^\pm(x, \lambda, t))^T$ – решения Флоке (нормированные условиями $\psi_1^\pm(0, \lambda, t) = 1$) следующего уравнения Дирака

$$L(t)y \equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega(x, t)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x, t) \\ q(x, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x, t) \\ y_2(x, t) \end{pmatrix}$$

Через $s(x, \lambda, t) = (s_1(x, \lambda, t), s_2(x, \lambda, t))^T$ обозначено решение уравнения (3.4), удовлетворяющее начальным условиям $s(0, \lambda, t) = (0, 1)^T$.

Основной результат этого параграфа сформулирован в следующей теореме.

Теорема 3.1. Если набор $(q(x, t), \mu(x, t))$ является решением задачи (3.1)–(3.3), то спектр оператора (3.4) не зависит от параметра t , а спектральные параметры $\xi_n = \xi_n(t)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина-Трубовица:

$$\dot{\xi}_n = \frac{1}{\xi_n} (-1)^n \sigma_n(t) h_n(\xi) \left\{ q_t(0, t) - \mu_t(0, t) + \frac{\gamma(t)q(0, t)}{2} \right\}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (3.5)$$

При этом знаки $\sigma_n(t) = \pm 1$ меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, и выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (3.6)$$

где ξ_n^0, σ_n^0 , $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ – спектральные параметры оператора Дирака с коэффициентом $q_0(x)$.

В последнем параграфе третьей главы рассмотрим следующее уравнение мКдФ отрицательного порядка с интегральным источником

$$\begin{cases} q_{xt} = -2q\mu_t + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda, t) s_1(\pi, \lambda, t) (\psi_1^+ \psi_2^- + \psi_2^+ \psi_1^-) d\lambda, \\ \mu_x = -q^2 \end{cases} \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

с условиями

$$q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \quad \mu(x, t)|_{x=0} = \mu_0(t), \quad (3.8)$$

где $q_0(x) \in C^3 \mathbb{R}$, $\mu_0(t) \in C^1[0, \infty)$ – заданные действительные функции, причем $q_0(x)$ имеет период π . Целью данной работы является нахождение действительных периодических по переменной x функции $q(x, t)$ и $\mu(x, t)$,

$$q(x + \pi, t) \equiv q(x, t), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\mu_t(x + \pi, t) \equiv \mu_t(x, t), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

удовлетворяющих условиям гладкости:

$$q(x, t) \in C_x^1(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0), \quad (3.9)$$

$$\mu(x, t) \in C_x^1(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0).$$

В рассматриваемой задаче $\gamma(\lambda, t) \in \mathbb{C}([0, \infty) \times [0, \infty))$ – заданная действительная, непрерывная функция, имеющая равномерную асимптотику $\gamma(\lambda, t) = \underline{O}(1/\lambda^4)$, $\lambda \rightarrow \infty$, $\psi^\pm = (\psi_1^\pm(x, \lambda, t), \psi_2^\pm(x, \lambda, t))^T$ – решения Флоке (нормированные условиями $\psi_1^+(0, \lambda, t) = 1$) следующего уравнения Дирака

$$L(t)y \equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega(x, t)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.10)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x, t) \\ q(x, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x, t) \\ y_2(x, t) \end{pmatrix}.$$

Через $s(x, \lambda, t) = (s_1(x, \lambda, t), s_2(x, \lambda, t))^T$ обозначено решение уравнения (3.10), удовлетворяющее начальным условиям $s(0, \lambda, t) = (0, 1)^T$.

В данной работе будет предложен алгоритм построения решения

$$q(x, t), \mu(x, t), \psi^+(x, \lambda, t), \psi^-(x, \lambda, t)$$

задачи (3.7)-(3.9) в рамках обратной спектральной задачи для уравнения Дирака (3.10)

Основной результат этого параграфа сформулирована в следующей теореме.

Теорема 3.2. Пусть набор $(q(x, t), \mu(x, t), \psi^+(x, \lambda, t), \psi^-(x, \lambda, t))$ является решением задачи (3.7)-(3.9). Тогда спектр оператора (3.10) не зависит от параметра t , а спектральные параметры $\xi_n = \xi_n(t)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина-Трубовица:

$$\dot{\xi}_n(t) = \frac{1}{\xi_n} (-1)^n \sigma_n(t) h_n(\xi) \left\{ q_t(0, t) - \mu_t(0, t) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n \gamma(\lambda, t) s_1(\pi, \lambda, t)}{\xi_n^2 - \lambda^2} d\lambda \right\}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (9)$$

Знаки $\sigma_n(t) = \pm 1$ меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (3.11)$$

где $\xi_n^0, \sigma_n^0, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ — спектральные параметры системы Дирака с коэффициентом $q_0(x)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию интегрирования уравнения КдФ отрицательного порядка в классе быстроубывающих и интегрирования уравнения мКдФ отрицательного порядка в классе периодических функций.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1) используя метод обратной задачи рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля доказана интегрируемость уравнения КдФ отрицательного порядка в классе быстроубывающих функций;

2) доказана интегрируемость уравнения КдФ отрицательного порядка с самосогласованным источником используя метод обратной задачи теории рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля;

3) используя метод обратной спектральной задачи для оператора Дирака доказана интегрируемость уравнения КдФ отрицательного порядка с нагруженным членом и интегральным источником в классе периодических функций;

4) доказано существование и единственность решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений Дубровина.

Полученные результаты подтверждают достижение целей исследования диссертации. Все полученные результаты вносят определенный вклад в теорию интегрирования нелинейных эволюционных уравнений с помощью метода обратных спектральных задач.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREE
PhD.03/2025.27.12.FM.06.02 URGENCH STATE UNIVERSITY NAMED
AFTER ABU RAYHAN BIRUNI**

URGENCH STATE UNIVERSITY NAMED AFTER ABU RAYHAN BIRUNI

ISMOILOV OKHUNJON BAHRAM UGLI

**INTEGRATION OF THE KORTEWEG–DE VRIES EQUATION AND THE
MODIFIED KORTEWEG–DE VRIES EQUATION OF NEGATIVE ORDER
BY THE INVERSE SCATTERING METHOD**

01.01.02 - Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT

of dissertation of the Doctor of Philosophy on physical and mathematical sciences

Urgench – 2026

The theme of the dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry higher education, science and innovations of the Republic of Uzbekistan under number B2025.4.PhD/FM1401.

Dissertation was prepared at the Khorezm regional branch of V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics of Uzbekistan Academy of Sciences and Urgench State University named after Abu Rayhan Biruni.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-mat.urdu.uz) and the "Ziyonet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:

Urazboev Gayrat Urazalievich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Associate professor

Official opponents:

Baltaeva Umida Ismailovna

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor

Rakhimov Ilkham Davronbekovich

Doctor of philosophy (PhD) on physical and
mathematical sciences

Leading organization:

**National University of Uzbekistan named after Mirzo
Ulugbek**

Defense will take place "____" _____ 2026 at _____:_____ at the meeting of Scientific Council number PhD.03/2025.27.12.FM.06.02 at Urgench State University named after Abu Rayhon Biruni. (Address: 14, Kh.Alimdjan str, Urgench city, 220100, Uzbekistan, Ph.: (+99862) 224-67-00, fax: (+99862) 224-67-00, e-mail: ik-mat.urdu@umail.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Urgench State University named after Abu Rayhon Biruni. (is registered №_____) (Address: 14, Kh.Alimdjan str, Urgench city, 220100, Uzbekistan, Ph.: (+99862) 224-67-00.

Abstract of dissertation sent out on "____" _____ 2026 year

(Mailing report № _____ on "____" _____ 2026 year)

A. A. Atamuratov

Chairman of Scientific council on award of
scientific degree, Dr.ph.-m.s.

A. A. Reyimberganov

Scientific secretary of Scientific council on
award of scientific degree, c.ph.-m.s.

B. A. Babajanov

Chairman of Scientific seminar under
scientific council on award of scientific
degree, Dr.ph.-m.s, Professor

INTRODUCTION (abstract of the PhD dissertation)

The purpose of the research: Integration of the negative order Korteweg–de Vries (KdV) equation and the negative-order modified Korteweg–de Vries (mKdV) equation using the inverse spectral transform method, based on the solution techniques for inverse problems for the Sturm–Liouville and Dirac operators.

The objects of the research: are the study of the negative-order KdV equation with a self-consistent source and the negative-order mKdV equation with a loaded term and an integral source, within the class of rapidly decreasing and periodic functions.

The scientific novelties of the research are as follow:

To demonstrate the integrability of the negative order KdV equation in the class of rapidly decreasing functions using the inverse scattering transform method for the Sturm–Liouville operator;

To investigate the integrability of the negative order KdV equation with a self-consistent source via the inverse scattering transform method for the Sturm–Liouville operator;

To prove the well-posedness of the Cauchy problem for the negative order mKdV equation with a loaded term and an integral source in the class of periodic functions;

To establish the existence and uniqueness of a global solution for the negative order mKdV equation with a loaded term and an integral source in the class of periodic functions.

The practical results of the research are as follows:

Using the algorithms developed for finding decaying and periodic solutions to the Cauchy problem for the negative order KdV and mKdV equations with sources, exact soliton and periodic solutions have been constructed;

Applying the integration algorithm for the negative order KdV and mKdV equations in the class of rapidly decreasing and periodic functions, it has been discovered that the propagation speed of solitons and periodic waves either increases or decreases, while their amplitudes remain unchanged.

Implementation of the research results. Results of the doctoral dissertation on the topic “Integration of Negative Order Korteweg–de Vries Equations and Modified Korteweg–de Vries Equations Using Inverse Spectral Problem Methods”, completed for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) in Physical and Mathematical Sciences, were utilized in the fundamental project UT-OT-2020-1 entitled “The Monge–Ampère Equation and Extremal Plurisubharmonic Functions”. This project was carried out at the Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan under the supervision of A. Sadullaev from 2020 to 2022. Specifically, the integration algorithm for nonlinear evolution equations of negative order, developed in the dissertation, was applied to find solutions of the nonlinear homogeneous complex Monge–Ampère equation. The application of these scientific results enabled the study of spectral properties of the complex Monge–Ampère operator, including the characteristics of its eigenvalues and eigenfunctions.

The scientific research involved the integration of the negative order KdV equation in the class of rapidly decreasing functions via the inverse scattering transform method. This approach fundamentally relies on the solution of the inverse problem of recovering the potential of a Sturm–Liouville operator on the entire line from its scattering data. Analytical solutions were obtained, the properties of solitonic structures were investigated, and methods for their analysis in nonlinear evolutionary systems were developed. The findings contribute to the theory of integrable systems and nonlinear partial differential equations.

Furthermore, the results were employed by researchers from the Department of Differential Equations at the Faculty of Mechanics and Mathematics of Novosibirsk State University (NSU) in their work on the Russian Foundation for Basic Research (RFBR) grant No. 18-29-10086, titled “High-Dimensional Systems of Differential Equations and Equations with Delay. Theory and Applications” (2018–2022). These results proved valuable for theoretical investigations and algorithm development. The obtained outcomes facilitated the consideration of new problems for nonlinear equations with delay and classes of large-dimensional systems of differential equations.

Approbation of the research results. The results of this research were discussed at 5 scientific and practical conferences, including 2 international and 3 republican conferences.

Publication of the research results. 5 scientific papers were published on the topic of the dissertation, of which 5 papers were published in scientific publications recommended by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for the defense of Doctor of Philosophy dissertations, including 3 in foreign and 2 in republican journals.

The formation and the volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion and a list of references. The volume of the dissertation is 87 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo'lim (I часть; I part)

1. Urazboev, G. U., Baltaeva, I. I., Ismoilov, O. B. Integration of the negative order Korteweg–de Vries equation by the inverse scattering method. // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki, 2023, vol. 33 (3), pp. 523-533. (3. Scopus, IF:1.2)

2. Fečkan, M., Urazboev, G., Baltaeva, I., Ismoilov, O. Integration of the negative order Korteweg-de Vries equation with self-consistent source. // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, 2023, vol. 6 (1), pp. 50-59.

3. Urazboev, G. U., Khasanov, M. M., Ismoilov, O. B. Integration of negative-order modified Korteweg de Vries equation with an integral source. // Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta, 2024, vol. 63, pp. 80-90. (3. Scopus, IF:1.0)

4. Urazboev, G. U., Khasanov, M. M., Ismoilov, O. B. Integration of the negative order modified Korteweg–de Vries equation with a loaded term in the class of periodic functions. // Differential Equations, 2024, vol. 60 (12), pp. 1757-1766. (3. Scopus, IF:1.3)

5. Ismoilov O.B. Solving the negative order Korteweg-de Vries equation by the (G'/G) – expansion method, // Ilm sarchashmalari, 2024, vol. 4, pp. 14-18 (01.00.00, №12)

II bo'lim (II часть; II part)

1. Уразбоев Г.У., Балтаева И.И., Исмоилов О.Б. Интегрирование уравнения Кортевега де-Фриза отрицательного порядка в классе “быстроубывающих” функций. // Сборник материалов международной научно-практической онлайн конференции «Третий ренессанс в Узбекистане и инновационные процессы», Андижон, 26 апреля, 2023 года, с. 287-291

2. Уразбоев Г.У., Хасанов М.М., Исмоилов О.Б. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза отрицательного порядка с дополнительным членом. // Неклассические уравнения математической физики и их приложения: Тезисы докладов международной научной конференции посвященной 90 летию со дня рождения академика Т.Д. Джураева, Ташкент, 24-26 октября, 2024 года, с. 231-232

3. Ismoilov O.B. A generalized (G'/G) - expansion method for the negative order modified Korteveg-de Vries equation. // Сборник материалов республиканской научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, математического моделирования и информатики», Нукус, 24-25 мая, 2024 года, с.102-103.

4. Уразбоев Г.У., Хасанов М.М., Исмоилов О.Б. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза отрицательного порядка с самосогласовным интегральным источником. // Сборник материалов

республиканской научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, математического моделирования и информатики», Нукус, 24-25 мая, 2024 года, с. 157-159.

5. Уразбоев Г.У, Балтаева И.И., Исмоилов О.Б. Об интегрирование нагруженное уравнение Кортевег-де Фриза отрицательного порядка с простым самосогласованным источником. // Тезисы докладов республиканской научной конференции на тему «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики». Фергана, 16-17 май, 2025 год, с. 202-203.

Dissertatsiya avtoreferati “Khwarezm publication” nashriyotida tahrir qilindi.

Bosishga ruxsat etildi: 28.01.2026-yil.
Bichimi 60x84^{1/16}, “Times New Roman”
garniturada raqamli bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog‘i 3. Adadi: 100. Buyurtma: № 219
“Khwarezm travel” bosmaxonasida chop etildi
220502, Xorazm, Urganch tumani, Zargarlar mahallasi,
Marvarid ko‘cha 7-yo‘lak 4-uy

