

**RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA SUN'IY INTELLEKTNI
RIVOJLANTIRISH ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI HUZURIDAGI
ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.09/2025.27.12.T.02.01.M RAQAMLI
ILMIY KENGASH**

**RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA SUN'IY INTELLEKTNI
RIVOJLANTIRISH ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI**

URUNBAYEV JASUR ERKINOVICH

**KO'P KOMPLEMENTLI MUHITLARDA KROSS-DIFFUZIYAGA EGA
JARAYONLARNI TADQIQ QILISH**

05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui

**TEXNIKA FANLARI DOKTORI (DSc)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

Toshkent – 2026

Texnika fanlari doktori (DSc) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

**Оглавление автореферата диссертации
доктора наук (DSc) по техническим наукам**

**Contents of dissertation abstract for Doctor of Sciences (DSc)
on technical sciences**

Urunbayev Jasur Erkinovich

Ко‘п компонентли muhitlarda kross-diffuziyaga ega jarayonlarni tadqiq qilish
.....3

Урунбаев Жасур Эркинович

Исследование процессов с кросс-диффузией в многокомпонентных средах
.....27

Urunbaev Jasur Erkinovich

Study of cross-diffusion processes in multicomponent media
.....53

E‘lon qilingan ishlar ro‘uxati

Список опубликованных работ

List of published works.....57

**RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA SUN'IY INTELLEKTNI
RIVOJLANTIRISH ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI HUZURIDAGI
ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.09/2025.27.12.T.02.01.M RAQAMLI
ILMIY KENGASH**

**RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA SUN'IY INTELLEKTNI
RIVOJLANTIRISH ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI**

URUNBAYEV JASUR ERKINOVICH

**KO'P KOMPLEMENTLI MUHITLARDA KROSS-DIFFUZIYAGA EGA
JARAYONLARNI TADQIQ QILISH**

05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui

**TEXNIKA FANLARI DOKTORI (DSc)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

Toshkent – 2026

Texnika fanlari doktori (DSc) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2024.4.DSc/T848 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya Raqamli texnologiyalar va sun’iy intellektni rivojlantirish ilmiy-tadqiqot institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida (www.airi.uz) va “Ziyonet” Axborot ta’lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy maslahatchi:

Raxmonov Zafar Ravshanovich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Rasmiy opponentlar:

Aripov Mersaid Mirsiddikovich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Xujayev Ismatulla Kushayevich
texnika doktori, professor

Eshmatov Baxtiyor Xasanovich
fizika-matematika fanlari doktori, dotsent

Yetakchi tashkilot:

Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti

Dissertatsiya himoyasi Raqamli texnologiyalar va sun’iy intellektni rivojlantirish ilmiy-tadqiqot instituti huzuridagi DSc.09/2025.27.12.T.02.01.M raqamli Ilmiy kengashning 2026-yil “07” iyul soat 15⁰⁰ dagi majlisida bo‘lib o‘tadi (Manzil: 100125, Toshkent shahri, M. Ulug‘bek tuman, Bo‘z-2 mavzesi, 17A uy. Tel.: (+99871) 263-41-98; e-mail: info@airi.uz).

Dissertatsiya bilan Raqamli texnologiyalar va sun’iy intellektni rivojlantirish ilmiy-tadqiqot institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (22-raqam bilan ro‘yxatga olingan). (Manzil: 100125, Toshkent shahri, M. Ulug‘bek tuman, Bo‘z-2 mavzesi, 17A uy. Tel.: (+99871) 263-41-98; e-mail: info@airi.uz).

Dissertatsiya avtoreferati 2026-yil “24” iyul kunida tarqatildi.
(2026-yil “15” iyun dagi 17 raqamli reestr bayonnomasi.)



N.Ravshanov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash raisi,
texnika fanlari doktori, professor

F.M.Nuraliyev
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash ilmiy kotibi,
texnika fanlari doktori, professor

E.Sh.Nazirova
Ilmiy darajalar beruvchi
ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi,
texnika fanlari doktori, professor

KIRISH (fan doktori (DSc) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahonda diffuziya jarayonlari tenglamalari va ularning sistemalariga bag‘ishlangan tadqiqotlar dolzarb va zarur hisoblanib, keng miqyosda olib borilgan tadqiqotlar biologiya, kimyo, fizika, texnologiya, biofizika va ilm-fanning boshqa qator sohalarida tatbiq etiladi. Diffuziya jarayonlarining matematik modellari nochiziqli xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasi bilan tavsiflanadi va seysmologiya, nochiziqli to‘lqinlar nazariyasi, epidemiya tarqalishi, biologik populyatsiya, taksis to‘lqinlari, filtratsiya va boshqa sohalarining tadqiqot predmeti hisoblanadi. Shuning uchun ko‘p komponentli muhitda diffuziyaning nochiziqli matematik modellarini o‘rganish, ularni yechishning samarali sonli sxemalari va algoritmlarini qurish hamda dasturiy ta‘minotini yaratish amaliy matematikaning muhim vazifalari bo‘lib qolmoqda.

Dunyoning yetakchi ilmiy maktablarida nochiziqli chegaraviy shartlarga ega parabolik tenglamalar sistemalari yordamida tasvirlangan kross-diffuziyaga ega matematik modellar keng o‘rganilmoqda. Kross-diffuziya jarayonlarining matematik modellari biofizikada morfogenezing biofizik mexanizmlarini tavsiflash, biologik populyatsiya jarayonlari, issiqlik uzatish va filtrlash modellarini qurish, tektonik plitalarning o‘zaro ta‘sirini o‘rganish uchun keng qo‘llaniladi. Shuning uchun kross-diffuziya sistemalarini sonli va analitik yechish usullarini ishlab chiqish maqsadli ilmiy tadqiqot yo‘nalishi hisoblanadi.

O‘zbekiston Respublikasida energiya samaradorligi va resurslardan oqilona foydalanish milliy strategiyaning ajralmas qismi bo‘lib, turli texnikalarning energiya samaradorligini oshirish bo‘yicha kompleks chora-tadbirlarni belgilovchi hujjatlar qabul qilinmoqda. Xususan, “O‘zbekiston – 2030” yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasida “ ... Fundamental tadqiqotlarni zamon talablaridan kelib chiqib yangi yo‘nalishlar bilan boyitish, ... Iqtisodiyotning eng tez o‘sib borayotgan yo‘nalishlarida amaliy tadqiqotlarni kuchaytirish, “korxonalar – oliygoh – ilmiy tashkilot” klaster tizimini joriy etish, ... Yosh tadqiqotchilarning ulushini oshirish, ularning ilmiy izlanishlarini qo‘llab-quvvatlash, ... Sanoatning “drayver” sohalarini rivojlantirish va hududlarning sanoat salohiyatini to‘liq ishga solish, ... “Yashil iqtisodiyot”ga o‘tish, uning asosi bo‘lgan qayta tiklanuvchi energiyadan foydalanish ko‘rsatkichlarini keskin oshirish, ... Orolbo‘yi mintaqasida ekologik vaziyatni barqarorlashtirish, Orol dengizi qurishi natijasida yuzaga kelgan ekologik muammolarning salbiy ta‘sirini yumshatish”¹ kabi vazifalarning qo‘yilishi davlatimiz tomonidan issiqlik va energiya tejamkorlik masalalariga muhim e‘tibor qaratilganidan dalolat beradi. Bugungi kunda issiqlik-namlik almashinuvi kabi jarayonlarning nochiziqli masalalarini yechish, matematik modellashtirish, matematik modellari uchun sonli va analitik usullarni ishlab chiqish, olingan natijalarni amaliyotiga keng joriy etishda sezilarli natijalarga erishildi. Yechimni amalga oshirilishini ta‘minlashda parabolik tenglamalar sistemasi orqali ifodalangan tabiiy jarayonlarning nochiziqli matematik

¹ O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2026 – yil 16 – fevraldagi № PF – 21 – sonli “Mamlakat taraqqiyotining 2030-yilgacha mo‘ljallangan ustuvor yo‘nalishlari doirasida islohotlarni izchil davom ettirish va yangi bosqichga olib chiqishning qo‘shimcha chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi farmoni

modellarini qurish, sonli hisoblash usullarini ishlab chiqish va takomillashtirish katta ahamiyatga ega.

Mazkur dissertatsiya tadqiqoti O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022-yil 6-iyuldagi PF-165-sonli "2022–2026 yillarda O‘zbekiston Respublikasining Innovatsion rivojlanish strategiyasini tasdiqlash to‘g‘risida" Farmoni hamda O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 6 oktyabrdagi "Axborot texnologiyalari sohasida ta’lim tizimini yanada takomillashtirish, ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish va axborot texnologiyalari sohasi bilan integratsiyalashuv chora-tadbirlari to‘g‘risidagi" PQ-4851-sonli, 2022 yil 6 iyuldagi PQ-307-sonli "2022–2026 yillarda O‘zbekiston Respublikasining Innovatsion rivojlanish strategiyasini amalga oshirish bo‘yicha tashkiliy chora-tadbirlar to‘g‘risida", 2022 yil 18 maydagi PQ-246-sonli "Xalqaro reytinglar va indekslar bilan ishlashda ilmiy salohiyat va amaliy faoliyat o‘rtasidagi muvofiqlikni ta’minlash chora-tadbirlari to‘g‘risida" va 2023 yil 20 apreldagi PQ-128-sonli "Ilmiy, metodologik va ilmiy-tadqiqot ishlari sifatini oshirish orqali ta’lim tizimini kompleks rivojlantirishni jadallashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida" Qarorlari hamda ushbu sohada qabul qilingan me’yoriy-huquqiy hujjatlarda nazarda tutilgan maqsad va vazifalarni amalga oshirishga muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi. Ushbu dissertatsiya ishi O‘zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalarni rivojlantirishning IV. "Axborotlashtirish va axborot-kommunikatsiya texnologiyalarni rivojlantirish" ustuvor yo‘nalishiga muvofiq amalga oshirilgan.

Dissertatsiya mavzusi yuzasidan chet el ilmiy tadqiqotlari tahlili². Turli nohiziqli matematik modellarning sifat xossalarini o‘rganish bo‘yicha ilmiy izlanishlar dunyoning yetakchi tadqiqot markazlari va oliy o‘quv yurtlarida, jumladan, Shimoliy Karolina shtati universiteti, Ayova shtati fan va texnologiya universiteti, Markaziy Florida universiteti, Luiziana shtati universiteti, Kaliforniya shtati universiteti (AQSh), Buenos-Ayres universiteti (Argentina), Saits-Ayres universiteti (Argentina), Saitpiya universiteti (University), Chili Universiteti (Chili), Cataniya universiteti (Italiya), Osaka, Nagoya, Xirosima universitetlari (Yaponiya), Singapur Milliy universiteti (Singapur), Madrid avtonom universiteti, Madridning Komplutense universiteti (Ispaniya), Paderborn universiteti, Aachen universiteti (Germaniya), Nottingem universiteti (Angliya), Jilin, Chongqing, Changchun universiteti (Xitoy), Parij matematika markazi, Dofin PCL universiteti (Frantsiya), Rossiya Fanlar akademiyasi Matematika instituti, Moskva davlat universiteti (Rossiya), Vengriya Fanlar akademiyasining Kompyuter fanlari va avtomatlashtirish instituti (Vengriya), Qozog‘iston Milliy universiteti (Qozog‘iston), T.Shevchenko nomidagi Lugansk Milliy universiteti (Ukraina), Matematika va informatika instituti, Sofiya universiteti (Bolgariya), O‘zbekiston

²Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi quyidagi manbalarga asoslanadi: Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Mathematical Modeling, Communications on Pure and Applied Analysis, Journal of the Korean Mathematical Society, <http://www.springer.com/mathematics>; <http://www.sciencedirect.com/science/jrnallbooks/sub/mathematics>.

Milliy universiteti, Samarqand davlat universiteti, Urganch davlat universiteti, Raqamli texnologiyalar va sun'iy intellektni rivojlantirish ilmiy tadqiqot instituti (O'zbekiston) va boshqalarda olib borilmoqda.

Chiziqli modellarning xususiyatlaridan farq qiladigan yangi sifat xususiyatlarini yaxshilash bo'yicha jahon tadqiqotlari natijasi sonli yechish va vizuallashtirish usullarini ishlab chiqish bo'lib, bir qator ilmiy natijalarga erishilgan, shu jumladan nochiziqli parabolik tenglamalar bilan tavsiflanadigan issiqlik o'tkazuvchanlik modellari uchun global yechim mavjudlik shartlari va Neyman masalasini yechish (Madrid avtonom universiteti, Osaka, Nagoya universiteti), nochiziqli parabolik tenglamalar uchun Fujita tipidagi yechimning global mavjudligining kritik ko'rsatkichi qiymatlari topilgan (Madrid komplutens universiteti, Paderborn, Jilin, Chongqing, Changchun universitetlari), ikkinchi kritik va dastlabki ma'lumotlarni aniqlash usullari ishlab chiqilgan. G'ovak muhit tenglamalari va gradiyent nochiziqli tenglamalar uchun Koshi masalasi ishlab chiqilgan (Sapienza Università di Roma, Chongqing, Osaka universitetlari).

Dunyoda Koshi va chegaraviy masalalarni yechish hamda amaliy qo'llash usullari va vositalarini ishlab chiqish bo'yicha turli matematik modellarning asosini tashkil etuvchi parabolik tipdagi nochiziqli tenglamalari uchun ustuvor yo'nalishlarda ilmiy tadqiqotlar olib borilmoqda, jumladan: nochiziqli masalalarda global yechimning vaqt bo'yicha mavjudligi shartlarini topish; global yechim va Fujita tipining mavjudligining kritik ko'rsatkichi qiymatlarini topish; cheksiz yechimlarni lokallashtirish shartlarini aniqlash; sonli usullar samaradorligini oshirish; nochiziqli matematik modellarning yuqoridagi xossalari asosida nochiziqli jarayonlarni sonli yechishni tadqiq qilish imkonini beruvchi dasturlar majmuasini ishlab chiqishdan iborat.

Muammoning o'rganilganlik darajasi. O'zgaruvchan zichlikka ega hamda ko'p komponentli muhitlarda kross-diffuziyaga asoslangan issiqlik tarqalish jarayonlarini matematik modellashtirish nazariyasi ilmiy adabiyotlarda bir qator fundamental natijalar yoritilgan. Mazkur yo'nalish XX asr oxiri va XXI asr boshlarida jadal rivojlangan bo'lib, jarayonlarning nochiziqiligi, komponentlararo o'zaro ta'sir, zichlikning fazo-vaqt bo'yicha o'zgarishi, adveksiya-diffuziya sinergetikasi hamda termodiffuziya effektlarini hisobga oluvchi modellar keng o'rganilgan. Jumladan, J.L.Vaskes, X.A.Levin, A.A.Samarskiy, A.S.Kalashnikov, V.A.Galaktionov, A.F.Tedeev, A.R. Mixaylov, S.Shigesada, K.Kawasaki, V.A.Grigorev, V.S.Kurdyumov, M.A.Siganov, A.Ye.Axromeyev, A.V.Likov, D.P.Juxovitskiy, S.P.Kurdyumov, G.G.Malinetskiy, Yu.P.Popov, Yu.A.Chudnovskiy, J.Smoller, A.Friedman, R.Showalter, H.Amann, E.DiBenedetto, P.Bothe, A.Mielke, T.Suzuki, K.Osaki, A.Jünger va boshqalarning asarlarida nochiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik, ko'p komponentli muhitlarda diffuziya tenglamalari, chegaraviy masalalar uchun klassik asoslar, o'zgaruvchan zichlikka ega va o'zgaruvchan issiqlik sig'imli muhitlarda nochiziqli issiqlik tarqalishi, blow-up yechimlar, kross-diffuziya, taksis, ko'p komponentli kross ta'sirli sistemalar, populyatsion va fizik jarayonlardagi kross-diffuziya modellari, issiqlik-namlik almashinuv modellarida zichlik, namlik va issiqlikning kross-diffuziyasi, murakkab muhitlarda nochiziqli sinergetika issiqlik-diffuzion

jarayonlarning avtomodel yechimlari, issiqlik bilan bog‘liq Soret–Dufour effektlari ko‘p fazali muhitlarda termodiffuziya yechimlarning cheksizligi, chekli tarqalish tezligi va buzilishlarning fazoviy lokalizatsiyasi ta’siri, vaqt strukturasi va lokal chegarasining mavjudligi, manba va yutilish hisobga olganda chiziqli bo‘lmagan muhit kabilar aniqlangan.

Ya.B.Zeldovich, A.S.Kompaneets, G.I.Barenblatt, R.E.Pattle asarlarida, chiziqli bo‘lmagan muhitda issiqlik buzilishlari, tarqalishning cheklangan tezligining noxiziq ta’siri birinchi marta kashf etilgan. Cheklangan tezlik effektining paydo bo‘lish shartini aniqlash, g‘ovak muhitda va noxiziq gradiyent issiqlik tenglamasi uchun Koshi masalasini yechimlarni baholash J.L.Vazquez tomonidan o‘rganilgan. M.Herrero, M.Fila, F.Quiros, R.Gillermo, Keng Deng, Julio D. Rossi, P.Groisman, D.Andreuchchi, A.Tesei, R.Ferreya, A.D.Pablo, H.Fujita, vaqt bo‘yicha asimptotik yechimlar turg‘unligi bo‘yicha, X.Y.Chen, H.Matano, M.Sugimoto, Jon King, A.P.Mixaylov, V.A.Galaktionov, E.Kurkina, politropik filtratsiyaning uzluksiz bo‘lmagan parabolik kvazichiziqli tenglamalar uchun Neyman chegaraviy masala bilan tavsiflanuvchi matematik modellarning xossalarini aniqlash, H.A.Levine, M.Chunlai, W.Du, J.Yin, Y.Wang, M.X.Wang, Z.Xiang, M.Yongsheng, S.N.Zheng, X.F.Song, Z.X.Jiang, Maykl Vinkler o‘zgaruvchan zichlikdagi issiqlik o‘tkazuvchanligining noxiziq tenglamalari, reaksiya-diffuziya va filtratsiya uchun Koshi masalasining global yechimlari va vaqt bo‘yicha blow-up shartlarini o‘rganish bo‘yicha Z.Li, M.Chunlai, V.Du, Guirong Liu, Yuan-Vey Qi, A.F.Tedeev, A.V. Martinenko, N.V.Afanasyeva, S.P.Degtyarevlar ilmiy izlanishlar olib borishgan.

O‘zbekistonda turli xil diffuzion jarayonlarni ifodalaydigan noxiziq diffuziya tenglamalari va ularning sistemalari bilan N.M.Muhitdinov, M.M.Aripov, F.B.Abutaliyev, B.X.Xo‘jayorov, A.S.Rasulov, N.Ravshanov, I.K.Xo‘jayev, Ch.B.Normurodov, N.Uteuliyev, Z.R.Raxmonov, Sh.A.Sadullayeva, A.S.Matyakubov, E.Sh.Nazirova va boshqa olimlar shug‘ullanishgan. Ularning asosiy ishlari noxiziq diffuziya tenglamalar sistemasini yechish masalasini sonli tadqiq etishga bag‘ishlangan bo‘lib, kross-diffuziya, filtratsiya, issiqlik o‘tkazuvchanlik, biologik populyatsiya jarayonlarini modellashtirish masalalariga tatbiq etish mumkin. M.M.Aripov va uning shogirdlari ishlarida noxiziq masalalarni tadqiq etishning samarali usullari sifatida noxiziq ajratish va etalon tenglamalar usullari asoslangan. Noxiziq chegaraviy shartlar bilan berilgan kross-diffuziya sistemalarini modellashtirish, blow-up yechimlar va global yechimlarning mavjud shartlarini aniqlash bo‘yicha olingan natijalar hamda mavjud usul va algoritmlar tahlili shuni ko‘rsatadiki, noxiziq jarayonlarni modellashtirish sohasidagi nazariy va amaliy masalalarni yanada chuqurroq va to‘liq tadqiq etish usullarini ishlab chiqishni talab etadi.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim yoki ilmiy tadqiqot muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Raqamli texnologiyalar va sun’iy intellektni rivojlantirish ilmiy tadqiqot institutining A-OT-2021-108 sonli “Orolbo‘yi mintaqasi atrof-muhitining ekologik holatini monitoring qilish va bashorat qilishning axborot-tahlil tizimini ishlab chiqish” (2021-2023 yillar) loyihasi hamda institutining ilmiy-

tadqiqot ishlari rejasining №19.12 “Muhandislik va tabiiy jarayonlarning, matematik modellarini tuzish va sonli tadqiq qilish” (2024 yil) doirasidagi ilmiy tadqiqot rejalari asosida bajarilgan.

Tadqiqot maqsadi ko‘p komponentli g‘ovak muhitlarda kross-diffuziyaga ega issiqlik va namlik ko‘chishi jarayonlarini tahlil qilish hamda bashoratlash uchun nohiziqli matematik modellarini, hisoblash algoritmlarini va muammoga yo‘naltirilgan dasturiy ta‘minotni ishlab chiqishdan iborat.

Tadqiqot vazifalari:

ko‘p komponentli g‘ovak muhitlarda sodir bo‘ladigan, kross-diffuziyaga ega issiqlik va namlik ko‘chishining nohiziqli texnologik jarayonlari matematik modellarni ishlab chiqish;

tadqiq etilayotgan jarayonlarning aniqlangan asimptotikasi va avtomodel yechimlarni analitik qurish asosida iteratsion to‘r usullari uchun yuqori aniqlikdagi adaptiv boshlang‘ich yaqinlashishlarni sintez qilish usulini ishlab chiqish;

ko‘p o‘lchovli chegaraviy masalalarni nazariy asoslash hamda ishlab chiqilgan modellar uchun turg‘unlik sohalari va korrektiligining parametrik chegaralarini aniqlash;

o‘zgaruvchan zichlikka ega ko‘p o‘lchovli manbalarni hisobga olgan holda, kross-diffuziyaga ega issiqlik va namlik ko‘chishining kuchli nohiziqli parabolik tenglamalar sistemalarini yechish uchun konservativ oshkormas chekli-ayirmali sxemalarni qurish hamda hisoblash jihatidan turg‘un algoritmlarni ishlab chiqish;

ko‘p komponentli g‘ovak muhitlarda kross-diffuziyaga ega issiqlik va namlik ko‘chishi jarayonlarini hisoblash tajribalari orqali tadqiq etish, maydonlar dinamikasini vizuallashtirish, tahlil qilish va bashoratlash uchun muammoga yo‘naltirilgan dasturiy majmuani ishlab chiqish.

Tadqiqot obyekti qurilish materiallari va mahsulotlarini ishlab chiqarish jarayonida ko‘p komponentli g‘ovak muhitlarda kross-diffuziyaga ega issiqlik va namlik ko‘chishi texnologik jarayonlari olinangan.

Tadqiqot predmeti ko‘p komponentli g‘ovak muhitlarda kross-diffuziyaga ega murakkab nohiziqli issiqlik va namlik ko‘chish jarayonlarini sonli tadqiq etish, tahlil qilish va bashoratlash uchun mo‘ljallangan ko‘p o‘lchovli matematik modellar, konservativ ayirmali sxemalarga asoslangan hisoblash algoritmlari hamda dasturiy vositalardan iborat.

Tadqiqot usullari. Dissertatsiya ishida murakkab tizimlarni matematik modellashtirish usullari, avtomodel yechimlarni qurish metodlari, asimptotik tahlil va aprior baholash usullari, xususiy hosilali differensial tenglamalarni chekli-ayirmali sxemalar asosida diskretlash usullari, chiziqilashtirish va iteratsion usullar, shuningdek parametrik hisoblash tajribalarini o‘tkazish uchun dasturlash texnologiyalaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

nohiziqli chegaraviy shartlar asosida kross-diffuziya effektlarini hisobga olgan holda ko‘p komponentli muhitlarda o‘zaro bog‘liq issiqlik va namlik ko‘chishining matematik modeli ishlab chiqilgan;

ikki karra nochiziqli diffuziya tenglamalar sistemalarini sonli yechish uchun analitik asimptotik yoyilmalardan adaptiv boshlang'ich yaqinlashish sifatida foydalanishga asoslangan modifikatsiyalangan iteratsion usul ishlab chiqilgan;

issiqlik va namlik ko'chishi masalalarining global yechimga ega bo'lishining kritik ko'rsatkichlari aniqlangan;

o'zgaruvchan zichlikka ega sistemalar uchun issiqlik va namlik maydonlarining fazo-vaqt bo'yicha o'zgarishiga nisbatan ikki tomonlama analitik baholar olingan;

konservativ oshkormas ayirmali sxemalar usuliga asoslangan samarali hisoblash algoritmlari ishlab chiqilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

olingan avtomodel yechimlar asimptotikalariga asoslanib, sonli moslashuvchan sxemalari uchun yuqori aniqlikka ega adaptiv boshlang'ich yaqinlashishlarni sintez qilish metodikasi ishlab chiqilgan;

nochiziqli chegaraviy shartlarga ega ko'p o'lchovli issiqlik va namlik ko'chish jarayonlari uchun kritik texnologik parametrlar (turg'unlik chegaralari) aniqlanib, ko'p komponentli sanoat materiallariga xavfsiz termik ishlov berishni ta'minlash imkoniyati asoslangan;

muammoga yo'naltirilgan dasturiy majmua ishlab chiqilib, amaliyotga joriy etilgan bo'lib, uning asosida Samarqand viloyati korxonalarida qurilish materiallari va buyumlarini ishlab chiqarish jarayonlarini baholash hamda optimallashtirish bo'yicha hisoblash tajribalari o'tkazilgan.

Tadqiqot natijalarning ishonchliligi dissertatsiya ishida olingan tasdiqlar solishtirish teoremlari va maksimum prinsipi asosida qat'iy isbotlanganligi hamda hisoblash eksperimenti natijalari bilan tasdiqlanganligi, olingan natijalarning saqlanish qonunlariga muvofiqligi bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati shundan iboratki, ular yangi konservativ ayirmali sxemalar, takomillashtirilgan iteratsion hisoblash algoritmlari hamda asimptotik tahlil usullari hisobiga kross-diffuziyaga ega murakkab nochiziqli issiqlik va namlik ko'chish sistemalarini matematik modellashtirish va sonli tadqiq etishning nazariy hamda metodologik bazasini ma'lum darajada kengaytiradi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati shundan iboratki, ishlab chiqilgan matematik apparat va dasturiy majmua ko'p komponentli g'ovak muhitlarda kross-diffuziyaga ega issiqlik va namlik ko'chish jarayonlarini tahlil qilish va bashoratlashning samarali vositasi bo'lib xizmat qiladi, shuningdek qurilish materiallari va mahsulotlari ishlab chiqarishning texnologik rejimlarini optimallashtirish, jumladan namlanish, quritish, issiqlik izolyatsiyasi jarayonlarini oldindan baholash hamda mahsulotlarning strukturaviy turg'unligini oshirish imkonini beradi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Ko'p komponentli g'ovak muhitlarda kross-diffuziyaga ega issiqlik va namlik ko'chish jarayonlarini tahlil qilish hamda bashoratlash uchun ishlab chiqilgan matematik modellar, hisoblash algoritmlari va dasturiy ta'minot asosida:

kross-diffuziya sistemalarini sonli yechish algoritmlari va dasturidan “Jomboy yashil chiroqlari” mas’uliyati cheklangan jamiyatida ilmiy tadqiqot natijalari va ishlab chiqilgan dasturiy ta’minotdan foydalanish sanoat amaliyotida sement pastasidagi issiqlik va namlik almashinuvini tavsiflash uchun kross-diffuziya tenglamalari sistemasiga asoslangan matematik modellardan foydalanilgan (O‘zbekiston Respublikasi Raqamli texnologiyalar vazirligining 2025-yil 22 oktyabrdagi 34-8/7652-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, ishlab chiqilgan kross-diffuziya tenglamalari sistemasiga asoslangan matematik model va uni sonli yechish algoritmlari sement pastasidagi issiqlik–namlik almashinuvining real fizik jarayonlarini ishonchli tarzda tavsiflash imkonini berdi;

ishlab chiqilgan kross-diffuziyaga ega issiqlik-namlik jarayoni tenglamalari sistemasiga asoslangan model orqali “U-Z Bunyodkor Groups” mas’uliyati cheklangan jamiyatida ilmiy tadqiqot natijalaridan foydalanish asosida qurilishda qo‘llaniladigan gazobeton (gazosilikat) bloklarni ishlab chiqarish jarayonida xomashyolarning miqdoriy qo‘shimchalari, ularning konsentratsiyasi va kimyoviy reaksiyaga kirishish jarayonlari o‘rtasida yuzaga keladigan kross-diffuziya hodisalari matematik modellar yordamida tavsiflangan (O‘zbekiston Respublikasi Raqamli texnologiyalar vazirligining 2025-yil 22 oktyabrdagi 34-8/7652-sonli ma’lumotnomasi). Natijada ishlab chiqarish jarayonida energiya va xomashyo sarfini kamaytirish, nuqsonli mahsulot ulushini qisqartirishga erishilgan;

ishlab chiqilgan matematik modellarni muvaffaqiyatli qo‘llash imkonini beruvchi boshlang‘ich yaqinlashish uchun asimptotik formulalar sonli algoritmlari asosida yaratilgan dasturiy majmua Samarqand viloyatidagi IT Park Samarqand filialida ilmiy tadqiqot natijalaridan foydalanish asosida yaratilgan matematik modellarni samarali sonli yechish algoritmlari sinovdan o‘tkazilgan (O‘zbekiston Respublikasi Raqamli texnologiyalar vazirligining 2025-yil 22 oktyabrdagi 34-8/7652-sonli ma’lumotnomasi). Natijada ishlab chiqilgan matematik modellar, asimptotik formulalar va dasturiy vositalarning sanoat va ilmiy-amaliy muammolarni hal etishda yuqori samaradorligi tajribaviy sinovlar orqali asoslangan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Tadqiqot natijalari 3 ta xalqaro va 10 ta respublika miqyosidagi ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarini e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha 28 ta ilmiy ishlar, shu jumladan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasi tomonidan doktorlik dissertatsiyalarining asosiy ilmiy natijalarini chop etish uchun tavsiya etilgan nashrlarda 13 ta ilmiy maqola, shu jumladan, 9 tasi respublika va 4 tasi xorijiy jurnallarda nashr etilgan hamda 2 ta EHM uchun yaratilgan dasturiy mahsulotlarni qaydlash guvohnomalari olingan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish, besh bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati va ilovalardan tashkil topgan. Dissertatsiya hajmi 200 bet iborat.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining O‘zbekiston Respublikasi fani va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mos ravishda dolzarbligi va

zaruriyati asoslangan, maqsad va vazifalar shakllantirilgan, tadqiqotning obykti va predmeti ko'rsatilgan, uning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning ishonchliligi asoslangan, nazariy va amaliy ahamiyatlari ochib berilgan, tadqiqot natijalarining amaliyotga joriy etish holatlari, shuningdek, tadqiqot natijalarining chop etilganligi hamda dissertatsiya tuzilishi haqida ma'lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiya ishining “**Kross-diffuziyaga ega jarayonlarining matematik modellari**” deb nomlangan birinchi bobida kross-diffuziyaga ega jarayonlar matematik modellarini tadqiq qilishga oid mavjud ilmiy ishlar sharhi tahlil qilingan.

Birinchi bobning asosiy natijalarini keltiramiz.

1.3 – paragraf quyidagi nochiziqli chegaraviy shartlarga ega bo'lgan nochiziqli ko'p o'lchovli parabolik tenglamalar sistemasi yechimlarining xossalari ko'rib chiqamiz:

$$u_t = \nabla \left(|\nabla u|^{p_1-2} \nabla u \right), x \in R_+^N, t > 0, v_t = \nabla \left(|\nabla v|^{p_2-2} \nabla v \right), x \in R_+^N, t > 0, \quad (1)$$

$$-|\nabla u|^{p_1-2} \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = v^{q_1}(0,t), -|\nabla v|^{p_2-2} \frac{\partial v}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = u^{q_2}(0,t), t > 0, \quad (2)$$

$$u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), x > 0, \quad (3)$$

bu yerda $R_+^N = \{(x_1, x') \mid x' \in R^{N-1}, x_1 > 0\}$, $p_i > 2$, $q_i > 0 (i=1,2)$, R_+^N da $u_0(x)$ va $v_0(x)$, kompakt yurituvchili, musbat, uzluksiz funksiyalar, $u_0(x)$ issiqlik tarqalishi, $v_0(x)$ namlik tarqalishidir.

(1) sistema (2) va (3) chegaraviy shartlar asosida kross holatni vujudga keltiruvchi issiqlik-namlik almashinuv jarayonini ifodalaydi.

1-teorema. Agar $q_1 q_2 \leq \frac{4(p_1-1)(p_2-1)}{p_1 p_2}$ shart o'rinli bo'lsa, (1)-(3) masalaning yechimi global bo'ladi.

2-teorema. Agar $q_1 q_2 > \frac{4(p_1-1)(p_2-1)}{p_1 p_2}$ va boshlang'ich shart yetarlicha katta bo'lsa (1)-(3) masalaning yechimi chegaralanmagan bo'ladi.

3-teorema. Agar $q_1 q_2 > \frac{4(p_1-1)(p_2-1)}{p_1 p_2}$, $\min\{N\beta_1 - \alpha_1, N\beta_2 - \alpha_2\} > 0$ va dastlabki shartlar yetarlicha kichik bo'lsa, u holda (1)-(3) masalaning yechimi globaldir.

4-teorema. $q_1 q_2 > \frac{4(p_1-1)(p_2-1)}{p_1 p_2}$, $\max\{N\beta_1 - \alpha_1, N\beta_2 - \alpha_2\} < 0$ bo'lsa, u holda har qanday manfiy bo'lmagan notrivial (1)-(3) masalani yechimi chekli vaqtda chegaralanmagan (blow-up) bo'ladi.

(1) sitemaning quyidagi ko'rinishga ega kompakt yurituvchili avtomodel yechimini qaraymiz

$$u_+(x,t) = (T+t)^{-\alpha_1} \varphi(\xi), v_+(x,t) = (T+t)^{-\alpha_2} \phi(\eta), \quad (4)$$

bu yerda $\xi = |\zeta|$, $\zeta_1 = (x_1 + h_1)(T + t)^{-\beta_1}$, $\zeta_i = x_i(T + t)^{-\beta_i}$, $\eta = |\theta|$,
 $\theta_1 = (x_1 + h_2)(T + t)^{-\beta_2}$, $\theta_i = x_i(T + t)^{-\beta_i}$, $(i = 2, \dots, N)$, $T > 0$ va $(\varphi(\xi), \phi(\eta))$
 funksiyalar quyidagi masalaning yechimi hisoblanadi

$$\begin{cases} \xi^{1-N} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{N-1} \left| \frac{d\varphi}{d\xi} \right|^{p_1-2} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) + \beta_1 \xi \frac{d\varphi}{d\xi} + \alpha_1 \varphi = 0, \\ \eta^{1-N} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^{N-1} \left| \frac{d\phi}{d\eta} \right|^{p_2-2} \frac{d\phi}{d\eta} \right) + \beta_2 \eta \frac{d\phi}{d\eta} + \alpha_2 \phi = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} - \left| \frac{d\varphi}{d\xi_1} \right|^{p_1-2} \frac{d\varphi}{d\xi_1} \Big|_{\xi_1=h_1} = \phi^{q_1}(h_2), \\ - \left| \frac{d\phi}{d\eta_1} \right|^{p_2-2} \frac{d\phi}{d\eta_1} \Big|_{\eta_1=h_2} = \varphi^{q_2}(h_1). \end{cases} \quad (6)$$

Quyidagi funksiyalarni qaraymiz

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \left(a_1 - b_1 \xi^{\frac{p_1-1}{p_1-2}} \right)^{\frac{p_1-1}{p_1-2}}, \quad \tilde{\phi}(\eta) = \left(a_2 - b_2 \eta^{\frac{p_2-1}{p_2-2}} \right)^{\frac{p_2-1}{p_2-2}}, \quad (7)$$

bu yerda $a_i > 0 (i = 1, 2)$, shunda quyidagi teorema o‘rinli.

5-teorema. $\xi \rightarrow (a_1 / b_1)^{\frac{p_1-1}{p_1}}$, $\eta \rightarrow (a_2 / b_2)^{\frac{p_2-1}{p_2}}$, bo‘lganda, (5),(7) sistemaning yechimi kompakt yurituvchili quyidagi asimptotikaga ega

$$\varphi(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi)(1 + o(1)), \quad \phi(\eta) = \tilde{\phi}(\eta)(1 + o(1)).$$

1.4 – paragrafda nochiziqli chegaraviy shartlarga ega bo‘lgan ikki karra nochiziqli ko‘p o‘lchovli diffuziya tenglamalar sistemasi yechimlari baholari va sonli yechish sxemalarini ko‘rib chiqamiz.

$$u_t = \nabla \left(|\nabla u^{m_1}|^{p_1-2} \nabla u^{m_1} \right), \quad v_t = \nabla \left(|\nabla v^{m_2}|^{p_2-2} \nabla v^{m_2} \right), \quad x \in R_+^N, \quad t > 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} -|\nabla u^{m_1}|^{p_1-2} \frac{\partial u^{m_1}}{\partial x_1} &= u^{\beta_1}(0, t) v^{q_1}(0, t), \\ -|\nabla v^{m_2}|^{p_2-2} \frac{\partial v^{m_2}}{\partial x_1} &= v^{\beta_2}(0, t) v^{q_2}(0, t), \quad x_1 = 0, t > 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), x > 0 \quad v(x, 0) = v_0(x), x > 0 \quad (10)$$

bu yerda $R_+^N = \{(x_1, x') | x' \in R^{N-1}, x_1 > 0\}$, $m_i > 1$, $p_i > 1 + \frac{1}{m_i}$, $\beta_i > 0$, $q_i > 0 (i = 1, 2)$,

R_+^N da $u_0(x)$ va $v_0(x)$ kompakt yurituvchili musbat uzluksiz funksiyalar, $u_0(x)$ issiqlik tarqalishi, $v_0(x)$ namlik tarqalishidir.

6-teorema. Faraz qilaylik, $\beta_1 \leq \frac{(p_1-1)(m_1+1)}{p_1}$, $q_1 \leq \frac{(p_2-1)(m_2+1)}{p_2}$ bo'lsin. Agar $q_1\beta_1 \leq \left(\frac{(p_1-1)(m_1+1)}{p_1} - \beta_1\right) \times \left(\frac{(p_2-1)(m_2+1)}{p_2} - q_2\right)$ bo'lsa, u holda (8)-(10) sistemaning har bir yechimi vaqt bo'yicha global mavjud bo'ladi.

7-teorema. Faraz qilaylik $\beta_1 \leq \frac{(p_1-1)(m_1+1)}{p_1}$, $q_1 \leq \frac{(p_2-1)(m_2+1)}{p_2}$ va $q_1\beta_2 \leq \left(\frac{(p_1-1)(m_1+1)}{p_1} - \beta_1\right) \times \left(\frac{(p_2-1)(m_2+1)}{p_2} - q_2\right)$ bo'lsin. Agar $\min\{N\lambda_1 - \alpha_1, N\lambda_2 - \alpha_2\} > 0$ va boshlang'ich shart yetarlicha kichik bo'lsa (8)-(10) sistemaning yechimi global bo'ladi.

8-teorema. Faraz qilaylik, $\beta_1 \leq \frac{(p_1-1)(m_1+1)}{p_1}$, $q_1 \leq \frac{(p_2-1)(m_2+1)}{p_2}$, agar $q_1\beta_2 \leq \left(\frac{(p_1-1)(m_1+1)}{p_1} - \beta_1\right) \times \left(\frac{(p_2-1)(m_2+1)}{p_2} - q_2\right)$ bo'lsa, u holda (8)-(10) sistemaning yechimlari yetarlicha katta boshlang'ich qiymatlar berilganda cheklangan vaqt ichida blow-up bo'ladi.

9-teorema. Faraz qilamiz $\beta_1 \leq \frac{(p_1-1)(m_1+1)}{p_1}$, $q_1 \leq \frac{(p_2-1)(m_2+1)}{p_2}$, $q_1\beta_2 \leq \left(\frac{(p_1-1)(m_1+1)}{p_1} - \beta_1\right) \times \left(\frac{(p_2-1)(m_2+1)}{p_2} - q_2\right)$. Agar $\min\{N\lambda_1 - \alpha_1, N\lambda_2 - \alpha_2\} > 0$ u holda (8)-(10) ning har bir manfiy bo'lmagan notrivial yechimi chekli vaqt ichida blow-up bo'ladi.

(8)-(10) masalalarning global yechilishini chegaralangan super yechimni qurish orqali ko'rsatamiz.

$$u_+(x, t) = (T+t)^{-\alpha_1} \varphi(\xi), v_+(x, t) = (T+t)^{-\alpha_2} \phi(\eta), \quad (11)$$

bu yerda $\xi = |\zeta|$, $\zeta_1 = (x_1 + h_1)(T+t)^{-\lambda_1}$, $\zeta_i = x_i(T+t)^{-\lambda_1}$, $\eta = |\theta|$, $\theta_1 = (x_1 + h_2)(T+t)^{-\lambda_2}$, $\theta_i = x_i(T+t)^{-\lambda_2}$, ($i=2, \dots, N$), $T > 0$, va $(\varphi(\xi), \phi(\eta))$ funksiyalar quyidagi masalaning yechimlari hisoblanadi

$$\begin{cases} \xi^{1-N} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{N-1} \left| \frac{d\varphi^{m_1}}{d\xi} \right|^{p_1-2} \frac{d\varphi^{m_1}}{d\xi} \right) + \lambda_1 \xi \frac{d\varphi}{d\xi} + \alpha_1 \varphi = 0, \\ \eta^{1-N} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^{N-1} \left| \frac{d\phi^{m_1}}{d\eta} \right|^{p_2-2} \frac{d\phi^{m_1}}{d\eta} \right) + \lambda_2 \eta \frac{d\phi}{d\eta} + \alpha_2 \phi = 0, \end{cases} \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} - \left| \frac{d\varphi^{m_1}}{d\zeta_1} \right|^{p_1-2} \frac{d\varphi^{m_1}}{d\zeta_1} \Big|_{\zeta_1=h_1} = \varphi^{\beta_1} \phi^{q_1}, \\ - \left| \frac{d\phi^{m_1}}{d\theta_1} \right|^{p_2-2} \frac{d\phi^{m_1}}{d\theta_1} \Big|_{\theta_1=h_2} = \varphi^{\beta_2} \phi^{q_2}. \end{array} \right. \quad (13)$$

Quyidagi funksiyalarni qaraymiz

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \left(a_1 - b_1 \xi^{\frac{p_1}{p_1-1}} \right)^{\frac{p_1-1}{m_1(p_1-1)-1}}, \quad \tilde{\phi}(\eta) = \left(a_2 - b_2 \eta^{\frac{p_2}{p_2-1}} \right)^{\frac{p_2-1}{m_2(p_2-1)-1}}, \quad (14)$$

bu yerda $a_i > 0 (i=1,2)$, $b_1 = \frac{m_1(p_1-1)-1}{m_1 p_1} \lambda_1^{\frac{1}{p_1-1}} > 0$, $b_2 = \frac{m_2(p_2-1)-1}{m_2 p_2} \lambda_2^{\frac{1}{p_2-1}} > 0$.

10-teorema. (12),(13) sistemaning kompakt yurituvchili yechimi quyidagi asimptotikaga ega: $\begin{cases} \varphi(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi)(1+o(1)), \\ \phi(\eta) = \tilde{\phi}(\eta)(1+o(1)), \end{cases} \xi \rightarrow (a_1/b_1)^{\frac{p_1-1}{p_1}}, \eta \rightarrow (a_2/b_2)^{\frac{p_2-1}{p_2}}$,

bo'lganda, bu yerda $\tilde{\varphi}(\xi), \tilde{\phi}(\eta)$ (14) da belgilangan.

Bundan tashqari, ushbu paragrafda chekli ayirmali usul asosida sonli sxemalar ishlab chiqilgan. Bu holda tenglamalar fazoviy koordinata bo'yicha ikkinchi tartibli aniqlikda va vaqt bo'yicha birinchi tartibli aniqlikda approksimatsiya qilindi. Iteratsion jarayonni hosil qilishda, iteratsiyaning ichki qadamlarida tugunlardagi funksiya qiymatlari haydash usuli yordamida hisoblangan. Bunday nohiziqli masalalarni sonli yechishdagi asosiy qiyinchilik iteratsion jarayon uchun mos keluvchi boshlang'ich yaqinlashishni tanlash hisoblanadi. Shuning uchun konkret masalani yechish jarayonida izlanayotgan yechimning xarakterli xususiyatlarini aks ettiruvchi va nohiziqli masalalarni sifat xossalari tahlili asosida olinadigan funksiyalardan foydalaniladi. Mazkur muammo sonli parametrlarning turli qiymatlariga muvofiq asimptotik formulalarni tanlash orqali hal qilinadi.

Dissertatsiyaning ikkinchi bobi **“Nohiziqli chegaraviy shartlar va manbaga ega kross-diffuziyali modellarda issiqlik–namlik almashinuvi jarayonlari xususiyati”** deb nomlanib unda nohiziqli chegaraviy va manba bilan berilgan kross-diffuziyaga ega issiqlik-namlik almashinuvi jarayonini ifodalovchi matematik model ishlab chiqilgan.

2.1 paragrafda quyidagi tenlamalar sistemasining yechimlari xususiyatlarini ko'rib chiqamiz

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v^{m_1-1} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u^{m_2}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^{m_2-1} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + v^{m_1}, \quad x \in R_+, t > 0, \quad (15)$$

$$-v^{m_1-1} \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u^{q_1}(0,t), \quad -u^{m_2-1} \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = v^{q_2}(0,t), \quad t > 0, \quad (16)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x \in R_+, \quad (17)$$

bu yerda $m_i \geq 1$, $q_i > 0 (i=1,2)$, R_+ da $u_0(x)$ va $v_0(x)$ kompakt yurituvchili, musbat uzluksiz funktsiyalar, $u_0(x)$ issiqlik tarqalishi, $v_0(x)$ namlik tarqalishidir.

Birinchi bobdagi 1-10 teoremlardagi yondoshuvlar asosida (15)-(17) masala uchun quyidagi natijalar kelib chiqadi.

Agar $q_1 \leq 1, q_2 \leq 1$ bo'lsa, u holda (15)-(17) masalaning har qanday yechimi global bo'ladi.

$q_1 > 1, q_2 > 1$ bo'lsin, u holda (15)-(17) masalaning har qanday yechimi yetarlicha katta boshlang'ich shartlarda chegaralanmagan (blow-up) bo'ladi.

$q_1 > m_2 + 1, q_2 > m_1 + 1$ va boshlang'ich ma'lumotlar yetarlicha kichik bo'lsa, u holda (15)-(17) masalaning har qanday yechimi global bo'ladi.

2.2 paragrafda (15)-(17) masalaning avtomodel yechimlari asimptotikasini topishga va sonli modellashtirishga bag'ishlangan. (15) sistemani quyidagi ko'rinishdagi kompakt yurituvchili avtomodel yechimini qaraymiz

$$\underline{u}(x,t) = (T+t)^{-\alpha_1} f(\xi), \underline{v}(x,t) = (T+t)^{-\alpha_2} \varphi(\xi), \xi = x(T+t)^{-\beta} \quad (18)$$

bu yerda $T > 0, \beta = \frac{q_1 - m_2}{3(m_2 - 1)} = \frac{q_2 - m_1}{3(m_1 - 1)}, \alpha_1 = \frac{1 - 2\beta}{m_2 - 1}, \alpha_2 = \frac{1 - 2\beta}{m_1 - 1}$ va

$(\varphi(\xi), \phi(\xi))$ funksiyalari quyidagi masalaning yechimi hisoblanadi

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} \left(\varphi^{m_1-1} \frac{df}{d\xi} \right) + \beta \xi \frac{df}{d\xi} + \alpha_1 f + f^{m_2} = 0, \\ \frac{d}{d\xi} \left(f^{m_2-1} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) + \beta \xi \frac{d\varphi}{d\xi} + \alpha_2 \varphi + \varphi^{m_1} = 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} -\varphi^{m_1-1} \frac{df}{d\xi}(0) = f^{q_1}(0), \\ -f^{m_2-1} \frac{d\varphi}{d\xi}(0) = \varphi^{q_2}(0). \end{cases} \quad (20)$$

Quyidagi funksiyalarni qaraymiz

$$\tilde{f}(\xi) = (a - \xi^2)^{\frac{1}{m_2-1}}, \tilde{\varphi}(\xi) = (a - \xi^2)^{\frac{1}{m_1-1}}, \quad (21)$$

bu yerda $a > 0, c_1 = \left(\frac{\beta(m_2 - 1)}{2} \right)^{1/(m_1-1)}, c_2 = \left(\frac{\beta(m_1 - 1)}{2} \right)^{1/(m_2-1)}$ (19) tenglamalar

sistemasi $\xi \rightarrow \sqrt{a}$ da kompakt yurituvchili quyidagi asimptotikaga ega bo'lishi kelib chiqadi $f(\xi) \simeq c_1 \tilde{f}(\xi)(1 + o(1)), \varphi(\xi) \simeq c_2 \tilde{\varphi}(\xi)(1 + o(1))$. (22)

§2.3 da (15)-(17) masala uchun ayirmali sxemalar ishlab chiqilgan va hisoblash eksperimenti o'tkazilgan. Hisoblash uchun $h=0.05$ qadam tanlangan, tugunlar soni $N=2500$ ta hamda iteratsiya aniqligi sifatida $\varepsilon = 10^{-3}$ olingan. Hisoblash $t=2$ gacha $\tau=0.02$ qadam bilan amalga oshirilgan. Iteratsiya jarayoni uchun boshlang'ich yaqinlashish sifatida (21) va (22) formulalardan foydalanilgan.

Dissertatsiyaning uchinchi bobida **“Issiqlik va namlik almashinuvi masalalarida o'zgaruvchan zichlikka ega kross-diffuziya sistemasini sonli modellashtirish va hisoblash algoritmlari”** ishlab chiqilgan matematik model

kross-diffuziyaga ega issiqlik-namlik almashinuvi jarayonida o'zgaruvchan zichlikni hisobga olgan holda sifat tahlili va qaralayotgan masalani samarali sonli yechish algoritmlari ishlab chiqilgan.

Birinchi paragrafda kross-diffuziya ega o'zgaruvchan zichlik va nohiziqli chegaraviy sharti bilan berilgan issiqlik-namlik tarqalishi masalalari avtomodel yechimlarining tahlili o'rganiladi. Berilgan $Q = \{(x,t) | x \in \mathbb{R}_+, t > 0\}$ sohada nohiziqli Neyman chegaraviy shartlari bilan berilgan kross-diffuziya sistemasini ko'rib chiqamiz:

$$\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu^{m_1-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \rho(x) \frac{\partial \nu}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^{m_2-1} \left| \frac{\partial \nu}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial \nu}{\partial x} \right), (x,t) \in Q; \quad (23)$$

$$-\nu^{m_1-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = u^{q_1}(0,t), -u^{m_2-1} \left| \frac{\partial \nu}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial \nu}{\partial x} \Big|_{x=0} = \nu^{q_2}(0,t), t > 0; \quad (24)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \nu(x,0) = \nu_0(x), x \in \mathbb{R}_+, \quad (25)$$

bu yerda $\rho(x) = (1+|x|)^n$, $m_i \geq 1$, $p > 2$, $n, q_i > 0$.

Birinchi bobdagi 1-10 teoremlardagi yondoshuvlar asosida (23)-(25) masala uchun quyidagi natijalar kelib chiqadi.

Aytaylik $q_i \leq 1$, ($i=1,2$) bo'lsin, u holda (23)-(25) masalalarning har qanday notrivial yechimi vaqt bo'yicha global bo'ladi.

$q_i > m_{3-i} + p - 1$ va $\min\{\alpha(n+1)q_i\} \geq 1$, ($i=1,2$) bo'lsin, u holda (23)-(25) masalaning har qanday notrivial yechimi yetarlicha kichik boshlang'ich shartlarda vaqt bo'yicha global bo'ladi.

Agar $\min\{q_i, \lambda(n+1)q_i\} \geq 1$, ($i=1,2$) shartlari bajarilsa, u holda (23)-(25) masalaning har qanday yechimi yetarlicha katta boshlang'ich shartlarda cheklangan vaqt ichida chegaralanmagan bo'ladi (blow-up).

bu yerda

$$\lambda = \frac{(q_i - 1)(m_i - q_{3-i}) + (p - 2)(q_{3-i} - 1)}{(n + 1)[(p - 2)(q_{3-i} - 1) + (m_i - q_{3-i})(q_i - 1)] - (p - 1)(q_i - 1)(q_{3-i} - 1)} > 0.$$

Ikkinchi paragrafda (23)-(25) masalaning avtomodel yechimi asimptotikasini topamiz buning uchun (23) tenglamalar sistemasini quyidagi shakldagi kompakt yurituvchili cheklangan avtomodel yechimlarini qaraymiz

$$\underline{u}(x,t) = (T+t)^{-\alpha_1} \varphi(\xi), \underline{\nu}(x,t) = (T+t)^{-\alpha_2} \phi(\xi), \xi = (1+x)(T+t)^{-\beta} \quad (26)$$

bu yerda $T > 0$, ($i=1,2$)

$$\beta = \frac{(q_i - 1)(q_{3-i} - 1) - (q_i - 1)(m_i - 1) - (q_{3-i} - 1)(p - 2)}{(q_i - 1)(q_{3-i} - 1)(p + n) - (q_i - 1)(m_i - 1)(1 + n) - (q_{3-i} - 1)(p - 2)(1 + n)},$$

$$\alpha_1 = \frac{1 - \beta(1 + n)}{q_1 - 1}, \alpha_2 = \frac{1 - \beta(1 + n)}{q_2 - 1}.$$

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} \left(\phi^{m_1-1} \left| \frac{d\phi}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\phi}{d\xi} \right) + \beta \xi^{\alpha_1} \frac{d\phi}{d\xi} + \alpha_1 \xi^{\alpha_1} \phi = 0, \\ \frac{d}{d\xi} \left(\phi^{m_2-1} \left| \frac{d\phi}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\phi}{d\xi} \right) + \beta \xi^{\alpha_2} \frac{d\phi}{d\xi} + \alpha_2 \xi^{\alpha_2} \phi = 0, \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \phi^{m_1-1} \left| \frac{d\phi}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\phi}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \phi^{q_1}(0), \\ \phi^{m_2-1} \left| \frac{d\phi}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\phi}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \phi^{q_2}(0). \end{cases} \quad (28)$$

Endi, quyidagi funksiyalarni ko‘rib chiqamiz

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(\xi) = A_1 (a - \xi^\gamma)^{\gamma_1}, \\ \tilde{\phi}(\xi) = A_2 (a - \xi^\gamma)^{\gamma_2}, \end{cases} \quad (29)$$

bu yerda $\gamma = \frac{p+n}{p-1}$, $\gamma_i = \frac{(p-1)(p-1-m_i)}{(p-2)^2 - (m_i-1)(m_{3-i}-1)}$, $a > 0$, $c_i = \left(\frac{\gamma \beta \operatorname{sgn}(-\gamma_i)}{\frac{n+1}{\gamma} |\gamma_i|^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p-1}}$

$P > \max\{m_i, m_{3-i}\} + 1$, (27) tenglamalar sistemasi $\xi \rightarrow a^{\frac{p-1}{p+n}}$ da kompakt yurituvchili

$$\begin{cases} \varphi(\xi) \simeq c_1 \tilde{\varphi}(\xi) (1 + o(1)), \\ \phi(\xi) \simeq c_2 \tilde{\phi}(\xi) (1 + o(1)), \end{cases} \quad (30)$$

yechim asimptotikaga ega bo‘ladi.

Uchinchi paragrafda (23)-(25) masalaning sonli yechimlari keltirilgan bo‘lib ularning natijalari grafik ko‘rinishda tasvirlangan.

Dissertatsiyaning to‘rtinchi bobida **“Nochiziqli chegaraviy shartlar bilan berilgan kross-diffuziyaga ega issiqlik–namlik almashinuvi jarayonining ko‘p o‘lchovli matematik modeli”** ko‘p o‘lchovli kross-diffuziya masalalarining sifat tahlili hamda masalani samarali sonli yechish algoritmi yoritilgan.

§4.1.da nochiziqli chegaraviy shartlar bilan berilgan ko‘p o‘lchovli kross-diffuziyaga ega issiqlik-namlik almashinuvi jarayoni modeli avtomodel tahlili keltirilgan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla(v^{m_1-1} \nabla u), \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla(u^{m_2-1} \nabla v), \quad x \in R_+^N, \quad t > 0, \quad (31)$$

$$-v^{m_1-1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(0, t) = u^{q_1}(0, t), -u^{m_2-1} \frac{\partial v}{\partial x_1}(0, t) = v^{q_2}(0, t), \quad x_1 = 0, \quad t > 0, \quad (32)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in R_+^N, \quad (33)$$

bu yerda $R_+^N = \{(x_1, x') \mid x' \in R^{N-1}, x_1 > 0\}$, $m_i > 1$, $q_i > 0$ ($i=1,2$), R_+^N da $u_0(x)$ va

$v_0(x)$ - kompakt yurituvchili manfiy bo‘lmagan uzluksiz funksiyalar.

Birinchi bobdagi 1-10 teoremlardagi yondoshuvlar asosida (31)-(33) masala uchun quyidagi natijalar kelib chiqadi.

Agar $q_1 \leq 1, q_2 \leq 1$ shart bajarilsa (31)-(33) masalalarning har qanday yechimi global hisoblanadi.

Agar $q_1 > \frac{m_2 + 1}{2}, q_2 > \frac{m_1 + 1}{2}$ bo‘lsa, u holda (31)-(33) masalaning har qanday yechimi yetarlicha katta boshlang‘ich shartlarda chegaralanmagan bo‘ladi.

Agar $q_1 > m_2 + \frac{1}{N}$ va $q_2 > m_1 + \frac{1}{N}$ bo‘lib, boshlang‘ich shartlar yetarlicha kichik tanlansa, u holda (31)-(33) masalaning yechimi barcha yechimlari chegaralangan vaqt oralig‘ida global bo‘ladi.

§4.2.da chiqsiz chegaraviy shartlar bilan berilgan kross-diffuziya sistemasining avtomodel yechimlari asimptotik xatti-harakatlari o‘rganilgan. Avtomodel yechimlar asimptotikasining bosh hadi aniqlanadi.

(31) sistema quyidagi ko‘rinishidagi kompakt yurituvchili avtomodel yechimlarga ega

$$\underline{u}(x,t) = (T+t)^{-\alpha_1} f(\xi), \underline{v}(x,t) = (T+t)^{-\alpha_2} \varphi(\xi), \quad (34)$$

bu yerda $\xi = |\zeta|, \zeta_1 = (x_1 + h_1)(T+t)^{-\beta}, \zeta_i = x_i(T+t)^{-\beta}, (i=2, \dots, N), T > 0,$

$$\beta = \frac{q_1 - m_2}{2q_1 - m_2 - 1} = \frac{q_2 - m_1}{2q_2 - m_1 - 1}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2q_1 - m_2 - 1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2q_2 - m_1 - 1} \quad \text{va}$$

$(f(\xi), \varphi(\xi))$ quyidagi masalalarning yechimidir:

$$\begin{cases} \xi^{N-1} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{1-N} \varphi^{m_1-1} \frac{df}{d\xi} \right) + \beta \xi \frac{df}{d\xi} + \alpha_1 f = 0, \\ \xi^{N-1} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{1-N} f^{m_2-1} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) + \beta \xi \frac{d\varphi}{d\xi} + \alpha_2 \varphi = 0, \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} -\varphi^{m_1-1} \frac{df}{d\xi}(0) = f^{q_1}(0), \\ -f^{m_2-1} \frac{d\varphi}{d\xi}(0) = \varphi^{q_2}(0), \end{cases} \quad (36)$$

quyidagi funksiyalarni ko‘rib chiqaylik

$$\tilde{f}(\xi) = (a - \xi^2)^{\frac{1}{m_2-1}}, \tilde{\varphi}(\xi) = (a - \xi^2)^{\frac{1}{m_1-1}}, \quad (37)$$

bu yerda $a > 0, c_1 = \left(\frac{\beta(m_2 - 1)}{2} \right)^{1/(m_1-1)}, c_2 = \left(\frac{\beta(m_1 - 1)}{2} \right)^{1/(m_2-1)},$ (35) tenlamalar

sistemi $\xi \rightarrow \sqrt{a}$ da kompakt yurituvchili asimptotikaga ega:

$$f(\xi) = c_1 \tilde{f}(\xi)(1 + o(1)), \varphi(\xi) \simeq c_2 \tilde{\varphi}(\xi)(1 + o(1)). \quad (38)$$

§4.3.da nochiziqli chegaraviy shartlar bilan berilgan ko‘p o‘lchovli kross-diffuziya masalasini sonli modellashtirish natijalari, ma’lumki, nochiziqli ko‘p o‘lchamli masalalarni yechishda mos boshlang‘ich yaqinlashuvni tanlash asosiy muammolardan biridir. Parametrlarga bog‘liq holda mos asimptotik ifodalar boshlang‘ich yaqinlashuv sifatida qo‘llanilib, iteratsion jarayonning yaqinlashuvi ta’minlanadi.

Dissertatsiyaning beshinchi bobi “**Issiqlik-namlik almashinuvida kross-diffuziyali jarayonlarni sonli modellashtirish va dasturiy majmuasini ishlab chiqish**” ko‘p o‘lchovli va ko‘p komponentli kross-diffuziya masalalarining sifat tahlil hamda sonli modellashtirish shuningdek dissertatsiya doirasida yaratilgan dasturiy majmuani arxitekturasi va ishlash prinsipi bayoniga bag‘ishlangan.

5.1 – paragrafda nochiziqli chegaraviy shartlar bilan berilgan o‘zgaruvchan zichlikka ega ko‘p komponentli va o‘lchovli kross-diffuziya masalasi tahlili yoritilgan bo‘lib quyidagi murakkab sistemaning yechim xususiyatlarini o‘rganilgan

$$\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \left(\nu^{m_1-1} \nabla(u) \right), \rho(x) \frac{\partial \nu}{\partial t} = \nabla \left(u^{m_2-1} \nabla(\nu) \right), \quad x \in R_+, \quad t > 0, \quad (39)$$

$$-\nu^{m_1-1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = u^{q_1}(0, t), \quad -u^{m_2-1} \frac{\partial \nu}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = \nu^{q_2}(0, t), \quad t > 0, \quad (40)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \nu(x, 0) = \nu_0(x), \quad x \in R_+, \quad (41)$$

bu yerda $R_+^N = \{(x_1, x') \mid x' \in R^{N-1}, x_1 > 0\}$, $\rho(x) = (1 + |x|)^n$, $m_i > 1$, $q_i > 0$ ($i = 1, 2$), R_+^N da $u_0(x)$ va $\nu_0(x)$ - ichida kompakt yuritiluvchi manfiy bo‘lmagan uzluksiz funksiyalar.

Birinchi bobdagi 1-10 teoremlardagi yondoshuvlar asosida (39)-(41) masala yechimi global mavjudlik va chegaralanmagan yechim shartlari natijalari kelib chiqadi.

5.2 - paragrafda (39)-(41) nochiziqli chegaraviy shartlar bilan tavsiflangan ko‘p o‘lchovli va komponentli kross-diffuziya sistemasining asimptotikasi o‘rganilgan. (39) sistema (34) ko‘rinishdagi kompakt yurituvchili avtomodel yechimlarga ega hamda 4.2 paragrafdagi kabi chekli yechim asimptotikasiga ega ekanligi ko‘rsatilgan.

5.3 - paragrafda qurilish materiallari ishlab chiqarish jarayonida kross-diffuziyaga ega issiqlik-namlik almashinuvi jarayonlarining sonli yechish algoritmlari va real parametrlar asosidagi natijalar keltirilgan bo‘lib quyidagi masala yechimlari qaralgan.

Issiqlik-namlik almashinuvi uchun ko‘p o‘lchovli kross-diffuziya modelini quyidagicha yozib olammiz:

$$\begin{cases} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(w) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda(w) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(w) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q, \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_w(T) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_w(T) \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_w(T) \frac{\partial w}{\partial z} \right) - S. \end{cases} \quad (46)$$

Bu yerda: $T(x, y, z, t)$ – harorat; $w(x, y, z, t)$ – namlik miqdori yoki namlik konsentratsiyasi; ρ – zichlik; c_p – issiqlik sig‘imi; λ – issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsiyenti; D_w – namlik diffuziya koeffitsiyenti; Q – issiqlik manbai; S – namlik yutilishi.

Boshlang‘ich va chegaraviy shartlar quyidagicha bo‘ladi:

$$T|_{t=0} = T^0, \quad w|_{t=0} = w^0. \quad (47)$$

$$-\lambda(w) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \xi \chi (T_{flame}^4 - T_0^4) + h_{conv} (T_{gas} - T), \quad (48)$$

$$-\lambda(w) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = h_{cool} (T - T_{air}), \quad (49)$$

$$-\lambda(w) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \xi \chi (T_{flame}^4 - T_0^4) + h_{conv} (T_{gas} - T), \quad (50)$$

$$-\lambda(w) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = h_{cool} (T - T_{air}), \quad (51)$$

$$-\lambda(w) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \xi \chi (T_{flame}^4 - T_0^4) + h_{conv} (T_{gas} - T), \quad (52)$$

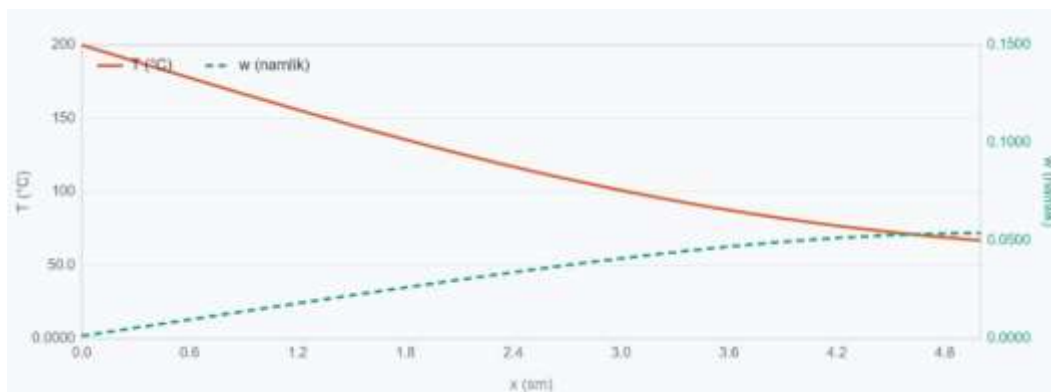
$$-\lambda(w) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = h_{cool} (T - T_{air}), \quad (53) \quad -D_w(T) \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = \beta \left(w - w_{sat} e^{-\frac{E_a}{RT}} \right), \quad (54)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = 0, \quad (55) \quad -D_w(T) \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = \beta \left(w - w_{sat} e^{-\frac{E_a}{RT}} \right), \quad (56)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{y=L_y} = 0, \quad (57) \quad -D_w(T) \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = \beta \left(w - w_{sat} e^{-\frac{E_a}{RT}} \right), \quad (58)$$

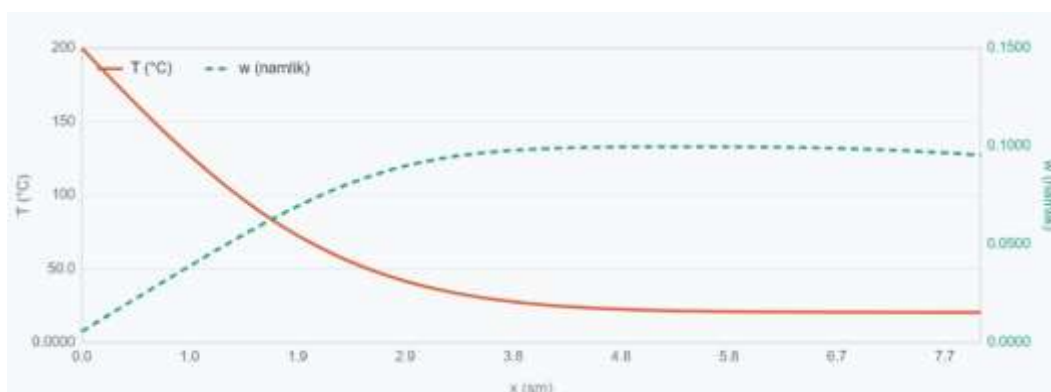
$$\frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = 0, \quad (59)$$

Quyida biz $t=3600$ s, $T_{left}=200^\circ\text{C}$, $Q_v=1400$ W/m³ bo‘lganda har xil o‘lchamdagi klinkerlarning harorat va namliklarining o‘zgarish dinamikasini qarab chiqamiz



1 - rasm. L=5 sm klinkerlarning har xil o'lchamlardagi harorat va namliklarining o'zgarish dinamikasi

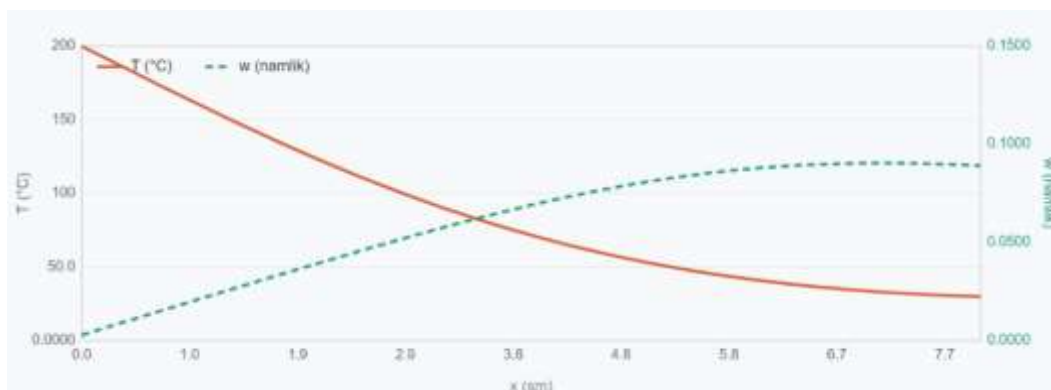
Quyida biz L=8 sm, $T_{\text{left}}=200^{\circ}\text{C}$, $Q_v=1400 \text{ W/m}^3$ bo'lganda turli vaqtlarda klinkerlarning harorat va namliklarining o'zgarish dinamikasini qarab chiqamiz:



2 - rasm. (t=900 s) Klinkerlarning turli vaqtlarda harorat va namliklarining o'zgarish dinamikasi

2-rasmdan ko'rinib turibdiki, vaqt o'tgan sari klinkerning harorat oshadi, namlik kamayib boradi.

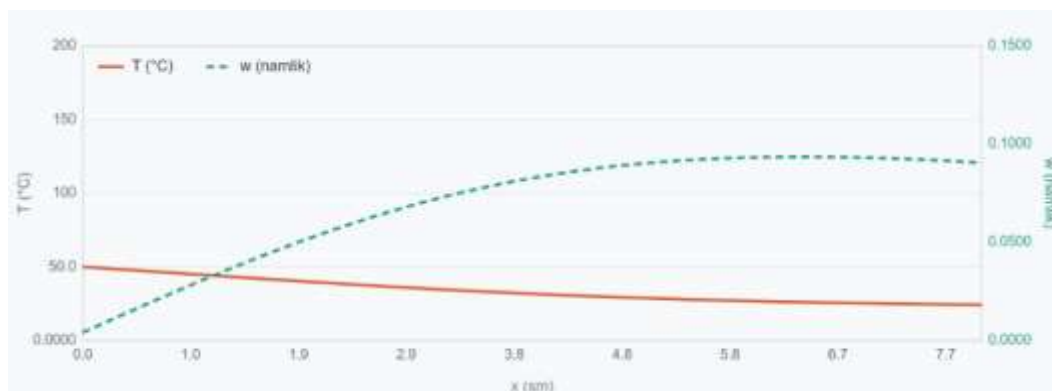
Quyida biz L=8 sm, $t=3600 \text{ s}$, $T_{\text{left}}=200^{\circ}\text{C}$ bo'lganda har xil ichki manbaa quvvatlarida klinkerlarning harorat va namliklarining o'zgarish dinamikasini qarab chiqamiz:



3 - rasm. ($Q_v=1400 \text{ W/m}^3$) Klinkerlarning har xil ichki manbaa quvvatlarida harorat va namliklarning o'zgarish dinamikasi

3-rasmdan ko'rinib turibdiki, ichki manbaa quvvatlari oshgan sari klinkerning harorati va namlik qiymatlarining o'zgarishi sezilarli ravishda o'zgarmaydi.

Quyida biz $L=8 \text{ sm}$, $t=3600 \text{ s}$, $Q_v=300 \text{ W/m}^3$ bo'lganda har xil kiruvchi harorat qiymatlarida klinkerlarning harorat va namliklarning o'zgarish dinamikasini qarab chiqamiz:



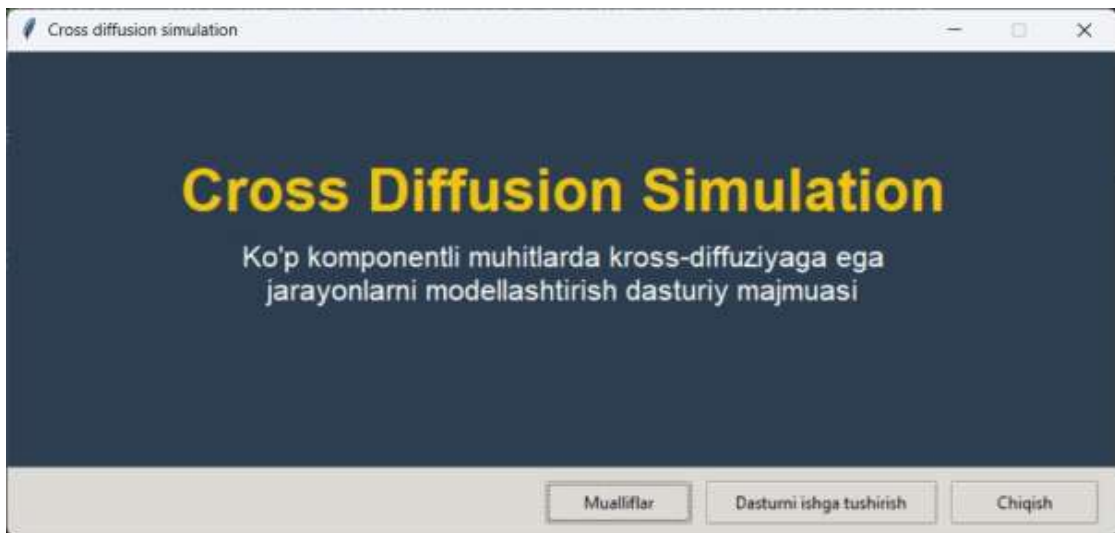
4 - rasm. ($T_{\text{left}}=50^{\circ}\text{C}$) Klinkerlarning turli kiruvchi haroratlarda harorat va namliklarning o'zgarish dinamikasi

4-rasmdan ko'rinib turibdiki, kiruvchi haroratlar oshgan sari klinkerning harorat oshadi, namlik kamayib boradi.

5.4 - paragrafda kross-diffuziyaga ega bo'lgan ko'p komponentli muhitlarda issiqlik-namlik almashinishi jarayonlarini sonli modellashtirish uchun ishlab chiqilgan dasturiy vosita quyidagi asosiy tashkiliy va funksional bloklardan tashkil topgan: asosiy boshqaruv bloki; boshlang'ich va parametrik berilganlarni kiritish interfeysi; kross-diffuziya hadlarini o'z ichiga olgan matematik modellar asosida hisoblash algoritmlarini amalga oshiruvchi hisoblash yadrosi; shuningdek, hisoblash natijalarini grafik va animatsiya ko'rinishida vizuallashtiruvchi bloki.

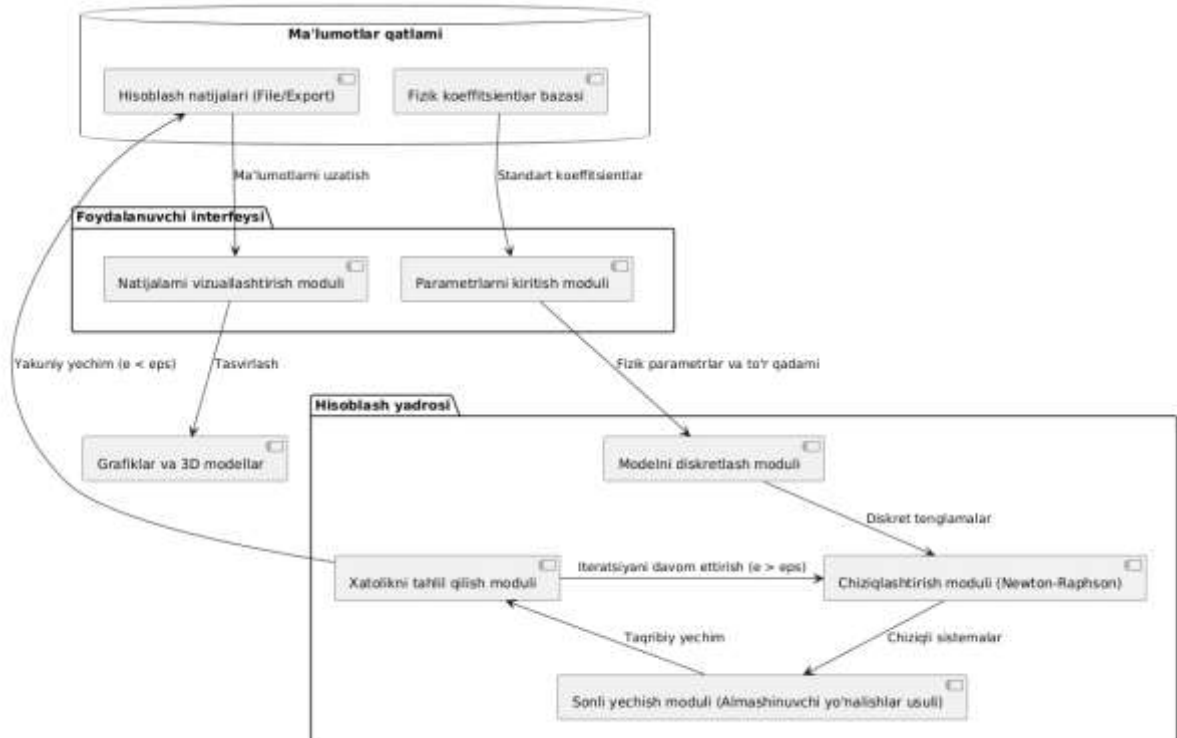
Dissertatsiya doirasida ishlab chiqilgan nazariy natijalar nochiziqli kross-diffuziya modellarini nochiziqli chegaraviy shartlarda sonli yechish uchun yaratilgan sonli hisoblash algoritmlari amaliy tatbiqini ta'minlash hamda hisoblash tajribalari o'tkazish maqsadida maxsus dasturiy majmua yaratildi. Mazkur dasturiy majmua zamonaviy ilmiy hisoblashlarda keng qo'llaniladigan Python dasturlash muhitida ishlab chiqilgan bo'lib, foydalanuvchi bilan interaktiv muloqotni ta'minlovchi grafik interfeysi standart Tkinter kutubxonasi yordamida loyihalashtirilgan.

Ushbu dasturiy majmuaning quyidagi qism dasturiy vositalarini qarab chiqamiz:



5-rasm. Dasturiy majmuaning bosh oynasi

Ushbu paragrafda keltirilgan Python dasturlash tilida ishlab chiqilgan dasturiy majmua quyidagilardan iborat: asosiy boshqarish bloki; kirish ma'lumotlarini kiritish bloki; sonli integrallash va hisoblash tajribalarini o'tkazish uchun hisoblash bloki; sonli hisoblashlar natijalarini grafik, animatsion ko'rinishida talqin qilish bloki (5-rasm). Bu esa qurilish materiallari, geofizik jarayonlar, ekologik tizimlar hamda sanoat texnologiyalarida issiqlik-namlik almashinuvi jarayonlarini samarali boshqarish va optimallashtirish uchun muhim ahamiyatga ega.



6-rasm. Dasturiy majmuaning arxitekturasi

Hisoblash yadrosi dasturiy majmuaning asosiy funksional tarkibiy qismini tashkil etadi. Hisoblash jarayonida ko'p o'lchovli massivlar ustida amallar bajarish uchun NumPy kutubxonasidan, uch diagonalli chiziqli tenglamalar sistemalarini yechish uchun esa SciPy paketining `scipy.linalg` va `scipy.sparse.linalg` modullari

qo‘llanilgan. Ushbu kombinatsiya murakkablikdagi to‘g‘ridan-to‘g‘ri yechishni tartibiga tushirish imkonini beradi.

XULOSA

“Ko‘p komponentli muhitlarda kross-diffuziyaga ega jarayonlarni tadqiq qilish” mavzusidagi dissertatsiya ishi doirasida olingan asosiy xulosalar quyidagilardan iborat:

1. Ko‘p komponentli g‘ovak muhitlarda o‘zaro bog‘liq issiqlik va namlik ko‘chishining matematik modeli ishlab chiqilgan va nazariy jihatdan asoslangan. Modelda muhit zichligining fazo-vaqt bo‘yicha o‘zgarishi hamda ikkinchi tur nochiziqli chegaraviy shartlar bilan berilgan kross-diffuziyaning sinergetik effektlari hisobga olingan.

2. Shakllantirilgan ko‘p o‘lchovli chegaraviy masalalarning sifat tahlili o‘tkazilib, natijada issiqlik va namlik maydonlarining fazo-vaqt bo‘yicha taqsimlanishiga nisbatan ikki tomonlama analitik baholar olingan. Mazkur baholar qurilish materiallarini qayta ishlashning xavfsiz texnologik diapazonlarini aniqlash uchun ishonchli matematik asosni shakllantiradi..

3. Issiqlik va namlik ko‘chishi masalalarining global yechimga ega bo‘lishining kritik parametrik chegaralari aniqlanib, nazariy jihatdan asoslangan. Bu esa intensiv termik ishlov berish jarayonida yuzaga keladigan keskinlashuvchi (qizib ketish, mikroyoriqlar paydo bo‘lishi va strukturaviy buzilishlarga olib keluvchi) kritik rejimlarni prognozlash hamda oldini olish uchun analitik vositalar yaratish imkonini berdi.

4. Kompakt tashuvchiga ega avtomodel yechimlar qurilib, ularning asimptotikalarining bosh hadlari aniqlangan. Issiqlik va namlik perturbatsiyalarining chekli tezlik bilan tarqalish effekti nazariy jihatdan isbotlangan hamda hisoblash natijalari bilan tasdiqlangan. Bu esa qalin devorli konstruksiyalarda qizish va qurish chuqurligini aniq baholash uchun bevosita muhandislik ahamiyatiga ega.

5. Kuchli nochiziqli diffuziya sistemalarini integrallashda optimal boshlang‘ich yaqinlashishni tanlashning hisoblash muammosi hal etilgan. Olingan avtomodel yechimlarning analitik asimptotikalariga asoslangan holda yuqori aniqlikka ega adaptiv boshlang‘ich yaqinlashishlarni sintez qilish metodikasi taklif etilgan.

6. Konservativ oshkormas chekli-ayirmali sxemalar va nazorat hajmi (control volume) usuliga asoslangan samarali hisoblash algoritmlari ishlab chiqilgan, dasturiy jihatdan amalga oshirilgan va verifikatsiyadan o‘tkazilgan. Ularning “sekin diffuziya” rejimlarida yuzaga keluvchi singulyarliklarni ko‘p o‘lchovli fazoviy issiqlik va namlik manbalarini hisobga olgan holda ikkinchi tartibli aniqlik bilan qayta ishlash qobiliyati isbotlangan.

7. Matritsali haydash usuli va adaptiv asimptotik prediktorni uyg‘unlashtirishga asoslangan modifikatsiyalangan iteratsion hisoblash algoritmi ishlab chiqilgan. Mazkur yondashuv yaqinlashish tezligini bir necha barobar oshirishi va kuchli nochiziqliklar mavjud bo‘lgan hollarda ham mutlaq hisoblash turg‘unligini ta’minlashi isbotlangan.

8. Ko‘p komponentli g‘ovak muhitlarda kross-diffuziyaga ega issiqlik va namlik ko‘chishi jarayonlarini tahlil qilish va prognozlash uchun muammoga yo‘naltirilgan dasturiy majmua ishlab chiqilgan. Ushbu dasturiy ta‘minot prediktiv ko‘p o‘lchovli modellashtirish, maydonlar dinamikasining 2D/3D vizualizatsiyasi hamda qurilish materiallari va buyumlari ishlab chiqarish texnologik rejimlarini optimallashtirishni ta‘minlovchi kichik darajadagi avtomatlashtirilgan loyihalash tizimi sifatida namoyon bo‘ladi.

9. Qurilish materiallarining real fizik-mexanik xususiyatlari asosida parametrik hisoblash tajribalari o‘tkazilgan. Natijada yangi texnologik qonuniyatlar aniqlangan, xususan, kross-diffuziya miqyoslaridagi farq issiqlik va namlik frontlarining kirib borishida sezilarli assimetriyani yuzaga keltirishi aniqlangan bo‘lib, bu holat gidratatsiya va quritish rejimlarini loyihalashda muhim ahamiyatga ega.

10. Ishlab chiqilgan matematik va dasturiy ta‘minot Samarqand viloyatining bir qator sanoat obyektlarida amaliyotga joriy etilgan. Natijada solishtirma energiya sarfini kamaytirish, kimyoviy qo‘shimchalar va xomashyo sarfini ratsionallashtirish hamda nuqsonli (brak) mahsulot ulushini sezilarli darajada qisqartirishga erishilgan. Mustaqil sinovlar davomida taklif etilgan yechimlarning yuqori hisoblash samaradorligi, dasturiy ishonchliligi va amaliy muhandislik-texnik masalalarni bajarishdagi tezkorligi eksperimental jihatdan tasdiqlangan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSC.09/2025.27.12.T.02.01.M ПО ПРИСУЖДЕНИЮ
УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОМ
ИНСТИТУТЕ РАЗВИТИЯ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И
ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА**

**НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ЦИФРОВЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ И ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА**

УРУНБАЕВ ЖАСУР ЭРКИНОВИЧ

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ С КРОСС-ДИФФУЗИЕЙ В
МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕДАХ**

05.01.07 – Математическое моделирование. Численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
ДОКТОРА НАУК (DSc) ПО ТЕХНИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Ташкент - 2026

Тема докторской диссертации (DSc) по техническим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан под номером B2024.2.DSc/T788.

Диссертация выполнена в Научно-исследовательском институте развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Автореферат диссертации размещён на трёх языках (узбекский, русский, английский (резюме)) на сайте Научного совета (www.airi.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный консультант:

Рахмонов Зафар Равшанович

доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

Арипов Мерсаид Мирсиддиқович

доктор физико-математических наук, профессор

Хужаев Исмадулла Кушаевич

доктор технических наук, профессор

Эшматов Бахтиёр Хасанович

доктор физико-математических наук, доцент

Ведущая организация:

Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий

Защита диссертации состоится « 07 » ИЮЛЬ 2026 г. в 15⁰⁰ часов на заседании Научного совета DSc.09/2025.27.12.T.02.01.M при Научно-исследовательском институте развития цифровых технологий и искусственного интеллекта. (Адрес: 100125, г. Ташкент, Мирзо Улугбекский р-н, Буз-2, 17А Тел.: (+99871) 263-41-98; e-mail: info@airi.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в информационно-ресурсном центре Научно-исследовательского института развития цифровых технологий и искусственного интеллекта (регистрационный номер № Р2). (Адрес: 100125, г. Ташкент, Мирзо Улугбекский р-н, Буз-2, 17А Тел.: (+99871) 263-41-98; e-mail: info@airi.uz).

Автореферат диссертации разослан « 24 » ИЮНЬ 2026 года.
(реестр протокола рассылки № 17 от « 15 » ИЮНЬ 2026 года)



Н. Равшанов

Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней,
доктор технических наук, профессор

Ф.М. Нуралиев

Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней,
доктор технических наук, профессор

Э.Ш. Назирова

Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней,
доктор технических наук, профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора наук (DSc))

Актуальность и востребованность диссертации. Исследования уравнений диффузионных процессов и их систем в мировом научном пространстве являются актуальными и востребованными, а их результаты находят широкое применение в биологии, химии, физике, технологии, биофизике и ряде других областей науки. Математические модели диффузионных процессов описываются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных и служат объектом исследования в сейсмологии, нелинейной теории волн, распространении эпидемий, динамике биологических популяций, таксисных процессах, задачах фильтрации и других направлениях. В связи с этим изучение нелинейных математических моделей диффузии в многокомпонентных средах, разработка эффективных численных схем и алгоритмов их решения, а также создание соответствующего программного обеспечения остаются важными задачами прикладной математики.

Математические модели кросс-диффузии, описываемые системами параболических уравнений с нелинейными граничными условиями, широко изучаются в ведущих научных школах мира. Математические модели процессов кросс-диффузии широко используются в биофизике для описания биофизических механизмов морфогенеза, построения моделей процессов в биологических популяциях, теплопередачи и фильтрации, а также для изучения взаимодействия тектонических плит. Поэтому разработка методов численного и аналитического решения систем перекрестной диффузии является приоритетным направлением научных исследований.

Энергоэффективность и рациональное использование ресурсов в Республике Узбекистан являются неотъемлемой частью национальной стратегии, и принимаются документы, определяющие комплексные меры по повышению энергоэффективности различных технологий. В частности, в Стратегии развития Нового Узбекистана «Узбекистан – 2030» определены приоритетные направления, предусматривающие: «обогащение фундаментальных исследований новыми научными направлениями с учетом современных требований; усиление прикладных исследований в наиболее динамично развивающихся секторах экономики; внедрение кластерной системы взаимодействия «предприятие – высшее учебное заведение – научная организация»; увеличение доли молодых исследователей и поддержку их научной деятельности; развитие отраслей промышленности, выступающих в качестве драйверов экономического роста, а также полную реализацию промышленного потенциала регионов; переход к «зелёной экономике» и существенное расширение использования возобновляемых источников энергии как её основы; стабилизацию экологической ситуации в Приаралье и смягчение негативных последствий экологических проблем, вызванных

высыханием Аральского моря».³ Постановка подобных задач свидетельствует о том, что наше государство уделяет значительное внимание вопросам тепло- и энергосбережения. Сегодня достигнуты значительные результаты в решении нелинейных задач таких процессов, как тепло-влажностный обмен, математическом моделировании, разработке численных и аналитических методов для математических моделей, а также в широком применении полученных результатов на практике. Для обеспечения реализации решения большое значение имеют построение нелинейных математических моделей природных процессов, выраженных в виде системы параболических уравнений, разработка и совершенствование методов численного расчета.

Данное диссертационное исследование основано на Указе Президента Республики Узбекистан № ПФ-165 от 6 июля 2022 года «Об утверждении Стратегии инновационного развития Республики Узбекистан на 2022–2026 годы» и Постановлениях Президента Республики Узбекистан № ПК-4851 от 6 октября 2020 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы образования в области информационных технологий, развитию научных исследований и их интеграции с сектором информационных технологий», № ПК-307 от 6 июля 2022 года «Об организационных мерах по реализации Стратегии инновационного развития Республики Узбекистан на 2022–2026 годы», № ПК-246 от 18 мая 2022 года «Об обеспечении соответствия научного потенциала и практической деятельности при работе с международными рейтингами и индексами» и Постановлениях № ПК-128 от 20 апреля 2023 года «О мерах по ускорению комплексного развития системы образования путем повышения качества образования». «Научно-методологическая и исследовательская работа», а также принятые в этой области нормативно-правовые документы в определенной степени будут способствовать реализации целей и задач, поставленных в этой области.

Соответствие исследований приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Информатизация и развитие информационно-коммуникационных технологий».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации⁴. Научные исследования качественных свойств различных нелинейных математических моделей проводятся в ведущих исследовательских центрах и университетах по всему миру, включая Университет штата Северная Каролина, Университет науки и технологий штата Айова, Университет

³ Указ Президента Республики Узбекистан № ПФ- 21 от 16 февраля 2026 года «О дополнительных мерах по последовательному продолжению реформ и выведению их на новый этап в рамках приоритетных направлений развития страны до 2030 года»

⁴ Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации основан на следующих источниках: «Журнал вычислительной математики и математической физики», «Математическое моделирование», «Сообщения по чистому и прикладному анализу», «Журнал Корейского математического общества» <http://www.springer.com/mathematics>; <http://www.sciencedirect.com/science/jrnallbooks/sub/mathematics>.

Центральной Флориды, Университет штата Луизиана, Калифорнийский государственный университет (США), Университет Буэнос-Айреса (Аргентина), Университет Сантьяго-де-Компостела (Аргентина), Университет Чили (Чили), Университет Катании (Италия), университеты Осаки, Нагои, Хиросимы (Япония), Национальный университет Сингапура (Сингапур), Автономный университет Мадрида, Мадридский университет Комплутенсе (Испания), Падерборнский университет, Ахенский университет (Германия), Ноттингемский университет (Англия), Цзилиньский, Чунцинский, Чанчуньский университеты (Китай), Парижский математический центр, Университет Дофин PCL (Франция), Институт математики Российской академии наук, Московский государственный университет (Россия), Институт информатики и автоматизации Венгерская академия наук (Венгрия), Национальный университет Казахстана (Казахстан), Луганский национальный университет им. Т. Шевченко (Украина), Институт математики и информатики Софийского университета (Болгария), Национальный университет Узбекистана, Самаркандский государственный университет, Ургенчский государственный университет, Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта (Узбекистан) и другие.

Результатом мировых исследований по улучшению новых качественных свойств, отличающихся от свойств линейных моделей, является разработка методов численного решения и визуализации, а также достижение ряда научных результатов, включая условия существования глобального решения для моделей теплопередачи, описываемых нелинейными параболическими уравнениями, и решение задачи Неймана (Автономный университет Мадрида, Осака, Университет Нагои), найдены значения критического индекса глобального существования решения типа Фудзиты для нелинейных параболических уравнений (Мадридский университет Комплутенсе, Падерборн, Цзилинь, Чунцин, Чанчуньский университет), разработаны методы определения второй критической информации, методы определения начальной информации. Разработана задача Коши для уравнений пористых сред и градиентных нелинейных уравнений (Университет Сапиенца в Риме, Чунцин, Университет Осаки).

В мире научные исследования проводятся в приоритетных направлениях разработки методов и инструментов решения задачи Коши и краевых задач, а также нелинейных уравнений параболического типа, которые лежат в основе различных математических моделей, включая: нахождение условий существования глобального решения во времени в нелинейных задачах; нахождение значений критического показателя существования глобального решения и решения типа Фудзиты; определение условий локализации бесконечных решений; повышение эффективности численных методов; разработка комплекса программ, позволяющих изучать численное решение нелинейных процессов на основе вышеуказанных свойств нелинейных математических моделей.

Степень изученности проблемы. Теория математического моделирования процессов теплопередачи на основе перекрестной диффузии в многокомпонентных средах с переменной плотностью стала предметом ряда фундаментальных результатов в научной литературе. Эта область быстро развивалась в конце XX и начале XXI веков, и были широко изучены модели, учитывающие нелинейность процессов, взаимодействие между компонентами, пространственно-временные изменения плотности, конвективно-диффузионный синергизм и термодиффузионные (эффекты Soret–Dufour) эффекты. В частности, работы J.L.Vaskes, X.A. Levin, A.A. Самарского, A.C. Калашникова, В.А. Галактионова, А.Ф. Тедеева, А.Р. Михайлова, S. Shigesada, K. Kawasaki, В.А. Григорьева, В.С. Курдюмова, М.А. Циганова, А.Е. Ахромеева, А.В. Ликова, Д.П. Юховицкого, С.П. Курдюмова, Г.Г. Малинецкого, Ю.П. Попов, Ю.А. Чудновский, J. Smoller, A. Friedman, R. Showalter, H. Amann, E. DiBenedetto, P. Bothe, A. Mielke, T. Suzuki, K. Osaki, A. Jüngel и др. посвящены нелинейному теплообмену, уравнениям диффузии в многокомпонентных средах, классическим основам краевых задач, нелинейному рассеянию тепла в средах с переменной плотностью. и переменной теплоемкостью, растворы с обострением, кросс-диффузия, таксисы, многокомпонентные системы перекрестной диффузии, модели перекрестной диффузии в популяционных и физических процессах, перекрестная диффузия плотности, влаги и тепла в моделях тепло-влажностного обмена, нелинейные синергетические автомодельные решения процессов тепловой диффузии в сложных средах, эффекты Сорета-Дюфура, связанные с теплом, бесконечность термодиффузионных решений в многофазных средах, влияние конечной скорости распространения и пространственной локализации возмущений, наличие временной структуры и локальных границ, нелинейные среды при рассмотрении источника и поглощения и т. д.

В работах Я.Б. Зельдовича, А.С. Компанеца, Г.И. Баренблатта и R.E. Pattle впервые был обнаружен нелинейный эффект тепловых возмущений и конечных скоростей распространения в нелинейных средах. Определение условия возникновения эффекта конечной скорости, оценка решений задачи Коши в пористых средах и нелинейного градиентного уравнения теплопроводности были изучены M. Herrero, M. Fila, F. Quiros, R. Gillermo, Keng Deng, Julio D. Rossi, P. Groisman, D. Andreuchchi, A. Tesei, R. Ferreyra, A.D. Pablo, H. Fujita, об устойчивости асимптотических решений во времени, X.Y. Chen, H. Matano, M. Sugimoto, Jon King, А. П. Михайлов, В. А. Галактионов, Е. Куркина, определение свойств математических моделей, описываемых краевой задачей Неймана для вырождающейся параболического квазилинейного уравнения политропной фильтрации, H.A. Levine, M. Chunlai, W. Du, J. Yin, Y. Wang, M.X. Wang, Z. Xiang, M. Yongsheng, S.N. Zheng, X.F. Song, Z.X. Jiang, Maykl Vinkler за его работу по нелинейным уравнениям теплопередачи при изменяющейся плотности, глобальным решениям задачи Коши для реакции-диффузии и фильтрации, а также исследованию условий взрыва во времени, Z. Li, M. Chunlai, V. Du, Guirong Liu, Yuan-Vey Qi, А.Ф.

Тедеев, А.В. Мартиненко, Н.В. Афанасиева, С.П. Дегтярев проводили научные исследования.

В Узбекистане нелинейные уравнения диффузии и их системы, описывающие различные диффузионные процессы, изучали М. Арипов, Ф.Б. Абуталиев, Б. Хужаёров, А.С. Расулов, Н. Равшанов, И. Хужаев, Ч.Б. Нормуродов, Н. Утеулиев, З.Р. Рахмонов, Ш.А. Садуллаева, А.С. Матякубов, Э.Ш. Назирова и другими учеными. Их основные работы посвящены численному исследованию проблемы решения системы нелинейных уравнений диффузии, которая может быть применена к задачам моделирования перекрестной диффузии, фильтрации, теплопередачи и процессов в биологических популяциях. Работы М.М. Арипова и его учеников основаны на методах нелинейного разделения и стандартных уравнений как эффективных методах изучения нелинейных задач. Результаты, полученные при моделировании систем перекрестной диффузии с нелинейными граничными условиями, определении существующих условий для взрывных решений и глобальных решений, а также анализе существующих методов и алгоритмов, показывают необходимость разработки методов для более глубокого и полного изучения теоретических и практических вопросов в области моделирования нелинейных процессов.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационное исследование выполнено в соответствии с планами научно-исследовательских работ Научно-исследовательского института развития цифровых технологий и искусственного интеллекта в рамках проекта № А-ОТ-2021-108 «Разработка информационно-аналитической системы мониторинга и прогнозирования экологического состояния региона Аральского моря» (2021-2023 гг.), а также в рамках темы НИР «Создание и численное исследование математических моделей инженерных и природных процессов» (2024 г.).

Целью исследования является разработка нелинейных математических моделей, вычислительных алгоритмов и проблемно-ориентированного программного обеспечения для анализа и прогнозирования процессов тепло- и влагопереноса с кросс-диффузией в многокомпонентных пористых средах.

Задачи исследования:

разработка математических моделей нелинейных технологических процессов тепло- и влагопереноса с кросс-диффузией, происходящих в многокомпонентных пористых средах;

разработка метода синтеза высокоточных адаптивных начальных приближений для методов итерационной сетки на основе выявленной асимптотики исследуемых процессов и аналитического построения автомодельных решений;

теоретическое обоснование многомерных краевых задач и определение параметрических пределов области устойчивости и корректности для разработанных моделей;

построение консервативных неявных конечно-разностных схем и разработка вычислительно устойчивых алгоритмов для решения систем сильно нелинейных параболических уравнений переноса тепла и влаги с кросс-диффузией с учетом многомерных источников с переменной плотностью;

исследование процессов тепло-и влагопереноса с кросс-диффузией в многокомпонентных пористых средах посредством вычислительных экспериментов, разработка проблемно-ориентированного программного комплекса для визуализации, анализа и прогнозирования динамики полей.

Объектом исследования являются технологические процессы тепло- и влагопереноса с кросс-диффузией, протекающие в многокомпонентных пористых средах при производстве строительных материалов и изделий.

Предметом исследования являются многомерные математические модели, вычислительные алгоритмы на основе консервативных разностных схем и программные средства для численного исследования, анализа и прогнозирования сложных нелинейных процессов тепло- и влагопереноса с кросс-диффузией в многокомпонентных пористых средах.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы математического моделирования сложных систем, методы построения автомодельных решений, асимптотический анализ и методы априорных оценок, методы дискретизации дифференциальных уравнений в частных производных на базе конечно-разностных схем, методы линеаризации и итерационные методы, а также технологии программирования для проведения параметрических вычислительных экспериментов.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

разработана математическая модель взаимосвязанного переноса тепла и влаги в многокомпонентных средах с учетом эффектов кросс-диффузии на основе нелинейных граничных условий;

разработан модифицированный итерационный метод, основанный на использовании аналитических асимптотических разложений в качестве адаптивного начального приближения для численного решения систем уравнений двойной нелинейной диффузии;

определены критические показатели глобального решения задач тепло- и влагопереноса;

получены двусторонние аналитические оценки пространственно-временного изменения тепловых и влажностных полей для систем с переменной плотностью;

разработаны эффективные вычислительные алгоритмы, основанные на методе консервативных неявных разностных схем.

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

разработана методика синтеза высокоточных адаптивных начальных приближений для численных схем интегрирования на базе полученных асимптотик автомодельных решений;

определены критические технологические параметры (границы устойчивости) многомерных процессов тепло - и влагопереноса с

нелинейными граничными условиями для обеспечения безопасной термической обработки многокомпонентных промышленных материалов;

разработан и внедрен проблемно-ориентированный программный комплекс, на базе которого проведены вычислительные эксперименты по оценке и оптимизации процессов производства строительных материалов и изделий на предприятиях Самаркандской области.

Достоверность результатов исследования обеспечивается строгими доказательствами на основе теорем сравнения и принципа максимума, а также подтверждается результатами вычислительных экспериментов и согласованностью полученных результатов с законами сохранения.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что они в определенной мере расширяют теоретическую и методологическую базу математического моделирования и численного исследования сложных нелинейных систем тепло- и влагопереноса с кросс-диффузией за счет новых консервативных разностных схем, усовершенствованных итерационных вычислительных алгоритмов и методов асимптотического анализа.

Практическая значимость результатов исследования состоит в том, что разработанный математический аппарат и программный комплекс выступают эффективным инструментом анализа и прогнозирования процессов тепло- и влагопереноса с кросс-диффузией в многокомпонентных пористых средах, а также оптимизации технологических режимов производства строительных материалов и изделий за счет обеспечения возможности предварительной оценки процессов увлажнения, сушки, термоизоляции и повышения структурной устойчивости изделий.

Внедрение результатов исследования. На основе разработанных математических моделей, вычислительных алгоритмов и программного обеспечения для анализа и прогнозирования процессов тепло- и влагопереноса с кросс-диффузией в многокомпонентных пористых средах:

алгоритмы численного решения систем кросс-диффузии и разработанное программное обеспечение внедрены в деятельность общества с ограниченной ответственностью «Jomboy yashil chiroqlari». В рамках внедрения использованы математические модели, основанные на системе уравнений кросс-диффузии, для описания процессов тепло- и влагообмена в цементной пасте (справка Министерства цифровых технологий Республики Узбекистан № 34-8/7652 от 22 октября 2025 года). В результате разработанная модель и алгоритмы её численного решения обеспечили достоверное описание реальных физических процессов тепло- и влагообмена в цементной пасте;

разработанная модель, основанная на системе уравнений тепло- и влагообмена с кросс-диффузией, внедрена в деятельность общества с ограниченной ответственностью «U-Z Bunyodkor Groups». На основе результатов исследования выполнено математическое моделирование кросс-диффузионных процессов, возникающих при производстве газобетонных (газосиликатных) блоков, включая количественные добавки сырья, их концентрации и протекание химических реакций (справка Министерства

цифровых технологий Республики Узбекистан № 34-8/7652 от 22 октября 2025 года). В результате достигнуто снижение энергозатрат и расхода сырья, а также уменьшение доли дефектной продукции;

разработанный программный комплекс, основанный на асимптотических формулах для выбора начального приближения и численных алгоритмах, обеспечивающих эффективное решение математических моделей, прошёл апробацию в IT Park Самаркандской области. В ходе апробации подтверждена эффективность разработанных алгоритмов численного решения (справка Министерства цифровых технологий Республики Узбекистан № 34-8/7652 от 22 октября 2025 года). В результате экспериментально обоснована высокая эффективность разработанных математических моделей, асимптотических методов и программных средств при решении прикладных научно-технических задач.

Апробация результатов исследования. Научные результаты диссертационной работы обсуждены на 3 международных и 10 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 28 научных работ, из них 13 журнальных статей, в том числе 4 в международных и 9 в республиканских журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов докторских диссертаций, также получены 2 свидетельства о регистрации программных продуктов для ЭВМ.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Объём диссертации составляет 200 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и значимость темы диссертации, показано соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики. Приведён обзор зарубежных исследований по рассматриваемой проблеме и дана характеристика степени её изученности. Сформулированы цели и задачи работы, определены объект и предмет исследования, изложены положения научной новизны и полученные практические результаты. Раскрыта теоретическая и прикладная значимость представленных материалов, приведены сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах, а также о структуре диссертации.

В первой главе диссертационной работы, озаглавленной **«Математические модели процессов с кросс-диффузией»**, проведён аналитический обзор существующих научных исследований, посвящённых изучению математических моделей процессов с кросс-диффузией.

Приведём основные результаты первой главы.

В § 1.3 рассматриваются свойства решений системы нелинейных многомерных параболических уравнений с нелинейными граничными условиями следующего вида:

$$u_t = \nabla \left(|\nabla u|^{p_1-2} \nabla u \right), x \in R_+^N, t > 0, v_t = \nabla \left(|\nabla v|^{p_2-2} \nabla v \right), x \in R_+^N, t > 0, \quad (1)$$

$$-|\nabla u|^{p_1-2} \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = v^{q_1}(0,t), -|\nabla v|^{p_2-2} \frac{\partial v}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = u^{q_2}(0,t), t > 0, \quad (2)$$

$$u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), x > 0, \quad (3)$$

где $R_+^N = \{(x_1, x') \mid x' \in R^{N-1}, x_1 > 0\}$, $p_i > 2, q_i > 0 (i=1,2)$ функции $u_0(x)$ и $v_0(x)$, заданные в R_+^N , являются положительными, непрерывными и имеют компактный носитель. Функция $u_0(x)$ описывает процесс распространения тепла, а функция $v_0(x)$ процесс распространения влаги.

Система (1) с граничными условиями (2) и (3) описывает процесс тепло- и влагообмена с кросс-диффузией.

Теорема 1. Если выполняется условие $q_1 q_2 \leq \frac{4(p_1-1)(p_2-1)}{p_1 p_2}$, то решение задачи (1)-(3) является глобальным по времени.

Теорема 2. Если выполняется условие $q_1 q_2 > \frac{4(p_1-1)(p_2-1)}{p_1 p_2}$ и начальные данные достаточно велики, то решение задачи (1)-(3) является неограниченным (по времени).

Теорема 3. Если выполняются условия $q_1 q_2 > \frac{4(p_1-1)(p_2-1)}{p_1 p_2}$, $\min\{N\beta_1 - \alpha_1, N\beta_2 - \alpha_2\} > 0$ и начальные данные достаточно малы, то решение задачи (1)-(3) является глобальным по времени.

Теорема 4. Если выполняются условия $q_1 q_2 > \frac{4(p_1-1)(p_2-1)}{p_1 p_2}$, $\max\{N\beta_1 - \alpha_1, N\beta_2 - \alpha_2\} < 0$ то любое неотрицательное нетривиальное решение задачи (1)-(3) разрушается за конечное время (blow-up).

Рассмотрим автомодельное решение системы (1) с компактным носителем следующего вида: $u_+(x,t) = (T+t)^{-\alpha_1} \varphi(\xi), v_+(x,t) = (T+t)^{-\alpha_2} \phi(\eta)$, (4) здесь $\xi = |\zeta|, \zeta_1 = (x_1 + h_1)(T+t)^{-\beta_1}, \zeta_i = x_i(T+t)^{-\beta_1}, \eta = |\theta|, \theta_1 = (x_1 + h_2)(T+t)^{-\beta_2}, \theta_i = x_i(T+t)^{-\beta_2}, (i=2, \dots, N), T > 0$ и $(\varphi(\xi), \phi(\eta))$ функции являются решением следующей задачи

$$\begin{cases} \xi^{1-N} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{N-1} \left| \frac{d\varphi}{d\xi} \right|^{p_1-2} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) + \beta_1 \xi \frac{d\varphi}{d\xi} + \alpha_1 \varphi = 0, \\ \eta^{1-N} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^{N-1} \left| \frac{d\phi}{d\eta} \right|^{p_2-2} \frac{d\phi}{d\eta} \right) + \beta_2 \eta \frac{d\phi}{d\eta} + \alpha_2 \phi = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\left| \frac{d\varphi}{d\xi_1} \right|^{p_1-2} \frac{d\varphi}{d\xi_1} \Big|_{\xi_1=h_1} = \varphi^{q_1}(h_2), \\ -\left| \frac{d\phi}{d\eta_1} \right|^{p_2-2} \frac{d\phi}{d\eta_1} \Big|_{\eta_1=h_2} = \varphi^{q_2}(h_1), \end{array} \right. \quad (6)$$

рассмотрим следующие функции:

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \left(a_1 - b_1 \xi^{\frac{p_1}{p_1-1}} \right)^{\frac{p_1-1}{p_1-2}}, \quad \tilde{\phi}(\eta) = \left(a_2 - b_2 \eta^{\frac{p_2}{p_2-1}} \right)^{\frac{p_2-1}{p_2-2}}, \quad (7)$$

где $a_i > 0 (i=1,2)$, тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 5. При выполнении условия $\xi \rightarrow (a_1/b_1)^{\frac{p_1-1}{p_1}}, \eta \rightarrow (a_2/b_2)^{\frac{p_2-1}{p_2}}$, решение системы (5), (7) имеет следующую асимптотику, с компактным носителем.

$$\varphi(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi)(1+o(1)), \quad \phi(\eta) = \tilde{\phi}(\eta)(1+o(1))$$

В § 1.4 рассматриваются оценки решений и численные схемы для системы дважды нелинейных многомерных диффузионных уравнений с нелинейными граничными условиями.

$$u_t = \nabla \left(|\nabla u^{m_1}|^{p_1-2} \nabla u^{m_1} \right), \quad v_t = \nabla \left(|\nabla v^{m_2}|^{p_2-2} \nabla v^{m_2} \right), \quad x \in R_+^N, \quad t > 0, \quad (8)$$

$$-|\nabla u^{m_1}|^{p_1-2} \frac{\partial u^{m_1}}{\partial x_1} = u^{\beta_1}(0,t) v^{q_1}(0,t),$$

$$-|\nabla v^{m_2}|^{p_2-2} \frac{\partial v^{m_2}}{\partial x_1} = v^{\beta_2}(0,t) v^{q_2}(0,t), \quad x_1 = 0, t > 0, \quad (9)$$

$$u(x,0) = u_0(x), x > 0 \quad v(x,0) = v_0(x), x > 0, \quad (10)$$

где $R_+^N = \{(x_1, x') | x' \in R^{N-1}, x_1 > 0\}$, $m_i > 1, p_i > 1 + \frac{1}{m_i}, \beta_i > 0, q_i > 0 (i=1,2)$, функции $u_0(x)$ и $v_0(x)$, заданные в R_+^N , являются положительными, непрерывными и имеют компактный носитель. Функция $u_0(x)$ описывает процесс распространения тепла, а функция $v_0(x)$ процесс распространения влаги.

Теорема 6. Предположим, что выполняются условия $\beta_1 \leq \frac{(p_1-1)(m_1+1)}{p_1}$,

$q_1 \leq \frac{(p_2-1)(m_2+1)}{p_2}$. Если выполняется условие

$q_1 \beta_1 \leq \left(\frac{(p_1-1)(m_1+1)}{p_1} - \beta_1 \right) \times \left(\frac{(p_2-1)(m_2+1)}{p_2} - q_2 \right)$, то любое решение системы (8)-

(10) существует глобально по времени.

Теорема 7. Предположим, что выполнены условия $\beta_1 \leq \frac{(p_1-1)(m_1+1)}{p_1}$, $q_1 \leq \frac{(p_2-1)(m_2+1)}{p_2}$ и $q_1\beta_2 \leq \left(\frac{(p_1-1)(m_1+1)}{p_1} - \beta_1\right) \times \left(\frac{(p_2-1)(m_2+1)}{p_2} - q_2\right)$. Тогда при выполнении условия $\min\{N\lambda_1 - \alpha_1, N\lambda_2 - \alpha_2\} > 0$ и достаточно малых начальных данных решение задачи (8)–(10) является глобальным по времени.

Теорема 8. Пусть выполнены условия $\beta_1 \leq \frac{(p_1-1)(m_1+1)}{p_1}$, и $q_1 \leq \frac{(p_2-1)(m_2+1)}{p_2}$. Тогда при условии $q_1\beta_2 \leq \left(\frac{(p_1-1)(m_1+1)}{p_1} - \beta_1\right) \times \left(\frac{(p_2-1)(m_2+1)}{p_2} - q_2\right)$ решение системы (8)–(10) для достаточно больших начальных данных разрушается за конечное время.

Теорема 9. Предположим, что выполнены условия $\beta_1 \leq \frac{(p_1-1)(m_1+1)}{p_1}$, $q_1 \leq \frac{(p_2-1)(m_2+1)}{p_2}$, и $q_1\beta_2 \leq \left(\frac{(p_1-1)(m_1+1)}{p_1} - \beta_1\right) \times \left(\frac{(p_2-1)(m_2+1)}{p_2} - q_2\right)$. Тогда при выполнении условия $\min\{N\lambda_1 - \alpha_1, N\lambda_2 - \alpha_2\} > 0$ любое неотрицательное нетривиальное решение системы (8)–(10) теряет ограниченность за конечное время.

Глобальную разрешимость задачи (8)–(10) докажем с помощью построения ограниченного супер решения.

$$u_+(x, t) = (T+t)^{-\alpha_1} \varphi(\xi), v_+(x, t) = (T+t)^{-\alpha_2} \phi(\eta), \quad (11)$$

здесь $\xi = |\zeta|$, $\zeta_1 = (x_1 + h_1)(T+t)^{-\lambda_1}$, $\zeta_i = x_i(T+t)^{-\lambda_i}$, $\eta = |\theta|$, $\theta_1 = (x_1 + h_2)(T+t)^{-\lambda_2}$, $\theta_i = x_i(T+t)^{-\lambda_i}$, ($i = 2, \dots, N$), $T > 0$, и $(\varphi(\xi), \phi(\eta))$ функции являются решениями следующей задачи

$$\begin{cases} \xi^{1-N} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{N-1} \left| \frac{d\varphi^{m_1}}{d\xi} \right|^{p_1-2} \frac{d\varphi^{m_1}}{d\xi} \right) + \lambda_1 \xi \frac{d\varphi}{d\xi} + \alpha_1 \varphi = 0, \\ \eta^{1-N} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^{N-1} \left| \frac{d\phi^{m_1}}{d\eta} \right|^{p_2-2} \frac{d\phi^{m_1}}{d\eta} \right) + \lambda_2 \eta \frac{d\phi}{d\eta} + \alpha_2 \phi = 0, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} - \left| \frac{d\varphi^{m_1}}{d\zeta_1} \right|^{p_1-2} \frac{d\varphi^{m_1}}{d\zeta_1} \Big|_{\zeta_1=h_1} = \varphi^{\beta_1} \phi^{q_1}, \\ - \left| \frac{d\phi^{m_1}}{d\theta_1} \right|^{p_2-2} \frac{d\phi^{m_1}}{d\theta_1} \Big|_{\theta_1=h_2} = \varphi^{\beta_2} \phi^{q_2}. \end{cases} \quad (13)$$

рассмотрим следующие функции:

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \left(a_1 - b_1 \xi^{\frac{p_1}{p_1-1}} \right)^{\frac{p_1-1}{m_1(p_1-1)-1}}, \quad \tilde{\phi}(\eta) = \left(a_2 - b_2 \eta^{\frac{p_2}{p_2-1}} \right)^{\frac{p_2-1}{m_2(p_2-1)-1}}, \quad (14)$$

где $a_i > 0 (i=1,2)$, $b_1 = \frac{m_1(p_1-1)-1}{m_1 p_1} \lambda_1^{\frac{1}{p_1-1}} > 0$, $b_2 = \frac{m_2(p_2-1)-1}{m_2 p_2} \lambda_2^{\frac{1}{p_2-1}} > 0$.

Теорема 10. Компактное решение системы (12), (13) имеет следующую асимптотику:
$$\begin{cases} \varphi(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi)(1+o(1)), \\ \phi(\eta) = \tilde{\phi}(\eta)(1+o(1)), \end{cases} \quad \xi \rightarrow (a_1/b_1)^{\frac{p_1-1}{p_1}}, \eta \rightarrow (a_2/b_2)^{\frac{p_2-1}{p_2}}, \quad \text{где}$$

$\tilde{\varphi}(\xi), \tilde{\phi}(\eta)$ определено в (14).

Кроме того, в этом разделе разработаны численные схемы, основанные на методе конечных разностей. В этом случае уравнения аппроксимируются с точностью второго порядка по пространственной координате и точностью первого порядка по времени. При генерации итерационного процесса значения функции в узлах на внутренних шагах итерации вычисляются с использованием управляющего метода. Основная трудность численного решения таких нелинейных задач заключается в выборе подходящей начальной аппроксимации для итерационного процесса. Поэтому в процессе решения конкретной задачи используются функции, отражающие характерные особенности искомого решения и полученные на основе анализа качественных свойств нелинейных задач. Эта задача решается путем выбора асимптотических формул для различных значений численных параметров.

Вторая глава диссертации озаглавлена «**Характеристики процессов тепло-влажностного обмена в моделях перекрестной диффузии с нелинейными граничными условиями и источником**», в которой разработана математическая модель, описывающая процессы тепло- и влагообмена с кросс-диффузией, заданные с нелинейными граничными условиями и заданной источником.

В параграфе 2.1 исследуются свойства решений следующей системы уравнений.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu^{m_1-1} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u^{m_2}, \quad \frac{\partial \nu}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^{m_2-1} \frac{\partial \nu}{\partial x} \right) + \nu^{m_1}, \quad x \in R_+, \quad t > 0, \quad (15)$$

$$-\nu^{m_1-1} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = u^{q_1}(0, t), \quad -u^{m_2-1} \frac{\partial \nu}{\partial x}(0, t) = \nu^{q_2}(0, t), \quad t > 0, \quad (16)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \nu(x, 0) = \nu_0(x), \quad x \in R_+, \quad (17)$$

где $m_i \geq 1$, $q_i > 0 (i=1,2)$, $u_0(x)$ и $\nu_0(x)$ - неотрицательные непрерывные функции с компактным носителем в R_+ , функция $u_0(x)$ описывает распространение тепла, а функция $\nu_0(x)$ распространение влаги.

На основе подходов, изложенных в теоремах 1-10 первой главы, для задачи (15)-(17) получены следующие результаты.

Если $q_1 \leq 1, q_2 \leq 1$, то любое решение задачи (15)-(17) является глобальным.

$q_1 > 1, q_2 > 1$, тогда любое решение задачи (15)-(17) будет неограниченным (blow-up) при достаточно больших начальных условиях.

$q_1 > m_2 + 1, q_2 > m_1 + 1$ и если исходные данные достаточно малы, то любое решение задачи (15)-(17) будет глобальным.

Параграф 2.2 посвящён исследованию асимптотики автомодельных решений задачи (15)-(17), а также их численному моделированию. Для системы (15) рассматривается автомодельное решение с компактным носителем следующего вида.

$$\underline{u}(x,t) = (T+t)^{-\alpha_1} f(\xi), \underline{v}(x,t) = (T+t)^{-\alpha_2} \varphi(\xi), \xi = x(T+t)^{-\beta} \quad (18)$$

где $T > 0$, $\beta = \frac{q_1 - m_2}{3(m_2 - 1)} = \frac{q_2 - m_1}{3(m_1 - 1)}$, $\alpha_1 = \frac{1 - 2\beta}{m_2 - 1}$, $\alpha_2 = \frac{1 - 2\beta}{m_1 - 1}$ и $(\varphi(\xi), f(\xi))$

функции являются решением следующей задачи

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} \left(\varphi^{m_1-1} \frac{df}{d\xi} \right) + \beta \xi \frac{df}{d\xi} + \alpha_1 f + f^{m_2} = 0, \\ \frac{d}{d\xi} \left(f^{m_2-1} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) + \beta \xi \frac{d\varphi}{d\xi} + \alpha_2 \varphi + \varphi^{m_1} = 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} -\varphi^{m_1-1} \frac{df}{d\xi}(0) = f^{q_1}(0), \\ -f^{m_2-1} \frac{d\varphi}{d\xi}(0) = \varphi^{q_2}(0), \end{cases} \quad (20)$$

Рассмотрим следующие функции: $\tilde{f}(\xi) = (a - \xi^2)^{\frac{1}{m_2-1}}$, $\tilde{\varphi}(\xi) = (a - \xi^2)^{\frac{1}{m_1-1}}$, (21)

где $a > 0$, $c_1 = \left(\frac{\beta(m_2 - 1)}{2} \right)^{1/(m_1-1)}$, $c_2 = \left(\frac{\beta(m_1 - 1)}{2} \right)^{1/(m_2-1)}$ (19) система

уравнений при $\xi \rightarrow \sqrt{a}$ с компактным носителем имеет следующей асимптотику $f(\xi) \simeq c_1 \tilde{f}(\xi)(1 + o(1))$, $\varphi(\xi) \simeq c_2 \tilde{\varphi}(\xi)(1 + o(1))$. (22)

В §2.3 для задачи (15)-(17) разработаны разностные схемы и проведён вычислительный эксперимент. Для расчётов выбран шаг $h=0,05$, число узлов $N=2500$, а точность итераций равна $\varepsilon=10^{-3}$. Расчёты выполнены до $t=2$ с шагом $\tau=0,02$. Формулы (21) и (22) использовались в качестве начальных приближений для процесса итерации.

В третьей главе диссертации, озаглавленной «**Численное моделирование и вычислительные алгоритмы для системы кросс-диффузии с переменной плотностью в задачах тепло- и влагообмена**», проведён качественный анализ разработанной математической модели, учитывающей переменную плотность в процессе тепло- и влагообмена с кросс-диффузией, а также разработаны эффективные алгоритмы её численного решения.

В первом параграфе проводится анализ автомодельных решений задачи распространения тепла и влаги с кросс-диффузией, заданной при переменной плотности и нелинейных граничных условиях. Рассматривается система кросс-диффузии, заданная в области $Q = \{(x,t) \mid x \in \mathbb{R}_+, t > 0\}$ с нелинейными граничными условиями Неймана:

$$\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu^{m_1-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \rho(x) \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^{m_2-1} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x} \right), (x,t) \in Q; \quad (23)$$

$$-\nu^{m_1-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = u^{q_1}(0,t), -u^{m_2-1} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = v^{q_2}(0,t), t > 0; \quad (24)$$

$$u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), x \in \mathbb{R}_+, \quad (25)$$

где $\rho(x) = (1+|x|)^n$, $m_i \geq 1$, $p > 2$, $n, q_i > 0$.

На основе подходов, изложенных в теоремах 1-10 первой главы, для задачи (23)-(25) получены следующие результаты.

Пусть $q_i \leq 1$, $(i = 1, 2)$, тогда любое нетривиальное решение задач (23)-(25) является глобальным во времени.

Пусть $q_i > m_{3-i} + p - 1$ и $\min\{\alpha(n+1)q_i\} \geq 1, (i = 1, 2)$, тогда любое нетривиальное решение задачи (23)-(25) является глобальным во времени при достаточно малых начальных условиях.

Если $\min\{q_i, \lambda(n+1)q_i\} \geq 1, (i = 1, 2)$ условия выполнены, то любое решение задачи (23)-(25) будет неограниченным за конечное время при достаточно больших начальных условиях (blow-up).

Где

$$\lambda = \frac{(q_i - 1)(m_i - q_{3-i}) + (p - 2)(q_{3-i} - 1)}{(n + 1)[(p - 2)(q_{3-i} - 1) + (m_i - q_{3-i})(q_i - 1)] - (p - 1)(q_i - 1)(q_{3-i} - 1)} > 0.$$

Во втором параграфе проводится исследование асимптотического поведения автомодельных решений задачи (23)-(25). Для этого для системы (23) рассматриваются ограниченные автомодельные решения с компактным носителем следующего вида:

$$\underline{u}(x,t) = (T+t)^{-\alpha_1} \varphi(\xi), \underline{v}(x,t) = (T+t)^{-\alpha_2} \phi(\xi), \xi = (1+x)(T+t)^{-\beta}, \quad (26)$$

где $T > 0, (i = 1, 2)$

$$\beta = \frac{(q_i - 1)(q_{3-i} - 1) - (q_i - 1)(m_i - 1) - (q_{3-i} - 1)(p - 2)}{(q_i - 1)(q_{3-i} - 1)(p + n) - (q_i - 1)(m_i - 1)(1 + n) - (q_{3-i} - 1)(p - 2)(1 + n)},$$

$$\alpha_1 = \frac{1 - \beta(1 + n)}{q_1 - 1}, \alpha_2 = \frac{1 - \beta(1 + n)}{q_2 - 1}.$$

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} \left(\phi^{m_1-1} \left| \frac{d\phi}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\phi}{d\xi} \right) + \beta \xi^{n+1} \frac{d\phi}{d\xi} + \alpha_1 \xi^n \phi = 0, \\ \frac{d}{d\xi} \left(\phi^{m_2-1} \left| \frac{d\phi}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\phi}{d\xi} \right) + \beta \xi^{n+1} \frac{d\phi}{d\xi} + \alpha_2 \xi^n \phi = 0, \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \phi^{m_1-1} \left| \frac{d\phi}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\phi}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \phi^{q_1}(0), \\ \phi^{m_2-1} \left| \frac{d\phi}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\phi}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \phi^{q_2}(0), \end{cases} \quad (28)$$

Теперь рассмотрим следующие функции:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(\xi) = A_1 (a - \xi^\gamma)^{\gamma_1}, \\ \tilde{\phi}(\xi) = A_2 (a - \xi^\gamma)^{\gamma_2}, \end{cases} \quad (29)$$

где $\gamma = \frac{p+n}{p-1}$, $\gamma_i = \frac{(p-1)(p-1-m_i)}{(p-2)^2 - (m_i-1)(m_{3-i}-1)}$, $a > 0$, $c_i = \left(\frac{\gamma \beta \operatorname{sgn}(-\gamma_i)}{\frac{n+1}{\gamma} |\gamma_i|^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p-1}}$

$P > \max\{m_i, m_{3-i}\} + 1$, (27) система уравнений при $\xi \rightarrow a^{\frac{p-1}{p+n}}$ с компактным носителем имеет следующую асимптотику

$$\begin{cases} \varphi(\xi) \simeq c_1 \tilde{\varphi}(\xi) (1 + o(1)), \\ \phi(\xi) \simeq c_2 \tilde{\phi}(\xi) (1 + o(1)), \end{cases} \quad (30)$$

В третьем параграфе приведены численные решения задачи (23) - (25) и их результаты представлены в графическом виде.

В четвёртой главе диссертации, озаглавленной «**Многомерная математическая модель процесса тепло-влагообмена с кросс-диффузией при нелинейных граничных условиях**», представлен качественный анализ многомерных задач кросс-диффузии, а также разработаны эффективные алгоритмы их численного решения.

В §4.1 приведён автомодельный анализ многомерной модели процесса тепло-влагообмена с кросс-диффузией при нелинейных граничных условиях

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla (v^{m_1-1} \nabla u), \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla (u^{m_2-1} \nabla v), \quad x \in R_+^N, \quad t > 0, \quad (31)$$

$$-v^{m_1-1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(0, t) = u^{q_1}(0, t), -u^{m_2-1} \frac{\partial v}{\partial x_1}(0, t) = v^{q_2}(0, t), \quad x_1 = 0, \quad t > 0, \quad (32)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in R_+^N, \quad (33)$$

где $R_+^N = \{(x_1, x') \mid x' \in R^{N-1}, x_1 > 0\}$, $m_i > 1$, $q_i > 0 (i=1, 2)$, $u_0(x)$ и $v_0(x)$ -

неотрицательные непрерывные функции с компактным носителем в R_+^N .

На основе подходов, изложенных в теоремах 1-10 первой главы, для задачи (31)-(33) получены следующие результаты.

Если $q_1 \leq 1, q_2 \leq 1$, то любое решение задачи (31)-(33) считается глобальным.

Если $q_1 > \frac{m_2 + 1}{2}, q_2 > \frac{m_1 + 1}{2}$, то любое решение задачи (31)-(33) будет неограниченным при достаточно больших начальных условиях.

Если $q_1 > m_2 + \frac{1}{N}$ и $q_2 > m_1 + \frac{1}{N}$ и начальные условия выбраны достаточно малыми, то решение задачи (31)-(33) является глобально по времени.

В §4.2 исследуется асимптотическое поведение автомодельных решений системы кросс-диффузии, заданной с нелинейными граничными условиями. Определяется главный член асимптотики автомодельных решений.

Система (31) допускает автомодельные решения с компактным носителем следующего вида.

$$\underline{u}(x, t) = (T + t)^{-\alpha_1} f(\xi), \underline{v}(x, t) = (T + t)^{-\alpha_2} \varphi(\xi), \quad (34)$$

где $\xi = |\zeta|$, $\zeta_1 = (x_1 + h_1)(T + t)^{-\beta}$, $\zeta_i = x_i(T + t)^{-\beta}$, ($i = 2, \dots, N$), $T > 0$,

$$\beta = \frac{q_1 - m_2}{2q_1 - m_2 - 1} = \frac{q_2 - m_1}{2q_2 - m_1 - 1}, \alpha_1 = \frac{1}{2q_1 - m_2 - 1}, \alpha_2 = \frac{1}{2q_2 - m_1 - 1} \text{ и } (f(\xi), \varphi(\xi))$$

является решением следующих задачи:

$$\begin{cases} \xi^{N-1} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{1-N} \varphi^{m_1-1} \frac{df}{d\xi} \right) + \beta \xi \frac{df}{d\xi} + \alpha_1 f = 0, \\ \xi^{N-1} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{1-N} f^{m_2-1} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) + \beta \xi \frac{d\varphi}{d\xi} + \alpha_2 \varphi = 0, \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} -\varphi^{m_1-1} \frac{df}{d\xi}(0) = f^{q_1}(0), \\ -f^{m_2-1} \frac{d\varphi}{d\xi}(0) = \varphi^{q_2}(0), \end{cases} \quad (36)$$

рассмотрим следующие функции: $\tilde{f}(\xi) = (a - \xi^2)^{\frac{1}{m_2-1}}, \tilde{\varphi}(\xi) = (a - \xi^2)^{\frac{1}{m_1-1}}$, (37)

где $a > 0$, $c_1 = \left(\frac{\beta(m_2 - 1)}{2} \right)^{1/(m_1-1)}$, $c_2 = \left(\frac{\beta(m_1 - 1)}{2} \right)^{1/(m_2-1)}$, (35) система уравнений

при $\xi \rightarrow \sqrt{a}$ с компактным носителем имеет асимптотику:

$$f(\xi) = c_1 \tilde{f}(\xi)(1 + o(1)), \varphi(\xi) \simeq c_2 \tilde{\varphi}(\xi)(1 + o(1)). \quad (38)$$

Результаты численного моделирования многомерной задачи перекрестной диффузии с нелинейными граничными условиями, представленные в §4.3, показывают, что выбор подходящего начального

приближения является одной из главных проблем при решении нелинейных многомерных задач. В зависимости от параметров в качестве начальных приближений используются подходящие асимптотические выражения, обеспечивающие сходимость итерационного процесса.

Пятая глава диссертации, озаглавленная «**Разработка программного комплекса и численное моделирование кросс-диффузионных процессов в тепло- влагообмена**», посвящена качественному анализу и численному моделированию многомерных и многокомпонентных задач кросс-диффузии, а также описанию архитектуры и принципов функционирования разработанного в рамках диссертации программного комплекса.

В §5.1 приведён анализ многомерной и многокомпонентной задачи кросс-диффузии с переменной плотностью, заданной с нелинейными граничными условиями. Исследуются свойства решений следующей сложной системы уравнений

$$\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla(v^{m_1-1} \nabla(u)), \rho(x) \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla(u^{m_2-1} \nabla(v)), \quad x \in R_+, \quad t > 0, \quad (39)$$

$$-v^{m_1-1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = u^{q_1}(0, t), \quad -u^{m_2-1} \frac{\partial v}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = v^{q_1}(0, t), \quad t > 0, \quad (40)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in R_+, \quad (41)$$

где $R_+^N = \{(x_1, x') \mid x' \in R^{N-1}, x_1 > 0\}$, $\rho(x) = (1 + |x|)^n$, $m_i > 1$, $q_i > 0 (i=1,2)$, $u_0(x)$ и $v_0(x)$ - неотрицательные непрерывные функции с компактным носителем в R_+^N .

Исходя из подходов, изложенных в теоремах 1-10 первой главы, решение задачи (39)-(41) является глобальным и неограниченным. Получены результаты, описывающие условия решения.

В § 5.2 исследована асимптотика многомерной и многокомпонентной системы кросс-диффузии (39)-(41), заданной с нелинейными граничными условиями. Показано, что система (39) обладает автомодельными решениями с компактным носителем вида (34), а также имеет асимптотическое поведение конечных решений, аналогичное рассмотренному в § 4.2.

В §5.3 представлены алгоритмы численного решения и результаты, основанные на реальных параметрах, для процессов тепло-влагообмена с кросс-диффузией при производстве строительных материалов, а также рассмотрены следующие решения задачи:

Многомерную модель кросс-диффузии для тепло- и влагообмена запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(w) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda(w) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(w) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q, \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_w(T) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_w(T) \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_w(T) \frac{\partial w}{\partial z} \right) - S. \end{cases} \quad (46)$$

где $T(x, y, z, t)$ - температура, $w(x, y, z, t)$ - содержание влаги или концентрация влаги, ρ - плотность, c_p - теплоемкость, λ - коэффициент теплопроводности, D_w - коэффициент диффузии влаги, Q - источник тепла, S - поглощение влаги.

Начальные и граничные условия будут следующими:

$$T|_{t=0} = T^0, \quad w|_{t=0} = w^0. \quad (47)$$

$$-\lambda(w) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \xi \chi (T_{flame}^4 - T_0^4) + h_{conv} (T_{gas} - T), \quad (48)$$

$$-\lambda(w) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = h_{cool} (T - T_{air}), \quad (49)$$

$$-\lambda(w) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \xi \chi (T_{flame}^4 - T_0^4) + h_{conv} (T_{gas} - T), \quad (50)$$

$$-\lambda(w) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = h_{cool} (T - T_{air}), \quad (51)$$

$$-\lambda(w) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \xi \chi (T_{flame}^4 - T_0^4) + h_{conv} (T_{gas} - T), \quad (52)$$

$$-\lambda(w) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = h_{cool} (T - T_{air}), \quad (53) \quad -D_w(T) \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = \beta \left(w - w_{sat} e^{-\frac{E_a}{RT}} \right), \quad (54)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = 0, \quad (55) \quad -D_w(T) \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = \beta \left(w - w_{sat} e^{-\frac{E_a}{RT}} \right), \quad (56)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{y=L_y} = 0, \quad (57) \quad -D_w(T) \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = \beta \left(w - w_{sat} e^{-\frac{E_a}{RT}} \right), \quad (58)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = 0, \quad (59)$$

Ниже мы рассмотрим динамику изменений температуры и влажности клинкера различных размеров при $y=4$ см, $z=1,5$ см, $t=3600$ с, $T_{left}=200^\circ\text{C}$, $Q_v=1400$ Вт/м³.

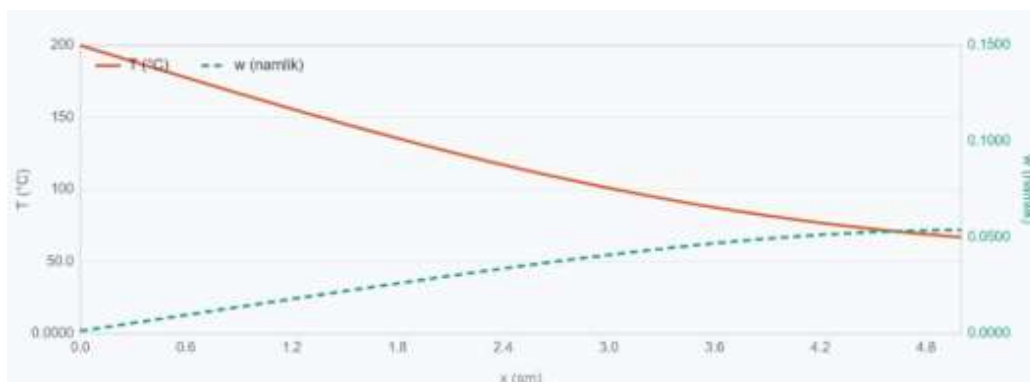


Рисунок 1. Динамика изменения температуры и влажности клинкера различного размера $L = 5$ см.

Ниже мы рассмотрим динамику изменений температуры и влажности клинкера в разные моменты времени при $y=4$ см, $z=1,5$ см $L=8$ см, $T_{\text{left}}=200^{\circ}\text{C}$, $Q_v=1400$ Вт/м³:

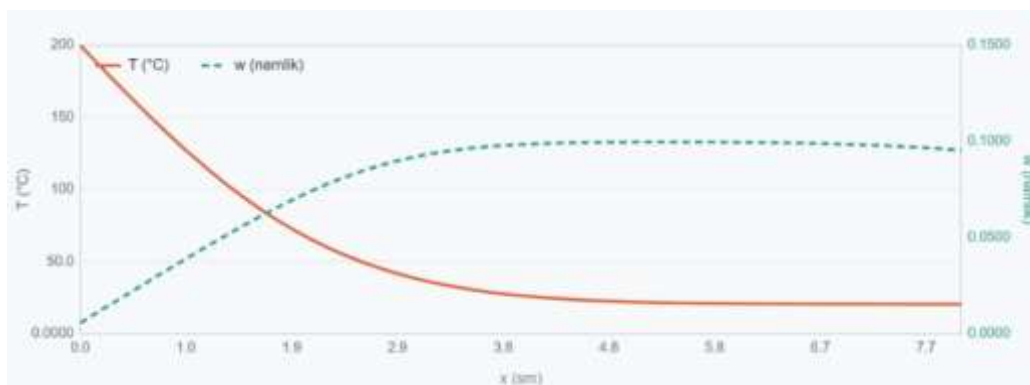


Рисунок 2. ($t=900$ с) Динамика изменений температуры и влажности клинкера в разные моменты времени

Как видно из рисунка 2, с течением времени температура клинкера повышается, а содержание влаги уменьшается.

Ниже мы рассмотрим динамику изменений температуры и влажности клинкера при различной мощности внутреннего источника тепла, когда $y=4$ см, $z=1,5$ см, $L = 8$ см, $t = 3600$ с, $T_{\text{left}} = 200^{\circ}\text{C}$:

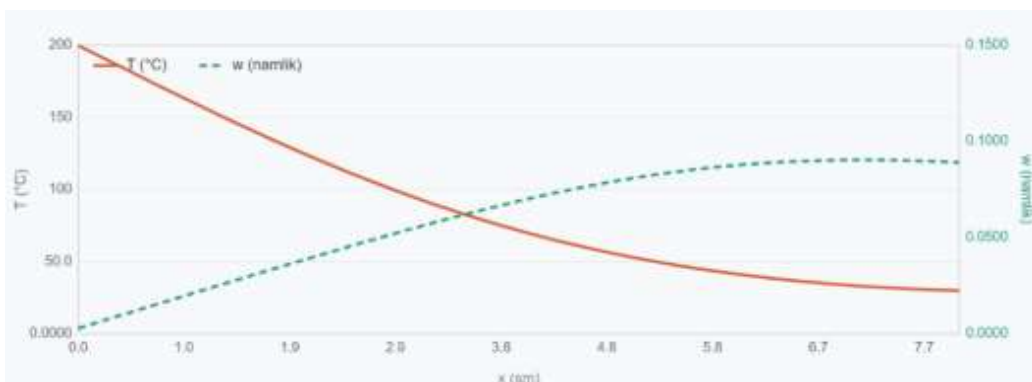


Рисунок 3. ($Q_v = 1400 \text{ Вт/м}^3$) Динамика изменения температуры и влажности клинкера при различной мощности внутреннего источника.

Как видно из рисунка 3, изменения температуры и влажности клинкера не претерпевают существенных изменений по мере увеличения внутренних мощностей источника.

Ниже мы рассмотрим динамику изменений температуры и влажности клинкера при различных значениях входной температуры, когда $y=4 \text{ см}$, $z=1,5 \text{ см}$, $L=8 \text{ см}$, $t=3600 \text{ с}$, $Q_v=300 \text{ Вт/м}^3$:

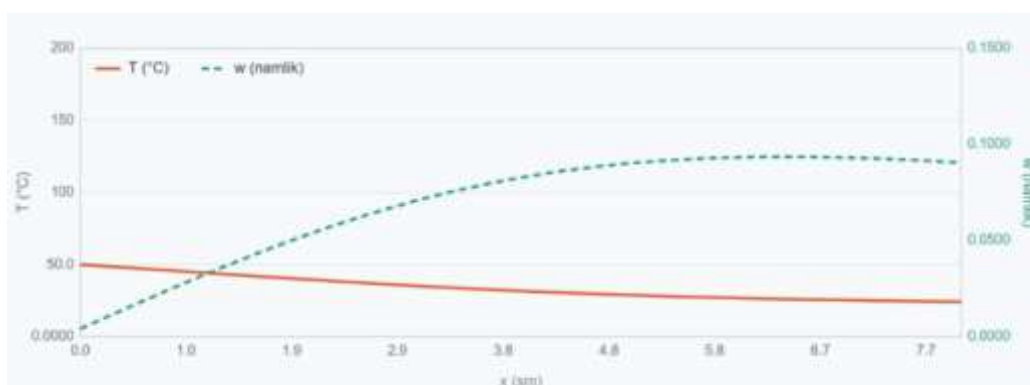


Рисунок 4. ($T_{\text{left}}=500\text{C}$) Динамика изменений температуры и влажности клинкера при различных температурах на входе.

Как видно из рисунка 4, с повышением температуры поступающего материала температура клинкера повышается, а содержание влаги уменьшается.

В параграфе 5.4 программный комплекс для численного моделирования процессов тепло-влагообмена в многокомпонентных средах с кросс-диффузией состоит из следующих основных организационных и функциональных блоков: основной блок управления; интерфейс для ввода исходных и параметрических данных; вычислительное ядро, реализующее вычислительные алгоритмы на основе математических моделей, содержащих члены перекрестной диффузии; и блок для визуализации результатов вычислений в виде графиков и анимации.

В целях обеспечения практического применения численных вычислительных алгоритмов, созданных для численного решения моделей нелинейной кросс-диффузии в нелинейных граничных условиях, а также проведения вычислительных экспериментов был создан специальный программный комплекс. Данный программный комплекс разработан в среде программирования Python, широко используемой в современных научных вычислениях, а графический интерфейс, обеспечивающий интерактивное взаимодействие с пользователем, спроектирован с использованием стандартной библиотеки Tkinter.

Рассмотрим следующие программные компоненты этого программного комплекса:

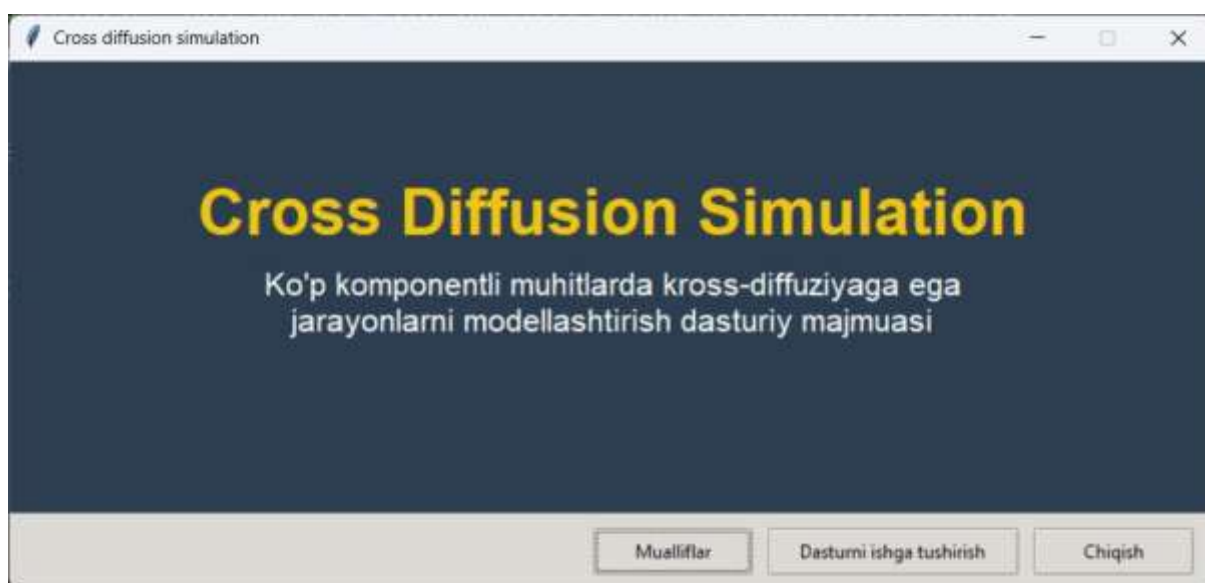


Рисунок 5. Главное окно программного пакета.

Программный пакет, разработанный на языке программирования Python и представленный в этом абзаце, состоит из следующих элементов: основного блока управления; блока ввода данных; вычислительного блока для проведения численного интегрирования и вычислительных экспериментов; блока интерпретации результатов численных вычислений в графической, анимированной форме (рис. 5). Это важно для эффективного управления и оптимизации процессов тепло- и влагообмена в строительных материалах, геофизических процессах, экологических системах и промышленных технологиях.

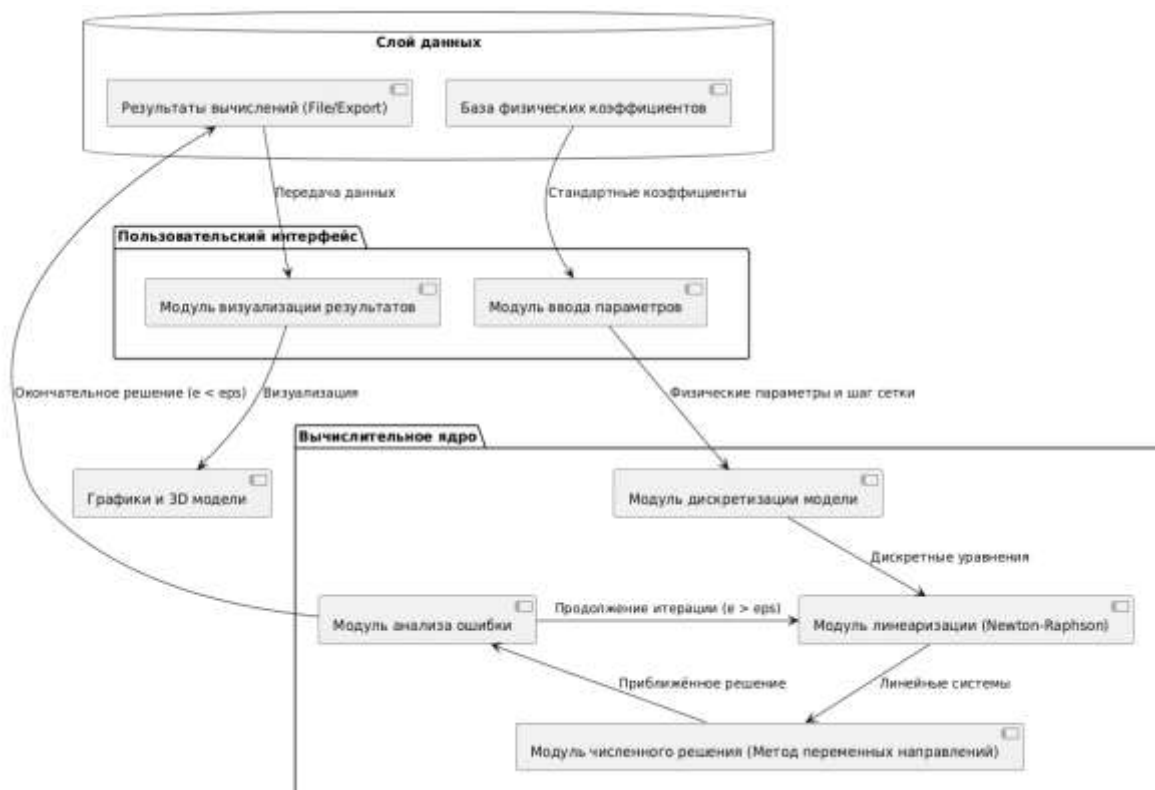


Рисунок 6. Архитектура программного комплекса

Вычислительное ядро составляет основную функциональную составляющую программного комплекса. В процессе вычислений для выполнения операций над многомерными массивами использовались модули библиотеки NumPy, а для решения систем трехдиагональных линейных уравнений - модули `scipy.linalg` и `scipy.sparse.linalg` пакета SciPy. Такая комбинация позволяет упорядочить прямое решение сложности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе исследований, проведенных в рамках диссертации «Исследование процессов перекрестной диффузии в многокомпонентных средах», были сделаны следующие выводы:

1. Разработана и теоретически обоснована математическая модель сопряжённого тепло- и влагопереноса в многокомпонентных пористых средах, учитывающая пространственно-временное изменение плотности среды и синергетические эффекты кросс-диффузии при нелинейных граничных условиях второго рода.

2. Выполнен качественный анализ сформулированных многомерных краевых задач, позволивший получить двусторонние аналитические оценки пространственно-временного распределения температурных и влажностных полей. Установленные оценки служат надёжной математической основой для определения безопасных технологических диапазонов обработки строительных материалов.

3. Определены и теоретически обоснованы критические параметрические границы существования глобального решения задач тепло- и влагопереноса. Это позволило разработать аналитический инструментарий для прогнозирования и предотвращения критических режимов, возникающих в процессе интенсивной термической обработки и приводящих к перегреву, образованию микротрещин и структурным повреждениям материала.

4. Построены автомодельные решения с компактным носителем и определены главные члены их асимптотических разложений. Теоретически доказан и подтверждён результатами вычислительных экспериментов эффект распространения тепловых и влаговых возмущений с конечной скоростью. Полученные результаты имеют непосредственное инженерное значение для оценки глубины прогрева и высушивания толстостенных конструкций.

5. Решена вычислительная проблема выбора оптимального начального приближения при интегрировании систем уравнений сильной нелинейной диффузии. На основе аналитических асимптотик полученных автомодельных решений предложена методика синтеза адаптивных начальных приближений, обеспечивающих высокую точность вычислений.

6. Разработаны, программно реализованы и верифицированы эффективные вычислительные алгоритмы, основанные на консервативных неявных конечно-разностных схемах и методе контрольного объёма (Control Volume Method). Доказана их способность с точностью второго порядка аппроксимации корректно воспроизводить сингулярности, возникающие в режимах медленной диффузии, с учётом многомерных пространственных источников тепла и влаги.

7. Разработан модифицированный итерационный вычислительный алгоритм, основанный на сочетании метода матричной прогонки и адаптивного асимптотического предиктора. Доказано, что предложенный

подход обеспечивает многократное повышение скорости сходимости и сохраняет абсолютную вычислительную устойчивость даже при наличии сильных нелинейностей.

8. Разработан проблемно-ориентированный программный комплекс для анализа и прогнозирования процессов тепло- и влагопереноса с кросс-диффузией в многокомпонентных пористых средах. Программный комплекс обеспечивает предиктивное многомерное моделирование, 2D/3D-визуализацию динамики полей, а также оптимизацию технологических режимов производства строительных материалов и изделий.

9. Проведены параметрические вычислительные эксперименты с использованием реальных физико-механических характеристик строительных материалов. В результате выявлены новые технологические закономерности, в частности установлено, что различие масштабов кросс-диффузии приводит к существенной асимметрии проникновения фронтов тепла и влаги, что имеет важное значение при проектировании режимов гидратации и сушки.

10. Разработанные математические модели и программное обеспечение внедрены на ряде промышленных предприятий Самаркандской области. В результате достигнуто снижение удельных энергозатрат, рационализация расхода химических добавок и сырья, а также существенное сокращение доли бракованной продукции. Проведённые независимые испытания экспериментально подтвердили высокую вычислительную эффективность, программную надёжность и оперативность предложенных решений при решении прикладных инженерно-технических задач.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.09/2025.27.12.T.02.01.M AT RESEARCH INSTITUTE FOR
DEVELOPMENT OF DIGITAL TECHNOLOGIES AND ARTIFICIAL
INTELLIGENCE**

**DIGITAL TECHNOLOGIES AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE
RESEARCH INSTITUTE**

URUNBAEV JASUR ERKINOVICH

**STUDY OF CROSS-DIFFUSION PROCESSES IN MULTICOMPONENT
MEDIA**

05.01.07 – Mathematical modeling. Numerical methods and software complexes

**DISSERTATION ABSTRACT OF THE DOCTOR (DSc) ON TECHNICAL
SCIENCES**

Tashkent - 2026

The dissertation topic of the Doctor of Science (DSc) in Technical Sciences is registered in the Higher Attestation Commission under the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under the number B2024.4.DSc/T848.

The dissertation has been prepared at the Research Institute for Development of Digital Technologies and Artificial Intelligence.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website www.airi.uz and website "Ziyonet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific adviser:

Rakhmonov Zafar Ravshanovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Official opponents:

Aripov Mersaid Mirsiddikovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Xujayev Ismatulla Kushayevich

Doctor of Technical Sciences, Professor

Eshmatov Baxtiyor Xasanovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Dosent

Leading organization:

**Tashkent University of Information Technologies
named after Muhammad al-Khwarizmi**

The defense will take place on "07" July 2026 at 15⁰⁰ the meeting of Scientific council No. DSc.09/2025.27.12.T.02.01.M at the Research Institute for the Development of Digital Technologies and Artificial Intelligence. (Address: 100125, Tashkent city, M. Ulugbek district, Buz-2, 17A. Tel.: (+99871) 263-41-98; e-mail: info@airi.uz).

The dissertation can be reviewed at the Information Resource Center of the Research Institute for Development of Digital Technologies and Artificial Intelligence (is registered under No. 82). (Address: 100125, Tashkent city, M. Ulugbek district, Buz-2, 17A. Tel.: (+99871) 263-41-98; e-mail: info@airi.uz).

Abstract of dissertation sent out on "24" June 2026 y.
(mailing report No. 17 on "15" June 2026 y.)



N. Ravshanov
Chairman of the scientific council awarding scientific degrees,
Doctor of Technical Sciences, Professor

F.M. Nuraliev
Scientific secretary of the scientific council awarding scientific degrees,
Doctor of Technical Sciences, Professor

E.Sh. Nazirova
Chairman of the academic seminar under the scientific
council awarding scientific degrees,
Doctor of Technical Sciences, Professor

INTRODUCTION (Abstract of (DSc) thesis)

The aim of the research is to develop nonlinear mathematical models, computational algorithms, and problem-oriented software for the analysis and prediction of heat and moisture transfer processes with cross-diffusion in multicomponent porous media.

The object of the research is processes with cross-diffusion, expressed by a system of parabolic equations with nonlinear boundary conditions.

The scientific novelty of the research is as follows:

a mathematical model of the coupled heat and moisture transfer in multicomponent media was developed, taking into account cross-diffusion effects using nonlinear boundary conditions;

a modified iterative method was developed, based on the use of analytical asymptotic expansions as an adaptive initial approximation for the numerical solution of systems of double nonlinear diffusion equations;

critical exponents for the global solution of heat and moisture transfer problems were determined;

two-way analytical estimates of the spatiotemporal changes in heat and moisture fields for systems with variable density were obtained;

efficient computational algorithms based on the method of conservative implicit difference schemes were developed;

Implementation of the research results.

Using the results of scientific research and the developed software in industrial practice, mathematical models based on the system of cross-diffusion equations were used to describe heat and moisture exchange in cement paste (Reference of the Ministry of Digital Technologies of the Republic of Uzbekistan dated October 22, 2025 No. 34-8/7652). As a result, the developed mathematical model based on the system of cross-diffusion equations and its numerical solution algorithms made it possible to reliably describe the real physical processes of heat and moisture exchange in cement paste;

Using the results of scientific research at the U-Z Bunyodkor Groups Limited Liability Company, the cross-diffusion phenomena occurring between the quantitative additives of raw materials, their concentration and chemical reaction processes in the production of aerated concrete (aerated silicate) blocks used in construction were described using mathematical models using a model based on the developed system of cross-diffusion heat and moisture process equations (Reference No. 34-8/7652 of the Ministry of Digital Technologies of the Republic of Uzbekistan dated October 22, 2025). As a result, it was achieved to reduce energy and raw material consumption in the production process, and to reduce the share of defective products;

A software package created on the basis of numerical algorithms of asymptotic formulas for initial approximation, which allows for the successful application of the developed mathematical models, was tested at the Samarkand branch of the IT Park Samarkand in the Samarkand region, using the results of scientific research. Effective numerical solution algorithms for mathematical models created on the

basis of scientific research results were tested (Reference No. 34-8/7652 of the Ministry of Digital Technologies of the Republic of Uzbekistan dated October 22, 2025). As a result, the high efficiency of the developed mathematical models, asymptotic formulas and software tools in solving industrial and scientific and practical problems was substantiated through experimental tests.

The structure and scope of the dissertation. The volume of the dissertation is 200 pages and consists of an introduction, five chapters, a conclusion, a list of references and appendices.

E'LON QILINGANISHLAR RO'YXATI

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Mukhamadiyev A., Urunbaev J., Bobokandov M., Rakhmonov Z., Khujakulov T. A Self-Similar Analysis of the Solutions to the Cross-Diffusion System // Mathematics. – 2026. – Vol. 14, No. 83. – Pp. 1-13. – DOI: 10.3390/math14010083. (№3; Scopus, IF=0.5 (Q1))
2. Rakhmonov Z., Urunbaev E., Urunbaev J., Joniev A. On a problem of multidimensional cross-diffusion with nonlinear boundary conditions // International Journal of Applied Mathematics. – 2025. – Vol. 38, No.1s. – Pp. 987-996. – DOI: 10.12732/ijam.v38i1s.57 (№3; Scopus, IF=0.3 (Q2))
3. Rakhmonov Z., Urunbaev J., and Alimov A. Properties of solutions of a system of nonlinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions // AIP Conference Proceedings. – 2022. – Vol. 2637, No.1. – Pp. 040008-1-040008-12. – DOI:10.1063/5.0119747 (№3; Scopus, IF=0.152)
4. Urunbayev J. E. On the properties of solutions of a cross-diffusion system with nonlinear boundary flux // Electronic journal of actual problems of modern science, education and training. – 2023. – № 4. – Pp. 73 – 82. (05.00.00;№26)
5. Урунбаев Ж.Э. Об одной задаче кросс - диффузии с источником и нелокальными граничными условиями // Узбекский журнал Проблемы информатики и энергетики. – 2023. – № 5. – С. 39-45. (05.00.00;№5)
6. Рахмонов З.Р., Урунбаев Ж.Э. Об одной задаче кросс-диффузии с источником и нелокальными граничными условиями // Проблемы вычислительной и прикладной математики.– 2023.– №6(53).– С.104-113. (05.00.00; №23).
7. Рахмонов З.Р., Урунбаев Ж.Э. Численное решение задачи кросс диффузии с нелинейными граничными условиями и источником// Проблемы вычислительной и прикладной математики.– 2024.– №3(57).– С.114-121. (05.00.00; №23).
8. Урунбаев, Ж. (2024). Численное решение задачи кросс диффузии с нелокальными граничными условиями и с источником // Международный журнал Теоретических и прикладных вопросов цифровых технологий. – 2024. – №7(1). – С. 102-106. – DOI:10.62132/ijdt.v7i1.170. (05.00.00; ОАК Rayosatining 29.08.2023 yildagi №342/5–son qarori).
9. Rakhmonov Z., Alimov A., Urunbaev J. On the behavior of solutions for a system of multidimensional diffusion equations with nonlinear boundary

- conditions // AIP Conference Proceedings. – 2024. – Vol. 3085, No.1. – Pp. 020032-1-020032-8. –DOI:10.1063/5.0194896. (№3; Scopus, IF=0.152)
10. Rakhmonov Z., Urunbaev J. Numerical solution of the multidimensional cross-diffusion problem with nonlinear boundary conditions // Topical issues of technical sciences. – 2025. – №10 (3). – Pp. 22-28. (05.00.00; OAK Rayosatining 08.05.2025 yildagi №370–son qarori)
 11. Rakhmonov Z., Urunbaev J., Joniev J. Analysis of a density-dependent multidimensional cross-diffusion model with nonlinear boundary conditions // Innovative: International Multi-disciplinary Journal of Applied Technology. – 2025. – Vol. 03, No.10. – Pp.128-132. (05.00.00; OAK Rayosatining 06.03.2025 yildagi №368/4–son qarori)
 12. Рахмонов З.Р., Урунбаев Ж.Э., Численное моделирование системы кросс-диффузии с нелинейными граничными условиями и плотностными // Техника fanlarining dolzarb masalalari. – 2025. – №11(3). – С. 4-15. (05.00.00; OAK Rayosatining 08.05.2025 yildagi №370–son qarori)
 13. Urunbaev J.E. Numerical solutions of multidimensional cross-diffusion problems with nonlinear boundary conditions and variable density // International journal of Theoretical and applied issues of digital technologies. – 2025. – №8(4). – Pp.123 – 128. – DOI: 10.62132/ijdt.v8i4.312. (05.00.00; OAK Rayosatining 29.08.2023 yildagi №342/5–son qarori).

II бўлим (2 часть; part 2)

- 14.Рахмонов З.Р., Урунбаев Ж.Э. О свойствах решений кросс-диффузионной системы с нелинейным граничным потоком, “SciTech 2022: II Международный научно-практический форум по передовым достижениям в науке и технике” Барнаул, Алтайский край, Россия, 10-11 марта 2022 с.
- 15.Урунбаев Ж.Э. Численное решение задачи кросс диффузии с нелокальными граничными условиями // Universum: технические науки : электрон. научн. журн. 2022. 10(103). doi - Universum: технические науки : электрон. научн. журн. 2022. 10(103). с.37-44
- 16.Alimov A., Urunbaev J.On the behaviors of solutions of a nonlinear diffusion system with a source and nonlinear boundary conditions «Actual Problems of Mathematical Modeling and Information Technology», Nukus 2-3 may 2023, pp.17-19
- 17.Рахмонов З.Р., Урунбаев Ж.Э. Асимптотика автомодельных решений нелинейной системы кросс диффузии с источником “Актуальные проблемы математического моделирования, алгоритмизации и программирования”, Ташкент, 14-15 сентября 2023, с.151-152.
- 18.Rakhmonov Z., Urunbaev J. On the asymptotics of solutions to the problem cross-diffusion with variable density and source “8th International

- Conference “Actual Problems of Applied Mathematics and Information Technologies” – AL-KHWARIZMI, Samarkand 25-26 september 2023, pp-87.
- 19.Рахмонов З.Р., Урунбаев Ж.Э. Об одной задачи кросс диффузии с нелинейными граничными условиями, Сборник трудов международного семинара «Вычислительные модели и технологии», Ташкент 27 апреля 2024, с.111
 - 20.Рахмонов З.Р., Урунбаев Ж.Э. Об одной задачи кросс диффузии с источником и нелокальными граничными условиями, Сборник материалов республиканской научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, математического моделирования и информатики» Нукус 24-25 май, 2024, с.241-243.
 - 21.Рахмонов З.Р.,Урунбаев Ж.Э. Численное решение задачи кросс диффузии с нелинейными граничными условиями и источником, Республиканской научно-практической конференции на тему “Современные проблемы и перспективы прикладной математики” Карши, 24-25 мая 2024, с.48.
 - 22.Rakhmonov Z., Urunbaev J. Critical curve of the cross-diffusion system coupled via nonlinear boundary flux // Actual Problem of Applied Mathematics and Information Technologies Al-Khwarizmi, 2024, Tashkent September 25-26, 2024, pp.97.
 - 23.Rakhmonov Z., Urunbaev J. Asymptotics of automodel solutions of a nonlinear cross-diffusion system with sources Abstracts book of the International Conference ”Computational and Information Technologies in Science, Engineering and Education“ (CITech-2024) dedicated to the 90th anniversary of Al-Farabi KazNU and the 75th anniversary of academician Sh. S. Smagulov, Алматы, Казахстан 23–24 октября 2024, с.40.
 - 24.Rakhmonov Z.R., Urunbayev J.E. Numerical solution of the multidimensional cross - diffusion problem with nonlocal boundary conditions “Scientific and technological progress as a mechanism for the development of modern society” Novosibirsk, Russia. June 19, 2025, pp.13-15
 - 25.Рахмонов З.Р., Урунбаев Ж.Э., Салахиддинов М.С. Численное моделирование системы кросс-диффузии с нелинейными граничными условиями и плотностными, Международная научная и научно-техническая конференция «Роль и перспективы моделирования в процессах цифровой трансформации» Наманган 4-5 декабр , 2025, с.184-186.
 26. Rakhmonov Z. R., Khusanov S.B., Urunbayev J.E. On the properties of solutions of a nonlinear filtration problem with a source, “International scientific and practical conference System analysis and modeling in economy and international relations” Tashkent, 15 January , 2026, pp.185.
 - 27.Raxmonov Z.R., Urunbayev J.E. Kross-diffuziyaga ega jarayonlarni tadqiq edtish uchun dasturiy majmua // O‘zR Adliya vazirligi, O‘zR Dasturiy

mahsulotlar davlat reyestrda 19.06.2025-yilda ro'yxatdan o'tgan
Guvohnoma. № DGU 52792.

28.Urunbayev J.E. CrossDiffSim // O'zR Adliya vazirligi, O'zR Dasturiy
mahsulotlar davlat reyestrda 09.12.2025-yilda ro'yxatdan o'tgan
Guvohnoma. № DGU 57314.

Avtoreferat “ Hisoblash va amaliy matematika muammolari” O‘zbekiston ilmiy jurnali tahririyatida tahrirdan o‘tkazildi hamda o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlarini mosligi tekshirildi.