O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/2025.27.12.FM.01.05 RAQAMLI ILMIY KENGASH ASOSIDA TUZILGAN BIR MARTALIK ILMIY KENGASH

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

SHAMSHIYEV FAZLIDDIN TULAYEVICH

STATSIONAR GRAVITATSION SISTEMALARDA HARAKAT LOKAL INTEGRALLARINI TADQIQ ETISH VA ULARNING YULDUZLAR DINAMIKASI HAMDA ASTROFIZIKA MASALALARIDA TADBIQI

01.03.01 – Astronomiya
01.03.02 – Kosmos fizikasi va astrofizika

Fizika-matematika fanlari doktori (DSc) dissertatsiyasi AVTOREFERATI

Toshkent-2026

UO‘K: 524.3/4-32

Fizika-matematika fanlari doktori (DSc) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора (DSc) физико-математических наук

Content of dissertation abstract of Doctor of Science (DSc) on Physical and Mathematical sciences

Shamshiyev Fazliddin Tulayevich
Statsionar gravitatsion sistemalarda harakat lokal integrallarini tadqiq etish va ularning yulduzlar dinamikasi hamda astrofizika masalalarida tadbiqi…… 3

Шамшиев Фазлиддин Тулаевич
Исследование локальных интегралов движения в стационарных гравитационных системах и их применение в задачах звёздной динамики и астрофизики……. 25

Shamshiev Fazliddin Tulayevich
Investigation of local integrals of motion in stationary gravitational systems and their applications in stellar dynamics and astrophysical problems …… 49

E’lon qilingan ishlar ro‘yxati
Список опубликованных работ
List of published work ……. 56

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/2025.27.12.FM.01.05 RAQAMLI ILMIY KENGASH ASOSIDA TUZILGAN BIR MARTALIK ILMIY KENGASH

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

SHAMSHIYEV FAZLIDDIN TULAYEVICH

STATSIONAR GRAVITATSION SISTEMALARDA HARAKAT LOKAL INTEGRALLARINI TADQIQ ETISH VA ULARNING YULDUZLAR DINAMIKASI HAMDA ASTROFIZIKA MASALALARIDA TADBIQI

01.03.01 – Astronomiya
01.03.02 – Kosmos fizikasi va astrofizika

Fizika-matematika fanlari doktori (DSc) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

Toshkent-2026

Fizika-matematika fanlari doktori (DSc) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2026.2.DSc/FM325 raqami bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya Mizo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengashning veb-sahifasida (www.nuu.uz) va «Ziyonet» Axborot-ta’lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy maslahatchi:	**Nuritdinov Salaxutdin Nasritdinovich,** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Kasimov Shakirbay Gapparovich,** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Titov Vladimir Borisovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Tadjibayev Ikram Uralbayevich, fizika-matematika fanlari doktori, professor
Yetakachi tashkilot:	**L.N. Gumilyov nomidagi Yevrosiyo milliy universiteti, Qozog‘iston Respublikasi**

Dissertatsiya himoyasi O‘zbekiston Milliy universiteti huzuridagi DSc.03/2025.27.12.FM.01.05 raqamli ilmiy kengashning 2026- yil “__.__.” _____ soat _____ dagi majlisida bo‘lib o‘tadi. (Manzil: 100174, Toshkent shahri, Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy, Tel.: (+99871) 227-12-24; faks (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan O‘zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (_____ raqami bilan ro‘yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent shahri, Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy, Tel.: (+99871) 246-02-24).

Dissertatsiya avtoreferati 2026-yil «____» _____ kuni tarqatildi
(2026-yil “____” _____ dagi ____ raqamli reestr bayonnomasi).

K.T. Mirtadjiyeva
Ilmiy darajalar beruvchi
bir martalik Ilmiy kengash raisi,
fizika - matematika fanlari doktori, professor

F.O‘. Botirov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash ilmiy kotibi,
fizika - matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

T.A. Axunov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi,
fizika - matematika fanlari doktori, professor

KIRISH (fan doktori (DSc) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahonda gravitatsion tizimlar evolyutsiyasini tavsiflovchi differensial tenglamalar sistemasining analitik va sifat yechimlarini aniqlash, harakat tenglamalarining integrallanuvchanlik shartlari hamda qo‘shimcha harakat integrallarining mavjudlik shartlarini tadqiq etish, shuningdek, gravitatsion tizimlarning orbital tuzilishi va dinamik xususiyatlarini o‘rganish nazariy mexanika, osmon mexanikasi, yulduzlar dinamikasi va galaktik astrofizikaning muhim fundamental masalalaridan hisoblanadi. Harakat integrallari dinamik tizimlarning fazaviy fazosi tuzilishini, muntazam va xaotik orbitalarning mavjudlik shartlarini, shuningdek gravitatsion tizimlarning uzoq muddatli evolyutsiyasini aniqlovchi asosiy omillardan hisoblanadi. Mazkur muammoning dolzarbligi Xalqaro Astronomiya Ittifoqi (IAU)[1] tomonidan belgilangan galaktikalar dinamikasi, qorong‘u moddaning tabiati, ko‘p komponentli gravitatsion tizimlar evolyutsiyasi va murakkab astrofizik tizimlarni modellashtirish kabi ustuvor ilmiy yo‘nalishlarda ham namoyon bo‘ladi. Shu jihatdan, gravitatsion tizimlarda harakat integrallarining mavjudlik shartlari, integrallanuvchanlik mezonlari hamda orbital va dinamik xususiyatlarini o‘rganish muhim ahamiyat kasb etadi.

Jahonda mazkur yo‘nalishdagi tadqiqotlarga, jumladan, galaktikalar, yulduz to‘dalari, akkretsion va protoplanetar disklar hamda qorong‘u modda galolarining dinamik tuzilishi, orbital harakati va integrallanuvchanlik xususiyatlarini tadqiq etishga alohida e’tibor qaratilmoqda. Yuqori aniqlikdagi astronomik kuzatuvlar va sonli modellashtirish usullarining rivojlanishi fazoviy birjinsli bo‘lmagan, aylanuvchi, anizotrop va simmetriyasi buzilgan gravitatsion tizimlarning dinamik xususiyatlarini chuqur o‘rganish imkonini bermoqda. Bunday tizimlarda global harakat integrallarining mavjud bo‘lmasligi lokal integrallarni aniqlash va fazaviy fazoning invariant sohalarini tadqiq etishning yangi usullarini talab qiladi. Shu bilan birga, statsionar va aylanuvchi gravitatsion maydonlarda lokal integrallarning mavjudlik shartlari, ularni analitik qurish usullari, integrallanuvchi potensiallar sinflari hamda uch o‘lchovli tizimlarda integrallanuvchanlik mezonlari yetarli darajada o‘rganilmagan. Shu sababli harakat lokal integrallarini qurish usullarini ishlab chiqish, ularning mavjudlik shartlarini aniqlash hamda integrallanuvchi gravitatsion maydonlarning orbital va dinamik xususiyatlarini o‘rganishga qaratilgan tadqiqotlar dolzarb ahamiyatga ega.

Respublikamizda hozirda matematika, nazariy fizika va astrofizika sohalarida fundamental tadqiqotlarni rivojlantirish, murakkab fizik jarayonlarni matematik modellashtirish, gravitatsion tizimlar dinamikasi va kosmik obyektlarning fizik xususiyatlarini chuqur tadqiq etishga alohida e’tibor qaratilmoqda. Mazkur yo‘nalishlarda analitik va sonli usullar asosida yulduzlar tizimlari, galaktikalar va boshqa gravitatsion obyektlarning dinamik xususiyatlari, orbital tuzilishi hamda fazaviy fazo xossalarini o‘rganish muhim ilmiy vazifalardan hisoblanadi. Shu jihatdan, statsionar gravitatsion tizimlarda harakat lokal integrallarining mavjudlik shartlarini

[1] IAU Strategic Plan 2020-2030. https://www.iau.org/static/administration/about/strategic_plan/strategicplan-2020-2030.pdf

aniqlash, integrallanuvchi potensiallar sinflarini qurish va olingan natijalarni galaktikalar hamda qorong‘u modda galolari dinamikasini tadqiq etishga tatbiq etishga qaratilgan mazkur dissertatsiya tadqiqoti ushbu ustuvor yo‘nalishlarda olib borilgan izlanishlar natijalarini o‘z ichiga olgan.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 30-avgustdagi PF-5806-sonli “O‘zbekiston Respublikasida kosmik faoliyatni rivojlantirish to‘g‘risida”gi farmonida mamlakatimizda kosmik tadqiqotlar va texnologiyalarni rivojlantirish muhimligi belgilab berilgan bo‘lib, bunga ma’lum darajada ushbu dissertatsiyada keltirilgan ayrim izlanishlar ham xizmat qiladi. Shuningdek, 2025-yil 13-yanvarda imzolangan O‘zbekiston Respublikasi Qonuni [2] №O‘RQ-1017 da kosmik faoliyatni amalga oshirishning asosiy maqsadlaridan biri sifatida “Yer, kosmik fazo va osmon jismlarini tadqiq etish, shuningdek ular haqidagi ilmiy bilimlarni to‘plash va rivojlantirish” ga qaratilgan vazifalarni amalga oshirishga ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning Respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi. Mazkur tadqiqot O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022-yil 28-yanvardagi PF–60-son «2022–2026-yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida» [3] gi Farmonida, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2021-yil 19-martdagi PQ–5032-son «Fizika sohasida ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida»gi Qarorida, O‘zbekiston Respublikasining 2025-yil 13-yanvardagi O‘RQ–1017-son «Kosmik faoliyat to‘g‘risida»gi Qonunida hamda mazkur sohaga oid boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishga xizmat qiladi hamda Respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining matematika, nazariy fizika, astrofizika va kosmik tadqiqotlar sohasidagi ustuvor yo‘nalishlarga mos keladi.

Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi. Harakat integrallari, dinamik tizimlarning integrallanuvchanligi, yulduzlar dinamikasi hamda galaktikalarning orbital tuzilishini tadqiq etishga qaratilgan ilmiy izlanishlar dunyoning yetakchi ilmiy markazlari va universitetlarida, jumladan, Rossiyaning yetakchi astronomik va ilmiy markazlari, Princeton University, Institute for Advanced Study, University of Michigan, University of Arizona, University of California (AQSH), Max Planck Institute for Astrophysics va Max Planck Institute for Astronomy (Germaniya), University of Cambridge va University of Oxford (Buyuk Britaniya), Leiden Observatory (Niderlandiya), Observatoire de Paris (Fransiya), Kavli Institute for Astronomy and Astrophysics hamda National Astronomical Observatories of China (Xitoy), University of Tokyo va Kyoto University (Yaponiya)da olib borilmoqda.

Mazkur ilmiy markazlarda gravitatsion tizimlarning integrallanuvchanlik xossalarini aniqlash, qo‘shimcha harakat integrallarining mavjudlik shartlarini tadqiq etish, muntazam va xaotik orbitalarni o‘rganish, fazaviy fazoning invariant strukturalarini aniqlash, galaktikalarning orbital tuzilishini tahlil qilish hamda galaktikalar va qorong‘u modda galolari uchun dinamik modellarni ishlab chiqish

[2] O‘zbekiston Respublikasining Qonuni «Kosmik faoliyat to‘g‘risida», 13.01.2025 yildagi O‘RQ-1017-son

[3] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022-yil 28-yanvardagi PF-60-sonli “2022-2026-yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi Farmoni.

bo‘yicha fundamental tadqiqotlar amalga oshirilmoqda. Xususan, Stäckel tipidagi ajraluvchi gravitatsion potensiallarda harakat tenglamalarini ajratish va uchta saqlanuvchi integralni analitik ko‘rinishda qurish imkoniyati asoslangan; bunday potensiallar uch o‘lchovli yulduzlar tizimlarining orbital tuzilishini analitik o‘rganish va galaktikalar uchun o‘z-o‘ziga mos dinamik modellarni qurishda qo‘llanilgan. Shuningdek, umumiy o‘q-simmetrik potensiallarda uchinchi integralning mavjudligi, uning aniq yoki taqribiy ko‘rinishlarini aniqlash hamda Stäckel potensiallariga yaqinlashish asosida harakat invariantlarini hisoblash usullari ishlab chiqilgan.

Galaktikalar dinamikasida uchinchi harakat integralini aniqlash masalasi alohida ahamiyat kasb etib, ikki integralga asoslangan modellar real galaktik disklarning tezlik dispersiyalaridagi anizotropiyani to‘liq tavsiflash uchun yetarli emasligi ko‘rsatilgan. Shu sababli uchinchi integralga ega bo‘lgan analitik va taqribiy modellar, xususan, Stäckel potensiallariga asoslangan uch-integralli modellar ishlab chiqilgan hamda ularning yordamida galaktik disklarning dinamik va orbital xususiyatlarini tavsiflash imkoniyatlari tadqiq etilgan. Shu bilan birga, zamonaviy galaktik dinamika tadqiqotlarida ajraluvchi potensiallar, harakat integrallari, action-o‘zgaruvchilar va rezonans orbitalarni aniqlash usullaridan foydalanish orqali o‘q-simmetrik va triaxial potensiallarda yulduzlar orbitalarini modellashtirish bo‘yicha izlanishlar davom ettirilmoqda.

Dunyoda statsionar va aylanuvchi gravitatsion tizimlarda harakat lokal integrallarining mavjudlik shartlarini aniqlash, ularni analitik qurish, lokal integrallanuvchi potensiallar sinflarini tavsiflash, ikki va uch o‘lchovli dinamik tizimlarda lokal integrallanuvchanlikning zarur va yetarli shartlarini aniqlash, aylanuvchi tizimlarda lokal integrallarning xususiyatlarini tadqiq etish, shuningdek, harakat lokal integrallarini yulduzlar dinamikasi, galaktikalar va qorong‘u modda galolari modellariga tatbiq etish bo‘yicha tadqiqotlar olib borilmoqda.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Hozirda harakat tenglamalarining integrallanuvchanligi, qo‘shimcha harakat integrallarining mavjudligi hamda gravitatsion tizimlarning orbital tuzilishini tadqiq etish masalalari bo‘yicha fundamental tadqiqotlar olib borilmoqda. Jumladan, G.G. Kuzmin tomonidan yulduzlar dinamikasi va galaktikalarning gravitatsion maydonlarida kvadratik harakat integrallariga ega potensiallar nazariyasining asoslari ishlab chiqilgan, K.F. Ogorodnikov, G.N. Duboshin, M.F. Subbotin, T.A. Agekyan, G.M. Idlis, V.A. Antonov, S.A. Kutuzov, A.S. Rastorguev, L.P. Osipkov, A.A. V’yuga, V.B. Titov, N.P. Pit’ev, V.V. Orlov, I.V. Petrovskaya, A.V. Loktin, V.A. Marsakov, A.A. Mylläri, N.Ya. Sotnikova, Yu.N. Gnedin, I.I. Nikiforov va boshqalar tomonidan yulduz tizimlari dinamikasi, uchinchi integral muammosi, fazaviy fazoning tuzilishi hamda galaktikalarning orbital xossalariga oid tadqiqotlar rivojlantirilgan. Xorijiy olimlardan C. Jacobi, P. Stäckel, G. Contopoulos, G. Bozis, D. Lynden-Bell, A. Ollongren, J. Binney, S. Tremaine, P.T. de Zeeuw, D. Merritt, J.S. Stodółkiewicz, M. Hénon, C. Heiles, J. Hietarinta, B. Chauvineau va boshqalarning ilmiy ishlarida gravitatsion tizimlarning integrallanuvchanligi, muntazam va xaotik harakatlar, orbital rezonanslar, invariant strukturalar, yashirin simmetriyalar hamda global va taqribiy harakat integrallarining mavjudlik shartlari tadqiq etilgan. Ushbu tadqiqotlar natijasida Stäckel

tipidagi potensiallarda harakat tenglamalarini ajratish, qo‘shimcha integrallarni qurish, yulduzlar orbitalarining oilalarini klassifikatsiyalash hamda galaktik tizimlarning dinamik xususiyatlarini tavsiflashning nazariy asoslari ishlab chiqilgan. Mazkur yo‘nalishdagi ilmiy natijalar harakat integrallarini aniqlash, gravitatsion tizimlarning integrallanuvchanligini tadqiq etish va yulduzlar hamda galaktikalar dinamikasini tavsiflashga bag‘ishlangan ilmiy ishlarida qisman o‘z aksini topgan.

Alohida ta’kidlash lozimki, V.A. Antonov tomonidan harakat lokal integrali tushunchasining kiritilishi gravitatsion tizimlarda global integrallanuvchanlik mavjud bo‘lmagan hollarda fazaviy fazoning invariant sohalarida harakatni tavsiflash imkonini bergan. Keyingi tadqiqotlarda lokal va qisman integrallanuvchi dinamik tizimlarning ayrim xususiyatlari o‘rganilgan bo‘lsa-da, harakat lokal integrallarining mavjudlik shartlarini umumiy ko‘rinishda aniqlash, ularni analitik qurish va lokal integrallanuvchi potensiallar sinflarini to‘liq tavsiflash masalalari yetarli darajada o‘rganilmagan.

O‘zbekiston Respublikasida yulduzlar dinamikasi, osmon mexanikasi va astrofizika sohalaridagi tadqiqotlar Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti hamda O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi Astronomiya instituti ilmiy maktablari tomonidan olib borilmoqda. Mazkur yo‘nalishlarning rivojlanishiga Sh.A. Egamberdiyev, B.J. Ahmedov, S.N. Nuritdinov, K.T. Mirtadjieva, A.A. Adujabbarov, I.U. Tojiboyev, T.A. Axunov va boshqa tadqiqotchilar salmoqli hissa qo‘shganlar. Ular tomonidan olib borilgan ilmiy tadqiqotlar astrofizika, yulduz tizimlari dinamikasi, galaktik astronomiya va osmon mexanikasi muammolariga bag‘ishlangan.

Shuningdek, harakat lokal integrallarini birjinsli bo‘lmagan va aylanuvchi gravitatsion maydonlarga, yulduzlar tizimlari va galaktikalar dinamikasiga, qorong‘u modda galolari hamda boshqa astrofizik tizimlarni modellashtirish masalalariga tatbiq etishning umumiy nazariy asoslari to‘liq ishlab chiqilmagan. Keng sinfdagi statsionar va aylanuvchi gravitatsion potensiallar uchun lokal integrallanuvchanlikni tadqiq etishning yagona analitik yondashuvining mavjud emasligi ushbu dissertatsiya doirasida mazkur masalalarni tizimli ravishda tadqiq etish zaruratini belgilaydi.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya ishi Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universitetining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari doirasida bajarilgan bo‘lib, OT–F3–13-sonli «O‘z-o‘zini gravitatsiyalovchi tizimlar evolyutsiyasining gravitatsion beqarorliklar va ehtimoliy rezonans holatlarni hisobga olgan holdagi nochiziqli nostatsionar bosqichlarida fazaviy aralashish jarayonlari» mavzusidagi fundamental ilmiy loyiha (2017–2020 yy.) bilan bog‘liq. Dissertatsiya tadqiqotining ayrim natijalari O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Innovatsion rivojlanish agentligining FZ–20200929344-sonli «Ustuvor gravitatsion linzalangan tizimlarda vaqt kechikishlari va gravitatsion linzalanish mexanizmlarini aniqlash» mavzusidagi grant loyihasi (2021–2027 yy.) doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi statsionar gravitatsion sistemalar harakat tenglamalarining integrallanuvchanligining nazariy asoslarini rivojlantirish, harakat lokal integrallarining mavjudlik shartlarini aniqlash, ularni qurish usullarini ishlab chiqish, potensial maydonlarning yangi sinflarini hosil qilish hamda olingan natijalarni

astrofizik sistemalarning orbital tuzilishi va dinamik xossalarini tadqiq etishda qo‘llashdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

yulduzlar dinamikasi, osmon mexanikasi va astrofizika masalalarida harakat integrallari hamda dinamik tizimlar integrallanuvchanligi muammosining hozirgi holatini tahlil qilish;

ikki o‘lchovli aylanuvchi statsionar tizimlar uchun lokal kvadrat harakat integrallari nazariyasini rivojlantirish va ularning mavjudlik shartlarini aniqlash va ikki o‘lchovli potensial tizimlar uchun aniqlovchi differensial tenglamalar sistemalarining moslik shartlarini aniqlash hamda integrallanuvchi holatlarni tasniflash;

harakat lokal integrali mavjud bo‘lgan fazaviy dinamik tizimlarning lokal integrallanuvchanligini tadqiq etishning analitik yondashuvini ishlab chiqish;

harakat lokal integrallari mavjudligini ta’minlovchi uch o‘lchovli potensial maydonlar sinflarini qurish va ularning xossalarini tadqiq etish;

fazoviy birjinsli bo‘lmagan effektiv massaga ega ikki o‘lchovli aylanuvchi tizimlar uchun lokal chiziqli harakat integrallari nazariyasini rivojlantirish;

harakat lokal integrallarining mavjudligi bilan mos keluvchi potensial funksiyalar va effektiv massa taqsimotlari uchun analitik ifodalarni olish;

gravitatsion potensiallarning umumlashtirilgan modellarini ishlab chiqish hamda harakat lokal integrallarini galaktikalar dinamikasi va astrofizika masalalariga tatbiq etish imkoniyatlarini tadqiq etish;

harakat lokal integrallari, fazaviy fazo tuzilishi va statsionar gravitatsion tizimlarda muntazam orbitalarning mavjudlik shartlari orasidagi bog‘liqlikni aniqlash.

Tadqiqot obyekti sifatida galaktikalar, yulduz tizimlari, akkretsion va protoplanetar disklar kabi turli astrofizik obyektlarga xos bo‘lgan fazoviy birjinsli bo‘lmagan, anizotropik va buzilgan simmetriyaga ega statsionar gravitatsion maydonlarda moddiy zarrachalar harakatini tavsiflovchi dinamik tizimlar tanlangan.

Tadqiqot predmeti statsionar gravitatsion maydonlardagi harakat lokal integrallari, ularning mavjudlik shartlari, analitik qurish va tasniflash usullari, shuningdek ikki va uch o‘lchovli dinamik tizimlarning lokal integrallanuvchanlik qonuniyatlari hamda ularni fazaviy fazo tuzilishi va astrofizik obyektlar dinamikasini tadqiq etishga qo‘llashdan etishdan iborat.

Tadqiqot usullari. Tadqiqotda nazariy va osmon mexanikasi, differensial tenglamalar va dinamik tizimlar nazariyasi, variatsion hisob hamda matematik fizika usullaridan foydalanilgan. Harakat lokal integrallarining mavjudlik shartlarini tadqiq etishda simmetriyalar va integrallanuvchanlikni tahlil qilish, birinchi integrallar va lokal invariantlarni qurish usullari, shuningdek potensial funksiyalarni tiklashga oid teskari masalalarni yechish usullari qo‘llanilgan. Sonli tadqiqotlar dinamik tizimlarni kompyuterda modellashtirish hamda orbital harakatning barqarorligini tahlil qilish usullaridan foydalangan holda amalga oshirilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

ikki o‘lchovli aylanuvchi potensial tizimlarning keng sinfi uchun lokal kvadratik harakat integralining mavjud bo‘lishining zarur va yetarli shartlari aniqlanib, mos integrallanuvchi holatlarning tasnifi amalga oshirilgan;

harakat lokal integrali mavjud bo‘lgan fazoviy dinamik tizimning integrallanuvchanligi haqidagi teorema isbotlanib, harakat tenglamalarini kvadraturalarga keltirish shartlari aniqlangan;

harakat lokal integrali, invariant ko‘pxilliklar geometriyasi va potensial maydon tuzilishi o‘rtasidagi bog‘liqlikni ifodalovchi tenglamalarning yopiq sistemasi qurilgan;

harakat lokal integrallari mavjud bo‘lishiga yo‘l qo‘yuvchi ikki va uch o‘lchovli potensiallar sinflari uchun analitik ifodalar olinib, ularning to‘liq parametrik tasnifi amalga oshirilgan;

fazoviy birjinsli bo‘lmagan effektiv massa va anizotrop potensialga ega ikki o‘lchamli aylanuvchi tizimlar uchun lokal chiziqli harakat integrallari nazariyasi rivojlantirilgan;

effektiv massa taqsimoti, potensial tuzilishi va tizimning aylanish parametrlarini o‘zaro bog‘lovchi lokal chiziqli harakat integralining mavjudlik shartlari aniqlangan;

harakat lokal integrallari mavjud bo‘lishiga imkon beruvchi hamda galaktik tizimlarni, jumladan, qoramtir modda galolari va aylanuvchi disk strukturalarini tavsiflashga moslashtirilgan gravitatsion potensiallarning umumlashtirilgan modellari taklif etilgan;

statsionar gravitatsion tizimlarda muntazam orbital sohalarning shakllanishi va fazaviy fazo tuzilishiga qo‘yiladigan cheklovlarni belgilashda harakat lokal integrallarining o‘rni aniqlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

ikki va uch o‘lchovli gravitatsion tizimlarda harakat lokal integrallarining mavjud bo‘lishiga yo‘l qo‘yuvchi potensial maydonlar sinflarini aniqlash imkonini beruvchi analitik munosabatlar olingan;

statsionar va aylanuvchi gravitatsion tizimlarning orbital tuzilishini tadqiq etish uchun lokal chiziqli va kvadrat harakat integrallarini qurish algoritmlari ishlab chiqilgan;

statsionar va aylanuvchi astrofizik tizimlarning keng sinfini tavsiflovchi potensial maydonlar va effektiv massa taqsimotlarining analitik modellari qurilgan;

tizimning berilgan dinamik xarakteristikalari va harakat lokal integrallari tuzilishi asosida potensial funksiyalarni tiklashga doir teskari masalani yechish yondashuvi ishlab chiqilgan;

harakat lokal integrallariga ega dinamik tizimlarda muntazam orbitalarning mavjudlik mezonlari hamda fazoviy maydon tuzilishiga qo‘yiladigan analitik cheklovlar aniqlangan;

galaktikalar, qorong‘u modda galolari, akkretsion strukturalar va boshqa gravitatsion bog‘langan astrofizik obyektlar dinamikasini tadqiq etishga mos gravitatsion potensiallarning analitik modellari ishlab chiqilgan;

tadqiqot natijalari ilmiy-tadqiqot faoliyatiga joriy etilgan hamda ilmiy izlanishlarni amalga oshirishda foydalanilmoqda.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi masalalarning matematik jihatdan to‘g‘ri qo‘yilganligi, matematik fizika, analitik mexanika, differensial tenglamalar va dinamik tizimlar nazariyasining qat’iy usullaridan foydalanilganligi bilan ta’minlanadi. Olingan natijalar qat’iy analitik xulosalar va isbotlarga, shuningdek mos differensial tenglamalar

sistemalarining moslik shartlarini tadqiq etishga asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi ularning osmon mexanikasi va integrallanuvchi tizimlar nazariyasining fundamental qoidalari bilan mos kelishi, ma’lum klassik natijalarning xususiy hol va chegaraviy o‘tishlar sifatida olinishi, shuningdek ishlab chiqilgan harakat lokal integrallari nazariyasining ichki mantiqiy izchilligi va ziddiyatsizligi bilan tasdiqlanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati statsionar gravitatsion maydonlarda harakat lokal integrallari nazariyasi hamda dinamik tizimlarning integrallanuvchanligini tadqiq etish usullarining rivojlantirilganligi bilan belgilanadi. Lokal chiziqli va kvadratik harakat integrallarining mavjudlik shartlarining aniqlanishi, ularni qurish usullarining ishlab chiqilishi hamda integrallanuvchi holatlarning tasniflanishi dinamik tizimlarning fazoviy fazosi tuzilishi va lokal integrallanuvchanlik mexanizmlari haqidagi zamonaviy tasavvurlarni kengaytiradi. Harakat lokal integrallari, potensial maydonlar geometriyasi va integrallanuvchanlik shartlari o‘rtasidagi bog‘liqlikning aniqlanishi analitik mexanika, osmon mexanikasi, yulduzlar dinamikasi va matematik astrofizikaning nazariy asoslarini yanada rivojlantirishga xizmat qiladi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati ishlab chiqilgan analitik usullar va qurilgan potensial modellar sinflaridan statsionar hamda aylanuvchi gravitatsion tizimlarda orbital tuzilish va harakat barqarorligini tadqiq etishda foydalanish mumkinligi bilan belgilanadi. Olingan natijalar galaktikalarning dinamik modellarini qurishda, qorong‘u modda galolarini tadqiq etishda, akkretsion va protoplanetar disklarda zarrachalar harakatini tahlil qilishda, shuningdek kuzatuv ma’lumotlari asosida gravitatsion potensiallarning xususiyatlarini tiklashga oid teskari masalalarni yechishda qo‘llanishi mumkin. Tadqiqot natijalaridan ilmiy-tadqiqot faoliyatida, shuningdek osmon mexanikasi, yulduzlar dinamikasi, nazariy astrofizika va dinamik tizimlar nazariyasiga oid tadqiqotlarda foydalanish mumkin.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Dissertatsiya bo‘yicha olingan ilmiy natijalar quyidagilarga joriy qilingan:

Galaktika tuzilishi, dinamikasi va kinematikasini o‘rganish, yulduzlar orbital strukturalarini tadqiq etish hamda murakkab gravitatsion maydonlardagi harakat qonuniyatlarini aniqlashga oid natijalari M.V. Lomonosov nomidagi Moskva davlat universiteti P.K. Shternberg nomidagi Davlat astronomiya institutining ilmiy-tadqiqot faoliyatida, shuningdek, «Galaktik astronomiya» va «Yulduzlar sistemalari dinamikasi» fanlarini o‘qitishda qo‘llanilgan (P.K. Shternberg nomidagi Davlat astronomiya instituti, 10-iyun 2026-yil ma’lumotnomasi). Natijada, Galaktika va yulduzlar sistemalarining orbital tuzilishini tahlil qilish, murakkab gravitatsion maydonlarda zarrachalar harakati qonuniyatlarini aniqlash, muntazam orbitalar mavjudligi shartlarini baholash hamda «Galaktik astronomiya» va «Yulduzlar sistemalari dinamikasi» fanlarini o‘qitishning ilmiy-nazariy asoslarini boyitish imkoniyatlari kengaytirilgan;

statsionar gravitatsion maydonlarda harakatning lokal integrallarini aniqlashning analitik usullari, aylanuvchi va anizotrop gravitatsion potensiallar uchun ikkinchi darajali lokal integrallarning mavjudlik shartlariga oid natijalar O‘zbekiston Milliy

universitetida bajarilgan F2-54-sonli fundamental loyiha doirasida gravitatsion modellarni takomillashtirish, ularning dinamik barqarorligini va orbital harakatini tadqiq etishda foydalanilgan (O‘zbekiston Milliy universitetining 2026-yil 3-sentabrdagi 05/11-24297-son ma’lumotnomasi). Natijada, gravitatsion modellarni takomillashtirish, dinamik tizimlarning barqarorlik xususiyatlarini baholash, orbital harakat qonuniyatlarini analitik usullar asosida aniqlash hamda aylanuvchi va anizotrop gravitatsion tizimlarning dinamik xususiyatlari va orbital tuzilishini tadqiq etishning nazariy asoslarini rivojlantirish imkoniyatlari kengaytirilgan;

fazoviy modelda lokal integral mavjud bo‘lganda harakat tenglamalarining qo‘shimcha integrallanuvchanlik holatlarini aniqlashga oid ilmiy natijalar Fudan universiteti tomonidan qo‘llab-quvvatlangan ilmiy dasturlarda qo‘llanilgan (Fudan University ma’lumotnomasi, Xitoy, 2026-yil 21-iyul). Natijada, fazoviy gravitatsion tizimlarda harakat tenglamalarining qo‘shimcha integrallanuvchanlik shartlarini aniqlash, lokal integrallarning dinamik tizimlar xususiyatlariga ta’sirini baholash, zarrachalar harakatini analitik tadqiq etish hamda integrallanuvchi holatlar va ularning orbital xususiyatlarini aniqlash imkoniyatlari kengaytirilgan.

Tadqiqot natijalarini aprobatsiyasi. Dissertatsiya ishining asosiy natijalari 8 ta xalqaro va 15 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida ma’ruza qilingan va muhokamadan o‘tkazilgan. Natijalar O‘zbekiston Milliy universiteti “Astrofizik tadqiqotlar” ilmiy laboratoriyasi bilan hamkorlikda “Yadro fizikasi va Astronomiya” kafedrasi seminarlarida, fizika fakulteti ilmiy seminarlarida muhokama qilingan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya tadqiqotining asosiy natijalari jami 34 ta ilmiy ishda e’lon qilingan bo‘lib, ulardan 21 tasi ilmiy maqolalardan iborat. Chop etilgan ilmiy maqolalarning 14 tasi Scopus xalqaro ilmiy ma’lumotlar bazasida indekslanadigan xorijiy ilmiy nashrlarda, 7 tasi esa O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasi tomonidan doktorlik dissertatsiyalarining asosiy ilmiy natijalarini chop etish uchun tavsiya etilgan ilmiy jurnallarda nashr etilgan.

Dissertatsiyaning hajmi va tuzilishi Dissertatsiya kirish, beshta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Dissertatsiyaning umumiy hajmi 200 betni tashkil etadi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Dissertatsiyaning **kirish** qismida tadqiqoti mavzusining dolzarbligi va zarurati hamda O‘zbekiston Respublikasida fan va texnologiyalarni rivojlantirishning ustuvor yo‘nalishlariga muvofiqligi asoslab berilgan. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha olib borilgan xalqaro ilmiy tadqiqotlar sharhi keltirilgan va muammoning o‘rganilganlik darajasi yoritilgan. Tadqiqotning maqsadi va vazifalari shakllantirilgan, tadqiqot obyekti hamda predmeti aniqlangan. Ishning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon etilgan, olingan natijalarning ishonchliligi asoslangan, ularning ilmiy va amaliy ahamiyati yoritilgan. Tadqiqot natijalarining joriy etilishi, e’lon qilingan ilmiy ishlar ro‘yxati, natijalarning aprobatsiyasi to‘g‘risidagi ma’lumotlar keltirilgan hamda dissertatsiyaning tuzilishi yoritilgan.

Dissertatsiyaning «*Harakat integrallari: muammoning zamonaviy holati*» deb nomlangan **birinchi bobi** dinamik tizimlarning integrallanuvchanligi, osmon

mexanikasi, yulduzlar dinamikasi va astrofizika sohalarida olib borilayotgan zamonaviy tadqiqotlar holatini tahlil qilish hamda harakat lokal integrallarini qurish usullarini ishlab chiqish zaruratini asoslashga bag‘ishlangan.

Bobda Gamilton tizimlarida harakat integrallari nazariyasining asosiy qoidalari, ularning dinamik tizimlar simmetriyalari bilan bog‘liqligi va qo‘shimcha harakat invariantlarining mavjudlik shartlari ko‘rib chiqilgan. Chiziqli, kvadratik, polinomial va ratsional harakat integrallarini qurishning klassik yondashuvlari hamda dinamik tizimlarning to‘liq integrallanuvchanlik shartlari tahlil qilingan.

Potensiali tezlikka bog‘liq bo‘lgan Lagranj tizimlarining xususiyatlari hamda sanoq sistemasining aylanishi harakat tenglamalari tuzilishiga ko‘rsatadigan ta’siri tadqiq etilgan. Koriolis va markazdan qochma kuchlarning mavjudligi qo‘shimcha harakat integrallarini qurish masalasini sezilarli darajada murakkablashtirishi ko‘rsatib berilgan.

Global integrallanuvchanlikka ega bo‘lmagan tizimlar uchun klassik harakat integrallarining umumlashmasi sifatida harakat lokal integrallariga alohida e’tibor qaratilgan. Ularning asosiy xossalari, geometrik talqini hamda fazoviy fazoning invariant qismko‘pxilliklarini tavsiflashdagi o‘rni o‘rganilgan.

O‘tkazilgan tahlil asosida mavjud tadqiqot usullari asosan global integrallanuvchi tizimlarga yo‘naltirilganligi va ularning nobirjins hamda anizotrop gravitatsion maydonlarga nisbatan qo‘llanish imkoniyatlari cheklanganligi aniqlangan. Harakat lokal integrallari murakkab astrofizik tizimlarning orbital tuzilishini tadqiq etishning samarali vositasi ekanligi ko‘rsatib berilgan.

Olingan natijalar dissertatsiyada harakat lokal integrallarini qurish usullarini ishlab chiqish va ularning astrofizik tatbiqlarini tadqiq etish bilan bog‘liq masalalarni qo‘yish uchun nazariy asos bo‘lib xizmat qilgan.

Ikkinchi bobda «Aylanish mavjud bo‘lgan tekislik masalasi: ikkinchi darajali lokal integral» deb nomlangan bo‘lib, unda o‘zgarmas burchak tezlik Ω bilan aylanuvchi koordinatalar sistemasida qaralayotgan ikki o‘lchamli statsionar dinamik sistema uchun tezliklarga nisbatan kvadratik bo‘lgan harakat lokal integralining mavjudlik masalasi tadqiq etilgan.

Tadqiqotning boshlang‘ich modeli sifatida harakat tenglamalari sistemasi qaralgan

$$\left.\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{\partial U}{\partial x} + 2\Omega v + \Omega^2 x \\ \dot{v} &= -\frac{\partial U}{\partial y} - 2\Omega u + \Omega^2 y \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Mazkur sistema Yakobi integralini

$$\frac{u^2+v^2}{2} - \frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{2} - U = h. \quad (2)$$

Qo‘shimcha lokal harakat integrali tezlik komponentalariga nisbatan eng umumiy, kvadratik ko‘rinishda izlanadi:

$$J = Au^2 + 2Buv + Cv^2 + Du + Ev + F = 0. \quad (3)$$

Harakat integralining trayektoriya bo‘ylab saqlanishi shartidan aniqlovchi tenglamalar sistemasi hosil qilingan

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} - 4\Omega E - 2A\frac{\partial U}{\partial x} - 2B\frac{\partial U}{\partial y} = 2cD + aF \\ \frac{\partial F}{\partial y} + 4\Omega D - 2B\frac{\partial U}{\partial x} - 2C\frac{\partial U}{\partial y} = 2cE + bF \\ -2D\frac{\partial U}{\partial x} - 2E\frac{\partial U}{\partial y} = cF \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

u lokal integral koeffitsiyentlari bilan sistemaning potensial funksiyasi o‘rtasidagi bog‘lanishni belgilaydi.

Integralning mavjudlik shartlarini tadqiq etish uchun uning kvadratik qismi ko‘paytuvchilarga ajratilgan ko‘rinishda ifodalangan

$$J_2 = (usin\tau - vcos\tau)(usin\sigma - vcos\sigma).$$

Bu esa xarakteristik yo‘nalishlarni ajratib ko‘rsatish hamda aniqlovchi tenglamalar sistemasini $\sigma(x,y)$ va $v\ (x,y)$ xarakteristik funksiyalarini tadqiq etishga keltirish imkonini berdi

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x}cos\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial y}sin\sigma = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial x}cos\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y}sin\tau = 0 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Aniqlovchi tenglamalar sistemasining moslik shartlarini tadqiq etish uchun Yakobi integralining katta qiymatlarida yechimlarning xatti-harakatini tahlil qilishga asoslangan asimptotik usul ishlab chiqilgan. Aniqlovchi tenglamalar sistemasining (4) asimptotik tahlili asosida,

$$N(\sigma) = \Omega\left[2f(\sigma)f''(\sigma) + f''^2(\sigma) - f'^2(\sigma)\right], \quad (6)$$

moslik sharti olingan bo‘lib, u xarakteristik oilalar o‘ramalaridagi singulyarliklarni bartaraf etadi hamda xarakteristik oilalarning tuzilishi tadqiq etilgan.

Xarakteristikalar ustma-ust tushadigan $\sigma(x,y) = \tau(x,y)$ holat uchun ortogonal (σ,μ) koordinatalar sistemasiga o‘tilgan. Ushbu koordinatalarda lokal kvadrat harakat integralining tuzilishini belgilovchi yordamchi K,ψ,c va F funksiyalarining aniq ifodalari olingan

Yangi koordinatalarga (σ,μ) o‘tilgach, potensial funksiya $U(\sigma,\mu)$ uchun tenglamalarning moslik shartlari tadqiq etilgan. Potensialning mavjud bo‘lishi uchun aralash hosilalarning tengligi sharti bajarilishi zarur:

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\frac{\partial U}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{\partial U}{\partial \mu}. \quad (7)$$

Singulyar $\mu - f(\sigma) - f''(\sigma) = 0$ to‘plam yaqinida yechimlarning asimptotik xatti-harakatini tahlil qilish natijasida moslik sharti quyidagi munosabatga keltirilgan,

$$[f'(\sigma) + f'''(\sigma)]W^2(\sigma) = 0. \quad (8)$$

Noldan farqli holatda $W(\sigma) \neq 0$ fundamental differensial tenglama

$$f'(\sigma) + f'''(\sigma) = 0, \quad (9)$$

olingan. Mazkur tenglama lokal kvadratik harakat integralining mavjud bo‘lishining zaruriy sharti bo‘lib, lokal integrallanuvchi barcha mumkin bo‘lgan yechimlarning tuzilishini belgilaydi. Shuningdek, doimiy xarakteristika $\sigma = const$ holati tadqiq etilib, uning yangi, notrivial lokal kvadratik harakat integrallarining mavjud bo‘lishiga olib kelmasligi isbotlangan.

Tenglamaning (9) yechimlaridan biri xarakteristik egri chiziqlar bitta nuqtadan chiquvchi nurlar oilasini hosil qiladigan holatga mos keladi. Bunda xarakteristik

funksiya

$$\sigma = \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

ko‘rinishga ega bo‘lib, masala tabiiy ravishda qutbiy koordinatalar sistemasiga o‘tadi. Mazkur maxsus geometrik holat ustma-ust tushuvchi xarakteristikalarning qutbiy holati sifatida qaralib, aniqlovchi tenglamalar sistemasi to‘liq tahlil qilingan va barcha mumkin bo‘lgan lokal integrallanuvchi yechimlarning to‘liq tasnifi amalga oshirilgan.

Notrivial lokal integrallar faqat $W(\sigma)$ funksiyasining quyidagi maxsus sinflari uchun mavjud bo‘lishi aniqlangan:

$$W'' - \kappa^2 W = 0 \tag{10}$$

va

$$12W^3 - 4W(W'')^2 - 6(W')^2W'' - 2WW'W''' = \nu W. \tag{11}$$

Ushbu natijalar qutbiy xarakteristikalar holatida lokal kvadratik harakat integrallarining mavjud bo‘lish shartlarini to‘liq aniqlash imkonini bergan.

Keyingi tadqiqotlar uchun sistema kanonik ko‘rinishga keltirilib, yordamchi funksiya

$$H = q_1(z) + q_2(z^*) - \frac{\Omega z z^*}{2sin^2\theta cos^2\theta} \tag{12}$$

kiritilgan. Bu funksiya lokal integral koeffitsiyentlari va potensial funksiyani cheklangan sondagi noma’lum funksiyalar orqali ifodalash hamda masalani bitta funksional tenglamani tadqiq etishga keltirish imkonini bergan.

Yechimlarning analitik xossalari tahlil qilinib, notrivial holatda $q_1(z)$ va $q_2(z^*)$ funksiyalari ko‘phadli yechimlar sinfiga mansub bo‘lishi isbotlangan. Mumkin bo‘lgan holatlarning analitik tasnifi amalga oshirilib, joiz yechimlar eksponensial-parametrik ko‘rinishda

$$\left.\begin{aligned} z &= a_1 e^{k_1\tau} + a_2 e^{k_2\tau} + z_0 \\ w &= b_1 e^{k_1\tau} + b_2 e^{k_2\tau} + w_0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ifodalanishi aniqlangan. Asimptotik tahlil asosida barcha joiz rejimlar kvadratik potensial maydonlarga olib kelishi isbotlangan:

$$U = \frac{\lambda x^2 + \mu y^2}{2}. \tag{14}$$

Shu asosda tegishli kvadratik integrallanuvchi holatlarning to‘liq tasnifi amalga oshirilib, potensial maydon parametrlari, sistemaning aylanishi va qo‘shimcha harakat integralining tuzilishi o‘rtasidagi bog‘liqlik aniqlangan. Parametrlarning muayyan nisbatida lokal integral global harakat integraliga davom ettirilishi, boshqa nisbatda esa faqat fazaviy fazoning cheklangan sohasida mavjud bo‘lib, butun fazaviy sohaga davom ettirib bo‘lmaydigan haqiqiy lokal integral hosil bo‘lishi ko‘rsatilgan.

Shunday qilib, ikkinchi bobda ko‘rib chiqilgan ikki o‘lchamli aylanuvchi dinamik sistemalar sinfi uchun lokal kvadratik harakat integralining mavjud bo‘lishining zarur va yetarli shartlari olindi hamda tegishli integrallanuvchi holatlarning tasnifi amalga oshirildi. Qo‘shimcha lokal integralning mavjudligi potensial maydoniga qat’iy cheklovlar qo‘yishi va uning xarakteristik oilalarning geometrik tuzilishi bilan belgilanishi aniqlandi. Olingan natijalar qo‘shimcha

harakat integraliga ega bo‘lgan aylanuvchi gravitatsion sistemalar sinfini ajratish, shuningdek, bunday sistemalarda dinamik harakatning nisbatan muntazam tuzilishini aniqlash imkonini beradi.

Uchinchi bob «*Lokal integral mavjud bo‘lganda fazoviy modeldagi harakat tenglamalarining integrallanuvchanligi*» deb nomlanib, unda lokal harakat integrali mavjud bo‘lgan fazaviy dinamik sistemalarning integrallanuvchanlik shartlari tadqiq etilgan hamda tegishli integrallanuvchi modellarni qurishning umumiy usuli ishlab chiqilgan.

Bobning boshida lokal harakat integrali mavjud bo‘lgan fazoviy dinamik sistemaning harakat tenglamalari integrallanuvchanligi haqidagi teorema shakllantirilib, isbotlangan. Yakobi integraliga

$$H(\vec{\mathrm{r}},\vec{\mathrm{v}}) = h, \tag{15}$$

va lokal harakat integrali $J(\vec{\mathrm{r}},\vec{\mathrm{v}})$ ga ega bo‘lgan dinamik sistema qaraladi. Tezliklar maydoni uchun quyidagi asimptotik tasavvur

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}_0(\vec{\mathrm{r}},h) + \varepsilon\vec{\mathrm{v}}_1(\vec{\mathrm{r}},h) + O(\varepsilon^2), \tag{16}$$

qabul qilinib, bunda uning bosh hadi potensial xarakterga ega, ya’ni:

$$\vec{\mathrm{v}}_0 = \nabla\Phi. \tag{17}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Mazkur shart

$$\frac{dJ}{dt} = O(\varepsilon) \tag{15}$$

asimptotik yaqinlashuv asosiy yaqinlashuvda trayektoriyalarni integrallash kvadraturalarni hisoblashga keltirilishi isbotlangan

$$t - t_0 = \int \frac{dx_{\mathrm{i}}}{\partial\Phi/\partial x_{\mathrm{i}}}\ , \quad \mathrm{i}=1,\ 2,\ 3, \tag{19}$$

trayektoriyalar esa quyidagi nooshkor ko‘rinishda ifodalanishi mumkin:

$$\Psi(r,h,t) = const. \tag{20}$$

Shu bilan harakat lokal integralining mavjudligi bilan fazoviy dinamik sistemani analitik integrallash imkoniyati o‘rtasidagi bog‘liqlik o‘rnatilgan.

Keyingi bosqichda fazoviy dinamik tizimlar uchun harakat lokal integrallarini qurish masalasi qaralib, harakat lokal integralining tuzilishi bilan potensial maydonning xususiyatlari o‘rtasidagi bog‘lanishni ifodalovchi aniqlovchi differensial tenglamalar sistemasi hosil qilingan. Boshlang‘ich model sifatida quyidagi potensial qaralgan

$$U = \frac{1}{2}[(\nabla F)^2 + \rho(L)], \tag{21}$$

bu yerda $F(x,y,z)$ va $L(x,y,z)$ funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$(\nabla L)^2 = 1, \tag{22}$$

$$\nabla L \cdot \nabla F = 0. \tag{23}$$

Mazkur munosabatlarni chiziqlashtirish natijasida δF, δL va $\delta\rho$ variatsiyalar uchun aniqlovchi differensial tenglamalar sistemasi hosil qilingan:

$$\left.\begin{array}{c} 2\nabla F\cdot\nabla\delta F + \rho'(L)\delta L + \delta\rho(L) = 0 \\ \nabla L\cdot\nabla\delta L = 0 \\ \nabla\delta F\cdot\nabla L + \nabla F\cdot\nabla\delta L = 0 \end{array}\right\} \tag{24}$$

Sistemaning moslik shartlarini tadqiq etish maqsadida

$$\vec{R} = \nabla\delta F,$$

vektor kiritilgan va u uchun quyidagi ifoda olingan

$$\vec{R} = -(\nabla F \cdot \nabla \delta L)\nabla L - \left[\frac{\rho'(L)\delta L + \delta\rho(L)}{2(\nabla F)^2}\right]\nabla F - \lambda(\nabla L \times \nabla F). \quad (25)$$

Ushbu natija aniqlovchi sistema tenglamalarining o‘zaro mosligini tahlil qilish hamda lokal integrallarning mavjudlik shartlarini potensial maydonning geometrik xususiyatlari bilan bog‘lash imkonini beradi.

Aniqlovchi tenglamalar sistemasini integrallash amalga oshirilib, integrallanuvchi holatlarning tasnifi bajarilgan. Lokal harakat integrallarining tuzilishi tegishli potensial maydonning geometrik xususiyatlari bilan aniqlanishi ko‘rsatilgan. Quyidagi kombinatsiya uchun umumiy yechim olingan

$$\frac{\delta\rho + \rho'(L)\delta L}{2}, \quad (26)$$

hamda barcha mumkin bo‘lgan tuzilmalar L funksiyasining sath sirtlari egriligi bilan bog‘liq bo‘lgan A va B geometrik parametrlarining xatti-harakatlari orqali aniqlanishi ko‘rsatilgan.

A va B parametrlarining L funksiyasi sath sirtlarining bosh egrilik radiuslari sifatidagi geometrik talqini aniqlangan. Bu natija lokal harakat integrallarining mavjudlik shartlarini fazoviy potensial maydonning geometrik tuzilishi bilan bog‘lash imkonini bergan. Sferik simmetriya holatida $A = B$ bo‘lib, L funksiyasi quyidagi ko‘rinishga kelishi ko‘rsatilgan:

$$L = -r = -\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,, \quad (27)$$

bu esa radial va burchak o‘zgaruvchilarni ajratish imkonini beradi.

Tezliklar maydoni uchun quyidagi ifoda olingan

$$(u, v, w) = \nabla F \pm \nabla L\sqrt{\rho(L) + 2h}, \quad (28)$$

harakat trayektoriyalari esa quyidagi integral munosabat orqali aniqlanadi

$$G(x, y, z) = t - t_0, \quad (29)$$

bu yerda

$$G = \pm \int \frac{dL}{\sqrt{\rho(L) + 2h}}$$

bo‘ladi. Bunda harakatning lokal integrali quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi

$$\delta F + \delta M = const. \quad (30)$$

Integrallanish shartlari lokal harakat integralining tuzilishi va potensial maydonning geometrik xususiyatlarini belgilovchi $S(B)$, $S_1(A)$ va $N(A, B)$ funksiyalariga nisbatan yopiq tenglamalar sistemasiga keltirilgan. Sistemaning mosligi faqat S va S_1 funksiyalari o‘zgarmas yoki ikkinchi darajadan yuqori bo‘lmagan ko‘phadlar ko‘rinishida bo‘lgan hollarda ta’minlanishi isbotlangan:

$$S(x) = const$$

yoki

$$S(x) = h(x - \lambda),$$

yoki

$$S(x) = h(x^2 - 2\tau x + \sigma). \quad (31)$$

Shu tariqa, lokal harakat integralining tuzilishini va unga mos potensial maydon geometriyasini belgilovchi yordamchi funksiyalarning to‘liq tasnifi amalga oshirilgan.

Fazoviy integrallanuvchi modellarni qurish yakunlanib, lokal harakat integrallarining mavjud bo‘lishiga imkon beruvchi potensial maydonlarning analitik ifodalari olingan. Potensial va u bilan bog‘liq funksiyalar uchun analitik ifodalar hosil qilingan. Xususan, S va S_1 funksiyalari o‘zgarmas bo‘lgan holda, potensial quyidagi kombinatsiya orqali aniqlanadi:

$$T = S\int \frac{dA}{A^2-\tilde{a}^2} - S_1\int \frac{dB}{\tilde{c}^2-B^2}, \quad (32)$$

bu orqali Φ funksiyasi chiziqli ravishda aniqlanadi:

$$\Phi(T) = \lambda T + \mu. \quad (32)$$

Ikkinchi darajali ko‘phadli holat uchun

$$\Phi = \Phi(A \pm B), \quad (34)$$

ko‘rinishdagi ifoda olingan. Natijada lokal integrallanuvchanlikni ta’minlovchi fazoviy potensial maydonlarning chekli sondagi parametrik oilalari aniqlangan. Shunday qilib, ushbu natijalar lokal harakat integraliga ega bo‘lgan fazoviy gravitatsion tizimlarning potensiallarini analitik ravishda qurish va ularning mumkin bo‘lgan parametrik sinflarini aniqlash imkonini beradi.

Shunday qilib, uchinchi bobning asosiy natijasi — lokal harakat integrali mavjud bo‘lgan fazoviy dinamik tizimning integrallanuvchanligi haqidagi teoremaning isbotlanishi, aniqlovchi tenglamalar sistemasining mosligi uchun zarur va yetarli shartlarning olinishi hamda lokal integrallanuvchanlikka imkon beruvchi analitik berilgan fazoviy potensial maydonlar sinflarining qurilishidan iborat.

Olingan shartlarning geometrik tabiati aniqlangan: lokal harakat integralining mavjudligi potensial maydonning sath sirtlari egriligi bilan bevosita bog‘liq ekanligi ko‘rsatilgan. Amalga oshirilgan tasnif fazoviy integrallanuvchi modellarni tizimli ravishda qurish imkonini beradi hamda ularni kelgusida yulduzlar dinamikasi va astrofizika masalalarida qo‘llash uchun nazariy asos yaratadi.

To‘rtinchi bob, «*Lokal integralning astrofizik qo‘llanilishi*»da anizotrop potensial maydonga va fazoviy jihatdan bir jinsli bo‘lmagan effektiv massa taqsimotiga ega ikki o‘lchovli aylanuvchi tizimlarda lokal chiziqli harakat integrallari tadqiq etilgan hamda ularni yulduzlar dinamikasi va astrofizika masalalarida qo‘llash imkoniyatlari ko‘rib chiqilgan.

Oldingi boblarda tadqiq etilgan kvadratik harakat integrallaridan farqli ravishda, mazkur bobda o‘qiy simmetriyasi buzilgan va inersiyaviy xossalari fazoda bir jinsli bo‘lmagan aylanuvchi tizimlar uchun klassik impuls momenti integralini umumlashtiruvchi lokal chiziqli harakat integrallari sinfi kiritilgan va tadqiq etilgan.

Doimiy burchak tezlik bilan Ω ga teng bo‘lgan aylanuvchi tekislikda zarrachaning harakati qaraladi. Dinamik jarayonni tavsiflash uchun quyidagi ko‘rinishdagi lokal harakat integrali taklif etilgan,

$$J = \mu(r,\theta)r^2\dot{\theta} - \varphi(r,\theta), \quad (35)$$

bu yerda $\mu(r,\theta)$ tizimning effektiv massasining fazoviy taqsimotini, $\varphi(r,\theta)$ funksiyasi esa lokal harakat integralining tuzilishini ifodalaydi.

Integralning trayektoriyalar bo‘ylab invariantligi shartidan $\mu(r,\theta)$, $\varphi(r,\theta)$ funksiyalari hamda potensial maydon $U(r,\theta)$ o‘rtasidagi bog‘lanishni ifodalovchi aniqlovchi tenglamalar sistemasi hosil qilingan:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial r} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= 2\mu r\Omega \\ \frac{\varphi^2}{\mu^2 r^2}\frac{\partial \mu}{\partial \theta} - \frac{\varphi}{\mu r^2}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial U}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

(36) sistemadagi birinchi tenglama analitik integrallanishi mumkinligi ko‘rsatilib, natijada

$$\varphi(r,\theta) = \mu(r,\theta)[-\Omega r^2 + g(\theta)], \quad (37)$$

ko‘rinishdagi ifoda olingan. Bunda $g(\theta)$ — burchak koordinatasining ixtiyoriy funksiyasi.

Shu asosda lokal chiziqli harakat integrali mavjud bo‘lishiga imkon beruvchi potensial maydonlarning umumiy oilasi olindi:

$$U(r,\theta) = F(r) + \int r^2[-\Omega r^2 + g(\theta)]g'(\theta)d\theta, \quad (38)$$

bu yerda $F(r)$ — radial koordinataning ixtiyoriy funksiyasi. Shu tariqa, dinamik tizim uchun teskari masala yechildi, ya’ni berilgan tuzilishga ega lokal chiziqli harakat integralining mavjudligini ta’minlovchi potensial maydonlar oilasi konstruktiv ravishda qurildi.

Olingan natija muhim fizik mazmunga ega bo‘lib, o‘qiy simmetriyaning buzilishi va odatdagi impuls momenti integralining mavjud emasligi sharoitida ham zarrachaning fazaviy fazodagi harakat sohasini cheklovchi lokal invariant mavjud bo‘lishi mumkinligini ko‘rsatadi. Bu esa tizimning to‘liq integrallanuvchanligini talab qilmagan holda, muntazam harakat sohalarini ajratib ko‘rsatish va orbitalar tuzilishini tadqiq etish imkonini beradi.

Ishlab chiqilgan usulning imkoniyatlarini namoyish etish maqsadida bir qator model astrofizik konfiguratsiyalar ko‘rib chiqilgan. O‘qiy simmetriyali holatda

$$\mu = 1, \quad g(\theta) = 0, \quad J = r^2\theta + \Omega r^2 \quad (39)$$

ya’ni lokal harakat integrali aylanuvchi sanoq sistemasida zarrachaning impuls momenti bilan bog‘liq kattalikka o‘tishi ko‘rsatilgan. Bunda zarrachaning harakati effektiv potensial

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{1}{2}\Omega^2 r^2. \quad (40)$$

orqali aniqlanadi. Markaziy Nyuton potensiali uchun unga mos effektiv potensial olindi. U zarrachaning harakatlanishi mumkin bo‘lgan sohaning chegaralarini hamda chegaralangan orbitalarning mavjud bo‘lish shartlarini aniqlash imkonini beradi.

Keyin kuchsiz burchak anizotropiyasining ta’siri tadqiq etilgan. Quyidagi

$$g(\theta) = \varepsilon cos(n\theta), \quad \varepsilon \ll 1, \quad (41)$$

holatda anizotrop potensial olingan bo‘lib, undagi burchak bo‘yicha modulyatsiya orbitalarning o‘qiy simmetriyali konfiguratsiyadan og‘ishiga hamda qo‘shimcha rezonans tuzilmalarining shakllanishiga olib kelishi ko‘rsatilgan.

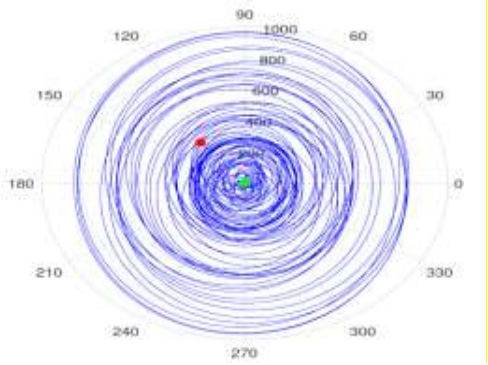
Fazoviy jihatdan bir jinsli bo‘lmagan effektiv massaga ega modellar tadqiqotida alohida e’tibor ushbu konfiguratsiyalarga qaratilgan. Model taqsimot sifatida quyidagi funksiya qaralgan

$$\mu(r,\theta) = 1 + \delta\, exp\left[-\frac{\left(r-r_0^2\right)^2}{\sigma_0^2}\right] cos(m\theta), \quad \delta \ll 1. \quad (42)$$

Bunday taqsimot disk ko‘rinishidagi astrofizik tizimlarga xos bo‘lgan radial jihatdan lokalizatsiyalangan va burchak bo‘yicha bir jinsli bo‘lmagan tuzilmalarni

modellashtirish imkonini beradi. Xususan, dissertatsiyada bunday model protoplanetar va akkretsion disklarning ichki sohalarida, shuningdek, faol galaktikalarning disk tuzilmalarida yuzaga kelishi mumkin bo‘lgan zichlik halqalari va multipol xarakterdagi bir jinsli bo‘lmagan tuzilmalarni tavsiflashi mumkinligi ko‘rsatilgan.

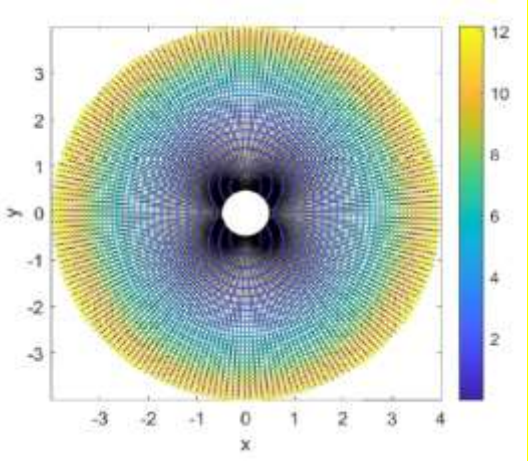
Ushbu model asosida mos lokal harakat integrallari va potensial maydonlar qurilgan. Effektiv massaning fazoviy jihatdan bir jinsli emasligi fazaviy fazo tuzilishini sezilarli darajada o‘zgartirishi, xususan, chegaralangan harakat sohalari shakllanishi va qo‘shimcha rezonans rejimlari yuzaga kelishi aniqlangan. Bunda bir jinsli emaslik parametri kichik qiymatlarga ega bo‘lgan hollarda uning ta’siri birinchi tartibli g‘alayonlanish sifatida qaralishi mumkinligi ko‘rsatilgan.



1-rasm. Zarrachaning qutbiy koordinatalardagi orbital harakati.

Olingan analitik natijalarni tekshirish maqsadida effektiv massasi va potensial maydoni burchak bo‘yicha anizotrop bo‘lgan aylanuvchi tizimda zarrachalar harakatining sonli modellashtirilishi amalga oshirildi (1-rasm). Natijalar lokal harakat integralining o‘qiy simmetriyali modeldan anizotrop va fazoviy jihatdan bir jinsli bo‘lmagan modellarga o‘tilganda ham o‘zining analitik tuzilishini saqlab qolishini ko‘rsatdi. Shuningdek, tegishli g‘alayonlanishlar orbital tuzilmaning qayta shakllanishiga olib kelishi, biroq chegaralangan harakat sohalarining to‘liq buzilishiga sabab bo‘lmasligi aniqlandi. 2-rasmda radial va burchak bo‘yicha birgalikdagi modulyatsiyaga ega model uchun effektiv potensialning kontur chiziqlari va kuchning vektor maydoni keltirilgan. Tanlangan parametrlar uchun potensial maydonida burchak bo‘yicha modulyatsiya bilan bog‘liq bo‘lgan yaqqol to‘rt yaproqli tuzilma kuzatiladi, radial bir jinsli emaslik esa qo‘shimcha halqasimon tuzilmaning shakllanishiga olib keladi. Effektiv potensialning lokal minimumlari joylashgan sohalarda zarrachalarning barqaror yoki kvazistatsionar harakatiga mos keluvchi sohalar aniqlanadi.

Olingan natijalar yulduzlar va galaktikalar dinamikasi masalalariga bevosita taalluqli bo‘lib, ularda aylanish, anizotropiya va moddaning fazoviy jihatdan bir jinsli bo‘lmagan taqsimoti klassik simmetriyalarning buzilishiga hamda orbitalar tuzilishining murakkablashishiga olib keladi. Ishlab chiqilgan yondashuv muntazam harakat sohalarini analitik ravishda ajratib ko‘rsatish, orbitalarning barqarorligini tadqiq etish hamda potensial maydon parametrlari, effektiv massa va fazaviy fazo tuzilishi o‘rtasidagi bog‘liqlikni aniqlash imkonini beradi.



2-rasm. Effektiv potetsial konturlari.

Shunday qilib, to‘rtinchi bobda effektiv massali bir jinsli bo‘lmagan aylanuvchi anizotrop tizimlar uchun lokal chiziqli harakat integrallarining yangi sinfi kiritilib, tadqiq etilgan, ularning mavjudlik shartlari olingan hamda ularga mos potensial maydonlarni qurishning teskari masalasi yechilgan. Aniq modellar asosida burchak anizotropiyasi va effektiv massaning bir jinsli bo‘lmagan taqsimotining orbitalar tuzilishiga, harakatning mumkin bo‘lgan sohalari chegaralariga va rezonans rejimlariga ta’siri ko‘rsatilgan. O‘tkazilgan sonli modellashtirish olingan analitik natijalardan astrofizik disk tizimlarining muntazam orbital dinamikasini tadqiq etishda foydalanish mumkinligini tasdiqlagan.

Beshinchi bobda, «*Lokal harakat integralini qabul qiluvchi umumlashtirilgan uch o‘lchamli potensiallarning astrofizik tatbiqlari*» mavzusida oldingi boblarda ishlab chiqilgan lokal harakat integrallari apparati qorong‘u materiya galo-sini o‘z ichiga olgan statsionar va aylanuvchi galaktik tizimlarning modellarini qurish hamda tadqiq etishga tatbiq etilgan.

Umumiy lokal integrallanuvchi uch o‘lchamli gravitatsion potensiallar sinfi sifatida quyidagi ifoda qaralgan:

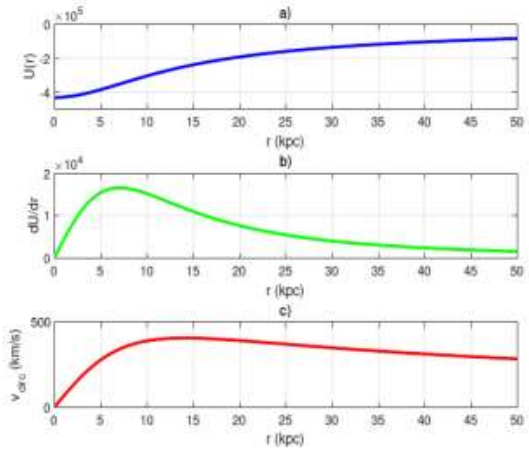
$$U(x,y,z) = \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + U_0(L) + \Omega(y\Phi_x - x\Phi_y), \qquad (43)$$

bu yerda $\Phi(x,y,z)$ — potensial maydonining tuzilishini belgilovchi funksiya, Ω — tizimning aylanish burchak tezligi, $L(x,y,z)$ funksiyasi esa mos sath yuzalarining geometrik tuzilishini belgilaydi va Eykonal tenglamani qanoatlantiradi. Mazkur ifodalanish gravitatsion maydon geometriyasi, tizimning aylanishi va lokal harakat integralining tuzilishini yagona formalizm doirasida bir vaqtda hisobga olish imkonini berishi aniqlangan.

Keyin qurilgan gravitatsion maydonda sinov zarrachalarining dinamikasi tadqiq etilgan. Xususan, aylanish tezligining markazgacha bo‘lgan masofaga bog‘liqligi tahlil qilinib, katta radiuslarda keng yoyilgan galo hissasi orbital tezlikning galaktika markazidan uzoqlashish bilan sekin o‘zgarishini ta’minlashi aniqlangan (3-rasm). Bu natija taklif etilgan modeldan galaktikalarning aylanish egri chiziqlariga xos bo‘lgan xatti-harakatni sifat va miqdoriy jihatdan tahlil qilishda foydalanish mumkinligini ko‘rsatadi.

3-rasmda potensial U ning sonli bog‘liqligi, uning hosilasi U, shuningdek, aylana bo‘ylab harakatlanish tezligi $v_{circ}(r) = \sqrt{r\,\frac{dU}{dr}}$, grafiklari keltirilgan bo‘lib, ular taklif etilgan modelning to‘g‘riligini tasdiqlaydi. Mazkur natijalarni galaktikalarning kuzatilgan aylanish egri chiziqlari bilan taqqoslash mumkin:

3(a)-rasmdagi birinchi grafik katta radiuslarda gravitatsion potensialning markazdan uzoqlashgan sari qanday o‘zgarishini ko‘rsatadi.



3-rasm. a) potensial U(r); b) gravitatsion tezlanish dU/dr; c) aylanaviy tezlik $v_{circ}(r)$.

U markazdan tortishish kuchining mavjudligini ko‘rsatuvchi manfiy qiymatlarga ega bo‘lib, markazda minimum qiymatga erishadi va r ortishi bilan asta-sekin o‘sadi, ya’ni uning manfiylik darajasi kamayib boradi.

3(b)-rasmdagi ikkinchi grafik gravitatsion kuchning radial masofaga bog‘liqligini ifodalaydi. Markazga yaqin sohada kuch r ning ortishi bilan kuchayib, ma’lum masofada maksimum qiymatga erishadi, shundan so‘ng markazdan uzoqlashish davomida kamayadi.

3(c)-rasmdagi uchinchi grafik galo modeli doirasida galaktikaning aylanish egri chizig‘iga mos keladi. Unda yulduzlar va gazning orbital tezligining galaktika markazidan bo‘lgan masofaga bog‘liq ravishda o‘zgarishi ko‘rsatilgan. Bunday aylanish egri chiziqlari real galaktikalarda ham kuzatiladi, biroq ular ko‘pincha murakkabroq tuzilishga, jumladan, deyarli yassi aylanish profillariga ega bo‘ladi.

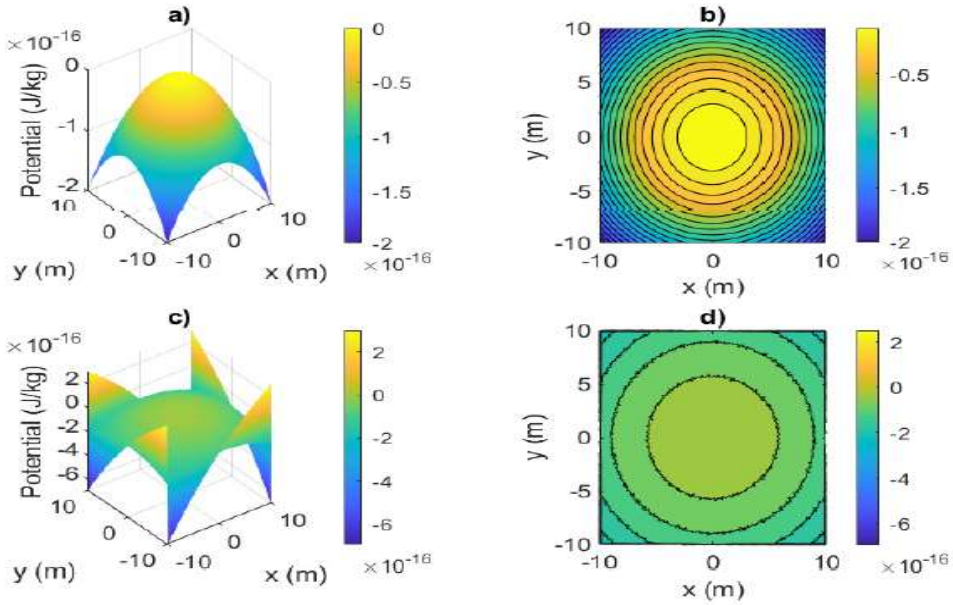
4-rasmda ko‘rib chiqilayotgan modelning gravitatsion va to‘liq effektiv potensiallarini vizuallashtirish natijalari keltirilgan. (a), (b)-rasmlarda gravitatsion potensialning U uch o‘lchamli sirti va sath chiziqlari, (c), (d)-rasmlarda esa aylanish hissasi hisobga olingan holdagi to‘liq effektiv potensialning tegishli tasvirlari berilgan. Potensiallarning taqsimotini taqqoslash aylanish ta’sirida potensial maydon tuzilishining o‘zgarishini, shuningdek, zarrachalarning mumkin bo‘lgan harakat sohalarini belgilovchi ekvipotensial sirtlar shaklining tegishli ravishda o‘zgarishini ko‘rsatadi.

Aylanuvchi tizimlar uchun modelga qo‘shimcha ravishda

$$Urot = \Omega(y\Phi_x - x\Phi_y), \tag{44}$$

hissa kiritilgan. Natijada effektiv potensial quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$Ueff = \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + U_0(r) + U_{rot}. \tag{45}$$



4-rasm. Gravitatsion va to‘liq potensial komponentlarining vizual tasviri.

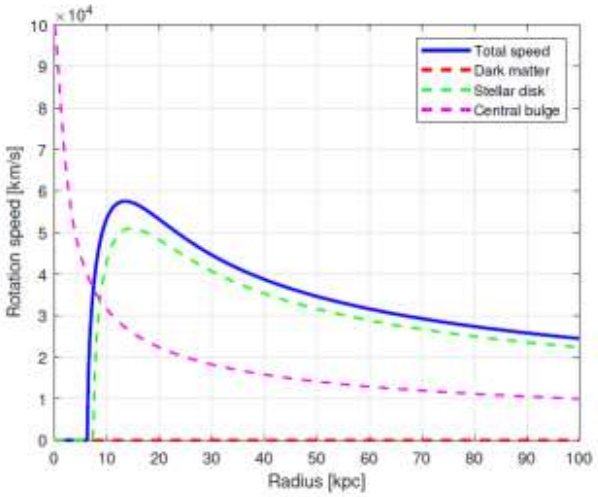
Aylanishning potensial maydoni tuzilishi va sinov zarrachalarining dinamikasiga ta’siri tadqiq etilgan. Aylanish hissasi effektiv potensialning shaklini, natijada esa zarrachalarning mumkin bo‘lgan harakat sohalari va orbitalarining

xususiyatlarini o‘zgartirishi ko‘rsatilgan (5-rasm). Aylanuvchi galaktikalarning yulduzlar diski, балдж, qorong‘u materiya galosi va tizimning aylanishining birgalikdagi ta’sirini hisobga oluvchi ko‘p komponentli modellari ishlab chiqilgan. Bunday tizimlar uchun effektiv potensial

$$U_{eff}\ (r) = U_{vis}(r) + U_0(r) - 1/2\ \Omega^2 r^2. \qquad (46)$$

ko‘rinishga ega. Umumiy aylanma tezlik galaktikaning alohida strukturaviy komponentlari hissalari bilan belgilanadi (3-rasm). Bu yulduzlar diski, балдж va qorong‘u materiya galosining aylanish egri chizig‘ini shakllantirishdagi hissasini alohida baholash imkonini beradi.

Olingan natijalar qorong‘u materiyani modellashtirishning zamonaviy yondashuvlari bilan taqqoslangan. Olingan potensialning gradientli tuzilishi o‘ta yengil skalyar maydonlar va o‘z-o‘zini gravitatsiyalovchi Boze–Eynshteyn kondensatlariga asoslangan qorong‘u materiya modellarida qo‘llaniladigan energetik funksionallar bilan umumiy ko‘rinishga ega ekanligi ko‘rsatilgan. Shunday qilib, beshinchi bobda lokal harakat integrallarini qabul qiluvchi uch o‘lchamli gravitatsion potensiallarni qurishning yagona analitik yondashuvi ishlab chiqilgan, sferik-simmetrik qorong‘u materiya galosi modeli qurilib, unga mos zichlik taqsimoti aniqlangan, aylana bo‘ylab harakatlanish tezliklari egri chiziqlari va aylanishning ta’siri tadqiq etilgan, shuningdek, galaktik tizimlarning ko‘p komponentli modellari ishlab chiqilgan. Olingan natijalar galaktikalarning orbital dinamikasini analitik tadqiq etish imkoniyatlarini kengaytiradi hamda qorong‘u materiya galosini, aylanuvchi galaktik disklarni va boshqa o‘z-o‘zini gravitatsiyalovchi astrofizik tizimlarni modellashtirishda qo‘llanilishi mumkin.



5-rasm. Tizimning turli burchak tezliklarida effektiv potensial va zarrachalarning mumkin bo‘lgan orbitalari tuzilishining o‘zgarishi.

XULOSA

Dissertatsiya ishini bajarish jarayonida quyidagi asosiy ilmiy natijalar olingan va xulosalar chiqarilgan:

1. Harakat lokal integrallarini tadqiq etishning umumiy usuli ishlab chiqildi. Ushbu usul ularning yuqori darajali qismini faktorlash va dastlabki tenglamalarni funksional-differensial munosabatlar sistemasiga keltirishga asoslangan bo‘lib, statsionar gravitatsion sistemalarda lokal integrallarning mavjudlik shartlarini aniqlash imkonini berdi.

2. Ikki o‘lchamli aylanuvchi sistemalarda ikkinchi darajali harakat lokal integrallari xarakteristik egri chiziqlar sistemasi orqali fazaviy fazoning geometrik tuzilishini belgilashi aniqlandi. Asimptotik tahlil asosida aniqlovchi analitik

funksiyalar sinfiga qo‘yiladigan cheklovlar o‘rnatildi hamda ularning haddan tashqari darajali o‘sishi holatida integrallanuvchi yechimlarning mavjud bo‘lishini istisno etuvchi shartlar olindi.

3. Ikki o‘lchamli aylanuvchi sistemalarda kvadratik harakat lokal integralining mavjudligi faqat kvadratik ko‘rinishga keltiriladigan maxsus potensiallar sinfi uchun mumkinligi isbotlandi va integrallanuvchanlikning zaruriy va yetarli shartlari olindi. Degeneratsiyalangan hamda fizik jihatdan amalga oshmaydigan yechimlarni ham o‘z ichiga olgan integrallanuvchi va nointegrallanuvchi holatlarning to‘liq tasnifi amalga oshirildi.

4. Uch o‘lchamli dinamik sistemalar uchun eykonal tenglamaga asoslangan analitik usul ishlab chiqildi. Ushbu usul harakat lokal integrallarining mavjud bo‘lishiga imkon beruvchi potensial maydonlarning geometrik tuzilishini aniqlash hamda integrallanuvchanlik faqat analitik ko‘rinishda beriladigan cheklangan potensiallar sinfida amalga oshishini asoslash imkonini berdi.

5. Fazoviy dinamik sistemalarning integrallanuvchanligini tadqiq etishning variatsion yondashuvi ishlab chiqildi. Ushbu yondashuv invariant ko‘pxilliklarning tuzilishi va barqarorligini tadqiq etish hamda harakat lokal integrallari tomonidan sistema dinamikasiga qo‘yiladigan cheklovlarni aniqlash imkonini beradi.

6. Fazoviy birjinsli bo‘lmagan effektiv massaga ega ikki o‘lchamli aylanuvchi anizotrop sistemalar uchun harakat lokal integrallarining yangi chiziqli sinfi kiritildi. Ularning mavjud bo‘lishining zaruriy va yetarli shartlari kvazichiziqli differensial tenglamalar sistemasi ko‘rinishida olindi hamda berilgan effektiv massa taqsimoti asosida potensial maydonni teskari qurishning konstruktiv usuli ishlab chiqildi.

7. Harakat lokal integrallarining mavjud bo‘lishiga imkon beruvchi gravitatsion potensiallarning analitik modellari ishlab chiqildi va ularni aylanuvchi astrofizik sistemalardagi orbital struktura, harakatning ruxsat etilgan sohalari hamda fazaviy fazoni tadqiq etishda qo‘llash imkoniyati ko‘rsatildi. Jumladan, galaktik disklar, ko‘p komponentli galaktik sistemalar va birjinsli bo‘lmagan gravitatsion maydonlar uchun modellar taklif etildi.

8. Gravitatsion maydon, sistemaning aylanishi va massa taqsimotini hisobga oluvchi uch o‘lchamli potensialning umumlashgan shakli taklif etildi. Uning asosida galaktik sistemalar va qorong‘u materiya galolari modellari qurildi. Olingan formalizm galaktikalarning aylanish egri chiziqlarini tahlil qilish hamda qorong‘u materiya va o‘z-o‘zini gravitatsiyalovchi skalyar maydonlar ishtirokidagi sistemalar dinamikasini tadqiq etish imkonini berishi ko‘rsatildi.

ОДНОРАЗОВЫЙ НАУЧНЫЙ СОВЕТ НА ОСНОВЕ НАУЧНОГО СОВЕТА DSc.03/2025.27.12.FM.01.05 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА

ШАМШИЕВ ФАЗЛИДДИН ТУЛАЕВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ В СТАЦИОНАРНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ЗВЁЗДНОЙ ДИНАМИКИ И АСТРОФИЗИКИ

01.03.01 - Астрономия
01.03.02 – Физика космоса и астрофизика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора (DSc) физико-математических наук

Ташкент – 2026

Тема диссертации доктора (DSc) физико-математических наук зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Академии наук Республики Узбекистан за №B2026.2.DSc/FM325

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный консультант:	**Нуритдинов Салахутдин Насритдинович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Касимов Шакирбай Гаппарович,** доктор физико-математических наук, профессор
	Титов Владимир Борисович, доктор физико-математических наук, профессор
	Таджибаев Икрам Уралбаевич, доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Казахстан**

Защита диссертации состоится “___”_____ 2026 года в ____ часов на заседании научного совета DSc.03/2025.27.12.FM.01.05 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, город Ташкент, Алмазарский район, улица Университетская, дом 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс (+99871) 246-53-21, 246–02–24, электронная почта: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университете Узбекистана (зарегистрирована за № _____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4, тел.: (+99871) 246–02–24).

Автореферат диссертации разослан «____» _____ 2026 года.
(Реестр протокола рассылки № _____ от «____» _____ 2026 года).

К. Т. Миртаджиева,
Председатель одноразового научного совета
по присуждению ученой степени,
д.ф.-м.н., профессор

Ф. У. Ботиров,
ученый секретарь научного совета по
присуждению ученых степеней, доктор
философии по ф.-м. н. (PhD), доцент

Т. А. Ахунов,
председатель научного семинара при
Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской (DSc) диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. В мире определение аналитических и качественных решений системы дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию гравитационных систем, исследование условий интегрируемости уравнений движения и условий существования дополнительных интегралов движения, а также изучение орбитальной структуры и динамических свойств гравитационных систем относятся к важным фундаментальным задачам теоретической механики, небесной механики, звёздной динамики и галактической астрофизики. Интегралы движения являются одним из основных факторов, определяющих структуру фазового пространства динамических систем, условия существования регулярных и хаотических орбит, а также долговременную эволюцию гравитационных систем. Актуальность данной проблемы проявляется также в приоритетных научных направлениях, определённых Международным астрономическим союзом (IAU)[1], включая динамику галактик, природу тёмной материи, эволюцию многокомпонентных гравитационных систем и моделирование сложных астрофизических систем. В связи с этим исследование условий существования интегралов движения в гравитационных системах, критериев интегрируемости, а также орбитальных и динамических свойств имеет важное научное значение.

В мире особое внимание уделяется исследованиям в данном направлении, в частности изучению динамической структуры, орбитального движения и свойств интегрируемости галактик, звёздных скоплений, аккреционных и протопланетных дисков, а также гало тёмной материи. Развитие высокоточных астрономических наблюдений и методов численного моделирования позволяет более детально исследовать динамические свойства пространственно неоднородных, вращающихся, анизотропных гравитационных систем с нарушенной симметрией. Отсутствие глобальных интегралов движения в таких системах обусловливает необходимость разработки новых методов определения локальных интегралов и исследования инвариантных областей фазового пространства. Вместе с тем условия существования локальных интегралов в стационарных и вращающихся гравитационных полях, методы их аналитического построения, классы интегрируемых потенциалов, а также критерии интегрируемости трёхмерных систем исследованы недостаточно. В связи с этим разработка методов построения локальных интегралов движения, определение условий их существования, а также исследование орбитальных и динамических свойств интегрируемых гравитационных полей имеют актуальное научное значение.

В Республике Узбекистан в настоящее время особое внимание уделяется развитию фундаментальных исследований в области математики, теоретической физики и астрофизики, математическому моделированию

[1] IAU Strategic Plan 2020-2030. https://www.iau.org/static/administration/about/strategic_plan/strategicplan-2020-2030.pdf

сложных физических процессов, исследованию динамики гравитационных систем и физических свойств космических объектов. В рамках данных направлений важными научными задачами являются исследование на основе аналитических и численных методов динамических свойств, орбитальной структуры и свойств фазового пространства звёздных систем, галактик и других гравитационных объектов. В связи с этим исследование условий существования локальных интегралов движения в стационарных гравитационных системах, построение классов интегрируемых потенциалов и применение полученных результатов к исследованию динамики галактик и гало тёмной материи в определённой степени соответствуют указанным приоритетным направлениям научных исследований.

В Указе Президента Республики Узбекистан от 30 августа 2019 года № УП-5806 «О развитии космической деятельности в Республике Узбекистан» определена важность развития космических исследований и технологий в стране, чему в определённой степени способствуют отдельные результаты, полученные в рамках настоящего диссертационного исследования. Кроме того, Закон Республики Узбекистан от 13 января 2025 года № ЗРУ-1017 «О космической деятельности»[2] определяет в качестве одной из основных целей осуществления космической деятельности реализацию задач, направленных на «исследование Земли, космического пространства и небесных тел, а также накопление и развитие научных знаний о них», чему в определённой степени служат результаты настоящего диссертационного исследования..

Связь исследования с приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование в определенной степени служит реализации задач, определенных в Постановлении Президента Республики Узбекистан за № УП-60 от 28 января 2022 года «О Стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы», в Постановлении Президента Республики Узбекистан №ПП-5032 «О мерах по повышению качества образования и совершенствованию научных исследований в области физики» от 19 марта 2021 года и соответствует целям, представленным в Законе Республики Узбекистан № ЗРУ–1017 «О космической деятельности», подписанном 13 января 2025 года Президентом Республики Узбекистан, и других нормативно - правовых документах, связанных с данной деятельностью.

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации. Научные исследования, направленные на изучение интегралов движения, интегрируемости динамических систем, звёздной динамики, а также орбитальной структуры галактик, проводятся в ведущих научных центрах и университетах мира, в том числе в ведущих астрономических и научных центрах России, Princeton University, Institute for Advanced Study, University of Michigan, University of Arizona, University of California (США), Max Planck Institute for Astrophysics и Max Planck Institute for Astronomy (Германия), University of Cambridge и University of Oxford (Великобритания), Leiden Observatory (Нидерланды), Observatoire de Paris (Франция), Kavli Institute for Astronomy and Astrophysics и National Astronomical Observatories of China

(Китай), University of Tokyo и Kyoto University (Япония).

В указанных научных центрах проводятся фундаментальные исследования по определению свойств интегрируемости гравитационных систем, исследованию условий существования дополнительных интегралов движения, изучению регулярных и хаотических орбит, выявлению инвариантных структур фазового пространства, анализу орбитальной структуры галактик, а также разработке динамических моделей галактик и гало тёмной материи. В частности, обоснована возможность разделения уравнений движения в разделяющихся гравитационных потенциалах типа Stäckel и аналитического построения трёх сохраняющихся интегралов; такие потенциалы применялись для аналитического исследования орбитальной структуры трёхмерных звёздных систем и построения самосогласованных динамических моделей галактик. Кроме того, разработаны методы определения существования третьего интеграла в общих осесимметричных потенциалах, нахождения его точного или приближённого представления, а также вычисления инвариантов движения на основе приближения потенциалов потенциалами типа Stäckel.

Особое значение в динамике галактик имеет задача определения третьего интеграла движения. Показано, что модели, основанные на двух интегралах, недостаточны для полного описания анизотропии дисперсий скоростей реальных галактических дисков. В связи с этим разработаны аналитические и приближённые модели, обладающие третьим интегралом, в частности трёхинтегральные модели, основанные на потенциалах типа Stäckel, и исследованы возможности их применения для описания динамических и орбитальных свойств галактических дисков. Вместе с тем в современных исследованиях по динамике галактик продолжаются работы по моделированию звёздных орбит в осесимметричных и триаксиальных потенциалах с использованием методов, основанных на разделяющихся потенциалах, интегралах движения, переменных действия и определении резонансных орбит.

В мире проводятся исследования по определению условий существования локальных интегралов движения в стационарных и вращающихся гравитационных системах, их аналитическому построению, характеристике классов локально интегрируемых потенциалов, определению необходимых и достаточных условий локальной интегрируемости в двумерных и трёхмерных динамических системах, исследованию свойств локальных интегралов во вращающихся системах, а также применению локальных интегралов движения к моделям звёздной динамики, галактик и гало тёмной материи.

Степень изученности проблемы [2]. В настоящее время проводятся фундаментальные исследования по вопросам интегрируемости уравнений движения, существования дополнительных интегралов движения, а также изучения орбитальной структуры гравитационных систем. В частности, Г.Г. Кузьминым разработаны основы теории потенциалов, допускающих квадратичные интегралы движения в гравитационных полях звёздных систем и

[2] Обзор степени изученности проблемы по теме диссертации составлен на основе следующих источников: http://adsabs.harvard.edu/abstractservice.html, www.nature.com, http://www.univie.ac.at/webda

галактик; К.Ф. Огородниковым, Г.Н. Дубошиным, М.Ф. Субботиным, Т.А. Агекианом, Г.М. Идлисом, В.А. Антоновым, С.А. Кутузовым, А.С. Расторгуевым, Л.П. Осипковым, А.А. Вьюгой, В.Б. Титовым, Н.П. Питевым, В.В. Орловым, И.В. Петровской, А.В. Локтиным, В.А. Марсаковым, А.А. Мюлляри, Н.Я. Сотниковой, Ю.Н. Гнединым, И.И. Никифоровым и другими исследователями развиты исследования по динамике звёздных систем, проблеме третьего интеграла, структуре фазового пространства и орбитальным свойствам галактик. В научных трудах зарубежных учёных C. Jacobi, P. Stäckel, G. Contopoulos, G. Bozis, D. Lynden-Bell, A. Ollongren, J. Binney, S. Tremaine, P.T. de Zeeuw, D. Merritt, J.S. Stodółkiewicz, M. Hénon, C. Heiles, J. Hietarinta, B. Chauvineau и других исследованы интегрируемость гравитационных систем, регулярные и хаотические движения, орбитальные резонансы, инвариантные структуры, скрытые симметрии, а также условия существования глобальных и приближённых интегралов движения. В результате этих исследований разработаны теоретические основы разделения уравнений движения в потенциалах типа Stäckel, построения дополнительных интегралов, классификации семейств звёздных орбит, а также описания динамических свойств галактических систем. Научные результаты данного направления нашли частичное отражение в научных работах, посвящённых определению интегралов движения, исследованию интегрируемости гравитационных систем и описанию динамики звёздных систем и галактик.

Следует особо отметить, что введение В.А. Антоновым понятия локального интеграла движения позволило описывать движение в инвариантных областях фазового пространства гравитационных систем в случаях отсутствия глобальной интегрируемости. В последующих исследованиях были изучены отдельные свойства локальных и частично интегрируемых динамических систем, однако вопросы определения условий существования локальных интегралов движения в общем виде, их аналитического построения и полного описания классов локально интегрируемых потенциалов остаются недостаточно исследованными.

В Республике Узбекистан исследования в области звёздной динамики, небесной механики и астрофизики проводятся научными школами Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека и Института астрономии Академии наук Республики Узбекистан. Существенный вклад в развитие данных направлений внесли Ш.А. Эгамбердиев, Б.Ж. Ахмедов, С.Н. Нуритдинов, К.Т. Миртаджиева, А.А. Абдужаббаров, И.У. Таджибаев, Т.А. Ахунов и другие исследователи. Выполненные ими научные исследования посвящены проблемам астрофизики, динамики звёздных систем, галактической астрономии и небесной механики.

Кроме того, общие теоретические основы применения локальных интегралов движения к неоднородным и вращающимся гравитационным полям, динамике звёздных систем и галактик, моделированию гало тёмной материи и других астрофизических систем в полной мере не разработаны. Отсутствие единого аналитического подхода к исследованию локальной

интегрируемости широкого класса стационарных и вращающихся гравитационных потенциалов обусловливает необходимость систематического исследования указанных вопросов в рамках настоящей диссертации.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в рамках планов научно-исследовательских работ Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека и связана с фундаментальным научным проектом № ОТ–Ф3–13 на тему «Процессы фазового перемешивания на нелинейных нестационарных стадиях эволюции самогравитирующих систем с учётом гравитационных неустойчивостей и возможных резонансных состояний» (2017–2020 гг.).

Отдельные результаты диссертационного исследования получены в рамках грантового проекта № FZ–20200929344 Агентства инновационного развития при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан на тему «Определение временных задержек и механизмов гравитационного линзирования в приоритетных гравитационно-линзированных системах» (2021–2027 гг.).

Цель исследования заключается в развитии теоретических основ интегрируемости уравнений движения в стационарных гравитационных системах посредством установления условий существования локальных интегралов движения, разработки методов их построения, получения новых классов потенциальных полей и применения полученных результатов к исследованию орбитальной структуры и динамических свойств астрофизических систем.

Задачи исследования:

провести анализ современного состояния проблемы интегралов движения и интегрируемости динамических систем в задачах звёздной динамики, небесной механики и астрофизики;

развить теорию локальных квадратичных интегралов движения для двумерных вращающихся систем, установить условия их существования, определить условия совместности систем определяющих дифференциальных уравнений для двумерных потенциальных систем и выполнить классификацию интегрируемых случаев;

разработать аналитический подход к исследованию локальной интегрируемости пространственных динамических систем, допускающих существование локального интеграла движения;

построить классы трёхмерных потенциальных полей, допускающих существование локальных интегралов движения, и исследовать их свойства;

развить теорию локальных линейных интегралов движения для двумерных вращающихся систем с пространственно неоднородной эффективной массой;

получить аналитические выражения для потенциальных функций и распределений эффективной массы, совместимых с существованием локальных интегралов движения;

разработать обобщённые модели гравитационных потенциалов и исследовать возможности применения локальных интегралов движения к задачам динамики галактик и астрофизики;

установить взаимосвязь между локальными интегралами движения, структурой фазового пространства и условиями существования регулярных орбит в стационарных гравитационных системах.

Объектом исследования являются динамические системы, описывающие движение материальных частиц в стационарных гравитационных полях с пространственной неоднородностью, анизотропией и нарушенной симметрией, характерных для различных астрофизических объектов, включая галактики, звёздные системы, аккреционные и протопланетные диски.

Предметом исследования являются локальные интегралы движения в стационарных гравитационных полях, условия их существования, методы аналитического построения и классификации, а также закономерности локальной интегрируемости двумерных и трёхмерных динамических систем и их применение к исследованию структуры фазового пространства и динамики астрофизических объектов.

Методы исследования. В работе использованы методы теоретической и небесной механики, теории дифференциальных уравнений и динамических систем, вариационного исчисления и математической физики. Для исследования условий существования локальных интегралов движения применялись методы анализа симметрий и интегрируемости, построения первых интегралов и локальных инвариантов, а также методы решения обратных задач восстановления потенциальных функций. Численные исследования выполнены с использованием методов компьютерного моделирования динамических систем и анализа устойчивости орбит.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

получены необходимые и достаточные условия существования локального квадратичного интеграла движения для широкого класса двумерных вращающихся потенциальных систем и выполнена классификация соответствующих интегрируемых случаев;

доказана теорема об интегрируемости пространственной динамической системы при наличии локального интеграла движения и установлены условия сведения уравнений движения к квадратурам;

построена замкнутая система определяющих уравнений, устанавливающая взаимосвязь между локальным интегралом движения, геометрией инвариантных многообразий и структурой потенциального поля;

получены аналитические выражения для классов двумерных и трёхмерных потенциалов, допускающих существование локальных интегралов движения, и выполнена их полная параметрическая классификация;

разработана теория локальных линейных интегралов движения для двумерных вращающихся систем с пространственно неоднородной эффективной массой и анизотропным потенциалом;

установлены условия существования локального линейного интеграла

движения, связывающие распределение эффективной массы, структуру потенциала и параметры вращения системы;

предложены обобщённые модели гравитационных потенциалов, допускающих существование локальных интегралов движения и пригодных для описания галактических систем, включая звёздные диски, гало тёмной материи и многокомпонентные вращающиеся модели галактик;

установлены закономерности влияния структуры гравитационного потенциала, вращения и распределения тёмной материи на характеристики орбитального движения и кривые вращения галактических систем, а также определена роль локальных интегралов движения в формировании регулярных орбитальных областей и ограничений на структуру фазового пространства стационарных гравитационных систем.

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

получены аналитические соотношения, позволяющие определять классы потенциальных полей, допускающих существование локальных интегралов движения в двумерных и трёхмерных гравитационных системах;

разработаны алгоритмы построения локальных линейных и квадратичных интегралов движения для исследования орбитальной структуры стационарных и вращающихся гравитационных систем;

построены аналитические модели потенциальных полей и распределений эффективной массы, описывающие широкий класс стационарных и вращающихся астрофизических систем;

разработан подход к решению обратной задачи восстановления потенциальных функций по заданным динамическим характеристикам системы и структуре локальных интегралов движения;

получены критерии существования регулярных орбит и аналитические ограничения на структуру фазового пространства динамических систем с локальными интегралами движения;

разработаны аналитические модели гравитационных потенциалов, пригодные для исследования динамики галактик, гало тёмной материи, аккреционных структур и других гравитационно связанных астрофизических объектов;

результаты исследования внедрены в научно-исследовательскую и образовательную деятельность и используются при выполнении научных исследований и преподавании дисциплин «Небесная механика», «Звёздная динамика», «Теоретическая астрофизика» и «Динамические системы».

Достоверность результатов исследования обеспечивается корректностью математической постановки задач, использованием строгих методов математической физики, аналитической механики, теории дифференциальных уравнений и динамических систем. Полученные результаты основаны на строгих аналитических выводах и доказательствах, а также на исследовании условий совместности соответствующих систем дифференциальных уравнений. Достоверность результатов подтверждается согласованием с фундаментальными положениями небесной механики и

теории интегрируемых систем, получением известных классических результатов в качестве частных случаев и предельных переходов, а также внутренней непротиворечивостью построенной теории локальных интегралов движения.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в развитии теории локальных интегралов движения и методов исследования интегрируемости динамических систем в стационарных гравитационных полях. Полученные условия существования локальных линейных и квадратичных интегралов движения, разработанные методы их построения и классификации интегрируемых случаев расширяют современные представления о структуре фазового пространства и механизмах локальной интегрируемости динамических систем. Установленная связь между локальными интегралами движения, геометрией потенциальных полей и условиями интегрируемости вносит вклад в дальнейшее развитие методов аналитической механики, небесной механики, звёздной динамики и математической астрофизики.

Практическая значимость результатов исследования состоит в том, что разработанные аналитические методы и построенные классы потенциальных моделей могут быть использованы при исследовании орбитальной структуры и устойчивости движения в стационарных и вращающихся гравитационных системах. Полученные результаты применимы при построении динамических моделей галактик, исследовании гало тёмной материи, анализе движения частиц в аккреционных и протопланетных дисках, а также при решении обратных задач восстановления характеристик гравитационных потенциалов по наблюдаемым динамическим данным. Результаты исследования могут быть использованы в научно-исследовательской деятельности и при преподавании дисциплин, связанных с небесной механикой, звёздной динамикой, теоретической астрофизикой и теорией динамических систем.

Внедрение результатов исследования. Научные результаты, полученные в ходе выполнения диссертационной работы, внедрены в следующих организациях:

В частности, результаты исследования, связанные с изучением структуры, динамики и кинематики Галактики, исследованием орбитальных структур звёзд и выявлением закономерностей движения в сложных гравитационных полях, использованы в научно-исследовательской деятельности Государственного астрономического института имени П.К. Штернберга Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, а также в преподавании дисциплин «Галактическая астрономия» и «Динамика звёздных систем» (справка ГАИШ имени П.К. Штернберга МГУ от 10 июня 2026 года). Эффективность полученных результатов определяется расширением возможностей анализа орбитальной структуры Галактики и звёздных систем, выявления закономерностей движения частиц в сложных гравитационных полях, а также оценки условий существования регулярных орбит. В результате расширены возможности анализа орбитальной структуры Галактики и

звёздных систем, выявления закономерностей движения частиц в сложных гравитационных полях, оценки условий существования регулярных орбит, а также обогащения научно-теоретической базы преподавания дисциплин «Галактическая астрономия» и «Динамика звёздных систем».

Результаты, связанные с разработкой аналитических методов определения локальных интегралов движения в стационарных гравитационных полях и установлением условий существования локальных интегралов второго порядка для вращающихся и анизотропных гравитационных потенциалов, использованы в рамках фундаментального проекта № F2-54, выполненного в Национальном университете Узбекистана, при совершенствовании гравитационных моделей, исследовании их динамической устойчивости и анализе орбитального движения (справка Национального университета Узбекистана № 05/11-24297 от 3 сентября 2026 года). В результате расширены возможности совершенствования гравитационных моделей, оценки характеристик устойчивости динамических систем, аналитического определения закономерностей орбитального движения, а также развития теоретических основ исследования динамических свойств и орбитальной структуры вращающихся и анизотропных гравитационных систем.

Научные результаты, связанные с выявлением случаев дополнительной интегрируемости уравнений движения при наличии локального интеграла в пространственной модели, использованы в научных программах, поддерживаемых Университетом Фудань (Fudan University, Китай), на основе результатов, опубликованных в научных работах диссертанта и представленных в докторской диссертации (справка Университета Фудань от 21 июля 2026 года). В результате расширены возможности выявления условий дополнительной интегрируемости уравнений движения в пространственных гравитационных системах, оценки влияния локальных интегралов на свойства динамических систем, аналитического исследования движения частиц, а также определения интегрируемых случаев и соответствующих им орбитальных характеристик.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертационной работы были представлены в докладах и обсуждены на 8 международных и 15 республиканских научно-практических конференциях. Полученные результаты также обсуждались на семинарах кафедры «Ядерная физика и астрономия», проводимых во взаимодействии с научной лабораторией «Астрофизические исследования» Национального университета Узбекистана, а также на научных семинарах физического факультета.

Опубликованность результатов исследования. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 34 научных работах, из которых 21 является научной статьёй. Среди них 14 публикаций опубликованы в зарубежных научных изданиях, индексируемых международной базой данных Scopus, в научных журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан - 7.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти

глав, заключения и списка литературы. Общий объём диссертации составляет 200 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обосновывается актуальность и востребованность темы диссертационного исследования в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий Республики Узбекистан. Приводится обзор международных научных исследований по теме диссертации, раскрывается степень изученности проблемы. Сформулированы цель и задачи исследования, определены объект и предмет исследования. Изложены научная новизна и практические результаты работы, обоснована достоверность полученных результатов, раскрыты их теоретическая и практическая значимость. Приведены сведения о внедрении результатов исследования в практику, перечень опубликованных научных работ, информация об апробации результатов, а также представлена структура диссертации.

Первая глава диссертации «Интегралы движения: современное состояние проблемы» посвящена анализу современного состояния исследований в области интегрируемости динамических систем, небесной механики, звёздной динамики и астрофизики, а также обоснованию необходимости разработки методов построения локальных интегралов движения.

Рассмотрены основные положения теории интегралов движения в гамильтоновых системах, их связь с симметриями динамических систем и условия существования дополнительных инвариантов движения. Проанализированы классические подходы к построению линейных, квадратичных, полиномиальных и рациональных интегралов движения, а также условия полной интегрируемости динамических систем.

Исследованы особенности лагранжевых систем со скоростной зависимостью потенциала и влияние вращения системы отсчёта на структуру уравнений движения. Показано, что наличие кориолисовых и центробежных сил существенно усложняет задачу построения дополнительных интегралов движения.

Особое внимание уделено локальным интегралам движения как обобщению классических интегралов для систем, не обладающих глобальной интегрируемостью. Исследованы их основные свойства, геометрическая интерпретация и роль в описании инвариантных подмногообразий фазового пространства.

На основе проведённого анализа установлено, что существующие методы исследования ориентированы преимущественно на глобально интегрируемые системы и обладают ограниченной применимостью к неоднородным и анизотропным гравитационным полям. Показано, что локальные интегралы движения представляют собой эффективный инструмент исследования орбитальной структуры сложных астрофизических систем.

Полученные результаты послужили теоретической основой для

постановки задач диссертации, связанных с разработкой методов построения локальных интегралов движения и исследованием их астрофизических приложений.

Во **второй главе**, «Плоская задача с вращением: локальный интеграл второй степени», исследована задача существования локального интеграла движения, квадратичного по скоростям, для двумерной стационарной динамической системы во вращающейся системе координат с постоянной угловой скоростью Ω.

В качестве исходной модели рассмотрена система уравнений движения

$$\left.\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{\partial U}{\partial x} + 2\Omega v + \Omega^2 x \\ \dot{v} &= -\frac{\partial U}{\partial y} - 2\Omega u + \Omega^2 y \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

допускающая интеграл Якоби

$$\frac{u^2+v^2}{2} - \frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{2} - U = h. \quad (2)$$

Дополнительный локальный интеграл движения ищется в наиболее общем виде, квадратичном по компонентам скорости,

$$J = Au^2 + 2Buv + Cv^2 + Du + Ev + F = 0. \quad (3)$$

Из условия сохранения интеграла вдоль траекторий движения получена определяющая система уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} - 4\Omega E - \frac{2A\partial U}{\partial x} - \frac{2B\partial U}{\partial y} &= 2cD + aF \\ \frac{\partial F}{\partial y} + 4\Omega D - \frac{2B\partial U}{\partial x} - \frac{2C\partial U}{\partial y} &= 2cE + bF \\ -\frac{2D\partial U}{\partial x} - \frac{2E\partial U}{\partial y} &= cF \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

которая устанавливает связь между коэффициентами локального интеграла и потенциальной функцией системы.

Для исследования условий существования интеграла квадратичная часть J_2 представлена в факторизованной форме

$$J_2 = (usin\tau - vcos\tau)(usin\sigma - vcos\sigma).$$

Это позволило выделить характеристические направления и свести исследование определяющей системы к анализу характеристических функций $\sigma(x,y)$ и $v\,(x,y)$, удовлетворяющих системе

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} cos\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial y} sin\sigma &= 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} cos\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} sin\tau &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Разработан асимптотический метод исследования условий совместимости определяющей системы, основанный на анализе поведения решений при больших значениях интеграла Якоби. На основе асимптотического анализа определяющей системы (4) получено условие совместности,

$$N(\sigma) = \Omega\left[2f(\sigma)f''(\sigma) + f''^2(\sigma) - f'^2(\sigma)\right], \quad (6)$$

устраняющее сингулярности на огибающие характеристические семейства и исследована структура характеристических семейств.

Для случая совпадающих характеристик $\sigma(x,y) = \tau(x,y)$ выполнен переход к ортогональным координатам (σ, μ). В этих координатах получены явные представления для вспомогательных функций K, ψ, c и F, определяющих структуру локального квадратичного интеграла движения.

После перехода к новым координатам (σ, μ) были исследованы условия совместимости уравнений для потенциальной функции $U(\sigma, \mu)$. Для существования потенциала необходимо выполнение условия равенства смешанных производных:

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\frac{\partial U}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{\partial U}{\partial \mu}. \quad (7)$$

Анализ асимптотического поведения решений в окрестности сингулярного множества $\mu - f(\sigma) - f''(\sigma) = 0$ показал, что условие совместимости приводит к соотношению

$$[f'(\sigma) + f'''(\sigma)]W^2(\sigma) = 0. \quad (8)$$

В нетривиальном случае $W(\sigma) \neq 0$ получено фундаментальное дифференциальное уравнение

$$f'(\sigma) + f'''(\sigma) = 0, \quad (9)$$

которое является необходимым условием существования локального квадратичного интеграла движения и определяет структуру всех допустимых локально интегрируемых решений. Исследован случай постоянной характеристики $\sigma = const$ и доказано, что он не приводит к существованию новых нетривиальных локальных квадратичных интегралов движения.

Один из классов решений уравнения (9) соответствует случаю, когда характеристические кривые образуют семейство лучей, исходящих из одной точки. При этом характеристическая функция имеет вид

$$\sigma = \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

и задача естественным образом переходит к полярным координатам. Данный специальный геометрический случай далее рассматривается как полярный случай совпадающих характеристик, для которого проведён полный анализ определяющей системы, что позволило получить исчерпывающую классификацию всех допустимых локально интегрируемых решений. Показано, что нетривиальные локальные интегралы возникают только для специальных классов функций $W(\sigma)$, удовлетворяющих уравнениям

$$W'' - \kappa^2 W = 0 \quad (10)$$

и

$$12W^3 - 4W(W'')^2 - 6(W')^2W'' - 2WW'W''' = \nu W. \quad (11)$$

Для дальнейшего исследования выполнено каноническое приведение системы, введена вспомогательная функция

$$H = q_1(z) + q_2(z^*) - \frac{\Omega z z^*}{2sin^2\theta cos^2\theta} \quad (12)$$

позволило выразить коэффициенты локального интеграла и потенциальную функцию через ограниченное число неизвестных функций и свести задачу к исследованию одного функционального уравнения.

Проведён анализ аналитических свойств решений и доказано, что в

нетривиальном случае функции $q_1(z)$ и $q_2(z^*)$ должны принадлежать классу полиномиальных решений. Выполнена аналитическая классификация возможных случаев и установлено, что допустимые решения допускают экспоненциально-параметрическое представление

$$\left.\begin{aligned} z &= a_1 e^{k_1\tau} + a_2 e^{k_2\tau} + z_0 \\ w &= b_1 e^{k_1\tau} + b_2 e^{k_2\tau} + w_0 \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

На основе асимптотического анализа доказано, что все допустимые режимы приводят к квадратичным потенциальным полям

$$U = \frac{\lambda x^2 + \mu y^2}{2}. \quad (14)$$

На этой основе выполнена классификация всех соответствующих квадратичных интегрируемых случаев и установлена связь между параметрами потенциального поля, вращением системы и структурой дополнительного интеграла движения. Показано, что при определённом соотношении параметров локальный интеграл может быть продолжен до глобального интеграла движения, тогда как при другом соотношении возникает собственно локальный интеграл, существующий только в ограниченной области фазового пространства и не продолжаемый на всю фазовую область.

Таким образом, во второй главе получены необходимые и достаточные условия существования локального квадратичного интеграла движения для рассматриваемого класса двумерных вращающихся динамических систем и выполнена классификация соответствующих интегрируемых случаев. Установлено, что существование дополнительного локального интеграла накладывает жёсткие ограничения на потенциальное поле и определяется геометрической структурой характеристических семейств. Полученные результаты позволяют выделить класс вращающихся гравитационных систем, допускающих дополнительный интеграл движения и, следовательно, более регулярную структуру динамики.

В третьей главе «Интегрируемость уравнений движения в пространственной модели при наличии локального интеграла» исследованы условия интегрируемости пространственных динамических систем при наличии локального интеграла движения и разработан общий метод построения соответствующих интегрируемых моделей.

В начале главы сформулирована и доказана теорема об интегрируемости уравнений движения пространственной динамической системы при наличии локального интеграла движения. Рассматривается динамическая система, допускающая интеграл Якоби

$$H(\vec{\mathrm{r}}, \vec{\mathrm{v}}) = h, \quad (15)$$

и локальный интеграл движения $J(\vec{\mathrm{r}}, \vec{\mathrm{v}})$. Для поля скоростей предполагается асимптотическое представление

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}_0(\vec{\mathrm{r}}, h) + \varepsilon \vec{\mathrm{v}}_1(\vec{\mathrm{r}}, h) + O(\varepsilon^2), \quad (16)$$

где главное приближение является потенциальным:

$$\vec{\mathrm{v}}_0 = \nabla \Phi. \quad (17)$$

Доказано, что при выполнении условия

$$\frac{dJ}{dt} = O(\varepsilon) \quad (15)$$

интегрирование траекторий в главном приближении сводится к вычислению квадратур

$$t - t_0 = \int dx_i/(\partial\Phi/\partial x_i),\ i=1,2,3, \quad (19)$$

а траектории могут быть представлены в неявной форме

$$\Psi(r, h, t) = const. \quad (20)$$

Тем самым установлена связь между существованием локального интеграла движения и возможностью аналитического интегрирования пространственной системы.

Далее рассмотрена пространственная задача построения локальных интегралов движения и получена система определяющих дифференциальных уравнений, устанавливающая связь между структурой локального интеграла движения и характеристиками потенциального поля. В качестве исходной модели рассмотрен потенциал

$$U = \frac{1}{2}[(\nabla F)^2 + \rho(L)], \quad (21)$$

где функции $F(x, y, z)$ и $L(x, y, z)$ удовлетворяют условиям

$$(\nabla L)^2 = 1, \quad (22)$$

$$\nabla L \cdot \nabla F = 0. \quad (23)$$

Линеаризация этих соотношений позволила получить определяющую систему дифференциальных уравнений для вариаций δF, δL и $\delta\rho$:

$$\left.\begin{array}{c} 2\nabla F \cdot \nabla\delta F + \rho'(L)\delta L + \delta\rho(L) = 0 \\ \nabla L \cdot \nabla\delta L = 0 \\ \nabla\delta F \cdot \nabla L + \nabla F \cdot \nabla\delta L = 0 \end{array}\right\} \quad (24)$$

Для исследования совместности введён вектор

$$\vec{R} = \nabla\delta F,$$

для которого получено представление

$$\vec{R} = -(\nabla F \cdot \nabla\delta L)\nabla L - \left[\frac{\rho'(L)\delta L + \delta\rho(L)}{2(\nabla F)^2}\right]\nabla F - \lambda(\nabla L \times \nabla F). \quad (25)$$

На основе условия потенциальности $rot\vec{R} = 0$ получены необходимые и достаточные условия совместности и установить взаимосвязь между структурой локального интеграла и геометрическими характеристиками потенциального поля.

Выполнено интегрирование определяющей системы уравнений и проведена классификация интегрируемых случаев. Установлено, что структура локальных интегралов движения определяется геометрическими характеристиками соответствующего потенциального поля. Получено общее решение для комбинации

$$\frac{\delta\rho + \rho'(L)\delta L}{2}, \quad (26)$$

и показано, что все допустимые структуры определяются поведением геометрических параметров A и B, связанных с кривизной поверхностей уровня функции L.

Установлена геометрическая интерпретация параметров A и B как главных радиусов кривизны поверхностей уровня функции L, что позволило

связать условия существования локальных интегралов движения с геометрией пространственного потенциального поля. Показано, что в сферическом случае $A = B$, функция L принимает вид

$$L = -r = -\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,, \tag{27}$$

что позволяет выполнить разделение радиальных и угловых переменных. Получено представление поля скоростей

$$(u, v, w) = \nabla F \pm \nabla L\sqrt{\rho(L) + 2h}, \tag{28}$$

а траектории движения определяются интегральным соотношением

$$G(x, y, z) = t - t_0, \tag{29}$$

где

$$G = \pm \int \frac{dL}{\sqrt{\rho(L)+2h}}\,.$$

При этом локальный интеграл движения имеет вид

$$\delta F + \delta M = const. \tag{30}$$

Условия локальной интегрируемости сведены к замкнутой системе уравнений относительно функций $S(B)$, $S_1(A)$ и $N(A, B)$, определяющих структуру локального интеграла движения и геометрию потенциального поля. Доказано, что совместность системы возможна лишь в том случае, когда функции S и S_1 являются либо постоянными, либо многочленами степени не выше второй:

$$S(x) = const \quad , \quad \text{или} \quad S(x) = h(x - \lambda) \quad \text{или} \quad S(x) = h(x^2 - 2\tau x + \sigma \tag{31}$$

Тем самым выполнена полная классификация вспомогательных функций, определяющих структуру локального интеграла движения.

Завершено построение интегрируемых пространственных моделей и получены аналитические выражения для потенциальных полей, допускающих существование локальных интегралов движения. Получены аналитические выражения для потенциала и связанных с ним функций. В частности, при постоянных функциях S и S_1 потенциал определяется через комбинацию

$$T = S \int \frac{dA}{A^2 - \tilde{a}^2} - S_1 \int \frac{dB}{\tilde{c}^2 - B^2}\,, \tag{32}$$

через которую функция Φ определяется линейно:

$$\Phi(T) = \lambda T + \mu. \tag{32}$$

Для квадратичного случая получено представление

$$\Phi = \Phi(A \pm B), \tag{34}$$

что приводит к конечному числу параметрических семейств пространственных потенциальных полей, допускающих локальную интегрируемость.

Таким образом, основным результатом третьей главы является доказательство теоремы об интегрируемости пространственной динамической системы при наличии локального интеграла движения, получение необходимых и достаточных условий совместности определяющей системы и построение аналитически заданных классов пространственных потенциальных полей, допускающих локальную интегрируемость. Установлена геометрическая природа полученных условий: существование локального

интеграла непосредственно связано с кривизной поверхностей уровня потенциального поля. Выполненная классификация позволяет систематически строить пространственные интегрируемые модели и создаёт теоретическую основу для их дальнейшего применения в задачах звёздной динамики и астрофизики.

В **четвертой главе**, «Астрофизические приложения локального интеграла»,
исследованы локальные линейные интегралы движения в двумерных вращающихся системах с анизотропным потенциальным полем и пространственно неоднородным распределением эффективной массы, а также рассмотрены возможности их применения к задачам звёздной динамики и астрофизики.

В отличие от рассмотренных в предыдущих главах квадратичных интегралов, в данной главе введён и исследован класс локальных линейных интегралов движения, обобщающий классический интеграл углового момента на случай вращающихся систем с нарушенной осевой симметрией и неоднородными инерционными свойствами.

Рассматривается движение частицы в плоскости, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω . Для описания динамики предложен локальный интеграл движения вида

$$J = \mu(r,\theta)r^2\dot{\theta} - \varphi(r,\theta), \tag{35}$$

где $\mu(r,\theta)$ характеризует пространственное распределение эффективной массы системы, а функция $\varphi(r,\theta)$ определяет структуру локального интеграла движения.

Из условия инвариантности интеграла вдоль траекторий получена система определяющих уравнений, связывающая функции $\mu(r,\theta)$, $\varphi(r,\theta)$ и потенциальное поле $U(r,\theta)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial r} - \frac{\partial\varphi}{\partial r} &= 2\mu r\Omega \\ \frac{\varphi^2}{\mu^2 r^2}\frac{\partial\mu}{\partial\theta} - \frac{\varphi}{\mu r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial U}{\partial\theta} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Показано, что первое из этих уравнений (36) допускает аналитическое интегрирование и приводит к представлению

$$\varphi(r,\theta) = \mu(r,\theta)[-\Omega r^2 + g(\theta)], \tag{37}$$

где g(θ) является произвольной функцией угловой координаты.

На этой основе получено общее семейство потенциальных полей, допускающих существование локального линейного интеграла движения:

$$U(r,\theta) = F(r) + \int r^2[-\Omega r^2 + g(\theta)]g'(\theta)d\theta, \tag{38}$$

где $F(r)$ — произвольная функция радиальной координаты. Тем самым решена обратная задача динамики: построено семейство потенциальных полей, допускающих существование локального линейного интеграла движения заданной структуры.

Полученный результат имеет важное физическое значение, поскольку показывает, что даже при нарушении осевой симметрии и отсутствии обычного интеграла углового момента возможно существование локального инварианта,

ограничивающего область движения частицы в фазовом пространстве. Это позволяет выделять области регулярного движения и исследовать структуру орбит без требования полной интегрируемости системы.

Для демонстрации возможностей разработанного метода рассмотрен ряд модельных астрофизических конфигураций. В осесимметричном случае

$$\mu = 1, \quad g(\theta) = 0, \; J = r^2\theta + \Omega r^2 \tag{39}$$

то есть переходит в величину, связанную с угловым моментом частицы во вращающейся системе отсчёта. Движение определяется эффективным потенциалом

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{1}{2}\Omega^2 r^2. \tag{40}$$

Для центрального ньютоновского потенциала получен соответствующий эффективный потенциал, позволяющий определить границы допустимой области движения и условия существования ограниченных орбит.

Далее исследовано влияние слабой угловой анизотропии. При

$$g(\theta) = \varepsilon cos(n\theta), \quad \varepsilon \ll 1, \tag{41}$$

получен анизотропный потенциал, в котором угловая модуляция приводит к отклонению орбит от осесимметричной конфигурации и формированию дополнительных резонансных структур.

Особое внимание уделено моделям с пространственно неоднородной эффективной массой. В качестве модельного распределения рассмотрена функция

$$\mu(r,\theta) = 1 + \delta \; exp\left[-\frac{\left(r-r_0^2\right)^2}{\sigma_0^2}\right] cos(m\theta), \quad \delta \ll 1. \tag{42}$$

Такое распределение позволяет моделировать радиально локализованные и угловоее неоднородные структуры, характерные для дисковых астрофизических систем. В частности, в диссертации показано, что подобная модель может описывать плотностные кольца и мультипольные неоднородности, которые могут возникать во внутренних областях протопланетных и аккреционных дисков, а также в дисковых структурах активных галактик.

На основе данной модели построены соответствующие локальные интегралы движения и потенциальные поля. Установлено, что пространственная неоднородность эффективной массы существенно изменяет структуру фазового пространства: формируются ограниченные области движения и возникают дополнительные резонансные режимы.

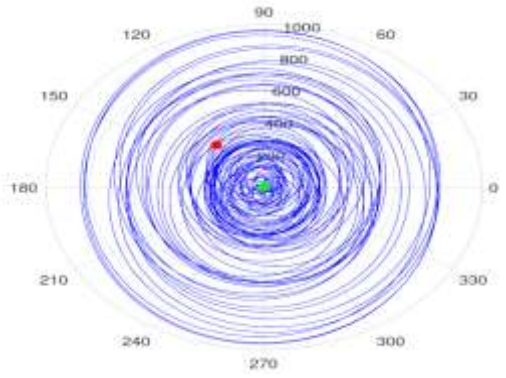


Рис. 1. Орбитальное движение частицы в полярных координатах.

При этом при малых значениях параметра неоднородности δ её влияние может рассматриваться как возмущение первого порядка. Для проверки полученных аналитических результатов проведено численное моделирование

движения частиц во вращающейся системе с угловой анизотропией эффективной массы и потенциального поля (Рис. 1). Показано, что локальный интеграл сохраняет свою аналитическую структуру при переходе от осесимметричных к анизотропным и пространственно неоднородным моделям, а соответствующие возмущения приводят к перестройке орбитальной структуры без полного разрушения ограниченных областей движения.

На рисунке 2 представлены контуры эффективного потенциала и векторное поле силы для модели с одновременной радиальной и угловой модуляцией. При выбранных параметрах наблюдается выраженная четырёхлепестковая структура потенциального поля, связанная с угловой модуляцией, а радиальная неоднородность формирует дополнительную кольцевую структуру. В областях локальных минимумов эффективного потенциала выявляются области, соответствующие устойчивому или квазистационарному движению частиц.

Полученные результаты имеют непосредственное отношение к задачам звёздной и галактической динамики, где вращение, анизотропия и пространственная неоднородность распределения вещества приводят к нарушению классических симметрий и усложнению структуры орбит. Разработанный подход позволяет аналитически выделять области регулярного движения, исследовать устойчивость орбит и устанавливать связь между параметрами потенциального поля, эффективной массой и структурой фазового пространства.

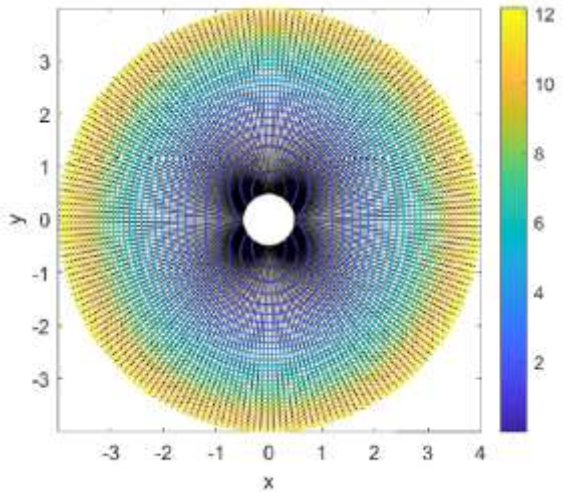


Рис. 2. Контуры эффективного потенциала.

Таким образом, в четвёртой главе введён и исследован новый класс локальных линейных интегралов движения для вращающихся анизотропных систем с неоднородной эффективной массой, получены условия их существования и решена обратная задача построения соответствующих потенциальных полей. На основе конкретных моделей показано влияние угловой анизотропии и неоднородного распределения эффективной массы на структуру орбит, границы допустимых областей движения и резонансные режимы. Проведённое численное моделирование подтвердило возможность использования полученных аналитических результатов для исследования регулярной орбитальной динамики астрофизических дисковых систем.

В **пятой главе, «**Астрофизические приложения обобщённых трёхмерных потенциалов, допускающих локальный интеграл движения», разработанный в предыдущих главах аппарат локальных интегралов движения применён к построению и исследованию моделей стационарных и вращающихся

галактических систем, включая системы с гало тёмной материи.

В качестве общего класса локально интегрируемых трёхмерных гравитационных потенциалов рассмотрено выражение

$$U(x,y,z) = \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + U_0(L) + \Omega(y\Phi_x - x\Phi_y), \qquad (43)$$

где $\Phi(x,y,z)$ определяет структуру потенциального поля, Ω — угловую скорость вращения системы, а функция $L(x,y,z)$ задаёт геометрию соответствующих поверхностей уровня и удовлетворяет уравнению Эйконала. Установлено, что такое представление позволяет одновременно учитывать геометрию гравитационного поля, вращение системы и структуру локального интеграла движения.

Далее исследована динамика пробных частиц в построенном гравитационном поле. В частности, проанализирована зависимость круговой скорости от расстояния до центра и установлено, что при больших радиусах вклад протяжённого гало обеспечивает медленное изменение орбитальной скорости с расстоянием от галактического центра (Рис. 3). Это показывает возможность использования полученной модели для качественного и количественного анализа характерного поведения кривых вращения галактик.

На рисунке 3 приведены графики численной зависимости потенциала $U(r)$, его производной dU/dr, а также круговой скорости $v_{circ}(r) = \sqrt{r\frac{dU}{dr}}$, подтверждающие корректность модели. Они могут быть сопоставлены с наблюдаемыми кривыми вращения галактик:

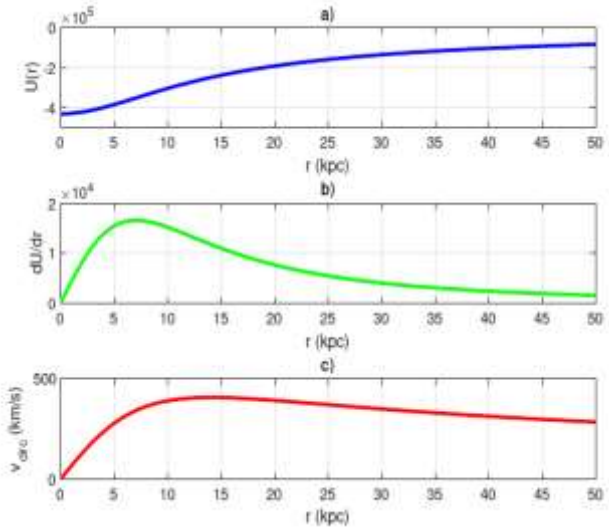


Рис. 3. a) потенциал U(r); b) гравитационное ускорение dU/dr; c) круговая скорость $v_{circ}(r)$.

первый график на рисунке 3a демонстрирует, как гравитационный потенциал изменяется с расстоянием от центра на больших радиусах. Он всегда отрицателен (что указывает на притяжение), достигает минимума в центре и постепенно возрастает (то есть становится менее отрицательным) с увеличением r;

второй график на рис. 3b иллюстрирует зависимость гравитационной силы от радиального расстояния. Вблизи центра сила возрастает с увеличением r, достигает максимума при $r \sim r_c$, после чего убывает по мере дальнейшего удаления;

третий график на рис. 5.1c соответствует кривой вращения галактики в рамках модели гало. Он показывает, как изменяется орбитальная скорость звёзд и газа в зависимости от расстояния от центра. Подобные кривые наблюдаются и в реальных галактиках, хотя они часто обладают более сложной структурой,

включая почти плоские профили вращения.

На рисунке 4 представлены результаты визуализации гравитационного и полного эффективного потенциалов рассматриваемой модели. На рисунках (a), (b) показаны трёхмерная поверхность и линии уровня гравитационного потенциала U, а на рисунках (c), (d) — соответствующие представления полного потенциала с учётом вращательного вклада. Сравнение распределений показывает изменение структуры потенциального поля под действием вращения и соответствующее изменение формы эквипотенциальных поверхностей, определяющих области возможного движения частиц.

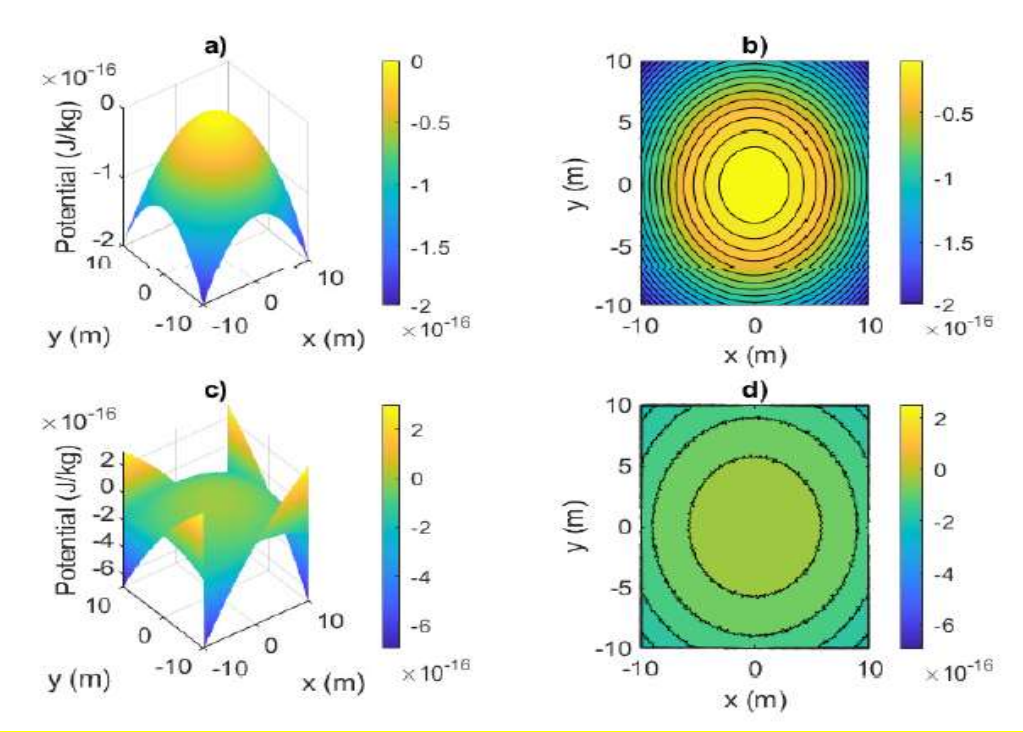


Рис. 4. Визуализация компонентов гравитационного и полного потенциалов.

Для вращающихся систем в модель введён дополнительный вклад

$$Urot = \Omega(y\Phi_x - x\Phi_y), \tag{44}$$

в результате чего эффективный потенциал принимает вид

$$Ueff = \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + U_0(r) + U_{rot}. \tag{45}$$

Исследовано влияние вращения на структуру потенциального поля и динамику пробных частиц. Показано, что вращательный вклад изменяет форму эффективного потенциала и, следовательно, области допустимого движения и характеристики орбит (Рис. 5).

Разработаны многокомпонентные модели вращающихся галактик, учитывающие совместное влияние звёздного диска, балджа, гало тёмной материи и вращения системы. Для таких систем эффективный потенциал имеет вид

$$U_{eff}(r) = U_{vis}(r) + U_0(r) - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2. \tag{46}$$

Показано, что суммарная круговая скорость определяется вкладом отдельных структурных компонентов галактики (Рис.3). Это позволяет раздельно оценить

влияние звёздного диска, балджа и тёмного гало на формирование кривой вращения.

Полученные результаты сопоставлены с современными подходами к моделированию тёмной материи. Показано, что градиентная структура полученного потенциала имеет общий вид с энергетическими функционалами, используемыми в моделях тёмной материи, основанных на ультралёгких скалярных полях и самогравитирующих бозе–эйнштейновских конденсатах.

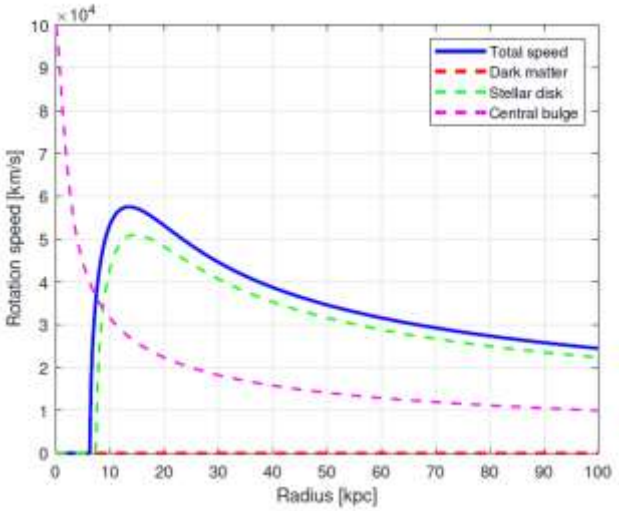


Рис. 5. Изменение эффективного потенциала и структуры допустимых орбит при различных значениях угловой скорости вращения системы.

Таким образом, в пятой главе разработан единый аналитический подход к построению трёхмерных гравитационных потенциалов, допускающих локальные интегралы движения, построена модель сферически-симметричного гало тёмной материи, определено соответствующее распределение плотности, исследованы кривые круговых скоростей и влияние вращения, а также разработаны многокомпонентные модели галактических систем. Полученные результаты расширяют возможности аналитического исследования орбитальной динамики галактик и могут быть использованы при моделировании гало тёмной материи, вращающихся галактических дисков и других самогравитирующих астрофизических систем.

ВЫВОДЫ

В заключении в ходе выполнения данной диссертационной работы были получены следующие основные результаты и сделаны выводы:

1. Разработан общий метод исследования локальных интегралов движения, основанный на факторизации их старшей части и сведении исходных уравнений к системе функционально-дифференциальных соотношений, что позволило установить условия существования локальных интегралов в стационарных гравитационных системах.

2. Установлено, что локальные интегралы движения второго порядка в двумерных вращающихся системах определяют геометрическую структуру фазового пространства посредством системы характеристических кривых. На основе асимптотического анализа установлены ограничения на класс определяющих аналитических функций и получены условия, исключающие существование интегрируемых решений при их сверхстепенном росте.

3. Доказано, что существование локального квадратичного интеграла

движения в двумерных вращающихся системах возможно только для специального класса потенциалов, сводящихся к квадратичным, и получены необходимые и достаточные условия интегрируемости. Выполнена полная классификация интегрируемых и неинтегрируемых случаев, включая вырожденные и физически нереализуемые решения.

4. Для трёхмерных динамических систем разработан аналитический метод, основанный на уравнении эйконала, позволивший установить геометрическую структуру потенциальных полей, допускающих локальные интегралы движения, и доказать исключительный характер интегрируемости, реализуемой лишь для ограниченного класса аналитически задаваемых потенциалов.

5. Разработан вариационный подход к исследованию интегрируемости пространственных динамических систем, позволяющий исследовать структуру и устойчивость инвариантных многообразий и устанавливать ограничения, накладываемые локальными интегралами движения на динамику системы.

6. Введён новый класс локальных линейных интегралов движения для двумерных вращающихся анизотропных систем с пространственно неоднородной эффективной массой. Получены необходимые и достаточные условия их существования в виде системы квазилинейных дифференциальных уравнений и разработан конструктивный метод обратного построения потенциального поля по заданному распределению эффективной массы.

7. Разработаны аналитические модели гравитационных потенциалов, допускающих существование локальных интегралов движения, и показана возможность их применения для исследования структуры орбит, допустимых областей движения и фазового пространства вращающихся астрофизических систем, включая галактические диски, многокомпонентные галактики и неоднородные гравитационные поля.

8. Предложена обобщённая форма трёхмерного потенциала, учитывающая гравитационное поле, вращение и распределение массы, на основе которой построены модели галактических систем и гало тёмной материи. Показана возможность использования полученного формализма для анализа кривых вращения галактик и исследования динамики систем с участием тёмной материи и самогравитирующих скалярных полей.

ONE-TIME SCIENTIFIC COUNCIL ESTABLISHED ON THE BASIS OF THE SCIENTIFIC COUNCIL DSc.03/2025.27.12.FM.01.05 FOR THE AWARD OF SCIENTIFIC DEGREES AT THE NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER MIRZO ULUGBEK

SHAMSHIEV FAZLIDDIN TULAYEVICH

INVESTIGATION OF LOCAL INTEGRALS OF MOTION IN STATIONARY GRAVITATIONAL SYSTEMS AND THEIR APPLICATIONS IN STELLAR DYNAMICS AND ASTROPHYSICAL PROBLEMS

01.03.01-Astronomy
01.03.02- Space physics and astrophysics

Dissertation abstract of the doctor of science (DSc) on physical and mathematical sciences

Tashkent – 2026

The theme of the doctoral dissertation (DSc) on physical and mathematical sciences was registered by the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number B2026.2.DSc/FM325

The dissertation was carried out at the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation was posted in three (Uzbek, Russian, English (resume)) languages on the website of Scientific Council www.nuu.uz and on the website of «Ziyonet» informational and educational portal www.ziyonet.uz.

Scientific consultant:	**Nuritdinov Salakhutdin Nasretdinovich,** doctor of physical and mathematical sciences, professor
Official opponents:	**Kasimov Shakirbay Gapparovich,** doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Titov Vladimir Borisovich, doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Tadjibaev Ikram Uralbaeyvich, doctor of physical and mathematical sciences, professor
Leading organization:	**L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazakhstan**

The defense of the dissertation will be held on "__" _____2026 at ___at the meeting of the one-time ckuncil under the Scientific council DSc.03/2025.27.12.FM.01.05 at the National University of Uzbekistan (Address: National University of Uzbekistan, Universitetskaya 4, Tashkent city. tel.: (+99871) 246-02-24; fax: (+99871) 246-02-24; e-mail: rektor@nuu.uz).

The doctoral (DSc) dissertation is possible to review in Information Resource Centre at the National University of Uzbekistan (is registered under No.__. Address: 100174, Universitetskaya 4, Tashkent city. tel.: (+99871) 246-02-24

Abstract of dissertation was distributed on "_____" _____2026.
(Registry record No _____dated "_____" _____2026).

K.T. Mirtadjiyeva,
Chairman of the scientific council
on award of scientific degrees,
D.Ph.-M.S., professor

F.U. Botirov,
Scientific secretary of the scientific council
on award of scientific degrees,
PhD in physics and mathematics, associate professor

T.A. Akhunov,
Chairman of the scientific seminar of the scientific
council on award of scientific degrees,
D.Ph.-M.S., professor

INTRODUCTION (Annotation of doctoral (DSc) dissertation)

Relevance and significance of the research topic. At present, the problem of integrability of the equations of motion occupies an important place in celestial mechanics, stellar dynamics, and astrophysics, since the existence of integrals of motion determines the orbital structure and phase-space properties of dynamical systems. This issue is reflected in the research priorities of the International Astronomical Union (IAU). Modern models of galaxies, star clusters, accretion disks, and dark matter halos are characterized by spatial inhomogeneity, rotation, and broken symmetries, which substantially restrict the applicability of classical approaches based on global integrals of motion.

Under these conditions, local integrals of motion become particularly important, as they make it possible to investigate invariant regions of phase space and describe the dynamics of systems for which complete integrability is absent. Despite significant advances in the theory of integrable systems, the problems of existence and construction of local integrals of motion in inhomogeneous and rotating gravitational fields remain insufficiently explored.

In this regard, the development of methods for constructing local integrals of motion, the establishment of conditions for local integrability, and the investigation of the corresponding potential fields constitute an important scientific problem. The practical significance of the research is determined by the possibility of applying the obtained results to the analytical modeling of the dynamics of galaxies, dark matter halos, accretion and protoplanetary disks, as well as to the study of orbital stability, resonant phenomena, and phase-space structures of complex astrophysical systems.

Review of Foreign Research on the Dissertation Topic. Scientific research related to integrals of motion, integrability of dynamical systems, stellar dynamics, and the study of the orbital structure of galaxies is being conducted at leading research centers and universities worldwide. In particular, fundamental investigations in this field are carried out at the leading astronomical and scientific institutions of the Russian Federation, as well as at Princeton University, the Institute for Advanced Study, the University of Michigan, the University of Arizona, and the University of California (USA), the Max Planck Institute for Astrophysics and the Max Planck Institute for Astronomy (Germany), the University of Cambridge and the University of Oxford (United Kingdom), Leiden Observatory (the Netherlands), Observatoire de Paris (France), the Kavli Institute for Astronomy and Astrophysics and the National Astronomical Observatories of China (China), and the University of Tokyo and Kyoto University (Japan).

These institutions conduct extensive research aimed at investigating the orbital structure of galaxies, regular and chaotic orbits, identifying the integrability properties of gravitational systems, searching for additional integrals of motion, analyzing invariant structures of phase space, and developing dynamical models of galaxies and dark matter halos. In particular, research devoted to integrals of motion, the third-integral problem, galactic dynamics, and the modeling of gravitational potentials is carried out at the Sternberg Astronomical Institute, the Main

Astronomical Observatory of the Russian Academy of Sciences, the Special Astrophysical Observatory of the Russian Academy of Sciences, and Saint Petersburg State University.

At present, priority research directions in this field include the investigation of local and global integrability conditions for complex gravitational systems, the study of orbital resonances and chaotic motion, the identification of invariant structures of phase space, the construction of dynamical models of galaxies and dark matter halos, and the establishment of relationships between the geometry of gravitational fields and the existence of integrals of motion.

At the same time, a number of important problems remain unresolved, including the determination of conditions for the existence of local integrals of motion in stationary and rotating gravitational systems, their analytical construction, the classification of locally integrable potentials, the establishment of necessary and sufficient conditions for local integrability in three-dimensional systems, and the application of local integrals of motion to problems of stellar dynamics and the modeling of galaxies and dark matter halos.

In this regard, the investigation of the existence conditions for local integrals of motion in stationary gravitational fields, the construction of classes of locally integrable potentials, the study of local integrability in two- and three-dimensional dynamical systems, and the application of the obtained results to problems of stellar dynamics and astrophysics are of significant scientific and practical interest.

Degree of Investigation of the Problem. The problems of integrability of the equations of motion, the existence of additional integrals of motion, and the investigation of the orbital structure of gravitational systems constitute important research areas in theoretical mechanics, stellar dynamics, and galactic astrophysics. Fundamental studies in this field have established the foundations of the theory of integrable and partially integrable dynamical systems and have yielded a number of important scientific results characterizing the orbital structure of stellar systems.

Fundamental results in the study of additional integrals of motion in stellar dynamics and galactic gravitational fields were obtained by G.G. Kuzmin, who developed the theory of gravitational potentials admitting the existence of a quadratic integral of motion. Subsequently, research on the dynamics of stellar systems, the third-integral problem, the structure of phase space, and the orbital properties of galaxies was substantially advanced in the works of K.F. Ogorodnikov, G.N. Duboshin, M.F. Subbotin, T.A. Agekyan, G.M. Idlis, V.A. Antonov, S.A. Kutuzov, A.S. Rastorguev, L.P. Osipkov, A.A. V’yuga, N.P. Pit’ev, V.B. Titov, V.V. Orlov, I.V. Petrovskaya, A.V. Loktin, V.A. Marsakov, A.A. Mylläri, N.Ya. Sotnikova, Yu.N. Gnedin, I.I. Nikiforov, and other researchers.

In the works of foreign scientists such as C. Jacobi, P. Stäckel, G. Contopoulos, G. Bozis, D. Lynden-Bell, A. Ollongren, J. Binney, S. Tremaine, P. Vandervoort, P.T. de Zeeuw, D. Merritt, J.S. Stod´olkiewicz, M. Hénon, C. Heiles, J. Hietarinta, B. Chauvineau, and others, the properties of regular and chaotic motion, orbital resonances, invariant tori, hidden symmetries, and the conditions for the existence of global and approximate integrals of motion were extensively investigated. These

studies established important regularities governing galactic dynamics, clarified the structure of phase space in gravitational systems, and led to the development of approaches for the classification of orbital families.

It should be particularly emphasized that V.A. Antonov introduced the concept of a local integral of motion, which made it possible to describe invariant regions of phase space even in cases where global integrability is absent. Although certain properties of locally and partially integrable systems have been investigated in subsequent studies, a general theory of local integrals of motion has not yet been fully developed.

Most existing studies have focused primarily on the construction of global, quasi-global, or approximate integrals of motion. However, the determination of existence conditions for local integrals of motion in stationary and rotating gravitational systems, their analytical construction, the classification of locally integrable potentials, and the establishment of necessary and sufficient conditions for local integrability in three-dimensional systems remain insufficiently explored. Furthermore, general theoretical foundations for the application of local integrals of motion to non-uniform and rotating gravitational fields, problems of galactic dynamics, the modeling of dark matter halos, and other astrophysical systems have not yet been developed. The absence of a unified analytical approach to the investigation of local integrability for broad classes of potential fields determines the relevance of the dissertation topic and the need for further research in this direction.

In the Republic of Uzbekistan, research in stellar dynamics, celestial mechanics, and astrophysics is carried out by the scientific schools of the Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan and the Astronomical Institute of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan. Significant contributions to the development of these fields have been made by Sh.A. Egamberdiev, B.J. Akhmedov, S.N. Nuritdinov, K.T. Mirtadjieva, A.A. Adujabbarov, I.U. Tadjibayev, T.A. Akhunov and other researchers. Their studies are devoted to problems of astrophysics, stellar dynamics, galactic astronomy and celestial mechanics.

At the same time, the analytical construction of local integrals of motion, the investigation of their existence conditions in non-uniform and rotating gravitational fields, and the application of locally integrable models to problems of stellar dynamics and astrophysics remain insufficiently studied. This determines the necessity for further research in this area and substantiates the relevance of the present dissertation.

Aim and objectives of the research is to develop the theory of local integrals of motion in stationary gravitational systems, to establish the conditions for their existence and construction, and to apply the obtained results to the investigation of integrability, orbital structure, and dynamical properties of astrophysical systems.

The object of the research is dynamical systems describing the motion of material particles in stationary gravitational fields characterized by spatial inhomogeneity, anisotropy, and broken symmetry, which are typical of various astrophysical objects, including galaxies, stellar systems, accretion disks, and

protoplanetary disks.

The subject of the research is local integrals of motion in stationary gravitational fields, the conditions for their existence, methods for their analytical construction and classification, as well as the laws governing local integrability in two-dimensional and three-dimensional dynamical systems and their application to the investigation of phase-space structure and the dynamics of astrophysical objects.

Research methods. The research is based on the methods of theoretical and celestial mechanics, the theory of differential equations and dynamical systems, variational calculus, and mathematical physics. To investigate the conditions for the existence of local integrals of motion, methods of symmetry and integrability analysis, construction of first integrals and local invariants, as well as methods for solving inverse problems of reconstructing potential functions were employed. Numerical investigations were carried out using computer simulation techniques for dynamical systems and methods for the analysis of orbital stability.

Scientific novelty. **The scientific novelty of the research is as follows:**

- Necessary and sufficient conditions for the existence of a local quadratic integral of motion have been obtained for a broad class of two-dimensional rotating potential systems, and the corresponding integrable cases have been classified.
- A theorem on the integrability of a three-dimensional dynamical system in the presence of a local integral of motion has been proved, and conditions reducing the equations of motion to quadratures have been established.
- A closed system of determining equations establishing the relationship between a local integral of motion, the geometry of invariant manifolds, and the structure of the potential field has been constructed.
- Analytical expressions for classes of two-dimensional and three-dimensional potentials admitting local integrals of motion have been obtained, and their complete parametric classification has been carried out.
- A theory of local linear integrals of motion for two-dimensional rotating systems with spatially inhomogeneous effective mass and anisotropic potential has been developed.
- Conditions for the existence of a local linear integral of motion relating the effective-mass distribution, the structure of the potential, and the rotation parameters of the system have been obtained.
- Generalized models of gravitational potentials admitting local integrals of motion and suitable for the description of galactic systems, including dark matter halos and rotating disk structures, have been proposed.
- The role of local integrals of motion in the formation of regular orbital regions and constraints on the phase-space structure of stationary gravitational systems has been established.

Practical significance. The practical results of the research are as follows:

- Analytical relations have been obtained that make it possible to determine classes of potential fields admitting the existence of local integrals of motion in two-dimensional and three-dimensional gravitational systems.

- Algorithms for constructing local linear and quadratic integrals of motion have been developed for investigating the orbital structure of stationary and rotating gravitational systems.
- Analytical models of potential fields and effective-mass distributions describing a broad class of stationary and rotating astrophysical systems have been constructed.
- An approach to solving the inverse problem of reconstructing potential functions from prescribed dynamical characteristics of a system and the structure of local integrals of motion has been developed.
- Criteria for the existence of regular orbits and analytical constraints on the phase-space structure of dynamical systems with local integrals of motion have been obtained.
- Analytical models of gravitational potentials suitable for investigating the dynamics of galaxies, dark matter halos, accretion structures, and other gravitationally bound astrophysical objects have been developed.
- The results of the research have been implemented in scientific and educational activities and are used in research projects and in teaching the courses “Celestial Mechanics”, “Stellar Dynamics”, “Theoretical Astrophysics”, and “Dynamical Systems”.

Reliability of the results. The reliability of the research results is ensured by the correctness of the mathematical formulation of the problems and the application of rigorous methods of mathematical physics, analytical mechanics, the theory of differential equations, and dynamical systems. The obtained results are based on rigorous analytical derivations and proofs, as well as on the investigation of the compatibility conditions of the corresponding systems of differential equations. The validity of the results is confirmed by their consistency with the fundamental principles of celestial mechanics and the theory of integrable systems, the derivation of well-known classical results as special and limiting cases, and the internal consistency of the developed theory of local integrals of motion.

Approbation of the research results. The main results of the dissertation were presented and discussed at more than 20 international and national scientific conferences, symposia, and seminars, including the scientific seminars of the Department of Nuclear Physics and Astronomy and the Scientific Seminar of the National University of Uzbekistan (2020–2025), the All-Russian Conferences on Modern Stellar Astronomy (Russian Federation, 2021–2025), the International Astronomical Union Symposium No. 398/MODEST-25 “Compact Stars and Binaries in Dense Stellar Systems” (Busan 1996, Seoul 2025, Republic of Korea), and the International Astronomical Union Symposium No. 405 “Traversing the Galactic Center in Space and Time” (Brno 2026, Czech Republic), as well as other international and national scientific events.

Structure and scope of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, five chapters, conclusion and a bibliography. The total volume of the dissertation is 200 pages.

E‘LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (I часть; I part)

1. Antonov V.A., Shamshiev F.T., Cases of a star’s planar motion integrated in the gravitational field of a rotating system // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 59, 209–219, 1994, (Scopus CiteScore IF=3.8). https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1994ARep...38..426A.

2. Antonov V.A., Shamshiev F.T., Special cases of the analytical representation of an eightfold velocity field for motion in a three-dimensional potential //Astronomy Reports, Volume 38, ISSUE 3, pp.426-431, 1994, (Scopus Cite Score IF=0.7) https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1994ARep...38..426A.

3. Shamshiev F.T., On the Linear Local Integral of Motion in a Rotating Systems //Astronomical and Astrophysical Transactions, v.7, pp. 269-273, 1995. https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1995A%26AT....7..269S (Scopus Cite Score IF=0.17).

4. Shamshiev F.T., On the Potential of a Rotating Bar of Regular Galaxies // Journal of the Korean Astronomical Society, 29, pp.73-74, 1996. Korea https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1996JKASS..29...73S (Scopus Cite Score IF= 1.545).

5. Shamshiev F.T., Cases of Further Integrability of the Equation of Motion for Presence of the Local Integral in the Space. Model I //Astrophysical Bulletin, Vol. 79, No. 1, pp. 151–158, 2024. (Scopus Cite Score IF=1.4) https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2024AstBu..79..151S.

6. Shamshiev F.T., Cases of Further Integrability of the Equation of Motion in the Presence of the Local Integral in the Space Model. II. //Astrophysical Bulletin, Vol. 80, No. 1, pp. 132–139, 2025. (Scopus Cite Score IF=1.4) https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2025AstBu..80..132S.

7. Shamshiev F.T., Second Degree Local Integral for Rotating Systems. Part I. //Astronomy Reports, Vol. 69, No. 3, pp. 243–254, 2025. (Scopus Cite Score IF=0.7) https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2025ARep...69..243S.

8. Shamshiev F.T., Second Degree Local Integral for Rotating Systems. Part II. //Astronomy Reports, Vol. 69, No. 8, pp. 766–774, 2025. (Scopus Cite Score IF=0.7) https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2025ARep...69..243S.

9. Shamshiev F.T., Three-dimensional potentials with local integrals of motion: modeling stellar systems with dark matter. //Astronomical and Astrophysical Transactions (AApTr) Vol. 35, Issue 1, pp. 199–208, 2025. (Scopus Cite Score IF=0.4) https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2025A%26AT...35..199S.

10. Shamshiev F.T., Local Quadratic Integrals for Rotating Systems. //Moscow University Physics Bulletin, Vol. 80, Suppl. 1, pp. S278–S280, 2025 (Scopus Cite Score IF=0.6) https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2025MUPB...80S.280S.

11. Shamshiev F.T., On the application of local integrals of motion to the modeling of anisotropic disk systems. //Astronomy Reports, Astronomy Reports, 2026, Vol. 70, No. 2, pp. 164–173, 2026. (Scopus Cite Score IF=0.7) https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2026ARep...70..164S.

12. Shamshiev F.T., Local integrals generating exact integrals of motion in three-dimensional potential fields: part I//Turkish Journal of Physics, Vol. 50, No 3, pp. 217-230, 2026. (Scopus Cite Score IF=1.4) https://journals.tubitak.gov.tr/cgi/viewcontent.cgi?article=2814&context=physics.

13. Шамшиев Ф.Т., Случаи дальнейшей интегрируемости уравнений движения при наличии локального интеграла в пространственной модели. //Труды института математики и информационных технологий Волгоградского государственного университета, с. 65-67, https://elibrary.ru/item.asp?id=52689453&utm_source=chatgpt.com Волгоград, Россия, 2023, (01.00.00. №15).

14. Шамшиев Ф.Т., Интегрируемость уравнения движения с помощью локального интеграла. //Физика-математические науки, т.3, №1, с.41-46, 2022 год. https://www.tadqiqot.uz/index.php/physics/article/view/5605, Doi Journal 10.26739/2181-0656, (01.00.00. №35).

15. Shamshiev F.T., Numerical Simulation of the Process Scattering of an Interstellar Cloud International Journal of Engineering Mathematics: Theory and Application, vol. 5, ISSUE 1, pp. 155-158, 2023 год. https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=ru&user .

16. Shamshiev F.T., Behavior of the magnetic field under random gas cloud deformations. //International Journal of Engineering Mathematics: Theory and Application, vol. 4, ISSUE 1, pp. 20-22, 2022 год. https://www.google.com/search?q=%22Behavior+of+the+magnetic+field.

17. Shamshiev F. T., On the Existence of Local Integrals of Motion in the Dynamics of Stellar Systems. //Under One Sky: The IAU Centenary Symposium Proceedings IAU Symposium No., Hyung Mok Lee, Rainer Spurzem & Jongsuk Hong, 2026. (Scopus Cite Score IF=1.4) https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2026IAUS..398..199S.

18. Шамшиев Ф.Т., О существовании некоторых локальных интегралов в звездной динамике. //O‘zMU Xabarlari, 2024, [3/1], с. 520-523, ISSN 2181-7324, (01.00.00. №8).

19. Шамшиев Ф.Т., О проблемах третьего и локального интегралов движения в звездной динамике. //O‘zMU Xabarlari, 2024, [3/1/1], с. 518-521, ISSN 2181-7324, (01.00.00. №8).

20. Хуррамов И., Шамшиев Ф.Т., О применении локального интеграла в динамике звездных систем. //O‘zMU Xabarlari, 2025, [3/1/1], с. 478-481, ISSN 2181-7324, (01.00.00. №8).

II bo‘lim (II часть; part II)

1. Shamshiyev F.T., A special class of potentials admitting a local integral for rotating systems. //Astronomy at the epoch of multimessenger studies, Proceedings of the VAK-2021 conference, Moscow, Aug 23–28, p. 486, 2021.
https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2022aems.conf..468S

2. Shamshiev F.T., On the existence of a local integrals in the dynamics of stellar systems. //IAU Symposium 398 & MODEST-25. 2025.

https://gravity.snu.ac.kr/iaus398/?page_id=2127&utm_source=chatgpt.com

3. Шамшиев Ф.Т., Случаи существования локального интеграла в звездной динамике. //Сборник научных трудов Международной конференции «Science and Innovation 2022», Ташкент, 20 октябрь, с. 362, 2022 год. https://www.doi.org/10.34920/Science_and_innova_on_2022

4. Shamshiev F.T, Cases of further integrability of the equations of motion for presence of the local integral in the space model, Сборник научных трудов Международной конференции «Science and Innovation 2023», с.193-195, 19 октября, 2023 год. https://www.doi.org/10.36522/Scienceandinnovation

5. Шамшиев Ф.Т., Специальный класс потенциалов, допускающих локальный интеграл движения при наличии вращения, “Физиканинг ривожида фундаментал-инновацион тадқиқотлар ва унинг истиқболлари”. //Республика илмий-амалий конференцияси материаллари тўплами. Тошкент, 14 октабрь, 2021 йил.

6. Shamshiev F.T., Local integral of motion in SB-galaxies and other rotating sistems. //Фундаментально-инновационные исследования в развитии физики и ее перспективы, с.140, 14 октабрь 2022 йил.

7. Shamshiev F.T., About modeling SB-galaxies using a local integral of motion. //“Mirzo Ulug‘bek – buyuk mutafakkir olim va davlat arbobi” mavzusidagi Xalqaro ilmiy-amaliy anjuman, 606-607 b., 14-15 may, 2024-yil.

8. Шамшиев Ф. Т., О моделировании динамики звёздной системы с учётом гравитационного взаимодействия и внешних возмущений. // Fizika fanining rivojida iste’dodli yoshlarning o‘rni, 14-15 b., 4-5-aprel 2025-yil.

9. Xurramov I.A., **Shamshiyev F.T.**, Lokal integralning ba’zi hollarini yulduzlar dinamikasiga tadbiqi haqida. //“Fizika fanining rivojida iste’dodli yoshlarning o‘rni”, Respublika ilmiy-amaliy konferensiya materiallari to‘plami: O‘zMU, 92-94 b., 5-6-aprel, 2024-yil.

10. Хуррамов И.А., Эргашева Н., **Шамшиев Ф.Т.**, Некоторые случаи существования локального интеграла в звездной динамике. //Proceedings of International Conference Fundamental and applied research in physics, 208-210, May 24-25, 2024-yil.

11. Xurramov I.A., **Shamshiev F.T.**, Potentials permitting a local integral in a three-dimensional field. //Fizika fanining rivojida iste’dodli yoshlarning o‘rni, 99-100 b., 4-5-aprel 2025-yil.

12. Xusenova N., **Shamshiev F.T.**, Modeling anisotropic accretion and stellar disk systems using local integrals of motion. //Fizika fanining rivojida iste’dodli yoshlarning o‘rni, 212-214 b., 7-8-aprel 2026-yil.

13. Muzaffarof Sh., Soatova G., Chimboyev I., **Shamshiyev F.T.**, Harakat integrallari yordamida anizotrop akretsion disk sistemalarini modellashtirish, //Fizika fanining rivojida iste’dodli yoshlarning o‘rni, 214-216 b., 7-8-aprel 2026-yil.

14. Shamshiev F.T., Integrable 2D Gravitational Potentials with Quartic Integrals and Applications to GC Dynamics, Traversing the Galactic Center in Space and Time, Proceedings IAU Symposium No. 405, M. Zajaček, T. Jeřábková, V. Karas, R. Schödel & P. Suková, eds., 2026. (Scopus Cite Score IF=1.4)

Avtoreferat “Fan va innovatsiyalar” xalqaro ilmiy jurnali (International scientific journal “Science and Innovation”) tahririyatida tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi (28.10.2026 yil. №159)

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 3,75. Adadi 100 dona. Buyurtma № 48/26.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Alisher Navoiy ko‘chasi, 36 uy.
Tel: +99894-600-44-07