**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI**
**HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI**
**DSc.03/2025.27.12.FM.01.03 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

**V. I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI**

**ABDULLAYEVA GULRUX SHUKURULLO QIZI**

# ALGEBRAIK-GIPERBOLIK NATURAL SPLAYNLARNI QURISH

**01.01.03-Hisoblash matematikasi va diskret matematika**
**(fizika-matematika fanlari)**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI**
**bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi**
**AVTOREFERATI**

**Toshkent – 2026**

**UO‘K: 519.652.3**

**Fizika – matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико – математическим наукам**

**Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical – mathematical sciences**

**Abdullayeva Gulrux Shukurullo qizi**
**Algebraik- giperbolik natural splaynlarni qurish**. . . . . 3

**Абдуллаева Гулрух Шукурулло кизи**
**Построение алгебраически-гиперболических натуральных сплайнов**. . . . . 21

**Abdullaeva Gulrukh Shukurullo qizi**
**Construction of algebraic-hyperbolic natural.splines** . . . . . 39

**E’lon qilingan ishlar ro‘yxati**
Список опубликованных работ
List of published works . . . . . 43

**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI**
**HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI**
**DSc.03/2025.27.12.FM.01.03 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

**V. I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI**

**ABDULLAYEVA GULRUX SHUKURULLO QIZI**

# ALGEBRAIK-GIPERBOLIK NATURAL SPLAYNLARNI QURISH

**01.01.03-Hisoblash matematikasi va diskret matematika**
**(fizika-matematika fanlari)**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI**
**bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi**
**AVTOREFERATI**

**Toshkent – 2026**

**Fizika–matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2025.2.PhD/FM1296 raqam bilan ro‘yxatga olingan.**

Dissertatsiya O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, ingliz, rus(rezyume)) Ilmiy kengash veb – sahifasi (http://ik-fizmat.nuu.uz) va “Ziyonet” axborot ta’lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

| | |
|---|---|
| **Ilmiy rahbar:** | **Nuraliyev Farhod Abdug‘aniyevich**<br>fizika-matematika fanlari doktori, dotsent |
| **Rasmiy opponentlar:** | **Normurodov Chori Begaliyevich**<br>fizika-matematika fanlari doktori, professor |
| | **Boltayev Aziz Kuziyevich**<br>fizika-matematika fanlari doktori, dotsent |
| **Yetakchi tashkilot:** | **Qoraqalpoq davlat universiteti** |

Dissertatsiya himoyasi O‘zbekiston Milliy universiteti huzuridagi DSc.03/2025.27.12.FM.01.03 raqamli Ilmiy kengashning «___»_____ 2026 yil soat____ dagi majlisida bo‘lib o‘tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 227-12-24, faks: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan O‘zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (___ raqami bilan ro‘yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 246-02-24).

Dissertatsiya avtoreferati 2026 yil «____» _____kuni tarqatildi.
(2026 yil «____» _____ dagi _____ raqamli reestr bayonnomasi).

**M.M. Aripov**
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy
kengash raisi, f.-m.f.d., professor

**Z.R. Raxmonov**
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy
kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d., professor

**R.D. Aloyev**
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy
kengash huzuridagi ilmiy seminar
raisi, f.-m.f.d., professor

## KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

**Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruriyati.** Jahonda olib borilayotgan ko‘plab ilmiy-amaliy tadqiqotlar natijasida funksiyalarning taxminiy ko‘rinishini qurish masalasi matematika va muhandislik sohalaridagi dolzarb muammolardan biri bo‘lib qolmoqda. Hozirda ushbu turdagi masalalarda splayn funksiyalarni qo‘llash yetakchi o‘rinlardan birini egallamoqda. Dunyo miqyosida nafaqat sof matematika, balki mexanika, fizika, iqtisodiyot va informatikaga taalluqli muammolarni sonli yechishda splayn funksiyalar yordamida yaqinlashtirishdan atroflicha foydalaniladi. Dastlabki yaqinlashtirish usullariga ko‘phadli, kasrli, hamda eng kichik kvadratlar usuli yordamida yaqinlashtirish usullari kiradi, lekin bunday yaqinlashtirish usullari kichik silliqlikka ega funksiyalarni yaqinlashtirishda yaxshi natija bermaydi. Shu nuqtai nazardan, splaynlarni amaliyotga joriy etishni taqozo etadi. Shu jihatdan turli xil algebraik va variatsion usullar bilan splayn funksiyalarni qurish hamda ularning tatbiqidan foydalanish muhim vazifalardan biri bo‘lib qolmoqda.

Jahonda murakkab shakldagi funksiyalarni yuqori aniqlik bilan yaqinlashtirish, differensial va integral tenglamalarni sonli yechish, grafik tasvirlash va ma’lumotlarni qayta ishlashga yo‘naltirilgan ilmiy-tadqiqot ishlari olib borilmoqda. Bu borada, yaqinlashtirish masalalarida splaynlarni natural, mahkamlangan, davriy shakllarda qurilishi mumkin, ular bo‘lakli, past darajali polinomlar, trigonometrik, giperbolik funksiyalar, eksponensial funksiyalar bo‘lib, ma’lum darajadagi uzluksizlikni ta’minlaydi. Shuning uchun, mexanika – fizika masalalarida, robototexnika, signallarni qayta ishlash va mashinali o‘qitishda splaynlar bilan yaqinlashtirishga alohida e’tibor berilmoqda.

Respublikamizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbiqiga ega bo‘lgan biotexnologiya, elektrodinamika, matematika-fizika, quyosh energiyasi, materialshunoslik, sun’iy intellekt va raqamli texnologiyalar sohalarida amaliy masalalarni sonli yechishda algebraik-giperbolik natural splaynlar hamda kubatur va kvadratur formulalar qurish uchun turli optimal usullar nazariyasini ishlab chiqish yuzasidan keng qamrovli chora-tadbirlar amalga oshirilib, muayyan natijalarga erishilmoqda. 2020-2023-yillarda O‘zbekiston Respublikasida matematika fanlari bo‘yicha ta’lim sifatini yaxshilash, ilmiy-tadqiqotlarning natijadorligi va amaliy ahamiyatini oshirish, jumladan, “Matematik va funksional analiz, algebra, differensial tenglamalar nazariyasi, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, matematik fizika, kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi, hisoblash matematikasi va diskret matematika” bo‘yicha muhim vazifalar belgilab berilgan[1]. Ushbu vazifalarni amalga oshirishda, jumladan, ma’lum Gilbert fazolaridagi normani minimumga erishtiruvchi variatsion algebraik-giperbolik natural splaynlarni qurish va ular yordamida tekislikda turli xil silliqlikka ega ma’lum egri chiziqlarni yuqori aniqlikda tiklash, hamda, berilgan oraliqda uzluksiz bo‘lgan funksiyalar integrallarini sonli yaqinlashtirish muhim ahamiyat kasb etmoqda.

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 – yil 7 – maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy – tadqiqotlarni rivojlantirish chora – tadbirlari to‘g‘risida” gi PQ – 4708 – sonli qarori.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022-yil 28-yanvar PF-60-son “2022-2026- yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi farmoni, 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori, 2019-yil 8-oktyabrdagi PF-5847-son “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi farmoni 2019-yil 27-apreldagi PQ-3682-son “Innovatsion g‘oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘grisida”gi qarori va 2021-yil 1-apreldagi PF-6198-son “Ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish bo‘yicha davlat boshqaruvi tizimini takomillashtirish to‘g‘risidagi farmonlari, hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

**Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi.** Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan

**Muammoning o‘rganilganlik darajasi.** Dastlab, splayn funksiya tushunchasi 1946-yil I.Schonberg tomonidan matematik apparat sifatida kiritilgan. Splayn funksiya sifatida bir-biriga yopishtirilgan bo‘lakli kubik ko‘phad olingan. Keyinchalik chegara shartlari ko‘paytirilib va ko‘phad darajasini oshirish natijasida qurilayotgan splaynlar takomillashtirildi. Bu davrda toq va juft darajali splaynlar qurish masalalari ma’lum bir ekstremal masalalarning yechimlari kabi o‘rganildi. Ta’kidlash joizki, minimal norma masalasida asosan toq darajali splaynlar uchraydi.

Toq darajali splaynlar nazariyasiga ikki xil nuqtai nazardan yondashish mumkin: birinchisi algebraik yondashuv bo‘lib, splaynni aniqlovchi tenglamalar sistemasini tekshirishga bog‘liq; ikkinchisi variatsion bo‘lib, bunda $K^m(a,b)$ va $K^{2m}(a,b)$ fazolariga tegishli funksiyalar va yaqinlashtiruvchi splaynlar o‘rtasidagi asosiy integral munosabatdan foydalaniladi.

Variatsion usulda qurilayotgan splaynlarning keng qamrovli rivoji J.C.Holladayning 1957-yilda e’lon qilingan ilmiy ishi bilan bog‘liq. Ushbu ishda $C^2 = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f''$ uzluksiz$\}$ sinfga tegishli bo‘lgan bo‘lakli kubik splayn quyidagi funksionalga minimum qiymat berishi keltirilgan

$$\int_a^b [f''(x)]^2 dx.$$

Ya’ni kubik splaynlar elastik tayoqning egilish potensial energiyasining kvadratik funksiyasini minimallashtiradi. M.Attia, P.M.Anselone, P.-J.Laurent splaynlarga ma’lum bir Gilbert fazosi elementi sifatida ta’rif berishdi va ularning yaqinlashishi va yagonaligini isbotladilar, hamda splaynlarni qurish algoritmini berdilar. Splaynlar haqidagi birinchi sistematik monografiya J.H.Ahlberg, E.N.Nilson va J.L.Walshlar tomonidan berilgan. Quyidagi olimlarning ishlari turli darajada dastlabki splaynlar nazariyasi va qo‘llanishi bilan bog‘liq:

L.L.Schumaker, C.de Boor, M.J.D.Powell, A.Sard, S.Weintraub, M.H. Schultz, B.Fisher, Yu.S.Zav`yalov, B.I.Kvasov, V.L.Miroshnichenko, V.A.Vasilenko, S.B.Stechkin, Yu.N.Subbotin, M.Isroilov va boshqalar.

Variatsion usulda splayn qurishda yomon shartlangan chiziqli tenglamalar sistemasini yechish uchun S.L.Sobolev tomonidan taklif qilingan algoritmdan keng foydalaniladi. Sobolev usulidan foydalanib, $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$, $L_2^{(m)}(0,1)$, $K_2(P_m)$ fazolaridagi yarim normani minimallashtiruvchi natural splaynlar qurilgan. Shuni ta'kidlash joizki, algebraik-giperbolik natural splaynlar va ularga mos optimal kvadratur formulalar so‘nggi yillarda faol tadqiq qilinmoqda. Ularning asosiy ustunligi shundaki, ular faqat algebraik ko‘phadlarnigina emas, balki shu bilan birga giperbolik va eksponensial funksiyalarni ham aniq tiklaydi.

So‘nggi yillarda splaynlar nazariyasi va qo‘llanishiga oid X.M.Shadimetov , A.Po‘latov, A.R.Hayotov, Z.K.Eshkuvatov , S.A.Baxromov, F.A.Nuraliyev, G.Milovanović, S.Campagna, S. de Marchi, E.Perracchione, M.Oraiche, A.Lamnii, M.Louzar, S.Eddargani, va boshqalar tomonidan salmoqli ishlar olib borilmoqda. Shuni ta'kidlash kerakki nochiziqli giperbolik, parabolik tenglamalar va sistemalarning taqribiy yechimi uchun M.M.Aripov, R.D.Aloev, Ch.B.Normurodov, D.Utebayev, Z.R.Rahmonov, M.U. Xudoyberganov va boshqalar yangi assimptotik usullarni ishlab chiqdilar va turli xil ayirmali sxemalarning turg‘unligini ko‘rsatdilar.

**Dissertatsiya mavzusining dissertatsiya bajarilayotgan oliy ta'lim muassasasining ilmiy – tadqiqot ishlari bilan bog‘liqligi.** Dissertatsiya tadqiqoti O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti Hisoblash matematikasi laboratoriyasida “Gilbert fazolarida optimal kvadratur, interpolyatsion, ayirmali formulalar qurish va ularni differensial va integral tenglamalar yechishga tatbiqlari” mavzusi bo‘yicha reja asosida olib borildi.

**Tadqiqotning maqsadi** differensiallanuvchi funksiyalarning $K_{2,\nu}^{(m)}$ Gilbert fazolarida algebraik-giperbolik natural splaylarni qurish algoritmini berish va splayn koeffitsiyentlarining oshkor ko‘rinishini olish, qurilgan splaynning boshqa ma'lum splaynlardan afzallik tomonlarini ko‘rsatishdan iborat.

**Tadqiqot vazifalari:**

ushbu $K_{2,\nu}^{(m)}(0,1)$ Gilbert fazosidagi normaga minimum beruvchi algebraik-giperbolik natural splaynlar qurish uchun ma'lum differensial operatorning diskret analogidan foydalanib algoritm yaratish;

yaratilgan algoritmdan foydalanib algebraik-giperbolik natural splayinning umumiy ko‘rinishini topish va uning koeffitsiyentlari uchun tenglamalar sistemasini olish;

oltinchi tartibli algebraik-giperbolik splayn uchun minimal norma xossasini keltirish va $K_{2,\nu}^{(3)}(0,1)$ fazodagi normaga minimum qiymat beruvchi oltinchi tartibli algebraik-giperbolik natural splayn qurish;

$K_{2,\nu}^{(4)}(0,1)$ fazodagi normaga minimum qiymat beruvchi sakkizinchi tartibli algebraik-giperbolik natural splayn qurish;

algebraik-giperbolik natural splayn orqali $K_{2,\nu}^{(m)}(0,1)$ fazosida algebraik va giperbolik funksiyalarga aniq bo‘lgan yangi ko‘rinishdagi kvadratur formula hosil qilish.

**Tadqiqotning obyekti.** Gilbert fazolari, umumlashgan splaynlar, algebraik va giperbolik funksiyalar, diskret argumentli funksiyalar, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasidan iboratdir.

**Tadqiqotning predmeti.** Birinchi integral munosabat, minimal norma xossasi, $K_{2,\nu}^{(m)}$ Gilbert fazosidagi normaga minimum beruvchi algebraik-giperbolik natural splayn, diskret Viner-Xopf tenglamalar sistemasi, $K_{2,\nu}^{(m)}$ fazosida optimal kvadratur formula, differensial operatorning diskret analogidan iborat.

**Tadqiqotning usullari.** Ilmiy tadqiqot ishida hisoblash matematikasi, funksional analiz, matematik analiz, umumlashgan funksiyalar, differensial tenglamalar, differensial operatorning diskret analogi, hamda, diskret argumentli funksiyalar nazariyasidan keng foydalanilgan.

**Tadqiqotning ilmiy yangiligi:**

ushbu $K_{2,\nu}^{(m)}(0,1)$ Gilbert fazosidagi normaga minimum beruvchi algebraik-giperbolik natural splaynlar qurish uchun ma’lum differensial operatorning diskret analogidan foydalanib algoritm yaratilgan;

yaratilgan algoritmdan foydalanib algebraik-giperbolik natural splayinning umumiy ko‘rinishi topilgan va uning koeffitsiyentlari uchun tenglamalar sistemasini olingan;

oltinchi tartibli algebraik-giperbolik splayn uchun minimal norma xossasi keltirilgan va $K_{2,\nu}^{(3)}(0,1)$ fazodagi normaga minimum qiymat beruvchi oltinchi tartibli algebraik-giperbolik natural splayn qurilgan;

$K_{2,\nu}^{(4)}(0,1)$ fazodagi normaga minimum qiymat beruvchi sakkizinchi tartibli algebraik-giperbolik natural splayn qurilgan;

algebraik-giperbolik natural splayn orqali $K_{2,\nu}^{(m)}(0,1)$ fazosida algebraik va giperbolik funksiyalarga aniq bo‘lgan yangi ko‘rinishdagi kvadratur formula hosil qilingan.

**Tadqiqotning amaliy natijalari** quyidagilardan iborat:

qurilgan algebraik-giperbolik natural splaynlar ma’lum mexanika masalalarni yechishga, jumladan, yer sirtining tasvirlarini qayta ishlash uchun neyron tarmoqlari ansambillariga tatbiq qilingan.

qurilgan algebraik-giperbolik natural splaynlardan bir va ikki o‘lchovli fraktal tuzilishli naqshlarni qurishda foydalanilgan. Natijada, to‘qimachilik dizaynida murakkab fraktal tuzilishidagi tasvirlardan foydalanish imkoniyati yaxshilangan.

**Tadqiqot natijalarining ishonchliligi.** Dissertatsiya ishida olingan natijalar funksional analiz, hisoblash matematikasi usullari, diskret argumentli funksiyalar nazariyalaridan foydalanib matematik jihatdan asoslangan, hamda, qurilgan splayn funksiyalarning yaqinlashish aniqligi sonli natijalarda ko‘rsatilgan.

**Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati.** Tadqiqot ishining ilmiy ahamiyati $K_{2,\nu}^{(m)}$ fazosidagi normaga minimum qiymat beruvchi algebraik-

giperbolik natural splayn qurish va qurilgan splayn $\sinh(vx), \cosh(vx)$ hamda $m-3$ darajali ko‘phadlarni aniq tiklashi va taranglik koeffitsiyentining turli qiymatlarida yaqinlashish xatoligini yanada kamaytirish mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati qurilgan algebraik–giperbolik natural splayn kompyuter grafikasi va 3D modellashtirish, sun’iy intellekt va raqamli signallarni qayta ishlash, tibbiyotda tasvirlarni qayta tiklash bilan izohlanadi.

**Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi**. Ushbu algebraik-giperbolik natural splaynlarni qurish va ularni tatbiq qilish bo‘yicha olingan natijalar asosida:

ushbu $K_{2,v}^{(m)}(0,1)$ Gilbert fazosida qurilgan interpolyatsion natural splaynlardan IL-4821091604 “Yer sirtining tasvirlarini qayta ishlash uchun pretsedentlar bo‘yicha qaror qabul qilish qoidalarini qo‘llagan holda tasvirlarni idendifikatsia qilivchi neyron tarmoqlari ansambillari” mavzusidagi fundamental loyihada tasvirning taxminiy ko‘rinishini tiklashda qo‘llanilgan. (Raqmli texnologiyalar va sun’iy intellektni rivojlantirish ilmiy-tadqiqot institutining 2025-yil 21-oktyabrdagi 27-8-690 sonli ma’lumotnomasi). Natijada, splaynlar bilan funksiyalarni yaqinlashtirishdagi absolyut xatoliklar yaxshilangan, olingan natijalar mexanika masalalarni yechishga tatbiq qilingan;

$2m-$tartibli algebraik-giperbolik natural splaynlardan AL-662204323 “Gazlama va gilamlardagi fraktal tuzilishli milliy naqshlarning modellari, algoritmlari va dasturiy majmualarini ishlab chiqish” mavzusidagi amaliy loyihada bir va ikki o‘lchovli fraktal tuzilishli naqshlarni qurishda qo‘llanilgan. (Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universitetining 2026-yil 9-yanvardagi 74-05-2 sonli ma’lumotnomasi). Natijada, to‘qimachilik dizaynida murakkab fraktal tuzilishidagi tasvirlardan foydalanish imkoniyati yaxshilangan.

**Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi.** Mazkur tadqiqot natijalari 16 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan 12 ta xalqaro va 4 tasi respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

**Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi.** Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 21 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi huzuridagi Oliy Attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalarining asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 5 ta maqola, ulardan, 1 tasi xorijiy va 4 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan, shuningdek elektron hisoblash mashinalari uchun dasturni rasmiy ro‘yxatdan o‘tkazish to‘g‘risidagi dasturiy guvohnoma olingan.

**Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi.** Dissertatsiya ishi kirish, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati va ilovadan tashkil topgan. Dissertatsiyaning umumiy hajmi 92 betni tashkil etadi.

## DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

**Kirish** qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, muammoning o‘rganilganlik darajasi, mavzu bo‘yicha dunyo miqyosidagi ilmiy-tadqiqotlar sharhi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Ushbu dissertatsiyaning **“Splayn funksiyalar”** nomli birinchi bobida qaralayotgan fazoda masala qo‘yilgan va masalani yechish uchun muhim ta’rif va teoremalar keltirilgan.

Unga ko‘ra umumlashgan splayn quyidagicha ta‘riflanadi. Faraz qilaylik, quyidagi ko‘rinishda aniqlangan $L$ differensial operator berilgan bo‘lsin.

$$L \equiv a_m(x)\frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + ...a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x),$$

bu yerda $a_m(x) \neq 0,\ a_j(x) \in C^j[a,b],\ (j = 0,1...,m).$

Ushbu operatorning qo‘shmasi $L^*$ ko‘rinishida belgilanadi va u quyidagicha aniqlanadi:

$$L^* \equiv (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}\{a_m(x)\cdot\} + (-1)^{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\{a_{m-1}(x)\cdot\} + ...(-1)\frac{d}{dx}\{a_1(x)\cdot\} + a_0(x).$$

Bizga quyidagicha aniqlangan funksiyalar sinfi berilgan bo‘lsin:

$$K^{(m)}(a,b) = \{f : [a,b] \to R,\ f^{(m-1)}(x) - \text{absolyut uzluksiz},\ f^{(m)} \in L_2(a,b)\}. \qquad (1)$$

Ushbu $K^{(m)}(a,b)$ funksiyalar sinfi quyidagi skalyar ko‘paytma bilan faktorizatsiya qilingan Gilbert fazosini tashkil qiladi

$$< f, g >_{K^{(m)}(a,b)} = \int_a^b Lf(x)Lg(x)dx,$$

norma skalyar ko‘paytma yordamida quyidagicha aniqlanadi:

$$\| f \|_{K^{(m)}(a,b)} = \sqrt{\int_a^b (Lf(x))^2 dx}. \qquad (2)$$

U holda umumlashgan splayn ta’rifi quyidagicha kiritiladi.

**1-ta’rif** Ushbu $\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$ bu $[a,b]$ dagi to‘r bo‘lsin. $\Delta$ to‘rga nisbatan aniqlangan defekti $k$ ga teng bo‘lgan Splayn bu $K^{2m-k}(a,b)$ sinfga tegishli bo‘lgan va $\Delta$ to‘rdagi har bir ochiq intervalda

$$L^* L S_\Delta = 0 \qquad (3)$$

differensial tenglamani qanoatlantiruvchi $S_\Delta(x)$ funksiyadir.

Umumlashgan splaynlar uchun birinchi integral munosabat haqidagi quyidagi teorema o‘rinli.

**1- teorema.** Agar $f(x)\in K^{(m)}(a,b)$ bo‘lib, $S_\Delta(f,x)$ bu $\Delta$ to‘rga nisbatan defekti 1 ga teng umumlashgan splayn hamda $\Delta$ to‘rning tugun nuqtalarida $f(x_j)-S_\Delta(x_j)=(j=0,1,...,N)$ qiymatlarni qabul qilsa va quyidagi shartlardan birini bajarsa

a) Umumlashgan $S_\Delta(f,x)$ splayn $\Delta$ to‘rning chetki nuqtalarida quyidagi qiymatlarni qabul qilsa $(LS_\Delta(f,b))^{(k)}=0,\ (LS_\Delta(f,a))^{(k)}=0, k=0,1,...,m-2$

b) $S_\Delta(f,x)$ splayn va $f(x)$ funksiya quyidagi chegaraviy shartlarni bajarsa $f^{(m-1-j)}(a)=S^{(m-1-j)}(f,a),\ f^{(m-1-j)}(b)=S^{(m-1-j)}(f,b),\ \ j=0,....,m-2$

c) $S_\Delta(f,x)$ splayn va $f(x)$ funksiyalar davriy

U holda quyidagi birinchi integral munosabat o‘rinli

$$\int_a^b\{Lf(x)\}^2dx=\int_a^b\{L[f(x)-S_\Delta(x)]\}^2dx+\int_a^b\{LS_\Delta(x)\}^2. \qquad (4)$$

Agar yuqoridagi teorema1 dagi a), b), c) shartlardan biri bajarilsa, u holda (4) birinchi integral munosabatdan quyidagi kelib chiqadi

$$\int_a^b\{Lf(x)\}^2dx\ge\int_a^b\{LS_\Delta(x)\}^2dx. \qquad (5)$$

Oxirgi tengsizlik $K^{(2m-1)}(a,b)$ dagi $2m-$taribli umumlashgan $S_\Delta(f,x)$ interpolyatsion splaynning minimal norma xossasini ifodalaydi.

Endi Gilbert fazosi ta’rifini keltiramiz:

**2-ta’rif.** Cheksiz o‘lchamli to‘la Evklid fazosi *Gilbert fazo* deyiladi.

Birinchi bobning to‘rtinchi paragrafida esa masalaning qo‘yilishi keltirilgan.

$L$ differensial operatorning turli ko‘rinishlari uchun $L$ splaynlar qurilgan. Shuni ta’kidlash kerakki $L$ differensial operator quyidagi

$$L_m\equiv\frac{d^m}{dx^m}-v^2\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} \qquad (6)$$

shaklda bo'lganda interpolyatsion natural splayn qurish masalasi hali ochiqligicha turibdi. Berilgan operetorga mos fazo ta’rifini keltiramiz.

**3-ta’rif.** Ushbu $K_{2,v}^{(m)}(a,b)$ to‘plam shunday $\varphi$ funksiyalar sinfiki ular $[a,b]$ da $m-1$- tartibgacha hosilalari absolyut uzluksiz va $m$- tartibli umumlashgan hosilasi $L_2(a,b)$ fazoga tegishli. $K_{2,v}^{(m)}(a,b)$ sinfi ushbu skalyar ko‘paytma bilan faktorizatsiya qilingan Gilbert fazoni tashkil qiladi

$$(\varphi,\psi)_{K_{2,v}^{(m)}(a,b)}=\int_a^b(\varphi^{(m)}-v^2\varphi^{(m-2)})\cdot(\psi^{(m)}-v^2\psi^{(m-2)})dx.$$

ushbu fazoda norma skalyar ko‘paytma orqali kiritiladi

$$\|\varphi\|_{K_{2,v}^{(m)}(a,b)}=(\int_a^b(\varphi^{(m)}-v^2\varphi^{(m-2)})^2dx)^{1\backslash2}.$$

Faraz qilaylik $\Delta: 0=x_0<x_1...<x_N=1$ to’rdagi $x_\beta$ tugun nuqtalarda $y_\beta$ qiymatlar berilgan bo‘lsin. $K_{2,v}^{(m)}(0,1)$ fazosida quyidagi masalani qaraymiz.

**1-masala.** Ushbu $K_{2,v}^{(m)}$ fazodagi

$$f(x_\beta) = y_\beta, \ \ \beta = 0,1,...,N,$$

Shartlarini qanoatlantiruvchi barcha $f$ funksiyalalar orasidan $\{\int_0^1 (f^{(m)}(x) - v^2 f^{(m-2)}(x))^2 dx\}^{\frac{1}{2}}$ kattalikka minimum qiymat beruvchi $S_{\Delta,m}(x)$ funksiyani topish.

Ushbu masalani yechish uchun quyidagi (7)-operatorning

$$L_m^* L_m \equiv \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - 2v^2 \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + v^4 \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}} \tag{7}$$

fundamental yechimi va diskret analogi muhim rol o‘ynaydi. (7) operatorning fundamental yechimi quyidagicha:

$$G_m(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{4v^{2m-1}} \left( vx\cosh(vx) - (2m-3)\sinh(vx) + 2\sum_{k=1}^{m-2} \frac{(m-k-1)(vx)^{2k-1}}{(2k-1)!} \right). \tag{8}$$

(7) differensial operatorning diskret analogi uchun quyidagi teorema o‘rinli.

**2-teorema.** Ushbu $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - 2v^2 \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ differensial operatorning diskret analogi quyidagi ko‘rinishga ega

$$D_m(h\beta) = \frac{2v^{2m-1}}{p_{2m-2}^{(2m-2)}} \begin{cases} \sum_{k=1}^{m-1} A_k \lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta| \geq 2, \\ 1 + \sum_{k=1}^{m-1} A_k, & |\beta| = 1, \\ C_m + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k}{\lambda_k}, & \beta = 0, \end{cases} \tag{9}$$

bu yerda $p_{2m-2}^{(2m-2)}, C_m, A_k, \lambda_k$ lar ma’lum hadlar.

Dissertatsiyaning “**Algebraik-giperbolik natural splaynlar**” deb nomlangan ikkinchi bobining birinchi paragrafda $2m-$tartibli algebraik-giperbolik natural splaynlarni qurish algoritmi berilgan, keyingi paragraflarda oltinchi va sakkizinchi tartibli algebraik-giperbolik natural splaynlar aniq qurilgan.

1- masalaning yechimi $2m$-tartibli algebraik-giperbolik natural splayn bo‘ladi va ushbu splaynga quyidagicha ta’rif beramiz.

**4-ta’rif.** Bizga [0,1] kesmada $\Delta: 0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_N = 1$ to‘r berilgan bo‘lsin. $\Delta$ to‘rda aniqlangan defekti 1 ga teng $2m$-tartibli algebraik-giperbolik natural splayn bu quyidagi shartlar asosida yagona ko‘rinishda aniqlanadigan funksiyadir:

I. $S_{\Delta,m}(x)$ funksiya har bir $(x_i, x_{i+1}), i = 0,1,...,N-1$ oraliqda $\sinh vx$, $\cosh vx$, $P_{2m-5}(x)$, $vx\sinh v$, $vx\cosh vx$ funksiyalar kombinatsiyasidan iboratdir.

II. $S_{\Delta,m}(x)$ funksiya $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$ oraliqlarning har birida $\sinh vx$, $\cosh vx$, $P_{m-3}(x)$ funksiyalar kombinatsiyasidan iboratdir.

III. $S_{\Delta,m}(x)$ funksiya quyidagi uzluksizlik va natural splayn bo‘lish shartlarini qanoatlantiradi

$$S_{\Delta,m}^{(\alpha)}(x_i-0)=S_{\Delta,m}^{(\alpha)}(x_i+0),\ \alpha=0,1...,2m-2,\ i=1,2,...,N-1,$$

$$S_{\Delta,m}^{(\alpha+m)}(0)-\nu^2 S_{\Delta,m}^{(\alpha+m-2)}(0)=S_{\Delta,m}^{(\alpha+m)}(1)-\nu^2 S_{\Delta,m}^{(\alpha+m-2)}(1)=0,\ \alpha=0,...,m-2$$

IV. $S_{\Delta,m}(x)$ funksiya quyidagi interpolyatsiya shartlarini qanoatlantiradi

$$S_{\Delta,m}(x_\beta)=y_\beta,\ \beta=0,1,...,N.$$

Endi 1-masalaning yechimini beruvchi splayn ko‘rinishi haqidagi quyidagi teoremani keltiramiz.

**3-teorema.** Ushbu $K_{2,\nu}^{(m)}(0,1)$ fazodagi yarim normaga minimum beruvchi algebraik-giperbolik natural splayn quyidagi ko‘rinishga ega

$$S_{\Delta,m}(x)=\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma G_m(x-x_\gamma)+d_1\sinh(\nu x)+d_2\cosh(\nu x)+\sum_{\alpha=0}^{m-3}p_\alpha x^\alpha . \qquad (10)$$

Bu yerda, $C_\gamma$ $(\gamma=0,1,...,N)$, $d_1,d_2$, $p_\alpha$ $(\alpha=0,1,...,m-3)$ lar noma’lumlardir va $G_m(x)$ bu (8) formula orqali berilgan.

Natural splayn koeffitsiyentlarini topish uchun quyidagi teorema o‘rinli.

**4-teorema.** Ushbu $K_{2,\nu}^{(m)}(0,1)$ fazodagi algebraik-giperbolik $2m$- tartibli natural splayn koeffitsiyentlari quyidagi sistemani qanoatlantiradi

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma G_m(x_\beta-x_\gamma)+d_1\sinh(\nu x_\beta)+d_2\cosh(\nu x_\beta)+\sum_{\alpha=0}^{m-3}p_\alpha {x_\beta}^\alpha=f(x_\beta),\beta=0,1,...,N \qquad (11)$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma\sinh(\nu x_\gamma)=0 \qquad (12)$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma\cosh(\nu x_\gamma)=0 \qquad (13)$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma x_\gamma^\alpha=0,\ \alpha=0,1,...,m-3 \qquad (14)$$

Endi (10) splayn koeffitsiyentlarini topish uchun algoritm beramiz. Bunda $x_\beta$ tugun nuqtalarni teng taqsimlangan deb olamiz $x_\beta=h\beta, h=1/N, N=1,2,....$

Faraz qilaylik, $\beta<0$ and $\beta>N$ bo‘lganda $C_\beta=0$ bo‘lsin. O‘rama amalini qo‘llab (13)-(16) sistemani quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz.

$$G_m(h\beta)*C_\beta+d_1\sinh(\nu h\beta)+d_2\cosh(\nu h\beta)+\sum_{\alpha=0}^{m-3}p_\alpha\cdot(h\beta)^\alpha=f(h\beta),\ \beta=0,1,...N \qquad (15)$$

$$\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta\sinh(\nu h\beta)=0 \qquad (16)$$

$$\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta\cosh(\nu h\beta)=0 \qquad (17)$$

$$\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta (h\beta)^\alpha = 0,\ \alpha = 0,1,...,m-3 \qquad (18)$$

Ushbu holatda 1-masalaga ekvivalent bo‘lgan quyidagi masalaga kelamiz.

**2-masala.** (15)–(18) tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi $C_\beta, \beta = 0,1,...,N$ va $d_1, d_2, p_\alpha, \alpha = 0,1,...,m-3$ koeffitsiyentlarni toping.

Quyidagicha belgilashlarni kiritib olamiz:

$$\mu_m(h\beta) = G_m(h\beta) * C_\beta, \qquad (19)$$

$$u_m(h\beta) = \mu_m(h\beta) + d_1 \sinh(h\beta) + d_2 \cosh(h\beta) + \sum_{\alpha=0}^{m-3} p_\alpha (h\beta)^\alpha . \qquad (20)$$

$D_m(h\beta)$ diskret analogning xossalaridan foydalanib $C_\beta$ koeffitsiyentlar uchun quyidagi ifodani olamiz

$$C_\beta = D_m(h\beta) * u_m(h\beta). \qquad (21)$$

bu yerda $u_m(h\beta)$ funksiya quyidagicha ifodaga ega

$$u_m(h\beta) = \begin{cases} d_1^- \sinh(h\beta) + d_2^- \cosh(h\beta) + \sum_{\alpha=0}^{m-3} p_\alpha^-(h\beta)^\alpha, & \beta \le 0, \\ f(h\beta), & 0 \le \beta \le N, \\ d_1^+ \sinh(h\beta) + d_2^+ \cosh(h\beta) + \sum_{\alpha=0}^{m-3} p_\alpha^+(h\beta)^\alpha, & \beta \ge N, \end{cases} \qquad (22)$$

(22) ifodadagi noma’lum hadlarni topish uchun $C_\beta = D_m(h\beta) * u_m(h\beta) = 0,$ $h\beta \notin [0,1]$ ekanligidan foydalanib, quyidagi masalani yechamiz.

**3-masala.** Quyidagi tenglamani yechish orqali $u_m(h\beta)$ funksiyaning $d_i^+, d_i^-, (i = 1,2),\ p_\alpha^+, p_\alpha^-, (\alpha = 0,1,...,m-3)$ noma’lum parametrlarini topish

$$D_m(h\beta) * u_m(h\beta) = 0,\ h\beta \notin [0,1]. \qquad (23)$$

Ushbu tenglama yordamida $D_m(h\beta)$ differensial operatorni qo‘llab $u_m(h\beta)$ ning oshkor ko‘rinishini topiladi. So‘ng (21)-ifodadan $C_\beta, (\beta = 0,1,...,N)$ koeffitsiyentlarni topamiz. Natijada 3-masala, 2-masala va 1 –masala ham yechiladi.

1-masalaning yechimi bo‘lgan (10) splayn koeffitsiyentlari uchun quyidagi teoremani oldik.

**5-teorema.** Ushbu $K_{2,\nu}^{(m)}(0,1)$ fazoda teng taqsimlangan tugun nuqtalar bilan shu fazodagi yarim normani minimallashtiruvchi algebraik-giperbolik natural splayn koeffitsiyentlarining oshkor ko‘rinishi quyidagicha:

$$C_0 = \frac{2\nu^{2m-1}}{p_{2m-2}^{(2m-2)}} \left[ -d_1^- \sinh(\nu h) + d_2^- \cosh(\nu h) + Cy(0) + y(h) + \sum_{\alpha=0}^{m-3} p_\alpha^-(-h)^\alpha \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k 2\nu^{2m-1}}{\lambda_k p_{2m-2}^{(2m-2)}} \left[ \sum_{\gamma=0}^{N} \lambda^\gamma y(h\gamma) + M_k + \lambda_k^N N_k \right],$$

$$C_\beta = \frac{2v^{2m-1}}{p_{2m-2}^{(2m-2)}}\left[y(h\beta - h) + Cf(h\beta) + f(h\beta + h)\right] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k 2v^{2m-1}}{\lambda_k p_{2m-2}^{(2m-2)}}\left[\sum_{\gamma=0}^{N} \lambda_k^{|\beta-\gamma|} f(h\gamma) + \lambda_k^{\beta} M_k + \lambda_k^{N-\beta} N_k\right],\ \beta = 1,2,...,N-1,$$
$$C_N = \frac{2v^{2m-1}}{p_{2m-2}^{(2m-2)}}\left[Cf(1) + f(1-h) + d_1^+ \sinh(v+vh) + d_2^+ \cosh(v+vh) + \sum_{\alpha=0}^{m-3} p_\alpha^+ (1+h)^\alpha\right] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k 2v^{2m-1}}{\lambda_k p_{2m-2}^{(2m-2)}}\left[\sum_{\gamma=0}^{N} \lambda_k^{N-\gamma} f(h\gamma) + \lambda_k^{N} M_k + N_k\right],$$

$$d_i = \frac{1}{2}(d_i^+ + d_1^-),\ \ p_\alpha = \frac{1}{2}(p_\alpha^+ + p_\alpha^-),\ \ p_\alpha = 0,1,...,m-3$$

bu yerda

$$M_k = \frac{\lambda_k[d_2^-(\cosh(vh) - \lambda_k) - d_1^- \sinh(vh)]}{1 + \lambda_k^2 - 2\lambda_k \cosh(vh)} + \sum_{\alpha=1}^{m-3} p_\alpha^- (-h)^\alpha \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{\lambda_k^i \Delta^i 0^\alpha}{(1-\lambda_k)^{i+1}} + \frac{p_0^- \lambda_k}{1-\lambda_k},$$

$$N_k = \frac{\lambda_k[d_1^+(\sinh(vh+v) - \lambda_k \sinh v) + d_2^+(\cosh((vh+v) - \lambda_k \cosh v)]}{1 + \lambda_k^2 - 2\lambda_k \cosh(vh)} +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{m-3} p_\alpha^+ \left(\sum_{j=1}^{\alpha} C_\alpha^j h^j \sum_{i=1}^{j} \frac{\lambda_k^i \Delta^i 0^j}{(1-\lambda_k)^{i+1}} + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_k}\right) + \frac{p_0^+ \lambda_k}{1-\lambda_k},$$

va $p_{2m-2}^{(2m-2)}, A_k, C_m, \lambda_k$ lar 2-teoremada berilgan,

$$d_2^- = f(0) - p_0^-,\ d_2^+ = \frac{f(1) - d_1^+ \sinh(v) - \sum_{\alpha=0}^{m-3} p_\alpha^+}{\cosh(v)}, \qquad (24)$$

va $d_1^+, d_1^-,\ p_\alpha^+, p_\alpha^-, (\alpha = 0,1,...,m-3)$ lar esa quyidagi sistemadan topiladi.

$$\begin{pmatrix}
B_{d_1^-}[1,1] & B_{p_0^-}[1,2] & . & B_{p_{m-3}^-}[1,m-1] & B_{d_1^+}[1,m] & B_{p_0^+}[1,m+1] & . & B_{p_{m-3}^+}[1,2m-2] \\
B_{d_1^-}[2,1] & B_{p_0^-}[2,2] & . & B_{p_{m-3}^-}[2,m-1] & B_{d_1^+}[2,m] & B_{p_0^+}[2,m+1] & . & B_{p_{m-3}^+}[2,2m-2] \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
B_{d_1^-}[m-1,1] & B_{p_0^-}[m-1,2] & . & B_{p_{m-3}^-}[m-1,m-1] & B_{d_1^+}[m-1,m] & B_{p_0^+}[m-1,m+1] & . & B_{p_{m-3}^+}[m-1,2m-2] \\
B_{d_1^-}[m,1] & B_{p_0^-}[m,2] & . & B_{p_{m-3}^-}[m,m-1] & B_{d_1^+}[m,m] & B_{p_0^+}[m,m+1] & . & B_{p_{m-3}^+}[m,2m-2] \\
B_{d_1^-}[m+1,1] & B_{p_0^-}[m+1,2] & . & B_{p_{m-3}^-}[m+1,m-1] & B_{d_1^+}[m+1,m] & B_{p_0^+}[m+1,m+1] & . & B_{p_{m-3}^+}[m+1,2m-2] \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
B_{d_1^-}[2m-2,1] & B_{p_0^-}[2m-2,2] & . & B[2m-2,m-1] & B_{d_1^+}[2m-2,m] & B_{p_0^+}[2m-2,m+1] & . & B_{p_{m-3}^+}[2m-2,2m-2]
\end{pmatrix}
\times
\begin{pmatrix} d_1^- \\ p_0^- \\ . \\ . \\ . \\ p_{m-3}^- \\ d_1^+ \\ p_0^+ \\ . \\ . \\ . \\ p_{m-3}^+ \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ . \\ . \\ . \\ T_{m-1} \\ T_m \\ T_{m+1} \\ . \\ . \\ . \\ T_{2m-2} \end{pmatrix} \qquad (25)$$

Endi oltinchi tartibli algebraik-giperbolik splayn uchun minimal norma xossasini ifodalovchi quyidagi birinchi integral munosabat o‘rinli

**5-ta'rif.** $0 = x_0 < x_1 < ... < x_N = 1$ to'rga nisbatan defekti 1 ga teng bo'lgan oltinchi tartibli algebraik-giperbolik splayn bu [0,1] kesmadagi $K^{(5)}$ sinfdan olingan $S_{\Delta,3}(x)$ funksiya bu har bir ochiq $(x_{i-1}, x_i), i = 1,2,..., N$ intervalda quyidagi differensial tenglamani qanoatlantiradigan funksiyadir

$$L_3^* L_3 S_{\Delta,3} = 0. \qquad (26)$$

**1-natija.** Agar $f(x)$ funksiya $K_{2,v}^{(3)}$ fazoga tegishli bo'lsa, u holda $S_{\Delta,3}(f,x)$ splayn uni $0 = x_0 < x_1 < ... < x_N = 1$ to'rda interpolyatsiya qilsa va quyidagi shartlardan birontasini qanoatlantirsa:

a) $f(x)$ funksiya va $S_{\Delta,3}(f,x)$ oltinchi tartibli algebraik-giperbolik interpolyatsion splayn uchun $\Delta$ to'rning chetki nuqtalarida quyidagi tenglik o'rinli bo'lsa
$L_3 S_{\Delta,3}(f;0) = 0,\ L_3 S_{\Delta,3}(f;1) = 0,\ (L_3 S_{\Delta,3}(f;0))' = 0,\ (L_3 S_{\Delta,3}(f;1))' = 0,$

b) $f(x)$ funksiya va $S_{\Delta,3}(f,x)$ oltinchi tartibli algebraik-giperbolik interpolyatsion splayn quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantirsa
$f'(0) = S_{\Delta,3}'(f,0),\ f'(1) = S_{\Delta,3}'(f,1),\ f''(0) = S_{\Delta,3}''(f,0),\ f''(1) = S_{\Delta,3}''(f,1)$ ,

c) $f(x)$ funksiya $K_{2,v}^{(3)}$ fazoga tegishli davriy va $S_{\Delta,3}(f,x)$ oltinchi tartibli algebraik-giperbolik interpolyatsion splayn davriy bo'lsa,

u holda oltinchi tartibli algebraik-giperbolik interpolyatsion splayn uchun quyidagi birinchi integral munosabat o'rinli bo'ladi

$$\int_0^1 \{L_3 f(x)\}^2 dx = \int_0^1 \{L_3 S_{\Delta,3}(f;x)\}^2 dx + \int_0^1 \{L_3[f(x) - S_{\Delta,3}(f;x)]\}^2 dx. \qquad (27)$$

$m = 3$ bo'lganda 1-masalaning yechimini beruvchi oltinchi tartibli algebraik-giperbolik natural splayn ko'rinishi va koeffitsiyentlari haqidagi quyidagi teoremani oldik.

**6-teorema**. $K_{2,v}^{(3)}$ fazosidagi normaga minimum beruvchi funksiya algebraik – giperbolik natural splayn bo'lib, u quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$S_{\Delta,3}(f,x) = \sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma G_3(x - x_\gamma) + d_1 \sinh(vx) + d_2 \cosh(vx) + d_3, \qquad (28)$$

bu yerda $C_\gamma,\ \gamma = 0,1,..., N,\ d_1,\ d_2, d_3$ - (28)- splayn koeffitsiyentlari va quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma G_3(x_\beta - x_\gamma) + d_1 \sinh(vx_\beta) + d_2 \cosh(vx_\beta) + d_3 = f(x_\beta),\ \beta = 0,1,..., N, \qquad (29)$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma \sinh(vx_\gamma) = 0, \qquad (30)$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma \cosh(vx_\gamma) = 0, \qquad (31)$$

$$\sum_{i=0}^{N} C_i = 0, \tag{32}$$

Oltinchi tartibli algebraik-giperbolik natural splayn koeffitsiyentlari uchun quyidagi teorema o‘rinli.

**7-teorema.** $K_{2,\nu}^{(3)}$ fazoda tugunlari teng masofada bo‘lgan yarim normani minimallashtiruvchi (28)-interpolyatsion splayn koeffitsiyentlari quyidagi ko‘rinishga ega:

$$C_0 = \frac{2\nu^5}{p_4^{(4)}}\left\{-d_1^- \sinh \nu h + d_2^- \cosh \nu h + d_3^- + C_3 f(0) + f(h) + \sum_{k=1}^{2} \frac{A_k}{\lambda_k}[M_k + \right.$$

$$\left. + \sum_{\gamma=0}^{N} \lambda_k^{\gamma} f(h\gamma) + \lambda_k^{N} N_k]\right\},$$

$$C_\beta = \frac{2\nu^5}{p_4^{(4)}}\left\{ f(h(\beta-1)) + C_3 f(h\beta) + f(h(\beta+1)) + \sum_{k=1}^{2} \frac{A_k}{\lambda_k}[\lambda_k^{\beta} M_k + \right.$$

$$\left. + \sum_{\gamma=0}^{N} \lambda_k^{|\beta-\gamma|} f(h\gamma) + \lambda_k^{N-\beta} N_k]\right\},$$

$$C_N = \frac{2\nu^5}{p_4^{(4)}}\left\{d_1^+ \sinh(\nu(h+1)) + d_2^+ \cosh(\nu(h+1)) + d_3^+ + f(1-h) + C_3 f(1) + \sum_{k=1}^{2} \frac{A_k}{\lambda_k}[\lambda_k^{N} M_k + \right.$$

$$\left. + \sum_{\gamma=0}^{N} \lambda_k^{N-\gamma} f(h\gamma) + N_k]\right\},$$

$$d_i = \frac{1}{2}(d_i^+ + d_i^-),\ i = 1,2,3.$$

Bu yerda

$$M_k = -d_1^- \frac{\lambda_k \sinh \nu h}{1 + \lambda_k{}^2 - 2\lambda_k \cosh(\nu h)} + d_2^- \frac{\lambda_k(\cosh(\nu h) - \lambda_k)}{1 + \lambda_k{}^2 - 2\lambda_k \cosh(\nu h)} + d_3^- \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_k}, \tag{33}$$

$$N_k = d_1^+ \frac{\lambda_k(\sinh(\nu(h+1)) - \lambda_k \sinh \nu)}{1 + \lambda_k{}^2 - 2\lambda_k \cosh(\nu h)} + d_2^+ \frac{\lambda_k(\cosh(\nu(h+1)) - \lambda_k \cosh \nu)}{1 + \lambda_k{}^2 - 2\lambda_k \cosh(\nu h)} + d_3^+ \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_k} \tag{34}$$

$p_4^{(4)}, A_k, C_3, \lambda_k$ lar 2-teoremada berilgan

$$d_2^- = f(0) - d_3^-,\ d_2^+ = \frac{f(1) - d_1^+ \sinh(\nu) - d_3^+}{\cosh(\nu)},$$

va qolgan $d_1^-$, $d_3^-$, $d_1^+$, $d_3^+$ noma’lum parametrlarni quyidagi tenglamalar sistemasidan topiladi

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_1^- \\ d_3^- \\ d_1^+ \\ d_1^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

$m=4$ bo‘lganda 1-masalaning yechimini beruvchi oltinchi tartibli algebraik-giperbolik natural splayn ko‘rinishi va koeffitsiyentlari haqidagi quyidagi teoremani oldik.

**8-teorema.** Ushbu $K_{2,\nu}^{(4)}$ fazodagi yarim normani minimallashtiruvchi natural splayn quyidagi ko‘rinishga ega

$$S_{\Delta,4}(f;x)=\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma G_4(x-x_\gamma)+d_1\sinh(\nu x)+d_2\cosh(\nu x)+p_0+p_1x, \qquad (36)$$

bu yerda $C_\gamma,\gamma=0,1,...,N,d_1,d_2,p_0,p_1$ – (36) splayn koeffisisentlari. $G_4(x)$ esa $L_4^*L_4$ operatorning fundamental yechimi va $L_4^*L_4G_4(x)=\delta(x)$ differensial tenglamani qanoatlantiradi hamda quyidagi ko‘rinishga ega.

$$G_4(x)=\frac{sign(x)}{4\nu^7}(\nu x\cosh(\nu x)-5\sinh(\nu x)+2\sum_{k=1}^{2}\frac{(3-k)(\nu x)^{2k-1}}{(2k-1)!}), \qquad (37)$$

Bu yerda, $\delta(x)-$ bu Dirakning delta funksiyasi.

(36) Natural splayn koeffitsiyentlari quyidagi tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi.

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma G_4(x_\beta-x_\gamma)+d_1\sinh(\nu x_\beta)+d_2\cosh(\nu x_\beta)+p_0+p_1x_\beta=y_\beta,\ \beta=0,1,...,N, \qquad (38)$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma\sinh(\nu x_\gamma)=0, \qquad (39)$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma\cosh(\nu x_\gamma)=0, \qquad (40)$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma x_\gamma=0 \qquad (41)$$

$$\sum_{i=0}^{N}C_i=0. \qquad (42)$$

Sakkizinchi tartibli algebraik-giperbolik natural splayn koeffitsiyentlari uchun quyidagi teoremani oldik.

**9-teorema.** Ushbu $K_{2,\nu}^{(4)}$ fazodagi yarim normaga minimum beruvchi sakkizinchi tartibli algebraik-giperbolik natural splayn koeffitsiyentlari quyidagi ko‘rinishga ega

$$C_0=\frac{2\nu^7}{p_6^{(6)}}\Big\{-d_1^-\sinh(\nu h)+d_2^-\cosh(\nu h)+p_0^--p_1^-h+C_4f(0)+f(h)+$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k}{\lambda_k}[M_k+\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^\gamma f(h\gamma)+\lambda_k^N N_k]\Big\}$$

$$C_\beta=\frac{2\nu^7}{p_6^{(6)}}\Big\{f(h(\beta-1))+C_4f(h\beta)+f(h(\beta+1))+\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k}{\lambda_k}[\lambda_k^\beta M_k+\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{|\beta-\gamma|}f(h\gamma)+\lambda_k^{N-\beta}N_k]\Big\},$$

$\beta=1,2...,N-1,$

$$C_N = \frac{2v^7}{p_6^{(6)}}\Big\{d_1^+\sinh(v(h+1)) + d_2^+\cosh(v(h+1)) + p_0^+ + p_1^+\cdot(h+1) + f(1-h) + C_4 f(1) +$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k}{\lambda_k}[\lambda_k^N M_k + \sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{N-\gamma} f(h\gamma) + N_k]\Big\},$$

$$d_i = \frac{1}{2}(d_i^+ + d_i^-), (i=1,2),\ p_\alpha = \frac{1}{2}(p_\alpha^+ + p_\alpha^-), (\alpha = 0,1),$$

bu yerda

$$M_k = -d_1^- \frac{\lambda_k \sinh(vh)}{1+\lambda_k{}^2 - 2\lambda_k\cosh(vh)} + d_2^- \frac{\lambda_k(\cosh(vh)-\lambda_k)}{1+\lambda_k{}^2-2\lambda_k\cosh(vh)} + p_0^-\frac{\lambda_k}{1-\lambda_k} - hp_1^-\frac{\lambda_k}{(1-\lambda_k)^2},$$

$$N_k = d_1^+\frac{\lambda_k(\sinh(v(h+1)) - \lambda_k\sinh v)}{1+\lambda_k{}^2-2\lambda_k\cosh(vh)} + d_2^+\frac{\lambda_k(\cosh(v(h+1)) - \lambda_k\cosh v)}{1+\lambda_k{}^2-2\lambda_k\cosh(vh)} + (p_0^+ + p_1^+)\frac{\lambda_k}{1-\lambda_k} +$$

$$+hp_1^+\frac{\lambda_k}{(1-\lambda_k)^2}$$

va $p_6^{(6)}, A_k, C_4, \lambda_k$ 2-teoremada keltirilgan, $d_1^-, d_2^-, p_0^-, p_1^-, d_1^+, d_2^+, p_0^+, p_1^+$ koeffitsiyentlar (25), (26) ifodalardan $m=4$ bo‘lganda hosil bo‘ladi.

Dissertatsiyaning “**Algebraik-giperbolik natural splayn tatbiqlari**” deb nomlangan uchinchi bobida algebraik-giperbolik natural splayn va keng amaliyotga tatbiq qilinayotgan splaynlar solishtirilgan hamda qurilgan splayndan foydalanib kvadratur formula hosil qilingan.

Dastlab, $f_1(x) = \tan(x)$, $f_2(x) = e^{5x}$, $f_3(x) = \dfrac{1}{1+25\cdot(x-0{,}5)^2}$ funksiyani taranglik koeffitsiyentining turli qiymatlarida, [0.1] oraliqda tugun nuqtalar soni $N = 10, 50$ bo‘lganda algebraik-giperbolik va $D^m$ splaynlar orqali yaqinlashtirishdagi absolyut xatoliklarining maksimal qiymatlarini solishtirdik. Natijada ma’lum bir oraliqda uzluksiz bo‘lgan funksiyalarni algebraik-giperbolik natural splayn bilan yaqinlashtirgandagi absolyut xatoliklarni taranglik koeffitsiyentini o‘zgartirish yordamida yaxshilash mumkin. Bundan tashqari, e’tibor bersak $f_3(x)$ funksiya cheksiz silliqlikka ega bo‘lsada, klassik ko‘phadlar bilan yaxshi yaqinlashtirib bo‘lmaydi, shuning uchun funksiyalarni yaqinlashtirishda splaynlardan foydalanila boshlangan. Biz qurgan splayn ham $f_3(x)$ funksiyani yaxshi yaqinlashtirishini kuzatdik.

Biz qurgan $2m-$ tartibli algebraik-giperbolik natural splaynni berilgan oraliqda integrallash orqali quyidagi teoremani oldik.

**10-teorema.** Ushbu $2m$-tartibli interpolyatsion algebraik-giperbolik natural splayn orqali hosil qilingan kvadratur formula quyidagi ko‘rinishga ega

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \Gamma_m(x_\beta) + d_1\frac{\cosh(v)-1}{v} + d_2\frac{\sinh(v)}{v} + \sum_{\alpha=0}^{m-3}\frac{p_\alpha}{\alpha+1}\ . \qquad (43)$$

Bu yerda $v \in R\setminus\{0\}$, $x_\beta = h\beta$ $(\beta = 0,1,...,N)$ - bu [0,1] dagi teng taqsimlangan nuqtalar $h = \dfrac{1}{N}, (m-1 \le N \in \mathrm{N})$ va $C_\beta, \beta = 0,1,...,N$, $d_1, d_2, p_\alpha, \alpha = 0,1,...,m-3$ lar (12) splayn koeffitsiyentlari va

$$\Gamma_m(x_\beta)=\frac{1}{4v^{2m}}\Big(vx_\beta\sinh(vx_\beta)+v(1-x_\beta)\sinh(v(1-x_\beta))-(2m-2)(\cosh vx_\beta-$$

$$+\cosh(v(1-x_\beta))-2)+\sum_{k=1}^{m-2}\frac{(m-k-1)v^{2k}}{k\cdot(2k-1)!}\cdot({x_\beta}^{2k}+(1-x_\beta)^{2k})\Big).$$

10-teoremadan $m=2,3,4$ bo‘lgan hollarida alohida natijalarni olganmiz va ushbu natijalarning $f(x)=\sinh(vx)+x^5$ funksiyaning [ 0 , oraliqdagi integrallarni yaqinlashtirishdagi xatoliklarini ushbu $K_{2,v}^{(m)}$ fazodagi optimal kvadratur formula xatoligi bilan solishtirdik va xatoliklar aynan teng ekanligini kuzatdik. I.J.Shoenbergning $L=\frac{d^m}{dx^m}$ bo‘lganda (2) yarim normaga minimum beruvchi splaynni integrallash orqali hosil qilgan kvadratur formulasi Sard manosidagi optimal kvadratur formula bilan bir xilligi haqidagi nazariyani tasdiqladik.

Bundan tashqari, integral qiymatlar orqali quriladigan algebraik-giperbolik integro kvazi-interpolyantlar, integro-kvadratik splayn, algebraik-trigonometrik integro splaynlar va interpolatsya qiymatlari orqali quriladigan algebraik-giperbolik natural splayning funksiyalarni yaqinlashtirishdagi xatoliklarini taqqosladik.

## XULOSA

Ushbu dissertatsiya ishida $K_{2,v}^{(m)}(0,1)$ Gilbert fazosidagi normaga minimum beruvchi splayn qurish masalasi qaralgan. Bunda Sobolev tomonidan taklif qilingan metoddan foydalanib giperbolik funksiyalarga va $m-3$ darajali ko'phadga aniq bo'lgan $2m-$ tartibli algebraik-giperbolik natural splaynlar qurildi.

Dissertatsiya ishida quyidagi asosiy natijalar olindi:

1. Ushbu $K_{2,v}^{(m)}(0,1)$ Gilbert fazosidagi normaga minimum beruvchi algebraik-giperbolik natural splaynlar qurish uchun differensial operatorning diskret analogidan foydalanib algoritm yaratilgan;
2. Yaratilgan algoritmdan foydalanib algebraik-giperbolik natural splayinning umumiy ko’rinishi topildi va uning koeffitsiyentlari uchun tenglamalar sistemasi olingan;
3. Oltinchi tartibli algebraik-giperbolik splayn uchun minimal norma xossasi keltirilgan va $K_{2,v}^{(3)}(0,1)$ fazodagi normaga minimum qiymat beruvchi oltinchi tartibli algebraik-giperbolik natural splayn qurilgan;
4. $K_{2,v}^{(4)}(0,1)$ fazodagi normaga minimum qiymat beruvchi sakkizinchi tartibli algebraik-giperbolik natural splayn qurilgan;
5. Qurilgan splayn bilan mavjud amaliyotga keng tatbiq qilinadigan splaynlar solishtirilgan;
6. Algebraik-giperbolik natural splayn orqali $K_{2,v}^{(m)}(0,1)$ fazosida yangi ko’rinishdagi kvadratur formula hosil qilingan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/2025.27.12.FM.01.03**
**ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ**
**НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В. И. РОМАНОВСКОГО**

**АБДУЛЛАЕВА ГУЛРУХ ШУКУРУЛЛО КИЗИ**

# ПОСТРОЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ НАТУРАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ

**01.01.03 – Вычислительная и дискретная математика**
**(физико-математические науки**

**АВТОРЕФЕРАТ**
**диссертации доктора философии (PhD) по**
**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

**Ташкент – 2026**

**Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Академии Наук Республики Узбекистан за B2025.2.PhD/FM1296.**

Диссертация выполнена в институте математики имени В.И. Романовского АНРУз

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале “ZiyoNet” (www.ziyonet.uz).

| | |
|---|---|
| **Научный руководитель:** | **Нуралиев Фарход Абдуганиевич**<br>доктор физико-математических наук, доцент |
| **Официальные оппоненты:** | **Нормуродов Чори Бегалиевич**<br>доктор физико-математических наук, профессор |
| | **Болтаев Азиз Кузиевич**<br>доктор физико-математических наук, доцент |
| **Ведущая организация:** | **Каракалпакский государственный университет** |

Защита диссертации состоится «____» _____2026 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.03/2025.27.12.FM.01.03 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _____2026 года.
(протокол рассылки №_____ от «____» _____2026 года).

**М.М. Арипов**
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

**З.Р. Рахмонов**
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н. профессор

**Р.Д. Алоев**
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученой степени доктора наук, д.ф.-м.н., профессор

## ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

**Актуальность и востребованность темы диссертации.** В результате многочисленных научно-практических исследований, проводимых во всём мире, задача построения приближённого представления функций стала одной из актуальных проблем в области математики и инженерии. В настоящее время в задачах данного типа применение сплайн-функций занимает одно из ведущих мест. В мировом масштабе не только в чистой математике, но и при численном решении задач, относящихся к механике, физике, экономике и информатике, широко используется приближение с помощью сплайн-функций. К первоначальным методам приближения относятся полиномиальные, рациональные, а также методы наименьших квадратов, однако такие методы не дают хороших результатов при приближении функций с малой гладкостью. С этой точки зрения возникает необходимость внедрения сплайнов в практику. В этом контексте построение сплайн-функций с использованием различных алгебраических и вариационных методов, а также их практическое применение, остаются одной из важнейших задач.

В мире ведутся научно-исследовательские работы, направленные на высокоточное приближение функций сложной формы, численное решение дифференциальных и интегральных уравнений, графическую визуализацию и обработку данных. В этой области сплайны в задачах приближения могут быть построены в натуральной, закреплённой (clamped) и периодической формах; они представляют собой кусочно-заданные функции в виде многочленов невысокой степени, тригонометрических, гиперболических и экспоненциальных функций, обеспечивающих заданную степень непрерывности. Поэтому в задачах механики и физики, робототехнике, обработке сигналов и машинном обучении приближению с использованием сплайнов уделяется особое внимание.

В нашей республике принимаются масштабные меры и достигаются определённые результаты в разработке теории оптимальных методов построения алгебраическо-гиперболических натуральных сплайнов, а также кубатурных и квадратурных формул для численного решения прикладных задач в таких областях, как биотехнология, электродинамика, физико-математические науки, солнечная энергетика, материаловедение, искусственный интеллект и цифровые технологии, имеющих фундаментальное и практическое значение. В Республике Узбекистан на период 2020–2023 годов определены важные задачи по повышению качества математического образования, а также эффективности и практической значимости научных исследований, в том числе “Математический и функциональный анализ, алгебра, теория дифференциальных уравнений, теория вероятностей и математическая статистика, математическая физика, теория функций комплексного переменного, вычислительная математика и

дискретная математика”[2]. В реализации данных задач, в частности, важное значение имеет построение вариационных алгебраическо-гиперболических натуральных сплайнов, минимизирующих норму в заданных гильбертовых пространствах, восстановление с высокой точностью различных кривых на плоскости с заданной гладкостью с их помощью, а также численное приближение интегралов функций, непрерывных на заданном интервале.

Рассматриваемое диссертационное исследование в определённой степени служит реализации задач и целей, предусмотренных нормативно-правовыми документами Республики Узбекистан, такими как Указ Президента Республики Узбекистан № УП-60 от 28 января 2022 года «О Стратегии развития Нового Узбекистана на 2022–2026 годы», Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», Указ Президента Республики Узбекистан № УП-5847 от 8 октября 2019 года «Об утверждении Концепции развития системы высшего образования Республики Узбекистан до 2030 года», Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП-3682 от 27 апреля 2019 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы внедрения инновационных идей, технологий и проектов»; Указ Президента Республики Узбекистан № УП-6198 от 1 апреля 2021 года «О совершенствовании системы государственного управления развитием научной и инновационной деятельности».

**Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики.** Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий Республики Узбекистан – IV. «Математика, механика и информатика».

**Степень изученности проблемы.** Впервые понятие сплайн-функции было введено в 1946 году Isaac Jacob Schoenbergom как математический аппарат. В качестве сплайн-функции рассматривался кусочно-заданный кубический многочлен, составленный из сопряжённых между собой участков. В дальнейшем сплайны совершенствовались за счёт увеличения числа граничных условий и повышения степени многочлена. В этот период вопросы построения сплайнов нечётной и чётной степени изучались как решения некоторых экстремальных задач. Следует отметить, что в задаче минимизации нормы в основном встречаются сплайны нечётной степени.

К теории сплайнов нечётной степени можно подходить с двух точек зрения: первая — алгебраическая, связанная с исследованием системы уравнений, определяющих сплайн; вторая — вариационная, при которой используется основное интегральное соотношение между функциями,

---

[2] Постановление Президента Республики Узбекистан от 7 мая 2020 года No ПП-4708 “О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики”.

принадлежащими пространствам $K^m(a,b)$ и $K^{2m}(a,b)$, и приближающими сплайнами.

Широкое развитие сплайнов, построенных вариационным методом, связано с научной работой J. Holladay, опубликованной в 1957 году. В этой работе показано, что кусочно-кубический сплайн, принадлежащий соответствующему классу $C^2 = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f'' \text{ непрерывный} \}$, минимизирует заданный функционал

$$\int_a^b [f''(x)]^2 dx$$

Иными словами, кубические сплайны минимизируют квадратичный функционал потенциальной энергии изгиба упругого стержня. M.Attia, P.M.Anselone, P.-J.Laurent определили сплайны как элементы некоторого гильбертова пространства, доказали их сходимость и единственность, а также предложили алгоритмы их построения. Первая систематическая монография по теории сплайнов была опубликована J.H.Ahlbergom, E.N.Nilsonom и J.L.Walshem. Работы следующих учёных в различной степени связаны с развитием теории и применением сплайнов: L.L.Schumaker, C.de Boor, M.J.D.Powell, A.Sard, S.Weintraub, M.H. Schultz, B.Fisher, Ю.С.Завьялов, Б.И.Квасов, В.Л.Мирошниченко, В.А.Василенко, С.Б.Стечкина, Ю.Н.Субботина, М.Исроилов и другие.

При построении сплайнов методом вариации широко используется алгоритм, предложенный С.Л.Соболевым, для решения плохо обусловленных систем линейных уравнений. Используя метод Соболева, были построены натуральные сплайны, минимизирующие полу-норму в пространствах $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$, $L_2^{(m)}(0,1)$, $K_2(P_m)$. Следует отметить, что алгебраическо-гиперболические натуральные сплайны и соответствующие им оптимальные квадратурные формулы активно исследуются в последние годы. Их основное преимущество заключается в том, что они точно интерполируют не только алгебраические многочлены, но вместе с тем точно воспроизводят также гиперболические и экспоненциальные функции.»

В последние годы Х.М.Шадиметов, А.Пулатов, А.Р.Хаётов, З.К.Эшкуватов, С.А.Бахромов, Ф.А.Нуралиев, G.Milovanović, S.Campagna, S. de Marchi, E.Perracchione, M.Oraiche, A.Lamnii, M.Louzar, S.Eddargani и другие проводили значительные работы по теории и применению сплайнов. Следует отметить, что для приближенного решения нелинейных гиперболических, параболических уравнений и систем М.М.Арипов, Р.Д.Алоев, Ч.Б.Нормуродов, Д.Утебаев, З.Р.Рахмонов, М.У. Худойберганов и другие разработали новые асимптотические методы и показали устойчивость различных разностных схем.

**Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполнена диссертация.** Диссертационное исследование выполнено в рамках календарного плана лаборатории вычислительной математики Института математики им.

В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан по теме «Построение оптимальных квадратурных, интерполяционных, разностных формул в гильбертовых пространствах и их применения для решения дифференциальных и интегральных уравнений».

**Цель исследования:** представить алгоритм построения алгебраическо-гиперболических натуральных сплайнов в гильбертовых пространствах $K_{2,\nu}^{(m)}$ дифференцируемых функций и получить явный вид коэффициентов сплайна, показать преимущества построенного сплайна перед другими известными сплайнами.

**Задачи исследования:**

разработать алгоритм построения алгебраическо-гиперболических натуральных сплайнов, минимизирующих норму в гильбертовом пространстве $K_{2,\nu}^{(m)}(0,1)$, с использованием дискретного аналога дифференциального оператора;

на основе разработанного алгоритма найти общий вид алгебраическо-гиперболического натурального сплайна и получить систему уравнений для определения его коэффициентов;

доказать свойство минимальности нормы для алгебраическо-гиперболического сплайна шестого порядка и построить соответствующий натуральный сплайн шестого порядка, минимизирующий норму в пространстве $K_{2,\nu}^{(3)}(0,1)$;

построить алгебраическо-гиперболический натуральный сплайн восьмого порядка, минимизирующий норму в пространстве $K_{2,\nu}^{(4)}(0,1)$;

на основе алгебраическо-гиперболического натурального сплайна получить новую оптимальный квадратурную формулу, точной для алгебраических и гиперболических функций, в пространстве $K_{2,\nu}^{(m)}(0,1)$.

**Объект исследования** составляют гильбертовы пространства, обобщённые сплайны, алгебраические и гиперболические функции, функции дискретного аргумента, системы линейных алгебраических уравнений.

**Предмет исследования** составляют первое интегральное соотношение, свойство минимальности нормы, алгебраическо-гиперболический натуральный сплайн, минимизирующий норму в гильбертовом пространстве $K_{2,\nu}^{(m)}(0,1)$, система дискретных уравнений Винера–Хопфа, оптимальная квадратурная формула в пространстве $K_{2,\nu}^{(m)}(0,1)$, а также дискретный аналог дифференциального оператора.

**Методы исследования.** В работе использованы методы вычислительной математики, функционального анализа, математического анализа, теории обобщённых функций, дифференциальных уравнений, теория дискретного аналога дифференциального оператора, а также теория функций дискретного аргумента.

**Научная новизна исследования:**

разработан алгоритм построения алгебраическо-гиперболических натуральных сплайнов, минимизирующих норму в гильбертовом пространстве $K_{2,\nu}^{(m)}(0,1)$, с использованием известного дискретного аналога дифференциального оператора;

на основе разработанного алгоритма получен общий вид алгебраическо-гиперболического натурального сплайна и система уравнений для определения его коэффициентов;

для сплайна шестого порядка доказано свойство минимальности нормы и построен алгебраическо-гиперболический натуральный сплайн шестого порядка, минимизирующий норму в пространстве $K_{2,\nu}^{(3)}(0,1)$;

построен алгебраическо-гиперболический натуральный сплайн восьмого порядка, минимизирующий норму в пространстве $K_{2,\nu}^{(4)}(0,1)$;

на основе алгебраическо-гиперболического натурального сплайна разработана новая квадратурная формула, точной для алгебраических и гиперболических функций, в пространстве $K_{2,\nu}^{(m)}(0,1)$.

**Практические результаты исследования следующее:**

Построенные алгебраико-гиперболические натуральные сплайны были применены к решению некоторых задач механики, в частности, к ансамблям нейронных сетей для обработки изображений поверхностей.

Построенные алгебраическо-гиперболические натуральные сплайны использовались для построения одномерных и двумерных фрактальных структурных узоров. В результате была улучшена возможность использования изображений со сложной фрактальной структурой в текстильном дизайне.

**Достоверность результатов исследования.** Полученные в диссертации результаты математически обоснованы с использованием методов функционального анализа, вычислительной математики и теории функций дискретного аргумента, а также точность сходимости построенных сплайн-функций продемонстрирована на основе численных результатов.

**Научная и практическая значимость результатов исследования.** Научная значимость заключается в том, что построенные алгебраическо-гиперболические натуральные сплайны, минимизирующие норму в пространстве $K_{2,\nu}^{(m)}(0,1)$, позволяют точно восстанавливать многочлены степеней $\sinh(\nu x), \cosh(\nu x)$ и $m-3$, а также значительно уменьшать погрешность аппроксимации при различных значениях коэффициента жёсткости. Это расширяет возможности математического моделирования функций с высокой точностью в гильбертовых пространствах.

Практическая значимость состоит в том, что построенные алгебраическо-гиперболические натуральные сплайны находят широкое применение как гладкие аппроксимирующие функции в компьютерной графике и 3D-моделировании, в системах искусственного интеллекта и обработки цифровых сигналов, в медицинской визуализации и ряде других областей, где требуется точная интерполяция и аппроксимация данных.

**Внедрение результатов исследования** На основе результатов, полученных при построении и применении данных алгебраически-гиперболических натуральных сплайнов:

интерполяционные натуральные сплайны, построенные в гильбертовом пространстве $K_{2,\nu}^{(m)}(0,1)$, использованы для приближённого восстановления изображений в рамках фундаментального проекта ИЛ-4821091604 «Ансамбли нейронных сетей для идентификации изображений земной поверхности с использованием правил принятия решений на основе прецедентов» (справка Научно-исследовательского института развития цифровых технологий и искусственного интеллекта от 21 октября 2025 года № 27-8-690). В результате уменьшены абсолютные погрешности аппроксимации функций сплайнами, а полученные результаты применены при решении задач механики;

алгебраико-гиперболические натуральные сплайны порядка $2m$ использованы для построения одномерных и двумерных узоров с фрактальной структурой в рамках прикладного проекта АЛ-662204323 «Разработка моделей, алгоритмов и программных комплексов национальных узоров с фрактальной структурой на тканях и коврах» (справка Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада аль-Хорезми от 9 января 2026 года № 74-05-2). В результате расширены возможности использования изображений со сложной фрактальной структурой в текстильном дизайне.

**Апробация результатов исследования**. Результаты диссертационного исследования обсуждались на 16 научно-практических конференциях, из которых 12 — международные и 4 — республиканские.

**Опубликованность результатов исследования**. По теме диссертации опубликовано 21 научных работ, из них 5 статей в научных изданиях, рекомендованных для публикации основных научных результатов докторских диссертаций при Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан: 1 статья — в зарубежном журнале, 4 статьи — в республиканских журналах. Также получено одно свидетельство о внесении работы в официальную базу данных для ЭВМ.

**Объём и структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Общий объём диссертации составляет 92 страниц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении диссертации обоснована актуальность и необходимость выбранной темы, показана её связь с приоритетными направлениями развития науки и технологий в Республике, проанализирован уровень изученности проблемы, приведён обзор мировых научных исследований по теме, определены цель и задачи исследования, объект и предмет, изложена научная новизна и практическая значимость результатов, дана информация о внедрении полученных результатов, опубликованных работах и структуре диссертации.

В первой главе диссертации под названием **«Сплайн-функции»** рассматривается понятие обобщённого сплайна и свойство минимальности нормы. В последующих параграф формулируется задача в рассматриваемом пространстве и приводятся важные определения и теоремы, необходимые для её решения.

Исходя из этого, обобщенный сплайн определяется следующим образом. Предположим, что существует дифференциальный оператор $L$, определенный следующим образом

$$L \equiv a_m(x)\frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + ...a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x),\ a_m(x) \neq 0,\ a_j(x) \in C^j[a,b],\ (j = 0,1...,m).$$

Сопряжённое этого оператора обозначается как $L^*$ и определяется следующим образом:

$$L^* \equiv (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}\{a_m(x)\cdot\} + (-1)^{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\{a_{m-1}(x)\cdot\} + ...(-1)\frac{d}{dx}\{a_1(x)\cdot\} + a_0(x).$$

Пусть нам дан класс функций, определенных следующим образом:

$$K^{(m)}(a,b) = \{f : [a,b] \to R,\ f^{(m-1)}(x) - \text{абсолютно непрерывна},\ f^{(m)} \in L_2(a,b)\} \quad (1)$$

Этот класс функций $K^{(m)}(a,b)$ образует гильбертово пространство, факторизованное по следующему скалярному произведению

$$< f, g >_{K^{(m)}(a,b)} = \int_a^b Lf(x)Lg(x)dx,$$

норма определяется с помощью скалярного произведения следующим образом:

$$\| f \|_{K^{(m)}(a,b)} = \sqrt{\int_a^b (Lf(x))^2 dx} \quad (2)$$

Тогда определение обобщенного сплайна вводится следующим образом.

**Определение 1.** Пусть $\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$ сетка в $[a,b]$.Сплайн, определенный относительно сетки $\Delta$ с дефектом $k$, является функцией $S_\Delta(x)$, принадлежащей классу $K^{2m-k}(a,b)$ и удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$L^* L S_\Delta = 0 \quad (3)$$

на каждом открытом интервале сетки $\Delta$.

Для обобщенных сплайнов справедлива следующая теорема о первом интегральном соотношении.

**Теорема 1**. Если $f(x) \in K^{(m)}(a,b)$ $S_\Delta(f,x)$ обобщенный сплайн с дефектом 1 относительно сетки $\Delta$ и принимает значения $f(x_j) - S_\Delta(x_j) = (j = 0,1,...,N)$ в узловых точках сетки $\Delta$ и удовлетворяет одному из следующих условий:

а) если обобщенный сплайн $S_\Delta(f,x)$ принимает следующие значения в крайних точках сетки $\Delta$

$$(LS_\Delta(f,b))^{(k)} = 0,\ (LS_\Delta(f,a))^{(k)} = 0, k = 0,1,...,m-2$$

б) если сплайн $S_\Delta(f,x)$ и функция $f(x)$ удовлетворяют следующим граничным условиям

$$f^{(m-1-j)}(a) = S^{(m-1-j)}(f,a),\ f^{(m-1-j)}(b) = S^{(m-1-j)}(f,b),\ \ j = 0,....,m-2$$

с) если сплайн $S_\Delta(f,x)$ и функция $f(x)$ периодические.

Тогда справедливо следующее первое интегральное соотношение

$$\int_a^b \{Lf(x)\}^2 dx = \int_a^b \{L[f(x) - S_\Delta(x)]\}^2 dx + \int_a^b \{LS_\Delta(x)\}^2 \qquad (4)$$

Если выполняется одно из условий a), b), c) теоремы 1, то из первого интегрального соотношения (4) следует следующее.

$$\int_a^b \{Lf(x)\}^2 dx \geq \int_a^b \{LS_\Delta(x)\}^2 dx \qquad (5)$$

Последнее неравенство выражает свойство минимальной нормы обобщенного интерполяционного сплайна $S_\Delta(f,x)$ $2m-$го порядка в $K^{(2m-1)}(a,b)$.

Теперь приведем определение гильбертова пространства:

**Определение 2.** Полное евклидово пространство называется пространством Гильберта.

В четвертом параграф первой главы изложена постановка задачи.

Сплайны $L$ построены для различных представлений дифференциального оператора $L$. Следует отметить, что вопрос построения интерполяционного натурального сплайна, когда дифференциальный оператор $L$ имеет вид

$$L_m \equiv \frac{d^m}{dx^m} - v^2 \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} \qquad (6)$$

остается открытым. Приведем определение соответствующего пространства для данного оператора.

**Определение 3.** Этот множество $K_{2,v}^{(m)}(a,b)$ представляет собой класс функций $\varphi$, производные которых до порядка $m-1$ абсолютно непрерывны в $[a,b]$, а обобщенная производная порядка $m$ принадлежит пространству $L_2(a,b)$. Класс $K_{2,v}^{(m)}(a,b)$ образует факторизованное гильбертово пространство с скалярным произведением

$$(\varphi,\psi)_{K_{2,\nu}^{(m)}(a,b)}=\int_a^b(\varphi^{(m)}-\nu^2\varphi^{(m-2)})\cdot(\psi^{(m)}-\nu^2\psi^{(m-2)})dx\,.$$

В этом пространстве норма вводится через скалярное произведение

$$\|\varphi\|_{K_{2,\nu}^{(m)}(a,b)}=(\int_a^b(\varphi^{(m)}-\nu^2\varphi^{(m-2)})^2dx)^{1\backslash 2}.$$

Предположим, что в узлах $x_\beta$ сетки $\Delta: 0=x_0<x_1...<x_N=1$ заданы значения $y_\beta$. Рассмотрим следующую задачу в пространстве $K_{2,\nu}^{(m)}(0,1)$.

**Задача 1.** Среди всех функций $f$, удовлетворяющих условиям

$f(x_\beta)=y_\beta,\ \beta=0,1,...,N,$ в пространстве $K_{2,\nu}^{(m)}$, найти функцию $S_{\Delta,m}(x)$, которая дает минимальное значение величине $\left(\int_0^1(f^{(m)}(x)-\nu^2 f^{(m-2)}(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

Для решения этой задачи приведем важные определения и понятия.

Фундаментальное решение и дискретный аналог оператора

$$L_m^*L_m\equiv\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-2\nu^2\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\nu^4\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}} \tag{7}$$

играют важную роль в построении сплайна в этом гильбертовом пространстве $K_{2,\nu}^{(m,m-1)}(a,b)$. Фундаментальное решение оператора (7) имеет вид

$$G_m(x)=\frac{\operatorname{sgn}(x)}{4\nu^{2m-1}}\left(\nu x\cosh(\nu x)-(2m-3)\sinh(\nu x)+2\sum_{k=1}^{m-2}\frac{(m-k-1)(\nu x)^{2k-1}}{(2k-1)!}\right) \tag{8}$$

Для дискретного аналога дифференциального оператора (7) справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-2\nu^2\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ имеет вид

$$D_m(h\beta)=\frac{2\nu^{2m-1}}{p_{2m-2}^{(2m-2)}}\begin{cases}\sum_{k=1}^{m-1}A_k\lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta|\geq 2,\\ 1+\sum_{k=1}^{m-1}A_k, & |\beta|=1,\\ C_m+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{\lambda_k}, & \beta=0,\end{cases} \tag{9}$$

Здесь $p_{2m-2}^{(2m-2)},C_m,A_k,\lambda_k$ - известные члены.

В первом параграф второй главы диссертации под названием "**Алгебраическо-гиперболические натуральные сплайны**" дан алгоритм построения алгебраическо-гиперболических натуральных сплайнов порядка

$2m$, в последующих разделах точно построены алгебраическо-гиперболические натуральные сплайны шестого и восьмого порядков.

Решение **задачи 1** представляет собой алгебраическо-гиперболический натуральный сплайн порядка $2m$, который мы определяем следующим образом.

**Определение 4.** Пусть нам дана сетка $\Delta: 0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_N = 1$ на отрезке $[0,1]$. Алгебраическо-гиперболический натуральный сплайн порядка $2m$ с дефектом 1, определенным на сетке $\Delta$, является функцией, которая однозначно определяется следующими условиями:

I. Функция $S_{\Delta,m}(x)$ представляет собой комбинацию функций $\sinh vx$, $\cosh vx$, $P_{2m-5}(x)$, $vx\sinh v$, $vx\cosh vx$ на каждом интервале $(x_i, x_{i+1})$, $i = 0,1,...,N-1$.

II. Функция $S_{\Delta,m}(x)$ представляет собой комбинацию функций $\sinh vx$, $\cosh vx$, $P_{m-3}(x)$ на каждом интервале $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$.

III. Функция $S_{\Delta,m}(x)$ удовлетворяет следующим условиям непрерывности и быть натуральным сплайнам:

$$S^{(\alpha)}_{\Delta,m}(x_i - 0) = S^{(\alpha)}_{\Delta,m}(x_i + 0),\ \alpha = 0,1...,2m-2,\ i = 1,2,...,N-1,$$

$$S^{(\alpha+m)}_{\Delta,m}(0) - \nu^2 S^{(\alpha+m-2)}_{\Delta,m}(0) = S^{(\alpha+m)}_{\Delta,m}(1) - \nu^2 S^{(\alpha+m-2)}_{\Delta,m}(1) = 0,\ \alpha = 0,...,m-2.$$

IV. Функция $S_{\Delta,m}(x)$ удовлетворяет следующим условиям интерполяции

$$S_{\Delta,m}(x_\beta) = y_\beta,\ \beta = 0,1,...,N.$$

Теперь приведем следующую теорему о представлении сплайна, которая дает решение **задачи 1**.

**Теорема 3.** Алгебраическо-гиперболический натуральный сплайн, дающий минимум полунормы в этом пространстве $K^{(m)}_{2,\nu}(0,1)$, имеет следующий вид

$$S_{\Delta,m}(x) = \sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma G_m(x - x_\gamma) + d_1 \sinh(\nu x) + d_2 \cosh(\nu x) + \sum_{\alpha=0}^{m-3} p_\alpha x^\alpha \qquad (10)$$

Здесь, $C_\gamma$ $(\gamma = 0,1,...,N)$, $d_1, d_2$, $p_\alpha$ $(\alpha = 0,1,...,m-3)$ неизвестные, а $G_m(x)$ определяется формулой (8).

Следующая теорема справедлива для нахождения коэффициентов натурального сплайна.

**Теорема 4.** Коэффициенты алгебраическо-гиперболического натурального сплайна порядка $2m$ в пространстве $K^{(m)}_{2,\nu}(0,1)$ удовлетворяют следующей системе

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma G_m(x_\beta - x_\gamma) + d_1 \sinh(\nu x_\beta) + d_2 \cosh(\nu x_\beta) + \sum_{\alpha=0}^{m-3} p_\alpha {x_\beta}^\alpha = f(x_\beta), \beta = 0,1,...,N \qquad (11)$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma \sinh(\nu x_\gamma) = 0 \qquad (12)$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma \cosh(vx_\gamma) = 0 \tag{13}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma x_\gamma^\alpha = 0,\ \alpha = 0,1,\ldots,m-3 \tag{14}$$

Теперь дадим алгоритм нахождения коэффициентов сплайна (10). При этом мы предполагаем, что точки узлов $x_\beta$ распределены равномерно $x_\beta = h\beta, h = 1/N, N = 1,2,\ldots$.

Предположим, что $C_\beta = 0$ при $\beta < 0$ и $\beta > N$. Применяя операцию свертки, систему (11)-(14) можно записать в следующем виде

$$G_m(h\beta) * C_\beta + d_1 \sinh(vh\beta) + d_2 \cosh(vh\beta) + \sum_{\alpha=0}^{m-3} p_\alpha \cdot (h\beta)^\alpha = f(h\beta), \tag{15}$$

$$\beta = 0,1,\ldots N$$

$$\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \sinh(vh\beta) = 0 \tag{16}$$

$$\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \cosh(vh\beta) = 0 \tag{17}$$

$$\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta (h\beta)^\alpha = 0,\ \alpha = 0,1,\ldots,m-3 \tag{18}$$

В этом случае мы приходим к следующей задаче, эквивалентной **задаче 1**.

**Задача 2.** Найти коэффициенты $C_\beta, \beta = 0,1,\ldots,N$ и $d_1, d_2, p_\alpha, \alpha = 0,1,\ldots,m-3$, удовлетворяющие системе уравнений (15)–(18).

Введем следующие обозначения:

$$\mu_m(h\beta) = G_m(h\beta) * C_\beta, \tag{19}$$

$$u_m(h\beta) = \mu(h\beta) + d_1 \sinh(h\beta) + d_2 \cosh(h\beta) + \sum_{\alpha=0}^{m-3} p_\alpha (h\beta)^\alpha \tag{20}$$

Используя свойства дискретного аналога $D_m(h\beta)$, получаем следующее выражение для коэффициентов $C_\beta$

$$C_\beta = D_m(h\beta) * u_m(h\beta). \tag{21}$$

Здесь функция $u_m(h\beta)$ имеет следующее выражение

$$u_m(h\beta) = \begin{cases} d_1^- \sinh(h\beta) + d_2^- \cosh(h\beta) + \sum_{\alpha=0}^{m-3} p_\alpha^- (h\beta)^\alpha, & \beta \le 0, \\ f(h\beta), & 0 \le \beta \le N, \\ d_1^+ \sinh(h\beta) + d_2^+ \cosh(h\beta) + \sum_{\alpha=0}^{m-3} p_\alpha^+ (h\beta)^\alpha, & \beta \ge N, \end{cases} \tag{22}$$

Чтобы найти неизвестные члены в выражении (22), воспользуемся тем, что $C_\beta = D_m(h\beta) * u_m(h\beta) = 0, \quad h\beta \notin [0,1]$ и решим следующую задачу.

**Задача 3.** Найти неизвестные параметры $d_i^+, d_i^-, (i=1,2)$, $p_\alpha^+, p_\alpha^-$, $(\alpha = 0,1,...,m-3)$ функции $u_m(h\beta)$, путем решения следующее уравнение

$$D_m(h\beta) * u_m(h\beta) = 0,\ h\beta \notin [0,1]. \qquad (23)$$

Используя это уравнение и дифференциальный оператор $D_m(h\beta)$, находим явный вид $u_m(h\beta)$. Затем находим коэффициенты $C_\beta$, $(\beta = 0,1,...,N)$ из выражения (21). В результате также решаются задачи 3, 2 и 1.

Для коэффициентов сплайна (10), являющихся решением задачи 1, получена следующая теорема.

**Теорема 5.** Явное представление алгебраическо-гиперболических коэффициентов натуральных сплайнов, минимизирующих полунорму в пространстве $K_{2,v}^{(m)}(0,1)$ с узлами, равномерно распределенными в этом пространстве, имеет вид:

$$C_0 = \frac{2v^{2m-1}}{p_{2m-2}^{(2m-2)}}\left[-d_1^- \sinh(vh) + d_2^- \cosh(vh) + Cy(0) + y(h) + \sum_{\alpha=0}^{m-3} p_\alpha^-(-h)^\alpha\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k 2v^{2m-1}}{\lambda_k p_{2m-2}^{(2m-2)}}\left[\sum_{\gamma=0}^{N} \lambda^\gamma y(h\gamma) + M_k + \lambda_k^N N_k\right],$$

$$C_\beta = \frac{2v^{2m-1}}{p_{2m-2}^{(2m-2)}}\left[y(h\beta - h) + Cf(h\beta) + f(h\beta + h)\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k 2v^{2m-1}}{\lambda_k p_{2m-2}^{(2m-2)}}\left[\sum_{\gamma=0}^{N} \lambda_k^{|\beta-\gamma|} f(h\gamma) + \lambda_k^\beta M_k + \lambda_k^{N-\beta} N_k\right],\ \beta = 1,2,...,N-1,$$

$$C_N = \frac{2v^{2m-1}}{p_{2m-2}^{(2m-2)}}\left[Cf(1) + f(1-h) + d_1^+ \sinh(v+vh) + d_2^+ \cosh(v+vh) + \sum_{\alpha=0}^{m-3} p_\alpha^+(1+h)^\alpha\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k 2v^{2m-1}}{\lambda_k p_{2m-2}^{(2m-2)}}\left[\sum_{\gamma=0}^{N} \lambda_k^{N-\gamma} f(h\gamma) + \lambda_k^N M_k + N_k\right],$$

$$d_i = \frac{1}{2}(d_i^+ + d_1^-),\ \ p_\alpha = \frac{1}{2}(p_\alpha^+ + p_\alpha^-),\ \ p_\alpha = 0,1,...,m-3$$

здесь

$$M_k = \frac{\lambda_k[d_2^-(\cosh(vh) - \lambda_k) - d_1^- \sinh(vh)]}{1 + \lambda_k^2 - 2\lambda_k \cosh(vh)} + \sum_{\alpha=1}^{m-3} p_\alpha^-(-h)^\alpha \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{\lambda_k^i \Delta^i 0^\alpha}{(1-\lambda_k)^{i+1}} + \frac{p_0^- \lambda_k}{1-\lambda_k},$$

$$N_k = \frac{\lambda_k[d_1^+(\sinh(vh+v) - \lambda_k \sinh v) + d_2^+(\cosh((vh+v) - \lambda_k \cosh v)]}{1 + \lambda_k^2 - 2\lambda_k \cosh(vh)} +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{m-3} p_\alpha^+ \left(\sum_{j=1}^{\alpha} C_\alpha^j h^j \sum_{i=1}^{j} \frac{\lambda_k^i \Delta^i 0^j}{(1-\lambda_k)^{i+1}} + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_k}\right) + \frac{p_0^+ \lambda_k}{1-\lambda_k},$$

и $p_{2m-2}^{(2m-2)}, A_k, C_m, \lambda_k$ приведены в теореме 2.

$$d_2^- = f(0) - p_0^-,\ d_2^+ = \frac{f(1) - d_1^+ \sinh(v) - \sum_{\alpha=0}^{m-3} p_\alpha^+}{\cosh(v)}, \qquad (24)$$

а $d_1^+, d_1^-,\ p_\alpha^+, p_\alpha^-, (\alpha = 0,1,...,m-3)$ найдены из следующей системы

$$\begin{pmatrix}
B_{d_1^-}[1,1] & B_{p_0^-}[1,2] & . & B_{p_{m-3}^-}[1,m-1] & B_{d_1^+}[1,m] & B_{p_0^+}[1,m+1] & . & B_{p_{m-3}^+}[1,2m-2] \\
B_{d_1^-}[2,1] & B_{p_0^-}[2,2] & . & B_{p_{m-3}^-}[2,m-1] & B_{d_1^+}[2,m] & B_{p_0^+}[2,m+1] & . & B_{p_{m-3}^+}[2,2m-2] \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
B_{d_1^-}[m-1,1] & B_{p_0^-}[m-1,2] & . & B_{p_{m-3}^-}[m-1,m-1] & B_{d_1^+}[m-1,m] & B_{p_0^+}[m-1,m+1] & . & B_{p_{m-3}^+}[m-1,2m-2] \\
B_{d_1^-}[m,1] & B_{p_0^-}[m,2] & . & B_{p_{m-3}^-}[m,m-1] & B_{d_1^+}[m,m] & B_{p_0^+}[m,m+1] & . & B_{p_{m-3}^+}[m,2m-2] \\
B_{d_1^-}[m+1,1] & B_{p_0^-}[m+1,2] & . & B_{p_{m-3}^-}[m+1,m-1] & B_{d_1^+}[m+1,m] & B_{p_0^+}[m+1,m+1] & . & B_{p_{m-3}^+}[m+1,2m-2] \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
B_{d_1^-}[2m-2,1] & B_{p_0^-}[2m-2,2] & . & B[2m-2,m-1] & B_{d_1^+}[2m-2,m] & B_{p_0^+}[2m-2,m+1] & . & B_{p_{m-3}^+}[2m-2,2m-2]
\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_1^- \\ p_0^- \\ . \\ . \\ . \\ p_{m-3}^- \\ d_1^+ \\ p_0^+ \\ . \\ . \\ . \\ p_{m-3}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ . \\ . \\ . \\ T_{m-1} \\ T_m \\ T_{m+1} \\ . \\ . \\ . \\ T_{2m-2} \end{pmatrix}$$

(25)

Теперь справедливо следующее первое интегральное соотношение, выражающее свойство минимальной нормы для алгебраическо-гиперболического сплайна шестого порядка.

**Определение 5.** Алгебраическо-гиперболический сплайн шестого порядка с дефектом 1 относительно сетки $0 = x_0 < x_1 < ... < x_N = 1$-это функция $S_{\Delta,3}(x)$, полученная из класса $K^{(5)}$ на отрезке $[0,1]$, которая является функцией, удовлетворяющей следующему дифференциальному уравнению на каждом открытом интервале $(x_{i-1}, x_i),\ i = 1,2,...,N$

$$L_3^* L_3 S_{\Delta,3} = 0 \qquad (26)$$

**Лемма 1.** Если функция $f(x)$ принадлежит пространству $K_{2,v}^{(3)}$, то сплайн $S_{\Delta,3}(f,x)$ интерполирует ее на сетке $0 = x_0 < x_1 < ... < x_N = 1$ и удовлетворяет любому из следующих условий:

а) если для функции $f(x)$ и алгебраическо-гиперболического интерполяционного сплайна $S_{\Delta,3}(f,x)$ шестого порядка справедливо следующее равенство в крайних точках сетки $\Delta$

$$L_3 S_{\Delta,3}(f;0) = 0,\ L_3 S_{\Delta,3}(f;1) = 0,\ (L_3 S_{\Delta,3}(f;0))' = 0,\ (L_3 S_{\Delta,3}(f;1))' = 0,$$

б) если функция $f(x)$ и алгебраическо-гиперболический интерполяционный сплайн $S_{\Delta,3}(f,x)$ шестого порядка удовлетворяют следующим граничным условиям

$$f'(0) = S_{\Delta,3}{}'(f,0),\ f'(1) = S_{\Delta,3}{}'(f,1),\ f''(0) = S_{\Delta,3}{}''(f,0),\ f''(1) = S_{\Delta,3}{}''(f,1),$$

с) если функция $f(x)$ принадлежащей пространству $K_{2,v}^{(3)}$ является периодической и алгебраическо-гиперболической интерполяционный сплайн шестого порядка $S_{\Delta,3}(f,x)$ является периодической, то для алгебраическо-гиперболического интерполяционного сплайна шестого порядка уместно следующее первое интегральное отношение

$$\int_0^1 \{L_3 f(x)\}^2 dx = \int_0^1 \{L_3 S_{\Delta,3}(f;x)\}^2 dx + \int_0^1 \{L_3[f(x) - S_{\Delta,3}(f;x)]\}^2 dx \qquad (27)$$

При $m = 3$ мы получили следующую теорему о представлении и коэффициентах алгебраическо-гиперболического натурального сплайна шестого порядка, дающего решение задачи 1.

**Теорема 6**. Функция, дающая минимум норме в пространстве $K_{2,v}^{(3)}$, представляет собой алгебраическо-гиперболический натуральный сплайн, который имеет следующий вид

$$S_{\Delta,3}(f,x) = \sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma G_3(x - x_\gamma) + d_1 \sinh(vx) + d_2 \cosh(vx) + d_3 \qquad (28)$$

где $C_\gamma$, $\gamma = 0,1,...,N$, $d_1$, $d_2, d_3$ коэффициенты сплайна (28) и удовлетворяют следующей системе линейных уравнений

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma G_3(x_\beta - x_\gamma) + d_1 \sinh(vx_\beta) + d_2 \cosh(vx_\beta) + d_3 = f(x_\beta),\ \beta = 0,1,...,N, \qquad (29)$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma \sinh(vx_\gamma) = 0 \qquad (30)$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma \cosh(vx_\gamma) = 0 \qquad (31)$$

$$\sum_{i=0}^{N} C_i = 0 \qquad (32)$$

Для коэффициентов алгебраическо-гиперболического натурального сплайна шестого порядка справедлива следующая теорема.

**Теорема 7.** Коэффициенты интерполяционного сплайна (28), минимизирующие полунорму с узлами, равномерно расположенными в пространстве $K_{2,v}^{(3)}$, имеют следующий вид:

$$C_0 = \frac{2v^5}{p_4^{(4)}} \Big\{ -d_1^- \sinh vh + d_2^- \cosh vh + d_3^- + C_3 f(0) + f(h) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2} \frac{A_k}{\lambda_k} [M_k + \sum_{\gamma=0}^{N} \lambda_k^\gamma f(h\gamma) + \lambda_k^N N_k] \Big\},$$

$$C_\beta = \frac{2v^5}{p_4^{(4)}}\Big\{ f(h(\beta-1)) + C_3 f(h\beta) + f(h(\beta+1)) +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{\lambda_k}[\lambda_k^{\beta} M_k + \sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{|\beta-\gamma|} f(h\gamma) + \lambda_k^{N-\beta} N_k]\Big\},$$

$$C_N = \frac{2v^5}{p_4^{(4)}}\{d_1^+ \sinh(v(h+1)) + d_2^+ \cosh(v(h+1)) + d_3^+ + f(1-h) + C_3 f(1) +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{\lambda_k}[\lambda_k^{N} M_k + \sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{N-\gamma} f(h\gamma) + N_k]\},$$

$$d_i = \frac{1}{2}(d_i^+ + d_i^-),\ i = 1,2,3.$$

Здесь

$$M_k = -d_1^- \frac{\lambda_k \sinh vh}{1+\lambda_k{}^2 - 2\lambda_k \cosh(vh)} + d_2^- \frac{\lambda_k(\cosh(vh)-\lambda_k)}{1+\lambda_k{}^2 - 2\lambda_k \cosh(vh)} + d_3^- \frac{\lambda_k}{1-\lambda_k} \qquad (33)$$

$$N_k = d_1^+ \frac{\lambda_k(\sinh(v(h+1)) - \lambda_k \sinh v)}{1+\lambda_k{}^2 - 2\lambda_k \cosh(vh)} + d_2^+ \frac{\lambda_k(\cosh(v(h+1)) - \lambda_k \cosh v)}{1+\lambda_k{}^2 - 2\lambda_k \cosh(vh)} + d_3^+ \frac{\lambda_k}{1-\lambda_k} \qquad (34)$$

а $p_4^{(4)}, A_k, C_3, \lambda_k$ приведены в **теореме 2**.

$$d_2^- = f(0) - d_3^-,\ d_2^+ = \frac{f(1) - d_1^+ \sinh(v) - d_3^+}{\cosh(v)},$$

и остальные неизвестные параметры $d_1^-$, $d_3^-$, $d_1^+$, $d_3^+$ находятся из следующей системы уравнений

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_1^- \\ d_3^- \\ d_1^+ \\ d_1^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix}. \qquad (35)$$

При $m = 4$ мы получили следующую теорему о представлении и коэффициентах алгебраическо-гиперболического натурального сплайна шестого порядка, дающего решение задачи 1.

**Теорема 8.** Натуральный сплайн, минимизирующий полунорму в пространстве $K_{2,v}^{(4)}$, имеет следующий вид

$$S_{\Delta,4}(f;x) = \sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma G_4(x - x_\gamma) + d_1 \sinh(\nu x) + d_2 \cosh(\nu x) + p_0 + p_1 x \qquad (36)$$

здесь $C_\gamma, \gamma = 0,1,...,N, d_1, d_2, p_0, p_1$ – коэффициенты сплайна (36). А $G_4(x)$ — фундаментальное решение оператора $L_4^* L_4$, удовлетворяющее дифференциальному уравнению $L_4^* L_4 G_4(x) = \delta(x)$ и имеет следующий вид

$$G_4(x) = \frac{sign(x)}{4v^7}\left( vx\cosh(vx) - 5\sinh(vx) + 2\sum_{k=1}^{2}\frac{(3-k)(vx)^{2k-1}}{(2k-1)!} \right) \qquad (37)$$

Здесь, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Коэффициенты натурального сплайна (36) удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma G_4(x_\beta - x_\gamma) + d_1 \sinh(\nu x_\beta) + d_2 \cosh(\nu x_\beta) + p_0 + p_1 x_\beta = y_\beta,\ \beta = 0,1,...,N, \quad (38)$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma \sinh(\nu x_\gamma) = 0, \quad (39)$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma \cosh(\nu x_\gamma) = 0, \quad (40)$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma x_\gamma = 0 \quad (41)$$

$$\sum_{i=0}^{N} C_i = 0 \quad (42)$$

Для коэффициентов алгебраическо-гиперболического натурального сплайна восьмого порядка получена следующая теорема.

**Теорема 9.** Коэффициенты алгебраическо-гиперболического натурального сплайна восьмого порядка, дающие минимум полунорме в пространстве $K_{2,\nu}^{(4)}$, имеют следующий вид

$$C_0 = \frac{2\nu^7}{p_6^{(6)}}\{-d_1^- \sinh(\nu h) + d_2^- \cosh(\nu h) + p_0^- - p_1^- h + C_4 f(0) + f(h) + \sum_{k=1}^{3} \frac{A_k}{\lambda_k}[M_k +$$

$$+\sum_{\gamma=0}^{N} \lambda_k^\gamma f(h\gamma) + \lambda_k^N N_k]\}$$

$$C_\beta = \frac{2\nu^7}{p_6^{(6)}}\{f(h(\beta-1)) + C_4 f(h\beta) + f(h(\beta+1)) + \sum_{k=1}^{3} \frac{A_k}{\lambda_k}[\lambda_k^\beta M_k + \sum_{\gamma=0}^{N} \lambda_k^{|\beta-\gamma|} f(h\gamma) + \lambda_k^{N-\beta} N_k]\},$$

$$\beta = 1,2...,N-1,$$

$$C_N = \frac{2\nu^7}{p_6^{(6)}}\{d_1^+ \sinh(\nu(h+1)) + d_2^+ \cosh(\nu(h+1)) + p_0^+ + p_1^+ \cdot (h+1) + f(1-h) + C_4 f(1) + \sum_{k=1}^{3} \frac{A_k}{\lambda_k}[\lambda_k^N M_k +$$

$$+\sum_{\gamma=0}^{N} \lambda_k^{N-\gamma} f(h\gamma) + N_k]\},$$

$$d_i = \frac{1}{2}(d_i^+ + d_i^-), (i = 1,2),\ p_\alpha = \frac{1}{2}(p_\alpha^+ + p_\alpha^-), (\alpha = 0,1),$$

где

$$M_k = -d_1^- \frac{\lambda_k \sinh(\nu h)}{1 + \lambda_k{}^2 - 2\lambda_k \cosh(\nu h)} + d_2^- \frac{\lambda_k(\cosh(\nu h) - \lambda_k)}{1 + \lambda_k{}^2 - 2\lambda_k \cosh(\nu h)} + p_0^- \frac{\lambda_k}{1-\lambda_k} - h p_1^- \frac{\lambda_k}{(1-\lambda_k)^2},$$

$$N_k = d_1^+ \frac{\lambda_k(\sinh(\nu(h+1)) - \lambda_k \sinh \nu)}{1 + \lambda_k{}^2 - 2\lambda_k \cosh(\nu h)} + d_2^+ \frac{\lambda_k(\cosh(\nu(h+1)) - \lambda_k \cosh \nu)}{1 + \lambda_k{}^2 - 2\lambda_k \cosh(\nu h)} + (p_0^+ + p_1^+) \frac{\lambda_k}{1-\lambda_k} +$$

$$+ h p_1^+ \frac{\lambda_k}{(1-\lambda_k)^2}$$

и $p_6^{(6)}, A_k, C_4, \lambda_k$ приведены в **теореме 2**, а коэффициенты $d_1^-, d_2^-, p_0^-, p_1^-, d_1^+, d_2^+, p_0^+, p_1^+$ получаются из выражений (25), (26) при $m = 4$.

В третьей главе диссертации, озаглавленной "**Применение алгебраическо-гиперболических натуральных сплайнов**", сравниваются алгебраико-гиперболические натуральные сплайны и сплайны, применяемые в широкой практике, а также выводится квадратурная формула с использованием построенного сплайна.

Сначала функции $f_1(x) = \tan(x)$, $f_2(x) = e^{5x}$, $f_3(x) = \dfrac{1}{1 + 25 \cdot (x - 0{,}5)^2}$ аппроксимируют алгебраическо-гиперболическими сплайнами и сплайнами $D^m$ при различных значениях коэффициента натяжения, определяя через $R_n(f) = \max\limits_{0 \le x \le 1} \left| S_{\Delta,m}(x) - f(x) \right|$, максимальные абсолютные погрешности, полученные в интервале (0.1), и сравнивают. В результате абсолютные погрешности при аппроксимации функций, непрерывных на некотором интервале, алгебраическо-гиперболическим натуральным сплайном можно улучшить, изменяя коэффициент натяжения. Кроме того, если обратить внимание, хотя функция $f_3(x)$ имеет бесконечную гладкость, ее нельзя хорошо аппроксимировать классическими многочленами, поэтому при аппроксимации функций стали использовать сплайны. Мы также заметили, что построенный нами сплайн хорошо аппроксимирует функцию $f_3(x)$.

Интегрируя построенный нами алгебраическо-гиперболический натуральный сплайн порядка $2m$ на заданном интервале, мы получили следующую теорему.

**Теорема 10.** Квадратурная формула, полученная с помощью этого интерполяционного алгебраическо-гиперболического натурального сплайна порядка $2m$, имеет следующий вид

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \Gamma_m(x_\beta) + d_1 \frac{\cosh(v) - 1}{v} + d_2 \frac{\sinh(v)}{v} + \sum_{\alpha=0}^{m-3} \frac{p_\alpha}{\alpha + 1} \qquad (43)$$

Здесь $v \in R / 0$, $x_\beta = h\beta$ $(\beta = 0,1,..., N)$ - равномерно распределенные точки в $[0,1]$, $h = \dfrac{1}{N}$, $(m - 1 \le N \in \mathrm{N})$ и $C_\beta, \beta = 0,1,..., N$, $d_1, d_2, p_\alpha, \alpha = 0,1,..., m-3$ коэффициенты сплайна в (12) и

$$\Gamma_m(x_\beta) = \frac{1}{4v^{2m}} \Big( vx_\beta \sinh(vx_\beta) + v(1 - x_\beta)\sinh(v(1 - x_\beta)) - (2m - 2)(\cosh vx_\beta -$$

$$+ \cosh(v(1 - x_\beta)) - 2) + \sum_{k=1}^{m-2} \frac{(m - k - 1)v^{2k}}{k \cdot (2k - 1)!} \cdot (x_\beta{}^{2k} + (1 - x_\beta)^{2k}) \Big).$$

Из **теоремы 10** мы получили следующие результаты для случаев $m = 2, 3, 4$ и сравнили погрешности этих результатов при аппроксимации интегралов от функции $f(x) = \sinh(vx) + x^5$ на интервале [0, 1] с погрешностью оптимальной

квадратурной формулы в пространстве $K_{2,\nu}^{(m)}$ и обнаружили, что эти погрешности в точности равны.

Кроме того, сравнивались погрешности аппроксимации функций квазиинтерполянтом, построенным с использованием интегральных значений, и алгебраическо-гиперболическим натуральным сплайном, построенным с использованием интерполяционных значений.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной диссертационной работе рассматривается задача построения сплайна, минимизирующего норму в гильбертовом пространстве $K_{2,\nu}^{(m)}(0,1)$. При этом с использованием метода, предложенного Соболевым, были построены алгебраическо-гиперболические натуральные сплайны порядка $2m$, точные для гиперболических функций и многочленов степени $m-3$.

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. Разработан алгоритм с использованием дискретного аналога дифференциального оператора для построения алгебраическо-гиперболических натуральных сплайнов, минимизирующих норму в пространстве Гильберта $K_{2,\nu}^{(m)}(0,1)$;

2. С помощью созданного алгоритма найден общий вид алгебраическо-гиперболического натурального сплайна и получена система уравнений для его коэффициентов;

3. Представлено свойство минимальной нормы для алгебраическо-гиперболического сплайна шестого порядка и построен алгебраическо-гиперболический натуральный сплайн шестого порядка, дающий минимальное значение нормы в пространстве $K_{2,\nu}^{(3)}(0,1)$;

4. Построен алгебраическо-гиперболический натуральный сплайн восьмого порядка, который дает минимальное значение нормы в пространстве $K_{2,\nu}^{(4)}(0,1)$;

5. Построенный сплайн был сопоставлен с широко используемыми сплайнами, доступными на практике;

6. Получена новая квадратурная формула в пространстве $K_{2,\nu}^{(m)}(0,1)$ с помощью алгебраическо-гиперболического натурального сплайна.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES**
**DSc.03/2025.27.12.FM.01.03 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN**

**V. I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS**

**ABDULLAEVA GULRUKH SHUKURULLO QIZI**

# CONSTRUCTION OF ALGEBRAIC-HYPERBOLIC NATURAL SPLINES

**01.01.03 – Computational and discrete mathematics**
**ABSTRACT OF THE DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

**Tashkent – 2026**

**The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan under number B2025.2.PhD/FM1296.**

The dissertation was completed at the V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (resume)) on the website of the Scientific Council http://ik-fizmat.nuu.uz/ and on the website of «ZiyoNet» Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

| | |
|---|---|
| **Scientific supervisor:** | **Nuraliev Farhod Abduganiyevich**<br>Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor |
| **Official opponents:** | **Normurodov Chori Begaliyevich**<br>Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor<br>**Boltayev Aziz Kuziyevich**<br>Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor |
| **Leading organization:** | **Karakalpak State University** |

Defense will take place «____» _____2026 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.03/2025.27.12.FM.01.03 at National University of Uzbekistan. (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on «____» _____2026 year
(Mailing report № _____on «____» _____2026 year)

**M.M. Aripov**
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

**Z.R. Rakhmonov**
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

**R.D. Aloev**
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

## INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

**The purpose of the study** is to develop an algorithm for constructing algebraic-hyperbolic natural splines in Hilbert spaces $K_{2,\nu}^{(m)}$ of differentiable functions and to obtain an explicit representation of the spline coefficients, as well as to demonstrate the advantages of the constructed spline over other known splines.

**The object of the study is** Hilbert spaces, generalized splines, algebraic and hyperbolic functions, functions of a discrete argument, and systems of linear algebraic equations.

**The scientific novelty of the research work is as follows:**

an algorithm for the construction of algebraic-hyperbolic natural splines that minimize the norm in the Hilbert space $K_{2,\nu}^{(m)}$ has been developed using a discrete analogue of a known differential operator;

by utilizing the developed algorithm, the general form of the algebraic-hyperbolic natural spline has been determined, and a system of equations for its coefficients has been obtained;

the property of the minimum norm for a sixth-order algebraic-hyperbolic spline is given, and a sixth-order algebraic-hyperbolic natural spline that minimizes the norm in the $K_{2,\nu}^{(3)}$ space has been constructed;

an eighth-order algebraic-hyperbolic natural spline that minimizes the norm in the $K_{2,\nu}^{(4)}$ space has been constructed;

A new form of quadrature formula in the $K_{2,\nu}^{(m)}$ space has been derived using the algebraic-hyperbolic natural spline.

**Implementation of the research results.** Based on the results obtained from the construction and application of these algebraic-hyperbolic natural splines:

The interpolating natural splines constructed in the $K_{2,\nu}^{(m)}$-Hilbert space were utilized to reconstruct approximate image views during the execution of the fundamental project IL-4821091604, titled “Ensembles of Neural Networks Identifying Images Using Precedent-Based Decision Rules for Processing Earth Surface Images” (Certificate of Implementation No. 27-8-690, issued by the Research Institute for the Development of Digital Technologies and Artificial Intelligence on October 21, 2025). As a result, the absolute error in approximating functions with splines has been improved, and the results obtained have been applied to solving problems in mechanics.

Algebraic-hyperbolic natural splines of order 2m were used in the practical project AL-662204323 "Development of models, algorithms and software packages of national patterns with a fractal structure on fabrics and carpets" to construct patterns with a one-and two-dimensional fractal structure. (Reference No. 74-05-2 dated January 9, 2026 of the Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi). As a result, the possibility of using images with a complex fractal structure in textile design has improved.

**Approbation of the research results.** The results of this research have been discussed at 16 scientific and practical conferences, including 12 international and 4 national scientific-practical conferences.

**Publication of the research results.** A total of 21 scientific works have been published on the topic of the dissertation. Of these, 5 articles were published in scientific journals recommended by the Supreme Attestation Commission at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan for publishing the main results of doctoral dissertations, including 1 in an international journal and 4 in national journals. In addition, a certificate of official registration of a database for electronic computing machines has been obtained.

**The structure and volume of the thesis.** The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, a list of references, and appendices. The total volume of the dissertation is 92 pages.

## E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘XATI
## СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
## LIST OF PUBLISHED WORKS

### I bo‘lim (часть I; part I)

1. Г.Ш. Абдуллаева, Ф.А. Нуралиев. Свойства обобщенного сплайна четвертого порядка. Натуральные сплайны // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 2023. – № 3/1(50). – С. 118–137. (01.00.00;№9), https:// journals.airi.uz/index.php/pvpm.
2. A.R. Hayotov, F.A. Nuraliyev, G.Sh. Abdullayeva, Construction of the sixth order algebraic-hyperbolic interpolation natural spline, // Problems of computational and applied mathematics, Tashkent, 2024, №4/1(59), pp.107–121.(01.00.00; №9), https://journals.airi.uz/index.php/pvpm.
3. A.R. Hayotov, F.A. Nuraliev, G.Sh. Abdullaeva, The coeffisients of the spline minimizing semi norm in $K_2(P_3)$,// International journal of analysis and application, 2025. https://doi.org/10.28924/2291-8639-23-2025-7, ISSN: 2291-8639, Scopus (IF=1.1).
4. G.Sh. Abdullaeva, Construction of an algebraic-hyperbolic natural tension spline of eighth order, // Problems of computational and applied mathematics, Tashkent, 2025. №3(67), pp. 67–82, (01.00.00;№9), https://journals.airi.uz/index.php/pvpm.
5. F.A.Nuraliev, G.Sh. Abdullaeva, The optimal coefficients of the natural interpolation spline, // Reports of the Academy of Sciences of he Republic of Uzbekistan, 2025-№6. pp. 8 - 13.(01.00.00; №7).

### II bo‘lim (часть II; part II)

1. G.Sh. Abdullayeva. Gilbert fazosida algebraik-giperbolik natural splaynni qurish // "Matematik modellashtirish va axborot texnologiyalarining dolzarb masalalari" xalqaro ilmiy-amaliy anjuman tezislar to’plami (Nukus, 2–3-may, 2023-yil). – Nukus, 2023. – B. 10–12.
2. A.R. Hayotov, F.A. Nuraliyev, G.Sh. Abdullayeva, Properties of a generalized spline of fourth order natural splines, // Abstracts of the 8$^{th}$ international conference “Actual problems of applied mathematics and information technologies-Al-Khwarizmi 2023”, Samarkand, September 23-26, pp.112.
3. G.Sh. Abdullayeva, Oltinchi tartibli umumlashgan interpolyatsion splayn, // "Differensial tenglamalarning zamonaviy muammolari va ularning tatbiqlari" mavzusidagi xalqaro ilmiy-amaliy konferensiya, Toshkent 2023, 23-25-noyabr, 133-135 betlar.
4. F.A. Nuraliyev, G.Sh. Abdullayeva, Construction of sixth order natural splines in $K_2(P_3)$ space by Sobolev method, // Proceedings of the young scientists’ scientific conference “Current Problems and Applications of Modern Mathematics,” March 14–15, 2024, Tashkent, Uzbekistan, pp. 124–126.
5. F.A. Nuraliyev, G.Sh. Abdullayeva, The coeffisients of the spline minimizing the semi norm in $K_2(P_3)$, // Proceedings of the international scientific conference

"Modern problems of mathematics and its teaching", June 21–22, 2024, Khujand, Tajikistan, pp. 56–58.
6. F.A. Nuraliyev, G.Sh. Abdullayeva, Application of the sixth order algebraic-hyperbolic spline to the recovery of clipped seismic record, // Abstracts of the 9th international conference "Actual problems of applied mathematics and information technologies Al-Khwarizmi 2024", 22-23 october, 2024, Tashkent, Uzbekistan, pp.114-115.
7. F.A. Nuraliev, G.Sh. Abdullayeva, The first integral identity for the eighth order interpolation spline, // "Current problems of physics, mathematics and artificial intellegence technologies" international scientific and theoretical conference, may 16-17, Bukhra-2025, pp.69-70.
8. G.Sh. Abdullayeva, Hilbert fazosidagi yarim normani minimallashtiruvchi natural spline, // "Matematik-fizikaning zamonaviy usullari va ularning tatbiqlari" akademik Sh.A. Alimov tavalludining 80 yilligiga bag'ishlangan respublika ilmiy anjumani Toshkent shahri, 22-24-aprel, 2025 yil, 369-370 betlar.
9. F.A. Nuraliyev, G.Sh. Abdullayeva, Interpolation splines minimizing a semi norm, // Theses of the republican scientific and practical conference on the theme of "Green development: solutions for a sustainable future April 16, Toshkent 2025. pp.771-772.
10. F.A. Nuraliev, G.Sh. Abduyllayeva, "The system of equations for the coefficients of the algebraic hyperbolic spline", // Proceedings of the republican scientific conference on "Modern problems of differential equations and related branches of mathematics." Fergana, May 16–17, 2025, pp.170-172.
11. F.A. Nuraliev, G.Sh. Abdullaeva, Minimizing the semi-norm in the space $K_{2,\nu}^{(3,4)}$, // "Mathematical physics and related problems of modern analysis" international scientific conference, Bukhara city, October 10–11, 2025, pp. 63–64.
12. F.A. Nuraliev, G.Sh. Abdullaeva, System of equations for finding the coefficients of an algebraic hyperbolic natural spline of the eighth order, // International scientific-practical conference on "Current problems of algebra and analysis Termez, October 20–21, 2025, pp.272-274.
13. A.R. Hayotov, F.A. Nuraliyev, G.Sh. Abdullayeva, Algebraik-giperbolik natural splayn va $D^m$ splayn, // "Iqtisodiyot va xalqaro aloqalarda tizim tahlili va modellashtirish" xalqaro ilmiy-amaliy konferensiyasi, 15-yanvar, 2026, Toshkent, O'zbekiston, 293–296 betlar.
14. F.A. Nuraliev, G.Sh. Abdullaeva, G'.R.Beshimov, Integral qiymatlari orqali quriladigan kvazi interpolyantlari va interpolyatsion algebraik-giperbolik natural splayn, // Innovatsion yo'llar: huquq, iqtisodiyot va texnologiya chorrahasida" mavzusidagi xalqaro ilmiy-amaliy konferensiya, 13-may, 2026, 507-510 betlar.
15. Nuraliev F., Abdulleva G., Beshimov G., Natural spline interpolation and its application to numerical integration// Computational models and technologies, 4th international scientific conference, Tashkent, September 4-5, 2026, Pp. 560-564.
16. Nuraliev F.A., Abdullaeva G.Sh., Construction of an algebraic-hyperbolik natural spline in $K_{2,\nu}^{(m)}$ and its application to optimal quadture formulas // Modern problems of mathematical analysis and equations of mathematical physics proceedings of the

international scientific and practical conference, Termiz, September 21-22, 2026, Pp. 324-326.

17. G.Sh. Abdullayeva, F.A. Nuraliyev, Oltinchi tartibli algebraik-giperbolik natural splayn, // O’zbekiston respublikasi adliya vazirligi huzuridagi intelektual mulk agentligi, № DGU 47022, 07.01.2025