O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ANDIJON DAVLAT UNIVERSINETI

A. AXLIMIRZAYEV, M.O'. QO'CHQAROV, I.M. ZULFIXAROV, M.M.IBRAGIMOV

OLIY MATEMATIKA

II

Andijon-2017

Oliy matematika: Oliy o'quv yurtlari talabalari uchun o'quv qo'llanma

A. Axlimirzayev, M.O'. Qo'chqarov, I.M. Zulfixarov, M.M.Ibragimov. Andijon: 2017

Ushbu o'quv qo'llanma universitetlsrning tabiiy, ijtimoiy va gumanitar fanlari sohalariga kiruvchi yo'nalishlar talabalariga mo'ljallangan bo'lib, unda oily matematika tarkibiga kiruvchi matematik analizdan ko'p o'zgaruvchili funksiyalar va uning differensial hisobi, oddiy differensial tenglamalar, qatorlar nazariyasi, karrali integrallar, egri chiziqli va sirt integrallari hamda ehtimollar nazariyasi va matematik statistika bo'yicha nazariy ma'lumotlar, ular yordamida yechilgan masala va misollar hamda talabalar mustaqil yechishlari uchun yetarlicha topshiriqlar keltirilgan.

Ushbu o'quv qo'llanma universitetlsrning tabiiy, ijtimoiy va gumanitar fanlari sohalariga kiruvchi yo'nalishlar talabalariga mo'ljallangan bo'lishiga qaramasdan undan oily matematika o'qitiladigan boshqa yo'nalishlar talabalari ham foydalahishlari mumkin.

Mualliflar: A.Axlimirzaev–Andijon Davlat universiteti matematika kafedrasining dotsenti, pedagogika fanlari nomzodi,

M.O'.Qo'chqarov – Andijon mashinasozlik instituti oliy matematika kafedrasining katta o'qituvchisi,

I.M.Zulfixarov – Andijon qishloq xo'jalik institute oily matematika kafedrasi katta o'qituvchisi,

M.Ibragimov–Andijon Davlat universiteti matematika kafedrasining katta o'qituvchisi.

Taqrizchilar: A.Q.O'rinov – FDU differensial tenglamalar kafedrasi professori, fizika-matematika fanlari doktori,

T.A.Djalilova - Andijon mashinasozlik instituti oliy matematika kafedrasining dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi.

Mas'ul muharrir: T.Ibaydullayev – ADU matematika kafedrasi mudiri, fizika-matematika fanlari nomzodi.

Ushbu o'quv qo'llanma Andijon Davlat Universiteti ilmiy kengashining 2017 yil 8 - шин dagi 9 -yig'ilishida muhokama qilinib ma'qullangan va chop etishga tavsiya etilgan.

SO'Z BOSHI

Respublikamiz mustaqillikka erishgandan so'ng barcha sohalarda, jumladan, ta'lim sohasida ham muhim islohotlar amalga oshirildi. Bu islohatlar ichida "Ta'lim to'g'risida"gi qonun va "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi" islohatlar ichida eng muhimlari bo'lib, ularning asosiy maqsadi respublikamizda jahon andozalariga mos keladigan, raqobatbardosh mutaxassislarni tayyorlashdan iborat. Bunday mutaxassislarni tayyorlashda asosiy zamin uzluksiz ta'lim tizimining muhim bosqichlaridan biri bo'lgan oily ta'lim bosqichida yaratiladi. qabul qilindi. Oily ta'lim bosqichida malakali mutaxassislarni tayyorlashda o'quv adabiyotlarining, ayniqsa, o'zbek tilida yozilgan adabiyotlarning o'rni salmoqlidir.

Ma'lumki, hozirgi kunda oliy o'quv yurtlarining barcha mutaxasisliklarida oliy matematika fani o'qitiladi. Talabalarni oliy matematikadan chuqur bilim, ko'nikma va malakalarga ega bo'lishlarida o'quv adabiyotlarining, ayniqsa, masala va misollar yechish bo'yicha yo'l-yo'riqlar ko'rsatilgan o'quv qo'llanmalarning o'rni muhimdir.

Hozirgi kunda oliy matematika va matematik analizdan masalalar yechish bo'yicha bir qator qo'llanmalar mavjud. Ularga na'muna sifatida I.A.Maronning "Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах" nomli, I.A.Kaplanning "Практические занятия по высшей математике" nomli, P.E.Danko, A.G.Papov, T.Ya.Kojevnikovalarning "Высшая математика в упражнениях и задачах" nomli, I.I.Lyashko, A.K.Boyarchuk, Ya.G.Gay, G.P.Golovachlarning "Математический анализ в примерах и задачах" nomli,G.I.Zaporojetsning "Руководство к решению задач по математического анализа" nomli va hokazolarni keltirish mumkin.

Bunday qo'llanmalar ko'p bo'lishiga qaramasdan ular davlat tilida emas. Bundan tashqari, bu qo'llanmalarda oily matematikadan nazariy ma'lumotlar masala va misollar yechish uchun yetarli darajada yoritilmagan.

Mualliflar tomonidan yozilgan ushbu o'quv qo'llanma yuqorida ta'kidlab o'tilgan kamchiliklarni bartaraf qilish maqsadida yozilgan.

Ushbu o'quv qo'llanmaning boshqa o'quv qo'llanmalardan farqi shundaki, unda barcha mavzular bo'yicha nazariy ma'lumotlar ancha mukammal berilganligi hamda deyarli barcha formulalarni qo'llashga doir topshiriqlar yechimlari bilan keltirilganligidir. O'quv qo'llanmada berilgan na'zariy ma'lumotlarni o'quv rejada oliy matematikaga kamroq soat ajratilgan yo'nalishlar uchun ma'ruza matni sifatida qabul qilish mumkin.

Ushbu o'quv qo'llanmaning boshqa o'quv qo'llanmalardan afzal tomonlaridan yana biri unda talabalar mustaqil yechishlari uchun berilgan topshiriqlardan masalalar to'plami sifatida foydalanishi mumkinligidir.

Ushbu o'quv qo'llanmadan oliy matematika o'qitiladigan barcha oliy o'quv yurtlarining talabalari va o'qituvchilari foydalanishlari mumkin. Ushbu o'quv qo'llanma mualliflarning uzoq yillardan beri oliy matematikadan olib borgan mashg'ulotlari jarayonida to'plangan tajribalari asosida yozilgan bo'lib, ayrim kamchiliklardan holi bo'lmasligi mumkin.

Ushbu o'quv qo'llanmaning qo'lyozmasini o'qib chiqib o'zlarining qimmatli maslahatlarini bergan fizika – matematika fanlari doktori, professor A.Q.O'rinovga, fizika – matematika fanlari nomzodi,dotsent T.A.Djalilovaga va fizika – matematika fanlari nomzodi T.Ibaydullayevga mualliflar o'z minnatdorchiliklarini bildiradilar.

I.BOB. KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYA

§1. Ko'p o'zgaruvchili funksiya, uning limiti va uzluksizligi

Geometriya va tabiatshunoslikning bir qator masalalari o'rganilayotganda o'zgaruvchi miqdorlar orasida bir o'zgaruvchi miqdorning qiymati qolganlarining qiymatlari orqali to'la aniqlanadigan bog'lanishlar uchraydi. Jismning biror fizik xarakteristikalari (masalan, uning zichligi ρ ni yoki temperaturasi T ni) qarayotganimizda jismning bir nuqtasidan boshqasiga o'tganda bu xarakteristikalarning o'zgarishini ko'rish mumkin. Jismning har bir nuqtasi x, y, z Dekart koordinatalari bilan aniqlangani uchun qaralayotgan xarakteristikalar uch o'zgaruvchil x, y va z ning qiymatlari bilan aniqlanadi.

Vaqt o'tishi bilan o'zgaruvchi fizik jarayonlarni qaralayotganda fizik xarakteristikalar qiymati to'rtta o'zgaruvchi x, y, z va t ning qiymati bilan aniqlanadi.

Masalan, gazda tovush tebranishlarining tarqalishini o'rganilayotganda gazning zichligi ρ va bosimi p to'rtta o'zgaruvchi x, y, z va t ning qiymati bilan aniqlanadi. Bunday misollarni geometriyadan ham keltirish mumkin:

Asosi x va balandligi y bo'lgan uchburchakning S yuzi $S = \frac{xy}{2}$ formula bilan, chiziqli o'lchovlari x, y, z bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepipedning V hajmi $V = xyz$ formula bilan aniqlanadi. Birinchi holda S ikkita x va y ga bog'liq, ikkinchi holda esa V uchta x, y, z o'zgaruvchilarga bog'liq. Shunga o'xshash bog'lanishlarni o'rganish uchun ko'p o'zgaruvchili funksiya tushunchasi kiritiladi.

Ta'rif: Agar n o'lchovli R^n Yevkilid fazosidagi biror D to'plamdagi har bir $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtaga ma'lum bir qonun asosida qandaydir u haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsa, u holda u berilgan D to'plamda aniqlangan n *o'zgaruvchili funksiya* deyiladi. $D \subset R^n$ to'plamda aniqlangan n o'zgaruvchili funksiyani $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ yoki qisqacha $n = f(M)$ kabi belgilanadi. Bunda $x_1, x_2, \dots, x_n$ lar *funksiyaning argumentlari* deyiladi.

Ta'rif: Berilgan n o'zgaruvchili $n = f(M)$ funksiya ma'noga ega bo'lgan R^n Yevklid fazosidagi barcha $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ nuqtalar to'plami funksiyaning *aniqlanish sohasi*, $U = f(M)$ funksiya qabul qiadigan haqiqiy sonlar to'plami esa bu funksiyaning *qiymatlar to'plami* deyiladi.

Funksiyaning aniqlanish sohasini $D\{f\}$, qiymatlar sohasini $E\{f\}$ bilan belgilanadi.

D to'plamdan olingan M nuqtaga mos kelgan u son funksiyaning M nuqtadagi *xususiy qiymati* deyiladi.

Kelgusida soddalik uchun va olinadigan natijalarni geometrik talqinini berish maqsadida asosan ikki o'zgaruvchili funksiyani Z, uning argumentlarini esa x va y kabi belgilaymiz. Shunday qilib, umumiy holda ikki o'zgaruvchili funksiyani $Z = f(x,y)$, $Z = F(x,y)$, $Z = g(x,y)$ va hokazo ko'rinishda yozamiz. Masalan,

$Z = f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $\quad Z = g(x,y) = 3x + 5y - 1$,

$Z = h(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ lar ikki o'zgaruvchili funksiyalardir.

Ikki o'zgaruvchili $Z = f(x,y)$ funksiyaning $D\{f\}$ aniqlanish sohasi tekislikdagi $M(x,y)$ nuqtalardan tashkil topganligi uchun y tekislik yoki undagi biror sohadan iborat bo'ladi. Masalan, yuqorida keltirilgan funksiyalar uchun $D\{f\}$ markazi $O(0;0)$ koordinata boshida joylashgan va radiusi $r = 1$ bo'lgan birlik doiradan, $D\{g\}$ butun tekislikdan $(D\{g\} = R^2)$, $D\{h\} = R^2 - \{0\}$, yani tekislikning koordinata boshidan tashqari barcha nuqtalaridan iborat.

Ikki o'zgaruvchili $Z = f(x,y)$ funksiyaning geometrik ma'nosi (mazmuni) uning grafigi tushunchasidan kelib chiqadi. Bu tushunchani kiritish uchun fazoda $XOYZ$ to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasini olamiz. XOY koordinata tekisligida funksiyaning $D\{f\}$ aniqlanish sohasini qaraymiz va uning har bir $M(x,y)$ nuqtasidan XOY koordinata tekisligiga perpendikulyar o'tkazamiz. Bu perpendikulyarga funksiyaning $Z = f(x,y)$ qiymatini qo'yamiz. Natijada fazoda koordinatalari $(x, y, f(x,y))$ bo'lgan P nuqtani hosil qilamiz.

Ta'rif: $Z = f(x,y)$ funksiyaning grafigi deb fazodagi

$$P(x,y,z) = P\big(x,y,f(x,y)\big) = P(x,y,f(M)),\ M = M(x,y) \in D\{f\}$$

nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.

Masalan, yuqorida keltirilgan $Z = f(x,y)$ funksiyaning grafigi tenglamasi

$$Z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Rightarrow z^2 = 1 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

bo'lgan sferadan, $Z = g(x,y)$ funksiyaning grafigi tenglamasi

$Z = 3x + 5y - 1$ yoki $3x + 5y - z - 1 = 0$ bo'lgan tekislikdan iborat. Ammo yuqoridagi $Z = h(x,y)$ funksiya grafigini to'g'ridan-to'g'ri tasavvuf etish oson emas. Bunday xollarda funksiyaning sath chiziqlari tushunchasidan foydalaniladi.

Ta'rif: $Z = f(x,y)$ funksiyaning qiymatlari biror o'zgarmas C soniga teng bo'ladigan XOY koordinata tekisligidagi nuqtalar to'plamidan iborat chiziq funksiyaning sath chizig'i. C soni esa sath deb ataladi.

Ta'rifdan $Z = f(x,y)$ funksiyaning C sathli sath chizig'i tenglamasi $f(x,y) = c$ bo'lgan chiziqdan iborat ekanligi kelib chiqadi.

Yuqorida biz n o'zgaruvchili funksiyani $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'rinishda yozgan edik va $n = 2$ bo'lgan hol, ya'ni $Z = f(x,y)$ ikki o'zgaruvchili funksiyani o'rgandik. Bunda biz ikki o'zgaruvchili funksiyani geometrik talqini tushunchasi bilan ham tanishdik.

Agar $n \geq 3$ bo'lsa $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyani bevosita geometirik tasvirlab bo'lmaydi. Agar $n = 3$ bo'lsa, u holda berilgan funksiya uch o'zgaruvchili bo'ladi va uni biz $U = f(x,y,z)$ ko'rinishida yozamiz. Bunda x, y, z argumentlar va u funksiya bo'ladi. Xuddi shunday to'rt, besh va hokazo o'zgaruvchili funksiyalarni ham yozish mumkin.

Ko'p o'zgaruvchili funksiya ham bir o'zgaruvchili funksiya kabi analitik, jadval va garafik usullarda berilishi mumkin. Funksiya analitik usulda, ya'ni formula bilan berilgan holda ko'pincha uning aniqlanish sohasi ko'rsatilmaydi. Lekin biz funksiyani aniqlanish sohasi sifatida funksiyani analitik ifodasini ma'noga ega qiladigan $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtalarning to'plamini tushunamiz.

Ta'rif: Berilgan $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning r radiusli atrofi deb tekislikdagi $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $M(x,y)$ nuqtalar to'plamiga aytiladi.

Ta'rif: Biror chekli A soni ikki o'zgaruvchili $Z = f(x,y)$ funksiyaning uning argumentlari $x \to x_0,\ y \to y_0$ bo'lgandagi limiti deb aytiladi, agar har qanday kichik $\varepsilon > 0$ soni uchun unga bog'liq shunday $r(\varepsilon) = r > 0$ son topilsaki, $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning $r = r(\varepsilon)$ radiusli atrofiga tegishli bo'lgan barcha $M(x,y) \neq M_0(x_0, y_0)$ nuqtalar uchun $|f(x,y) - A| < r$ tengsizlik bajarilsa.

Ikki o'zgaruvchili $f(x,y)$ funksiyaning $x \to x_0, y \to y_0$ holdagi limiti

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A \quad \text{yoki} \quad \lim_{M \to M_0} f(M) = A$$

kabi yoziladi.

Teorema: Agar $Z = f(x,y)$ va $Z = g(x,y)$ funksiyalarning ikkalsi ham $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning biror $U_r(x_0, y_0)$ atrofida aniqlangan va ularning

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A \quad \text{va} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} g(x,y) = B$$

limitlari mavjud bo'lsa, u holda quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} c = c \quad (c - \text{o'zgarmas son}),$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} Cf(x,y) = C \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = CA,$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} [f(x,y) \pm g(x,y)] = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) + \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} g(x,y) = A \pm B,$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) \cdot g(x,y) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) \cdot \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} g(x,y) = AB,$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)}{\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} g(x,y)} = \frac{A}{B} \left(\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} g(x,y) \neq 0 \right).$$

Ikki o'zagruvchili $Z = f(x,y)$ funksiyaning limiti ta'rifini

$x \to \pm\infty,\ y \to \pm\infty$ yoki $A = \pm\infty$ hollar uchun ham berish mumkin.

Ta'rif: $M_0(x_0, y_0)$ nuqta $Z = f(x,y)$ funksiyaning $D\{f\}$ aniqlanish sohasidagi biror nuqta bo'lib, o'zgaruvchi $M(x,y)$ nuqta funksiyaning aniqlanish sohasida qolgan holda $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaga ixtiyoriy usulda intilganda

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0) \quad \text{yoki} \quad \lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $Z = f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada uzluksiz deyiladi. Bu holda $M_0(x_0,y_0)$ funksiyaning uzluksizlik nuqtasi deyiladi. Biror D sohaning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lgan funksiya shu sohada uzluksiz deyiladi.

Masalan, $f(x,y) = 2x^2 + 3xy - 5y^2$ funksiya tekislikdagi barcha nuqtalarda aniqlangan va ularning har birida uzluksizdir. Demak, bu funksiya butun tekislikda uzluksizdir.

$$f(x,y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$$

funksiya esa yarim o'qlari $a = 3$, $b = 2$ bo'lgan ellips va uning ichki nuqtalarida uzluksizdir.

$Z = f(x,y)$ funksiyani $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada uzluksizligini boshqa bir ta'rifini berish uchun argument va funksiya orttirmasi tushunchasi kiritiladi. Agar $M(x,y)$ o'zgaruvchi nuqta bo'lsa, unda $\Delta x = x - x_0$ va $\Delta y = y - y_0$ ayirmalar mos ravishda x va y argumentlarning o'zgarishlarini ifodalaydi, hamda argument orttirmalari deyiladi. Bu holda $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ deb yozish mumkin. Bu holda $Z = f(x,y)$ funksiyaning o'zgarishi

$$\Delta Z = \Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0)$$

ayirma bilan aniqlanadi va u funksiyaning to'la orttirmasi deb ataladi.

Orttirmalar tilida

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

tenglikdagi $x \to x_0$, $y \to y_0$ munosabatlardan $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun yuqoridagi tenglikni

$$\lim_{\substack{\Delta x\to x_0\\ \Delta y\to y_0}} \Delta f = 0$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu funksiya uzluksizligining orttirmalar tilidagi ifodasidir.

Ta'rif: $Z = f(x,y)$ funksiya argumentlarining biror nuqtadagi cheksiz kichik orttirmalariga funksiyaning ham cheksiz kichik orttirmasi mos kelsa, u holda funksiyani o'sha nuqtada uzluksiz deyiladi.

Teorema: Agar $f(x,y)$ va $g(x,y)$ funksiyalar $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $cf(x,y)$ (c-o'zgarmas son),

$$f(x,y) \pm g(x,y), \quad f(x,y)\cdot g(x,y) \quad \text{va} \quad \frac{f(x,y)}{g(x,y)}\,(g(x,y)\neq 0)$$

funksiyalar ham $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Yuqorida biz $Z=f(x,y)$ funksiyaning ikkala x va y argumentlari bo'yicha uzluksizligini ko'rib o'tdik. Ammo biz funksiyaning har bir argument bo'yicha uzluksizligini ham qarashimiz mumkin. Buning uchun esa funksiyaning xususiy orttirmasi tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif: $Z=f(x,y)$ funksiya uchun argumentlarning Δx va Δy orttirmalarida $\Delta_x f = f(x_0+\Delta x, y) - f(x_0,y_0)$, $\Delta_y f = f(x,y_0+\Delta y) - -f(x_0,y_0)$ ayirmalar mos ravishda funksiyaning x va y argumentlari bo'yicha $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadagi xususiy orttirmalari deyiladi.

Ta'rif: $Z=f(x,y)$ funksiya uchun $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta_x f = 0 \quad \text{yoki} \quad \lim_{\Delta y\to 0}\Delta_y f = 0$$

tengliklar bajarilsa, u holda bu funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada x yoki y argument bo'yicha uzluksiz deyiladi.

Ta'rif: Agar biror $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \neq f(x_0,y_0)$$

bo'lsa, u holda bu nuqtada $Z=f(x,y)$ funksiya uzlukli, $M_0(x_0,y_0)$ nuqta esa uzulish nuqtasi deyiladi.

Teorema: Agar $Z=f(x,y)$ funksiya yopiq va chegaralangan D sohada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, bu D sohada kamida bitta shunday $M_0(x_0,y_0)$ $[M_1(x_1,y_1)]$ nuqta topiladiki, D sohaning boshqa hamma $M(x,y)$ nuqtalari uchun

$$f(x_0,y_0) \geq f(x,y), \quad [f(x_1,y_1) \leq f(x,y)]$$

munosabat bajariladi.

Bu holda $f(x,y)$ funksiyaning $f(x_0,y_0)=A$, $f(x_1,y_1)=B$ qiymatlari mos ravishda uning D sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlari deb aytiladi hamda $maxf$ va $minf$ kabi yoziladi.

Ta'rif: Agar D sohada aniqlangan $Z=f(x,y)$ funksiya uchun shunday chekli A $(yoki\ B)$ soni mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $M(x,y)\in D$

nuqtada $f(x,y) \leq A(yoki\ f(x,y) \geq B)$ shart bajarilsa, bu funksiya D sohada yuqoridan (yoki quyidan) chegaralangan deyiladi.

Masalan, $f(x,y) = 5 - x^2 - y^2$ funksiya yuqoridan $A = 5$, $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2$ funksiya esa quyidan $B = -2$ soni bilan chegaralangan.

Ta'rif: Agar D sohada aniqlangan $Z = f(x,y)$ funksiya bu sohada ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda funksiyani D sohada chegaralangan funksiya deb ataladi.

Masalan, $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ funksiya o'zining $D\{f\}: x^2 + +y^2 \leq 9$ aniqlanish sohasida yuqoridan $A = 3$, quyidan esa $B = 0$ soni bilan chegaralangan. Demak, bu funksiya chegaralangandir.

Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlar

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiya tushunchasiga olib keluvchi geometrik masala yozilsin.

Yechish: Bo'yi x, eni y bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuzi $S = xy$ formula bilan ifodalanadi. Bu yerda S yuza to'g'ri to'rtburchakning bo'yi x va eni y larning funksiyasidir.

2. Ko'p o'zgaruvchili funksiya tushunchasiga olib keluvchi fizik masala yozilsin.

Yechish: $Q = kJ^2Rt$ – Joull-Lens qonuni. Bu yerda Q o'tkazgichdan tok o'tganda ajralib chiqqan issiqlik miqdori bo'lib, u tok kuchi J, o'tkazgichning qarshiligi R va t vaqtlarning funksiyasidir.

3. $U = f(x,y,z) = \frac{3x}{y - lgz}$ funksiyaning $M_0(-2;3;10)$ nuqtadagi xususiy qiymati topilsin.

Yechish: $f(x,y,z) = f(-2;3;10) = \frac{3\cdot(-2)}{3 - lg10} = -\frac{6}{3-1} = -\frac{6}{2} = -3.$

4. $U = ln\frac{x+z}{2y-z}$ funksiyani $A(6;2;-1)$ nuqtadagi xususiy qiymati topilsin.

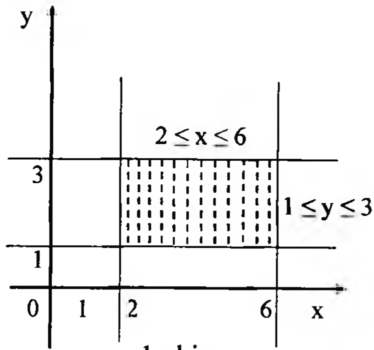
Yechish: $U(A) = ln\frac{6-1}{2\cdot2+1} = ln\frac{5}{5} = ln1 = 0.$

5. Quyidagi tengsizliklar bilan berilgan $x\ va\ y$ o'zgaruvchilarning D o'zgarish sohasi yasalsin:

$$1)\ 2 \le x \le 6, \quad 1 \le y \le 3; \qquad 2)\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1;$$

$$3)\ 4 \le x^2 + y^2 \le 9; \qquad 4)\ 0 \le y \le x.$$

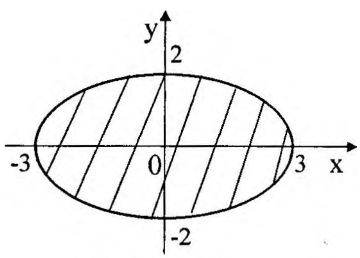
Yechish: 1) $x = 2$, $x = 6$, $y = 1$ va $y = 3$ to'g'ri chiziqlarni yasaymiz:



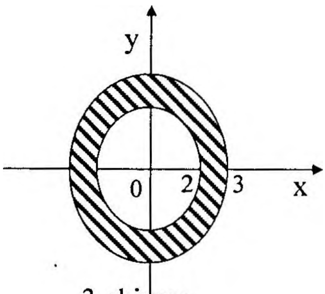
1-chizma

$2 \le x \le 6$ va $1 \le y \le 3$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi nuqtalar tomonlari $x = 2$, $x = 6$, $y = 1$ va $y = 3$ to'g'ri chiziqlarda yotuvchi to'g'ri to'rtburchakning chegaralari va uning ichki nuqtqlaridan iborat D yopiq sohadir (1-chizma).

2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar, yarim o'qlari $a = 3$ va $b = 2$ bo'lgan ellipsning ichki nuqtqlaridan tashkil topgan D sohadan iborat (2-chizma).



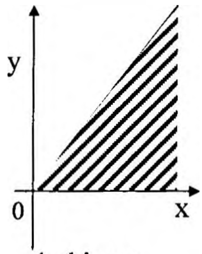
2-chizma



3-chizma

3) Bu holda D soha markazi koordinata boshida va radiuslari $r_1 = 2$ va $r_2 = 3$ bo'lgan konsentrik aylanalar bilan hosil qilingan doiraviy halqadan iborat (3-chizma).

4) $0 \leq y \leq x$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar birinchi koordinata burchagi bissektrisasi va OX o'qining musbat yo'nalishi bilan chegaralangan D sohadan iborat (4 chizma).



4-chizma

6. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohalari topilsin:

1) $Z = 4 - x - 2y$; 2) $p = \frac{3}{x^2+y^2}$;

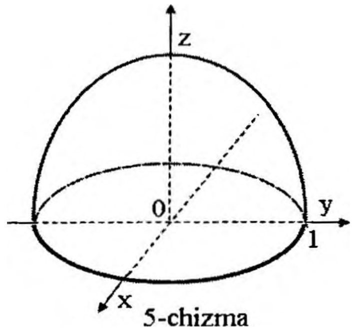
3) $Z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; 4) $q = \frac{1}{\sqrt{xy}}$;

5) $U = \frac{x^2y}{2x+y}$ 6) $v = \arcsin(x + y)$

Yechish: 1) $z = 4 - x - 2y$ funksiya butun rasional funksiya bo'lib, u x va y ning har qanday qiymatlarida aniqlangan. Ya'ni, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$. Funksiyaning geometrik tasviri koordinata o'qlarini $A(4;0;0)$, $B(0;2;0)$ va $C(0;0;4)$ nuqtalarda kesib o'tuvchi tekislikdan iborat.

2) p funksiya x va y larning $x = 0$, $y = 0$ dan boshqa barcha qiymatlar juftliklarida aniqlangan. Chunki $x = 0$, $y = 0$ da funksiyaning maxraji nolga aylanadi.

3) $Z=\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ funksiya $1-x^2-y^2 \geq 0$ yoki $x^2 + y^2 \leq 1$ da aniqlangan. Bu tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar markazi koordinata boshida va radiusi 1 ga teng bo'lgan doira chegaralaridagi hamda uning ichki nuqtalaridan iborat. Funksiyaning grafigi XOY tekislikning yuqori qismida joylashgan yarim sferadan iborat (5-chizma).

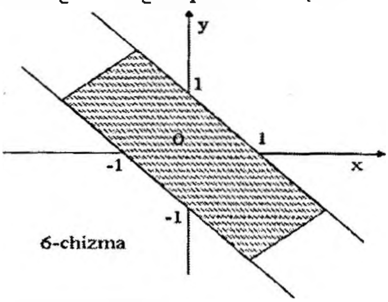


5-chizma

4) $q = \frac{1}{\sqrt{xy}}$ funksiyaning aniqlanish sohasi tekislikning koordinatalari $xy > 0$ tengsizlikni qanoatlantiradigan nuqtalar to'plamidan, ya'ni I va III koordinata burchaklaridagi nuqtalar to'plamidan iborat.

5) $u = \frac{x^2 y}{2x+y}$ funksiyaning aniqlanish sohasi XOY tekislikning $2x + y = 0$ to'g'ri chiziqda yotmagan nuqtalari to'plamidan iborat.

6) $v = \arcsin(x + y)$ funksiyaning aniqlanish sohasi tekislikning $-1 \leq x + y \leq 1$ qo'sh tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami dan iborat. XOY tekisligida bu soha $x + y + 1 = 0$ va $x + y - 1 = 0$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan polosadir (6-chizma).



6-chizma

7. Quyidagi limitlar topilsin.

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ y \to 0}} \frac{tg(xy)}{y}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x}{x + y}$; 3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 + y^2}{1 - \sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$.

Yechish: 1) Berilgan funksiya $M(3:0)$ nuqtada aniqlanmagan. Shuning uchun berilgan funksiyani limitini hisoblash uchun almashtirish qilamiz:

$$\lim_{\substack{x\to3\\y\to0}}\frac{tg(xy)}{y}=\lim_{\substack{x\to3\\y\to0}}x\cdot\frac{tg(xy)}{xy}=\lim_{\substack{x\to3\\y\to3}}x\cdot\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{tg(xy)}{xy}=3\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{tg(xy)}{xy}=$$
$$=3\cdot1=3.$$

2) $$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x}{x+y}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{1+\frac{y}{x}}$$

limit mavjud emas, yoki $\frac{y}{x}$ nisbat $M(x,y)$ nuqta $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaga ixtiyoriy ravishda intilganda limitga ega emas.

3) $$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{1-\sqrt{x^2+y^2+1}}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(x^2+y^2)(1+\sqrt{x^2+y^2+1})}{(1-\sqrt{1+x^2+y^2})(1+\sqrt{x^2+y^2+1})}=$$
$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(x^2+y^2)(1+\sqrt{x^2+y^2+1})}{1-1-x^2-y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(x^2+y^2)(1+\sqrt{x^2+y^2+1})}{-(x^2+y^2)}=$$
$$=-\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(1+\sqrt{x^2+y^2+1}\right)=-2.$$

8. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2x+5xy-3y+1}{x^2+y^3+2}$ hisoblansin.

Yechish:

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2x+5xy-3y+1}{x^2+y^3+2}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(2x+5xy-3y+1)}{\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^3+2)}=$$

$$=\frac{2\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}x+5\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}x\cdot\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}y-3\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}y+\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}1}{\left(\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}x\right)^2+\left(\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}y\right)^3+\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}2}=\frac{2\cdot0+5\cdot0-3\cdot0+1}{0^2+0^3+2}=\frac{1}{2}.$$

9. Quyidagi funksiyalarni uzluksizlikka tekshiring:

1) $Z=2x^2+3xy-5y^2$; 2) $Z=\sqrt{36-4x^2-9y^2}$; 3) $Z=\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}$.

Yechish: 1) $Z=2x^2+3xy-5y^2$ funksiya tekislikdagi barcha nuqtalarda aniqlangan va ularning har birida uzluksizdir. Demak, bu funksiya butun tekislikda uzluksiz.

2) $Z=\sqrt{36-4x^2-9y^2}$ funksiya o'zining aniqlanish sohasi $(\frac{x}{3})^2+(\frac{y}{4})^2\leq 1$ da, ya'ni yarim o'qlari $a=3,\ b=2$ bo'lgan ellips va uning ichidagi nuqtalarda uzluksizdir.

3)$Z=\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}$ funksiya tekislikdagi $O(0;0)$ nuqtada aniqlanmagan. Shuning uchun bu nuqtada funksiya uzlukli. Tekislikning $O(0;0)$ dan farqli barcha nuqtalarida funksiya uzluksiz.

10. $Z=\frac{1}{1-x^2-y^2}$ funksiyani uzluksizlikka tekshiring.

Yechish: Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $1-x^2-y^2\neq 0$ dan, ya'ni $x^2+y^2\neq 1$ dan iborat. Demak, funksiya $x^2+y^2=1$ aylananing har bir nuqtasida uzilishga ega. Bu aylana funksiyaning uzilish chizig'i deyiladi.

11) x argument 2 dan 2,2 gacha, y argument esa 1 dan 0,9 gacha o'zgarganda $f(x,y)$=$x^2+xy-2y^2$ funksiyaning orttirmasi topilsin.

Yechish: Masalaning shartiga asosan $\Delta x=0{,}2$ va $\Delta y=-0{,}1$. Demak,

$$f(2;1)=2^2+2\cdot 1-2\cdot 1^2=\ 4+2-2=4,$$
$$f(2{,}2;\ 0{,}9)=2{,}2^2+2{,}2\cdot 0.9-2\cdot 0{,}9^2=5{,}20$$
$$\Delta f(2;1)=f(2{,}2;0{,}9)-f(2;1)=5{,}20-4=1{,}20.$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaga olib keluvchi geometrik masalalar yozilsin.
2. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaga olib keluvchi fizik masalalar yozilsin.
3. $F(x,y)$=$\frac{x-2y}{2x-y}$ funksiya berilgan. $F(3;1), F(1;3), F(1;2),\ F(2;1),$ $F(a;a),\ F(a;-a)$lar topilsin.
4. $F(x,y)\ =\ \frac{x}{x-y}$ funksiya uchun $F(a;b)+F(b;a)=1$ ekani ko'rsatilsin.
5. $\varphi(x,y)$=$\frac{2x-y}{x-2y}$ funksiya berilgan: $\varphi(1;2), \varphi(3;1), \varphi(a;2a),$

$\varphi(2b; -b)$ lar hisoblansin.

6. $F(x,y)=3x^2y-\sqrt{x^6-y^6}$ funksiya uchun $F(tx;ty)=t^3F(x;y)$ bo'lishi ko'rsatilsin.

7. Quydagi tensizliklar bilan berilgan x va y o'zgaruvchilarning o'zgarish sohasi yasalsin:

1)-1$< x < 1$, $-1 < y < 1$; 2) $x^2+y^2 \le 9$, $y \le 0$;

3) $x^2+2y^2 < 4$, , $x > 0, y > 0$; 4) $1 \le x-y \le 3$.

8. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohalari topilsin:

1) $Z=a^2-x^2-2y^2$; 2) $u=-\sqrt{2-x^2-2y^2}$; 3) $v=\dfrac{1}{x^2-y^2}$;

4) $w=\sqrt{3x}-\dfrac{5}{\sqrt{y}}$; 5) $p=\dfrac{\ln(x^2y)}{\sqrt{y-x}}$; 6) $q=\arccos(x^2+y^2)$

Javoblar: 1) Tekislikdagi barcha nuqtalar to'plami;
2) $x^2+2y^2=2$ ellipsda va uning ichida yotgan barcha nuqtalar;
3) XOY tekislikning y=$\mp x$ to'g'ri chiziqda yotmagan nuqtalari;
4) $x \ge 0, y > 0$; 5) $y > x, y > 0, x \ne 0$; 6) $x^2+y^2 \le 1$ doira.

9. Quyidagi limitlar hisoblansin:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{a-\sqrt{a^2-xy}}{xy}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sin(xy)}$; 3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2x^3+3y^2}{x^2+y^2}$.

Javoblar: 1) $\frac{1}{2a}$; 2) 1; 3) Mavjud emas.

10. Quyidagi funksiyalarni uzilish nuqtalari yoki uzilish chiziqlarini ko'rsating.

1) $Z=\frac{10x}{(x-1)^2+(y+1)^2}$; 2) $Z=\frac{3y}{2x-y}$; 3)$Z=\frac{x^2}{x^2-2y^2-4}$

Javoblar: 1) $(1;-11)$; 2) $y=2x$ – uzilish chizig'i : 3) uzilish chizig'i $x^2-2y^2=4$ giperboladan iborat.

11. $Z = x^2-xy+y^2$ funksiya berilgan. Agar x o'zgaruvchi 2 dan 2,1 gacha, y esa 2 dan 1,9 gacha o'zgarsa Δz topilsin.

Javob: $\Delta z = 0{,}03$.

§2.Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi va differensiali

$Z = f(x,y)$ funksiya biror D sohada aniqlangan va $M(x,y)$ nuqta shu sohaning ichki nuqtasi bo'lsin. Bu nuqtaning x absissasiga Δx orttirma berib, y ordinatani o'zgartirmay qoldiramiz. Bunda xosil bo'ladigan $N(x+\Delta x, y)$ nuqta ham D sohaga tegishli deb hisoblaymiz. Bu holda

$Z = f(x,y)$funksiya

$$\Delta_x Z = \Delta_x f = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$

dan iborat x argument bo'yicha xususiy orttirma oladi.

Tarif: Agar $Z = f(x,y)$ funksiyaning x bo'yicha $\Delta_x f$ orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbati $\Delta x \to 0$ bo'lganda chekli limitga ega bo'lsa, bu limit qiymati funksiyaning <u>x bo'yicha xususiy hosilasi</u> deb ataladi.

Bu xosila

$$Z'_x\,,\quad f'_x\,,\quad f'_x(x,y),\quad \frac{\partial z}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

kabi belgilanadi. Demak, ta'rifga asosan

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - (x,y)}{\Delta x}.$$

Xuddi shu kabi $Z = f(x,y)$ funksiyaning

$$Z'_y\,,\quad f'_y\,,\quad f'_x(x,y),\quad \frac{\partial z}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

kabi belgilanadigan y bo'yicha xosilasini ham kiritish mumkin.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Xususiy xosilaning tariflaridan funksiyaning x bo'yicha xususiy hosilasini hisoblashda ikkinchi y o'zgaruvchini o'zgarmas son kabi qaralishi, y bo'yicha xususiy hosilani topishda esa x o'zgaruvchini o'zgarmas son sifatida qaralishi kerakligi kelib chiqadi. Bundan esa xususiy hosilalarni topishda bir o'zgaruvchili funksiyani hosilasini hisoblashdagi qoidalar va hosilalar jadvali ikki o'zgaruvchili funksiyani xususiy hosilalarini topishda ham o'z kuchida qolishi kelib chiqadi.

$Z = f(x,y)$ funksiya xususiy hosilalarining ham geometrik ma'nosi mavjud. Bu funksiya grafigi biror S sirtni ifodalaydi. Bu sirtga tegishli

$M_0(x_0,y_0)$ nuqtani qaraymiz. Bu holda $f(x,y_0)=\varphi(x)$ bir o'zgaruvchili funksiya bu S sirtni $y=y_0$ tekislik bilan kesishdan hosil bo'ladigan biror L chiziqni ifodalaydi. Shu sababli x bo'yicha xususiy hosilaning $f'_x(x_0,y_0)$ son qiymati L chiziqqa $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffisientini ifodalaydi.

Demak , $f'_x(x_0,y_0)=tg\alpha$ bo'lib , bunda α burchak S sirtni $Y=Y_0$ tekislik bilan kesishda hosil bo'ladigan L chiziqqa $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning OX koordinata o'qi bilan hosil qilgan burchakni ifodalaydi. Xuddi shunday, $f'_y(x_0,y_0)$ soni S sirtni $x=x_0$ tekislik bilan kesishda hosil bo'ladigan G chiziqqa $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffisientini fodalaydi.

Ikki o'zgaruvchili funksiyaning $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada $f'_x,\ f'_y$ xususiy hosilalari mavjudligidan uni bu nuqtada uzluksizligi har doim kelib chiqmaydi. Masalan,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0\ , & x^2+y^2=0\end{cases}$$

funksiya $O(0,0)$ nuqtada uzlukli. Ammo $f(x,0)=0$ va $f(0,y)=0$ bo'lgani uchun bu funksiyaning $O(0,0)$ nuqtada ikkala xususiy hosilalari mavjud va $f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$ bo'ladi.

Agar $Z=f(x,y)$ funksiyaning

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}$$

xususiy hosilalari mavjud va ular x va y o'zgaruvchilarning funksiyalari bo'lsa, u holda ulardan yana xususiy hosilalar olish mumkin. Olingan bu xususiy hosilalar <u>ikkinchi tartibli xususiy hosilalar</u> deb ataladi. Ular

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx}\quad ,\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy}$$

ko'rinishda yoziladi.

$Z=f(x,y)$ funksiyaning x va y argumentlari bo'yicha ikkinchi tartibli xususiy hosilalari $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{xy}$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=$ $=f''_{yx}$ lar esa $Z=f(x,y)$ funksiyaning ikkinchi tartibli aralash hosilalari deyiladi.

Teorema: Agar $Z = f(x,y)$funksiya va uning f'_x , f'_y , f''_{xy} , f''_{yx} hosilalari $M(x,y)$ nuqta va uning biror atrofida aniqlangan va bu nuqtada ikkinchi tartibli f''_{xy} , f''_{yx} aralash hosilalar uzluksiz bo'lsa, unda aralash hosilalar bu nuqtada o'zaro teng, yani $f''_{xy} = f''_{yx}$ bo'ladi.

Ikki o'zgaruvchili funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari, ya'ni x va y o'zgaruvchilarning funksiyasi bo'lsa, u holda ulardan yana hosilalar olish mumkin. Olingan bu hosilalar uchinchi tartibli xususiy hosilalar deyiladi. Ular quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.$$

$Z = f(x,y)$ funksiya $M(x,y)$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va bu nuqtadan o'tuvchi l to'g'ri chiziq bo'yicha yo'nalish biror $l = \{cos\alpha, cos\beta\}$ birlik vektor orqali berilgan bo'lsin. Bu yerda $\cos\alpha$ va $cos\beta$ lar berilgan l birlik vektorning mos ravishda OX va OY koordinata o'qlari bilan hosil qilgan α va β ($\beta = 90° - \alpha$) burchaklar bilan aniqlanadi va yo'naltiruvchi kosinuslar deb ataladi. Bu l to'g'ri chiziqda yotuvchi va $M(x,y)$ nuqtaning atrofiga tegishli yana bir $N(x + \Delta x, y + \Delta y)$ nuqtani olamiz. Bunda $Z = f(x,y)$ funksiyaning o'zgarishi:

$$\Delta_l f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$$

ayirma bilan ifodalanadi va u funksiyaning l yo'nalish bo'yicha orttirmasi deyiladi. Agar $MN = \Delta l$ belgilash qilsak va $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ bo'lsa, unda $\Delta l \to 0$ bo'ladi.

Ta'rif: Agar $\Delta l \to 0$ bo'lganda $\frac{\Delta_l f}{\Delta l}$ nisbat chekli limitga ega bo'lsa, u holda bu limit qiymati $Z = f(x,y)$ funksiyaning l yo'nalish bo'yicha hosilasi deyiladi.

$Z = f(x,y)$ funksiyaning l yo'nalish bo'yicha hosilasi

$$f'_l, z'_l, \frac{\partial f}{\partial l}, \frac{\partial z}{\partial l}.$$

kabi belgilanadi. Demak ta'rifga asosan

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l f}{\Delta l}$$

kabi yoziladi. $\Delta l = \Delta x cos\alpha + \Delta y cos\beta$ tenglikdan foydalanib,

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}cos\beta$$

formulani yozamiz.

Agar l yo'nalish biror $a=\{a_1,a_2\}$ vektor orqali berilgan bo'lsa, unda yo'nalish bo'yicha hosila

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$$

formula bilan hisoblanadi.

Agar l sifatida OX (yoki OY) koordinata o'qining yo'nalishini olsak, unda $\alpha=0,\beta=90°$ (bo'ladi va yuqoridagi) formuladan

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\quad yoki\quad\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial y}$$

kelib chiqadi. Demak $Z=f(x,y)$ funksiyaning x yoki y bo'yicha xususiy hosilalari uning l yo'nalish bo'yicha hosilasining xususiy holi bo'lar ekan.

Ta'rif: $Z=f(x,y)$ funksiyani gradiyenti deb koordinatalari f_x' va f_y' xususiy hosilalardan iborat vektorga aytiladi.

$Z=f(x,y)$ funksiyaning gradiyenti grad f kabi yoziladi. l yo'nalish bo'yicha hosilaning ifodasini gradiyent tushunchasidan foydalanib quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\vec{e}\cdot qradf=|\vec{e}|\cdot|gradf|\cdot cos\varphi.$$

Bu yerda φ ℓ yo'nalishni ifodalovchi e birlik vektor bilan gradiyent vektor orasidagi burchakdir.

$Z=f(x,y)$ funksiyaning o'zini aniqlanish sohasidagi biror $M(x,y)$ nuqtadagi to'la orttirmasi

$$\Delta Z=\Delta f=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

dan iborat edi.

Ta'rif: Agar $Z=f(x,y)$ funksiyaning berilgan $M(x,y)$ nuqtadagi to'la orttirmasi

$$\Delta f=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$$

ko'rinishda ifodalanib, unda $A = A(x,y)$ va $B = B(x,y)$ argumentlarning Δx va Δy orttirmalariga bog'liq bo'lmagan sonlar, α va β esa $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ holda cheksiz kichik miqdorlar bo'lsa, unda bu funksiya $M(x,y)$ nuqtada differensiallanuvchi deyiladi. To'la orttirmaning Δx va Δy orttirmalariga nisbatan bosh chiziqli qismi

$A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ funksiyaning differensiali deyiladi.

$Z = f(x,y)$ funksiyaning differensiali df yoki $df(x,y)$ kabi belgilanadi. Demak, u quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$df = A\Delta x + B\Delta y.$$

Teorema: Agar $Z = f(x,y)$ funksiyaning f'_x, f'_y xususiy hosilalari $M(x,y)$ nuqta va uning biror atrofida aniqlangan hamda uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya bu nuqtada differensiallanuvchi deyiladi va uning differensiali

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

formula bilan aniqlanadi va uni $Z = f(x,y)$ funksiyani to'la differensiali deyiladi. Lekin bu formulani boshqacha

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

ko'rinishda ham yozish mumkin. Bunda biz $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ tengliklardan foydalandik. Bu yerda $\frac{\partial f}{\partial x}dx$ va $\frac{\partial f}{\partial y}dy$ lar $Z = f(x,y)$ funksiyaning xususiy differensiallaridir. Ularni $d_x f$ va $d_y f$ kabi belgilanadi.

Ta'rif: Fazodagi S sirtda yotuvchi va uning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasidan o'tuvchi barcha egri chiziqlarning shu nuqtadagi barcha urinmalaridan hosil bo'lgan P tekislik S sirtning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasidagi urinma tekisligi deb ataladi.

Agar S sirt $F(x,y,z) = 0$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, u holda uning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma tekislik

$$(x - x_0)F'_x(M_0) + (y - y_0)F'_y(M_0) + (z - z_0)F'_z(M_0) = 0$$

tenglama bilan va shu nuqtadagi normali esa

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$$

tenglama bilan aniqlanadi.

Yuqorida ko'rib o'tgan to'la differensialdan taqribiy hisoblashlarda ham foydalanish mumkin.

$$\Delta f \approx df \Rightarrow f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy;$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y.$$

Agar $Z = f(x,y)$ funksiya II tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, u holda

$$df = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

to'la differensial ikki o'zgaruvchili funksiya sifatida uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'ladi. Shuning uchun df differensialning $d(df)$ differensiali xaqida gapirish mumkin. Unga funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali deb uni d^2f kabi belgilanadi. U quyidagicha bo'ladi:

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dydx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlar

1. $f(x,y) = x^2 + 3xy - 4y$ funksiya uchun ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtada to'la va xususiy orttirmalar topilsin.

Yechish: $\Delta f = [(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x)(y+\Delta y) - 4(y+\Delta y)] -$
$-[x^2 + 3xy - 4y] = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3xy + 3x\Delta y + 3y\Delta x +$
$+3\Delta x\Delta y - 4y - 4\Delta y - x^2 - 3xy + 4y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 +$
$+3[x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y] - 4\Delta y;$

$\Delta_x f = [(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x)y - 4y] - [x^2 + 3xy - 4y] =$
$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3y\Delta x;$

$\Delta_y f = [x^2 + 3x(y+\Delta y) - 4(y+\Delta y)] - [x^2 + 3xy - 4y] =$
$= 3x\Delta y - 4\Delta y.$

2. $Z = x^2 - xy + y^2$ funksiya berilgan. Agar x argument 2 dan 2,1 gacha, y esa 2 dan 1,9 gacha o'zgarsa $\Delta_x Z, \Delta_y Z, \Delta Z$ lar topilsin.

Yechish: Masalaning shartidan $x = 2,\ \Delta x = 0{,}1,\ y = 2,$ $\Delta y = -0{,}1$; $\Delta_x z = (x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)y + y^2 - (x^2 - xy + y^2) =$
$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - xy - y\Delta x + y^2 - x^2 + xy - y^2 = 2x\Delta x +$
$+(\Delta x)^2 - y\Delta x = (2x - y + \Delta x)\Delta x = (2 \cdot 2 - 2 + 0{,}1) \cdot 0{,}1 = 0{,}21;$

$\Delta_y z = x^2 - x(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - (x^2 - xy + y^2) = x^2 - xy -$
$-x\Delta y + y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2 - x^2 + xy - y^2 = 2y\Delta y - x\Delta y + (\Delta y)^2 =$
$= (2y - x + \Delta y)\Delta y = (2 \cdot 2 - 2 - 0{,}1) \cdot (-0{,}1) = -0{,}19;$

$\Delta z = (x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - (x^2 - xy + y^2) =$
$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - xy - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x \cdot \Delta y + y^2 + 2y\Delta y +$
$+(\Delta y)^2 - x^2 + xy - y^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y +$
$+2y\Delta y + (\Delta y)^2 = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 - 2 \cdot (-0{,}1) - 2 \cdot 0{,}1 - 0{,}1 \cdot (-0{,}1) +$
$+2 \cdot 2 \cdot (-0{,}1) + (-0{,}1)^2 = 0{,}4 + 0{,}01 + 0{,}2 - 0{,}2 + 0{,}01 - 0{,}4 + 0{,}01 =$
$= 0{,}03.$

3. Quyidagi funksiyalarning xususiy hosilalari topilsin.

1) $Z = x^3 + 5xy^2 - y^3$; 2) $U = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$; 3) $V = \sqrt[x]{e^y}$.

Yechish: 1) x bo'yicha xususiy hosilani topishda y ni o'zgarmas deb, y bo'yicha hosilani topishda esa x ni o'zgarmas deb qaraymiz.

$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^3 + 5xy^2 - y^3)'_x = 3x^2 + 5y^2$; $\frac{\partial z}{\partial y} = (x^3 + 5xy^2 - y^3)'_y =$
$= 10xy - 3y^2.$

2) Bu funksiya uch o'zgaruvchili funksiyadir. x bo'yicha xususiy hosilani topishda y va z ni o'zgarmas deb, y bo'yicha xususiy hosilani topishda x va z ni o'zgarmas deb va z bo'yicha xususiy hosilani topishda x va y ni o'zgarmas deb qaraymiz.

$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}\right)'_x = \frac{1}{y} + \frac{z}{x^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}\right)'_y = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}$;

$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}\right)'_z = -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{x}.$

3) Dastlab ildizni kasr-ko'rsatkichli daraja qilib yozamiz:

$$V = \sqrt[x]{e^y} = e^{\frac{y}{x}}.$$

x bo'yicha xususiy hosilani topishda y ni o'zgarmas deb, y bo'yicha xususiy hosilani topishda x ni o'zgarmas deb qaraymiz:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(e^{\frac{y}{x}}\right)'_x = e^{\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}}; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \left(e^{\frac{y}{x}}\right)'_y = e^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}}.$$

4. Argumentlarning ko'rsatilgan qiymatlarida quyidagi funksiyalarning xususiy hosilalarini qiymatlari topilsin.

1) $f(\alpha, \beta) = \cos(m\alpha - n\beta)$; $\alpha = \frac{\pi}{2m}$, $\beta = 0$;

2) $Z = \ln(x^2 - y^2)$; $x = 2$, $y = -1$

Yechish: 1) $f'_\alpha(\alpha, \beta) = [\cos(m\alpha - n\beta)]'_\alpha = -\sin(m\alpha - n\beta) \cdot m =$
$= -msin(m\alpha - n\beta)$;

$f'_\beta(\alpha, \beta) = [\cos(m\alpha - n\beta)]'_\beta = -\sin(m\alpha - n\beta) \cdot (-n) =$
$= nsin(m\alpha - n\beta)$.

$$f'_\alpha\left(\frac{\pi}{2m}; 0\right) = -msin\left(m \cdot \frac{\pi}{2m} - 0\right) = -msin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -m;$$

$$f'_\beta\left(\frac{\pi}{2m}; 0\right) = nsin\left(m \cdot \frac{\pi}{2m} - n \cdot 0\right) = nsin\left(\frac{\pi}{2}\right) = n.$$

2) Dastlab xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = [\ln(x^2 - y^2)]'_x = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 - y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = [\ln(x^2 - y^2)]'_y = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot (-2y) = -\frac{2y}{x^2 - y^2}.$$

$$Z'_x(2; -1) = \frac{2 \cdot 2}{2^2 - 1} = \frac{4}{3}; \qquad Z'_y(2; -1) = -\frac{2 \cdot (-1)}{2^2 - 1} = \frac{2}{3}.$$

5. Quyidagi funksiyalarni ikkinchi tartibli xususiy hosilalari topilsin.

1) $Z = x^3 - 2x^2y + 3y^2$; 2) $U = e^{xyt}$

Yechish: 1) $Z'_x = (x^3 - 2x^2y + 3y^2)'_x = 3x^2 - 4xy$;
$Z'_y = (x^3 - 2x^2y + 3y^2)'_y = -2x^2 + 6y$;
$Z''_{xx} = (3x^2 - 4xy)'_x = 6x - 4y$; $Z''_{xy} = (3x^2 - 4xy)'_y = -4x$;
$Z''_{yx} = (-2x^2 + 6y)'_x = -4x$; $Z''_{yy} = (-2x^2 + 6y)'_y = 6$.

2) $U'_x = (e^{xyt})'_x = e^{xyt} \cdot yt = yt\, e^{xyt}$;
$U'_y = (e^{xyt})'_y = e^{xyt} \cdot xt = xt\, e^{xyt}$;
$U'_t = (e^{xyt})'_t = e^{xyt} \cdot xy = xy\, e^{xyt}$;/
$U''_{xy} = (yte^{xyt})'_y = t(1 + xyt)e^{xyt}$;
$U''_{yx} = (xte^{xyt})'_x = t(1 + xyt)e^{xyt}$;
$U''_{xt} = U''_{tx} = y(1 + xyt)e^{xyt}$;

$U''_{yt} = U''_{ty} = x(1 + xyt)e^{xyt}$;

$U''_{yy} = x^2t^2e^{xyt}$; $U''_{tt} = x^2y^2e^{xyt}$; $U''_{xx} = y^2t^2e^{xyt}$.

6. $Z = \ln(x^2+y^2 + 1)$ funksiya uchun $Z''_{xy} = Z''_{yx}$ tenglik bajariladimi?

Yechish: $Z'_x = [\ln(x^2+y^2 + 1)]'_x = \frac{2x}{x^2+y^2+1}$;

$Z''_{xy} = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}\right)'_y = -\frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2}$; $Z'_y = [\ln(x^2+y^2 + 1)]'_y = \frac{2y}{x^2+y^2+1}$;

$Z''_{yx} = \left(\frac{2y}{x^2+y^2+1}\right)'_x = -\frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2}$;

Demak, $Z''_{xy} = Z''_{yx}$.

7. $U = \sin(xy)$ funksiya berilgan U'''_{xyy} topilsin.

Yechish: $U'_x = [\sin(xy)]'_x = \cos(xy) \cdot y = y\cos(xy)$;

$U''_{xy} = [y\cos(xy)]'_y = \cos(xy) - y \cdot \sin(xy) \cdot x = \cos(xy) -$
$-xy\sin(xy)$;

$U'''_{xyy} = [\cos(xy) - xy\sin(xy)]'_y = -x\sin(xy) - x\sin(xy) -$
$-x^2y\cos(xy) = -2x\sin(xy) - x^2y\cos(xy)$.

8. $Z = 2x^2 + y^2$ elliptik paraboloidning $A(1;-1;3)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma tekislik va normal tenglamasi tuzilsin.

Yechish: $Z = 2x^2 + y^2$ tenglamani $2x^2 + y^2 - z = 0$ ko'rinishda yozamiz va uni chap tomonini $F(x, y, z)$ bilan belgilab $F(x, y, z) = 2x^2 +$ $+y^2 - z$ ni hosil qilamiz.

Uning xususiy hosilalarini topib, ularni A nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$F'_x = 4x$, $F'_y = 2y$, $F'_z = -1$, $F'_x(A) = 4$, $F'_y = (A) = -2$, $F'_z(A) = -1$.

Topilganlarni urinma tekislik tenglamasini tuzish formulasi

$$(x - x_0)F'_x(M_0) + (y - y_0)F'_y(M_0) + (z - z_0)F'_z(M_0) = 0$$

ga va normal tenglamasini tuzish formulasi

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$$

ga qo'yamiz va natijada

$4(x - 1) - 2(x + 1) - (z - 3) = 0$ yoki $4x - 2y - z - 3 = 0$

urinma tekislik tenglamasini hamda

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$$

normal tenglamani hosil qilamiz.

9. $Z=3x^2y^5$funksiyaning to'la differensiali topilsin.

Yechish: a) Berilgan funksiyaning xususiy hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(3x^2y^5)'_x=6xy^5;\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=(3x^2y^5)'_y=15x^2y^4;$$

b) Ular har birini argumentlarning mos differensiallariga ko'paytirib quyidagi xususiy differensiallarni topamiz:

$$d_xz=6xy^5dx;\qquad d_yz=15x^2y^4dy.$$

c) Izlanayotgan to'la differensial xususiy differensiallar yig'indisiga teng bo'lgani uchun u quyidagiga teng bo'ladi:

$$dz=d_xz+d_yz=6xy^5dx+15x^2y^4dy.$$

10. $Z=arctg\frac{x}{y}$ funksiyani to'la differensialini $x=1,\ y=3,$ $dx=0{,}01,\ dy=-0{,}05$ bo'lgandagi qiymatini hisoblang.

Yechish: $d_xZ=\frac{\partial z}{\partial x}dx=\left(arctg\frac{x}{y}\right)'_x dx=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}dx=\frac{y}{x^2+y^2}dx;$

$$d_yZ=\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(arctg\frac{x}{y}\right)'_y dy=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)dy=-\frac{x}{x^2+y^2}dy;$$

$$dZ=d_xz+d_yz=\frac{y}{x^2+y^2}dx-\frac{x}{x^2+y^2}dy=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\frac{3\cdot 0{,}01-1\cdot(-0{,}05)}{1+9}=$$

$$=\frac{0{,}08}{10}=0{,}008.$$

11. $1{,}08^{3{,}96}$ni taqribiy qiymati topilsin.

Yechish: $1{,}08^{3{,}96}$ ni $f(x,y)=x^y$ funksiyaning $M_1(1{,}08;3{,}96)$ nuqtadagi xususiy qiymati deb qaraymiz. U holda yordamchi nuqta sifatida $M_0(1;4)$ nuqtani olish mumkin.

Bundan $f(M_0)=1^4=1;\quad f'_x(M_0)=yx^{y-1}\Big|_{\substack{x=1\\y=4}}=4;$

$$f'_y(M_0)=x^y\ln x\Big|_{\substack{x=1\\y=4}}=0.$$

$dx=\ 1{,}08-1=0{,}08;\ dy=3{,}96-4=-0{,}04.$

Topilganlarni taqribiy hisoblash formulasiga qo'yamiz:

$$1{,}08^{3{,}96}\approx f(M_0)+f'_x(M_0)dx+f'_y(M_0)dy=1+4\cdot 0{,}08=1{,}32.$$

12. $Z = \ln(U^2+V), U = e^{x+y^2}, V = x^2+y$ berilgan. $\frac{\partial z}{\partial x}$ va $\frac{\partial z}{\partial y}$ xususiy hosilalar topilsin.

Yechish: Berilgan funksiya murakkab funksiyadir. Chunki Z o'zgaruv chi U va V larning funksiyasi , U va V lar esa o'z vaqtida x va y larning funksiyalaridir. Murakkab funksiyaning xususiy hosilalarini topish uchun

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{x}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

formulalardan foydalanamiz.

$\frac{\partial z}{\partial u} = [\ln(u^2+v)]'_u = \frac{1}{u^2+v}\cdot 2u = \frac{2u}{U^2+V};$ $\qquad \frac{\partial Z}{\partial V} = [\ln(u^2+v)]'_v = \frac{1}{u^2+v};$

$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(e^{x+y^2}\right)'_x = e^{x+y^2};$ $\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(e^{x+y^2}\right)'_y = 2ye^{x+y^2};$

$\frac{\partial v}{\partial x} = (x^2+y)'_x = 2x;$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial y} = (x^2+y)'_y = 1.$

Topilganlarni yuqoridagi formulalarga qo'yamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+v}\cdot e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v}\cdot 2x = \frac{2}{u^2+v}\left(ue^{x+y^2}+x\right) =$$
$$= \frac{2}{e^{2(x+y^2)}+x^2+y}\left(e^{2(x+y^2)}+x\right);$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2+v}\cdot 2ye^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v} = \frac{1}{u^2+v}\left(4uye^{x+y^2}+1\right) =$$
$$= \frac{1}{e^{2(x+y^2)}+x^2+y}\left(2ye^{2(x+y^2)}+1\right).$$

13. $z = x^2+\sqrt{y}$, $y = sinx$ funksiya berigan. $\frac{dz}{dx}$ topilsin.

Yechish: $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2+\sqrt{y}\right)'_x = 2x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2+\sqrt{y}\right)'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}$;

$\frac{dy}{dx} = (sinx)' = cosx.$

Topilganlarni to'la hosilani topish formulasiga qo'yamiz:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

$$\frac{dz}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot cosx = 2x + \frac{1}{2\sqrt{sinx}}\cdot cosx = 2x + \frac{cosx}{2\sqrt{sinx}}.$$

14. $Z = u^2v^3$, $U = x^2 siny$, $V = x^3e^y$ murakkab funksiyaning to'la differensiali topilsin.

Yechish: $Z = f(u,v)$, $U = \varphi(x,y)$, $V = \psi(x,y)$ murakkab funksiyaning to'la differensialini topish uchun

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

formuladan foydalanamiz. Dastlab $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, du va dv larni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (u^2v^3)'_u = 2uv^3; \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = (u^2v^3)'_v = 3u^2v^2;$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 2xsinydx + x^2cosydy;$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = 3x^2e^ydx + x^3e^ydy.$$

Topilganlarni to'la differensialni topish formulasiga qo'yamiz:

$$dz = 2uv^3(2xsinydx + x^2cosydy) + 3u^2v^2(3x^2e^ydx + x^3e^ydy).$$

15. $F(x,y,z) = e^z + x^2y + z + 5 = 0$ oshkormas shaklda berilgan funksiyaning xususiy hosilalari topilsin.

Yechish: $F(x,y,z) = 0$ oshkormas funksiyaning xususiy hosilalari

$$Z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}; \qquad Z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

formulalardan topiladi. Bunda $F'_z \neq 0$ bo'lishi kerak.

F'_x, F'_y *va* F'_z larni topamiz.

$$F'_x = (e^z + x^2y + z + 5)'_x = 2xy; \quad F'_y = (e^z + x^2y + z + 5)'_y = x^2;$$

$$F'_z = (e^z + x^2y + z + 5)'_z = e^z + 1$$

Topilganlarni o'rnilariga qo'yamiz:

$$Z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2xy}{e^z + 1}; \qquad Z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{x^2}{e^z + 1}.$$

16. $U = x^2 + y^2 + z^2$funksiya berilgan $M(1;1;1)$ nuqtada $S = 2i + j + 3k$ vektor yo'nalishi bo'yicha $\frac{\partial u}{\partial s}$ hosila topilsin.

Yechish: Dastlab S vektorning yo'naltiruvchi kosinuslarini topamiz:

$$cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad cos\beta = \frac{1}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Topilganlarni U funksiyadan S vektor yo'nalishi bo'yicha hosilani topish formulasi

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot cos\gamma$$

ga qo'yamiz. Natijada :

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}$$

hosil bo'ladi. Endi $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ va $\frac{\partial u}{\partial z}$ xususiy hosilalarni $M(1;1;1)$ nuqtadagi qiymatlarini topamiz:

$$(\frac{\partial u}{\partial x})_M=(2x)_M=2,\quad (\frac{\partial u}{\partial y})_M=(2y)_M=2,\quad (\frac{\partial u}{\partial z})_M=(2z)_M=2.$$

Bularni oxirgi tenglikka qo'yamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial s}=2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{12}{\sqrt{14}}.$$

17. $U=x^2+y^2+z^2$ funksiya berilgan. Bu funksiyaning $M(1;1;1)$ nuqtadagi gradiyenti aniqlansin.

Yechish: $U=f(x,y,z)$ funksiyaning ixtiyoriy nuqtadagi gradiyenti

$$qradu=\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}k=2xi+2yj+2zk$$

bo'ladi. Endi $M(1;1;1)$ nuqtadagi gradientni aniqlaymiz.

$(qradu)_M=(2xi+2yj+2zk)_M=2i+2j+2k,\quad |qradu|_M=2\sqrt{3}.$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. $f(x,y)=x^2+xy-2y^2$ funksiya berilgan. Agar x argument 2 dan 2,2 gacha, y argument esa 1 dan 0,9 gacha o'zgarsa $\Delta_x Z$, $\Delta_y Z$ va ΔZ lar topilsin.

2. $f(x,y)=x^2+3xy-4y$ funksiya berilgan. Agar x argument 2 dan 1,9 gacha, y argument esa 2 dan 2,2 gacha o'zgarsa, $\Delta_x Z$, $\Delta_y Z$ va ΔZ lar topilsin.

3. Quyidagi funksiyalarni xususiy hosilalari topilsin.

1) $Z=x^3+3x^2y-y^3$; 2) $Z=\frac{xy}{x-y}$;

3) $Z=\frac{x}{3y-2x}$; 4) $U=lnsin(x-2t)$;

5) $Z = e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right)$; 6) $U = sin^2(x+y) - sin^2x - sin^2y$;

7) $U = (z - xy^2)^4$; 8) $U = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Javoblar: 1) $Z'_x = 3x(x+2y)$, $Z'_y = 3(x^2 - y^2)$;

2) $Z'_x = -\frac{y^2}{(x-y)^2}$, $Z'_y = \frac{x^2}{(x-y)^2}$;

3) $Z'_x = \frac{3y}{(3y-2x)^2}$, $Z'_y = -\frac{3y}{(3y-2x)^2}$;

4) $U'_x = ctg(x - 2t)$, $U'_y = -2ctg(x - 2t)$;

5) $Z'_x = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right)$, $Z'_y = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right)$;

6) $U'_x = 2sinycos(2x+y)$, $U'_y = 2sinxcos(x+2y)$;

7) $U'_x = -4(z - xy^2)^3 y^2$, $U'_y = -8xy(z - xy^2)^3$,

$U'_z = 4(z - xy^2)^3$;

8) $U'_x = \frac{y^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$, $U'_y = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$,

$U'_z = -\frac{y^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$.

4. $Z = x^3 + x^2y + y^3$ funksiyaning 3-tartibli xususiy hosilalari topilsin.

5. $U = \frac{y}{x}$ funksiyaning 3-tartibli xususiy hosilalari topilsin.

6. $U = x^4 + 3x^2y^2 - 2y^4$ funksiyaning 4-tartibli xususiy hosilalari topilsin.

7.1) $Z = \sin(ax - by)$; 2) $Z = \frac{x^2}{y^2}$; 3) $Z = \ln(x - 2y)$

funksiyalar uchun $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ ekani tekshirilsin.

8. $U = xe^{-\frac{y}{x}}$ funksiya $x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ tenglikni qanoatlantirishi ko'rsatilsin.

9. $f(m,n) = (2m)^{3n}$ funksiya berilgan. f'_m va f'_n larni $A(\frac{1}{2}; 2)$ nuqtadagi qiymati topilsin.

Javob: 12; 0

$P(x,y,z) = sin^2(3x + 2y - z)$ funksiya berilgan $P'_x(1; -1; 1)$, $P'_y(1; 1; 4)$ va $P'_z\left(-\frac{1}{2}; 0; -1\right)$ lar hisoblansin.

Javob: 0; 2sin2; sin1

11.Quyida berilgan sirtlarda ko'rsatilgan nuqtalarda o'tkazilgan urinma tekislik va normal tenglamalari tuzilsin.

1) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ sirtning $A(1; -1; 1)$ nuqtasida;

2) $2z = x^2 - y^2$ sirtning $B(3; 1; 4)$ nuqtasida.

Javoblar: 1) $x - 2y + 3z = 6$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}$;

2) $3x - y - z = 4$.

12. Quyidagi funksiyalarni to'la differensiallari topilsin:

1) $Z = x^2y$; 2) $Z = \frac{xy}{x-y}$; 3) $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$; 4) $Z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$;

5) $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Javoblar: 1) $dz = 2xydx + x^2dy$; 2) $dz = -\frac{y^2}{(x-y)^2}dx + \frac{x^2}{(x-y)^2}dy$;

3) $dz = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$; 4) $dz = -\left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{y^2}\right)dy$;

5) $du = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dy + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz$.

13. Quyidagi funksiyalar to'liq differensiallarining qiymatlari topilsin:

1) $Z = \frac{y}{x}$, $x = 2$, $y = 1$, $dx = 0{,}1$, $dy = 0{,}2$ bo'lganda;

2) $U = e^{xy}$, $x = 1$, $y = 2$, $dx = -0{,}1$, $dy = 0{,}1$ bo'lganda;

Javoblar: 1) 0,075; 2) $-0{,}1e^2 \approx -0{,}739$.

14. $sin1{,}5 \cdot tg3{,}09$ ni taqribiy qiymatini hisoblang.

Javob: $-0{,}05$.

15. $\frac{sin1{,}49 \cdot arctg0{,}07}{2^{2{,}95}}$ ni taqribiy qiymati hisoblansin.

Javob: 0,01.

16. $P = U^3 lnv$, $U = \frac{x}{y}$, $V = 3x - 2y$ murakkab funksiya berilgan. $\frac{\partial P}{\partial x}$ va $\frac{\partial P}{\partial y}$ lar topilsin.

Javob: $\frac{u}{vy}(3x + 2vlnv)$; $-\frac{2xu}{vy^2}(y + vlnv)$.

17. $f(x) = arcsin\frac{x}{y}$, $y = \sqrt{x^2 + 1}$ funksiya berilgan. $\frac{df}{dx}$ topilsin.

Javob: $\frac{1}{x^2+1}$.

18. $U = e^{z-2y}, Z = sinx, Y = x^3$ funksiya berilgan. $\frac{du}{dx}$ topilsin.

Javob: $e^{z-2y}(cosx - 6x^2)$ yoki $e^{sinx-2x^3}(cosx - 6x^2)$.

19. Quyidagi oshkormas funksiyalarning hosilalari topilsin.

1) $x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$; 2)$ax + by - cz = kcos(ax + by - cz)$.

Javoblar: 1) $Z'_x = -\frac{2x}{2z-1}$, $Z'_y = -\frac{2y}{2z-1}$; 2) $Z'_x = \frac{a}{c}$, $Z'_y = \frac{b}{c}$.

20. $U = x^2 + y^2 + z^2$ funksiya berilgan. $M(1,1,1)$ nuqtada $S = i + j + k$ vektor yo'nalishi bo'yicha $\frac{\partial u}{\partial s}$ hosila topilsin.

Javob: $2\sqrt{3}$.

21. $Z = 5x^2 - 3x - y - 1$ funksiyaning $M(2,1)$ nuqtada shu nuqtadan $N(5,5)$ nuqtaga boradigan yo'nalish bo'yicha hosilasi topilsin.

Javob: 9,4.

22. $U = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3}$ funksiyaning $M(2,4)$ nuqtadagi gradiyenti topilsin.

Javob: $grad\, u = 2i + \frac{8}{3}j$.

23. $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ funksiyaning gradiyenti va uning uzunligi topilsin.

Javob: $qradu = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}i + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}j +$
$+ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}k$, $|qradu| = 1$.

§3. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumlari

Bu paragrafda biz asosan ikki o'zgaruvchili funksiyaning maksimum va minimum (ekstremum) larini aniqlash bilan shug'ullanamiz. Lekin ikki o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumlari bo'yicha aytilgan barcha tasdiqlar uch va undan ortiq o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham o'z kuchini saqlaydi. Shuning uchun ham biz ushbu paragrafda ikki o'zgaruvchili funksiyani ekstremumlari haqida fikr yuritamiz.

Tarif: Agar $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaga yetarlicha yaqin bo'lib, undan farqli hamma (x, y) nuqtalar uchun $F(x_0, y_0) > f(x, y)$ bo'lsa u holda $Z = f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan <u>maksimumga</u> ega deyiladi.

Tarif: Agar $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaga yetarlicha yaqin bo'lib, undan farqli hamma (x, y) nuqtalar uchun $F(x_0, y_0) < f(x, y)$ bo'lsa, u holda $Z = f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada <u>minimumga</u> ega deyiladi.

Funksiyaning maksimumi va minimumi uning <u>ekstremumlari</u> deyiladi, ya'ni funksiya berilgan nuqtada maksimum yoki minimumga ega bo'lsa, funksiyani shu nuqtada ekstremumga ega deyiladi.

Funksiyaning maksimumi va minimumiga boshqacha ta'rif berish ham mumkin.

1.Agar erkli o'zgaruvchilarning yetarli kichik bo'lgan barcha orttirmalarida $\Delta f < 0$ bo'lsa, $f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada maksimumga ega bo'ladi.

2. Agar erkli o'zgaruvchilarning yetarlicha kichik bo'lgan barcha orttirmalarida $\Delta f > 0$ bo'lsa $f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada minimumga ega bo'ladi.

Teorema: (ekstremumning zaruriy sharti). Agar $Z = f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ da ekstremumga ega bo'lsa, u holda z ning har bir birinchi tartibli hususiy hosilasi argumentlarning $x = x_0$, $y = y_0$ qiymatlarida yo nolga teng bo'ladi, yo mavjud bo'lmaydi.

$Z = f(x, y)$ funksiyaning Z'_x=0 (yoki mavjud qilmaydigan) va Z'_y=0 (yoki mavjud qilmaydigan) nuqtalariga <u>kritik nuqtalar</u> deb ataladi.

Teorema: $f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtani o'z ichiga oluvchi biror sohada uchinchi-tartibgacha (uchinchi-tartiblisi ham) uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin; undan tashqari $M_0(x_0, y_0)$ nuqta $f(x, y)$ funksiyaning kritik nuqtasi, ya'ni $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$ bo'lsin. U holda $x = x_0$, va $y = y_0$ bo'lganda

1) Agar

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \text{ va } \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0 \text{ bo'lsa,}$$

$f(x, y)$ funksiya maksimumga ega bo'ladi;

2) Agar

$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)^2>0$ va $\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}>0$ bo'lsa, $f(x,y)$ funksiya minimumga ega bo'ladi;

3) Agar

$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)^2<0$ bo'lsa, $f(x,y)$ funksiya maksimumga ham, minimumga ham ega bo'lmaydi;

4) Agar

$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)^2=0$ bo'lsa, $f(x,y)$ funksiya ekstremumga ega bo'lishi ham, ega bo'lmasligi ham mumkin (bu holda tekshirishni davom ettirish kerak bo'ladi).

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarning $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadagi qiymatlarini A,B,C lar orqali belgilaymiz. Ya'ni,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{M_0}=A,\qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_{M_0}=B,\qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{M_0}=C$$

U holda:

1) $AC-B^2>0$, $A<0$ bo'lsa, u holda funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada maksimumga;

2) $AC-B^2>0$, $A>0$ bo'lsa, u holda funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada minimumga;

3) $AC-B^2<0$, bo'lsa, u holda ekstremum mavjud bo'lmaydi;

4) $AC-B^2=0$, bo'lsa, u holda ekstremum mavjud bo'lishi ham mavjud bo'lmasligi ham mumkin.

Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlar

1. $f(x,z)=(x-1)^2+(y-2)^2-1$ funksiyani ekstremumga tekshirilsin.

Yechish: Bu funksiyani maksimumga (minimumga) ega yoki ega emasligini ta'rifdan foydalanib topish mumkin. Berilgan funksiya $x=1$, $y=2$ da, ya'ni $(1;2)$ nuqtada minimumga erishadi. Haqiqatdan ham $f(1;2) = (1-1)^2 + (2-2)^2 - 1 = -1$, shuningdek $(x-1)^2$ va $(y-2)^2$ esa $x \neq 1$, $y \neq 2$ da doim musbat, demak,

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 > -1$$

ya'ni $f(x,y) > f(1,2)$.

2. $f(x,y) = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2)$ funksiyani ekstremumga tekshirilsin.

Yechish: Bu funksiyani maksimum yoki minimumga ega yoki ega emasligini ta'rifdan foydalanib topamiz. Berilgan funksiya $x = 0, y = 0$ da, ya'ni koordinatalar boshida maksimumga erishadi.

Xaqiqatdan, $f(0;0) = \frac{1}{2}$. $x^2+y^2 = \frac{\pi}{6}$ aylana ichida $(0;0)$ dan farqli nuqta olamiz, u holda $0 < x^2+y^2 < \frac{\pi}{6}$ da $\sin(x^2+y^2) > 0$ bo'ladi va shuning uchun $f(x,y) = \frac{1}{2} - \sin(x^2+y^2) < \frac{1}{2}$,

ya'ni bu holda $f(x,y) < f(0,0)$ bo'ladi.

3. $Z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$ funksiyaning maksimum va minimumga ega yoki ega emasligi tekshirilsin.

Yechish: 1) Kritik nuqtalarni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1)'_x = 2x - y + 3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1)'_y = -x + 2y - 2.$$

Quyidagi tenglamalar sistemasini yechamiz:

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

Uning yechimi $x = -\frac{4}{3}$ va $y = \frac{1}{3}$ dan iborat. Demak, $M_0\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ kritik nuqta bo'lar ekan.

2) Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz va ularni kritik nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (2x - y + 3)'_x = 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (2x - y + 3)'_y = -1;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-x + 2y - 2)'_y = 2.$$

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{M_0} = 2, \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{M_0} = -1, \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{M_0} = 2.$$

$AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 4 - 1 = 3 > 0,\ A = 2 > 0$. Demak, berilgan funksiya $M_0(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3})$ nuqtada minimumga ega. Uni topamiz: $Z_{min}(M_0) = Z_{min}(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}) = \frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} - 4 - \frac{2}{3} + 1 = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}$.

4. $Z = x^3 + y^3 - 3xy$ funksiyaning maksimumi va minimumi mavjud yoki mavjud emasligi aniqlansin.

Yechish: 1) Kritik nuqtalarni topamiz:

$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^3 + y^3 - 3xy)'_x = 3x^2 - 3y;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = (x^3 + y^3 - 3xy)'_y = 3y^2 - 3x$;

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0. \end{cases}$$

Bundan (1; 1) va (0; 0) kritik nuqtalarni topamiz.

2) Ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (3x^2 - 3y)'_x = 6x;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (3x^2 - 3y)'_y = -3;$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (3x^2 - 3x)'_y = 6y.$$

3) Birinchi kritik nuqtani tekshiramiz:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 6;\quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -3;\quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 6.$$

$AC - B^2 = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 36 - 9 = 27 > 0;\ A = 6 > 0$. Demak, berilgan funksiya (1; 1) nuqtada minimumga ega. Uni topamiz :

$$Z_{min} = (x^3 + y^3 - 3xy)_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 1 + 1 - 3 = -1.$$

4) Ikkinchi kritik nuqtani tekshiramiz:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = (6x)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0;\quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -3;$$

$$C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = (6y)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0.$$

$AC - B^2 = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$. Demak, ikkinchi kritik nuqtada funksiya maksimumga ham, minimumga ham ega emas.

Ta'rif. Differensial tenglamaning yechimi deb, berilgan differensial tenglamani qanoatlantiradigan, ya'ni uni ayniyatga aylantiradigan funksiyaga aytiladi.

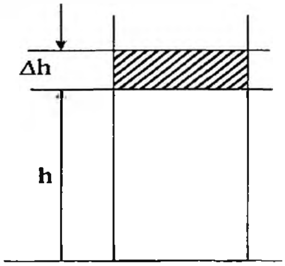
Masalan, $y'' + k^2 y = 0$ tenglamaning yechimi $y = a\sin(kt + \varphi_0)$ funksiyadan, $y'' + y = 0$ tenglamaning yechimi esa $y = \cos x$ funksiyadan iborat.

Ta'rif. (1) yoki (2) differensial tenglamaning yechimini topish uni integrallash, topilgan $y = \varphi(x)$ yechim esa uning integrali deb ataladi.

Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlar

1-misol. Havo bosimini dengiz sathidan balandlikka bog'liq ravishda aniqlang.

Yechish: Dengiz sathidan hisoblangan balandlikni h(m), havo bosimini $\rho(H/m^2)$ orqali belgilaymiz. Masala bosimning balandlikka bog'liqligini tavsiflovchi $\rho(h)$ funksiyani topishdan iborat. Dengiz sathida joylashgan 1m^2 o'lchamli gorizontal maydonchani va bu maydonchaga tayanuvchi prizmatik havo ustunini qaraylik. Agar h balandlikda xayolan ustunning kesimini o'tkazsak (1-chizma), u holda bu kesimdagi bosim ustunning kesimdan yuqoridagi qisimining og'irligi bilan aniqlanadi. $h + \Delta h$ balandlikda ikkinchi gorizontal kesim o'tkazamiz. Bu kesimdagi bosim ikkala kesim orasidagi ustunda bo'lgan havo og'irligiga teng $\Delta\rho$ miqdorga kichik bo'ladi.



1-chizma

Shu sababli $\Delta\rho = -d\Delta h$ deb yozishimiz mumkin, bu yerda d kattalik $\rho(H/m^2)$ bosimdagi bir kubometr havoning og'irligi. Biroq d kattalikning o'zi bosimiga proporsional. Haqiqatdan d_0 bir kubometr havoning $p_0 = 1(H/m^2)$ bosimidagi og'irligi bo'lsin. Boyl – Mariott qonuni $pV = p_0V_0$ ga ko'ra bunday miqdordagi havo p bosimda $V = \frac{1}{p}$ kubometr hajmga ega bo'lib avvalgicha $d_0(H)$ og'irlikda bo'ladi. Bu holda bir kubometr havoning d og'irligi $d = \frac{d_0}{V} = d_0p$ ga yoki umuman $d = kp$ ga teng bo'ladi, bu yerda k- proporsionallik koeffistienti.

Shunday qilib, quyidagi munosabatni hosil qilamiz

$$\Delta p = -kp\Delta h \qquad (1)$$

(1) tenglik aniq emas: bu yerda h va $h + \Delta h$ orasidagi hamma kesimlarda bosim o'zgarmas va p ga teng deb faraz qilingan. Aslida esa bu kesimlarda bosim turlicha bo'lib, h ortishi bilan u kamayadi. Biroq $p = p(h)$ funksiyani uzluksiz deb faraz qilish tabiiy, shu sababli (1) tenglikning xatosi katta emas va Δh kattalik qanchalik kichik bo'lsa, u shunchalik kichik bo'ladi. Endi (1) tenglikning ikkala tomonini Δh ga bo'lib, $\Delta h \to 0$ da limitga o'tsak, undagi xato nolga intiladi va biz endi aniq tenglikka ega bo'lamiz:

$$\frac{dp}{dh} = -kp \qquad (2)$$

(2) tenglik noma'lum (izlanayotgan) $p(h)$ funksiyani va uning hosilasini bog'lovchi *differensial tenglamadir*. Bu tenglamaning *yechimi* havo bosimi p ning h balandlikka bog'liqligini ifodalovchi funksiyadan iborat. Yechimlarni topishning umumiy usullari hozircha noma'lum bo'lgani uchun quyidagicha yo'l tutamiz. (1) munosabatda dengiz sathidan h balandlikni p bosimning funksiyasi deb qaraymiz. Masalan, joyning dengiz sathidan balandligini barometr ko'rsatishi bo'yicha aniqlash talab qilinsa, barometrik nivelirlashda ana shunday yo'l tutiladi. Bunday holda (1) tenglikning ikkala qismini Δp ga bo'lib va $\Delta p \to 0$ da limitga o'tib, quyidagini hosil qilamiz:

$$-\frac{dh}{dp}kp = 1 \text{ yoki } \frac{dh}{dp} = -\frac{1}{kp} \qquad (3)$$

(3) tenglik ham differensial tenglamadir, lekin bu yerda eng sodda bog'lanishga egamiz: noma'lum funksiyaning hosilasi argumentning ma'lum funksiyasi sifatida ifodalanadi. Shu sababli noma'lum h funksiyani topish uchun faqat aniqmas integral olish kerak, natijada quyidagini hosil qilamiz:

$$h = -\frac{1}{k} lnp + C_1 \qquad (4)$$

C_1 kattalik integrallashning ixtiyoriy o'zgarmasidir, kelgusida qulay bo'lishi uchun uni $C_1 = \frac{1}{k} lnC$ ko'rinishda yozgan ma'qul. U holda (4) tenglikni quyidagicha qayta yozish mumkin:

$$h = \frac{1}{k} ln\frac{C}{p} \qquad (5)$$

(5) tenglik izlanayotgan $h = h(p)$ funksiyaning ifodasini beradi, biroq bu ifodani unda ixtiyoriy C o'zgarmas borligi tufayli juda ham aniq deb bo'lmaydi. To'la aniqlikka erishish uchun Cni bilish zarur, bunga h ning biron-bir qiymatida p ning qiymati berilishi orqali erishish mumkin. Bizning misolimizda dengiz sathida ($h = 0$ bo'lganda) atmosfera bosimi $p = p_0$ ga teng deb olish eng qulaydir. Bu qiymatlarni (5) ga qo'yib, $C = p_0$ ni topamiz, natijada izlanayotgan funksiya uzil-kesil

$$h = \frac{1}{k} ln\frac{p_0}{p} \qquad (6)$$

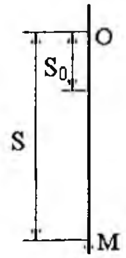
formula orqali ifodalanadi.

(6) tenglikni p ga nisbatan yechish va bu bilan dastlab qo'yilgan masalaning yechimini hosil qilish mumkin. Havo bosimi p ning dengiz sathidan balandlik h ga bog'liq ifodasi

$$p = p_0 e^{-kh} \qquad (7)$$

formula bilan ifodalanadi.

2-misol. Massasi m bo'lgan moddiy nuqta og'irlik kuchi ta'sirida erkin tushmoqda. Nuqtaning harakat qonunini havoning qarshiligini hisobga olmasdan toping.



2-chizma

Yechilishi: Sanoq boshi O tanlab olingan va pastga yo'nalgan vertikal o'q olaylik. Moddiy nuqtaning vaziyati t vaqtga bog'liq ravishda o'zgaradigan $OM = s$ koordinata bilan aniqlanadi (2-chizma). Dinamikaning ikkinchi asosiy qonunini

$$F = ma$$

ko'rinishda yozamiz, bu yerda m -massa, a -nuqtaning tezlanishi, F –ta'sir etuvchi kuch. Shartga ko'ra nuqtaga faqat og'irlik kuchi ta'sir etadi, demak, $F = P = mg$, bu yerda g -og'irlik kuchi tezlanishi. a tezlanish yo'ldan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi hosilaga teng, shuning uchun

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg$$

yoki

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \qquad (8)$$

(8) tenglik noma'lum $s = s(t)$ funksiyaning ikkinchi hosilasi qatnashgan differensial tenglamadir. Ushbu holda bu ikkinchi hosila argumentning ma'lum funksiyasi (hatto, o'zgarmas kattalikka teng) bo'lgani uchun izlanayotgan funksiyani t bo'yicha ikki marta integrallab topish mumkin:

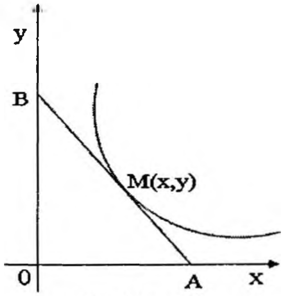
$$\frac{ds}{dt} = gt + C_1, \qquad (9)$$

$$s = \frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2. \qquad (10)$$

(10) tenglik izlanayotgan harakat qonunini beradi, biroq yuqorida ko'rilgan masaladagi kabi u integrallash o'zgarmaslariga ega, ayni holda ikkita. Nuqtaning boshlang'ich vaziyatini va boshlang'ich tezligini bilgan holda bu o'zgarmaslarni aniqlash mumkin. Boshlang'ich momentda $(t = 0)$ nuqtaning tezligi v_0 ga, uning O sanoq boshidan masofasi s_0 ga teng bo'lsin deylik. $\frac{ds}{dt}$ tezlikni ifodalagani uchun (9) dan $C_1 = v_0$ ni, (10) dan esa $C_2 = s_0$ ni hosil qilamiz, natijada harakat qonuni ushbu ko'rinishga ega bo'ladi:

$$s = \frac{gt^2}{2} + v_0t + s_0. \qquad (11)$$

3-misol. Egri chiziqqa uning ixtiyoriy nuqtasida o'tkazilgan urinmaning ordinatalar o'qidan kesgan kesmasi urinish nuqtasi ordinatasining ikkilanganiga teng. Shu egri chiziqning tenglamasini toping.



3-chizma

Yechilishi: Izlanayotgan egri chiziqda ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqta olamiz (3-chizma). M nuqtada o'tkazilgan urinmaning tenglamasi

$$Y - y = y'\,(X - x)$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerda X, Y-urinma nuqtasining o'zgaruvchi koordinatalari, y'-izlanayotgan funksiyaning berilgan nuqtadagi hosilasi. Urinmaning Oy o'qdan ajratadigan OB kesmasini topish uchun $X = 0$ deymiz. U holda $OB = Y = y - xy'$. Ikkinchi tomondan, shartga ko'ra $OB = 2y$. OB kesma uchun topilgan ikkala ifodani taqqoslab,

$$y - xy' = 2y$$

yoki

$$xy' + y = 0 \qquad (12)$$

tenglamani hosil qilamiz.

Bu tenglamaning ikkala tomonini dx ko'paytirib, uni differensial ishtirok etgan ko'rinishga keltiramiz:

$$xdy + ydx = 0 \qquad (13)$$

(13) tenglamaning chap tomoni o'zgaruvchilar ko'paytmasining differensiali $d(xy)$ dan iborat, shuning uchun (13) tenglamani ushbu ko'rinishda yozish mumkin:

$$d(xy) = 0,$$

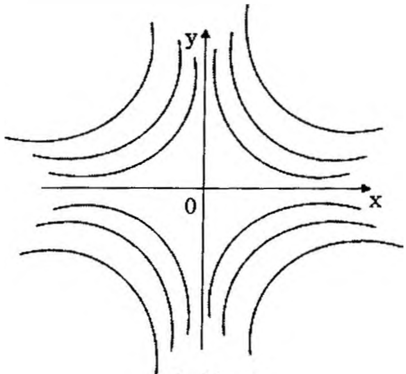
bu yerdan

$$xy = C, \qquad (14)$$

Bu yerda C- ixtiyoriy o'zgarmas. (14) tenglik izlanayotgan egri chiziqning tenglamasini beradi, uni oshkor holda yozish ham mumkin:

$$y = \frac{C}{x} \qquad (15)$$

(14) tenglama ham (15) kabi, aslini olganda, bitta egri chiziqni emas, balki egri chiziqlarning butun bir oilasini-asimptotalari koordinata o'qlaridan iborat teng o'qli giperbolalar oilasini tashkil etadi (4-chizma).



4-chizma

Bu oilaning egri chiziqlaridan birini ajratib olish uchun yuqorida ko'rilgan masalalardagi kabi argumentning birorta tayin qiymati uchun funksiya qiymatini berish kerak. Mazkur masalada bu fikr izlanayotgan egri chiziq o'tadigan nuqtaning koordinatalarini berilishiga ekvivalentdir. Aytaylik, izlanayotgan egri chiziq nuqtadan o'tsin, ya'ni da funksiya qiymatga ega bo'lsin. Bu qiymatlarni (14) yoki (15) ga qo'yib, ni topamiz, shu sababli izlanayotgan egri chiziq

$$xy = 6 \qquad (16)$$

yoki

$$y = \frac{6}{x} \qquad (17)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

4. Urinma osti, urunish nuqtasining absissasi va ordinatasining yig'indisiga teng bo'lgan egri chiziqlarni toping.

Yechish: Masala shartidan quyidagi tenglamani tuzamiz:

Yoki differensiallarda ifodalasak

tenglama hosil bo'ladi.

5. Quyidagi tenglamalardan qaysilari differensial tenglama bo'la oladi?

1) $y' + 3x = 0$; 3) $y = e^x$; 5) $y = ln|x| + C$;

2) $x^2 + y^2 = 0$; 4) $y'y - x = 0$; 6) $2dy + 3xdx = 0$.

Yechish: Berilgan tenglamalardan 2, 3 va 5 tenglamalar differensial tenglama bo'la olmaydi. Chunki ularda noma'lum funksiyaning hosilalari yoki differensiallari ishtirok etmayapti.

6. Quyidagi funksiyalarning qaysilari $y' = x$ tenglamaning yechimi bo'ladi?

1) $y = x + 2$; 2) $y = x^2 - 1$; 3) $y = \frac{x^2}{2} - 3$; 4) $y = \frac{x^2}{2} + 5$.

Yechim: Bu funksiyalardan uchinchi va to'rtinchisi yechim bo'ladi. Chunki $y = \frac{x^2}{2} - 3$, $y' = \left(\frac{x^2}{2} - 3\right)' = \frac{2x}{2} = x$ va $y' = \left(\frac{x^2}{2} + 5\right)' = \frac{2x}{2} = x$.

Birinchi va ikkinchi funksiyalar yechim bo'lmaydi. Chunki

$y' = (x + 2)' = 1$ va $y' = (x^2 - 1)' = 2x$.

Mustqil yechish uchun topshriqlar

1. Bir jinsli elastik ip ikki uchidan osib qo'yilgan. Ip o'z og'irligi ta'sirida biror egri chiziq bo'yicha joylashadi (osilgan arqon, sim, zanjir shunday joylashgan). Bu egri chiziqning tenglamasi topilsin.

Javob: $y = a\left(\frac{x}{a} + c_1\right) + c_2$.

2. Nyuton qonuniga asosan biror jismning havoda sovush tezligi jism temperaturasi bilan havo temperaturasi orasidagi ayirmaga proporsional. Agar havoning temperaturasi 20°C bo'lib, jism 20 minut ichida 100° dan 60°C gacha sovisa, qancha vaqtdan so'ng uning temperaturasi 30°C gacha pasayadi? Masalani differensial tenglamasi tuzilsin.

Javob: $\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$.

3. O'q $v_0 = 400m/sek$ tezlik bilan harakatlanib, $h = 20sm$ qalinlikdagi devorni teshib, undan $v_0 = 100m/sek$ tezlik bilan uchib chiqadi. Devorning qarshilik kuchi o'qning harakat tezligi kvadratiga

proporsional deb olib, o'qning devor ichida harakatlanish differensial tenglamasi tuzilsin.

Javob : $m\frac{dr}{dt} = -kv^2$.

4. Ma'lum bo'lishicha har bir berilgan paytda radiyning yemirilish tezligi uning miqdoriga to'g'ri proporsionaldir. Agar $t = 0$ bo'lganda radiyning massasi m_0 bo'lsa, radiy massasining vaqtga qarab o'zgarish qonuni aniqlansin.

Javob: $\frac{dm}{dt} = -km$.

5. O'rniga qo'yish usuli bilan $y = Cx^3$ funksiya $3y - xy' = 0$ tenglamaning yechimi ekanligi tekshirilsin. Ushbu

1) $\left(1; \frac{1}{3}\right)$; 2)$(1; 1)$; 3)$\left(1; -\frac{1}{3}\right)$

nuqtalardan o'tuvchi integral chiziqlar yasalsin.

6. Quyidagi funksiyalar mos differensial tenglamalarni qanoatlantirishi ko'rsatilsin:

1) $y = sinx - 1 + Ce^{-sinx}$, $y' + ycosx = \frac{1}{2}sin2x$;

2) $y = \frac{C_1}{x} + C_{2,}$ $y'' + \frac{2}{x}y' = 0$.

7. O'ringa qo'yish usuli bilan: 1) $y'' + 4y = 0$ va 2) $y''' - 9y' = 0$ differensial tenglamalar mos ravishda

1) $y = C_1cos2x + C_2sin2x$ va 2) $y = C_1 + C_2e^{3x} + C_3e^{-3x}$ umumiy integrallarga ega ekanliklari tekshirilsin.

8. $C = 0; \pm 1; \pm 2$ bo'lganda $y = Cx^2$ parabolalar yasalsin va shu parabolalar oilasining differensiallar tenglamasi tuzilsin.

Javob: $xy' = 2y$.

9. $y = C_1sinx + C_2cosx$ funksiyalar $y'' + y = 0$ tenglamaning yechimlari ekanligi ko'rsatilsin.

10. $y'x - x^2 - y = 0$ tenglamaning yechimlari $y = x^2 + Cx$ ko'rinishdagi funksiyalardan iborat ekanligi isbotlansin.

11. $y = x^2 + x + C$ funksiya $dy = (2x + 1)dx$ tenglamaning yechimi ekanligi isbotlansin.

12. $s = 3t^3 - 2t$ funksiya $ds = (3t^2 - 2)dt$ tenglamani yechimi bola oladimi?

13. $y = \sqrt{x}$ funksiya $2yy' = 1$ tenglamani yechimi ekanligi isbotlansin.

14. $y = Ce^{-x^2}$ funksiya $\frac{dy}{y} + 2xdx = 0$ tenglamaning yechimi ekanligi ko'rsatilsin.

§2 Birinchi tartibli differensial tenglamalar

2.1 Umumiy tushunchalar. O'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan tenglamalar

Birinchi tartibli differensial tenglama

$$F = (x, y, y') = 0$$

ko'rinishda bo'ladi. Agar uni y' ga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, uni

$$y' = f(x, y)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi. Bu holda differensial tenglama hosilaga nisbatan yechilgan deyiladi. Bu tenglama uchun differensial tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi haqida quyidagi teorema o'rinlidir.

Teorema: Agar

$$y' = f(x, y)$$

tenglamada $f(x, y)$ funksiya va undan y bo'yicha olingan $\frac{\partial f}{\partial y}$ xususiy hosila XOY tekislikdagi (x_0, y_0) nuqtani o'z ichiga oluvchi biror sohada uzluksiz funksiyalar bo'lsa, y holda berilgan tenglamaning $x = x_0$ bo'lganda $y = y_0$ shartni qanoatlantiruvchi birgina $y = \varphi(x)$ yechimi mavjuddir. $x = x_0$ bo'lganda y funksiya berilgan y_0 songa teng bo'lishi kerak degan shart *boshlang'ich shart* deyiladi. Bu shart ko'pincha

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{yoki} \quad y|_{x=x_0} = y_0$$

ko'rinishda yoziladi.

Ta'rif. Birinchi tartibli differensial tenglamaning *umumiy yechimi* deb bitta ixtiyoriy C o'zgarmas miqdorga bog'liq bo'lgan, hamda quyidagi shartni qanoatlantiruvchi

$$Y = \varphi(x, c)$$

funksiyaga aytiladi:

a) Bu funksiya differensial tenglamani C o'zgarmas miqdorning har qanday tayin qiymatida ham qanoatlantiradi;

b) $x = x_0$ bo'lganda $y = y_0$ ($y|_{x=x_0} = y_0$) boshlang'ich shart har qanday bo'lganda ham C ning shunday $C = C_0$ qiymatini topish mumkinki, $y = \varphi(x, C_0)$ funksiya berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiradi.

Differensial tenglamaning umumiy yechimini izlashda ko'pincha y ga nisbatan yechilmagan

$$\Phi(x, y, c) = 0$$

ko'rinishdagi munosabatga kelib qolamiz. Bu munosabatni y ga nisbatan yechib, umumiy yechimni hosil qilish mumkin. Ammo yuqoridagi munosabatdan y ni doimo topish oson bo'lavermaydi. Bunday hollarda umumiy yechim oshkormas ko'rinishda qoldiriladi. Bu holda $\Phi(x, y, c) = 0$ tenglik differensial tenglamaning *umumiy integrali* deyiladi.

Ta'rif. Ixtiyoriy C o'zgarmas miqdorga ma'lum $C = C_0$ qiymat berish natijasida $y = \varphi(x, C)$ umumiy yechimdan hosil bo'ladigan har qanday $y = \varphi(x, C_0)$ funksiya *xususiy yechim* deb ataladi. Bu holda $\Phi(x, y, C_0) = 0$ munosabat tenglamaning *xususiy integrali* deyiladi. Geometrik nuqtai nazardan *umumiy integral* koordinatalar tekisligida bir ixtiyoriy o'zgarmas C ga bog'liq bo'lgan *egri chiziqlar oilasini* ifodalaydi. Bu egri chiziqlar berilgan differensial tenglamaning integral egri chiziqlari deyiladi.

Hosilaga nisbatan yechilgan

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

differensial tenglama berilgan bo'lib uning umumiy yechimi $y = \varphi(x, c)$ bo'lsin. Bu umumiy yechim OXY tekislikda integral egri chiziqlar oilasini aniqlaydi.

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ tenglama $\frac{dy}{dx}$ hosilaning koordinatalari x va y bo'lgan har bir M nuqtadagi qiymatini, ya'ni shu M nuqtadan o'tuvchi integral egri chiziqqa shu nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffisientini aniqlaydi. Shunday qilib berilgan differensial tenglama yo'nalishlar maydonini aniqlaydi.

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ differensial tenglama uchun $\frac{dy}{dx} = C$ munosabat bajariladigan nuqtalarning geometrik o'rni berilgan differensial tenglamaning izox linasi deyiladi.

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$$

tenglamaga o'zgaruvchilari ajralgan tenglama deyiladi. Uni har ikkala tomonini hadma-had integrallash orqali yechiladi. Ya'ni,

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = C.$$

$$f_1(x) \cdot f_2(y)dx + f_3(x) \cdot f_4(y)dy = 0$$

ko'rinishidagi tenglamaga o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama deyiladi. Uni ikkala tomonini hadma-had $f_2(y) \cdot f_3(x)$ ifodaga bo'lish orqali o'zgaruvchilari ajralgan tenglamaga keltiriladi. Ya'ni,

$$\frac{f_1(x) \cdot f_2(y)}{f_2(y) \cdot f_3(x)} dx + \frac{f_3(x) \cdot f_4(y)}{f_2(y) \cdot f_3(x)} dy = 0 \text{ yoki } \frac{f_1(x)}{f_3(x)} dx + \frac{f_4(y)}{(f_2(y))} dy = 0.$$

Mavzu bo'yicha yechimlari bilan berilgan misollar:

1. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ tenglama uchun $y = \frac{c}{x}$ funksiyalar oilasi umumiy yechim ekanligi ko'rsatilsin va $x_0 = 2$ bo'lganda $y_0 = 1$ bo'ladigan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi topilsin.

Yechish: $y = \frac{c}{x}$ bo'lgani uchun $\frac{dy}{dx} = -\frac{c}{x^2}$ bo'ladi. Buni berilgan tenglamaga qo'yamiz:

$$-\frac{c}{x^2} = -\frac{\frac{c}{x}}{x}, \qquad -\frac{c}{x^2} = -\frac{c}{x^2}.$$

Demak, $y = \frac{c}{x}$ berilgan tenglamaning umumiy yechimi ekan. Endi $x_0 = 2$ bo'lganda $y_0 = 1$ bo'ladigan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topamiz. Bu qiymatlarni $y = \frac{c}{x}$ formulaga qo'yib $\frac{c}{x} = 1$ yoki $C = 2$ ni topamiz. Demak izlangan xususiy yechim $y = \frac{2}{x}$ funksiyadan iborat.

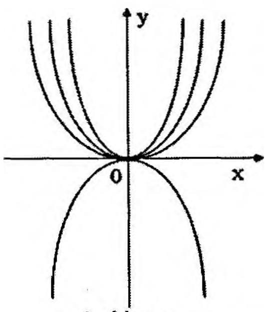
2. $y = Cx^2$ parabolalar oilasining diferensial tenglamasi topilsin (1-chizma)

Yechish: Oilani tenglamasini x bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{dy}{dx} = 2Cx$$

Bunga oila tenglamasidan topilgan $c=\frac{y}{x^2}$ qiymatni qo'yib, berilgan oilaning

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$



1-chizma

differensial tenglamasini hosil qilamiz. Bu differensial tenglama $x \neq 0$ bo'lganda, ya'ni OY o'qidagi nuqtalarga ega bo'lmagan har qanday sohada ma'noga ega.

3. $xdx + ydy = 0$ tenglama yechilsin

Yechish: Bu tenglama o'zgaruvchilari ajralgan tenglamadir.Uni yechish uchun har ikkala tomonini xadma-xad integrallaymiz .

$\int xdx + \int ydy = c_1$, $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_1$, $x^2+y^2= 2c_1$, $2c_1= c^2$ deb olib $x^2+y^2= c^2$ tenglamani hosil qilamiz.

Bu markazi koordinatalar boshida va radiusi C bo'lgan konsentrik aylanalar oilasining tenglamasidir.

4. $y \ln y dy - e^x dx = 0$ tenglama yechilsin:

Yechish: Bu o'zgaruvchilari ajralgan tenglamadir. Uni yechish uchun har ikkala tomonini hadma-had integrallaymiz.

$\int y\ln y dy - \int e^x dx = \int o d x$, $\int y \ln y dy - e^x = c$. Bu tenglamani chap tomonidagi birinchi integralni bo'laklab integrallaymiz:

$$\int y\ln y dy = \left\{\begin{matrix} u = \ln y, & du = \frac{dy}{y} \\ dv = ydy, & v = \frac{y^2}{2} \end{matrix}\right\} = \frac{y^2}{2}\ln y - \frac{1}{2}\int y^2 \frac{dy}{y} = \frac{y^2}{2}\ln y -$$

$-\frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{4}y^2(2\ln y - 1)$. Buni o'rniga qo'yamiz. Natijada

$\frac{1}{4}y^2(2\ln y - 1) - e^x = c$ hosil bo'ladi. Bu berilgan differensial tenglamaning umumiy integralidir.

5. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu o'zguvchilari ajraladigan tenglamadir. O'zgaruvchilarni ajratamiz va integrallaymiz:

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$, $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + \ln|c|$, $\ln|y| = \ln\frac{c}{x}$.

Bundan esa $y = \frac{c}{x}$ umumiy yechimni topamiz.

6. $(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. O'zgruvchilarni ajratish uchun uni har ikkala tomonini hadma-had xy ifodaga bo'lamiz.

$$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0, \quad \left(\frac{1}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = 0.$$

Buni har ikkala tomonini hadma-had integrallaymiz.

$$\int \frac{dx}{x} + \int dx + \int \frac{dy}{y} - \int dy = c, \quad ln|x| + x + \ln|y| - y = c,$$

$ln|xy| + x - y = c.$

Bu berilgan tenglamaning umumiy integralidir.

7. $(1 + x^2)dy + ydx = 0$ tenglamani $y(0) = 1$ shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Yechish: Bu tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. Bunda $1 + x^2 \neq 0$ bo'lgani uchun $y \neq 0$ deb olish kifoya. Bu shartda berilgan tenglamani $y(1 + x^2)$ ifodaga bo'lish orqali umumiy yechimni quydagicha topamiz:

$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{1+x^2} = 0$, $\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{1+x^2} = c$, $ln|y| - arctgx = c$,

$ln|y| = arctgx + c, \ y = e^{arctgx+c}.$

Endi boshlang'ich shartdan foydalanib $(x = 0, \ y = 1)$ c o'zgarmasni qiymatini topamiz

$1 = e^{arctg0+c}, \quad e^c = 1, \quad c = 0.$

Demak, berilgan tenglamaning berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi $y = e^{arctgx}$ funksiyadan iborat.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar:

1. Quyidagi differensial tenglamalar yechilsin.

1)$y' - 2x = 0;$ 2) $y' + 2x = 0;$ 3) $y' + 2x = 5.$

Javob: 1) $y = x^2 + c;$ 2) $y = -x^2 + c;$ 3) $y = -x^2 + 5x + c.$

2. $y' = x$ tenglamani qanoatlantiruvchi va $(1; 2)$ nuqtadan o'tuvchi egri chiziq tenglmasi topilsin.

Javob: $y = \frac{x^2+3}{2}.$

3. Quyidagi tenglamalarning umumiy yechimlari topilsin.

1) $x + y' = 0;$ 2) $4x^3 - y' = 0;$ 3) $2xdx = 3y^2dy.$

Javob: 1) $y = c - \frac{1}{2}x^2;$ 2) $y = x^4 + c;$ 3) $y = \sqrt[3]{x^2 + c}.$

4. $y' = 3x^2$ tenglamani $y(1) = 5$ shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Javob: $y = x^3 + 4.$

5. Quyidagi tenglamalar yechilsin.

1) $xdy = (y + 1)dx;$ 2) $(x + 1)ydx = dy;$

3) $dy = ycos^2xdx;$ 4) $dy = ysinxdx;$

5) $y' \cdot \frac{5x+3}{y} = 1;$ 6) $y' = x^2y - x^2;$

7) $x^2y' + y = 0;$ 8) $x + xy + y'(y + xy) = 0.$

Javob: 1) $y = cx - 1;$ 2) $y = e^{0,5x^2+x+c};$ 3) $y = e^{\frac{x+sinx+c}{2}};$

4) $y = e^{c-cosx};$ 5) $y = c\sqrt[5]{5x + 3};$ 6) $y = 1 + ce^{\frac{x^3}{3}};$

7) $y = ce^{\frac{1}{x}};$ 8) $x + y = lnc(x + 1).$

6. Quyidagi tenglamalarni berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlari topilsin.

1) $x^2dy = y^2dx,\ \ y(0{,}1) = 0{,}25;$ 2) $\frac{dy}{3x} - \frac{dx}{2y} = 0,\ \ \ y(4) = 5;$

3) $3x^3dy = 2y^4dx,\ y(1) = \frac{1}{2};$ 4) $y' = \frac{y}{2\sqrt{x}},\ \ \ y(9) = e^2;$

5) $1 + y^2 = y'\sqrt{x},\ y\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = 0;$ 6) $y' = (2y + 1)ctgx,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$

Javoblar: 1) $y = \frac{x}{1-6x};$ 2) $y = \sqrt{1{,}5x^2 + 1};$ 3) $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{1+7x^2}};$

4) $y = e^{\sqrt{x}-1};$ 5) $y = tg2\sqrt{x};$ 6) $y = \frac{c\sin^2x-1}{2}.$

7. $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy$ tenglamaning $y(0) = 1$ shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Javob: $y = \frac{c\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}.$

8. $A(-1; 1)$ nuqtadan o'tuvchi va istalgan nuqtasidagi urinmaning burchak koeffitsienti urinish nuqta ordinatasining kvadratiga teng bo'lgan egri chiziq aniqlasin.

Javob: $xy = -1.$

2.2. Birinchi tartibli bir jinsli tenglamalar va bir jinsli tenglamaga keltiriladigan tenglamalar

Ta'rif: Agar λ ning har qanday qiymatida

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

ayniyat to'g'ri bo'lsa, $f(x, y)$ funksiya x va y o'zgaruvchilarga nisbatan $\underline{n}$ o'lchovli bir jinsli funksiya deyiladi.

Masalan, $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ funksiya bir o'lchovli bir jinsli funksiyadir, chunki

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3 + (\lambda y^3)} = \sqrt[3]{(x^3 + y^3)} = \lambda\sqrt[3]{x^3 + y^3} = \lambda f(x, y).$$

$f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$ funksiya nol o'lchovli bir jinsli funksiya, chunki

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}{\lambda x \cdot \lambda y} = \frac{\lambda^2(x^2 + y^2)}{x^2 \cdot xy} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \lambda^\circ \cdot f(x, y).$$

Ta'rif: Agar birinchi tartibli

$$y' = f(x, y)$$

tenglamada $f(x,y)$ funksiya x va y ga nisbatan nol o'lchovli bir jinsli funksiya bo'lsa, u holda tenglama x va y o'zgaruvchilarga nisbatan bir jinsli tenglama deyiladi.

Agar funksiyani bir jinsli bo'lishning sharti $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$ da $\lambda = \frac{1}{x}$ deb olsak, $f(x,y) = f(1,\frac{y}{x})$ bo'ladi. Bu esa nol o'lchovli bir jinsli funksiya faqat argumentlar nisbatigagina bog'liq bo'lishini bildiradi. Bu holda berilgan tenglama

$$y = f(1,\frac{y}{x})$$

ko'rinishga keladi. O'zgaruvchilarni almashtiramiz:

$$U = \frac{y}{x} \quad \text{yoki} \quad y = ux$$

U holda

$$y' = u'x + u.$$

Hosilaning bu ifodasini berilgan teglamaga qo'ysak, o'zgaruvchilari ajraladigan

$$u'x + u = f(1,u)$$

tenglama hosil bo'ladi. O'zgaruvchilarni ajratamiz va integrallaymiz:

$$x \cdot \frac{du}{dx} = f(1,u) - u, \quad \frac{du}{f(1,u)-u} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{f(1,u)-u} = \int \frac{dx}{x} + c.$$

Oxirgi integralni hisoblagandan so'ng u o'rniga $\frac{y}{x}$ ni qo'ysak, berilgan bir jinsli tenglamaning umumiy integrali hosil bo'ladi.

Quyidagi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$$

ko'rinishdagi tenglamalar bir jinsli tenglamalarga keltiriladi. Agar $c = c_1 = 0$ bo'lsa, berilgan tenglama bir jinsli bo'lishi ravshan. Aytaylik c va c_1 (yoki ulardan biri) noldan farqli bo'lsin. O'zgaruvchilarni almashtiramiz:

$$x = x_1 + h, \qquad y = y_1 + k,$$

U holda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}.$$

$x,\ y,\ \frac{dy}{dx}$ larning ifodalarini berilgan tenglamaga qo'ysak,

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1+ah+bk+c}{a_1x_1+b_1y_1+a_1h+b_1k+c_1}$$
hosil bo'ladi. Bu yerda h va k ni
$$\begin{cases} ah+bk+c=0 \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases}$$
tengliklar o'rinli bo'ladigan qilib, ya'ni sistemaning yechimi kabi tanlaymiz. Natijada, berilgan tenglama
$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1}{a_1x_1+b_1y_1}$$
bir jinsli tenglamaga keladi.

Bu tenglamani yechib, so'ngra $x=x_1+h,\quad y=y_1+k$ belgilashlarni e'tiborga olib, berilgan tenglamani yechimini hosil qilamiz.

Agar
$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$$
bo'lsa, ya'ni $ab_1=a_1b$ bo'lsa, yuqoridagi sistemaning yechimi yo'q. Ammo bu holda $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$, ya'ni $a_1=\lambda a,\ b_1=\lambda b$ bo'ladi va bu holda berilgan tenglamani
$$\frac{dy}{dx}=\frac{(ax+by)+c}{\lambda(ax+by)+c_1}$$
ko'rinishga keltirish mumkin. Bu holda $Z=ax+by$ almashtirish yordamida berilgan tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi.

Misollar:

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2-y^2}$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu tenglamani o'ng tomonida nol o'lchovli bir jinsli funksiya turibdi. Demak, berilgan tenglama bir jinsli. O'zgaruvchilarni almashtiramiz:
$$\frac{y}{x}=u,\qquad y=ux,\qquad \frac{dy}{dx}=u+x\cdot\frac{du}{dx}$$
Bularni berilgan tenglamaga qo'yamiz:
$$u+x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-u^2},\quad x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-u^2}-u,\quad x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{u-u+u^3}{1-u^2},\quad x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{u^3}{1-u^2}.$$
Hosil bo'lgan tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir.

O'zgaruvchilarni ajratib,

$$\frac{(1-u^2)du}{u^3}=\frac{dx}{x}, \qquad \left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u}\right)du=\frac{dx}{x}$$

ni hosil qilamiz. Uni integrallab

$$-\frac{1}{2u^2}-ln|u|=ln|x|+ln|c| \text{ yoki } -\frac{1}{2u^2}=ln|uxc|$$

ni hosil qilamiz u ni o'rniga $\frac{y}{x}$ ni qo'ysak, dastlabki tenglamaning umumiy integrali hosil bo'ladi:

$$-\frac{x^2}{2y^2}=ln|cy|.$$

2. $y'=\frac{x+y}{x}$ tenglama yechilsin.

Yechish: $y=ux$ almashtirish qilamiz.U holda $y'=u'x+u$ bo'ladi. Bularni berilgan tenglamaga qo'yamiz: U holda

$u'x+u=\frac{x+ux}{x}, \quad u'x+u=1+u, \quad u'x=1, \quad \frac{du}{dx}=\frac{1}{x}, \quad du=\frac{dx}{x}.$

Bu o'zgaruvchilari ajralgan tenglamadir. Uni yechamiz:

$\int du=\int\frac{dx}{x}+c, \; u=ln|x|+c, \; \frac{y}{x}=ln|x|+c, \; y=xln|x|+cx.$

3. $y'=\frac{y}{x}+sin\frac{y}{x}$ tenglamani $y(1)=\frac{\pi}{2}$ shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi topilsin.

Yechish: $\frac{y}{x}=u$ almashtirish qilamiz. Undan $y=ux$ va $y'=u'x+u$ bo'lib, berilgan tenglama

$u'x+u=u+sinu, \; u'x=sinu, \; xdu=sinudx, \quad \frac{du}{sinu}=\frac{dx}{x}.$

ko'rinishga keladi.

Buni integrallab

$ln\left|tg\frac{u}{2}\right|=ln|x|+ln|c|$ ni undan esa $\frac{u}{2}=arctg|cx|$ ni hosil qilamiz. $u=\frac{y}{x}$ ekanligini e'tiborga olib $y=2xarctg(cx)$ ni topamiz. Endi $y(1)=\frac{\pi}{2}$ boshlang'ich shartni e'tiborga olib $\frac{\pi}{4}=arctgc$ ni, undan esa $c=1$ ni hosil qilamiz. Demak, izlanayotgan yechim $y=2xarctgx$ dan iborat.

4. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-3}{x-y-1}$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu bir jinsli tenglamaga keltiriladigan tenglamadir. Uni bir jinsliga keltirish uchun $x = x_1 + h,\ y = y_1 + k$ almashtirish qilamiz. Bu holda

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + h + k - 3}{x_1 - y_1 + h - k - 1}$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamadan

$$\begin{cases} h + k - 3 = 0 \\ h - k - 1 = 0 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Uni yechib $h = 2$ va $k = 1$ ni topamiz. Natijada bir jinsli

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani $\frac{y_1}{x_1} = u$ almashtirish yordamida yechamiz:

$$y_1 = ux_1, \qquad \frac{dy_1}{dx_1} = u + x_1 \cdot \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u}{1-u}, \qquad x_1\frac{du}{dx_1} = \frac{1+u^2}{1-u}.$$

Hosil bo'lgan tenglamadan o'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx_1}{x_1}.$$

Bu tenglamani integrallab,

$arctgu - \frac{1}{2}\ln(1 + u^2) = ln|x_1| + ln|c|,\ arctgu = ln\left|cx_1\sqrt{1 + u^2}\right|$ ni yoki $cx_1\sqrt{1 + u^2} = e^{arctg\frac{y_1}{x_1}}$

ni hosil qilamiz. Bundan x va y o'zgaruvchilarga o'tib

$c\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = e^{arctg\frac{y-1}{x-2}}$ ni topamiz.

5. $y' = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu tenglamani $x = x_1 + h,\ y = y_1 + k$ almashtirish yordamida yechib bo'lmaydi, chunki bu holda h va k ni aniqlashda foydalaniladigan tenglamalar sistemasi yechib bo'lmaydigan sistemadir.

Bu tenglamani $2x + y = z$ almashtirish yordamida o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltirish mumkin. Bu holda $y' = z' - 2$ va berilgan tenglama

$$z' - 2 = \frac{z-1}{2z+5} \quad \text{yoki} \quad z' = \frac{5z+9}{2z+5}$$

ko'rinishga keladi. Buni yechib,

$$\frac{2}{5}z + \frac{7}{25}ln|5z+9| = x + c$$

ekanligini topamiz. Ammo, $z = 2x + y$ bo'lgani uchun dastlabki tenglamani yechimi

$$\frac{2}{5}(2x+y) + \frac{7}{25}ln|10x+2y+9| = x + c$$

yoki

$$10y - 5x + 7ln|10x+5y+9| = c_1$$

dan iborat. Bu berilgan tenglamaning umumiy integralidir.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar:

1. Quyidagi tenglamalar yechilsin:

1) $(x^2+xy)dx + xydy = 0$; 2) $xy'sin\frac{y}{x} + x = ysin\frac{y}{x}$;

3) $xy' + ln\frac{y}{x} = x + yln\frac{y}{x}$; 4) $xyy' = y^2 + 2x^2$;

5) $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$; 6) $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$, $y(1) = 2$;

7) $(x^2+y^2)dx - xydy = 0$; 8) $xy' = 2(y - \sqrt{xy})$.

Javoblar: 1) $ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = c$; 2) $cx = e^{cos\frac{y}{x}}$;

3) $lnx = \frac{y}{x}\left[ln\frac{y}{x} - 1\right] + c$; 4) $y^2 = 4x^2lncx$;

5) $y = xarcsinx$; 6) $arctg\left(0{,}5\frac{y}{x}\right) - 2ln|x| = \frac{\pi}{4}$;

7) $y^2 = x^2lncx^2$; 8) $16xy = (y + 4x - cx^2)^2$.

2. Quyidagi tenglamalar yechilsin (bir jinsli tenglamalarga keltiriladigan):

1) $(2x+y+1)dx + (x+2y-1)dy = 0$;

2) $(x+y+2)dx + (2x+2y-1)dy = 0$;

3) $2(x+y)dy + (3x+3y-1)dx, y(0) = 2$;

4) $(x-2y+3)dy + (2x+y-1)dx = 0$;

3) $(x-y+4)dy+(x+y-2)dx=0$.

Javoblar:

1) $x^2+y^2+xy+x-y=c_1$; 2) $x+2y+5ln|x+y-3|=c$;
3) $3x+2y-4+2ln|x+y-1|=0$; 4) $x^2+xy-y^2-x+3y=c$;
5) $x^2+2xy-y^2-4x+8y=c$.

3. $y'=\frac{x+y-2}{y-x-4}$ differensial tenglamaning $M(1;1)$ nuqtadan o'tuvchi integral egri chizig'i topilsin.

Javob: $x^2-y^2+2xy-4x+8y-6=0$.

2.3. To'la differensialli birinchi tartibli tenglamalar Integrallovchi ko'paytuvchi

Ta'rif: Agar $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ (1) tenglamada $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ (2) munosabat o'rinli bo'lsa, u holda tenglamani to'la differensialli tenglama deyiladi. Bunda $\frac{\partial M}{\partial y}$ va $\frac{\partial N}{\partial x}$ funksiyalar biror sohada uzluksiz funksiyalar.

Agar (1) tenglamaning chap tomoni to'la differensial bo'lsa, u holda (2) shartning bajarilishini va aksincha, (2) shart bajarilsa, (1) tenglamaning chap tomoni biror $u(x,y)$ funksiyaning to'la differensiali bo'lishini isbot qilish qiyin emas. U holda (1) tenglamaning ko'rinishi

$$du(x,y)=0 \qquad (3)$$

bo'ladi va uning umumiy integrali $U(x,y)=c$ bo'ladi.

Agar (1) tenglamada

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (4)$$

bo'lsa, u holda (1) tenglama to'la differnsialli tenglama bo'lmaydi. Bu holda ba'zi bir shartlar bajarilganda shunday $\mu(x,y)$ ni topish mumkinki, uning uchun

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=du$$

bo'ladi. Bunda $\mu(x,y)$ funksiyani integrallovchi ko'paytuvchi deyiladi. Quyidagi hollarda integrallovchi ko'paytuvchini topish oson bo'ladi:

1) $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \Phi(x)$ bo'lganda $ln\mu = \int \Phi(x)dx$ bo'ladi;

2) $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \Phi_1(x)$ bo'lganda $ln\mu = \int \Phi_1(y)dy$ bo'ladi.

Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlar.

1. $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu tenglama to'la differensialli tenglama bo'lish yoki bo'lmasligini tekshiramiz. Bu yerda

$$M = \frac{2x}{y^3}, \qquad N = \frac{y^2-3x^2}{y^4}$$

deb olsak, u holda

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \left(\frac{2x}{y^3}\right)'_y = -\frac{6x}{y^4}, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \left(\frac{y^2-3x^2}{y^4}\right)'_x = -\frac{6x}{y^4}.$$

Demak, $y \neq 0$ shartda (2) shart bajariladi. Demak, berilgan tenglamaning chap tomoni biror noma'lum $u(x,y)$ funksiyaning to'la differensiali bo'ladi. Bu funksiyani topamiz.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}$$

bo'lgani sababli

$$U = \int \frac{2x}{y^3}dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y).$$

Bunda $\varphi(y)$ funksiya y ning xozircha noma'lum funksiyasi. Buni y bo'yicha differensiallab va

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{y^2-3x^2}{y^4}$$

ekanini e'tiborga olib,

$$-\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{y^2-3x^2}{y^4}$$

bo'lishni topamiz. Bundan esa

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y^2}, \qquad \varphi(y) = -\frac{1}{y} + c_1, \qquad u(x,y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + c_1.$$

Shunday qilib berilgan tenglamaning umumiy integrali

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c.$$

2. $(sinxy + xycosxy)dx + x^2cosxydy = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish: Berilgan tenglama to'la differensialli tenglama bo'lish yoki bo'lmasligini tekshiramiz. Bu yerda

$M = sinxy + xycosxy$ va $N = x^2cosxy$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = (sinxy + xycosxy)'_y = xcosxy + xcosxy - x^2ysinxy =$$

$$= 2xcosxy - x^2ysinxy; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = (x^2cosxy)'_x = 2xcosxy - x^2ysinxy.$$

Demak, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ tenglik o'rinli. Bu esa berilgan tenglamani to'la differensialli ekanligini bildiradi. Shunday qilib,

$$M = \frac{\partial u}{\partial x} = sinxy + xycosxy, \qquad N = \frac{\partial u}{\partial y} = x^2cosxy.$$

Shuning uchun $U(x,y) = \int(sinxy + xycosxy)dx + \varphi(y)$ bo'lib, $\varphi(y)$vaqtincha noma'lum funksiya. Bundan esa

$$U(x,y) = xsinxy + \varphi(y)$$

Bu funksiyaning $\frac{\partial u}{\partial y}$ xususiy hosilasi x^2cosxy ga teng bo'lishi kerak. Ya'ni,

$$x^2cosxy + \varphi'(y) = x^2cosxy,$$

bo'lib, undan $\varphi'(y) = 0$ kelib chiqadi. Bundan esa $\varphi(y) = c$. Shunday qilib $U(x,y) = xsinxy + c$ va berilgan differensial tenglamaning umumiy integrali $xsinxy = c$ bo'ladi.

3. $(y + xy^2)dx - xdy = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish: $M = y + xy^2$, $N = -x$; $\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -1$.

Demak, $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$.

Bu esa berilgan tenglamani to'la differensialli emasligini bildiradi. Bu tenglamani faqat y ga bog'liq integrallovchi ko'paytuvchisi bormi degan masalani qaraymiz. Bu maqsadda

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

ni aniqlaymiz.

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{-1-1-2xy}{y+xy^2}=\frac{-2(1+xy)}{y(1+xy)}=-\frac{2}{y}=\varphi(y).$$

Demak, integrallovchi ko'paytuvchi

$$ln\mu=\int\frac{2}{y}dy=-2ln|y|=ln\frac{1}{y^2};\ ln\mu=ln\frac{1}{y^2};\quad \mu=\frac{1}{y^2}.$$

Berilgan tenglamani hadma-had $\mu=\frac{1}{y^2}$ ga ko'paytiramiz. Natijada

$$\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu to'la differensialli tenglamadir. Uni yechib

$$\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}+c=0\ yoki\ y=-\frac{2x}{x^2+c}$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

1.Quyidagi to'liq differensialli differensial tenglamalar yechilsin.

1) $x(2x^2+y^2)+y(x^2+2y^2)y'=0;$

2) $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0;$

3) $\left(2x+\frac{x^2+y^2}{x^2y}\right)dx-\frac{x^2+y^2}{xy^2}dy=0;$

4) $(3x^2y+y^3)dx+(x^3+3xy^2)dy=0;$

5) $(3x^2-2x-y)dx+(2y-x+3y^2)dy=0;$

6)$\left(4-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\frac{2y}{x}dy=0;$

7) $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0;$

8) $e^{-y}dx+(1-xe^{-y})dy=0;$

9) $2xcos^2ydx+(2x-x^2sin2y)dy=0;$

10) $(3x^2+2y)dx+(2x-3)dy=0.$

Javoblar: 1) $x^4+x^2y^2+y^4=c;$ 2) $x^3+3x^2y^2+y^4=c;$
3) $x^3y+x^2-y^2=cxy;$ 4) $xy(x^2+y^2)=c;$

5) $x^3+y^3-x^2-xy+y^2=c$; 6) $4x^2+y^2=cx$; 7) $x^3e^y-y=c$;
8) $y+xe^{-y}=c$; 9) $x^2cos^2y+y=c$; 10) $x^3+2xy-3y=c$.

2. Quyidagi differensial tenglamalarning integrallovchi ko'paytuvchilari topilsin va tenglamalar yechilsin:

1) $(x^2-y)dx+xdy=0$;
2) $2xtgydx+(x^2-2siny)dy=0$;
3) $(e^{2x}-y^2)dx+ydy=0$;
4) $(1+3x^2siny)dx-xctgydy=0$;
5) $y^2dx+(xy-1)dy=0$;
6) $(x^2-3y^2)dx+2xydy=0$;
7) $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0$;
8) $(x^2+y)dx-xdy=0$;
9) $(x+y^2)dx-2xdy=0$;
10) $(x+sinx+siny)dx+cosydy=0$;

Javoblar:

1) $\mu=\frac{1}{x^2}$; $x+\frac{y}{x}=c$; 2) $ln\mu=lncosy$, $x^2siny+\frac{1}{2}cos2y=c$;
3) $\mu=e^{-2x}$, $y^2=(c-2x)e^{2x}$; 4) $\mu=\frac{1}{siny}$, $\frac{x}{siny}+x^3=c$;
5) $\mu=\frac{1}{y}$, $xy-lny=0$; 6) $\mu=\frac{1}{x^4}$, $y^2=cx^3+x^2$;
7) $\mu=\frac{1}{x^2}$, $xy^2-2x^2y-2=cx$; 8) $\mu=\frac{1}{x^2}$, $x-\frac{y}{x}=c$;
9) $\mu=\frac{1}{x^2}$, $xln|x|-y^2=cx$;
10) $\mu=e^x$, $2e^xsiny+2e^x(x-1)+e^x(sinx-cosx)=c$.

2.4. Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar. Bernulli tenglamasi

Ta'rif: Noma'lum funksiya va uning hosilasiga nisbatan chiziqli bo'lgan tenglamaga birinchi tartibli chiziqli tenglama deyiladi.

U quyidagicha yoziladi:

$$y'+p(x)y=q(x) \quad (1)$$

Bu yerda $p(x)$ va $q(x)$ uzluksiz funksiyalar yoki o'zgarmas sonlar. Agar (1) tenglamada $q(x)=0$ bo'lsa, u holda tenglama bir jinsli, aks holda bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglama deyiladi.

Birinchi tartibli chiziqli tenglamani quyidagi usullar bilan yechish mumkin:

1-usul. O'zgarmasni variasiyalash usuli.

Bunda dastlab $y' + p(x)y = 0$ (2) tenglamani yechamiz. Bu tenglama (1) tenglamaga mos kelgan bir jinsli tenglama deyiladi.

$y' = \frac{dy}{dx}$ ekanligini e'tiborga olsak $y' + p(x)y = 0$ tenglamadan $\frac{dy}{y} + p(x)y = 0$, $dy + p(x)ydx = 0$ tenglama kelib chiqadi. Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. Uni yechamiz:

$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0$, $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$, $\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + lnc$,

$lny = -\int p(x)dx + lnc$, $ln\frac{y}{c} = -\int p(x)dx$, $\frac{y}{c} = e^{-\int p(x)dx}$,

$y = ce^{-\int p(x)dx}$ (3). Bu (2) tenglamaning umumiy yechimidir. Bunda c o'zgarmas miqdor.

Agar (3) yechimdagi o'zgarmas miqdor c ni x ning qandaydir funksiyasi deb qaralsa, u (1) tenglamaning yechimi bo'lmasmikan deb faraz qilamiz. Agar

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx} \qquad (4)$$

berilgan tenglamani yechimi bo'lsa, u holda y (1) tenglamani qanoatlantirishi kerak. (4) dan y' hosilani topamiz:

$$y' = (c(x)e^{-\int p(x)dx})' = c'(x)e^{-\int p(x)dx} - c(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x).$$

y va y' larni (1) tenglamaga qo'yamiz.

$c'(x)e^{-\int p(x)dx} - c(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x) + c(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x) = q(x)$,

$c'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$.

Bundan $c'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$, $c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c_1$.

$c(x)$ ning bu ifodasini (4) ga qo'yamiz. U holda

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int p(x)dx}[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c_1] \qquad (5)$$

Bu berilgan (1) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

2-usul. Umumiy yechimni 2 ta $u(x)$ va $v(x)$ noma'lum funksiyalar ko'paytmasi sifatida qidiramiz. Ya'ni $y = uv$ (6) deb olamiz. Agar y yechim bo'lsa, u holda y berilgan tenglamani qanoatlantirishi kerak. y' ni topamiz:

$$y' = (uv)' = u'v + uv'.$$

y va y' larning ifodalarini (1) tenglamaga qo'yamiz:

$$u'v + uv' + puv = q, \quad u'v + u(v' + pv) = q \qquad (7)$$

Oxirgi tenglamada 2 ta noma'lum bo'lganligi uchun ulardan birini ixtiyoriy ravishda, ya'ni $v' + pv = 0$ bo'ladigan qilib tanlaymiz. Bu bir jinsli tenglama bo'lib, uning yechimi

$$v = e^{-\int p(x)dx}$$

dan iborat. Bu yerda biz c o'zgarmasni 1ga teng deb oldik. Navbatda v ning ifodasini (7) tenglamaga qo'yib u ni topamiz:

$$u'e^{-\int p(x)dx} = q(x), \quad u' = q(x)e^{\int p(x)dx}, \; u = [\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c_1]$$

u va v larni (6) ga qo'yib berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = uv = e^{-\int p(x)dx}[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c_1] \qquad (8)$$

ni hosil qilamiz.

Amalda, ko'pincha o'zgarmas koeffitsientli chiziqli

$$y' + ay = b \qquad (9)$$

tenglamalar ham uchrab turadi. Bu tenglamaning yechimini ham $y = uv$ ko'rinishda qidirish bilan yoki o'zgaruvchilarni ajratish usuli bilan yechish mumkin: Bunda, dastlab $y' = \frac{dy}{dx}$ ekanligidan foydalanib berilgan tenglamani

$$\frac{dy}{dx} + ay = b \quad \text{yoki} \quad dy = (-ay + b)dx$$

ko'rinishda yozamiz. Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. Uni yechamiz:

$$\frac{dy}{-ay+b} = dx, \quad \int \frac{dy}{-ay+b} = \int dx, \quad -\frac{1}{a}ln|-ay+b| = x + c,$$

$$ln|-ay+b| = -(ax + c_1), \quad (c_1 = ac), \; -ay + b = e^{-(ax+c_1)},$$

$$-ay = e^{-(ax+c_1)} - b, \; y = -\frac{1}{a}e^{-(ax+c_1)} + \frac{b}{a} = -\frac{1}{a}e^{-c_1} \cdot e^{-ax} + \frac{b}{a} =$$

$$= c_2e^{-ax} + \frac{b}{a} \; (bu\, yerda\; c_2 = -\frac{1}{a}e^{-c_1}).$$

Shunday qilib (9) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = c_2e^{-ax} + \frac{b}{a} \qquad (10)$$

funksiyadan iborat bo'ladi.

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \qquad (11)$$

ko'rinishdagi tenglamaga Bernulli tenglamasi deyiladi. Bu yerda $p(x)$ va $q(x)$ lar x ning uzluksiz funksiyalari (yoki o'zgarmas miqdorlar) hamda $n \neq 0$ va $n \neq 1$ (aks holda chiziqli tenglama bo'lib qoladi).

Bu tenglamani yechish uchun dastlab uning har ikkala tomonini hadma-had y^n ga bo'linadi va

$$y^{-n} \cdot y' + py^{-n+1} = q \qquad (12)$$

tenglama hosil qilinadi. Bu tenglamani yechish uchun $z = y^{-n+1}$ almashtirish qilamiz. U holda

$$z' = (-n+1) \cdot y^{-n} \cdot y'$$

ga ega bo'lamiz. Bu qiymatlarni (12) ga qo'ysak, quyidagi ko'rinishdagi chiziqli tenglama hosil bo'ladi:

$$Z' + (-n+1)pz = (-n+1)q \qquad (13)$$

Buning umumiy integralini topib hamda z o'ringa y^{-n+1} ni qo'yib, Bernulli tenglamasining umumiy integralini topamiz.

Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlar

1. $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$ tenglama yechilsin:

Yechish: $y = uv$ deb olsak, u holda

$$y' = u'v + uv'$$

bo'ladi. y' ni ifodasini dastlabki tenglamaga qo'yamiz. U holda y

$$u'v + uv' - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3$$

yoki

$$u'v + u(v' - \frac{2}{x+1}v) = (x+1)^3 \qquad (1)$$

ko'rinishga keladi. v ni aniqlash uchun

$$v' - \frac{2}{x+1}v = 0$$

tenglamani yechamiz. Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadi

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v = 0, \qquad \frac{dv}{v} - \frac{2}{x+1}dx = 0, \qquad \int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x+1},$$

$ln|v| = 2ln|x+1|$, $ln|v| = ln|x+1|^2$, $v = (x+1)^2$.

v ning topilgan ifodasini (1) tenglamaga qo'ysak, u ni topish uchun

$$(x+1)^2 \cdot u' = (x+1)^3 \quad \text{yoki} \quad u' = x+1$$

tenglamani hosil qilamiz. Uni yechib

$$U = \frac{(x+1)^2}{2} + c$$

ni topamiz. Demak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = uv = [\frac{(x+1)^2}{2} + c] \cdot (x+1)^2 = \frac{(x+1)^4}{2} + c(x+1)^2$$

ko'rinishda bo'ladi.

2. $y' - \frac{3}{x}y = x$ tenglama yechilsin.

Yechish: Dastlab $y' - \frac{3}{x}y = 0$ tenglamani yechamiz:

$$y' - \frac{3}{x}y = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{x}y, \qquad \frac{dy}{y} = \frac{3}{x}dx, \qquad \int\frac{dy}{y} = 3\int\frac{dx}{x},$$

$$lny = 3lnx + lnc, \qquad ln\frac{y}{c} = lnx^3, \qquad \frac{y}{c} = x^3, \qquad y = cx^3.$$

$y = c(x)x^3$ funksiya berilgan tenglamani yechimi bo'lishi uchun $c(x)$ qanday bo'lishi kerakligini aniqlaymiz. Buning uchun y'ni topamiz.

$$y' = (c(x)x^3)' = c'(x)x^3 + 3c(x)x^2.$$

y va y' larning ifodalarini berilgan tenglamaga qo'yamiz:

$$c'(x)x^3 + 3c(x)x^2 - \frac{3}{x}c(x)x^3 = x, \qquad c'(x)x^3 = x, \qquad c'(x) = \frac{1}{x^2},$$

$$c(x) = \int\frac{dx}{x^2} + c_1 = -\frac{1}{x} + c_1.$$

Demak, $y = c(x)x^3$ berilgan tenglamani yechimi bo'lishi uchun $C(x) = \frac{1}{x} + c_1$ ga teng bo'lishi kerak ekan. Demak, berilgan tenglamaning yechimi

$$y = x^3\left(-\frac{1}{x} + c_1\right) = -x^2 + c_1x^3$$

dan iborat.

3. $y' + ytgx = cos^2x$ (1) tenglama yechilsin.

Yechish: Bu $y' + py = q$ ko'rinishidagi chiziqli tenglamadir. Bu yerda $p = tgx$ va $q = cos^2x$. Shuning uchun tenglamani yechimini

$y = uv$ ko'rinishda qidiramiz. Bundan $y' = u'v + uv'$. y va y' larni ifodalarini berilgan tenglamaga qo'yamiz. Natijada

$u'v + uv' + uvtgx = cos^2x$ yoki $u'v + u(v' + vtgx) = cos^2x$ (2)

tenglamani hosil qilamiz. u va v lardan birini ixtiyoriy tanlashimiz mumkin. Biz v ni $v' + vtgx = 0$ bo'ladigan qilib tanlaymiz. Uni yechamiz:

$v' + vtgx = 0,\quad \frac{dv}{dx} + vtgx = 0,\quad \frac{dv}{v} = -tgxdx,\quad \int\frac{dv}{v} = -\int tgxdx,$

$lnv = lncosx,\quad v = cosx.$

v ning bu ifodasini (2) ga qo'yamiz. Natijada

$$u' \cdot cosx = cos^2x$$

tenglama hosil bo'ladi. Uni yechib u ni topamiz:

$u' \cdot cosx = cos^2x,\qquad u' = cosx,\qquad du = cosxdx,\qquad u = sinx + c.$

u va v larni ifodalarini $y = uv$ ga qo'yamiz.

$$y = uv = (sinx + c) \cdot cosx = sinx \cdot cosx + c \cdot cosx.$$

Javob: $y = sinx \cdot cosx + c \cdot cosx.$

4. $y' - \frac{2}{x}y = x^4$ (1) tenglamani $x = 1$ bo'lganda $y = \frac{4}{3}$ bo'ladigan boshlang'ich shartni qanoatlantiradigan yechimi topilsin.

Yechish: $y = uv$ (2) deb olsak $y' = u'v + uv'$ bo'ladi. y va y' larni ifodalarini berilgan tenglamaga qo'yamiz. Natijada

$$u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = x^4,\quad u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = x^4 \quad (3)$$

hosil bo'ladi.

v ni $v' - \frac{2}{x}v = 0$ yoki $\frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}$ qilib tanlaymiz. Undan

$\int\frac{dv}{v} = 2\int\frac{dx}{x};\qquad ln|v| = 2ln|x|,\qquad ln|v| = ln|x|^2,\qquad v = x^2.$

v ning bu ifodasini (3) ga qo'ysak $u'x^2 = x^4$ yoki $du = x^2dx$ tenglama hosil bo'ladi. Undan esa $u = \frac{x^3}{3} + C$ ni topamiz. u va v larning ifodalarini (2) ga qo'yib $y = uv = \left(\frac{x^3}{3} + c\right)x^2 = \frac{x^5}{3} + cx^2$ umumiy yechimni topamiz.

Endi $x = 1$ bo'lganda $y = \frac{4}{3}$ bo'ladigan boshlang'ich shartdan foydalanib C ni topamiz

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + C, \quad C = 1.$$

Demak, berilgan tenglamaning xususiy yechimi $y = \frac{x^5}{3} + x^2$ bo'ladi.

5. $y' + xy = x^3y^3$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu Bernulli tenglamasidir. Uni yechish uchun har ikkala tomonini hadma-had y^3 ga bo'lamiz. Natijada

$$\frac{y'}{y^3} + x \cdot \frac{y}{y^3} = x^3, \qquad y'y^{-3} + x \cdot y^{-2} = x^3$$

tenglama hosil bo'ladi. Endi $z = y^{-2}$ almashtirish qilamiz. U holda

$$z' = -2y^{-3} \cdot y' \quad \text{yoki} \quad y' = -\frac{z'}{2y^{-3}}$$

bo'ladi. Bu qiymatlarni o'rnilariga qo'yamiz. U holda

$$-\frac{z'}{2y^{-3}} \cdot y^{-3} + xz = x^3, \quad -z' + 2xz = 2x^3, \quad z' - 2xz = -2x^3.$$

Hosil bo'lgan tenglama z ga nisbatan chiziqli tenglamadir uni yechamiz:

$z = uv, \; z' = u'v + uv', \; u'v + uv' - 2xuv = -2x^3,$

$u'v + u(v' - 2xv) = -2x^3, \; v' - 2xv = 0, \; v' = 2xv, \; \frac{dv}{dx} = 2xv,$

$\frac{dv}{v} = 2xdx, \quad \int \frac{dv}{v} = 2\int xdx, \; \ln|v| = x^2, \; v = e^{x^2}.$

u ni aniqlash uchun $u' \cdot e^{x^2} = -2x^3$ tenglamani hosil qilamiz. Undan $u' = -\frac{2x^3}{e^{x^2}}, \quad du = -2e^{-x^2} \cdot x^3dx, \quad u = -2\int e^{-x^2} \cdot x^3dx$ tenglama hosil bo'ladi. Bo'laklab integrallash formulasini qo'llab

$u = x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + e,$ ni topamiz. Demak,berilgan tenglamani umumiy yechimi $z = uv = x^2 + 1 + ce^{x^2}$ dan iborat.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

1. Quyidagi chiziqli tenglamalar yechilsin.

1) $y' + \frac{2y}{x} = x^2 (x \neq 0)$; 2) $y' = 2x - 2xy$;

3) $y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$; 4) $\frac{y'}{(x+1)^3} - \frac{2y}{(x+1)^4} = 1$;

5) $(1 + x^2)y' - xy = 2x$; 6) $y'x + 2y = x^3 (x \neq 0)$;

7) $y' - ytgx = ctgx$; 8) $y' + ycosx = sin2x$;

9) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$;   10) $y'cosx - ysinx = sin2x$.

Javoblar: 1) $y = \frac{x^3}{5} + \frac{c}{x^2}$;   2) $y = 1 + ce^{-x^2}$;

3) $y = x\left(c - \frac{1}{x^2}\right)$;   4) $y = \frac{1}{2}(x+1)^4 + c(x+1)^2$;

5) $y = c\sqrt{1+x^2} - 2$;   6) $y = \frac{x^3}{5} + \frac{c}{x^2}$;

7) $y = 1 + \frac{\ln ctg\frac{x}{2}}{cosx}$;   8) $y = 2(sinx - 1) + ce^{-sinx}$;

9) $y = \frac{c - e^{x^2}}{2x^2}$;   10) $y = \frac{c - cos2x}{2cosx}$.

2. Quyidagi tenglamalar yechilsin

1) $y' + 2y + 3 = 0$;   2) $y' + 3y = 1$;

Javoblar: 1) $y = ce^{-x} - \frac{3}{2}$;   2) $y = \frac{1 - e^{-3x + c_1}}{3}$.

3. Quyidagi tenglamalarni berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlari topilsin.

1) $y' - ytgx = \frac{1}{\cos^2 x}$; $x = 0$ bo'lganda $y = 0$;

2) $xy' + y = x^2 (x \neq 0)$; $x = 1$ bo'lganda $y = 2$;

3) $y' - 2y + 3e^{2x} = 0$; $x = 0$ bo'lganda $y = 1$;

4) $xy' - y = x^3$; $x = 1$ bo'lganda $y = \frac{1}{2}$;

5) $y' + ytgx = \cos^2 x$; $x = \frac{\pi}{4}$ bo' lganda $y = \frac{1}{2}$;

6) $y' - \frac{1}{x+2}y = x^2 + 4x + 5$; $x = -1$ bo'lganda $y = \frac{3}{2}$.

Javoblar: 1) $y = \frac{\sin^2 x}{cosx}$; 2) $y = \frac{x^3+5}{3x}$; 3) $y = e^{2x}(-3x + 1)$;

4) $y = \frac{1}{2}x^3$; 5) $y = sinx \cdot cosx$;

6) $y = (x+2) + \frac{(x+2)^3}{2} + (x+2)ln(x+2)$.

4. Quyidagi tenglamalar yechilsin:

1) $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$;   2) $y'x + y = -xy^2$;

3) $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$;   4) $y' + xy = xy^3$;

Javoblar: 1) $y = \frac{1}{x\sqrt[3]{3\ln\frac{c}{x}}}$;   2) $y = \frac{1}{xlncx}$;

3) $y^2 = \frac{e^{x^2}}{2x+c}$; 4) $y^2 = \frac{1}{1+ce^{x^2}}$.

§ 3. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar

3.1. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar bo'yicha asosiy tushunchalar va ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni tartibini pasaytirish usuli

Ma'lumki, noma'lum funksiya $y = f(x)$ ga nisbatan ikkinchi tartibli diferrensial tenglama umumiy ko'rinishda

$$F(x, y, y'y'') = 0 \qquad (1)$$

yoki ikkinchi tartibli hosilaga nisbatan yechilgan bo'lsa,

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (2)$$

ko'rinishda yoziladi.

Ta'rif. Agar $y = \varphi(x)$ funksiya biror oraliqda ikki marta differensiallanuvchi bo'lib, uni va hosilalarini (1) tenglamaga qo'yganda ayniyat hosil bo'lsa, u holda bu funksiyani berilgan ikkinchi tartibli tenglamaning yechimi yoki integrali deyiladi.

Masalan $y = e^{3x}$ funksiya $y'' = 2y' + 3y$ tenglamani yechimi bo'ladi. Haqiqatdan ham bu funksiya uchun $y' = 3e^{3x}$, $y'' = 9^{3x}$ bo'lib, $9e^{3x} = 2 \cdot 3e^{3x} + 3 \cdot e^{3x}$, $9e^{3x} = 9e^{3x}$.

Ta'rif. Ikkinchi tartibli differensial tenglamani $y = \varphi(x)$ yechimiga qo'yilgan

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0' \qquad (3)$$

ko'rinishdagi shartlar boshlang'ich shartlar deb ataladi.

Boshlang'ich shartlar ko'pincha

$$y|_{x=x_0} = y_0, \; y'|_{x=x_0} = y_0' \qquad (4)$$

ko'rinishda yoziladi.

Ta'rif. Ikkinchi tartibli (1) differensial tenglamaning (4) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish Koshi masalasi deyiladi.

1-teorema (Koshi teoremasi). Agar (2) tenglamadagi $f(x, y, y')$ funksiya va uning y, y' bo'yicha xususiy hosilalari (3) boshlang'ich shartlar bilan aniqlanadigan (x_0, y_0, y_0') nuqtaning biror ochiq atrofida uzluksiz bo'lsa, u holda Koshi masalasining yechimi mavjud va bu yechim yagona bo'ladi.

Ta'rif. Ikkita c_1 va c_2 o'zgarmas sonlarga bog'liq bo'lgan va quyidagi 2 ta shartlarni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ funksiyaga ikkinchi tartibli (2) tenglamaning ummumiy yechimi deb ataladi:

1) Bu funksiya c_1 va c_2 o'zgarmas sonlarning ixtiyoriy qiymatlarida (2) tenglamaning yechimi bo'ladi;

2) Agar (3) boshlang'ich shartlar berilgan bo'lsa unda c_1 va c_2 o'zgarmas sonlarning qiymatlarini shunday tanlash mumkinki, bu qiymatlarda $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ funksiya bu boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradi.

Ko'pincha (2) tenglamaning umumiy yechimini $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ ko'rinishda yozib bo'lmasdan $\varphi(x, y, c_1, c_2) = 0$ ko'rinishda topiladi. Bu holdagi tenglikni (2) tenglamaning umumiy integrali deyiladi.

Ta'rif. Ikkinchi tartibli tenglamaning umumiy yechimi $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ dan c_1 va c_2 larning ma'lum qiymatlarida hosil qilingan yechim xususiy yechim deyiladi.

Ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni yechishning ham umumiy usuli mavjud emas. Lekin shunga qaramasdan ayrim ikkinchi tartibli tenglamalarni yechish usullari mavjud. Ulardan biri tartibni pasaytirish usulidir. Bunda ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni $y' = p$ almashtirish orqali p ga nisbatan birinchi tartibli tenglamaga keltiriladi. Bu tenglamaning umumiy yechimi birinchi tartibli $y' = p = p(x, c_1)$ tenglamadan topiladi. Shunday qilib berilgan ikkinchi tartibli tenglamani yechish ikkita birinchi tartibli tenglamani yechishga keltiriladi. Tenglamani yechishning bu usuliga tartibni pasaytirish usuli deb ataladi. Bunday tenglamalardan bazilarini ko'rib chiqamiz.

1.$y'' = f(x)$ ko'rinishdagi tenglama. Bu tenglamada noma'lum funksiya va uning birinchi tartibli hosilasi ishtirok etmaydi. Uni yechish uchun $y' = p(x)$ deb olamiz. Unda $y'' = p'$ bo'ladi va berilgan tenglama $p' = f(x)$ ko'rinishga keladi. Uning umumiy yechimi $P(x, c_1) = = \int f(x)dx + c_1$ bo'lib, berilgan ikkinchi tartibli tenglamaning umumiy yechimi

$$y' = p(x, c_1) \Longrightarrow y = \int P(x, c_1)dx = \int [f(x)dx + c_1]dx$$

bo'ladi. Bundan berilgan ikkinchi tartibli differensial tenglamani yechish uchun uning o'ng tomonidagi funksiyani ketma-ket ikki marta integrallash kerakligi kelib chiqadi.

2. $y'' = f(x, y')$ ko'rinishdagi tenglama. Bu tenglamada noma'lum funksiya qatnashmaydi. Uni yechish uchun $y' = p(x)$ almashtirish qilamiz va birinchi tartibli $p' = f(x, p)$ tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani integrallab, uning umumiy yechimi $P(x, c_1)$ ni topamiz. Natijada birinchi tartibli eng sodda $y' = p(x, c_1)$ tenglama hosil bo'ladi. Uni integrallash natijasida esa berilgan ikkinchi tartibli tenglamaning umumiy yechimi

$$y = \int P(x, c_1)dx + c_2$$

ni topamiz.

3. $y'' = f(y, y')$ ko'rinishdagi tenglama. Bu tenglamada erkli o'zgaruvchi x bevosita qatnashmaydi. Bu holda $y' = p(y)$ almashtirishdan foydalanamiz. Unda murakkab funksiya hosilasi formulasiga asosan $y'' = p'_x = p'_y \cdot y'_x = \frac{dp}{dy}p$ yoki $p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$ birinchi tartibli tenglamani hosil qilamiz. Buni integrallab $p = p(y, c_1)$ ni topamiz va uni $y' = p$ ga qo'yib $y' = p(y, c_1)$ birinchi tartibli tenglamani hosil qilamiz. Undan esa berilgan ikkinchi tartibli tenglamaning umumiy integrali

$$\varphi(x, y, c_1 c_2) = 0$$

ni topamiz.

Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlar

1. $y'' = 8x + e^{2x} - 6$ tenglama yechilsin.

Yechish: Berilgan tenglama $y'' = f(x)$ ko'rinishdagi eng sodda differensial tenglamadir. Uni yechish uchun $y' = p$ almashtirish qilamiz. U holda $y'' = p'$ bo'lib berilgan tenglama $P' = 8x + e^{2x} - 6$ ko'rinishga keladi. Bu tenglama birinchi tartibli eng sodda tenglamadir. Undan

$$\frac{dp}{dx} = 8x + e^{2x} - 6, \;\; dp = (8x + e^{2x} - 6)dx,$$

$p = \int(8x + e^{2x} - 6)dx = 4x^2 + \frac{1}{2}e^{2x} - 6x + c_1$ kelib chiqadi. $y' = p$ ekanligini e'tiborga olsak $y' = 4x^2 + \frac{1}{2}e^{2x} - 6x + c_1$, yoki

$dy = \left(4x^2 + \frac{1}{2}e^{2x} - 6x + c_1\right)dx$ tenglama hosil bo'ladi. Undan

$$y = \frac{4x^3}{3} + \frac{1}{4}e^{2x} - 3x^2 + c_1x + c_2$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

2. $y'' = 3\cos x$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu tenglama ham $y'' = f(x)$ ko'rinishdagi tenglamadir. Uni ketma-ket ikki marta integrallash orqali ham yechish mumkin: Ya'ni,

$y = \int[\int 3cosxdx]dx = \int[3sinx + c_1]dx = \int 3sinxdx + \int c_1dx =$
$= -3cosx + c_1x + c_2$.

3. $y'' = 2$ tenglamani $y|_{x=0} = 1$ va $y'|_{x=0}=2$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Yechish: Berilgan tenglamani x bo'yicha ketma-ket ikki marta integrallab dastlab $y' = 2x + c_1$ ni keyin $y = x^2 + c_1x + c_2$ ni hosil qilamiz. Berilgan boshlang'ich shartlarni e'tiborga olsak,

$$\begin{cases} y' = 2x + c_1, \\ y = x^2 + c_1x + c_2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2 = 2\cdot 0 + c_1, \\ 1 = 0 + c_1\cdot 0 + c_2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2 = c_1, \\ 1 = c_2. \end{cases}$$

ni ya'ni $c_1 = 2$ va $c_2 = 1$ ni hosil qilamiz. Bularni o'rnilariga qo'yib $y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ ni hosil qilamiz. Demak, $y = (x+1)^2$ berilgan tenglamaning berilgan boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi yechimi bo'lar ekan.

4. $y'' = 1 + x + x^2 + x^3$ tenglamani $y|_{x=0}=1$ va $y'|_{x=0}=1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Yechish: Berilgan tenglamani ketma-ket ikki marta integrallaymiz:

1) $y' = \int(1 + x + x^2 + x^3)dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + c_1$;

2) $y = \int\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + c_1\right)dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{20} + c_1x + c_2$.

3) Boshlang'ich shartlarni e'tiborga olsak, $c_1 = 1$ va $c_2 = 1$ ni hosil qilamiz. Demak, berilgan tenglamaning berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan yechimi

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{20} + c_1x + 1$$

dan iborat.

5. $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu tenglama $y'' = f(x, y')$ ko'rinishdagi tenglamadir. Uni yechish uchun $y' = p(x)$ deb olamiz. U holda $y'' = p'(x)$ bo'ladi va berilgan tenglama

$$(1 - x^2)p' - xp = 2$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglama p va p' ga nisbatan chiziqli tenglamadir. Tenglamani har ikkala qismini hadma-had $1 - x^2$ ga bo'lamiz va

$$p' - \frac{x}{1 - x^2}\ p = \frac{2}{1 - x^2}$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Uni yechish uchun p= uv almashtirish qilamiz. U holda $p' = u'v + uv'$ bo'ladi. Bularni oxirgi tenglamaga qo'yamiz. Undan

$u'v + uv' - \frac{x}{1-x^2}uv = \frac{2}{1-x^2}$, $u'v + u\left(v' - \frac{x}{1-x^2}v\right) = \frac{2}{1-x^2}$

tenglama hosil bo'ladi. v ni $v' - \frac{x}{1-x^2}v = 0$ bo'ladigan qilib tanlaymiz va uni topamiz.

$$v' - \frac{x}{1 - x^2}v = 0, \qquad \frac{dv}{v} = \frac{xdx}{1 - x^2}, \qquad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{xdx}{1 - x^2},$$

$$\ln v = -\frac{1}{2}\ln(1 - x^2), \quad \ln v = \ln\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

v ni topilgan qiymatini o'rniga qo'yib u ni topamiz.

$$u' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{1-x^2}, \quad u' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad du = \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad u = 2arcsinx + c_1$$

Demak,

$$p = uv = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}(2arcsinx + c_1)$$

Ammo $p = y' = \frac{dy}{dx}$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(2arcsinx + c_1), \qquad dy = \frac{2arcsinx+c_1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$$

$$y = 2\int \frac{arcsinx}{\sqrt{1 - x^2}}dx + c_1\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + c_2 = arcsin^2x + c_1arcsinx + c_2$$

Javob: $y = arcsin^2x + c_1arcsinx + c_2$.

6. $y'' = \frac{y'}{xlnx}$ tenglamani $y(e) = -2,\ y'(e) = 1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Yechish: Bu tenglamada ham noma'lum funksiyani o'zi bevosita qatnashmayapti. Uni yechish uchun dastlab $y' = p$ almashtirish qilamiz. U holda $y'' = p'$ bo'lib, berilgan tenglama $p' = \frac{p}{xlnx}$ ko'rinishga keladi. Uni yechib dastlab $p$ni so'ngra $y' = p$ dan y ni aniqlaymiz.

$$p' = \frac{p}{xlnx}, \qquad \frac{dp}{p} = \frac{dx}{xlnx}, \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dp}{xlnx}, \ ln|p| = ln|lnx| + lnc_1,$$

$$ln|p| = ln|c_1 lnx|,\ p = c_1 lnx,\ y' = p = c_1 lnx, \quad \frac{dy}{dx} = c_1 lnx,$$

$$dy = \int c_1 lnxdx + c_2 = c_1 \int lnxdx + c_2 = c_1 x(lnx - 1) + c_2.$$

Bu yerda $\int lnxdx = x(lnx - 1)$.

Berilgan boshlang'ich shartlarni e'tiborga olib c_1 va c_2 larni topamiz:

$$\begin{cases} y = c_1 x(lnx - 1) + c_2, \\ y' = c_1 lnx, \end{cases}; \begin{cases} c_1 e(lne - 1) + c_2 = -2, \\ c_1 lne = 1, \end{cases}; \begin{cases} c_2 = -2, \\ c_1 = 1. \end{cases}$$

Shunday qilib, berilgan tenglamani berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi $y = x(lnx - 1) - 2$ dan iborat.

7. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu tenglamada erkli o'zgaruvchi x qatnashmayapti. Demak, berilgan tenglama $yy'' = f(y, y')$ ko'rinishdagi tenglama ekan. Uni yechish uchun $y' = p$ deb olsak, u holda $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$ bo'lib, berilgan tenglama $p \cdot \frac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y}$ ko'rinishga keladi. Bu Bernulli tenglamasidir. Uni yechish uchun $p^2 = z$ almashtirish qilamiz. Natijada $z' + 2z = 4e^{-y}$ tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglama z ga nisbatan chiziqli tenglamadir. Uni yechish usuli bizga ma'lum. Uni yechib

$$z = 4e^{-y} + c_1 e^{-2y}$$

ni hosil qilamiz. $z = p^2$ekanligini e'tiborga olsak,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4e^{-y} + c_1 e^{-2y}}$$

tenglamaga kelamiz. Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. Uni o'zgaruvchilarini ajratib

$x + c_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4e^y + c_1}$ ni va undan esa $e^y + \bar{c_1} = (x + c_2)^2$ ni hosil qilamiz. Bu yerda $\bar{c_1} = \frac{c_1}{4}$.

8. $2yy'' = 1 + y'^2$ tenglama yechilsin.

Yechish: $y' = p$ deb olamiz. U holda $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$ bo'ladi. y' va y'' larning ifodalarini berilgan tenglamaga qo'yamiz:

$$2y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} = 1 + p^2, \qquad y \cdot \frac{dp}{dy} = \frac{1 + p^2}{2p}$$

Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. Uni o'zgaruvchilarini ajratamiz va integrallaymiz.

$$\frac{2pdp}{1+p^2} = \frac{dy}{y}, \qquad \int\frac{2pdp}{1+p^2} = \int\frac{dy}{y}, \quad ln(1+p^2) = lny + lnc_1,$$

$ln(1+p^2) = lnc_1y,\ \ 1 + p^2 = c_1y,\ \ p^2 = c_1y - 1,\ \ p = \sqrt{c_1y - 1}$

$y' = p = \frac{dy}{dx}$ bo'lgani uchun $\frac{dy}{dx} = \sqrt{c_1y - 1}$, $dy = \sqrt{c_1y - 1}\,dx$.

Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. Uni yechamiz:

$$\frac{dy}{\sqrt{c_1y-1}} = dx, \qquad \int\frac{dy}{\sqrt{c_1y-1}} = \int dx + c_2, \qquad \frac{2}{c_1}\sqrt{c_1y - 1} = x + c_2,$$

$\frac{4}{c_1}(c_1y - 1) = (x + c_2)^2$. Bu berilgan tenglamaning umumiy integralidir.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

I. $y'' = f(x)$ ko'rinishdagi tenglamalar.

1. Quyidagi tenglamalar yechilsin:

1) $y'' = 4x$; 2) $y'' = sin2x$; 3) $y'' = cosx$;
4) $y'' = x^3$; 5) $s'' = t + 1$; 6) $y'' = 18x + 2$.

Javoblar: 1) $y = \frac{2}{3}x^3 + c_1x + c_2$; 2) $y = -\frac{1}{4}sin2x + c_1x + c_2$;
3) $y = -cosx + c_1x + c_2$; 4) $y = \frac{1}{20}x^5 + c_1x + c_2$;
5) $S = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + c_1t + c_2$; 6) $y = 3x^3 + x^2 + c_1x + c_2$.

2. Quyidagi tenglamalarni berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlari topilsin.

1) $y'' = 0$, $y|_{x=0} = 0$ va $y'|_{x=1} = 1$;

2) $s'' = t + 1, \quad s|_{t=0} = 2 \ \ va \ \ s'|_{t=1} = -\dfrac{11}{6};$

3) $y'' = x^2, \quad y|_{x=3} = 12\dfrac{3}{4} \ \ va \ \ y'|_{x=1} = 2\dfrac{1}{3};$

4) $y'' = 1 - \dfrac{1}{x^2}, \quad y|_{x=1} = -1 \ \ va \ \ y'|_{x=1} = 1.$

Javoblar: 1) $y = 2x^2 - x;$ 2) $S = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{11}{6}t + 2;$

3) $y = \dfrac{1}{12}x^4 + 2x;$ 4) $y = \dfrac{1}{2}x^2 + ln|x| - x - \dfrac{1}{2}.$

II. $y'' = f(x, y')$ ko'rinishdagi tenglamalar.

1. Quyidagi tenglamalar yechilsin:

1) $x^3y'' + x^2y' = 1;$ 2) $y'' + y'tgx = sin2x;$

3) $y''xlnx = y';$ 4) $xy'' - y' = e^x x^2;$

5) $y'' + 2xy'^2 = 0;$ 6) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$

Javoblar:

1) $y = \frac{1}{x} + c_1 lnx + c_2;$ 2) $y = c_1 sinx - x - \frac{1}{2}sin2x + c_2;$

3) $y = c_1 x(lnx - 1) + c_2;$ 4) $y = e^x(x - 1) + c_1x^2 + c_2;$

5) $y = \dfrac{1}{\sqrt{c_1}} arctg \dfrac{x}{\sqrt{c_1}} + c_2;$ 6) $y = \dfrac{x^3}{12} - \dfrac{x}{4} + c_1 arctgx + c_2.$

2. Quyidagi tenglamalarni berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlari topilsin.

1) $2y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}, \quad y(1) = \frac{\sqrt{2}}{5}$ va $y'(1) = \frac{\sqrt{2}}{2};$

2) $y'' = 1 + \frac{x(y'-x)}{1-x^2}, \quad y(0) = 1$ va $y'(1) = \frac{1}{2}.$

Javoblar: 1) $y = \frac{\sqrt{2}}{5}x^{\frac{5}{2}};$ 2) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{\pi}arcsinx + 1.$

III. $y'' = f(y, y')$ ko'rinishidagi tenglamalar.

1. Quyidagi tenglamalar yechilsin:

1) $1 + y'^2 = yy'';$ 2) $y''(2y + 3) - 2y'^2 = 0;$ 3) $y'' = \dfrac{y'}{\sqrt{y}};$

4) $yy'' - y'^2 = y^2 lny;$ 5) $y'^2 + yy'' = yy';$ 6) $yy'' - y'^2 = 0;$

7) $2yy'' = 1 + y'^2$;   8) $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.

Javoblar: 1) $y = c_1 ch\frac{x+c_2}{c_1}$;   2) $0{,}5\ln(2y+3) = c_1x + c_2$.

3) $x = \sqrt{y} - 0{,}5c_1\ln(2\sqrt{y} + c_1) + c_2$; 4) $lny = c_1e^x + c_2e^{-x}$;

5) $\frac{y^2}{2} = c_1e^x + c_2$;   6) $y = c_2e^{c_1x}$;   7) $y = \frac{1}{c_1}\left[1 + \frac{(c_1x+c_2)^2}{4}\right]$;

8) $ycos^2(x + c_1) = c_2$.

2. Quyidagi tenglamalarni berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlari topilsin.

1) $y'' = y'e^y$, $y(0) = 0$ va $y'(0) = 1$;

2) $3y'y'' = 2y$, $y(0) = 1$ va $y'(0) = 1$;

3) $y'' = 2yy'$, $y(0) = 1$ va $y'(0) = 1$.

Javoblar: 1) $y = -ln|1 - x|$; 2) $y = \left(1 + \frac{x}{3}\right)^3$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

3.2. Ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli tenglamalar

Ta'rif: Agar ikkinchi tartibli differensial tenglamada noma'lum funksiya y va uning y', y'' hosilalari birinchi darajada qatnashsa, u holda tenglamani ikkinchi tartibli chiziqli differnsial tenglama deyiladi.

Ikkinchi tartibli chiziqli tenglama umumiy holda

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = f(x) \qquad (1)$$

ko'rinishda yoziladi. Unda $a_0 \neq 0$, a_1, a_2 berilgan funksiyalar yoki o'zgarmas sonlar bo'lib, ular chiziqli tenglamaning koeffitsientlari deb ataladi. $f(x)$ funksiya chiziqli tenglamaning o'ng tomoni deb ataladi.

Masalan, $y'' + xy' + e^xy = lnx$ chiziqli tenglama, ammo

$$y'' + lny' + xy = x^3$$

chiziqli tenglama emas, chunki y, y', y'' birinchi darajada qatnashsada, y' hosila logarifmik funksiya argumenti sifatida qatnashmoqda.

Ta'rif: Agar (1) chiziqli differensial tenglamaning o'ng tomoni $f(x) \equiv 0$ bo'lsa, u holda uni bir jinsli tenglama, aks holda bir jinslimas tenglama deyiladi.

Masalan $y'' + x^2y' + xy = cosx$ –bir jinslimas, $2xy'' + y' + xy = 0$ bir jinsli chiziqli tenglamadir.

Ta'rif. Agar (1) chiziqli tenglamaning hamma koeffitsientlari o'zgarmas sonlardan iborat bo'lsa, u holda uni o'zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglama deyiladi, aks holda o'zgaruvchan koeffitsentli chiziqli differensial tenglama deyiladi.

1-teorema. Agar y_1 vay_2 ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0 \qquad (2)$$

tenglamaning ikkita xususiy yechimi bo'lsa, u holda $y_1 + y_2$ ham bu tenglamaning yechimi bo'ladi.

2-teorema. Agar y (2) tenglamaning yechimi bo'lib, C ixtiyoriy o'zgarmas miqdor bo'lsa, u holda $C\,y_1$ ham (2) tenglamaning yechimi bo'ladi.

Ta'rif. Agar [a,b] kesmada (2) tenglama ikkita yechimi y_1 va y_2 larning nisbati o'zgarmas miqdorda teng bo'lmasa, ya'ni

$$\frac{y_1}{y_2} \neq C$$

bo'lsa, u holda y_1 va y_2 yechimlar $[a,b]$ kesmada chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlar deyiladi. Aks holda yechimlar chiziqli bog'liq yechimlar deyiladi.

Masalan, $e^x,\ e^{-x},\ 3e^x,\ 5e^{-x}$ funksiyalar $y'' - y = 0$ tenglamaning yechimlari ekanligi ravshan. Bunda e^x va e^{-x} funksiyalar har qanday kesmada chiziqli bog'liqmas, chunki $\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$ nisbat x ni o'zgarishi bilan o'zga rib boradi. e^x va $3e^{2x}$ funksiyalar esa chiziqli bog'liq chunki

$$\frac{e^x}{3e^x} = \frac{1}{3} = c.$$

Ta'rif. Agar $y_1$va y_2 lar x ning funksiyasi bo'lsa, u holda

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$$

determinant Vronskiy determinanti yoki berilgan funksiyalarning vronskiani deyiladi.

3-teorema. Agar $y_1$va y_2 funksiyalar $[a,b]$ kesmada chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda bu kesmada Vronskiy determinanti aynan nolga teng bo'ladi.

4-teorema. Agar bir jinsli chiziqli (2) tenglamaning y_1 va y_2 yechimlari uchun tuzilgan $W(y_1, y_2)$ Vronskiy determinanti tenglama ning koeffitsientlari uzluksiz bo'lgan $[a, b]$ kesmadagi biror $x = x_0$ qiymatda nolga teng bo'lmasa, u holda bu kesmadagi x ning xech bir qiymatida nolga teng bo'lmaydi. Quyidagi ko'rinishdagi

$$W = ce^{-\int_{x_0}^{x} a_1 dx}$$

formulaga Liuvill formulasi deyiladi.

5-teorema. Agar (2) tenglamaning y_1 va y_2 yechimalari $[a, b]$ kesmada chiziqli erkli bo'lsa, bu yechimlardan tuzilgan W Vronskiy determinanti ko'rsatilgan kesmaning xech bir nuqtasida nolga aylanmaydi.

6-teorema. Agar y_1 va y_2 lar (2) tenglamning ikkita chiziqli erkli yechimlari bo'lsa, u holda,

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

(2) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Masalan, $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$ tenglamaning $a_1 = \frac{1}{x}$ va $a_2 = -\frac{1}{x^2}$ koeffitsientilari $x = 0$ nuqtani o'z ichiga olmagan har qanday kesmada uzluksiz va tenglama $y_1 = x,\ y_2 = \frac{1}{x}$ xususiy yechimlarga ega bo'lgani uchun uning umumiy yechimi

$$y = c_1 x + c_2 \cdot \frac{1}{x}$$

ko'rinishda bo'ladi.

7-teorema. Agar ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglamaning bitta xususiy yechimi ma'lum bo'lsa, u holda umumiy yechimni topish funksiyalarni integrallashga keltiriladi.

Bunda y_2 hususiy yechim

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{{y_1}^2} dx \qquad (3)$$

va dastlabki tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{{y_1}^2} dx \qquad (4)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Aytaylik, o'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (2)$$

tenglama berilgan bo'lsin. Uni umumiy yechimini topish uchun uning ikkita chiziqli erkli xususiy yechimlarini topish kerakligini yuqorida takidlab o'tdik.

Xususiy yechimlarini

$$y = e^{kx} \ (k - o'zgarmas\ son)$$

ko'rinishda izlaymiz. Bu holda

$$y' = ke^{kx},\ y'' = k^2e^{kx}.$$

Hosilalarning bu ifodalarini berilgan tenglamaga qo'ysak, y

$$e^{kx}(k^2 + a_1k + a_2) = 0$$

ko'rinishni oladi. Ammo $e^{kx} \neq 0$bo'lgani uchun

$$k^2 + a_1k + a_2 = 0 \qquad (3)$$

Demak, k (3) tenglamani qanoatlantirsa, y holda e^{kx} (2) tenglamaning ham yechimi bo'ladi. (3) tenglama (2) tenglamaning <u>harakteristik tenglamasi</u> deyiladi.

Harakteristik tenglamaning ildizlari

$$k_1 = -\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2} \quad \text{va} \quad k_2 = -\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$$

bo'lib, ular quyidagicha bo'lishi mumkin:

I. $k_1$vak_2 – haqiqiy va bir-biriga teng bo'lmagan sonlar.

II. $k_1$vak_2 – haqiqiy va bir-biriga teng sonlar.

III. k_1 va k_2 – kompleks sonlar.

Bu hollarni ayrim-ayrim qarab chiqamiz:

1. Harakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va har-xil bo'lgan hol. Bu holda

$$y_1 = e^{k_1x}; \qquad y_2 = e^{k_2x}$$

funksiyalar xususiy yechimlar bo'ladi. Bu yechimlar uchun

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2x}}{e^{k_1x}} = e^{(k_2-k_1)x} \neq c \ (c - o'zgarmas\ son),$$

bo'lganligidan ular chiziqli erkli bo'ladi.

Demak, umumiy yechim

$$y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$$

ko'rinishda bo'ladi.

II. Harakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va o'zaro teng bo'lgan hol ($k_1 = k_2$). Bu holda

$$y_1 = e^{kx}; \quad y_2 = xe^{kx} \ (k_1 = k_2 = k)$$

funksiyalar xususiy yechimlar bo'ladi. Bu yechimlar uchun

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{xe^{kx}}{e^{kx}} = x \neq c \ (c - o'zgarmas\ son)$$

bo'lganligidan ular chiziqli erkli bo'ladi. Shuning uchun

$$y = c_1e^{kx} + c_2xe^{kx} = e^{kx}(c_1 + c_2x)$$

umumiy yechim bo'ladi.

III . Harakteristik tenglamaning ildizlari kompleks sonlar, ya'ni $k_1 = \alpha + \beta i \ \ va \ \ k_2 = \alpha - \beta i$ bo'lgan hol. Bu holda $y_1 = e^{\alpha x}cos\beta x \ \ va \ \ y_2 = e^{\alpha x}sin\beta x$ funksiyalar xususiy yechimlar bo'ladi. Bu yechimlar uchun

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{\alpha x}sin\beta x}{e^{\alpha x}cos\beta x} = tg\beta x \neq c \ \ (c - noldan\ farqli\ o'zgarmas\ son)$$

bo'lganligidan ular chiziqli erkli bo'ladi. Demak, umumiy yechim

$$y = c_1e^{\alpha x}cos\beta x + c_2e^{\alpha x}sin\beta x = e^{\alpha x}(c_1cos\beta x + c_2sin\beta x)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlar:

1. $y_1 = tgx \ va \ y_2 = ctgx$ funksiyalar $(0;\frac{\pi}{2})$ oraliqda chiziqli erkli bo'la oladimi?

Yechish: Agar y_1 va y_2 funksiyalar chiziqli erkli bo'lsa, u holda ular uchun $\frac{y_2}{y_1} \neq c$ (c-noldan farqli o'zgarmas son) shart bajarilishi kerak. Demak,

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{ctgx}{tgx} = ctgx \cdot ctgx = ctg^2x \neq C.$$

Bu esa berilgan funksiyalarni $(0; \frac{\pi}{2})$ oraliqda chiziqli erkli ekanligini bildiradi.

2. $y_1 = sin2x$ va $y_2 = sinx \cdot cosx$ funksiyalar $(-\infty; +\infty)$ oraliqda chiziqli erkli bo'la oladimi?

Yechish: $\frac{y_2}{y_1}=\frac{sinx\cdot cosx}{sin2x}=\frac{sinx\cdot cosx}{2sinx\cdot cosx}=\frac{1}{2}=c.$

Bu esa berilgan y_1 va y_2 funksiyalarni chiziqli bog'lik funksiyalar ekanligini bildiradi.

3. $y_1=e^{k_1x},\ y_2=e^{k_2x},\ y_3=e^{k_3x}$ funksiyalar uchun Vronskiy determinanti aniqlansin.

Yechish:

$$W(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_{2'} & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} & e^{k_3x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} & k_3e^{k_3x} \\ k_1^2e^{k_1x} & k_2^2e^{k_2x} & k_3^2e^{3x} \end{vmatrix}=$$

$$=e^{(k_1+k_2+k_3)x}(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_3-k_2).$$

4. $y_1=sinx,\quad y_2=\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right),\quad y_3=\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$ funksiyalar uchun Vronskiy determinanti topilsin.

Yechish:

$$W(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_{2'} & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} sinx & sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right) & sin(x-\frac{\pi}{8}) \\ cosx & cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right) & cos(x-\frac{\pi}{8}) \\ -sinx & -sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right) & -sin(x-\frac{\pi}{8}) \end{vmatrix}=0.$$

Chunki, determinantning birinchi va uchinchi satrlari proporsionaldir.

5. $y''+y'-2y=0$ tenglama yechilsin.

Yechish: Dastlabki, berilgan tenglamaning harakteristik tenglamasini tuzamiz. U $k^2+k-2=0$ ko'rinishda bo'lib, uning ildizlari $k_1=1$ va $k_2=-2$ bo'ladi. Demak, umumiy yechim

$$y_1=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}=c_1e^x+c_2e^{-2x}$$

dan iborat.

6. $y''+4y'+4y=0$ tenglama yechilsin.

Yechish: Harakteristik tenglamani yozamiz: $k^2+4k+4=0.$ Uning ildizlari $k_1=k_2=-2$ bo'ladi. Demak, umumiy yechim

$$y=(c_1+c_2x)e^{kx}=(c_1+c_2x)e^{-2x}$$

ko'rinishda bo'ladi.

7. $y'' + 2y' + 5y = 0$ tenglamaning $y(0) = 0$ va $y'(0) = 1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Yechish: Harakteristik tenglama $k^2 + 2k + 5 = 0$ ko'rinishda bo'lib, uning ildizlari $k_1 = -1 + 2i$ va $k_1 = -1 - 2i$ bo'ladi. Bu yerda $\alpha = -1$ va $\beta = 2$ bo'lgani uchun, umumiy yechim

$$y = e^{\alpha x}(c_1 cos\beta x + c_2 sin\beta x) = e^{-x}(c_1 cos2x + c_2 sin2x)$$

ko'rinishda bo'ladi. Berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimni topish uchun c_1 va c_2 qiymatlarni aniqlaymiz. Birinchi shartga asosan:

$0 = e^{-0}(c_1 cos2 \cdot 0 + c_2 sin2 \cdot 0)$ bo'lib, undan $c_1 = 0$ kelib chiqadi.

$y' = -e^{-x}(c_1 cos2x + c_2 sin2x) + e^{-x}(-2c_1 sin2x + 2c_2 cos2x) =$
$= e^{-x}(-2c_1 sin2x + 2c_2 cos2x - c_1 cos2x - c_2 sin2x)$ ekanligini e'tiborga olsak, $1 = e^0(-2c_1 sin0 + 2c_2 cos0 - c_1 cos0 - c_2 sin0)$ yoki

$$2c_2 - c_1 = 1, \qquad c_2 = \frac{1}{2}.$$

Demak, izlanayotgan xususiy yechim

$$y = \frac{1}{2}e^{-x} sin2x$$

bo'ladi.

8. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish: Bevosita tekshirish yo'li bilan $y_1 = x$ bu tenglamaning xususiy yechimi ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin. Ikkinchi y_2 xususiy yechimni shunday topamizki, y, y_1 bilan chiziqli erkli bo'lsin.

Bizning misolda $a_1 = \frac{-2x}{1-x^2}$ ekanligini e'tiborga olamiz va y_1 xususiy yechim ma'lum bo'lganda y_2 xususiy yechimni topish formulasidan foydalanib quyidagini hosil qilamiz:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx = x \int \frac{e^{\int \frac{2x dx}{1-x^2}}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{-ln|1-x^2|}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{x^2|1-x^2|} =$$
$$= x \int \left(\pm \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\right) dx = x\left[\pm \frac{1}{x} + \frac{1}{2} ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right].$$

Demak, umumiy yechim

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1x + c_2\left(\frac{1}{2}xln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \pm 1\right)$$

ko'rinishda bo'ladi.

9. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$ tenglamaning xususiy yechimi $y_1 = \frac{sinx}{x}$ ekanligi ma'lum. Uning umumiy yechimi topilsin.

Yechish: Dastlab y_2 xususiy yechimni topamiz:

$$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx = \frac{sinx}{x} \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x}dx}}{\left(\frac{sinx}{x}\right)^2} dx = \frac{sinx}{x} \int \frac{dx}{sin^2x} = -\frac{sinx}{x} \cdot ctgx =$$

$= -\frac{cosx}{x}$. Demak, umumiy yechim quyidagicha bo'ladi.

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1 \cdot \frac{sinx}{x} - c_2 \cdot \frac{cosx}{x}.$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. Quyida berilgan funksiyalar o'zlarining aniqlanish sohasida chiziqli erkli bo'la oladimi?

1) $y_1 = 4, \quad y_2 = x;$

2) $y_1 = 1, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = x, \quad y_4 = x^2;$

3) $y_1 = x, \quad y_2 = 2x, \quad y_3 = x^2e^x;$

4) $y_1 = e^x, \quad y_2 = xe^x, \quad y_3 = x^2e^x;$

5) $y_1 = sinx, \ y_2 = cosx, \ y_3 = cos2x;$

6) $y_1 = \log_a x, \quad y_2 = \log_a x^2 \ (x > 0).$

Javoblar: 1) $xa;$ 2) $yo'q;$ 3) $yo'q;$ 4) $xa;$ 5) $xa;$ 6) $yo'q.$

2. Quyida berilgan funksiyalar uchun Vronskiy determinanti topilsin.

1) $y_1 = 1, \quad y_2 = x;$ 2) $y_1 = x, \quad y_2 = \frac{1}{x};$

3) $y_1 = 1, \quad y_2 = 2, \ y_3 = x^2;$ 4) $y_1 = e^x, \ y_2 = 2e^x, \ y_3 = e^{-x};$

5) $y_1 = 2, \ y_2 = cosx, \ y_3 = cos2x;$ 6) $y_1 = sinx, \ y_2 = sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

Javoblar: 1) 1; 2) $-\frac{2}{x};$ 3) 0; 4) 0; 5) $-8sin^3x;$ 6) $-\frac{1}{\sqrt{2}}.$

3. Quyidagi berilgan harakteristik tenglamalarga ko'ra chiziqli bir jinsli tenglama yozilsin.

1) $9k^2 - 6k + 1 = 0;$ 2) $k^2 + 3k + 2 = 0;$ 3) $k^2 - 5k + 6 = 0;$

4) $2k^2-3k-5=0$; 5) $k^2-4k=0$; 6) $k^2+9k=0$.

Javoblar:1) $9y''-6y'+y=0$; 2) $y''+3y'+2y=0$;

3) $y''-5y'+6y=0$; 4) $2y''-3y'-5y=0$;

5) $y''-4y'=0$; 6) $y''+9y'=0$.

4. Quyidagi tenglamalar yechilsin (harakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va har xil).

1) $y''-y=0$; 2) $3y''-2y'-8y=0$; 3) $y''-2y'-2y=0$;

4) $y''-9y=0$; 5) $y''-7y'+6y=0$; 6) $y''-y'-2y=0$;

Javoblar: 1) $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$; 2) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-\frac{4}{3}x}$;

3) $y=c_1e^{(1-\sqrt{3})x}+c_2e^{(1+\sqrt{3})x}$; 4) $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}$;

5) $y=c_1e^{6x}+c_2e^x$; 6) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$;

5. Quyidagi tenglamalar yechilsin (harakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va o'zaro teng).

1) $y''-2y'+y=0$; 2) $y''-4y'+4y=0$;

3) $y''-6y'+9y=0$; 4) $y''+2y'+y=0$;

5) $9y''-6y'+y=0$; 6) $y''-10y'+25y=0$.

Javoblar:1) $y=(c_1+c_2x)e^x$; 2) $y=(c_1+c_2x)e^{2x}$;

3) $y=(c_1+c_2x)e^{3x}$; 4) $y=(c_1+c_2x)e^{-x}$;

5) $y=(c_1+c_2x)e^{\frac{1}{3}x}$; 6) $y=(c_1+c_2x)e^{5x}$.

6. Quyidagi tenglamalar yechilsin (harakteristik tenglamaning ildizlari o'zaro qo'shma kompleks sonlar).

1) $y''-4y'+13y=0$; 2) $y''+25y=0$;

3) $y''+9y=0$; 4) $y''+y'+y=0$;

5) $y''+2y'+4y=0$; 6) $y''+17y=0$.

Javoblar:

1) $y=e^{2x}(c_1os3x+c_2sin3x)$; 2) $y=c_1cos5x+c_2sin5x$;

3) $y=c_1cos3x+c_2sin3x$; 4) $y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$;

5) $y=e^{-x}(c_1cos\sqrt{3}x+c_2sin\sqrt{3}x)$; 6) $y=c_1cos\sqrt{17}x+c_2sin\sqrt{17}x$.

7. Quyidagi tenglamalarni berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlari topilsin.

1) $y''-3y'+2y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=-3$;

2) $y''-6y'+8y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$;

3) $y'' + 9y' + 20y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$;
4) $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$;
5) $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(2) = 4$, $y'(2) = 0$;
6) $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(\pi) = -2$, $y'(\pi) = -3$;
7) $y'' + y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = \frac{1}{2}$.

Javoblar: 1) $y = 7e^x - 5e^{2x}$; 2) $y = 2e^{2x} - e^{4x}$;
3) $y = -e^{-4x} + e^{-5x}$; 4) $y = 2e^x(1 + x)$; 5) $y = 4e^{4-2x}(2x - 3)$;
6) $y = e^{x-\pi}(2cosx + sinx)$; 7) $y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(2cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

8. Xususiy yechimi $y_1 = ctgx$ bo'lgan $y''sin^2x = 2y$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

9. $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ tenglamaning $y_1 = x$ xususiy yechimi ma'lum bo'lsa, uning umumiy yechimi topilsin.

3.3 Ikkinchi tartibli chiziqli o'zgarmas koeffitsientli bir jinslimas differensial tenglamalar

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (f(x) \neq 0) \qquad (1)$$

tenglamani ikkinchi tartibli chiziqli o'zgarmas koeffitsientli bir jinslimas tenglama deb ataladi.

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (2)$$

tenglamani bir jinslimas tenglamaga mos keluvchi bir jinsli tenglama deyiladi.

1-teorema: Bir jinslimas (1) tenglamaning umumiy yechimi y bu tenglamaning biror xususiy yechimi y^* bilan unga mos keluvchi bir jinsli (2) tenglamaning $\bar{y}$ umumiy yechimi yig'indisiga, ya'ni,

$$y = y^* + \bar{y} \qquad (3)$$

ga teng bo'ladi.

Bizga (2) bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topish usuli ma'lum. Demak, masala (1) bir jinslimas tenglamaning biror xususiy yechimi y^* ni topishdan iborat. Buning uchun Lagranjning o'zgarmaslarni variatsiyalash usullaridan foydalanish mumkin.Bu usulda (1) tenglamaga mos keluvchi (2) bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $\bar{y} = C_1y_1 + +C_2y_2$ ma'lum deb hisoblanadi.Bu yechimdagi C_1 va C_2 o'zgarmas sonlarni $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funksiyalar bilan almashtirib (1) tenglamaning y^* xususiy yechimini

$$y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \qquad (4)$$

ko'rinishda izlaymiz. Bunda $C_1(x)$ va $C_2(x)$ noma'lum funksiyalar bo'lib, ularni topish uchun dastlab (4) tenglamadan y' va y'' larni topamiz va (1) tenglamaga qo'yamiz. Bunda biz $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funksiyalar

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \qquad (5)$$

shartni qanoatlantiradi deb olamiz. Bularga asosan biz

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Bu sistemani yechib $C_1(x)$ va $C_2(x)$ noma'lum funksiyalarni va ularni (4) ga qo'yib y^* xususiy yechimni topamiz.

2-teorema: $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$ (6)
tenglamaning y^* xususiy yechimi

$$y'' + py' + qy = f_1(x) \ (7) \quad \text{va} \quad y'' + py' + qy = f_2(x) \qquad (8)$$

tenglamalar xususiy yechimlari $y_1{}^*$ va $y_2{}^*$ lar yig'indisidan iborat. Ya'ni,

$$y^* = y_1{}^* + y_2{}^* \qquad (9)$$

Masalan, $y'' - 4y = x + 3e^x$ tenglamaning xususiy yechimi y^* $y'' - 4y = x$ tenglamaning xususiy yechimi $y_1{}^* = \frac{1}{4}x$ va $y'' - 4y = 3e^x$ tenglamaning xususiy yechimi $y_2{}^* = \frac{3}{5}e^x$ lar yig'indisi, ya'ni

$$y^* = \frac{1}{4}x + \frac{3}{5}e^x$$

dan iborat bo'ladi.

Bir jinslimas (1) chiziqli tenglamning o'ng tomoni $f(x)$ maxsus ko'rinishlarda bo'lganda, uning xususiy yechimini o'zgaruvchilarni variatsiyalash usuliga nisbatan osonroq bo'lgan usulda topish mumkin.

I. (1) tenglamaning o'ng tomoni ko'rsatkichli funksiya bilan ko'phad ko'paytmasidan iborat, ya'ni

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \qquad (10)$$

ko'rinishda bo'lsin. Bunda $P_n(x) - n$ darajali ko'phad. U holda quyidagi xususiy hollar bo'lishi mumkin:

a) α soni $k^2 + pk + q = 0$ harakterishtik tenglamaning ildizi bo'lamagan hol.

Bu holda xususiy yechimni

$$y^* = (A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n)e^{\alpha x} = Q_n(x)e^{\alpha x} \qquad (11)$$

ko'rinishda izlash kerak.

b) α harakteristik tenglamaning oddiy (bir karrali) ildizi bo'lgan hol.

Bu holda xususiy yechimni $y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x}$ ko'rinishda izlash kerak bo'ladi.

c) α son harakteristik tenglamaning ikki karrali ildizi bo'lgan hol.

Bu holda xususiy yechimni $y^* = x^2Q_n(x)e^{\alpha x}$ ko'rinishda izlash kerak bo'ladi.

II. (1) tenglamaning o'ng tomoni

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

ko'rinishda bo'lgan hol. Bunda $P(x)$ va $Q(x)$ – ko'phadlar. Bu holda quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

a)$\alpha + \beta i$harakteristik tenglamaning ildizi bo'lgan hol. U holda (1) tenglamaning xususiy yechimini

$$y^* = U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

ko'rinishda izlash kerak bo'ladi. Bu yerda $U(x)$va$V(x)$- darajasi $P(x)$ va $Q(x)$ ko'phadlarning eng yuqori darajasiga teng bo'lgan ko'phadlardir.

b) $\alpha + \beta i$harakteristik tenglamaning ildizi bo'lmagan hol. Bu holda xususiy yechimni

$$y^* = x[U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x]$$

ko'rinishda izlash kerak bo'ladi.

Aytaylik (1) tenglamaning o'ng tomoni

$$f(x) = M\cos\beta x + N\ \sin\beta x$$

ko'rinishda bo'lsin. Bunda M va N – o'zgarmas sonlar. Bunda quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) βi harakteristik tenglamaning ildizi bo'lmasa, xususiy yechimni

$$y^* = A\cos\beta x + B\ \sin\beta x$$

ko'rinishda izlash kerak bo'ladi.

b) βi harakteristik tenglamaning ildizi bo'lsa, xususiy yechimni

$$y^* = x(A\cos\beta x + B\ \sin\beta x)$$

ko'rinishda izlash kerak bo'ladi.

Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlar

1. $y'' + 4y' + 3y = x$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish: Berilgan tenglamaga mos kelgan bir jinsli $y'' + 4y' +$ $+3y = 0$ tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$$

bo'lishini topish qiyin emas. Endi biz berilgan bir jinslimas tenglamaning biror y^* xususiy yechimini topishimiz kerak. Bir jinslimas tenglamaning o'ng tomoni xe^{ox} ko'rinishda (ya'ni $P_1(x)e^{ox}$ ko'rinishda) bo'lib, α harakteristik tenglamaning ildizi emas. Shu sababli xususiy yechimni $y^* = Q(x)e^{ox}$ ko'rinishda izlaymiz, ya'ni

$$y^* = A_0x + A_1$$

deb olamiz. $y^{*'}$, $y^{*''}$ larni topib, berilgan tenglamaga qo'yamiz. Natijada

$$4A_0 + 3(A_0x + A_1) = x$$

tenglama hosil bo'ladi. Bir xil darajali x lar oldidagi koeffitsentlarni tenglab,

$$3A_0 = 1, \quad 4A_0 + A_1 = 0$$

tengliklarni hosil qilamiz. Ulardan esa

$$A_0 = \frac{1}{3}, \qquad A_1 = -\frac{4}{9}.$$

Demak, $y^* = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$.

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = \bar{y} + y^* = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$$

bo'ladi.

2. $y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish: Dastlab $y'' + 9y = 0$ bir jinsli tenglamani yechamiz. Uni harakteristik tenglamasi $k^2 + 9 = 0$ bo'lib, uning ildizlari $k_{1,2} = \pm 3i$ bo'ladi. Demak, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y} = c_1 cos3x + c_2 sin3x$$

dan iborat. Berilgan tenglamaning o'ng tomoni $(x^2 + 1)e^{3x}$ bo'lib, y

$$P_2(x)e^{3x}$$

ko'rinishdadir. Daraja ko'rsatgichdagi koeffitsient 3 harakteristik tenglamaning ildizi bo'lmagani uchun xususiy yechimni

$$y^* = Q_2(x)e^{3x} \quad yoki \quad y^* = (Ax^2 + Bx + c)e^{3x}$$

ko'rinishda izlaymiz. $y^{*'}$ va $y^{*''}$ larni topamiz:

$y^{*'} = \left[\left((Ax^2 + Bx + c)e^{3x}\right)\right]' = (2Ax + B)e^{3x} + 3e^{3x} \cdot (Ax^2 + Bx + C) =$
$= e^{3x}(3Ax^2 + 2Ax + 3Bx + B + 3c);$

$y^{*''} = \left[e^{3x}\left((3Ax^2 + 2Ax + 3Bx + B + 3c)\right)\right]' =$
$= 3e^{3x}(3Ax^2 + 2Ax + 3Bx + B + 3c) + e^{3x}(6Ax + 2A + 3B) =$
$= e^{3x}(9Ax^2 + 12Ax + 9Bx + 2A + 6B + 9c).$

$y^*, y^{*''}$ larni berilgan differensial tenglamaga qo'ysak,

$e^{3x}(9Ax^2 + 12Ax + 9Bx + 2A + 6B + 9c) + 9e^{3x}(Ax^2 + Bx + c) =$
$= (x^2 + 1)e^{3x},$

$e^{3x}(18Ax^2 + 12Ax + 18Bx + 2A + 6B + 9c) = (x^2 + 1)e^{3x}$,
$18Ax^2 + 12Ax + 18Bx + 2A + 6B + 18c = x^2 + 1,$

x ning bir xil darajalari oldidagi koeffisientlarni bir-biriga tenglaymiz:

$18A = 1, \quad 12A + 18B = 0, \quad 2A + 6B + 18C = 1.$ Bulardan

$$A = \frac{1}{18}, \ B = -\frac{1}{27}, \ C = \frac{5}{81}.$$

Demak, xususiy yechim

$$y^* = (\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81})e^{3x}$$

va umumiy yechim

$$y = c_1 cos3x + c_2 sin3x + \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81}\right)e^{3x}.$$

3. $y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu yerda o'ng tomon $P_1(x)e^{1 \cdot x}$ ko'rinishda bo'lib, daraja ko'rsatkichdagi koeffitsient harakteristik tenglamaning oddiy ildizi. Demak, xususiy yechimni $y^* = xQ(x)e^x$ yoki $y^* = x(Ax + B)e^x$ ko'rinishda izlaymiz. $y^{*'}$, $y^{*''}$ larni topamiz:

$y^{*'} = [x(Ax + B)e^x]' = [(Ax^2 + Bx)e^x]' = (2Ax + B)e^x +$
$+e^x(Ax^2 + Bx) = e^x(Ax^2 + 2Ax + 2Bx + B);$

$y^{*''} = [e^x(Ax^2 + 2Ax + Bx + B)]' = e^x(Ax^2 + 2Ax + Bx + B) +$
$+e^x(2Ax + 2A + B) = e^x(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B).$

y^*, $y^{*'}$, $y^{*''}$ larning ifodalarini berilgan tenglamaga qo'yamiz:

$$e^x(Ax^2+4Ax+Bx+2A+2B)-7e^x(Ax^2+2Ax+Bx+B)+$$
$$+6(Ax^2+Bx)e^x=(x-2)e^x,\ \ e^x(-10Ax+2A-5B)=(x-2)e^x.$$

Har ikkala tomonini e^x ga bo'lamiz va bir xil darajali x lar oldidagi koeffitsientlarini bir-biriga tenglaymiz: $-10A=1,\quad 2A-5B=-2.$ Bulardan $A=-\frac{1}{10}$, $B=\frac{9}{25}$ ekanligini topamiz. Demak, xususiy yechim $y^*=x\left(-\frac{1}{10}x+\frac{9}{25}\right)e^x$ va umumiy yechim:

$$y=\bar{y}+y^*=c_1e^{6x}+c_2e^x+x\left(-\frac{1}{10}x+\frac{9}{25}\right)e^x \text{ dan iborat.}$$

4. $y''+2y'+5y=2\cos x$ tenglama yechilsin.

Yechish: Berilgan tenglamaga mos kelgan bir jinsli tenglamaning harakteristik tenglamasi $k^2+2k+5=0$ bo'lib, uning ildizlari $k_1=-1+2i,\ k_2=-1-2i$ bo'lganligidan

$$\bar{y}=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$$

bo'ladi. Bir jinsli bo'lmagan tenglamaning xususiy yechimini

$$y^*=A\cos x+B\sin x$$

ko'rinishda izlaymiz. Bu yerda A va B aniqlanishi kerak bo'lgan koeffisientlar. $y^{*'},\ y^{*''}$ larni topamiz:

$$y^{*'}=(A\cos x+B\sin x)'=-A\sin x+B\cos x,$$
$$y^{*''}=(-A\sin x+B\cos x)'=-A\cos x-B\sin x.$$

$y^*,\ y^{*'},\ y^{*''}$ larni berilgan tenglamaga qo'yamiz:

$$-A\cos x-B\sin x-2A\sin x+2B\cos x+5A\cos x+5B\sin x=$$
$$=2\cos x,$$
$$4Acosx+2Bcosx-2Asinx+4Bsinx=2cosx,\quad (4A+2B)cosx-$$
$$-(2A-4B)sinx=2cosx.$$

$cosx$ va $sinx$ lar oldidagi koeffitsientlarini tenglab A va B larni aniqlash uchun quyidagi ikkita tenglamani hosil qilamiz:

$$4A+2B=2,\quad 2A-4B=0\,.$$

Bulardan $A=\frac{2}{5}$, $B=\frac{1}{5}$. Shunday qilib hususiy yechim

$$y^*=\frac{2}{5}cosx+\frac{1}{5}sinx$$

bo'ladi. Umumiy yechim esa

$$y=\bar{y}+y^*=e^{-x}(C_1cos2x+C_2sin2x)+\frac{2}{5}cosx+\frac{1}{5}sinx$$

bo'ladi.

5. $y'' + 4y = cos2x$ tenglama yechilsin:

Yechish: Harakteristik tenglama $k^2 + 4 = 0$ va uni ildizlari $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$ bo'lganligi uchun bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$\bar{y} = C_1 cos2x + C_2 sin2x$ ko'rinishida bo'ladi. Bir jinslimas tenglamaning hususiy yechimini

$$y^* = x(Acos2x + Bsin2x)$$

ko'rinishida izlaymiz. $y^{*'}$ va $y^{*''}$larni topamiz:

$y^{*'} = [x(Acos2x + Bsin2x)]' = Acos2x + Bsin2x +$
$+x(-2Asin2x + 2Bcos2x),$

$y^{*''} = -2Asin2x + 2Bcos2x - 2Asin2x + 2Bcos2x +$
$+x(-4Acos2x - 4Bsin2x) = -4Asin2x + 4Bcos2x -$
$-4x(Acos2x + Bsin2x).$

$y^{*'}$, $y^{*''}$ larni ifodalarini berilgan tenglamaga qo'yamiz:

$-4Asin2x + 4Bcos2x - 4Axcos2x - 4Bxsin2x + 4Axcos2x +$
$+4Bxsin2x = cos2x,$

$-4Asin2x + 4Bcos2x = cos2x.$

$cos2x$ va $sin2x$ lar oldidagi koeffitsientlarni tenglab $4B = 1$ va $-4A = 0$ tenglamalarni hosil qilamiz. Ulardan $A = 0$, $B = \frac{1}{4}$. Demak, berilgan tenglamaning hususiy yechimi

$$y^* = \frac{1}{4} xsin2x$$

dan iborat. Umumiy echimi esa

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 cos2x + C_2 sin2x + \frac{1}{4} xsin2x$$

bo'ladi.

6. $y'' - y = 3e^{2x} cosx$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenlamaning o'ng tomoni

$$f(x) = e^{2x}(Mcosx + Nsinx)$$

ko'rinishda bo'lib, bunda $M = 3$, $N = 0$. $k^2 - 1 = 0$ harakteristik tenglama $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ ildizlarga ega. Shuning uchun bir jinsli tenglamaning umumiy

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

bo'ladi. $\alpha+\beta i=2+i\cdot 1$ kompleks son harakteristik tenglamaning ildizi bo'lmagani uchun, hususiy yechimni

$$y^*=e^{2x}(Acosx+Bsinx)$$

ko'rinishda qidiramiz. $y^{*'}$, $y^{*''}$ larni topamiz:

$$y^{*'}=[e^{2x}(Acosx+Bsinx)]'=2e^{2x}(Acosx+Bsinx)+$$
$$+e^{2x}(-Asinx+Bcosx)=e^{2x}(2Acosx+2Bsinx-Asinx+Bcosx);$$
$$y^{*''}=[e^{2x}(2Acosx+2Bsinx-Asinx+Bcos)]'=$$
$$=2e^{2x}(2Acosx+2Bsinx-Asinx+Bcosx)+$$
$$+e^{2x}(-2Asinx+2Bcosx-Acosx-Bsinx)=$$
$$=e^{2x}(4Acosx+4Bsinx-2Asinx+2Bcosx-2Asinx)+$$
$$+(2Bcosx-Acosx-Bsinx)=$$
$$=e^{2x}(3Acosx+4Bcosx-4Asinx+3Bsinx);$$

y^* va $y^{*''}$ lar o'rniga topilgan ifodalarni qo'yamiz:

$$e^{2x}(3Acosx+4Bcosx-4Asinx+3Bsinx)-e^{2x}(Acosx+Bsinx)=$$
$$=3e^{2x}cosx;$$
$$e^{2x}(2Acosx+4Bcosx-4Asinx+2Bsinx)=3e^{2x}cosx,$$
$$(2A+4B)cosx-(4A-2B)sinx=3cosx,$$

$\cos x$ va $\sin x$ oldidagi koeffitsientlarni tenglab

$$2A+4B=3,\quad -4A+2B=0$$

tenglamalarni hosil qilamiz. Bulardan $A=\frac{3}{10}$, $B=\frac{3}{5}$.

Demak, xususiy yechim

$$y^*=e^{2x}(\frac{3}{10}\cos x+\frac{3}{5}\sin x)$$

bo'lib, umumiy yechim esa

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+e^{2x}(\frac{3}{10}\cos x+\frac{3}{5}\sin x)$$

bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1.Quyidagi o'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli tenglamalar yechilsin:

1)$y''=9y$; 2) $y''+y=0$; 3) $y''+12y=7y'$; 4) $y''-y'=0$;

5) $y'' - 4y' + 4y = 0$; 6) $y'' + 2y' + 10y = 0$;

7) $y'' + 8y' - 2y = 0$; 8) $4y'' - 12y' + 9y = 0$;

9) $y'' + y' + y = 0$.

Javob: 1) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$; 2) $y = A\cos x + B\sin x$;

3) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x}$; 4) $= C_1 + C_2e^{x}$; 5) $y = (C_1 + C_2e^{x})e^{2x}$;

6) $= e^{-x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$; 7) $y = C_1e^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}x} + C_2e^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}x}$;

8) $= (C_1 + C_2x)e^{\frac{3}{2}x}$; 9) $y = e^{-\frac{1}{2}x}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$.

2. Quyidagi o'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli tenglamalarni berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin:

1) $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -6$;

2) $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

3) $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}$;

4) $9y'' + y = 0$, $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$, $y'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$;

5) $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$;

6) $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

3. Quyidagi o'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinslimas tenglamalar yechilsin:

1) $y'' - 7y' + 12y = x$; 2) $y'' - a^2y = x + 1$;

3) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$; 4) $y'' - y = 5x + 2$;

5) $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$; 6) $y'' + 9y = 6e^{3x}$;

7) $y'' - 8y' = 2 - 6x$; 8) $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$.

Javoblar: 1) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + \frac{12x+7}{144}$;

2) $y = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax} - \frac{x+1}{a^2}$;

3) $y = C_1e^{x} + C_2e^{-2x} - \frac{1}{5}(6\sin 2x + 2\cos 2x)$;

4) $= C_1e^{x} + C_2e^{-x} - 5x - 2$; 5) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-5x} + \frac{1}{21}e^{2x}$;

6) $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{3}e^{3x}$; 7) $y = C_1 + C_2e^{3x} + x^2$;

8) $y = e^{x}(C_1\cos\sqrt{2}\,x + C_2\sin\sqrt{2}\,x)$.

4.Quyidagi o'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinslimas tenglamalarni berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin:

1) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$;

2) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

3) $y'' + y = 3\sin x$, $y(0) + y'(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) + y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

4) $2y'' - y' = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Javoblar: 1) $y = \frac{e^{5x}+22e^{3x}+e^{x}}{8}$; 2) $y = 0{,}5x(x+2)e^{4x}$;

3) $y = \frac{3}{8}[(\pi + 2)\cos x - (\pi - 2)\sin x] - \frac{3}{2}x\cos x$;

4) $y = 4e^{\frac{x}{2}-x-4}$.

§4. Yuqori tartibli differensial tenglamalar

4.1. Umumiy tushunchalar. $y^{(n)} = f(x)$ ko'rinishdagi tenglama

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

ko'rinishdagi yoki

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right) = 0 \qquad (1)'$$

tenglamaga n-tartibli differensial tenglama deb ataladi.

Teorema. Agar $(1)'$ tenglamada $f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$ funksiya va uning $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ argumentlari bo'yicha olingan xususiy hosilalari $x = x_0, y = y_0, ' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ qiymatlarni o'z ichiga oluvchi biror sohadagi uzluksiz funksiyalardan iborat bo'lsa, bu holda tenglamaning

$$\begin{cases} y_{x=x_0} = y_0 \\ y'_{x=x_0} = y'_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{x=x_0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \end{cases} \qquad (2)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $y = y(x)$ yechimi mavjud va birginadir.

Ta'rif. n-tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi deb n ta $c_1, c_2, \dots, c_n$ ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlarga bog'liq bo'lgan

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

funksiyaga aytiladi, y funksiya:

$a)\ c_1, c_2, \dots, c_n$ ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlarning har qanday qiymatlarida ham tenglamani qanoatlantiradi;

$b)$ berilgan

$$y_{x=x_0} = y_0$$
$$y'_{x=x_0} = y'_0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$
$$y_{x=x_0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

boshlang'ich shartlarda $c_1, c_2, \dots, c_n$ o'zgarmas miqdorlarni shunday tanlab olish mumkinki, $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ funksiya bu boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradi.

Umumiy yechimni oshkormas holda aniqlovchi $\Phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ ko'rinishdagi munosabat differensial tenglamaning <u>umumiy integrali</u> deyiladi.

Umumiy yechimdan $c_1, c_2, \dots, c_n$ o'zgarmas miqdorlarni tayin qiymatlarida hosil bo'ladigan har qanday funksiya <u>xususiy yechim</u> deb ataladi.

Xususiy yechimning grafigi berilgan differensial tenglamaning <u>integral egri chizig'i</u> deyiladi.

$$y^{(n)} = f(x) \qquad (3)$$

tenglama eng sodda n-tartibli differensial tenglama deyiladi.

Bu tenglama ketma-ket n-marta integrallash orqali yechiladi. Bunda $y^{(n)} = (y^{(n-1)})', y^{(n-1)} = (y^{(n-2)})'; \dots, y'' = (y')'$ ekanligini e'tiborga olamiz. Shunday qilib, berilgan tenglamani har ikkala tomonini integrallaymiz:

$$y^n = f(x), \qquad y^{(n-1)} = \int f(x)dx + c_1 = f_1(x) + c_1;$$
$$y^{(n-2)} = \int [f_1(x) + C_1]dx + C_2 = f_2(x) + C_1 x + C_2, \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y = f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C}{(n-2)!}x^{n-2} + \dots + C_{n-1}x + C_n$$

bu yerda $f_n(x) = \underbrace{\iint \cdots \int f(x)dx^n}_{\text{n marta}}$.

Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlar

1. $y''' = x^2 + x + 1$ tenglama yechilsin.

Yechish: Berilgan tenglamani uch marta ketma-ket integrallaymiz:

$$y'' = \int (x^2 + x + 1)dx + c_1 = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c_1,$$

$$y' = \int \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c_1\right) dx + c_2 = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2,$$

$$y = \int \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2\right) dx + c_3 = \frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + c_1 \cdot \frac{x^2}{2} +$$

$$+ c_2 x + c_3.$$

2. $y''' = sinx + cosx$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish: Berilgan tenglamani ketma-ket uch marta integrallaymiz:

$$y'' = \int (sinx + cosx)dx + c_1 = -cosx + sinx + c_1,$$

$$y' = \int (-cosx + sinx + c_1)dx + c_2 = -sinx - cosx + c_1 x + c_2,$$

$$y = \int (-sinx - cosx + c_1 x + c_2)dx \ + c_2 = cosx - sinx + c_1 \frac{x^2}{2} +$$

$$+ c_2 x + c_3.$$

3. $y''' = \frac{lnx}{x^2}$ tenglamani $y(1) = 0,$ $y'(1) = 1,$ $y''(1) = 2$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Yechish: Dastlab berilgan tenglamani umumiy yechimini topamiz. Buning uchun tenglamani uch marta ketma-ket integrallaymiz.

$$y'' = \int \frac{lnx}{x^2} dx + c_1 = -\frac{lnx}{x} - \frac{1}{x} + c_1,$$

$$y' = \int (-\frac{lnx}{x} - \frac{1}{x} + c_1)dx + c_2 = -\frac{1}{2} ln^2 x - lnx + c_1 x + c_2\,,$$

$$y = \int \left(-\frac{1}{2} ln^2 x - lnx + c_1 x + c_2\right) dx + c_3 = -\frac{x}{2} ln^2 x + c_1 \frac{x^2}{2} +$$

$$+ c_2\, x + c_3\,.$$

Boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimni topamiz. Buning uchun $y,$ y' va y'' larning ifodasidan foydalanamiz. Unda $\frac{c_1}{2} + c_2 + c_3 = 0,$ $c_1 + c_2 = 1,$ $-1 + c_1 = 2$ bo'lib, oxirgi tenglikdan $c_1 = 3$ kelib chiqadi. $c_1 + c_2 = 1$ dan esa $c_2 = -2$ va $\frac{c_1}{2} + c_2 + c_3 = 0$ dan $c_3 = \frac{1}{2}$ larni topamiz. Demak, izlangan yechim

$$y = -\frac{x}{2} ln^2 x + \frac{3}{2} x^2 - 2x + \frac{1}{2}.$$

4. $y^{V}=e^{2x}$ tenglamani $y(0)=0,\quad y'(0)=-2,\quad y''(0)=3,$ $y'''(0)=-1,\ y^{IV}(0)=2$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Yechish: Ketma-ket besh marta integrallaymiz.

$y^{IV}=\int e^{2x}dx+c_1=\frac{1}{2}e^{2x}+c_1,$

$y'''=\int(\frac{1}{2}e^{2x}+c_1)\,dx+c_2=\frac{1}{4}e^{2x}+c_1x+c_2,$

$y''=\int\left(\frac{1}{4}e^{2x}+c_1x+c_2\right)dx+c_3=\frac{1}{8}e^{2x}+c_1\frac{1}{2}x^2+c_2x+c_3,$

$y'=\int\left(\frac{1}{8}e^{2x}+c_1\frac{x^2}{2}+c_2x+c_3\right)dx+c_4=\frac{1}{16}e^{2x}+c_1\frac{x^3}{6}+c_2\frac{x^2}{2}+$ $+c_3x+c_4,$

$y=\int\left(\frac{1}{16}e^{2x}+\frac{1}{6}x^3c_1+\frac{1}{2}x^2c_2+c_3x+c_4\right)dx+c_5=\frac{1}{32}e^{2x}+$ $+c_1\frac{1}{24}x^4+c_2\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}c_3x^2+c_4\,x+c_5.$

Berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimni topamiz.

$\frac{1}{2}e^0+c_1=2,\ \ \frac{1}{2}+c_1=2,\ \ c_1=\frac{3}{2},$

$\frac{1}{4}e^0+c_1\cdot 0+c_2=-1,\ \ \frac{1}{4}+c_2=-1,\ \ c_2=-\frac{5}{4},$

$\frac{1}{8}e^0+c_1\cdot 0+c_2\cdot 0+c_3=3,\ \ \frac{1}{8}+c_3=3,\ \ c_3=\frac{23}{8},$

$\frac{1}{16}e^0+c_1\cdot 0+c_2\cdot 0+c_3\cdot 0+c_4=-2,\ \ \frac{1}{16}+c_4=-2,\ \ c_4=-\frac{33}{16},$

$\frac{1}{32}e^0+c_1\cdot 0+c_2\cdot 0+c_3\cdot 0+c_4\cdot 0+c_5=0,\ \frac{1}{32}+c_5=0,\ c_5=-\frac{1}{32}.$

Demak, tenglamaning berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi

$$y=\frac{1}{32}e^{2x}+\frac{x^4}{16}-\frac{5x^3}{24}+\frac{23x^2}{16}-\frac{33x}{16}-\frac{1}{32}.$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi tenglamalar yechilsin:

1) $y'''=2\frac{cosx}{sin^3x}$; 2) $y''=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; 3) $y''=xarcsinx$;

4) $y'''=27e^{3x}+120x^3$; 5) $y^{IV}=x$; 6) $y'''=x+cosx$.

Javoblar: 1) $y=lnsinx+c_1+c_2x+c_3x^2$;

2) $y=xln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+c_1+c_2x$;

3) $y=\frac{1}{2}x^2 arcsinx+\frac{3}{4}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{4}arcsinx+c_1+c_2x;$

4) $y=e^{3x}+x^6+c_1+c_2x+c_3x^2;$

5) $y=\frac{x^5}{120}+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4;$

6) $y=\frac{x^4}{24}-sinx+c_1x^2+c_2x+c_3.$

2. Quyidagi tenglamalarni berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

1) $y'''=\frac{1}{x};\ \ y(1)=1,\ \ y'(1)=2,\ \ y''(1)=-2;$

2) $y^{IV}=sinx;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2,\ y''\left(\frac{\pi}{2}\right)=y'''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$

3) $y^{IV}=cos^2x;\ y(0)=\frac{1}{32},\ y'(0)=0,\ y''(0)=\frac{1}{8},\ \ y'''(0)=0;$

4) $y'''=xe^{-x};\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=2,\ \ y''(0)=2.$

Javoblar:

1) $y=\frac{x^2}{2}lnx-\frac{7}{4}x^2+5x-\frac{9}{4};$

2) $y=sinx+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+2\left(x-\frac{\pi}{2}\right);$

3) $y=\frac{1}{48}x^4+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{32}cos2x;$

4) $y=-(x+3)e^{-x}+\frac{3}{2}x^2+3.$

4.2. O'zgarmas koeffisientli n-tartibli bir jinsli chiziqli tenglamalar

n-tartibli bir jinsli chiziqli

$$y^{(n)}+a_1y^{n-1}+\cdots+a_ny=0 \qquad (1)$$

tenglamani qaraymiz. $a_1, a_2, \dots a_n$ larni o'zgarmas sonlar deb faraz qilamiz.

Ta'rif. Agar $[a,b]$ kesmadagi x ning barcha qiymatlari uchun

$$\varphi_n(x)=A_1\varphi_1(x)+\cdots+A_{n-1}\varphi_{n-1}(x)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $\varphi_n(x)$ funksiya $\varphi_1(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ funksiyalar orqali chiziqli ifoda etiladi. Bunda $A_1, A_2, \dots, A_n$ hammasi bir vaqtda nolga teng bo'lmaydigan sonlar.

Ta'rif. Agar n ta $\varphi_1(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$, $\varphi_n(x)$ funksiyalarning xech biri qolganlari orqali chiziqli ifoda etilmasa, u funksiyalar <u>chiziqli erkli funksiyalar</u> deb ataladi.

1-Izoh. Ta'riflardan kelib chiqadiki, agar $\varphi_1(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ funksiyalar chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda hammasi nolga teng bo'lmagan shunday $c_1, c_2, \dots, c_n$ sonlar topiladiki, $[a, b]$ kesmada x ning hamma qiymatilari uchun

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) \equiv 0$$

ayniyat bajariladi.

Masalan, $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = 3e^x$ funksiyalar chiziqli bog'liq, chunki $c_1 = -1$, $c_2 = 0$, $c_3 = \frac{1}{3}$ bo'lganda: $c_1e^x + c_2e^{2x} +$ $+3c_3e^x \equiv 0$ bo'ladi.

$y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$ funksiyalar chiziqli erkli funksiyalardir chunki, bir vaqtda nolga teng bo'lmagan c_1, c_2, c_3 ning xech bir qiymatida $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2$ ifoda aynan nolga teng bo'la olmaydi.

Teorema. Agar $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiyalar (1) tenglamaning chziqli erkli yechimlari bo'lsa, u holda

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n \qquad (2)$$

uning umumiy yechimi bo'ladi. Bunda $c_1, c_2, \dots, c_n$ –ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

Agar (1) tenglamaning koeffisientlari o'zgarmas sonlar bo'lsa, u holda umumiy yechimni ikkinchi tartibli tenglamaning umumiy yechimini topgandek aniqlanadi.

1) Harakteristik tenglamani tuzamiz:

$$k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

2) Harakteristik tenglamaning.

$$k_1, k_2, \dots, k_n$$

ildizlarini topamiz.

3) Quyidagilarga asoslanib ildizlarning harakteriga ko'ra chiziqli erkli xususiy yechimlarini topamiz:

a) har bir karrali k ildizga e^{kx} xususiy yechim mos keladi;

b) har bir juft $k_1 = \alpha + \beta i \; va \; k_2 = \alpha - \beta i$ qo'shma kompleks bir karrali ildizlarga ikkita $e^{\alpha x}cos\beta x \; va \; e^{\alpha x}sin\beta x$ xususiy yechimlar to'g'ri keladi;

c) har bir r karrali haqiqiy k ildizga r ta chiziqli erkli

$$e^{kx}, xe^{kx}, x^2e^{kx}, \dots, x^{r-1} \cdot e^{kx}$$

xususiy yechimlar to'g'ri keladi;

d) har bir μ karrali juft $k_1 = \alpha + \beta i, \; k_2 = \alpha - \beta i$ qo'shma kompleks ildizga 2μ ta

$$e^{\alpha x}cos\beta x, xe^{\alpha x}cos\beta x, \dots, x^{\mu-1}e^{\alpha x}cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}sin\beta x, xe^{\alpha x}sin\beta x, \dots, x^{\mu-1}e^{\alpha x}sin\beta x$$

xususiy yechimlar to'g'ri keladi.

Bu xususiy yechimlarining soni harakteristik tenglamaning darajasiga teng bo'ladi.

4) n ta chiziqli erkli $y_1, y_2, \dots, y_n$ xususiy yechimlarni topgandan keyin berilgan chiziqli tenglamaning umumiy yechimini tuzamiz;

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n.$$

bu yerda $c_1, c_2, \dots, c_n$ –ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlar

1. $y_1 = 1$, $y_2 = x, \; y_3 = x^2, \; y_4 = x^3$ funksiyalar $(-\infty; +\infty)$ oraliqda chiziqli erkli ekanligi ko'rsatilsin.

Yechish: $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 + c_4 \cdot x^3 = 0$ tenglik x ning $(-\infty; +\infty)$ dagi $x = 0$ qiymatida bajarilishi uchun $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ bo'lishi kerak. Agar bu sonlarda xech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lsa, u holda tenglik bajarilmaydi. Bu esa yuqorida berilgan funksiyalarning $(-\infty; +\infty)$ oraliqda chizqli erkli ekanligini bildiradi.

2. $y_1 = tgx \; va \; y_2 = ctgx$ funksiyalarni $(0; \frac{\pi}{2})$ oraliqda chiziqli erkli ekanligi ko'rsatilsin.

Yechish: $y_1 \; va \; y_2$ funksiyalar $(0; \frac{\pi}{2})$ oraliqda chiziqli erkli bo'lishi uchun, bu oraliqda $\frac{y_1}{y_2} \neq c$ bo'lishi kerak.

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{tgx}{ctgx}=tgx\cdot\frac{1}{ctgx}=tgx\cdot tgx=tg^2x\neq c.$$

Demak, berilgan funksiyalar $(0;\frac{\pi}{2})$ oraliqda chiziqli erkli.

3. $y'''-2y''+y'=0$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish: Berilgan tenglamaning harakteristik tenglamasi $k^3-2k^2+k=0$ bo'lib, uning ildizlari $k_1=0,\ k_2=k_3=1$ lardan iborat. Bu yerda $y=1$ ikki karrali ildiz shuning uchun tenglamaning chiziqli erkli xususiy yechimlari $y_1=1, y_2=e^x,\ y_3=xe^x$ lardan iborat. Uning umumiy yechimi esa $y=c_1+c_2e^x+c_3xe^x$ bo'ladi.

4. $y^{IV}-y=0$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish: Harakteristik tenglamani tuzamiz;

$$k^4-1=0$$

Harakteristik tenglamaning ildizlarini topamiz:

$$k_1=1,\qquad k_2=-1,\qquad k_3=i,\qquad k_4=-i.$$

Umumiy yechimni yozamiz;

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3cosx+c_4sinx$$

Bu yerda c_1,c_2,c_3,c_4 –ixtiyoriy o'zgarmas sonlardir.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. Quydagi tenglamalar yechilsin:

1) $y'''-5y''+8y'-4y=0$; 2) $y^{IV}-16y=0$; 3) $y'''-8y=0$; 4) $y^{IV}+4y=0$; 5) $4y^{IV}-3y''-y=0$; 6) $y'''-3y''+4y=0$; 7) $y^{IV}+8y''+16y=0$; 8) $y^{IV}-3y''-4y=0$.

Javoblar:

1) $y=c_1e^x+(c_2+c_3x)e^{2x}$;

2) $y=c_1ch2x+c_2sh2x+c_3cos2x+c_4sin2x$;

3) $y=c_1e^{2x}+e^{-x}(c_2cosx\sqrt{3}+c_3sinx\sqrt{3})$;

4) $y=Asinxshx+Bsinxchx+Ccosxshx+Dcosxchx$;

5) $y=Achx+Bshx+Ccos\frac{x}{2}+Dsin\frac{x}{2}$;

6) $y=c_1e^{-x}+(c_2x+c_3)e^{2x}$;

7) $y=(c_1+c_2x)cos2x+(c_3+c_4x)sin2x$;

8) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3cosx+c_4sinx$.

2. $y^{IV}-a^4y=0$ tenglamaning umumiy yechimi va $x=0$ da $y=1$, $y'=0$, $y''=-a^2$, $y'''=$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Javob: $y=c_1e^{ax}+c_2e^{-ax}+c_3cosax+c_4sinax;\; y_0=cosax.$

4.3. Yuqori tartibli bir jinslimas chiziqli tenglamalar

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=f(x) \qquad (1)$$

tenglamani qaraymiz. Bunda $a_1,a_2,\dots,a_n,f(x)$ lar x ning uzluksiz funksiyalari yoki o'zgarmas sonlar.

Aytaylik, bu tenglamaga mos bir jinsli

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0 \qquad (2)$$

tenglamaning

$$\bar{y}=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n \qquad (3)$$

umumiy yechimi mavjud bo'lsin. Bunda quyidagi teorema o'rinlidir.

Teorema. Agar $\bar{y}$ bir jinsli (2) tenglamaning umumiy yechimi, y^* esa bir jinslimas (1) tenglamaning xususiy yechimi bo'lsa, u holda

$$y=\bar{y}+y^*$$

bir jinslimas (1) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

O'zgarmas koeffitsientli yuqori tartibli bir jinslimas tenglamaning xususiy yechimlari bazi hollarda ancha sodda topiladi.

I. Differensial tenglamaning o'ng tomonida $f(x)=P(x)e^{\alpha x}$ funksiya turgan bo'lsin. Bunda $P(x)$ ifoda x ga nisbatan ko'phad. Bu yerda ikki holni ajratish mumkin.

a) agar α harakteristik tenglamaning ildizi bo'lmasa, u holda xususiy yechimni

$$y^*=Q(x)e^{\alpha x}$$

ko'rinishda izlash mumkin. Bunda $Q(x)$ – koeffitsientlari noma'lum bo'lgan va darajasi $P(x)$ ning darajasi bilan bir xil bo'lgan ko'phad;

b) Agar α harakteristik tenglamaning μ karrali ildizi bo'lsa, bu holda bir jinslimas tenglamaning xususiy yechimini

$$y^*=x^{\mu}Q(x)e^{\alpha x}$$

ko'rinishda izlash mumkin. Bunda $Q(x)$ – darajasi $P(x)$ ning darajasi bilan xil bo'lgan ko'phad.

II.Tenglamaning o'ng tomoni

$$f(x) = M cos\beta x + N sin\beta x$$

ko'rinishda bo'lsin. Bunda M va N – o'zgarmas sonlardir. Bunda xususiy yechimini quyidagicha aniqlanadi.

a) agar βi harakteristik tenglamaning ildizi bo'lmasa, bu holda xususiy yechim

$$y^* = A cos\beta x + B sin\beta x$$

ko'rinishda izlanadi. Bunda Ava$B$ noaniq o'zgarmas koeffitsientlar;

b) agar βi harakteristik tenglamaning μ karrali ildizi bo'lsa, u holda xususiy yechim

$$y^* = x^{\mu}(A cos\beta x + B sin\beta x)$$

ko'rinishda izlanadi.

III.Tenglamaning o'ng tomoni

$$f(x) = p(x)e^{\alpha x} cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x} sin\beta x$$

ko'rinishda bo'lsin. Bunda $P(x)$ va $Q(x)$ ifodalar X ga nisbatan ko'phadlar. Bunda quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

a) $\alpha + \beta i$ harakteristik tenglamaning ildizi bo'lmasa, xususiy yechim

$$y^* = U(x)e^{\alpha x} cos\beta x + V(x)e^{\alpha x} sin\beta x$$

ko'rinishda izlanadi. Bunda $U(x)$ va $V(x)$ - darajasi $P(x)$ va $Q(x)$ ko'phadlarning eng yuqori darajasiga teng bo'lgan ko'phadlar;

b) agar $\alpha + \beta i$ harakteristik tenglamaning μ karrali ildizi bo'lsa, xususiy yechim

$$y^* = x^{\mu}[U(x)e^{\alpha x} cos\beta x + V(x)e^{\alpha x} sin\beta x]$$

ko'rinishda izlanadi. Bunda $U(x)$ va $V(x)$ - darajasi $P(x)$ va $Q(x)$ ko'phadlarning eng yuqori darajasiga teng bo'lgan ko'phadlar.

II va III hollarda tenglamaning o'ng tomonida faqat $cos\beta x$ yoki faqat $sin\beta x$ ni o'z ichiga olgan ifoda turgan holda ham, yechimni yuqorida ko'rsatilgan ko'rinishda, ya'ni sinus hamda kosinus bilan izlanadi.

Mavzuga doir yechimlari bilan berilga topshiriqlar

1. $y^{IV} + y = x^3 + 1$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish: Berilgan tenglamaga mos kelgan bir jinsli tenglamaning harakteristik tenglamasi $k^4 - 1 = 0$ bo'lib, u $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = i$, $k_4 = -i$ ildizlarga ega. Demak, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y} = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 cosx + c_4 sinx$$

dan iborat.

Bir jinslimas tenglamaning xususiy yechimini

$$y^* = A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3$$

ko'rinishda izlaymiz.

y^* ni to'rtinchi tartibgacha hosilalarini topamiz:

$y^{*'} = 3A_0 x^2 + 2A_1 x + A_2$

$y^{*''} = 6A_0 x^2 + 2A_1,$

$y^{*'''} = 6A_0,$

$y^{*IV} = 0.$

Hosil qilingan ifodalarni berilgan tenglamaga qo'yamiz va $-A_0 x^3 - A_1 x^2 - A_2 x - A_3 = x^3 + 1$ tenglikni hosil qilamiz. Bundan esa $A_0 = -1$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ va $A_3 = -1$ larni topamiz. Demak, bir jinslimas tenglamaning xususiy yechimi $y^* = -x^3 - 1$ da iborat.

Shunday qilib, berilgan bir jinslimas tenglamaning umumiy yechimi

$$y = \bar{y} + y^* = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 cosx + c_4 sinx - x^3 - 1$$

dan iborat.

2. $y^{IV} - y = 5cosx$ tenglama yechilsin.

Yechish: Berilgan tenglamaga mos keladigan bir jinsli tenglamaning harakteristik tenglamasi $k^4 - 1 = 0$ bo'lib, uning ildizilari $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = i$, $k_4 = -i$ lardan iborat. Shuning uchun bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y} = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 cosx + c_4 sinx$$

bo'ladi. Berilgan bir jinslimas tenglamaning o'ng tomoni

$$f(x) = Mcosx + Nsinx$$

ko'rinishida bo'lib, bunda $M = 5, N = 0$.

i harakteristik tenglamaning oddiy ildizi bo'lgani uchun xususiy yechimni

$$y^* = x(Acosx + Bsinx)$$

ko'rinishda izlaymiz. Bundan y^{IV} ni topamiz.

$y^{*'} = Acosx + Bsinx + x(-Asinx + Bcosx);$

$y^{*''} = -Asinx + Bcosx - Asinx + Bcosx + x(-Acosx - Bsinx) =$
$-2Asinx + 2Bcosx + x(-Acosx - Bsinx);$

$y^{*'''} = -2Acosx - 2Bsinx - Acosx - Bsinx + x(Asinx - Bcosx) =$
$= -3Acosx - 3Bsinx + x(Asinx - Bcosx);$

$y^{*IV} = 3Asinx - 3Bcosx + Asinx - Bcosx + x(Acosx + Bsinx)$
$= 4Asinx - 4Bcosx + x(Acosx + Bsinx).$

y^{*IV} va y^* larni ifodalarini berilgan tenglamaga qo'yamiz;

$4Asinx - 4Bcosx + x(Acosx + Bsinx) - x(Acosx + Bsinx) = 5cosx;$

$4Asinx - 4Bcosx = 5cosx$ bo'lib, bundan $4A = 0$ va $-4B = 5$ larni ulardan esa $A = 0$ va $B = -\frac{5}{4}$ larni topamiz. Demak, berilgan tenglamaning xususiy yechimi

$$y^* = -\frac{5}{4}xsinx,$$

umumiy yechimi esa

$$y = \bar{y} + y^* = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3cosx + c_4sinx - \frac{5}{4}xsinx$$

bo'ladi.

3. $y''' + y'' - 2y' = x - e^x$ tenglama yechilsin.

Yechish: Berilgan tenglamaga mos kelgan bir jinsli tenglamaning harakteristik tenglamasi $k^3 + k^2 - 2k = 0$ bo'lib, uning ildizlari $k_1 = 0$, $k_2 = 1, k_3 = -2$ lardan iborat. Shuning uchun bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y} = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-2x}$$

dan iborat. Berilgan tenglamaning o'ng tomoni $f_1(x) = x$ va $f_2(x) = -e^x$ funksiyalar yig'indisidan iborat bo'lganligi uchun xususiy yechimni

$$y^* = u_1 + u_2 = x(Ax + B) + Cxe^x = Ax^2 + Bx + Cxe^x$$

ko'rinishda izlaymiz. Endi $y^{*'}, y^{*''}, y^{*'''}$ larni topamiz:

$y^{*'} = 2Ax + B + Ce^x + Cxe^x;$

$$y^{*''} = 2A + Ce^x + Ce^x + Cxe^x = 2A + 2Ce^x + Cxe^x;$$
$$y^{*'''} = 2Ce^x + Ce^x + Cxe^x = 3Ce^x + Cxe^x.$$

$y^{*'}, y^{*''}, y^{*'''}$ larni ifodalarini berilgan tenglamaga qo'yamiz. Natijada

$3Ce^x + Cxe^x + 2A + 2Ce^x + Cxe^x - 4Ax - 2B - 2Ce^x - 2Cxe^x =$
$= x - e^x$ yoki $3Ce^x - 4Ax + (2A - 2B) = x - e^x$ hosil bo'ladi. Undan esa $-4A = 1$, $2A - 2B = 0$, $3C = -1$ larni, ulardan esa $A = -\frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}, C = -\frac{1}{3}$ larni topamiz. Demak, xususiy yechim

$$y^* = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}xe^x$$

va umumiy yechim

$$y = \bar{y} + y^* = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}xe^x$$

dan iborat.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi tenglamalarning umumiy yechimi topilsin:

1) $y'' - 7y' + 12y = x;$ 2) $y'' + y' - 2y = 8sin2x;$

3) $y'' - y = 5x + 2;$ 4) $y'' + 6y' + 5y = e^{2x};$

5) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3;$

6) $y^{IV} - a^4y = 5a^4e^{ax}sinax;$ 7) $y''' - y'' = 12x^2 + 6x;$

8) $y^{IV} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{2}cosx.$

Javoblar: 1) $y = c_1e^{3x} + c_2e^{4x} + \frac{12x+7}{144};$

2) $y = c_1e^x + c_2e^{-2x} - \frac{1}{5}(6sin2x + 2cos2x);$

3) $y = c_1e^x + c_2e^{-x} - 5x - 2;$

4) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-5x} + \frac{1}{21}e^{2x};$

5) $y = (c_1 + c_2x)e^x + c_3e^{2x} - x - 4;$

6) $y = (c_1 - sinax)e^{ax} + c_2e^{-ax} + c_3cosax + c_4sinax;$

7) $y = c_1 + c_2x + c_3e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2;$

8) $y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + c_3cosx + c_4sinx - \frac{x}{8}cosx + \frac{1}{4}(\frac{x}{2} - 1)e^x.$

2.Quyidagi tenglamalarning xususiy yechimlari topilsin:

1) $y^{IV} + 2y''' + y'' = e^{4x}$; 2) $y^{IV} + 2y''' + y'' = xe^{-x}$;
3) $y^{IV} + 4y'' + 4y = x\sin 2x$; 4) $y''' + 4y' = e^{2x} + \sin 2x$.
Javoblar: 1) $y^* = ce^{4x}$; 2) $y^* = (c_1x^2 + c_2x^3)e^{-x}$;
3) $y^* = (A_1 + A_2x)\sin 2x + (B_1 + B_2)\cos 2x$;
4) $y^* = Ae^{2x}(B_1\cos 2x + B_2\sin 2x)$.

§5. Oddiy differensial tenglamalar sistemasi

Ko'p masalalarni yechishda x argument, noma'lum $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiyalar va ularni hosilalarini o'z ichiga oluvchi differensial tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $, \dots, y_n = y_n(x)$ funksiyalarni topish talab etiladi.

Quyida biz birinchi tartibli tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (1)$$

Bu yerda $y_1, y_2, \dots, y_n -$ izlanayotgan funksiyalar, x esa argument. Chap tomonida birinchi tartibli hosilalar turgan, o'ng tomoni hosilalarni o'z ichiga olmagan bunday tenglamalar sistemasi normal sistema deyiladi.

Agar normal sistemaning o'ng tomoni $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiyalarga nisbatan chiziqli bo'lsa, u holda tenglamalar sistemasini chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi.

Ko'pincha differensial tenglamalarning normal sistemasi bitta noma'lum funksiyaga bog'liq bo'lgan bitta $n -$ tartibli differensial tenglamaga keltiriladi. Normal sistemani bitta tenglamaga keltirish uchun sistemaning tenglamalaridan birini differensiallash va qolgan noma'lumlarni yo'qotish kerak bo'ladi.

Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlar

1. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$ differensial tenglamalar sistemasini $x(0) = 2$, $y(0) = 0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Yechish: Birinchi tenglamani t bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}.$$

Hosil bo'lgan tenglamadagi $\frac{dy}{dt}$ ni o'rniga uning ifodasini qo'yamiz va quyidagi tenglamani hosil qilamiz.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + x - y.$$

Sistemaning birinchi tenglamasidan

$$y = -x + \frac{dx}{dt}$$

ni topamiz va uni o'rniga qo'yamiz. Natijada

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - x = x - \frac{dx}{dt} \quad \text{yoki} \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 2x = 0$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu o'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli tenglamadir. Uning harakteristik tenglamasi $k^2 - 2 = 0$ bo'lib, uning ildizlari $k_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ dan iborat. Demak, uning umumiy yechimi

$$x = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

dan iborat.

y umumiy yechim esa

$$y = \frac{dx}{dt} - x = c_1\left(\sqrt{2} - 1\right)e^{\sqrt{2}t} - c_2(\sqrt{2} + 1)e^{-\sqrt{2}t}$$

dan iborat.

Endi berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimni topamiz:

Buning uchun berilgan shartlardan foydalanib o'zgarmas miqdorlarni topamiz:

$c_1 + c_2 = 2,\ \sqrt{2}(c_1 - c_2) - (c_1 + c_2) = 0$. Bulardan

$$c_1 = \frac{\sqrt{2}+2}{2},\ c_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

Bularni o'rinlariga qo'yib

$$x=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)e^{\sqrt{2}t}+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-\sqrt{2}t},\quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}t}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\sqrt{2}t}$$

xususiy yechimlarni topamiz.

2. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+z,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+z,\\ \dfrac{dz}{dt}=x+y\end{cases}$

sistema yechilsin.

Yechish: Birinchi tenglamani t bo'yicha differensiallasak,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}=(x+z)+(x+y)$$

yoki

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2x+y+z$$

tenglama hosil bo'ladi.

Endi $\frac{dx}{dt}=y+z$ va $\frac{d^2x}{dt^2}=2x+y+z$ tenglamalardan y va z o'zgaruvchilarni yo'qotsak, x ga nisbat ikkinchi tartibli

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-2x=0$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamning umumiy yechimi $x=c_1e^{-t}+$ $+c_2e^{2t}$ dan iborat.

Bundan

$\frac{dx}{dt}=-c_1e^{-t}+2c_2e^{2t}$ va $y=\frac{dx}{dt}-z=-c_1e^{-t}+2c_2e^{2t}-z.$

Berilgan tenglamalarning uchinchisiga x va y ning topilgan ifodalarini qo'yib, z ni aniqlash uchun

$$\frac{dz}{dt}+z=3c_2e^{2t}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani integrallab

$$z=c_3e^{-t}+c_2e^{2t}$$

ni topamiz. Buni e'tiborga olib

$$y=-(c_1+c_2)e^{-t}+c_2e^{2t}$$

ni hosil qilamiz. Shunday qilib biz berilgan sistemaning umumiy yechimini beruvchi x, y, z larni topdik.

3. $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2z, \\ \frac{dz}{dt} = 2x \end{cases}$$

sistema yechilsin.

Yechish: Birinchi tenglamani t bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2 \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Hosil bo'lgan tenglamani yana t bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 4 \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Bu tenglamaning o'ng tomonidagi $\frac{dz}{dt}$ o'rniga uning ifodasini qo'yamiz:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 4 \cdot 2x, \quad \frac{d^3x}{dt^3} = 8x.$$

Hosil bo'lgan bu tenglama uchinchi tartibli chiziqli bir jinsli tenglama dir. Uni yechimi

$$x = c_1e^{2t} + e^{-t}(c_2cos\sqrt{3}t + c_3sin\sqrt{3}t)$$

dan iborat. Sistemaning birinchi tenglamasidan foydalanib y ni topamiz.

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \left[2c_1e^{2t} - e^{-t}\left(c_2cos\sqrt{3}t + c_3sin\sqrt{3}t\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{2} \cdot e^{-t}\left(c_3cos\sqrt{3}t - c_2sin\sqrt{3}t\right)\sqrt{3} =$$

$$= c_1e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-t}\left[\left(c_3\sqrt{3} + c_2\right)cos\sqrt{3}t - \left(c_2\sqrt{3} + c_3\right)sin\sqrt{3}t\right].$$

Sistemaning ikkinchi tenglamasidan Z ni topamiz:

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{dy}{dt} = c_1e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-t}\left[\left(c_3\sqrt{3} + c_2\right)cos\sqrt{3}t - \left(c_2\sqrt{3} - c_3\right)sin\sqrt{3}t\right].$$

Shunday qilib biz berilgan sistemaning x, y, z yechimlarini topdik.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar:

1.Quyidagi differensial tenglamalar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + y = 0, \\ \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + x - y = e^t, \\ \frac{dy}{dt} - x + y = e^t \end{cases}$;

3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y + t \end{cases}$; 4) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2sht \end{cases}$;

Javoblar: 1) $x = C_1e^t + C_2e^{-3t}, y = -\frac{dx}{dt} = C_1e^t - 3C_2e^{-3t}$;

2) $x = e^t + C_1 + C_2e^{-2t}, y = e^t + C_1 - C_2e^{-2t}$;

3) $x = C_1 + C_2e^{7t} - \frac{3}{49}t(7t + 2), y = -\frac{2}{3}C_1 + \frac{1}{2}C_2e^{7t} +$
$+\frac{1}{49}(14t^2 - 3t - 1)$;

4) $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + tcht, y = C_1e^t - C_2e^{-t} + cht + tsht.$

2. Quyidagi differensial tenglamalar sistemasini berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin:

1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 3;$

2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 1, \\ \frac{dy}{dt} = x + 1 \end{cases}$ $x(0) = -2, y(0) = 0;$

3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 1;$

4) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, \\ \frac{dy}{dt} = z + x, \\ \frac{dz}{dt} = x + y \end{cases}$ $x(0) = -1, y(0) = 1, z(0) = 0$.

Javoblar: 1) $x = 2e^{3t} - e^t, \quad y = 2e^{3t} + e^t$;

2) $x = -e^{-t} - 1, \quad y = e^{-t} - 1$;

3) $x = cost - sint, \quad y = cost$;

4) $x = -e^{-t}, \quad y = e^t, \quad z = 0.$

III-BOB. QATORLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI

§1. Sonli qatorlar va ularning yaqinlashishi

Qator tushunchasi matematik analizning eng muhim tushunchalaridan biri bo'lib, y funksiyalarni qiymatlarini va integrallarni taqribiy hisoblashda hamda differensial tenglamalarni yechishda muhim o'rin tutadi.

Ta'rif: Agar $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ cheksiz sonli ketma-ketlik berilgan bo'lsa, unda

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad (1)$$

Ifoda sonli qator deyiladi. Bu yerda $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$-sonli qator hadlari u_n esa uning umumiy hadi deyiladi.

Bunda har qanday natural n soni uchun (1) sonli qatorning u_n umumiy hadi ma'lum deb hisoblanadi. Masalan, umumiy hadi

$$u = (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}, n = 1,2,3, \dots$$

formula bilan ifodalanadigan sonli qator

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} - \frac{4}{2^4} + \cdots$$

ko'rinishda bo'ladi.

Ta'rif: Berilgan (1) sonli qatorning dastlabki n ta hadidan iborat

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, n = 1,2,3, \dots, \quad (2)$$

yig'indi bu qatorning n – xususiy yig'indisi deb ataladi.

(2) dan $S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \dots,\ S_n = u_1 + {}$ $+u_2 + u_3 + \dots + u_n,$ ni yozish mumkin. Natijada $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ hususiy yig'indilar ketma-ketligi hosil bo'ladi. Shu sababli uning limiti xaqida gapirish mumkin.

Ta'rif: Agar $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ hususiy yig'indilar ketma-ketligi chekli limitga ega va

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S$$

bo'lsa, unda (1) sonli qator yaqinlashuvchi S esa uning yig'indisi deb ataladi. Agar

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$$

yoki mavjud bo'lmasa, (1) sonli qator uzoqlashuvchi deyiladi.

(1) qatorning yaqinlashuvchi va uning yig'indisi S ekanligi

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = S$$

ko'rinishda yoziladi.

Sonli qatorlarga doir asosiy masala uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini tekshirishdan iboratdir.

Birinchi hadi b_1 va maxraji q bo'lgan geometrik progressiya hadlaridan tuzilgan

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \cdots + b_1 q^{n-1} + \cdots \quad (3)$$

qatorni geometrik qator deb ataladi. Uning n ta hadini yig'indisi

$$S_n = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q}(1-q^n)$$

ekanligi ma'lum.

1) Agar $|q| < 1$ bo'lsa, unda

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1}{1-q}(1-q^n) = \frac{b_1}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-q^n) = \frac{b_1}{1-q} = S.$$

Demak, $|q| < 1$ bo'lganda berilgan geometrik qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

bo'ladi.

2) Agar $q > 1$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1}{1-q}(1-q^n) = -\frac{b_1}{1-q}\lim_{n\to\infty}(q^n - 1) =$$

$$\frac{b_1}{q-1}\lim_{n\to\infty}(q^n - 1) = \infty,$$

$q < -1$ bo'lganda esa

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

mavjud emas. Demak, $|q| > 1$ bo'lganda geometrik qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

3) Agar $q = 1$ bo'lsa, u holda berilgan qator

$$b_1 + b_1 + b_1 + \cdots + b_1 \ldots$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu holda $S_n = nb_1$ bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = nb_1 = \infty$$

bo'ladi. Demak, bu holda geometrik qator uzoqlashuvchi ekan.

4) Agar $q = -1$ bo'lsa, u holda berilgan qator

$$b_1 - b_1 + b_1 - b_1 + \cdots + (-1)^{n+1} b_1 + \cdots$$

ko'rinishda bo'ladi va uning hususiy yig'indisi

$$S_n = \begin{cases} b_1, agar\ n\ toq\ bo'lsa; \\ 0, agar\ n\ juft\ bo'lsa. \end{cases}$$

bo'ladi. Bundan esa

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} b_1 = b_1, \qquad \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Demak, $q = -1$ bo'lganda

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

mavjud emas va shu sababli bu holda ham qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Sonli qator bir qator xossalarga ega. Ular quyidagi teoremalar bilan ifodalanadi:

Teorema: Agar (1) sonli qatorning chekli sondagi hadlarini tashlab yuborish bilan hosil qilingan sonli qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'lsa, u holda (1) qatorning o'zi ham yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'ladi. Aksincha, agar (1) qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'lsa, uning bir nechta hadlarini tashlash bilan hosil qilingan sonli qator ham yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'ladi.

Teorema: Agar (1) qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi S bo'lsa, u holda bu qatorning barcha hadlarini biror C o'zgarmas songa ko'paytirishdan hosil qilingan

$$Cu_1 + Cu + \cdots + Cu_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} Cu_k \quad (4)$$

qator ham yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $C \cdot S$ bo'ladi.

Ta'rif: Berilgan

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ va } \sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

sonli qatorlarning algebraik yig'indisi deb ularning mos hadlari algebraik yig'indilaridan hosil qilingan

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k)$$

qatorga aytiladi.

Teorema: Agar

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \text{va} \quad \sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

qatorlar yaqinlashuvchi bo'lib yig'indilari mos ravishda S_1 va S_2 bo'lsa, u holda ularning algebraik yig'indilari

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k)$$

sonli qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi hamda uning yig'indisi $S_1 \pm S_2$ bo'ladi.

Teorema: (Qator yaqinlashishining zaruriy sharti): Agar (1) sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning umumiy hadi u_n uchun

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Natija. Agar $n \to \infty$ da qatorning n- hadi nolga intilmasa, qator uzoqlashadi.

Garmonik qator deb ataluvchi

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

qatorning umumiy hadi $u = \frac{1}{n}$ bo'lib, $n \to \infty$ da $u_n \to 0$ bo'ladi. Ammo qatorning o'zi uzoqlashuvchidir.

Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlar

1. Umumiy hadi $U_n = 1 + \frac{1}{n}$ bo'lgan sonli qator yozilsin.

Yechish: Bu yerda $n = 1,2,3, \ldots$ ekanligini e'tiborga olamiz. Agar $n = 1$ bo'lsa, $U_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2$; $n = 2$ bo'lsa, $U_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $n = 3$

bo'lsa, $U_3 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; $n = 4$ bo'lsa, $U_4 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ va hokazo bo'ladi.

Demak umumiy hadi $U_n = 1 + \frac{1}{n}$ bo'lgan qator

$$2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \cdots + \frac{n+1}{n} + \cdots$$

bo'ladi.

2. Umumiy hadi $U_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ bo'lgan qatorning dastlabki 4 ta hadi yozilsin.

Yechish: Agar $n = 1$ bo'lsa $U_1 = \frac{(1!)^2}{(2\cdot1)!} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$ bo'ladi;

Agar $n = 2$ bo'lsa, $U_2 = \frac{(2!)^2}{(2\cdot2)!} = \frac{2^2}{4!} = \frac{4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = \frac{1}{6}$;

Agar $n = 3$ bo'lsa, $U_3 = \frac{(3!)^2}{(2\cdot3)!} = \frac{6^2}{6!} = \frac{36}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = \frac{1}{20}$;

Agar $n = 4$ bo'lsa, $U_4 = \frac{(4!)^2}{(2\cdot4)!} = \frac{24^2}{8!} = \frac{24\cdot24}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} = \frac{1}{70}$.

Demak, $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{20}, \frac{1}{70}$.

3. $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \cdots + \frac{n}{2n+1} + \cdots$

qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi tekshirilsin.

Yechish: Berilgan qator uzoqlashuvchidir. Chunki

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n(2+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Ya'ni bu yerda qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmayapti.

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$$

qator uchun qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajariladimi?

Yechish:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{n^2}}{\frac{n^2+1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} =$$

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})} = \frac{0}{1} = 0.$$

Demak, berilgan qator uchun qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilyapti.

5. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots$ qatorning yig'indisi topilsin.

Yechish: Bu qatorning umumiy hadi

$$U_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

ekanligi ravshan. Ikkinchi tomondan

$$U_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(3n-2)} - \frac{1}{(3n+1)}\right)$$

bo'lgani uchun

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots+\right.$$
$$\left.\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3n}{3n+1} = \frac{n}{3n+1}.$$

Demak, $S_n = \frac{n}{3n+1}$ bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(3+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}.$$

Shunday qilib,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

Bu esa qatorning yig'indisi $\frac{1}{3}$ ga tengligini bildiradi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi berilgan umumiy hadga asosan qatorning dastlabki bir nechta hadi yozilsin:

1) $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$; 2) $U_n = \frac{n^3}{n+1}$; 3) $U_n = \frac{1}{n^3}$; 4) $U_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$.

2. Quyidagi qatorlarni yig'indisi topilsin:

1) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots$;

$2)\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots;$

$3)\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots.$

Javoblar: $1)\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{4}$.

3.Quyidagi berilgan qatorlarni yaqinlashish yoki uzoqlashishi aniqlansin.

$1)\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1}+\cdots;$

$2)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n;$

$3)\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{4};$

$$5)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{3}{8}+\cdots$$

qator uchun qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajariladimi?

Javob: *Yo'q*.

§2. Musbat hadli sonli qatorlar va ularning yaqinlashish alomatlari

Ta'rif: Agar

$$U_1+U_2+U_3+\cdots+U_n+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}U_k$$

qatorning barcha hadlari musbat bo'lsa, u holda unga musbat hadli sonli qator deyiladi.

Masalan, $U_n=\frac{1}{n}$, $U_n=\frac{1}{n(n+1)}$, $U_n=\cos^{2n}\frac{1}{n}$ qatorlar musbat hadli qatorlardir.

Teorema (Taqqoslash alomati): Berilgan

$$\sum_{k=1}^{\infty}U_k \quad (1) \quad \text{va} \quad \sum_{k=1}^{\infty}V_k \quad (2)$$

musbat sonli qatorlar bo'lib, ularning hadlari $U_k\le V_k$ $(n=1,2,3,\dots)$ shartni qanoatlantirsin. Bu holda quyidagi tasdiqlar o'rinlidir:

I. Agar (2) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (1) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi va ularning yig'indilari uchun $S_1(U) < S_2(V)$ shart bajariladi;

II. Agar (1) qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda (2) qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Teorema (Limitik taqqoslash alomati): Agar

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k \quad (1) \quad \text{va} \quad \sum_{k=1}^{\infty} V_k \quad (2)$$

musbat hadli qatorlar bo'lib, ularning umumiy hadlarining nisbati

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = A$$

chekli limitga ega bo'lsa, u holda (1) va (2) qatorlar bir paytda uzoqlashuvchi yoki yaqinlashuvchi bo'ladi.

Taqqoslash alomatlarida berilgan musbat hadli

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k \qquad (1)$$

qatorning yaqinlashuvchi ekanligini tekshirish maqsadida $U_n \le V_n$ $(n \ge N)$ tengsizlikni qanoatlantiradigan boshqa bir musbat

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_k \qquad (2)$$

qator qaraladi. Bunda (2) qator (1) qator uchun majoranta qator deb ataladi.

Teorema (Dalamber alomati): Berilgan

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k$$

musbat hadli sonli qator uchun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = d$$

limit mavjud bo'lsin. Bu holda $d < 1$ bo'lganda qator yaqinlashuvchi, $d > 1$ bo'lganda esa uzoqlashuvchi bo'ladi.

($d = 1$ bo'lganda teorema qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi haqidagi savolga javob bera olmaydi. Agar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\infty$$

bo'lsa, qator uzoqlashuvchi bo'ladi).

Teorema (Koshi alomati): Berilgan

$$\sum_{k=1}^{\infty}U_k$$

musbat hadli sonli qator uchun

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[u]{U_n}=l$$

limit mavjud bo'lsin. Bu holda $l<1$ bo'lganda qator yaqinlashuvchi, $l>1$ bo'lganda esa uzoqlashuvchi bo'ladi (Agar $l=1$ bo'lsa, qator yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin. Agar

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[u]{U_n}=\infty$$

bo'lsa, qaralayotgan qator uzoqlashuvchi bo'ladi).

Teorema (Qator yaqinlashishining integral alomati): Berilgan

$$\sum_{k=1}^{\infty}U_k$$

musbat hadli sonli qatorning hadlari o'smovchi ketma-ketlikni tashkil etsin, ya'ni

$$U_1\geq U_2\geq U_3\geq\cdots\geq U_n\geq U_{n+1}\geq\cdots$$

bo'lsin. Bundan tashqari $x\geq 1$ sohada aniqlangan uzluksiz, o'smovchi va

$$f(1)=U_1, f(2)=U_2,\ldots,f(n)=U_n,\ldots$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $f(x)\geq 0$ funksiya mavjud bo'lsin. Bu holda berilgan

$$\sum_{k=1}^{\infty}U_k$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun

$$\int_1^{\infty}f(x)dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lishi zarur va yetarlidir.

Natija:

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k$$

sonli qator uzoqlashuvchi bo'lishi uchun $\int_1^{\infty} f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi bo'lishi zarur va yetarlidir.

Ta'rif:

$$1+\frac{1}{2^P}+\frac{1}{3^P}+\frac{1}{4^P}+\cdots+\frac{1}{n^P}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^P}$$

qatorni umumlashgan garmonik qator deb ataladi.

$$U_1+U_2+U_3+\cdots+U_k+U_{k+1}+\cdots$$

qatorning dastlabki k ta hadini tashlab

$$U_{k+1}+U_{k+2}+U_{k+3}+\cdots+U_{k+n}+\cdots$$

qatorni hosil qilamiz. Bu qator dastlabki qatorning qoldig'i deb ataladi. Bu qatorlar bir vaqtda uzoqlashuvchi yoki yaqinlashuvchi bo'ladi.

Chekli sondagi hadlarigina bir xil bo'lgan quyidagi

$$U_1+U_2+U_3+\cdots+U_n+\cdots \text{ va } V_1+V_2+V_3+\cdots+V_n+\cdots$$

qatorlar bir vaqtda uzoqlashuvchi yoki yaqinlashuvchi bo'ladi.

Misollar:

1. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{1}{n^n}+\cdots$ qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi aniqlansin.

Yechish: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$

qatorni qaraymiz. Bu qatorning hadlari ikkinchisidan boshlab, maxraji $\frac{1}{2}$ ga teng bo'lgan geometrik progressiyasini tashkil qiladi.Uning yig'indisi $1\frac{1}{2}$ ga teng. Berilgan qatorning hadlari ikkinchisidan boshlab keyingi qatorning mos hadlaridan kichik. Demak, taqqoslash haqidagi teoremaga asosan berilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

2. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$

qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi aniqlansin.

Yechish: Berilgan qator uzoqlashuvchidir. Chunki uning hadlari (ikkinchisidan boshlab) uzoqlashuvchi bo'lgan

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

garmonik qatorning mos hadlaridan katta.

3. $U_n=\frac{n^2}{(n^2+1)\cdot 3^n}$ va $V_n=\frac{1}{3^n}$ qatorlarni yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi aniqlansin.

Yechish: $V_n=\frac{1}{3^n}$ qator maxraji $q=\frac{1}{3}<1$ bo'lgan geometrik progressiya hadlaridan iborat bo'lganligi uchun y yaqinlashuvchidir. U_n qatorni yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlash uchun limitik taqqoslash alomatidan foydalanamiz. Unga asosan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{(n^2+1)\cdot 3^n}}{\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}=1\neq 0.$$

Demak, limitik taqqoslash alomatiga asosan U_n qator ham yaqinlashuvchi ekan.

4. Quyidagi musbat hadli sonli qatorlarni Dalamber alomati yordamida tekshirilsin:

$$1)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3}{3^k};\ 2)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{3^k};\ 3)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k};\ 4)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}.$$

Yechish:

1) $U_n=\frac{n^3}{3^n}$, $\quad U_{n+1}=\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}$, $\quad \frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}:\frac{n^3}{3^n}=\frac{(n+1)^3\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n^3}=$ $=\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^3;$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^3=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^3=\frac{1}{3}.$$

Demak, berilgan qator uchun $d=\frac{1}{3}<1$ bo'lgani sababli u yaqinlashuvchidir.

2) $U_n=\frac{n!}{3^n}$, $\quad U_{n+1}=\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}$, $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}:\frac{n!}{3^n}=\frac{(n+1)!\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n!}=\frac{1}{3}(n+1);$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}(n+1)=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi ekan.

3) $U_{n+1}=\frac{1}{n+1}$, $\quad U_n=\frac{1}{n}$, $\quad \frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{1}{n+1}:\frac{1}{n}=\frac{n}{n+1};$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1.$$

Bu holda $d=1$ bo'lgani sababli Dalamber alomati bilan bu qatorni yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanini aniqlab bo'lmaydi. Ammo bu qator garmonik qator bo'lgani uchun u uzoqlashuvchidir.

4) $U_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $U_n=\frac{1}{n(n+1)}$, $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}:\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+2}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(1+\frac{2}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}=1.$$

Bu yerda ham $d=1$ bo'lgani uchun Dalamber alomati yordamida bu qator haqida xulosa chiqarib bo'lmaydi. Ammo yuqorida biz bu qatorni yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $S=1$ ekanligini ko'rib o'tganmiz.

5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{k}{4k+3})^k$

qatorni Koshi alomati yordamida yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi aniqlansin.

Yechish: $U_n=(\frac{n}{4n+3})^n$ bo'lgani uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{n}{4n+3})^n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{4n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n(4+\frac{3}{n})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4+\frac{3}{n}}=\frac{1}{4}=l<1.$

Demak, berilgan qator Koshi alomatiga asosan yaqinlashuvchidir.

6. Quyidagi qatorlarni integral alomati yordamida yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi aniqlansin.

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1};\qquad 2)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,ln^3n}.$$

Yechish: 1) Qatorning umumiy hadi $U_n=f(n)$ ni x o'zgaruvchining funksiyasi sifatida qaraymiz. Bu funksiya x ning qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlarida uzluksiz va kamayuvchidir. Shuning uchun berilgan qatorni yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlashni

$$\int_1^{+\infty}\frac{2x}{1+x^2}dx$$

xosmas integralni yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlashga olib kelamiz.

$$\int_1^{+\infty}\frac{2x}{x^2+1}dx=\lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta}\frac{2x}{x^2+1}dx=\lim_{\beta\to+\infty}\ln(x^2+1)|_1^{\beta}=$$

$$=\lim_{\beta\to+\infty}(\ln(+\infty)-\ln 2)=\ln(+\infty)-\ln 2=+\infty.$$

Demak, xosmas integral uzoqlashuvchi. Bundan berilgan qatorni uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

2) Berilgan qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlashni $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^3 x}dx$ xosmas integralni tekshirish bilan almashtiramiz.

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^3 x}dx=\lim_{\beta\to+\infty}\int_2^{\beta}\frac{1}{x\ln^3 x}dx=\lim_{\beta\to+\infty}\int_2^{\beta}\ln^{-3}x\,d(\ln x)=$$

$$=\lim_{\beta\to+\infty}\left(-\frac{1}{2\,ln^2x}\right)|_1^{\beta}=\lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{1}{2\,ln^2 2}-\frac{1}{2\,ln^2\beta}\right)=\frac{1}{2\,ln^2 2}.$$

Demak, xosmas integral yaqinlashuvchi. Bundan berilgan qatorning yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

7. $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$$

qatorni yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi aniqlansin.

Yechish: $U_n=\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$ qatorni $V_n=\frac{1}{3^n}$ qator bilan taqqoslaymiz.

Birinchi qatorning har bir hadi (ikkinchi hadidan boshlab) ikkinchi qatorning mos hadlaridan kichik. Ikkinchi qator maxraji $q=\frac{1}{3}$ bo'lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya bo'lgani uchun u yaqinlashuvchidir. Taqqoslash haqidagi teoremaga asosan berilgan qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1.Taqqoslash alomatidan foydalanib quyidagi qatorlarni yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi aniqlansin.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$; 2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n5^n}$.

Javoblar: 1)uzoqlashadi; 2) uzoqlashadi; 3)yaqinlashadi;

4) yaqinlashadi.

2. Dalamber alomatiga asosan quyidagi qatorlarning yaqinlashishi tekshirilsin:

1) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\cdots;$ 2) $1+\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{8}{4!}+\cdots;$

3) $1+\frac{1\cdot2}{1\cdot3}+\frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot3\cdot5}+\cdots;$ 4) $1+\frac{3}{2\cdot3}+\frac{3^2}{2^2\cdot5}+\frac{3^3}{2^3\cdot7}+\cdots;$

5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)};$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{\sqrt{n\cdot3^n}}.$

Javoblar: 1) yaqinlashadi; 2) yaqinlashadi; 3) yaqinlashadi; 4) uzoqlashadi; 5) uzoqlashadi; 6) yaqinlashadi;

3. Integral alomati bilan quyidagi qatorlarning yaqinlashishi tekshirilsin:

1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots;$ 2) $1+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\cdots;$

3) $\frac{1}{2^3}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{4^3}+\cdots;$ 4) $\frac{1}{1+1^2}+\frac{1}{1+2^2}+\frac{1}{1+3^2}+\cdots;$

5) $\frac{1}{1+1^2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{3}{1+3^2}+\cdots;$ 6) $\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\cdots;$

7) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}};$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}.$

Javoblar: 1) uzoqlashadi; 2) uzoqlashadi; 3) yaqinlashadi; 4) yaqinlashadi;5) uzoqlashadi; 6) yaqinlashadi; 7) uzoqlashadi; 8) yaqinlashadi;

4.Quyidagi qatorlarni Koshi alomatidan foydalanib yaqinlashishi tekshirilsin:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{n+1});$ 2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}^{n^2}.$

Javob: 1) yaqinlashadi; 2) yaqinlashadi;

§3. Ishoralari navbatlashuvi va o'zgaruvchan ishorali sonli qatorlar

Ta'rif: Barcha hadlari musbat bo'lgan $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n, \ldots$ sonli ketma-ketlikdan tuzilgan

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}U_k = U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \cdots + (-1)^{n+1}U_n + \cdots \quad (U_n > 0) \qquad (1)$$

ko'rinishdagi qator ishoralari navbatlashuvchi qator deb ataladi.

Teorema (Leybnis teoremasi): Agar ishoralari navbatlashuvchi

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \cdots + (-1)^{n+1}U_n + \cdots$$

qatorning hadlari

$$U_1 > U_2 > U_3 > \cdots$$

va

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0$$

bo'lsa, (1) qator yaqinlashadi va uning yig'indisi musbat bo'lib u birinchi haddan katta bo'lmaydi.

Ta'rif: Agar qatorning hadlari orasida musbatlari ham, manfiylari ham bo'lsa, qator o'zgaruvchan ishorali qator deb ataladi.

Bu ta'rifdan ishoralari navbatlashuvchi qator o'zgaruvchan ishorali qatorning xususiy holi ekanligi kelib chiqadi.

Teorema: O'zgaruvchan ishorali qator

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots$$

hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan

$$|U_1| + |U_2| + |U_3| + \cdots + |U_n| + \cdots$$

qator yaqinlashsa, berilgan o'zgaruvchan ishorali qator ham yaqinlashadi.

Ta'rif: Quyidagi o'zgaruvchan ishorali

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots$$

qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan

$$|U_1| + |U_2| + |U_3| + \cdots + |U_n| + \cdots$$

qator yaqinlashsa, berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi deyiladi.

Ta'rif: Agar o'zgaruvchan ishorali qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda o'zgaruvchan ishorali qatorning o'zi absolyut yaqinlashuvchi deyiladi. Agar keyingi qator uzoqlashuvchi bo'lib, dastlabki qator yaqinlashuvchi bo'lsa, unda dastlabki qator shartli yaqinlashuvchi qator deb ataladi.

Teorema: Agar qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, uning hadlarini o'rinlarini ixtiyoriy ravishda almashtirilganda ham y absolyut yaqinlashuvchanligicha qoladi. Bu holda qatorning yig'indisi o'zgarmaydi va qator hadlarining tartibiga bog'liq bo'lmaydi.

Teorema:

$$\sum_{k=1}^{n} U_k$$

qator shartli yaqinlashuvchi va uning yig'indisi S bo'lsin. Unda bu qator hadlarining o'rinlarini shunday almashtirish mumkinki, natijada hosil bo'lgan

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{U_k}$$

sonli qator yig'idisi oldindan berilgan ixtiyoriy $S_0 \neq S$ soniga teng bo'ladi. Bundan tashqari

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{U_k}$$

qator uzoqlashuvchi bo'lishi ham mumkin.

Misollar:

1.Quyidagi qatorlarning yaqinlashishi tekshirilsin:

1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots;$

2) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}+\cdots.$

Yechish: 1) Berilgan qatorning hadlari

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots,\frac{1}{n},\dots$$

ketma-ketlikning hadlaridan iborat. Bundan tashqari quyidagi

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\cdots$$

munosabat o'rinlidir. Ikkinchi tomondan

$$\lim_{n\to\infty} U_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

bo'lgani uchun qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilyapti. Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi.

2) Bu yerda ham berilgan qatorning hadlari

$$1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \dots, \frac{1}{n!}, \dots$$

ketma-ketlikning hadlaridan iborat va uning uchun quyidagi

$$1 > \frac{1}{2!} > \frac{1}{3!} > \frac{1}{4!} > \dots > \frac{1}{n!} > \dots$$

tengsizlik o'rinlidir. Ikkinchi tomondan

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n)!} = 0.$$

bo'lgani uchun qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilyapti. Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi.

2. $\frac{sin\alpha}{1^2} + \frac{sin2\alpha}{2^2} + \frac{sin3\alpha}{3^2} + \dots + \frac{sinn\alpha}{n^2} + \dots$

qatorning yaqinlashishi tekshirilsin, bunda α istalgan son.

Yechish: Berilgan qator bilan birga

$\left|\frac{sin\alpha}{1^2}\right| + \left|\frac{sin2\alpha}{2^2}\right| + \left|\frac{sin3\alpha}{3^2}\right| + \dots + \left|\frac{sinn\alpha}{n^2}\right| + \dots$ va

$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$

qatorlarni qaraymiz. Bu qator yaqinlashuvchidir. Berilgan qatorning hadlari bu qatorning hadlaridan katta emas. Demak, berilgan qator yaqilashuvchidir. Lekin ko'rib o'tilgan teoremaga asosan, berilgan o'zgaruvchan ishorali qator ham yaqinlashadi.

3. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$qator tekshirilsin.

Yechish: Berilgan qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan garmonik qator

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

uzoqlashuvchidir. Lekin Leybnis teoremasiga asosan berilgan qator yaqinlashuvchidir. Chunki uning hadlari $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ ketma-ketlikning hadlaridan iborat va uning uchun

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots > \frac{1}{n} > \dots$$

bo'lib, shu bilan birga

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Bundan esa berilgan qatorning shartli yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

4. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\cdots$ qator yaqinlashishga tekshirilsin.

Yechish: Berilgan qatorning hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$$

qatorni qaraymiz. Bu qator maxraji $\frac{1}{2}$ bo'lgan geometrik progressiya bo'lgani uchun u yaqinlashuvchidir. Demak, berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1.Quyidagi qatorlarning yaqinlashishini tekshirilsin.

1) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots;$

2) $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots;$

3) $\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}-\cdots.$

Javoblar: 1) Yaqinlashadi, lekin absolyut emas;
2) absolyut yaqinlashadi; 3) yaqinlashadi, lekin absolyut emas.

2.Quyida berilgan qatorlarning dastlabki 6 ta hadi yozilsin va yaqinlashishga tekshirilsin.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\pi}{5n}$.

Javoblar: 1) Absolyut yaqinlashadi; 2) yaqinlashadi, lekin absolyut emas; 3) uzoqlashadi.

3. Quyida berilgan ishoralari navbatlashuvchi qatorlarni yaqinlashuvchi ekanligi ko'rsatilsin va ularni taqribiy qiymatlari 0,01 gacha aniqlikda hisoblansin

1) $1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\cdots;$

$$2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)(n+2)}.$$

Javoblar: 1) 0,96; 2) 0,04.

4. Quyidagi qatorlarning qaysi birlari absolyut yaqinlashishi aniqlansin:

$$1)\ 1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots;$$

$$2)\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}+\cdots;$$

$$3)\ \frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{\ln n}+\cdots;$$

$$4)\ -1+\frac{1}{\sqrt[5]{2}}-\frac{1}{\sqrt[5]{3}}+\frac{1}{\sqrt[5]{4}}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{\sqrt[5]{n}}+\cdots.$$

Javoblar: 1) Absolyut yaqinlashadi; 2) absolyut yaqinlashadi; 3) shartli yaqinlashadi; 4) shartli yaqinlashadi.

§4. Funksional va darajali qatorlar

Ta'rif: Agar $U_n(x), n = 0,1,2,3,...,$ biror D sohada aniqlangan funksiyalarning cheksiz ketma-ketligi bo'lsa, ulardan tuzilgan

$$U_1(x)+U_2(x)+U_3(x)+\cdots+U_n(x)+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}U_k(x) \qquad (1)$$

qator funksional qator deb ataladi.

x ga aniq son qiymatlar berib, turli sonli qatorlarni hosil qilish mumkin. Ular yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishi mumkin.

Ta'rif: Agar $x = x_0$ nuqtada (1) funksional qatordan hosil bo'ladigan

$$U_1(x_0)+U_2(x_0)+\cdots+U_n(x_0)+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}U_k(x_0) \qquad (2)$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (1) funksional qator $x = x_0$ nuqtada yaqinlashuvchi deyiladi.

Ta'rif: x ning berilgan funksional qatorni yaqinlashuvchi qatorga aylantiradigan qiymatlari to'plami qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi.

Qatorning yaqinlashish sohasidagi yig'indisi x ning biror $S(x)$ funksiyasidan iborat bo'ladi.

(1) qator dastlabki n ta hadi yig'indisini $S_n(x)$ bilan belgilaymiz.

Agar qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $S(x)$ ga teng bo'lsa, u holda

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x)$$

bo'ladi. Bu yerda $r_n(x)$ quyidagi $U_{n+1}(x) + U_{n+2}(x) + \cdots$ qator yig'indisidir.

Ya'ni

$$r_n(x) = U_{n+1}(x) + U_{n+2}(x) + \cdots = \sum_{k=k+1}^{\infty} U_k(x)$$

Bu holda $r_n(x)$ (1) qatorning qoldig'i deyiladi. x ning qatorni yaqinlashish sohasidan olingan barcha qiymatlarida

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Shuning uchun

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} [S(x) - S_n(x)] = 0$$

bo'ladi. Bundan esa yaqinlashuvchi qatorning $r_n(x)$ qoldig'i $n \to \infty$ da nolga intilishi kelib chiqadi.

Ta'rif: Agar hadlari musbat bo'lgan shunday

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n + \cdots \qquad (2)$$

yaqinlashuvchi sonli qator mavjud bo'lib, x ning berilgan sohadan olingan barcha qiymatlari uchun

$$|u_1(x)| \le \alpha_1, |u_2(x)| \le \alpha_2, \ldots, |u_n(x)| \le \alpha_n, \ldots \qquad (3)$$

munosabat bajarilsa, u holda

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \qquad (4)$$

funksional qator x ning biror o'zgarish sohasida kuchaytirilgan qator deb ataladi.

Ta'rifdan biror sohada kuchaytirilgan qator shu sohaning barcha nuqtalarida absolyut yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

Teorema: $u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$

Funksional qator $[a, b]$ kesmada kuchaytirilgan qator bo'lsin. $S(x)$ bu qatorning yig'indisi va $S_n(x)$ bu qator dastlabki n ta hadining yig'indisi bo'lsin. Bu holda istalgan kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N musbat son topiladiki, barcha $n \ge N$ da $[a, b]$ kesmadan olingan har qanday x uchun

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Ta'rif: Agar ixtiyoriy har qancha kichik $\varepsilon > 0$ uchun shunday N nomer topilsaki va barcha $n \geq N$ bo'lganda $[a, b]$ kesmadan olingan ixtiyoriy x uchun

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

funksional qator $[a, b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi deyiladi.

Kuchaytirilgan qator tekis yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

Biror $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyalardan tuzilgan yaqinlashuvchi

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

qator berilgan bo'lsin.

Teorema: Biror $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyalardan tuzilgan kuchaytirilgan qatorning yig'indisi shu kesmada uzluksiz funksiyadir.

Eslatma: Chekli sondagi uzluksiz funksiyalarning yig'indisi uzluksiz funksiya bo'lishi haqida ilgari aytib o'tgan edik. Qatorning yig'indisi uchun bu xossa o'z kuchini yo'qotadi. Hadlari uzluksiz bo'lgan ba'zi bir funksional qatorlarning yig'indisi uzluksiz funksiya bo'ladi, hadlari uzluksiz bo'lgan boshqa funksional qatorlarning yig'indisi uzlukli funksiya bo'ladi.

Teorema: $[a, b]$ kesmada kuchaytirilgan bo'lgan uzluksiz funksiyalarning quyidagi

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

qatori berilgan va uning yig'indisi $S(x)$ bo'lsin. Bu holda $[a, b]$ kesmaga tegishli bo'lgan α dan x gacha chegarada $S(x)$ dan olingan integral berilgan qator hadlaridan shunday chegarada olingan integrallar yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int_d^x S(t)dt = \int_\alpha^x u_1(t)dt + \int_\alpha^x u_2(t)dt + \cdots + \int_\alpha^x u_n(t)dt + \cdots$$

Eslatma: Agar qator kuchaytirilmagan bo'lsa, qatorni har doim ham hadlab integrallash mumkin bo'lavermaydi. Buni berilgan qator yig'indisini $\int_a^x S(t)dt$ integrali har doim uning hadlari integrallarining yig'indisiga teng bo'lavermaydi degan ma'noda tushunish kerak.

Teorema: Agar $[a,b]$ kesmada hosilalari uzluksiz bo'lgan funksiyalardan tuzilgan

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

qator shu kesmada $S(x)$ yig'indiga yaqinlashsa va uning hadlari hosilalaridan tuzilgan

$$u_1'(x) + u_2'(x) + \cdots + u_n'(x) + \cdots$$

qator o'sha kesmada kuchaytirilgan bo'lsa, hosilalar qatorining yig'indisi boshlang'ich qator yig'indisining hosilasiga teng, ya'ni

$$S'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \cdots + u_n'(x) + \cdots.$$

Eslatma: Hosilalar qatorining kuchaytirilgan bo'lishini talab etish ahamiyatlidir. Bu shartning bajarilmasligi qatorni hadlab differensiallab bo'lmaslikka olib kelishi mumkin.

Ta'rif: $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ ko'rinishdagi funksional qator darajali qator deb ataladi, bunda

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ o'zgarmas sonlar bo'lib, ular qatorining koeffitsientlari deyiladi.

Darajali qatorning yaqinlashish sohasi biror oraliqdan yoki bitta nuqtadan iborat bo'lishi mumkin.

Teorema (Abell teoremasi): 1) Agar darajali qator argumentning noldan farqli biror x_0 qiymatida yaqinlashsa, x ning

$$|x| < |x_0|$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday qiymatlarida u absolyut yaqinlashadi.

2) Agar darajali qator argumentning noldan farqli biror x_0 qiymatida uzoqlashsa, x ning

$$|x| > |x_0|$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday qiymatlarida u absolyut uzoqlashadi.

Teorema: Darajali qatorning yaqinlashish sohasi markazi koordinatalar boshida bo'lgan intervaldan iboratdir.

Darajali qatorning yaqinlashish intervali $(-\frac{1}{l},\frac{1}{l})$ bo'lib uni

$$R=\frac{1}{l}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{yoki} \quad R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

dan topiladi. Bu yerda $R=\frac{1}{l}$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi deyiladi.

Teorema: $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ darajali qator butunlay yaqinlashish intervali ichida yotuvchi istalgan $[-\rho,\rho]$ kesmada kuchaytirilgandir.

1-Natija: Yaqinlashish intervali ichida butunlay yotuvchi har qanday kesmada darajali qatorning yig'indisi uzluksiz funksiyadir.

2-Natija: Agar integrallash chegaralari α,β darajali qatorning yaqinlashish intervali ichida yotsa, qator yig'indisining integrali qator hadlaridan olingan integrallar yig'indisiga teng bo'ladi.

Teorema: Agar

$$S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

darajali qatorning yaqinlashish intervali $(-R,R)$ bo'lsa, u holda qatorni hadlab differensiallashdan hosil qilingan

$$\varphi(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

qatorning ham yaqinlashish intervali $(-R,R)$ bo'ladi; bunda $|x|<R$ bo'lsa, $\varphi(x)=S'(x)$ bo'ladi.

Teorema: Agar berilgan darajali qator $(-R,R)$ oraliqda yaqinlashuvchi bo'lsa, uning yig'indisini ifodalovchi $S(x)$ funksiya bu oraliqda ixtiyoriy marta differensiallanuvchi bo'ladi. Bunda $S^m(x)$, $m=1,2,3,\ldots$ hosilalar berilgan darajali qatorni ketma-ket m marta hadlab differensiallash orqali topiladi. Bunda hosil bo'ladigan darajali qatorlarning yaqinlashish sohasi $(-R,R)$ oraliqdan iborat bo'ladi.

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

qator bilan birga

$$a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+\cdots+a_n(x-c)^n+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-c)^k$$

qatorni ham darajali qator deb ataladi. Agar ikkinchi qatorda $c=0$ bo'lsa, birinchi qator hosil bo'ladi. Birinchi qator yaqinlashuvchi va yaqinlashish radiusi R bo'lsa, u holda ikkinchi qator ham yaqinlashuvi va yaqinlashish sohasi $(c-R, c+R)$ dan iborat bo'ladi.

Misollar:

1. $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$ funksional qatorni yaqinlashish sohasi topilsin.

Yechish: Bu qator maxraji x bo'lgan geometrik qatordir. Agar $|x|<1$ bo'lsa, berilgan qatorning hadlari cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya hadlaridan iborat bo'lib, bu holda uning yig'indisi $\frac{1}{1-x}$ ga teng bo'ladi. Ya'ni

$$S(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

bo'ladi. Demak, berilgan qatorning yaqinlashish sohasi $(-1;\ 1)$ dan iborat bo'ladi.

2. $\frac{cosx}{1^2}+\frac{cos2x}{2^2}+\frac{cos3x}{3^2}+\cdots\frac{cosnx}{n^2}+\cdots$

qator kuchaytirilgan qator ekanligi isbot qilinsin.

Yechish: x argumentning $(-\infty;\ +\infty)$ oraliqdagi barcha qiymatlarida

$$\left|\frac{cosnx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}\quad(n=1,2,3,\ldots)$$

munosabat o'rinlidir. Bundan tashqari

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\frac{1}{n^2}+\cdots$$

qator yaqinlashuvchidir. Demak, berilgan qator kuchaytirilgan qator ta'rifini qanoatlantiradi.

3. $\left(x^{\frac{1}{3}}-x\right)+\left(x^{\frac{1}{5}}-x^{\frac{1}{3}}\right)+\left(x^{\frac{1}{7}}-x^{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)+\cdots$

qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi uzlukli funksiya ekanligi ko'rsatilsin.

Yechish: Berilgan qatorning hadlari x ning barcha qiymatlarida uzluksiz funksiyalardir.

$$S_n(x) = \left(x^{\frac{1}{3}} - x\right) + \left(x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}\right) + \left(x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}}\right) + \cdots + \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right) =$$
$$= x^{\frac{1}{2n+1}} - x.$$

Demak, $S_n(x) = x^{\frac{1}{2n+1}} - x.$

Agar $x > 0$ bo'lsa,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x\right) = 1 - x;$$

Agar $x < 0$ bo'lsa,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(-|x|^{\frac{1}{2n+1}} - x\right) = -1 - x;$$

Agar $x = 0$ bo'lsa, $S_n(x) = 0$ bo'lib, bu holda $S = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0.$

Shunday qilib, biz quyidagilarga ega bo'ldik:

$x < 0\ bo'lganda\ S(x) = -1 - x,$

$x = 0\ bo'lganda\ S(x) = 0,$

$x > 0\ bo'lganda\ S(x) = 1 - x.$

Bulardan berilgan qatorning yaqinlashuvchi va uning yig'indisi uzlukli funksiya ekanligi kelib chiqadi.

4. $\dfrac{sin1^4x}{1^2} + \dfrac{sin2^4x}{2^2} + \dfrac{sin3^4x}{3^2} + \cdots + \dfrac{sinn^4x}{n^2} + \cdots$

qator kuchaytirilgan qator ekanligi va uning hadlarini hosilalaridan tuzilgan qator esa uzoqlashuvchi ekanligi ko'rsatilsin.

Yechish: x ning istalgan qiymatida bu qator hadlari ning absolyut qiymati hadlari musbat bo'lgan yaqinlashuvchi

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \frac{1}{n^2} + \cdots$$

sonli qatorning hadlaridan kichik. Demak, berilgan qator kuchaytirilgan qator bo'lib y uzluksiz funksiyaga yaqinlashadi.

Berilgan qator hadlarining hosilalaridan tuzilgan

$$cosx + 2^2cos2^4x + 3^2cos2^4x + \cdots + n^2cosn^4x + \cdots$$

qator uzoqlashuvchidir. Chunki $x = 0$ bo'lganda, y

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + \cdots$$

qatorga aylanadi. Bu qator esa uzoqlashuvchidir.

5. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$ qatorning yaqinlashish oralig'i topilsin.

Yechish: Dalamber alomatidan foydalanamiz. Bunda $u_{n+1} = x^{n+1}$ va $u_n = x^n$ ekanligi ma'lum.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|x| = |x|.$$

Demak, $|x| < 1$ bo'lganda, ya'ni $(-1; 1)$ oraliqda qator yaqinlashuvchidir. $x = -1$ va $x = 1$ bo'lganda qatorni Dalamber alomati yordamida aniqlash mumkin emas. Lekin $x = -1$ va $x = 1$ bo'lganda qatorni uzoqlashuvchi ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

6. $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ qatorning yaqinlashish oralig'i topilsin.

Yechish: $u_n = \frac{x^n}{n!}, u_{n+1} == \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

Dalamber alomatini qo'llaymiz:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n!}{x^n\cdot(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} =$$

$= 0 < 1.$

Limitning x ga bog'liq emasligi va birdan kichikligi tufayli berilgan qator x ning barcha qiymatlarida yaqinlashadi.

7. $1 + x + (2x)^2 + (3x)^3 + \cdots + (nx)^n + \cdots$ qatorni yaqinlashish oralig'i topilsin.

Yechish: Berilgan qatorni $x = 0$ bo'lganda yaqinlashuvchi ekanligi ravshan. $x = 0$ dan farqli, hamma qiymatlarda uzoqlashadi. Chunki x ning noldan farqli har qanday qiymatida $n \to 0$ da $(nx)^n \to \infty$.

8. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + \cdots$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi topilsin.

Yechish: $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = (-1)^n\frac{1}{n+1}.$

Darajali qatorni yaqinlashish radiusini topish uchun Dalamber alomatini qo'llaymiz.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot\frac{1}{n}}{(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Demak, berilgan qatorning yaqinlashish radiusi $R = 1$ va yaqinlashish oralig'i $(-1; 1)$ dan iborat ekan.

9. $1 + \frac{4}{11}x + (\frac{7}{15})^2x^2 + (\frac{10}{23})^2x^3 + \cdots + (\frac{3n+1}{6n+5})^n x^n + \cdots$ darajali qatorni yaqinlashish radiusi topilsin.

Yechish: Bu qatorni yaqinlashish radiusini topish uchun

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Koshi alomatidan foydalanish qulaydir. Unga asosan

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{3n+1}{6n+5})^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{3n+1}{6n+5}} = \lim_{n\to\infty}\frac{6n+5}{3n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{5}{n}}{3+\frac{1}{n}} = 2.$$

Demak, $R = 2$.

10. $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$ darajali qator hadlab integrallansin.

Yechish: Berilgan darajali qatorni yaqinlashish oralig'i $(-1; 1)$ oraliqdan iborat. Shuning uchun uni $[0; t] \subset (-1; 1)$ kesmada hadlab integrallash mumkin. U holda berilgan qatorning yig'indisi

$$S(x) = \frac{1}{1+x}$$

dan olingan integral qator hadlaridan olingan integrallar yig'indisiga teng bo'ladi. Ya'ni,

$$\int_0^t \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots, -1 < x < 1.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} sin^3\frac{1}{n+1}(x-4)^n = sin^3 1 + sin^3\frac{1}{2}(x-4) + sin^3\frac{1}{3}(x-4)^2 + \cdots$$

qatorning yaqinlashish radiusi topilsin.

Yechish: Dalamber alomatidan foydalanamiz:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin^3\frac{1}{n+1}}{\sin^3\frac{1}{n+2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{n+1}}{\sin\frac{1}{n+2}}\right)^3\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n+2}}{\sin\frac{1}{n+2}}\right)\cdot$$

$$\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^3=1.$$

Bu yerda biz limitni hisoblashda $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{sinx}{x}=1$ ajoyib limitdan foydalandik. Berilgan qator $x-4$ ning darajalari bo'yicha qator bo'lgani uchun uning yaqinlashish sohasi $-1<x-4<1$ yoki $3<x<5$ dan iborat bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. Quyidagilardan qaysi biri funksional qator emas ?

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{cos^2nx}{(n+1)^2}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{sin^2nx}{(n+1)^2}$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{cosnx+sinnx}{(n+1)^2}$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{cos^2nx+sin^2nx}{(n+1)^2}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2+3^nx}}{(n-1)!}$

qatorni $[0,a](a>0)$ kesmada yaqinlashuvchi va uning yig'indisi uzluksiz funksiyadan iborat ekanligi isbotlansin.

3. $|x|<1$ bo'lganda $1+x+x^2+x^3+\cdots$ qatorning yig'indisi va qoldig'i topilsin hamda $[0,\frac{1}{2}]$ kesmada tekis yaqinlashishi ko'rsatilsin.

4. Quyidagi qatorlarning qaysi biri ko'rsatilgan kesmalarda kuchaytiril gan qator bo'ladi ?

1) $1+\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\cdots+\frac{x^n}{n^2}+\cdots\quad(0\le x\le 1)$;

2) $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\quad(0\le x\le 1)$;

3) $\frac{sinx}{1^2}+\frac{sin2x}{2^2}+\frac{sin3x}{3^2}+\cdots+\frac{sinnx}{n^2}+\cdots\quad(0;2\pi)$.

Javoblar: 1) *kuchaytirilgan*; 2) *kuchaytirilgan emas*; 3) *kuchaytirilgan.*

5.Quyidagi funksional qatorlarni yaqinlashish sohasi topilsin.

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x+2)^n};\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}n\sqrt[3]{sin^n x};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)(n+x+1)}$$

Javoblar: 1) $(-\infty;-3]\cup(-1;+\infty)$; 2) $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in z$; 3) $x\neq -k\ (k=1,2,3,...)$

1. Quyidagi funksional qatorlarni yaqinlashish sohasi topilsin.

$$1)\ 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots \qquad 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{lg^n x}{n};$$

$$3)\ tgx+\frac{tg^2x}{2^2}+\frac{tg^3x}{3^2}+\frac{tg^4x}{4^2}+\cdots \qquad 4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2};$$

Javoblar: 1) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; 2) $[0{,}1;10]$; 3) $\left(k-\frac{1}{4}\right)\pi\leq x\leq\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi, k=0,\pm1,\pm2,...$ 4) $(-\infty;+\infty)$.

7. Quyidagi darajali qatorlarni yaqinlashish sohasi topilsin.

$$1)\ x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}... \qquad 2)\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{2n}$$

$$3)\ 1+2!\,x+3!\,x^2+4!\,x^3+\cdots \quad 4)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1};$$

$$5)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}; \qquad 6)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n.$$

Javoblar: 1) $[-1;1)$; 2) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 3) faqat $x=0$ da yaqinlashadi. 4) $[3;5]$; 5) $(-\infty;\ +\infty)$; 6) $|x|<4$.

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)(n+x+1)}$

qatorni $(-1;\ +\infty)$ oraliqda hadlab integrallash mumkinligini ko'rsating va integrallang.

9. Quyidagi qatorlarning yaqinlashish intervallari aniqlansin va ularning yig'indilari topilsin:

$$1)\ 1-3x^2+5x^4-7x^6+\cdots$$

Ko'rsatma. S yig'indini topish uchun avval $\int_0^x sdx$ topilsin.

$$2)\ x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$$

Ko'rsatma. Avval $\frac{ds}{dx}$ topilsin.

Javoblar: 1) $|x| < 1$ bo'lganda $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$; 2) $[-1;1)$ bo'lganda $-\ln(1-x)$.

§5. Teylor va Makloren qatorlari

Quyidagi berilgan

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots \quad (1)$$

darajali qatorning yig'indisi $(x_0 - R, x_0 + R)$ yaqinlashish oralig'ida ixtiyoriy marta differensiallanuvchi biror $S(x)$ funksiyani aniqlashi ma'lum. Bunga aksincha masalani, ya'ni yig'indisi berilgan $f(x)$ funksiyaga teng bo'lgan darajali qatorni topish masalasini qaraymiz. Bunda $f(x)$ funksiya biror $x = x_0$ nuqta va uning biror atrofida ixtiyoriy marta differensiallanuvchi deb hisoblanadi.

Aytaylik $x = x_0$ nuqtaning biror atrofida

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots \quad (2)$$

tenglik o'rinli bo'lsin. Bundagi $a_n (n = 0,1,2,\ldots)$ koeffitsientlarni topamiz. Berilgan qatorda $x = x_0$ deb olsak, u holda

$$a_0 = f(x_0)$$

bo'ladi. (2) darajali qatorni hadlab differensiallab

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots$$

tenglikni hosil qilamiz va unda $x = x_0$ deb olib

$$a_1 = f'(x)$$

ni topamiz. Oxirgi qatorni yana differensiallab

$$f''(x) = 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \cdots$$

darajali qatorni hosil qilamiz va unda $x = x_0$ deb olib

$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{1 \cdot 2} = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

ni topamiz. Bu jarayonni davom ettirib

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, n = 1,2,3,\ldots$$

ni hosil qilamiz. Topilgan koeffitsientlardan foydalanib

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \quad (3)$$

ni hosil qilamiz.

Bu darajali qator $f(x)$ funksiya uchun Teylor qatori deb ataladi.

Berilgan $f(x)$ funksiya bo'yicha hosil qilingan (3) Teylor qatorini qarayotganimizda quyidagi 3 hol bo'lishi mumkin:

-(3) darajali qator $x = x_0$ nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda uzoqlashuvchi;

-(3) qator yaqinlashuvchi, ammo uning yig'indisi berilgan $f(x)$ funksiyadan farqli boshqa funksiyani ifodalaydi;

-(3) qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi berilgan $f(x)$ funksiyaga teng. Demak,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \ldots$$

Ma'lumki, biz ilgari

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + $$
$$+ R_n(x)$$

Teylor formulasi bilan tanishganmiz. Bu yerda $R_n(x)$ qoldiq had deb ataladi va u quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[x_0 + 0(x - x_0)], 0 < \theta < 1.$$

Bunda $n \to \infty$ bo'lganda $R_n(x) \to 0$.

Agar Teylor qatorida $x_0 = 0$ deb olsak, u holda Teylor qatorning xususiy holi bo'lgan quyidagi Makloren qatori hosil bo'ladi.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \cdots$$

Bunday ko'rinishdagi darajali qatorlar bir qator tatbiqlarga ega.

Ba'zi hollarda $\int_a^b f(x)dx$ integral ostidagi $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi elementar funksiya bo'lmaydi va uni hisoblash qiyin bo'ladi. Bunday hollarda $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi darajali qatorlar orqali ifodalanishi mumkin. Buning uchun integral ostidagi $f(x)$ funksiyaning Makloren qatorini topamiz va uni hadlab integrallaymiz.

Darajali qatorlardan differensial tenglamalarni yechishda ham foydalanish mumkin. Agar berilgan differensial tenglamaning y umumiy yechimini aniq topish usuli bizga noma'lum bo'lsa yoki y elementar funksiyalarda ifodalanmasa, unda yechimni darajali qatorlar yordamida topish mumkin. Buning uchun bu yechim

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

darajali qator ko'rinishida izlanadi. Bu yerdagi noma'lum $c_n(n = 0,1,2,\ldots)$ koeffitsientlar darajali qatorni berilgan differensial tenglamaga qo'yish va hosil bo'lgan tenglikning ikki tomonidagi x o'zgruvchining bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirish orqali topilishi mumkin.

Misollar:

1. $f(x) = sinx$ funksiya Makloren qatoriga yoyilsin.

Yechish: Dastlab $f(x) = sinx$ funksiyaning turli tartibli hosilalarini topamiz va ularni $x = 0$ bo'lgandagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$f(x) = sinx, f(0) = sin0 = 1,$

$f'(x) = cosx = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f'(0) = cos0 = 1;$

$f''(x) = -sinx = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f''(0) = 0;$

$f'''(x) = -cosx = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f'''(0) = -1;$

$f^{IV}(x) = sinx = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{IV}(0) = 0;$

……………………………………………………………

$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$

Bulardan berilgan funksiyaning juft tartibli barcha hosilalari $x = 0$ bo'lganda nolga tengligini ko'rish mumkin. Shuning uchun berilgan funksiyani Makloren qatoriga yoyilmasida faqat x ning toq darajalari qatnashadi.

Uni yozamiz:

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

2. $f(x) = e^x$ funksiya darajali qatorga yoyilsin.

Yechish: Berilgan funksiyani va uning hosilalarini $x = 0$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz.

$f(x) = e^x; \; f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x;$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

Demak, $f(x) = e^x$ funksiyaning darajali qatorga yoyilmasi quyidagicha bo'ladi:

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

3. $f(x) = e^{-x}$ funksiya uchun Makloren qatori yozilsin.

Yechish: Berilgan funksiyani Makloren qatorini yozish uchun $f(x) = e^x$ funksiya uchun yozilgan Makloren qatoridagi x ni $-x$ bilan almashtirish kifoya. Demak,

$$f(x) = e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

4. $f(x) = cosx$ funksiya Makloren qatoriga yoyilsin.

Yechish: Bu funksiya uchun ham ixtiyoriy tartibli hosila mavjud va ular

$f'(x) = -sinx, f''(x) = -cosx, \quad f'''(x) = sinx, \quad f'^{v}(x) = cosx,$
$f^{v}(x) = -sinx, \ldots, f^{(n+4)}(x) = f^{(n)}(x), \ n = 0,1,2, \ldots$

tengliklar bilan aniqlanadi. Bu yerda quyidagi tengliklarga eag bo'lamiz:

$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1, f'''(0) = 0, f'^{v}(0) = 1, \ldots,$
$, f^{(2n)}(0) = (-1)^n, \ f^{(2n+1)}(0) = 0.$

$f(x) = cosx$ funksiya uchun ham uning hosilalarini

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$$

ko'rinishda yozish mumkinligini e'tiborga olib ixtiyoriy x uchun $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$ ekanligini ko'ramiz. Demak, $f(x) = cosx$ funksiyaning Makloren qatori $(-\infty; +\infty)$ oraliqda yaqinlashuvchi va

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots$$

5. $f(x) = (1 + x)^m$ funksiya darajali qatorga yoyilsin.

Yechish: Bu funksiyani hosilalarini topamiz:

$f'(x) = m(1 + x)^{m-1}, \ f''(x) = m(m - 1)(1 + x)^{m-2},$
$f'''(x) = m(m - 1)(m - 2)(1 + x)^{m-3}, \ldots,$

....

$$f^{(n)}(x) = m(m - 1)(m - 2) \cdot \ldots \cdot (m - n + 1)(1 + x)^{m-n}, n = 0,1,2 \ldots$$

Berilgan funksiyani va uning hosilalarini $x = 0$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz.

$f(0) = 1, f'(0) = m, \quad f''(0) = m(m-1), \quad f'''(0) = m(m-1)\cdot$
$\cdot(m-2), ..., f^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2)\cdot ...\cdot(m-n+1).$

Bularni berilgan funksiya uchun Makloren qatorini yozish formulasiga qo'yamiz. Natijada,

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots +$$
$$+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

qator hosil bo'ladi. Bu qatorni binomial qator deb ataladi.

6. $f(x) = \ln(1+x)$ funksiya uchun Makloren qatori yozilsin.

Yechish: Berilgan funksiyani va uning hosilalrini $x = 0$ nuqtadagi qiymatlarini topamiz:

$$f(x) = \ln(1+x), \quad f(0) = \ln(1+0) = ln1 = 0;$$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1;$$
$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(0) = -1;$$
$$f'''(x) = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^2}, \quad f'''(0) = 1\cdot 2;$$
$$f^{IV}(x) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{IV}(0) = -1\cdot 2\cdot 3;$$
$$f^{V}(x) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5}, \quad f^{V}(0) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4;$$

... ...

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f^n(0) = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$$

Topilganlarni Makloren qatori formulasiga qo'yamiz:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

7. $f(x) = sinx$ funksiya uchun yozilgan Makloren qatoridan foydalanib $sin10°$ ni qiymatini 10^{-5} gacha aniqlikda hisoblansin.

Yechish: $10° = \frac{\pi}{18} \approx 0{,}174533$ bo'lgani uchun,

$$sin10° = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}(\frac{\pi}{18})^3 + \frac{1}{5!}(\frac{\pi}{18})^5 - \frac{1}{7!}(\frac{\pi}{18})^7 + \cdots$$

Birinchi ikkita had bilan chegaralanib, quyidagi taqribiy tenglikni hosil qilamiz:

$$\sin 10^\circ = \sin\frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 = 0{,}173647.$$

8. $\int_0^a e^{-x^2}dx$ integral hisoblansin.

Yechish: Bu integral ostidagi e^{-x^2} funksiyaning boshlang'ich funksiyasi elementar funksiya bo'lmaydi. Shuning uchun bu integralni hisoblashda e^x ning yoyilmasidagi x ni $-x^2$ bilan almashtirib, integral ostidagi funksiyani qatorga yozamiz:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$$

Bu tenglikni ikkala tomonini 0 dan a gacha chegarada integrallab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_0^a e^{-x^2}dx = \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1!\cdot 3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \cdots\right)\Bigg|_0^a = \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1!\cdot 3} + \frac{a^5}{2!\cdot 5} - \frac{a^7}{3!\cdot 7} + \cdots$$

Bu tenglikdan foydalanib a ning istalgan qiymatida berilgan integralni ixtiyoriy darajada aniqlik bilan hisoblash mumkin.

9. $\int_0^a \frac{\sin x}{x}dx$ integral hisoblansin.

Yechish: Dastlab $\sin x$ uchun yozilgan qatorni har bir hadini x ga hadma-had bo'lib $\frac{\sin x}{x}$ uchun qatorni hosil qilamiz.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

bo'lganligi uchun

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

qatorni hosil qilamiz. Bu qator x ning barcha qiymatlarida yaqinlashadi. Uni hadlab integrallasak:

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}dx = a - \frac{a^3}{3!\cdot 3} + \frac{a^5}{5!\cdot 5} - \frac{a^7}{7!\cdot 7} + \cdots$$

hosil bo'ladi. Bu yerda a har qanday bo'lganda ham qatorning yig'indisini istalgan darajada aniqlik bilan hisoblash mumkin.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. $f(x) = e^{-x}$ funksiyani darajali qatorga yoying.

Javob: $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots$

2. $f_1(x) = e^x$ va $f_2(x) = e^{-x}$ funksiyalarni darajali qatorga yoyilmasi dan foydalanib $\varphi_1(x) = shx$ va $\varphi_2(x) = chx$ larni darajali qatorga yoyilmasi yozilsin.

Javob: $shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$; $chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$.

3. $f(x) = (1 + x)^m$ funksiya uchun yozilgan binomial qatordan foydalanib $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$ va $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ funksiyalar darajali qatorga yoyilsin.

Javob: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$;

$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2 - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3 + \cdots$.

4. $f(x) = \ln(1 - x)$ funksiya darajali qatorga yoyilsin.

Javob: $\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots$.

5. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ni x ning darajalari bo'yicha qatorga yoying.

Javob: $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$.

6. $f(x) = arctgx$ ni x ning darajalari bo'yicha qatorga yoying.

Javob: $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad (-1 \le x \le 1)$.

7. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ni x ning darajalari bo'yicha qatorga yoying.

Javob: $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1)$.

8. $cos10°$ ni 0,0001 gacha aniqlik bilan hisoblang.

Javob: 0,9848.

9. $sin1°$ ni 0,0001 gacha aniqlik bilan hisoblang.

Javob: 0,0175.

10. $arctg\frac{1}{5}$ ni 0,0001 gacha aniqlik bilan hisoblang.

Javob: 0,1973.

11. $f(x) = arcsinx$ funksiyani darajali qatorga yoying va undan foydalanib $arcsin1$ ni 0,0001 gacha aniqlik bilan hisoblang.

Javob: 1,5708.

12. $\int_0^1 \frac{sinx}{x} dx$ ni 10^{-5} gacha aniqlik bilan hisoblang.

Javob: 0,94608.

13. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ ni 0,0001 gacha aniqlik bilan hisoblang.

Javob: 0,7468.

14. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x^2)\, dx$ ni 0,0001 gacha aniqlik bilan hisoblang.

Javob: 0,1571.

§6. Fur'ye qatorlari

$$\frac{a_0}{2} + a_1 cosx + b_1 sinx + a_2 cos2x + b_2 sin2x + \dots$$

yoki

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

funksional qatorga trigonometrik qator deb ataladi. a_0, a_n va b_n (n=1,2,3,...) sonlar trigonometrik qatorning koyfitsientlari deb ataladi. Agar (1) qator yaqinlashsa, uning yig'indisi davri 2π bo'lgan $f(x)$ davriy funksiya bo'ladi, chunki $\cos nx$ va $\sin nx$ lar davri 2π bo'lgan davriy funksiyalardir.

Aytaylik funksiya 2π davrlik davriy funksiya bo'lsin. Qanday shartlar bajarilganda $f(x)$ uchun berilgan funksiyaga yaqinlashuvchi trigonometrik qatorni topish mumkin degan savolga javob beraylik.

Davri 2π bolgan $f(x)$ davriy funksiya $(-\pi,\pi)$ oraliqda shu funksiyaga yaqinlashuvchi trigonometrik qatorni tasvirlasin, yani shu qatorni yig'indisi bo'lsin:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (2).$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi funksiyadan olingan integral (2) qator hadlaridan olingan integrallarning yig'indisiga teng bo'lsin deylik. Bu esa berilgan trigonometrik qatorning koyfitsentlaridan tuzilgan sonli qator, absolut yaqinlashganda, yani

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + |a_1| + |b_1| + |a_2| + |b_2| + \dots + |a_n| + |b_n| + \dots \qquad (3)$$

musbat hadli qator yaqinlashganda bajariladi.

Bu holda (1) qator kuchaytirilgan, demak, uni $-\pi$ dan π gacha hadlab integrallash mumkin. Bundan a_0 koeffitsentni hisoblash uchun foydalanamiz. (2) tenglikning ikkala qismini $-\pi$ dan π gacha integrallaymiz:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx\,dx\right).$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi integrallarni har birini alohida-alohida hisoblaymiz:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx = \pi a_0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\,dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} cosnx\,dx = a_n \frac{sin\,nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx\,dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = -b_n \frac{cos\,nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Demak,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0,$$

Bundan esa,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

Qatorning qolgan koeffitsentlarini topish uchun bizga bazi bir aniq integrallar kerak bo'ladi.

Agar n va k butun son bo'lsa, quyidagi tengliklar o'rinlidir: agar $n \neq k$ bo'lsa,

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} cosnx \cos k\,dx = 0,\\ &\int_{-\pi}^{\pi} cosnx \sin k\,dx = 0,\\ &\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin k\,dx = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Agar $n = k$ bo'lsa,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = -\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx \qquad (11)$$

bo'lishi bizga ma'lun.

Agar $f(x)$ toq funksiya Fur'ye qatoriga yoyilsa, $f(x)\cos kx$ ko'paytma ham toq, $f(x)\sin kx$ esa juft funksiya bo'ladi, demak,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx = 0 \qquad (12)$$

ya'ni toq funksiyaning Fur'ye qatori "faqat sinuslarni" o'z ichiga oladi.

Agar juft funksiya Fur'ye qatoriga yoyilsa, $f(x)\sin kx$ funksiya toq, $f(x)\cos kx$ esa juft funksiya bo'ladi, demak,

$$\left.\begin{aligned} a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,\\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

ya'ni, juft funksiyalarning Fur'ye qatori "faqat kosinuslarni" o'z ichiga oladi.

$f(x)$ funksiya davri $2l$, yani 2π dan farqli bo'lgan davriy funksiya bo'lsa, u holda uni Fur'ye qatoriga yoyish uchun, dastlab

$$x = \frac{l}{\pi}t$$

almashtirish qilamiz. U holda $f(\frac{lt}{\pi})$ funksiya t ning davri 2π bo'lgan davriy funksiyasi bo'ladi. Uni $-\pi \le x \le \pi$ kesmada Fur'ye qatoriga yoyish mumkin:

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt + b_k\sin kt) \qquad (14)$$

Bunda

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)dt, \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos kt\ dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\sin kt\ dt.$$

Agar eski o'zgaruvchi x ga qaytsak $x = \frac{l}{\pi}t$ dan $t = x\frac{\pi}{l}$, $dt = \frac{\pi}{l}\,dx$ bo'lib, bu holda a_0, a_k va b_k lar uchun quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi k x}{l}dx \\ b_k &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Natijada (14) formula quyidagicha ko'rinishni oladi:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x + b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right) \qquad (16)$$

Mavzuga oid misollar bilan berilgan topshiriqlar

1. Davri 2π bo'lgan $f(x)$ davriy funksiya quyidagicha aniqlangan:

$$f(x) = x, \qquad -\pi < x < \pi.$$

Bu funksiya Fur'ye qatoriga yoyilsin.

Yechish: Berilgan funksiya bo'lakli monoton va chegaralangan. Demak, uni Fur'ye qatoriga yoyish mumkin. Dastlab Fur'ye koeffitsentlarini topamiz:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{2\pi} - \frac{\pi^2}{2\pi} = 0;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\,dx = \begin{bmatrix} u = x, du = dx \\ dv = \cos kx\,dx \\ v = \frac{1}{k}\sin kx \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{k}\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{k}\sin k\pi + \frac{\pi}{k}\sin(-k\pi) + \frac{\cos kx}{k^2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(0 + 0 + \frac{\cos k\pi}{k^2} - \frac{\cos k\pi}{k^2}\right) = 0;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx\right] = (-1)^{k+1}\cdot\frac{2}{k}.$$

a_0, a_k, b_k larning qiymatlarini Fur'ye qatoriga qo'yamiz:

$$f(x) = x = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + (-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k} + \dots\right]$$

Bu tenglik uzilish niqtalaridan boshqa hamma nuqtalarda o'rinlidir. Qatorning har bir uzilish nuqtadagi yig'indisi, uning o'ngdan va chapdan limitlarining o'rta arifmetigiga, ya'ni nolga teng.

2. Davri 2π bo'lgan $f(x)$ davriy funksiya quyidagicha aniqlangan:

$$f(x)=\begin{cases}0, & agar \quad -\pi<x\le 0\\ x, & agar \quad 0<x\le\pi\end{cases}$$

Bu funksiya Fur'ye qatoriga yoyilsin.

Yechish: Fur'ye koeffitsentlarini topamiz:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\cdot dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2};$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos kx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k}\bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx\right]=\frac{1}{k\pi}\frac{\cos kx}{k}\bigg|_0^{\pi}=\begin{cases}k\ toq\ bo'lsa, & -\frac{2}{k^2\pi},\\ k\ juft\ bo'lsa, & 0.\end{cases}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\sin kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos kx}{k}\bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx\right]=$$

$$=-\frac{1}{k}\cos k\pi=\begin{cases}\frac{1}{k}, agat\ k\ toq\ bo'lsa,\\ -\frac{1}{k}, agar\ k\ juft\ bo'lsa.\end{cases}$$

Topilganlarni Fur'ye qatori formulasiga qo'yamiz:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right)+\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots\right)$$

Xosil bo'lgan tenglikda $x=0$ deb olsak, u holda

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

3. $0<x\le 2\pi$ kesmada $f(x)=x$ tenglik bilan berilgan 2π davrli funksiya Fur'ye qatoriga yoyilsin.

Yechish: Bu funksiya $[-\pi;\pi]$ kesmada ikkita formula bilan beriladi: ya'ni,

$$F(x)=\begin{cases}x+2\pi, & -\pi\le x\le 0,\\ x, & agar\ 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Ammo berilgan funksiya $[0,2\pi)$ oraliqda bitta $f(x)=x$ formula bilan ham berilishi mumkin. Fur'ye koeffitsentlarini topishda integrallash oralig'i $(-\pi,\ \pi)$ ni $(\lambda,\lambda+2\pi)$ integrallash oralig'i bilan almashtiramiz. Bunda Fur'ye koeffitsentlari quyidagicha bo'ladi:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\,dx, \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\cos kx\;dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

Bunda λ – ixtiyoriy son.

$\lambda = 0$ deb olib, berilgan funksiya uchun Fur'ye koeffitsentlarini topamiz:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\;dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos kx\;dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = 0;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\;dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin kx\;dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = -\frac{2}{k}.$$

Demak,

$$f(x) = \pi - 2\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x - \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{2}{4}\sin 4x - \frac{2}{5}\sin 5x - \cdots.$$

4. $f(x) = [\cos x]$ funksiya Fur'ye qatoriga yoyilsin.

Yechish: Berilgan funksiya $(-\infty;+\infty)$ da uzluksiz va $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in z)$ dan farqli barcha nuqtalarda bo'lakli-uzluksiz xosilalarga ega. Bundan tashqari berilgan funksiya davriy va uni davri π ga teng. Shuning uchun berilgan funksiyaning Fur'ye qatori $(-\infty;+\infty)$ da berilgan funksiyaga yaqinlashadi.

Funksiya juft bo'lqani uchun,

$$b_n = 0, \qquad a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\;dx = \frac{4}{\pi}sinx\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}sin\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sin 0 = \frac{4}{\pi};$$

Teorema. Ikki funksiya yig'indisining D soha bo'yicha olingan ikki o'lchovli integrali ularning har biridan shu D soha bo'yicha olingan ikki o'lchovli integrallar yig'indisiga teng:

$$\iint_D [f(x,y) + \varphi(x,y)]\, ds = \iint_D f(x,y)\, ds + \iint_D \varphi(x,y)\, ds \qquad (4)$$

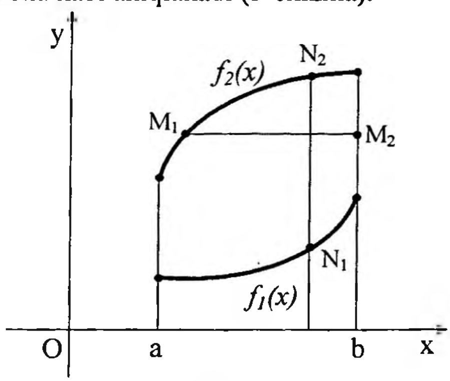
Teorema. O'zgarmas ko'paytuvchini ikki o'lchovli integral belgisining oldiga chiqarish mumkin: agar c o'zgarmas son bo'lsa, u holda:

$$\iint_D cf(x,y)\, ds = c\iint_D f(x,y)\, ds \qquad (5)$$

Teorema. Agar$D$ soha ichki umumiy nuqtalarga ega bo'lmagan D_1 va D_2 sohaga bo'lingan bo'lsa va $f(x,y)$ funksiya D sohaning barcha nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, u holda:

$$\iint_D f(x,y)\, ds = \iint_{D_1} f(x,y)\, ds + \iint_{D_2} f(x,y)\, ds \qquad (6)$$

$y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)\big(\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)\big)$, $x = a$, $x = b\ (a < b)$ chiziqlar bilan chegaralangan D sohani Oy o'qqa parallel bo'lgan har qanday to'g'ri chiziq (D sohaning ichki nuqtasidan o'tuvchi) uni faqat ikkita N_1 va N_2 nuqtalardagina kesib o'tsa, u holda D sohani Oy o'q yo'nalishida to'g'ri bo'lgan soha deyiladi. Ox o'q yo'nalishida to'g'ri bo'lgan soha ham shu kabi aniqlanadi (3-chizma).



3-chizma

Ham Ox, ham Oy o'qlar yo'nalishida to'g'ri bo'lgan sohani qisqacha to'g'ri soha deb ataymiz (3-chizma).

$f(x,y)$ funksiya D sohada uzluksiz bo'lsin. Quyidagi ifodani qaraymiz:

$$J_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \qquad (7)$$

Bunga $f(x,y)$ funksiyaning D soha bo'yicha olingan ikki karrali integrali deb ataladi. Uni hisoblash uchun x ni o'zgarmas deb qarab, qavs ichidagi y ga bog'liq integralni hisoblaymiz. Integrallash natijasida x ga bog'liq funksiya hosil bo'ladi:

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (8)$$

Bu funksiyani x bo'yicha a dan b gacha chegarada integrallaymiz.

$$J_D = \int_a^b \Phi(x)dx \qquad (9)$$

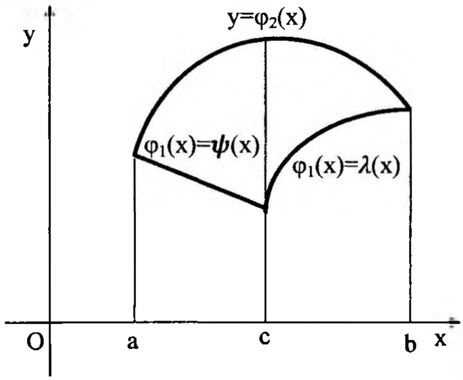
Natijada biror o'zgarmas son hjosil bo'ladi.

D soha x o'zgaradigan (a dan b gacha) oraliqning hammasida $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ funksiyalardan birini analitik ifodalab bo'lmaydigan soha bo'lib qolishi mumkin.

Masalan, $a < c < b$ bo'lib, $[a,c]$ kesmada $\varphi_1(x) = \psi(x)$, $[c,b]$ kesmada $\varphi_1(x) = \lambda(x)$ bo'lsin. Bunda $\psi(x)$ va $\lambda(x)$ funksiyalar analitik usulda berilgan (4-chizma). Bu holda ikki karrali integral quyidagicha yoziladi:

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^c \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx + \int_c^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx =$$

$$= \int_a^c \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx + \int_c^b \left(\int_{\lambda(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \qquad (10)$$



4-chizma

Ikki karrali integral bir qator xossalarga ega:

1-xossa. Agar Oy o'q yo'nalishida to'g'ri bo'lgan D sohani Oy yoki Ox o'qqa parallel to'g'ri chiziq bilan ikki D_1 va D_2 sohalarga bo'linsa, u holda D soha bo'yicha olingan ikki karrali J_D integral D_1 va D_2 sohalar bo'yicha olingan ikki karrali integrallarning yig'indisiga teng bo'ladi, ya'ni

$$J_D = J_{D_1} + J_{D_2} \qquad (11)$$

Natija. Agar D sohani koordinata o'qlariga parallel to'g'ri chiziqlar bilan istagancha $D_1, D_2, \dots . D_i$ to'g'ri sohalarga bo'lish mumkin bo'lsa, u holda

$$J_D = J_{D_1} + J_{D_2} + \dots + J_{D_i} \qquad (12)$$

o'rinlidir.

2-xossa. $f(x,y)$ funksiyaning D sohadagi eng kichik va eng katta qiymatlari m va M ga, yuzi esa S ga teng bo'lsa, u holda quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$mS \le \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \le MS \qquad (13)$$

3-xossa. $f(x,y)$ uzluksiz funksiyaning D soha bo'yicha olingan ikki karrali integrali, D sohaning S yuzini funksiysning D sohadan olingan biror P nuqtadagi qiymatiga ko'paytirilganiga teng, ya'ni

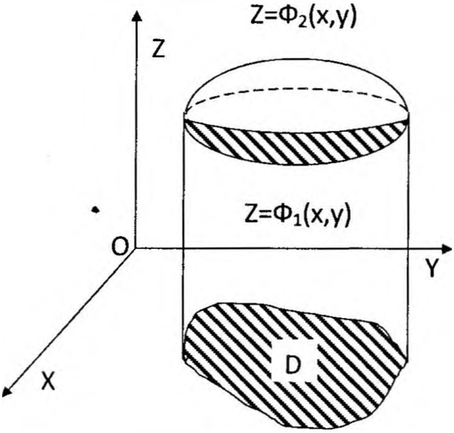
$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = f(P) \cdot S \qquad (14)$$

Teorema. $f(x,y)$ uzluksiz funksiyaning D to'g'ri soha bo'yicha olingan ikki o'lchovli integrali funksiyaning o'sha soha bo'yicha olingan ikki karrali integraliga teng, ya'ni

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \qquad (15)$$

$$V = \iint_D f(x,y)ds = \iint_D f(x,y)dxdy$$

Ikki o'lchovli integral geometrik jihatdan $Z = f(x,y)$ sirt, $Z = 0$ tekislik va yasovchisi Oz o'qqa parallel, yo'naltiruvchisi esa D sohaning chegarasidan iborat bo'lgan silindrik sirt bilan chegaralangan jismning hajmini bildiradi. Shuning uchun ikki o'lchovli integraldan jismlarning hajmlarini topishda foydalanish mumkin.



5-chizma

Agar hajmi izlanayotgan jism, yuqoridan $Z = \Phi_2(x,y) \geq 0$ sirt, quyidan $Z = \Phi_1(x,y) \geq 0$ sirt bilan chegaralangan va ikkala sirtning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi D sohadan iborat bo'lsa, u holda bu jismning V hajmi ikkita silindrik jism hajmlarining ayirmasiga teng bo'ladi; bu silindrik jismlardan birinchisining pastki asosi D sohadan, ustki asosi $Z = \Phi_2(x, y)$ sirtdan, ikkinchisining pastki asosi D sohadan, ustki asosi $Z = \Phi_1(x, y)$ sirtdan iboratdir (5-chizma).

Shunung uchun bu holda V hajm ikkita ikki o'lchovli integrallarning ayirmasiga teng:

$$V = \iint_D \Phi_2(x, y)dxdy - \iint_D \Phi_1(x, y)dxdy = \iint_D [\Phi_2(x, y) - \Phi_1(x, y)]dxdy \quad (16)$$

(16) formula $\Phi_1(x, y)$ va $\Phi_2(x, y)$ funksiyalar manfiy bo'lmagandagina emas, balki ular $\Phi_2(x, y) \geq \Phi_1(x, y)$ munosabatni qanoatlantirganda ham o'rinlidir.

Agar D sohada $f(x, y)$ funksiya o'z ishorasini o'zgartirsa, sohani ikki qismga ajratamiz: 1) $f(x, y) \geq 0$ bo'lgan D_1 soha; 2) $f(x, y) \leq 0$ bo'lgan D_2 soha. So'ngra bu sohalar bo'yicha ikki o'lchovli integrallarni hisoblaymiz.

Agar

$$\iint_D f(x, y)dxdy$$

integralda $f(x, y) \equiv 1$,o'lsa, u holda integralning ko'rinishi

$$\iint_D dxdy$$

bo'lib, u D sohaning yuzini bildiradi. Demak,

$$S = \iint_D dxdy$$

Agar D soha to'g'ri soha bo'lsa, u holda yuza

$$S = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right) dx = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]dx$$

ga teng bo'ladi.

$z = f(x, y)$ sirt, $z = 0$ tekislik va yo'naltiruvchisi D sohaning chegarasidan iborat bo'lgan to'g'ri chiziq, yasovchisi esa Oz o'qqa parallel silindrik sirt bilan chegaralangan jismning V hajmi, D soha bo'yicha $f(x, y)$ funksiyadan olingan ikki o'lchovli integralga teng. Ya'ni

$$V = \iint_D f(x,y)ds.$$

Misollar:

1. $\iint_D (x^2 + y^2 + 1)ds$

ikki o'lchovli integral hisoblansin. Bunda D soha $-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$ tengsizliklar bilan berilgan.

Yechish: Bu yerda $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ bo'lib, u D sohada uzluksiz. Shuning uchun berilgan ikki o'lchovli integral mavjud. Uni ikki xil usul bilan hisoblashimiz mumkin.

1-usul.

$$\iint_D (x^2 + y^2 + 1)ds = \int_{-1}^{1} dx \int_0^2 (x^2 + y^2 + 1)dy = \int_{-1}^{1} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} + y\right)\Big|_0^2 dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(2x^2 + \frac{8}{3} + 2\right) dx = \int_{-1}^{1} \left(2x^2 + \frac{14}{3}\right) dx = \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{14}{3}x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} +$$

$$+ \frac{14}{3} + \frac{14}{3} = \frac{32}{3}.$$

2-usul.

$$\iint_D (x^2 + y^2 + 1)ds = \int_0^2 dy \int_{-1}^{1} (x^2 + y^2 + 1)dx = \int_0^2 dy \cdot 2\int_0^1 (x^2 + y^2 + 1)dx =$$

$$= 2\int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 + x\right)\Big|_0^1 dy = 2\int_0^2 \left(\frac{1}{3} + y^2 + 1\right)dy = 2\int_0^2 \left(y^2 + \frac{4}{3}\right)dy =$$

$$2\left(\frac{y^3}{3} + \frac{4}{3}y\right)\Big|_0^2 = 2\left(\frac{8}{3} + \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$

2. $\iint_D x\sqrt{1 + (x^2 - 1)\sin^2 y}\, ds$

integral hisoblansin. Bu yerda D soha $x = 0$, $x = 1$, $y = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\pi}{2}$ chiziqlar bilan chegaralangan.

Yechish: Integral ostidagi funksiya D sohada aniqlangan va uzluksiz. Shuning uchun uning ikki o'lchovli integrali mavjud.

$$\iint\limits_D x\sqrt{1+(x^2-1)\sin^2 y}\,ds = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_0^1 x\sqrt{1+(x^2-1)\sin^2 y}\,dx$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\sin^2 y}\cdot\frac{2}{3}[1+(x^2-1)\sin^2 y]^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 dy = \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 y}\sqrt{(1+(x^2-1)\sin^2 y)^3}\Big|_0^1 dy =$$

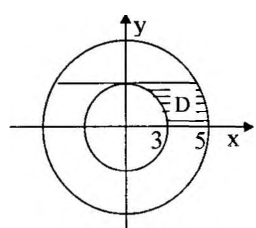
$$= \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 y}(1-\cos^3 y)dy = \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^3 y}{\sin^2 y}dy = \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 y} - \frac{1-\sin^2 y}{\sin^2 y}\cdot cosy\right)dy$$

$$=$$

$$= \frac{1}{3}\left(-ctgy + \frac{1}{\sin y} + \sin y\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\left(1+1-\frac{2}{\sqrt{2}}+1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(3-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{6-2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{6-3\sqrt{2}}{2}\right) = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Biz berilgan integralni hisoblash uchun dastlab "x" bo'yicha, so'ngra "y" bo'yicha integralladik. Agar dastlab "y" bo'yicha integrallamoqchi bo'lsak, u holda $\int\sqrt{1+(x^2-1)\sin^2 y}\,dy$ integralni hisoblab bo'lmas edi.



6-chizma

3. $\iint\limits_D (2x+y)\,ds$

ikki o'lchovli integral hisoblansin. Bu yerda D soha $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=25$ aylanalar va $y=0$, $y=3$ (x>0) to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan.

Yechish: Dastlab D sohani tasvirlaymiz (6-chizma).

$x^2+y^2=9$ va $x^2+y^2=25$ lardan $x_1=\sqrt{9-y^2}$ va $x_2=\sqrt{25-y^2}$ larni hosil qilamiz. Shunday qilib,

$$\iint\limits_D (2x+y)\,ds=\int_0^3 dy\int_{\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}}(2x+y)\,dx=\int_0^3 (x^2+xy)\Big|_{\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}}dy=$$

$$=\int_0^3\left(25-y^2-9+y^2+y\sqrt{25-y^2}-y\sqrt{9-y^2}\right)dy=$$

$$=\int_0^3\left(16+y\sqrt{25-y^2}-y\sqrt{9-y^2}\right)dy=$$

$$=\left[16y-\frac{1}{3}(25-y^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}(9-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^3=\frac{178}{3}.$$

4. $f(x,y)=x+2y$ funksiyadan $y=8x$, $y=\frac{1}{2}x^2$ va $x=1$, $x=3$ chiziqlar bilan chegaralangan D yopiq soha bo'yicha olingan ikki o'lchovli integral hisoblansin.

Yechish: Dastlab D sohani tasvirlaymiz (7-chizma).

$\frac{1}{2}x^2<8x$ tengsizlikni yechib $0<x<16$ ni topamiz. Chizmadan $\varphi_1(x)=\frac{1}{2}x^2$, $\varphi_2(x)=8x$ deb qaraymiz. Bu funksiyalar [1,3] kesmada uzluksizdir. Shuning uchun biz

$$\iint\limits_D f(x,y)\,ds=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

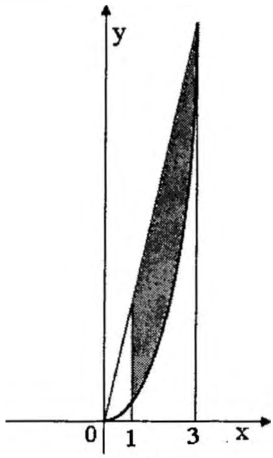
formuladan foydalanamiz. Demak,

$$\iint\limits_D (x+2y)\,ds=\int_1^3 dx\int_{\frac{1}{2}x^2}^{8x}(x+2y)dy=\int_1^3 (xy+y^2)\Big|_{\frac{1}{2}x^2}^{8x}dx=$$

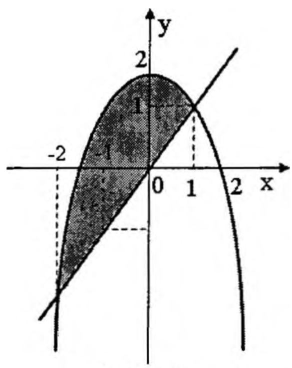
$$= \int_1^3 \left(8x^2 - \frac{x^3}{2} + 64x^2 - \frac{1}{4}x^4\right) dx = \left(24x^3 - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{20}\right)\Bigg|_1^3 = 602{,}1.$$

5. $y = 2 - x^2$, $y = x$ chiziqlar bilan chegaralangan sohaning yuzi topilsin.

Yechish: Berilgan chiziqlarni kesishish nuqtalarini topamiz (8-chizma).



7-chizma



8-chizma

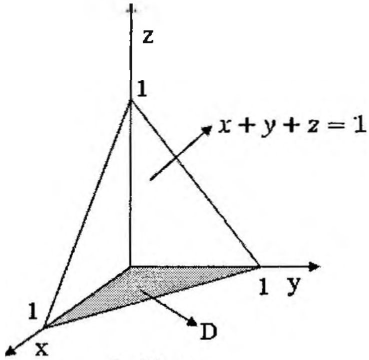
Kesishish nuqtalarida ordinatalar teng, ya'ni $x = 2 - x^2$. Bundan $x^2 + x - 2 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Shunday qilib berilgan chiziqlarni kesishish nuqtalari $M_1(-2; -2)$ va $M_2(1; 1)$ lardan iborat. Demak, izlanayotgan yuza:

$$S = \iint_D dxdy = \int_{-2}^{1}\left(\int_x^{2-x^2} dy\right)dx = \int_{-2}^{1} y\,\Big|_x^{2-x^2} dx = \int_{-2}^{1}(2 - x^2 - x)\,dx =$$

$$= \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 = 4{,}5.$$

6. $x = 0$, $y = 0$, $x + y + z = 1$, $z = 0$ sirtlar bilan chegaralangan jismning hajmi topilsin.

Yechish: Dastlab, berilgan tenglamalar bilan aniqlangan sirtlarni yasaymiz (9-chizma).



9-chizma

Izlanayotgan hajm

$$V = \iint\limits_D (1 - x - y)\, dydx$$

bo'lib, bu yerda D soha $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ chiziqlar bilan chegaralangan uchburchakdan iborat. Undan $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1 - x$ ekanligini topamiz. Shunday qilib, izlanayotgan hajm quyidagicha topiladi.

$$V = \iint\limits_D (1 - x - y)\, dydx = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[1 - x - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[1 - 2x + x^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right] dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2\, dx = -\frac{1}{6}(1-x)^3 \Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Demak, $V = \frac{1}{6}$ kub. birlik.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi ikki karrali integrallar hisoblansin:

1) $\int_0^1 dx \int_x^{2x} (x - y + 1)\, dy;$ 2) $\int_{-2}^4 dy \int_0^y \frac{y^3}{x^2 + y^2} dx;$

3) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{3} (x^2 + 2xy)\, dy;$ 4) $\int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{0}^{y^2} (x + 2y)\, dx;$

5) $\int\limits_{0}^{1} dv \int\limits_{0}^{u} e^{\frac{u}{v}}\, du;$ 6) $\int\limits_{0}^{5} dx \int\limits_{0}^{5-x} \sqrt{4 + x + y}\, dy.$

Javoblar: 1) $\frac{1}{3}$; 2) 6π; 3) 26; 4) $-11{,}2$; 5) $\frac{e-1}{2}$; 5) $\frac{506}{15}$.

2. $\iint\limits_{D} xydxdy$

ikki o'lchovli integral hisoblansin. Bu yerda D soha

1) $x = 0,\ x = a,\ y = 0,\ y = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'g'ri to'rtburchak;

2) $4x^2 + y^2 \le 4$ ellips;

3) $y = x - 4$ to'g'ri chiziq va $y^2 = 2x$ parabola bilan chegaralangan.

Javoblar: 1) $\frac{a^2b^2}{4}$; 2) 0; 3) 90.

1. Quyidagi ikki o'lchovli integrallar hisoblansin:

1) $\iint\limits_{D} x\, lnydxdy$ D soha: $0 \le x \le 1,\quad 1 \le y \le e;$

2) $\iint\limits_{D} (\cos^2 x + \sin^2 y)\, dxdy;$ D soha: $0 \le x \le \frac{\pi}{4},\quad 0 \le y \le \frac{\pi}{4};$

3) $\iint\limits_{D} (x - y)\, dxdy;$ D soha: $y = 2 - x^2,\quad y = 2x - 1$

chiziqlar bilan chegaralangan.

4) $\iint\limits_{D} (x + 2y)\, dxdy;$ D soha: $y = x,\quad y = 2x,\quad x = 2,\quad x = 3$

chiziqlar bilan chegaralangan.

Javoblar: 1) 8; 2) $\frac{\pi^2}{16}$; 3) $4\frac{4}{15}$; 4) $25\frac{1}{3}$.

4. Quyidagi integrallar hisoblansin:

1) $\int\limits_0^1\int\limits_1^2(x^2+y^2)\,dxdy;$ 2) $\int\limits_3^4\int\limits_1^2\frac{dxdy}{(x+y)^2};$ 3) $\int\limits_1^2\int\limits_x^{x\sqrt{3}} xy\,dxdy.$

Javoblar: 1) $\frac{8}{3}$; 2) $ln\frac{25}{24}$; 3) $\frac{15}{4}$.

5. $y^2=2x$ parabola va $y=x$ to'g'ri chiziq bilan chgaralangan shaklning yuzi hisoblansin.

Javob: $\frac{2}{3}$.

6. $y^2=4ax,\ x+y=3a,\ y=0$ chiziqlar bilan chgaralangan shaklning yuzi hisoblansin.

Javob: $\frac{10a^2}{3}$.

7. $y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=0$ chiziqlar bilan chgaralangan shaklning yuzi hisoblansin.

Javob: $\sqrt{2}-1$.

8. $y=x^2$ parabola va $y=x+2$ to'g'ri chiziq bilan chgaralangan yuza topilsin.

Javob: 4,5.

9. Quyidagi chiziqlar bilan chgaralangan yuzlar ikki o'lchovli integrallar bilan yozilsin va hisoblansin:

1) $xy=4,\ y=x,\ x=4;$

2) $y=x^2,\ 4y=x^2,\ y=4;$

3) $y=x^2,\ 4y=x^2,\ x=\pm 2;$

4) $y^2=4+x,\ x+3y=0.$

Javoblar: 1) $6-4ln2$; 2) $10\frac{2}{3}$; 3) 4; 4) $20\frac{5}{6}$.

9. Yuzlari

$$1)\ \int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{2-x^2} dy;\qquad 2)\ \int\limits_{-2}^0 dy\int\limits_{y^2-4}^0 dx$$

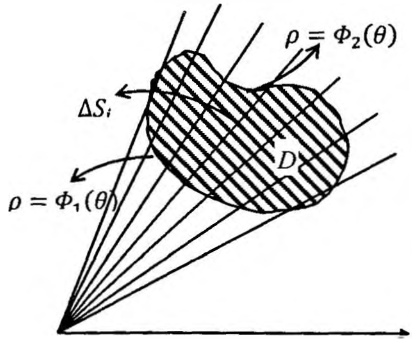
integrallar bilan ifodalanuvchi sohalar yasalsin va yuzlar hisoblansin.

Javoblar: 1) $1\frac{1}{6}$; 2) $\frac{16}{3}$.

Quyidagi sirtlar bilan chgaralangan jismning hajmi hisoblansin:

1) $z = x^2 + y^2, \ x + y = 4, \ x = 0, \ y = 0, \ z = 0;$
2) $z = x^2 + y^2, \ y = x^2, \ y = 1, \ z = 0;$
3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \ x = 0, \ y = 0, \ z = 0;$
4) $z = 0, \ x^2 + y^2 = 1, \ x + y + z = 3.$
Javoblar: 1) $42\frac{2}{3}$; 2) $\frac{88}{105}$; 3) $\frac{abc}{6}$; 4) 3π.

§2. Qutb koordinatalaridagi ikki o'lchvli integral. Sirtning yuzini hisoblash



1-chizma

θ, ρ qutb koordinatalar sistemasida berilgan D sohaning ichki nuqtasidan o'tuvchi har bir nur bu soha chegarasini ikkitadan ortiq nuqtada kesmasin. D soha $\rho = \Phi_1(\theta)$, $\rho = \Phi_2(\theta)$ egri chiziqlar hamda $\theta = \alpha$, va $\theta = \beta$ nurlar bilan chegaralangan. Bunda $\Phi_1(\theta) \leq \Phi_2(\theta)$ va $\alpha < \beta$ deb olamiz (1-chizma).

D sohani biror usul bilan $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ yuzlarga bo'lamiz va

$$V_n = \sum_{k=1}^{\infty} F(P_k) \cdot \Delta S_k \qquad (1)$$

yig'indini tuzamiz. Bunda P_k nuqta S_k yuzning ixtiyoriy nuqtasi. ΔS_k yuzlarning eng kattasini diametri nolga intilgandagi (1) yig'indining limiti $F(\theta, \rho)$ funksiyadan D soha bo'yicha olingan ikki o'lchvli integraldan iborat. Ya'ni,

$$V = \iint\limits_D F(\theta, \rho)\, ds \qquad (2)$$

Bu ikki o'lchvli integral quyidagicha hisoblanadi:

$$V = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\int\limits_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} F(\theta, \rho)\, \rho d\rho \right) d\theta \qquad (3)$$

Agar birinchi integrallashni θ bo'yicha, ikkinchisini ρ bo'yicha bajarsak, yuqoridagi formula

$$V = \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\int\limits_{\omega_1(\rho_1)}^{\omega_2(\rho_2)} F(\theta, \rho)\, d\theta \right) \rho d\rho \qquad (4)$$

ko'rinishda bo'ladi.

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$$

integralni hisoblash talab qilingan bo'lsin. Agar D soha θ, ρ qutb koordinatalaridagi to'g'ri soha bo'lsa, u holda berilgan ikki o'lchovli integralni qutb koordinatalarda berilgan ikki karrali integralni hisoblashga keltirish mumkin. Bunda $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $f(x, y) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = F(\theta, \rho)$ bo'lgani uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\int\limits_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\, \rho d\rho \right) d\theta \qquad (5)$$

Ba'zi hollarda berilgan ikki o'lchovli integralni to'g'ridan-to'g'ri hisoblash ma'lum qiyinchiliklarga olib keladi. Bunday hollarda o'zgaruvchilarni almashtirish orqali uni hisoblash qulay bo'ladi. Bynda biz x va y larni yangi u va v o'zgaruvchilarning funksiyasi sifatida, ya'ni,

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \qquad (6)$$

deb olamiz. Natijada quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} F(u,v)\,|J|dudv \qquad (7)$$

Buni odatda ikki o'lchovli integralda koordinatalarni almashtirish formulalari deb ataladi. Bu formula D soha bo'yicha olingan ikki o'lchovli integralni hisoblashni, uni hisoblashni osonlashtiradigan D' soha bo'yicha olingan ikki o'lchovli integralni hisoblashga olib kelishga imkon beradi. Bu yerda

$$J = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{du} & \frac{d\varphi}{dv} \\ \frac{d\psi}{du} & \frac{d\psi}{dv} \end{vmatrix} \qquad (8)$$

determinant $\varphi(u,v)$ va $\psi(u,v)$ funksiyalarning funksional determinant deb ataladi. Bu determinantni Yakobian deb ham yuritiladi.

Ikki o'lchovli integral yordamida biror $z = f(x,y)$ sirtning yuzini

$$\tau = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dxdy \qquad (9)$$

formula yordamida hisoblash mumkin.

Agar sirtning tenglamasi $x = \mu(y,z)$ yoki $y = \lambda(x,z)$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, u holda sirtning yuzini hisoblash formulalari

$$\sigma = \iint_{D'} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}\, dxdz \qquad (10)$$

$$\sigma = \iint_{D''} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\, dxdz \qquad (11)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunda D' va D'' sohalar berilgan sirt proyeksiyalanadugan Oyz va Oxz tekisliklarda yotuvchi sohalardir.

Misollar:

1. $\iint_D (25 - x^2 - y^2)\, dxdy$ integral hisoblansin. Bu yerda D $y = \sqrt{9 - x^2}$ va $y = \sqrt{16 - x^2}$ yarim aylanalar bilan chegaralangan yopiq sohadan iborat.

Yecish: Bu integralni bevosita hisoblash murakkab bo'lib, bir qator qiyinchiliklar tug'diradi. Shuning uchun uni hisoblashda $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ almashtirishlar yordamida qutb koordinatalariga o'tamiz. D sohada $y \geq 0$. Bu esa $\sin\varphi \geq 0$, $o \leq \varphi \leq \pi$ ekanligini bildiradi. Ikknchi tomondan $\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{16-x^2}$ bo'lib, undan $3 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 4$ yoki $3 \leq r \leq 4$. r bo'yicha $r = 3$ dan $r = 4$ gacha integrallaymiz, φ bo'yicha esa $\varphi = 0$ dan $\varphi = \pi$ gacha integrallaymiz. Bunda D soha $r = 3, r = 4, \varphi = 0, \varphi = \pi$ chiziqlar bilan chegaralangan $r\varphi$ tekislikdagi G sohaga akslanadi. Tegishli almashtirishlarni e'tiborga olsak, $f(x,y) = $ $= (25 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$ funksiyadan $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (25 - r^2)^{\frac{3}{2}}$ funksiya hosil bo'ladi.

Demak,

$$\iint_D (25 - x^2 - y^2)\, dxdy = \iint_G (25 - r^2)^{\frac{3}{2}} r dr d\varphi = \int_0^{\pi} d\varphi \int_3^4 r(25 - r^2)^{\frac{3}{2}} dr =$$

$$= -\int_0^{\pi} \frac{1}{5}(25 - r^2)^{\frac{5}{2}} \Big|_3^4 d\varphi = \frac{781}{5} \int_0^{\pi} d\varphi = \frac{781}{5}\pi.$$

2. Qutb koordinatalariga o`tib $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ integral hisoblansin.

Bu yerda D soxa $x^2+y^2 \leq \alpha$ doiraning birinchi choragidan iborat.

Yechish: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ almashtirish qilamiz:

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\; r\; dr d\varphi =$$

$$= \iint_D r^2 dr d\varphi = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a r^2 dr = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} r^3 \int_0^a d\varphi = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{a^3}{3}\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3\pi}{6}.$$

3.Qutb kordinatalariga o`tib $\iint_D \ln\left(x^2+y^2\right) dxdy$ integral hisoblansin.

Bunda D soha $x^2 + y^2 = e^2$ va $x^2 + y^2 = e^4$ aylanalar bilan chegaralangan halqadan iborat.

Yechish: $\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)dxdy = \iint\limits_D \ln r^2 \bullet r dr d\varphi = 2\iint\limits_D \ln r \cdot r dr d\varphi =$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_e^{e^2} r\ln r dr = 2\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}r^2\ln r - \frac{1}{4}r^2\right] d\varphi = \pi e^2\left(3e^2-1\right).$$

4. $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2xy$ lemniskatta bilan chegaralangan yuza topilsin.

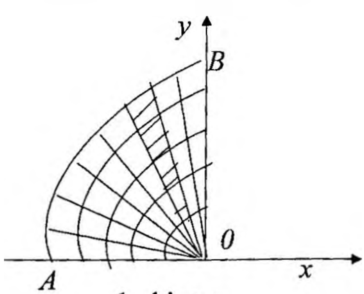
Yechish: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ almashtirishlar yordamida egri chiziq tenglamasini qutb koordinatalari orqali yozamiz. Bunda $r^2 = 2a^2\sin\varphi \cdot \cos\varphi = a^2\sin 2\varphi$ hosil bo`ladi. Bundan tashqari qutb burchagi φ noldan $\frac{\pi}{2}$ gacha o'zgaradi. Shunday qilib,

$$s = 4\iint\limits_D r dr d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r dr = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \Big|_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\varphi d\varphi =$$

$$= -a^2\cos 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

5. $\iint\limits_D r\sin\varphi dr d\varphi$ integral hisoblansin. Bunda D soxa $r = a$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ va $\varphi = \pi$ chiziqlar bilan chegaralangan doiraviy sektordan iborat.

Yechish: $r = a$ aylana va qutb o`qi bilan $\varphi = \frac{\pi}{2}$ va $\varphi = \pi$ burchaklar xosil qiluvchi nurlar yordamida markazi O qutbda joylashgan OAB doiraviy sektorni xosil qilamiz (1-chizma).



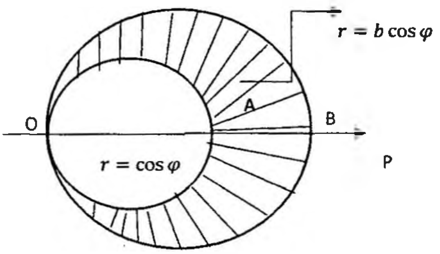
1-chisma

Dastlab r bo'yicha, keyin esa φ bo'yicha berilgan ikki o'lchovli integralni hisoblaymiz va quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\iint\limits_D \left(r\sin\varphi\right) dr d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^a r dr = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin\varphi \frac{r^2}{2}\Big|_0^a d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}(\cos\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{a^2}{2}(-\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2}) = \frac{a^2}{2}(1+0) = \frac{a^2}{2}.$$

6. $r = a\cos\varphi$, $r = b\cos\varphi$ ($b>a>0$) chiziqlar bilan chegaralangan yuza topilsin.



2-chisma

Yechish: Berilgan tenglamalar qutb koordinatalar sistemasida aylanalarni bildiradi. Qutb koordinatalar sistemasida berilgan aylanalarni yasaymiz (2- chizma).

Izlanayotgan yuza ikkala aylanalar bilan xosil qilingan shtrixlangan qismning yuzidan iborat. Uni topamiz:

$$S = \iint\limits_D r dr d\varphi = 2\iint\limits_{ABO} r dr d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{a\cos\varphi}^{b\cos\varphi} r\,dr = \left(b^2 - a^2\right)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi =$$

$$\frac{b^2-a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi)d\varphi = \frac{b^2-a^2}{2}(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}(b^2-a^2).$$

7. $z=1-x^2-y^2$, $y=x$, $y=x\sqrt{3}$, $z=0$ sirtlar bilan chegaralangan jismning 1- oktantada joylashgan bo`lagini xajmi topilsin.

Yechish: Berilgan jism yuqoridan $z=1-x^2-y^2$ paraboloid bilan chegaralangan. Integrallash soxasi D paraboloidning z=0 tekislik bilan kesishishi natijasida xosil bo`lgan $x^2-y^2=1$ aylana yoyi, y=x va y=x$\sqrt{3}$ to`g`ri chiziqlar bilan chegaralangan doiraviy sektordan iborat. Shunday qilib, $v=\iint\limits_D\left(1-x^2-y^2\right)dxdy$

Integrallash soxasi doiraning bir qismidan iborat va integral ostidagi funksiya x^2+y^2 ga bog`liq bo`lgani uchun integralni qutb koordinatalariga o`tib hisoblash qulaydir. $x^2+y^2=1$ aylana tenglamasi qutb kordinatalarida r=1 ko`rinishda va integral ostidagi funksiya $1-r^2$ bo`ladi. $\varphi$ bo`yicha integrallash chegaralari to`g`ri chiziq tenglamalaridan topiladi. Yani $k_1=tg\varphi_1=1$ bo'lib $\varphi_1=\frac{\pi}{4}$ *va* $k_2=\operatorname{tg}\varphi_2=\sqrt{3}$ *bo'lib* $\varphi_2=\frac{\pi}{3}$ bo`ladi. Shunday qilib,

$$v=\iint\limits_D\left(1-r^2\right)rdrd\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_0^1\left(r-r^3\right)dr=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^1d\varphi=$$

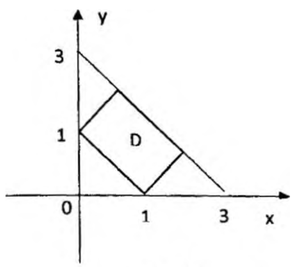
$$=\frac{1}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi=\frac{1}{4}\varphi\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{48} \text{ kub.b.}$$

8. $\iint\limits_D(x+y)^3(x-y)^2dxdy$ integral hisoblansin. Bu yerda D soxa $x+y=1$, $x-y=1$, $x+y=3$, $x-y=-1$ to`g`ri chiziqlar bilan chegaralangan kvadrat (3 - chizma).

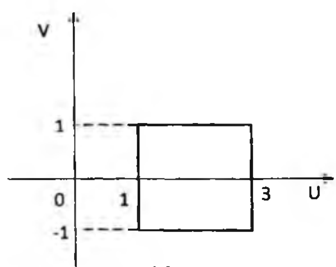
Yechish: $x + y = u$, $x - y = v$ deb belgilaymiz. U holda $x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \frac{1}{2}(u-v)$ bo`ladi. Bu holda almashtirishning Yakobiani (2) quydagicha bo`ladi.

$$y = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial u}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}, \qquad |J| = \frac{1}{2}.$$ Shunday qilib,

$\iint\limits_D (x+y)^3 (x-y)^2 dxdy = \frac{1}{2} \iint u^3 v^2 dudv$. Bu yerda D` soxa ham kvadratdan iborat bo`ladi (4-chizma).



3-chizma



4-chizma

$$\iint\limits_D (x+y)^3 (x-y)^2 dxdy = \frac{1}{2} \int_1^3 u^3 du \int_{-1}^{1} v^2 dv = \frac{1}{2} \int_1^3 u^3 \frac{1}{3} v^3 \Big|_{-1}^{1} du =$$

$$= \frac{1}{6} \int_1^3 u^3 (\ 1+1\ ) du = \frac{1}{12} u^4 \Big|_1^3 = \frac{1}{12}(3^4 - 1^4) = \frac{1}{12}(81-1) = \frac{1}{12} \cdot 80 = \frac{20}{3}.$$

9. $x = 1 - y^2 - z^2$ paraboloidning $y^2+z^2=1$ silindr bilan kesilgan qismi sirtining yuzi topilsin.

Yechish: Integrallash soxasi YOZ tekisligida joylashgan $y^2+z^2=1$ aylanadan iborat. Paraboloid tenglamasidan

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\left(1-y^2-z^2\right)'_y=-2y,\quad \frac{\partial x}{\partial z}=\left(1-y^2-z^2\right)'_z=-2z$$ larni topamiz.

U holda izlanayotgan yuza

$$s=\iint_D\sqrt{1+\left(\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2\right)}dydz=\iint_D\sqrt{1+4(y^2+z^2)}\,dydz.$$

Bu integralni hisoblash uchun qutb koordinatalariga o`tamiz:

$$S=\iint_D\sqrt{1+4\left(y^2+z^2\right)}dydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}dr=\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\left(1+4r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 d\varphi=$$

$$=\frac{5\sqrt{2}-1}{12}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{5\sqrt{2}-1}{12}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{5\sqrt{2}-1}{12}\cdot 2\pi=\frac{5\sqrt{2}-1}{12}\pi \text{ kv.b.}$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

1. $J=\iint_D r\sin\varphi\, drd\varphi$ ikki o`lchovli integral hisoblansin. Bu yerda D soxa: 1) $r\leq 2a\cos\varphi,\quad 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$ yarim doira; 2) $r=2+\cos\varphi$ *va* $r=1$ chiziqlar bilan chegaralangan.

Javoblar: 1) $\frac{2}{3}a^2$; 2) 0.

2. Qutb koordinatalariga o`tib quyidagi integrallar hisoblansin:

1) $\iint_D xy^2dxdy$, D *soxa* $x^2+\left(y-1\right)^2=1$ *va* $x^2+y^2=4y$ aylanalar bilan chegaralangan;

2) $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ D *soxa* $x^2+y^2\leq a^2$ doiradan iborat.

3) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, D *soxa* $x^2+y^2=1$ *va* $x^2+y^2=4$

aylanalar bilan chegaralangan doiraviy xalqadan iborat.

Javoblar: 1)0; 2) $\pi\left(1-b^{-a^2}\right)$; 3)$2\pi$.

3. $\iint\limits_D r^2 \sin\varphi \, drd\varphi$ ikki o`lchovli integral hisoblansin. Bu yerda D soxa:

1)$r = a, r = 2a$ aylanalar bilan chegaralangan;

2) $r=a\sin 2\varphi$ chiziq bilan chegaralangan.

Javoblar: 1)$\frac{14}{3}\pi a^3$ 2) 0.

4. Quyidagi ikki o`lchovli integrallar qutb koordinatalariga o`tish orqali hisoblansin.

1) $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right)dy$;

2 $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2+y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy,$ bu yerda D soxa $x^2+y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ tengsizliklar bilan aniqlangan soxa;

3) $\iint\limits_D arctg\frac{y}{x}dxdy,$ *bu yerda D soxa* $x^2+y^2 \ge 1$ $x^2+y^2 \le 9$ $y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y \le x\sqrt{3}$ chiziqlar bilan chegaralangan xalqaning qismi.

4) $\iint\limits_D (h-2x-3y)dxdy,$ bu yerda D soxa $x^2+y^2 \le R^2$ doirajadan iborat.

Javoblar: 1) $\frac{\pi}{4}\left[\left(1+R^2\right)\ln\left(1+R^2\right)-R^2\right]$; 2) $\frac{\pi(\pi-2)}{8}$; 3) $\frac{\pi^2}{6}$; 4) $\pi R^2 h$.

5. $x^2+y^2+z^2=a^2$ sferaning $x^2+y^2=ay$ silindr ichida joylashgan bo`lagi sirtining yuzi topilsin.

Javob: $4a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ kv.bir.

6. $2z=x^2$ silindr sirtidan $y=\frac{x}{2}$, $y=2x$, $x=2\sqrt{2}$ tekkisliklar bilan kesilgan yuza topilsin.

Javob: 13.

7. $\int_0^1 dx\int_x^{2x} dy$ integralni $x=u(1-v)$, $y=uv$ almashtirish yordamida hisoblang.

Javob: $\frac{1}{2}$.

8. $\iint_D (2x-y)dxdy$ integral hisoblansin. Bu yerda D soxa $x+y=1$, $x+y=2$, $2x-y=1$, $2x-y=3$ chiziqlar bilan chegaralangan parallellogrammdan iborat.

Javob: $\frac{4}{3}$.

Ko`rsatma: $x+y=u$, $2x-y=v$ almashtirishlar qilib Yakobian topilsin.

3. Ikki o`lchovli integralning mexanik tadbiqlari

D soxada biror modda taqsimlangan va D soxaning har qaysi birligi yuziga bu moddaning aniq miqdori to'g'ri keladigan bo'lsin. *D* sohaning ixtiyoriy ΔS yuzini qaraymiz. Shu yuzga to`g`ri keladigan moddaning massasi Δm bo`lsin. U holda $\frac{\Delta m}{\Delta S}$ nisbat moddaning $\Delta S$ soxadagi o`rtacha sirt zichligi deb ataladi.

Endi ΔS yuza kichraya borib, $P(x,y)$ nuqtaga aylanib qoldi deb faraz qilamiz va

$$\lim_{\Delta S \to \infty} \frac{\Delta m}{\Delta S}$$

limitni qaraymiz. Agar bu limit mavjud bo`lsa, u P nuqtaning vaziyatiga, ya'ni bu nuqtaning x va y koordinatalariga bog`liq bo`ladi hamda P nuqtaning qandaydir f(p) funksiyasidan iborat bo`ladi. Bu limitni moddaning P nuqtadagi sirt zichligi deb ataladi. Ya'ni,

$$\lim_{\Delta S \to \infty} \frac{\Delta m}{\Delta S} = f(p) = f(x,y) \qquad (1).$$

Shunday qilib, sirt zichligi soxa nuqtasi koordinatalarinig f(x,y) funksiyasidan iborat.

D soxani ΔS yuzlarga bo`lamiz va har qaysi yuzada $P_i$ nuqtani olamiz; u holda $f(P_i)$ funktsiya $P_i$ nuqtadagi sirt zichligi bo`ladi. $f(P_i)\Delta S_i$ ko'paytma ΔS_i yuzdaga moddaning miqdorini beradi.

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i \qquad (2).$$

Yig`indi D soxaga yoyilgan moddaning taqribiy umumiy qiymatini beradi. Uning aniq qiymatini topish uchun (2) yig`indini $\Delta S_i \to 0$ dagi limitini hisoblaymiz. Demak,

$$M = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i = \iint_D f(P)\, ds = \iint_D f(x,y)\, dxdy \qquad (3).$$

Shunday qilib D soxadagi moddaning umumiy miqdori shu moddaning $f(p) = f(x, y)$ zichligidan D soxa bo`yicha olingan ikki o`lchovli integraldani borat.

Massasi m bo`lgan M moddiy nuqtaning biror O nuqtaga nisbatan J inersiya momenti deb, m massaning M dan O nuqtagacha bo`lgan r masofaning kvadrati bilan ko`paytmasiga aytiladi. Demak,

$$J = mr^2 \qquad (4).$$

$m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ moddiy nuqtalar sistemasining O nuqtaga nisbatan inertsiya momenti shu sistema nuqtalari inertsiya mometlarining yig`indisidan iborat. Ya'ni,

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad (5).$$

D moddiy yassi shaklning koordinatalar boshiga nisbatan inertsiya momenti

$$J_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy \qquad (6)$$

integralga teng.

$$J_{xx} = \iint_D y^2\, dxdy \qquad (7), \qquad J_{yy} = \iint_D x^2\, dxdy \qquad (8)$$

integrallar mos ravishda D shaklning OX va OY o`qlarga nisbatan inertsiya momentlaridir.

Massalari $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ bo`lgan $P_1, P_2, \ldots P_n$ moddiy nuqtalar sistemasi og`irlik markazining koordinatalari

$$X_c = \frac{\Sigma x_i m_i}{\Sigma m_i}, \quad Y_c = \frac{\Sigma y_i m_i}{\Sigma m_i} \qquad (9)$$

formulalar bilan topilishi bizga ma`lum.

Sirt zichligi 1 ga teng bo`lgan yassi shakl og`irlik markazining koordinatalari quyidagi integrallar yordamida hisoblanadi:

$$X_c = \frac{\iint\limits_D x\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy}\ , \quad Y_c = \frac{\iint\limits_D y\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy} \qquad (10).$$

Agar sirt zichligi $j = j(x,y)$ bo`lsa, u holda yuqoridagi formulalar quyidagi ko`rinishni oladi:

$$X_c = \frac{\iint\limits_D j(x,y)x\,dxdy}{\iint\limits_D j(x,y)\,dxdy}; \quad Y_c = \frac{\iint\limits_D j(x,y)y\,dxdy}{\iint\limits_D j(x,y)\,dxdy} \qquad (11).$$

D yassi shaklning Oy va Ox o`qlarga nisbatan statik momentlari

$$M_y = \iint\limits_D j(x,y)x\,dxdy\ , \quad M_x = \iint\limits_D j(x,y)y\,dxdy \qquad (12)$$

integrallardan topiladi.

Misollar.

1. R radiusli doiraviy plastinkaning har bir $P(x,y)$ nuqtasidagi plastinka materialining $f(x,y)$ sirt zichligi doira markazidan (x,y) nuqtagacha bo`lgan masofaga proporsional, ya'ni

$$f(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$$

bo`lsa, bu plastinkaning massasi aniqlansin.

Yechish: D soxadagi moddaning umumiy miqdori shu moddaning f(x,y) zichligidan D soxa bo'yicha olingan ikki o'lchovli integralga teng, ya'ni u

$$M = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

integral bilan hisoblanadi. Demak,

$$M=\iint_D \kappa\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

bo'lib, bu yerda D soxa $x^2+y^2\le R^2$ doiradan iborat. Bu integralni hisoblash uchun qutb koordinatalariga o'tamiz. U holda

$$M=k\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r^2dr\right)d\varphi=k2\pi\frac{r^3}{3}\Big|_0^R=\frac{2}{3}k\pi R^3.$$

2. Radiusi R bo'lgan D doira yuzining O markazga nisbatan inertsiya momenti hisoblansin.

Yechish: D shaklning koordinatalar boshiga nisbatan inertsiya momenti $j_0=\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$

integral bilan hisoblanadi. Bunda D soxa berilgan tekislik bilan ustma-ust tushadi. Bu integralni hisoblash uchun r,φ qutb koordinatalariga o'tamiz. Aylananing qutb koordinatalaridagi tenglamasi $r=R$ dan iborat. Shuning uchun

$$J_0=\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r^2rdr\right)d\varphi=\frac{\pi R^4}{2}.$$

3. Agar $y^2=1-x,\ x=0,\ y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan D moddiy yassi shaklning har bir nuqtasidagi sirt zichligi y ga teng bo'lsa, uning Oy o'qqa nisbatan inertsiya momenti hisoblansin.

Yechish: Har bir nuqtasidagi sirt zichligi $\rho(x,y)$ bo'lgan D shaklning Oy o'qiga nisbatan inertsiya moment $J_y=\iint_D x^2\rho(x,y)dxdy$

formula bilan hisoblanishi ma'lum. Bizda $\rho(x,y)=y$ bo`lgani uchun

$$J_y=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x}} yx^2dy\right)dx=\int_0^1\frac{x^2y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{1-x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x)dx=\frac{1}{24}.$$

4. $r=a(1+cos\varphi)$ kardioida bilan chegaralangan figuraning Ox o`qiga nisbatan inertsiya momenti hisoblansin.

Yechish: D shaklning OX o`qiga nisbatan inertsiya momenti

$$J_x=\iint\limits_D y^2dxdy$$

integralning qiymatiga teng. Bu integralni hisoblash uchun qutb koordinatalariga o`tamiz:

$$J_x=\iint\limits_D y^2\,dxdy=\iint\limits_D r^2\sin^2\varphi\, rdrd\varphi=\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi\int_0^{a(1+cos\varphi)} r^3\,dr=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\frac{1}{4}r^4\Bigg|_0^{a(1+cos\varphi)}d\varphi=\frac{1}{4}a^4\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi(1+cos\varphi)^4\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}a^4\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,(1+4cos\varphi+6\cos^2\varphi+4\cos^3\varphi+\cos^4\varphi)d\varphi=\frac{21}{32}\pi a^4.$$

5. Sirt zichligi hamma nuqtalarida 1 ga teng deb olib,

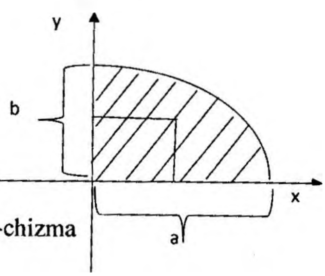
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ellips choragi og`irlik markazining koordinatalari topilsin. (1- chizma).

Yechish: Og`irlik markazining koordinatalarini topish formullaridan foydalanamiz:

$$X_c=\frac{\iint\limits_D x\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy}=\frac{\int\limits_0^a\left(\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy\right)dx}{\int\limits_0^a\left(\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy\right)dx}=\frac{\frac{b}{a}\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}\;x\,dx}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{-\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{3}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{4\ldots}{3\ldots}$$

$$Y_c=\frac{\int\limits_0^a\left(\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy\right)dx}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{4b}{3\pi}.$$



1-chizma

Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan yuzaning og`irlik markazi topilsin:

1) va sinusoidaning bitta yarim to`lqini;

2) $y=x^2$, $x=4$, $y=0$;

3) $y^2=ax$ va $y=x$;

4) $x^2+y^2=a^2$ va $y=0$.

Javoblar: 1) $\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{8}\right)$; 2) $(3;4,8)$; 3) $\left(\frac{2a}{5};\frac{a}{2}\right)$; 4) $\left(0;\frac{4a}{3\pi}\right)$.

2. $y=\frac{x}{2}$, $x=a$, $y=a$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzning Ox o`qqa nisbatan inertsiya momenti topilsin.

Javob: $\frac{17a^4}{96}$.

3. Uchlari $A(0;2a)$, $B(a;0)$ va $C(a;a)$ nuqtalarda bo`lgan uchburchak yuzining Oy o`qqa nisbatan inertsiya momenti topilsin.

Javob: $\frac{a^4}{4}$.

4. Har bir nuqtasidagi sirt zichligi mapkazgacha bo`lgan masofa kvadratiga teskari proporsional bo`lgan doiraviy xalqaning massasi topilsin.

Javob: $m = 2\pi k ln\frac{r_1}{r_2}$.

Eslatma: r_1 va r_2 doiraviy xalqani xosil qilgan aylanalar radiuslari ($r_1 < r_2$).

5. Har bir nuqtasidagi sirt zichligi nuqtadan kichik o`qigacha bo`lgan r masofaga proporsianal bo`lgan ellips shaklidagi plastinkaning massasi topilsin (r=1 bo`lganda zichlik λ ga teng bo`lsin).

Javob: $m=\frac{4}{3}a^2 b\lambda$.

6. Gipotenuzasi 20 ga teng bo`lgan teng yonli to`g`ri burchakli uchburchakning har bir nuqtasidagi sirt zichligi nuqtadan gipotenuzagacha bo`lgan masofaga proporsianal. Shu uchburchakning og`irlik markazi topilsin.

Javob: $\left(0;\frac{a}{2}\right)$.

7. Koordinatalar tekkisliklari va $x+y+z=4$, $x=1$, $y=4$ tekkisliklar bilan chegaralangan bir jinsli prizmaning og`irlik markazi topilsin.

Javob: $\left(\frac{17}{36};\frac{17}{36};\frac{55}{36}\right)$

§4. Uch o`lchovli integral.

Fazoda S yopiq sirt bilan chegaralangan biror V soxa va uning chegarasida biror $f(x,y,z)\geq 0$ uzluksiz funksiya aniqlangan bo`lsin. Bunda biz bu funksiyani qandaydir bir moddaning V soxada taqsimlanish zichligi deb hisoblaymiz. ΔV_i-soxani xajmini bildirsin. V soxani ixtiyoriy ravishda ΔV_i soxalarga bo'lamiz va har bir ΔV_i sohada Pi nuqtani tanlab olamiz. $f(P_i)$ funksiyaning bu nuqtadagi qiymati bo`ladi. Quyidagi yig`indini tuzamiz:

$$\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta V_i \qquad (1)$$

ΔV_i larning eng kattasini diametri nolga intiladigan qilib ΔV_i soxalarni sonini orttirib boramiz. Agar $f(x,y,z)$ uzluksiz bo`lsa (1) integral yig`indining limiti V soxani bo`lish usuliga va undagi $Pi$ nuqtani tanlanishiga bog'liq bo`lmagan holda mavjud bo`ladi hamda uni

$$\iiint_V f(p)\,dv \qquad (2)$$

kabi belginadi. Uni uch o`lchovli integral deb ataladi. Demak, ta'rifga asosan

$$\lim_{diam\Delta v_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta V_i = \iiint_V f(p)\,dv$$

yoki

$$\iiint_V f(p)\,dv = \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz \quad (3).$$

Agar $f(x,y,z)$ funksiya V soxadagi modda taqsimlanishining xajm zichligi deb hisoblansa, (3) integral V xajmga kirgan barcha moddaning massasini bildiradi.

Aytaylik S sirt bilan chegaralangan fazoviy V soha quyidagi xossalarga ega bo'lsin:

1) V sohaning ichki nuqtasi orqali Oz o'qqa parallel qilib o'tkazilgan har qanday to'g'richiziq S sirtni ikkita nuqtada kesadi;

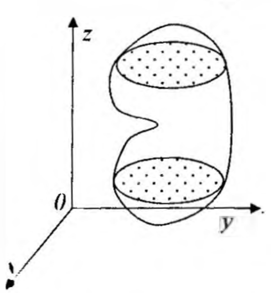
2) V soha butunicha Oxy tekislikka D to'g'ri soha bo'yicha proeksiyalanadi;

3) V sohaning koordinata tekisliklaridan istalgan biriga qarashli tekislik bilan kesilgan qismi ham 1- va 2- xossalarga ega bo'ladi.

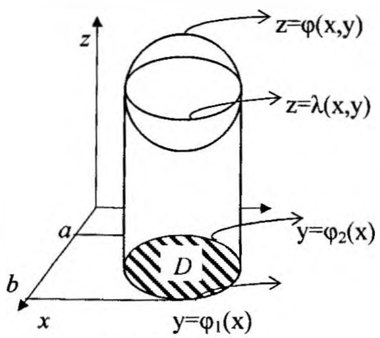
Yuqoridagi xossalarga ega bo'lgan V sohani to'g'ri uch o'lchovli soha deb ataymiz.

Ellipsoid, to'g'ri burchakli parallelepiped, tetraedr va hokazolar to'g'ri uch o'lchovli sohalarga misol bo'la oladi.

1-chizmada noto'g'ri soha, 2-chizmada esa to'g'ri soha tasvirlangan.



1-chizma



2-chizma

V sohani pastdan chegaralovchi sirtning tenglamasi $Z=\lambda\,(x,y)$, yuqoridan chegaralovchi sirtning teng lamasi $Z=\phi(x,y)$ bo'lsin (2-chizma). D soha V sohaning xoy tekislikdagi proeksiyasi bo'lib, y $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, $x=a$, $x=b$ chiziqlar bilan chegaralangan. U holda f(x,y,z) funksiyadan V soha bo'yicha olingan uch karrali integral quyidagicha aniqlanadi:

$$J_V=\int_a^b\left\{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left[\int_{\lambda(x,y)}^{\Phi(x,y)}f(x,y,z)\,dz\right]dy\right\}dx \qquad (4)$$

Uch karrali integral bir qator xossalarga ega:

1-xossa. Agar V soha koordinata tekisliklaridan biriga parallel bo'lgan tekislik bilan ikki V_1 va V_2 sohalarga bo'lingan bo'lsa, y holda V soha bo'yicha olingan uch karrali integral V_1 va V_2 sohalar bo'yicha olingan uch karrali integrallarning yig'indisiga teng. Ya'ni, $J_V=J_{V_1}+J_{V_2}$.

2-hossa. Agar m va M sonlari $F(x,y,z)$ funksiyaning V sohadagi eng kichik va eng katta qiymatlari bo'lsa, u holda:

$mV\le J_V\le MV$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

3-hossa. $f(x,y,z)$ uzluksiz funksiyaning V soha bo'yicha olingan uch karrali integrali, uning V hajmini V sohaning biror P nuqtasidagi qiymatiga ko'paytirilganiga teng, ya'ni $J_V=f(P)V$.

Teorema. $f(x,y,z)$ funksiyadan to'g'ri V soha bo'yicha olingan uch o'lchovli integral shu soha bo'yicha olingan uch karrali integralga teng, ya'ni:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dv=\int_a^b\left\{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left[\int_{\lambda(x,y)}^{\Phi(x,y)}f(x,y,z)dz\right]dy\right\}dx \qquad (5)$$

Uch o'lchovli integral yordamida biror jismning hajmini hisoblash mumkin. Agar integral ostidagi funksiya $f(x,y,z)\equiv 1$ bo'lsa, u holda V

soha bo'yicha olingan uch o'lchovli integral V sohani hajmini bildiradi. Ya'ni,

$$V = \iiint_V dxdydz \qquad (6)$$

Agar to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida $f(x, y, z)$ funksiyaning uch o'lchovli integrali berilgan bo'lsa, u holda uni hisoblashni osonlashtirish maqsadida silindrik koordinatalardagi uch o'lchovli integral bilan almashtirish mumkin. Buning uchun $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$, $z = r$ ekanligini nazarda tutamiz. U holda

$$\iiint_V dxdydz = \iiint_V F(\theta, \rho, r)\, \rho d\theta d\rho dr \qquad (7)$$

bu yerda $f(\rho\cos\theta\,, \rho\sin\theta\,, r) = F(\theta, \rho, r)$.

Uch o'lchovli integral yordamida jismning inersiya momentini va og'irlik markazining koordinatalarini ham topish mumkin.

Massasi m bo'lgan $M(x, y, z)$ nuqtaning ox, oy, oz koordinata o'qlariga nisbatan inersiya moment mos ravishda

$J_{xx} = (y^2 + z^2)m, \quad J_{yy} = (x^2 + z^2)m, \quad J_{zz} = (x^2 + y^2)m$

formulalar bilan aniqlanishi mexanika kursidan ma'lum.

Jismning inersiya momenti quyidagi mos integrallar bilan hisoblanadi:

$$J_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2)\, \gamma(x, y, z) dxdydz,$$

$$J_{yy} = \iiint_V (x^2 + z^2)\, \gamma(x, y, z) dxdydz,$$

$$J_{zz} = \iiint_V (x^2 + y^2)\, \gamma(x, y, z) dxdydz.$$

Bu yerda $\gamma(x, y, z)$ moddaning zichligi.

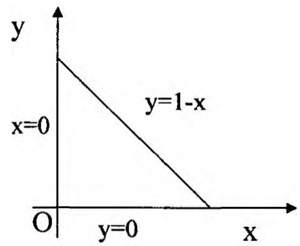
Jism og'irlik markazining koordinatalari quyidagi integrallar bilan hisoblanadi:

$$x_c = \frac{\iiint_V x\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint_V \gamma(x,y,z)dxdydz};\ y_c = \frac{\iiint_V y\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint_V \gamma(x,y,z)dxdydz};\ z_c = \frac{\iiint_V z\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint_V \gamma(x,y,z)dxdydz}.$$

Misollar:

1. $f(x,y,z) = xyz$ funksiyadan $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ tekisliklar bilan chegaralangan V soha bo'yicha olingan uch o'lchovli integral hisoblansin.

Yechish: Bu soha to'g'ri soha bo'lib, ustdan va ostdan $z = 0$ va $z = 1 - x - y$ tekisliklar bilan chegaralangan, hamda oxy tekislikdagi $x = 0, y = 0, y = 1 - x$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan uchburchak shaklidagi yassi D sohaga proyeksiyalanadi (1-chizma).



1-chizma

Shuning uchun J_V uch o'lchovli integral quyidagicha hisoblanadi:

$$J_V = \iint_D \left[\int_0^{1-x-y} xyz\,dz \right] ds$$

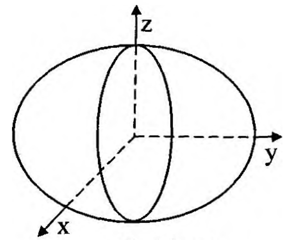
D soha bo'yicha olingan ikki o'lchovli integralga uning chegaralarini qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$J_V = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} xyz\,dz \right] dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \frac{xyz^2}{2} \Big|_0^{1-x-y} dy \right\} dx =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \frac{1}{2} xy(1-x-y)^2 dy \right\} dx = \int_0^1 \frac{x}{24}(1-x)^4 dx = \frac{1}{720}.$$

2. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$ ellipsoidning hajmi hisoblansin.

Yechish: Ellipsoid (2-chizma) ostdan



2-chizma

$z=-4\sqrt{1-\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}}$ sirt bilan, ustdan esa

$z=4\sqrt{1-\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}}$ sirt bilan chegaralangan.

Bu ellipsoidning oxy tekislikdagi proeksiyasi $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ ellipsdan iborat. Demak, hajmni hisoblashni uch karrali integralni hisoblashga keltirish mumkin. U holda,

$$V=\int_{-6}^{6}\left[\int_{-5\sqrt{1-\frac{x^2}{36}}}^{5\sqrt{1-\frac{x^2}{36}}}\left(\int_{-4\sqrt{1-\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}}}^{4\sqrt{1-\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}}}dz\right)dy\right]dx=2\cdot 4\int_{-6}^{6}\left[\int_{-5\sqrt{1-\frac{x^2}{36}}}^{5\sqrt{1-\frac{x^2}{36}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}}dy\right]dx$$

Ichki integralni hisoblashda x o'zgarmas deb qaraladi. Quyidagi almashtirishni qilamiz.

$$y=5\sqrt{1-\frac{x^2}{36}}sint,\quad dy=5\sqrt{1-\frac{x^2}{36}}costdt.$$

y o'zgaruvchi $-5\sqrt{1-\frac{x^2}{36}}$ dan $5\sqrt{1-\frac{x^2}{36}}$ gacha o'zgaradi. Shuning uchun t o'zgaruvchi $-\frac{\pi}{2}$ dan $\frac{\pi}{2}$ gacha o'zgaradi. Yangi chegaralarni integralga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$V=2\cdot 4\int_{-6}^{6}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{36}\right)-\left(1-\frac{x^2}{36}\right)sin^2t}\cdot 5\sqrt{1-\frac{x^2}{36}}\cos t\right]dt=$$

$$= 2\cdot 4\cdot 5\int_{-6}^{6}\left[\left(1-\frac{x^2}{36}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2\,tdt\right]dx = \frac{20\pi}{36}\int_{-6}^{6}(a^2-x^2)dx = 160\pi.$$

3. Agar markazi koordinatalar boshida bo'lgan R radiusli yarim sharning har bir (x,y,z) nuqtasidagi modda zichligi F shu nuqtadan asosgacha bo'lgan masofaga proporsional, yani F=kz bo'sa, bu yarim sharning massasi topilsin.

Yechish: Yarim sfera yuqori qismining tenglamasi:

$$Z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

Silindrik koordinatalarda

$$Z=\sqrt{R^2-r^2}$$

Demak,

$$M=\iiint\limits_V kzrd\varphi drdz=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} kzdz\right)rdz\right]d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\frac{kz^2}{2}\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} rdr\right]d\varphi=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\frac{k}{2}(R^2-r^2)rdr\right]d\varphi=$$

$$=\frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{R^4}{2}-\frac{R^4}{4}\right]d\varphi=\frac{k}{2}\cdot\frac{R^4}{4}\cdot 2\pi=\frac{k\pi R^4}{4}.$$

4. $x=0,\ Z=0,\ y=1,\ y=3,\ x+2z=3$ tekisliklar bilan chegaralangan prizmatik jism og'irlik markazi topilsin.

Yechish: Dastlab jismning hajmini topamiz:

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int_0^3 dx\int_1^3 dy\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} dz=\int_0^3 dx\int_1^3\frac{3-x}{2}dy=$$

$$=\int_0^3 dx\cdot\frac{3-x}{2}y\Big|_1^3=\int_0^3(3-x)dx=\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^3=9-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}.$$

$$x_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_V xdxdydz = \frac{2}{9}\int_0^3 xdx\int_1^3 dy\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} dz =$$

$$= \frac{2}{9}\int_0^3 xdx\int_0^3 dy \cdot \frac{1}{2}(3-x) = \frac{1}{9}\int_0^3 (3x - x^2)dx \cdot y\Big|_1^3 =$$

$$= \frac{2}{9}\int_0^3 (3x - x^2)dx = \frac{2}{9}\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{2}{9}\left(\frac{27}{2} - \frac{27}{3}\right) = \frac{2}{9}\cdot\frac{27}{6} = 1;$$

$$y_c = \frac{2}{9}\iiint\limits_V ydxdydz = \frac{2}{9}\int_0^3 dx\int_1^3 ydy\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} dz = \frac{1}{9}\int_0^3 dx\int_1^3 y(3-x)dy =$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^3 (3-x)dx = \frac{4}{9}\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^3 = \frac{4}{9}\left(9 - \frac{9}{2}\right) = \frac{4}{9}\cdot\frac{9}{2} = 2;$$

$$Z_c = \frac{2}{9}\iiint\limits_V zdxdydz = \frac{2}{9}\int_0^3 dx\int_1^3 dy\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} zdz = \frac{2}{9}\int_0^3 \frac{(3-x)^2}{8}dx\int_1^3 dy =$$

$$= \frac{1}{18}\int_0^3 (3-x)^2 dx = \frac{1}{18}\left(\frac{-(3-x)^3}{3}\right|_0^3 = \frac{1}{2};$$

Demak, og'irlik markazi $C(1,2,\frac{1}{2})$ bo'ladi.

5. $Z = x^2 + y^2,\ x + y + z = a,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ sirtlar bilan chegaralangan bir jinsli jism hajmi topilsin.

Yechish: Dastlab hosil bo'lgan jism hajmini hisoblaymiz,

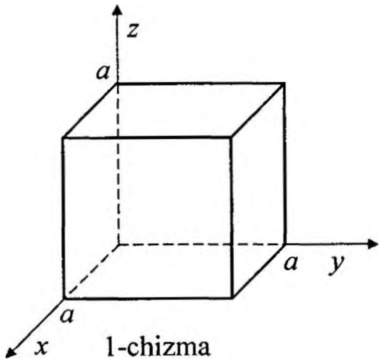
$$V = \int_0^a dx\int_0^{a-x} dy\int_0^{x^2+y^2} dz = \int_0^a dx\int_0^{a-x}(x^2+y^2)dy =$$

$$= \int_0^a \left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{a-x} dx = \int_0^a \left[x^2(a-x) + \frac{(a-x)^3}{3}\right]dx =$$

$$\int_0^a (ax^2 - x^3)dx + \frac{1}{3}\int_0^a (a-x)^3 dx = \frac{ax^3}{3}\Big|_0^a - \frac{x^4}{4}\Big|_0^a - \frac{1}{3}\frac{(a-x)^4}{4}\Big|_0^a =$$

$$= \frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{12} = \frac{4a^4 - 3a^4 + a^4}{12} = \frac{a^4}{6}.$$

7. $0 \leq x \leq a,\ \ 0 \leq y \leq a,\ \ 0 \leq z \leq a$ lar bilan hosil qilingan kubning o'z qirrasiga nisbatan inersiya momenti topilsin (1 – chizma).



1-chizma

Yechish: Inertsiya momentini topish formulasidan foydalanamiz:

$$J_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)dxdydz = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (y^2 + z^2)dz =$$

$$= \int_0^a dx \int_0^a dy(y^2 z + \frac{z^3}{3})\Big|_0^a = \int_0^a dx \int_0^a \left(ay^2 + \frac{a^3}{3}\right)dy =$$

$$= \int_0^a \left(\frac{ay^3}{3} + \frac{a^3 y}{3}\right)\Big|_0^a dx = \int_0^a \left(\frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{3}\right)dx = \frac{2a^4}{3}\int_0^a dx = \frac{2a^4}{3}x\Big|_0^a = \frac{2a^5}{3}.$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. $J = \iiint\limits_V zdxdydz$ integral hisoblansin. V soha $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, $0 \leq y \leq 2x,\ 0 \leq z \leq \sqrt{1 - y^2 - z^2}$ tengsizliklar bilan aniqlangan.

Javob: $\frac{7}{192}$.

2. $J = \iiint\limits_V x^2 dxdydz$ integral hisoblansin. V soha $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ shardan iborat.

Javob: $\frac{4R^5}{15}$.

3. $J = \iiint\limits_V z\sqrt{y^2 + x^2} dxdydz$ integral hisoblansin. V soha $y^2 + x^2 = 2x$ silindr va $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ tekisliklar bilan chegaralangan.

Javob: $\frac{8}{9}a^2$.

4. $J = \iiint\limits_V (y^2 + x^2) dxdydz$ integral hisoblansin. V soha $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ sharning yuqori qismidan iborat.

Javob: $\frac{4}{15}\pi r^2$.

5. $J = \iiint\limits_V xyzdxdydz$ integral hisoblansin. V soha $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sfera va $x = 0, y = 0, z = 0$ tekisliklar bilan chegaralangan.

Javob: $\frac{1}{48}$.

6. $hz = x^2 + y^2$, $z = h$ sirtlar bilan chegaralangan jismning hajmi topilsin.

Javob: $\frac{\pi h^3}{2}$.

7. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = x^2 + y^2$ sirtlar bilan chegaralangan jismning hajmi topilsin.

Javob: $\frac{\pi}{6}$.

8. Quyidagi berilgan sirtlar bilan chegaralangan jismning hajmi topilsin.

1) $x + y + z = 4,\ x = 3,\ y = 2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0;$

2) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z,\ x^2 + y^2 = z^2;$

3) $2z = x^2 + y^2,\ y + z = 4.$

Javob: 1) $\frac{55}{6}$; 2) π; 3) $\frac{81}{4}\pi$.

9. Yoqlari $x + y + z = a,\ x = 0, y = 0, z = 0$ tekisliklardan iborat piramidaning har bir nuqtasidagi zichlik shu nuqtaning applikattasi z ga teng. Piramidaning massasi aniqlansin.

Javob: $\int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{a-x-y} z\,dz = \frac{a^4}{24}$.

10. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ va $z = h$ sirtlar bilan chegaralangan jismning har bir nuqtasidagi zichlik shu nuqtaning applikattasiga teng bo'lsa, jismning massasi topilsin.

Javob: $\frac{\pi h^4}{4}$.

11. Quyidagi sirtlar bilan chegaralangan bir jinsli jismning og'irlik markazi topilsin:

1) $x + y + z = a,\ x = 0, y = 0, z = 0;$

2) $az = a^2 - x^2 - y^2, z = 0;$

3) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z = 0.$

Javoblar: 1) $\left(\frac{a}{4}; \frac{a}{4}; \frac{a}{4}\right)$; 2) $(0; 0; \frac{a}{3})$; 3) $(0; 0; \frac{3a}{8})$.

12. Quyida ko'rsatilgan sirtlar bilan chegaralangan jismning (zichlik $\mu = 1$) oz o'qqa nisbatan inertsiya momenti aniqlansin.

1) $x = 0,\ y = 0,\ y = a,\ z = 0$ va $x + z = a;$

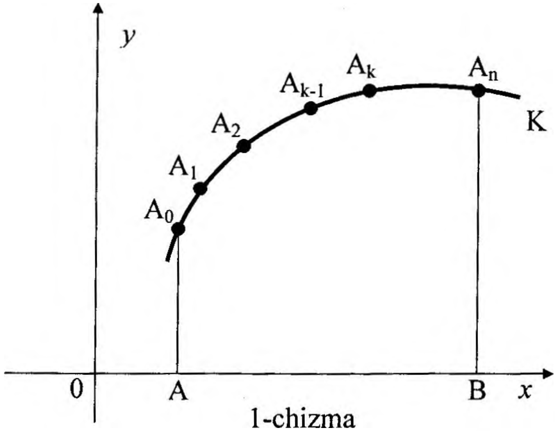
2) $x + y + z = a\sqrt{2},\ x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0.$

Javoblar: 1) $\frac{a^5}{4}$; 2) $\frac{\pi a^5}{\sqrt{2}}$.

V. BOB. EGRI CHIZIQLI VA SIRT INTEGRALLARI

§1. Egri chiziqli integral va uni hisoblash. Grin formulasi

1.1. Yoy uzunligi bo'yicha egri chiziqli integral (birinchi tur egri chiziqli integral)



1-chizma

Aytaylik $f(x,y)$ funksiya tenglamasi $y = \varphi(x)(a \leq x \leq b)$ bo'lgan K egri chiziq AB yoyining barcha nuqtalarida aniqlangan va uzluksiz funksiya bo'lsin (1-chizma).

AB yoyni ihtiyoriy ravishda $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n = B$ nuqtalar bilan n ta elementar yoylarga bo'lamiz. Δl_k bilan $A_{k-1}A_k$ yoy uzunligini belgilaymiz. Har bir elementar yoyda $M(x_k; y_k)$ nuqtani tanlaymiz. U holda bu nuqtadagi funksiyaning qiymati $f(x_k; y_k)$ bo'ladi. Endi funksiyaning bu nuqtadagi qiymatini Δl_k yoy uzunligiga ko'paytiramiz va

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k; y_k)\,\Delta l_k \qquad (1)$$

yig'indini tuzamiz. Bu yig'indi ham integral yig'indi deb ataladi.

Ta'rif. (1) integral yig'indining elementar yoylardan uzunligi eng katta bo'lganini uzunligi nolga intilgandagi limitiga $f(x,y)$ funksiyadan AB yoy bo'yicha olingan birinchi tur egri chiziqli integral deb ataladi va u

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl \qquad (2)$$

kabi yoziladi. Demak, ta'rifga asosan

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl = \lim_{max\Delta l_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k; y_k) \qquad (3)$$

Birinchi tur egri chiziqli integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl = \int_{a}^{b} f[x,\varphi(x)]\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}dx \qquad (4)$$

Agar K egri chiziq $x = x(t), y = y(t)$ $(t_1 \leq t \leq t_2)$ parametrik tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, u holda

$$\int_{K} f(x,y)\,dl = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t),y(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt \qquad (5)$$

Agar $f(x,y) > 0$ bo'lsa, u holda $\int_K f(x,y)\,dl$ birinchi tur egri chiziqli integral $\gamma = f(x,y)$ o'zgaruvchan chiziqli zichlikka ega bo'lgan K egri chiziqni massasini bildiradi.

Birinchi tur egri chiziqli integral quyidagi hossalarga ega:

1^0. Birinchi tur egri chiziqli integral integrallash yo'lining yo'nalishiga bog'liq bo'lmaydi. Ya'ni,

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl = \int_{BA} f(x,y)\,dl.$$

$$2^0. \int_K [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]\,dl = \int_K f_1(x,y)\,dl \pm \int_K f_2(x,y)\,dl.$$

$$3^0. \int_K Cf(x,y)\,dl = C\int_K f(x,y)\,dl, \qquad \text{C – o'zgarmas son.}$$

4^0. Agar K ikkita K_1 va K_2 chiziqlar yig'indisidan iborat bo'lsa, u holda quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\int_K f(x,y)\,dl = \int_{K_1} f(x,y)\,dl + \int_{K_2} f(x,y)\,dl.$$

1.2. Koordinatalar bo'yicha egri chiziqli integral (ikkinchi tur egri chiziqli integral)

Aytaylik $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ funksiyalar tenglamasi $y=\varphi(x)$ $(a\le x\le b)$ bo'lgan K tekis egri chiziq AB yoyining nuqtalarida uzluksiz bo'lsin.

$P(x,y)$ va $Q(x,y)$ funksiyalar uchun koordinatalar bo'yicha integral yig'indi deb

$$\sum_{k=1}^{n}[P(\xi_k;\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k;\eta_k)\Delta y_k]$$

ga aytiladi. Bu yerda Δx_k va Δy_k lar elementar yoyning ox va oy o'qlardagi proeksiyalari.

Ta'rif. $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ ifodaning AB yoy yo'nalishidagi koordinatalar bo'yicha egri chiziqli integrali (ikkinchi tur egri chiziqli integrali) deb, integral yig'indining Δx_k va Δy_k larning eng kattasi nolga intilgandagi limitiga aytiladi va

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

kabi yoziladi. Demak, ta'rifga asosan quyidagicha bo'ladi:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\substack{max\Delta x_k\to 0\\ max\Delta y_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n}[P(\xi_k;\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k;\eta_k)\Delta y_k]$$

Ikkinchi tur egri chiziqli integral mexanik jixatdan $F = P(x,y)i +$ $+Q(x,y)j$ o'zgaruvchan kuchning AB egri chiziqli yo'ldagi bajargan ishini bildiradi.

Ikkinchi tur egri chiziqli integral quyidagi hossalarga ega:

1^0. Agar integrallash yo'lining yo'nalishi o'zgarsa, u holda egri chiziqli integralning ishorasi qarama-qarshisiga o'zgaradi. Ya'ni,

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = -\int_{BA} Pdx + Qdy.$$

$$2^0.\ \int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AB} Pdx + \int_{AB} Qdy.$$

Qolgan hossalar birinchi tur egri chiziqli integralning hossalari bilan bir xildir.

Ikkinchi tur egri chiziqli integral quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$\int_{K} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{a}^{b} \{P[x,\varphi(x)] + \varphi'(x)Q[x,\varphi(x)]\}dx$$

Agar K egri chiziq $x = x(t),\ y = y(t)\ \ (t_1 \le t \le t_2)$ parametrik tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, u holda ikkinchi tur egri chiziqli integral quyidagi formula bilan hisoblanadi

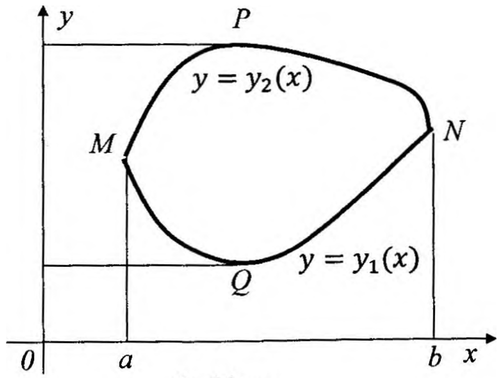
$$\int_{K} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_1}^{t_2} \{P[x(t),y(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t)]y'(t)\}dt.$$

Agar K fazoviy egri chiziq bo'lsa, u holda ikkinchi tur egri chiziqli integral quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$\int_{K} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t) + R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt.$$

D soha yuqoridan $y = y_2(x)$, quyidan $y = y_1(x)$ egri chiziqlar bilan $[y_1(x) \le y_2(x)]$, yon tomonlardan $x = a$, $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'g'ri soha bo'lsin (2-chizma).



2-chizma

U holda D sohaning yuzi:

$$S = \int_a^b y_2(x)\,dx - \int_a^b y_1(x)\,dx.$$

Lekin $y = y_2(x)$ tenglama $l_2(\overline{MPN})$ egri chiziqning tenglamasidan iborat bo'lgani uchun birinchi integral shu egri chiziq bo'yicha olingan integraldan iborat; demak,

$$\int_a^b y_2(x)\,dx = \int_{\overline{MPN}} ydx$$

Ikkinchi integral esa $l_1(\overline{MQN})$ egri chiziq bo`yicha olingan integraldir, ya`ni:

$$\int_a^b y(x)\,dx = \int_{MQN} y\,dx.$$

Egri chiziqli integralning 1-xossasiga asosan

$$\int_{MPN} ydx = -\int_{NPM} ydx$$

Demak,

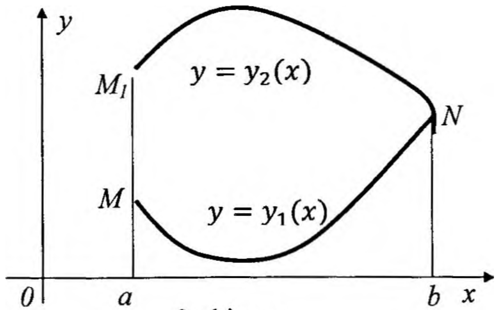
$$S = -\int_{MPN} ydx - \int_{MQN} ydx = -\int_{L} ydx \quad (8).$$

Bu holda L egri chiziq soat sterelkasi yo`nalishiga teskari aylanib chiqadi.

Agar L ning chegarisini bir qismi OY o`qqa parallel bo`lgan M_1M kesmadan iborat bo`lsa, u holda

$$\int_{M_1}^{M} ydx=0$$

bo`ladi va (8) tenglik bu holda o`z kuchini saqlaydi (3-chizma).



3-chizma

Xuddi shunga o`xshash

$$S= \int_{L} xdx \qquad (9)$$

bo`lishini ham ko`rsatish mumkin.

(8) va (9) tengliklarni hadlab qo`shib S yuzni topish uchun

$$S=\frac{1}{2}\int xdy-ydx \qquad (10)$$

formulani xosil qilamiz.

Biror $L = MN$ egri chiziqli yo`lda o`zgaruvchi

$$F = X(x,y,z)i+Y(x,y,z)j+Z(x,y,z)k$$

kuchning bajargan ishi

$$A= \int_{(M)}^{(N)} X(x,y,z)dx+Y(x,y,z)dy+Z(x,y,z)dz \qquad (11)$$

egri chiziqli integaral bilan hisoblanadi.

Biror D soha bo`yicha olingan ikki o`lchovli integral bilan shu soxaning L chegarasi bo`yicha olingan egri chiziqli integral orasida Grin formulasi deb ataluvchi quyidagi munosabatlar o`rinlidir:

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial x}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial x}\right)dxdy=\int X\,dx+Y\,dy \quad (12)$$ soat strelkasi bo`yicha.

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_L X\,dx+Ydy \quad (13)$$ soat stirelkasiga teskari.

Teorema. $X(x,y)$, $Y(x,y)$ funksiyalar biror D sohaning barcha nuqtalarida o`zining $\frac{\partial X(x,y)}{\partial y}$ va $\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}$ xususiy xosilalari bilan birga uzluksiz bo`lsa, u holda shu sohada yotgan ixtiyoriy L yopiq kontur bo`yicha olingan egri chiziqli integral

$$\int\limits_L X(x,y)\,dx+Y(x,y)\,dy=0$$

bo`lishi uchun D sohaning hamma nuqtalarida

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{\partial y}{\partial x}$$

tenglikning bajarilishi zarur va yeterlidir.

Egri chiziqli integral yordamida fazoviy egri chiziq og`irlik markazining koordinatalarini ham topish mumkun. Ular quyidagi formullalardan topiladi:

$$X_C=\frac{\int\limits_L x\,ds}{\int\limits_L ds},\quad Y_C=\frac{\int\limits_L y\,ds}{\int\limits_L ds},\quad Z_C=\frac{\int\limits_L z\,ds}{\int\limits_L ds} \quad (14).$$

Misollar.

1. $\int_{AB} y^2\,dl$ egri chiziqli integral hisoblansin. Bu yerda AB $x=acost,$ $y=asint, (0\le t\le\frac{\pi}{2})$ aylananing bir qismi.

Yechish: $y^2=a^2sin^2t,\ \ dl=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt=$

$=\sqrt{a^2cos^2t+a^2sin^2dt}=adt;\quad \int_{AB} y^2dl=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2sin^2t\cdot adt=$

$=\frac{a^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos2t)dt=\frac{a^3}{2}\left(t-\frac{1}{2}sin2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^3\pi}{4}.$

2. $\int\limits_{AB} ydl$

integral hisoblansin. Bu yerda AB egri chiziq y^2=2x parabolaning (0;0) nuqtasidan (2;2) nuqtasigacha bo'lgan yoyidan iborat.

Yechish: $y^2 = 2x$, $y=\sqrt{2x}$, $y'=(\sqrt{2x})' = \frac{1}{\sqrt{2x}}$, $dl = \sqrt{1+y'^2}dx =$

$$= \sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx; \int_{AB} ydl = \int\limits_0^2 \sqrt{2x} \cdot \sqrt{\left(1+\frac{1}{2x}\right)}dx = \int_0^2 \sqrt{2x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 (2x+1)^{\frac{1}{2}}d(2x+1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{3} \cdot (2x+1)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 1).$$

4. $\int\limits_{AB} x^2\, dx + xydy$ integral hisoblansin. Bu yerda AB egri chiziq $x = cost,\ \ y = sint,\ \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ aylana yoyining to'rtdan biriga teng.

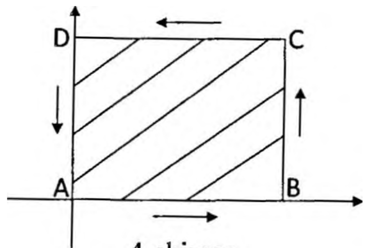
Yechish: $x^2 = cos^2t,\ \ dx = -sintdt, xy = cost \cdot sint, dy = costdt.$ Bularni egri chiziqli integralni hisoblash formulasi $\int P(x,y)dx +$ $+Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$ ga qo'yamiz:

$$\int\limits_{AB} x^2dx + xydy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-cos^2t \cdot sint + cos^2t \cdot sint)\, dt = 0.$$

4. $\oint\limits_L (x+y)dy$

integral hisoblansin. Bu yerda L $x = 0,\ y = 0, x = 1,\ y = 1$ (4-chizma) to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'gri to'rtburchak ko'nturidan iborat.

Yechish:



4-chizma

L ko'ntur bo'yicha olingan egri chiziqli integralni quyidagicha yozish mumkin:

$$\oint_L = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} .$$

Bunda $\int_{AB} = 0$ va $\int_{CD} = 0$. Chunki bularda y=0 bo'lganligi uchun

$dy = 0$ bo'ladi. Shuning uchun biz $\int_{BC}$ va $\int_{DA}$ intervallarni hisoblash bilan cheklanamiz. Ularni hisoblash uchun

$$\int_{AB} Q(x,y)\,dy = \int_a^b Q[x,y(x)]y'(x)dx$$

formuladan foydalanamiz:

$$\int_{BC}(x+y)dy = \int_0^1 (1+y)dy = \left(y+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$\int_{DA}(x+y)dy = \int_1^0 (0+y)dy = \frac{y^2}{2}\Big|_1^0 = 0-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Shunday qilib,

$$\oint_L (x+y)dy = \frac{3}{2}-\frac{1}{2} = 1.$$

5. $\oint_L (x-y)\,dx$+(x+y)dy integralni Grin fo'rmulasidan foydalanib hisoblansin. Bu yerda L ko'ntur $x^2+y^2=R^2$ aylanadan iborat.

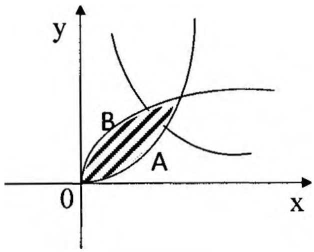
Yechish: $P(x,y) = x-y$, $Q(x,y) = x+y$ va $\frac{\partial P}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ funksiyalar $x^2+y^2=R^2$ doirada uzliksiz. Demak, berilgan integralga

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$$

Grin fo'rmulasini qo'llash mumkin.

$$\oint_L (x-y)\,dx + (x+y)dy = \iint_D (1+1)dxdy = 2\iint_D dxdy = 2\cdot S = 2\pi R^2.$$

6. $y = x^2$, $x = y^2$, $8xy = 1$ egri chiziqlar bilan chegaralangan soxaning yuzi topilsin.



Yechish: Egri chiziq teglamalarini birgalikda yechib $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$, $B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ nuqtalarni topamiz. Soxani xosil qiluvchi ko'ntur $\overset{\frown}{OA}$, $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BO}$ yoylar yig'ndisidan iborat, shunig uchun

$$S = \frac{1}{2}\int_{OA} xdy - ydx + \frac{1}{2}\int_{AB} xdy - ydx + \frac{1}{2}\int_{BO} xdy - ydx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx - \frac{1}{8}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{x} - \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{4}}^{0} \sqrt{x}dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}ln|x|\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{4}}^{0} =$$

$$= \frac{1}{48} + \frac{1}{8}ln2 + \frac{1}{48} = \frac{1}{24} + \frac{1}{8}ln2 = \frac{1+3ln2}{24} \approx 0{,}13 \text{ kv. b.}$$

7. Har bir nuqtasidagi chiziqli zichligi nuqta absissasining kvadratiga proportsional bo'lgan $y = lnx$ egri chiziqning absissalari $x_A = 1$ va $x_B = 3$ ga teng A va B nuqtalarini birlashtiruvchi yoy massasi topilsin.

Yechish: $y = lnx$, $y' = \frac{1}{x}$, $dl = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$,

$\gamma = \gamma(x,y) = kx^2$ bo'lgani uchun

$$m = \int_{AB} \gamma dl = k\int_1^3 x^2\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx = k\int_1^3 x\sqrt{1+x^2dx} =$$

$$=\frac{k}{2}\int_1^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+x^2)=\frac{k}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3=\frac{k}{3}\left[10^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right]=$$

$$=\frac{k}{3}\left(\sqrt{1000}-\sqrt{8}\right)=\frac{k}{3}\left(10\sqrt{10}-2\sqrt{2}\right)=\frac{2k}{3}\left(5\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)\approx 9{,}6 \text{ m}.$$

8. $x=t-sint,\ y=1-cost\ (0\le t\le \pi)$ sikloida og'irlik markazining koordinatalari topilsin.

Yechish: Ma'lumki, L egri chiziq bir jinsli yoyi og'irlik markazining koordinatalari

$$x_c=\frac{\int_L xds}{\int_L ds},\qquad y_c=\frac{\int_L yds}{\int_L ds}$$

formulalardan topiladi. Bu yerda $\int_L ds$ yoy uzunligidan iborat.

$$\int_L ds=\int_0^\pi\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt=\int_0^\pi\sqrt{(1-cost)^2+sin^2t}dt=$$

$$=2\int_0^\pi sin\frac{t}{2}dt=-4cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi=-4cos\frac{\pi}{2}+4cos0=4.$$

$$x_c=\frac{1}{4}\int_L xds=\frac{1}{4}\int_0^\pi(1-sint)\cdot\frac{2\sin t}{2}dt=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(tsin\frac{t}{2}-sin\frac{t}{2}sint\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-2tcos\frac{t}{2}+4sin\frac{t}{2}+\frac{4}{3}sin^3\frac{t}{2}\right]\Big|_0^\pi=\frac{1}{2}\left(4+\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3};$$

$$y_c=\frac{1}{4}\int_L yds=\frac{1}{4}\int_0^\pi(1-cost)\cdot 2sin\frac{t}{2}dt=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(sin\frac{t}{2}-sin\frac{t}{2}cost\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-2cos\frac{t}{2}+\frac{1}{3}cos\frac{3t}{2}-cos\frac{t}{2}\right]\Big|_0^\pi=\frac{4}{3}.$$

Demak, $C\left(\frac{8}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

1. $A(2;2)$ va $B(2;0)$ nuqtalar berilgan. 1) OA to'g'richiziq; 2) $y=\frac{x^2}{2}$ parabolaning OA yoyi; 3) OBA siniq chiziq bo'yicha $\int_L (x+y)dy$ integral hisoblansin.

Javoblar: 1) 4; 2) $\frac{10}{3}$; 3) 2.

2. $\int_L (x-y)dl$ integral hisoblansin. Bu yerda L $A(0;0)$ va $B(4;3)$ nuqtalarni birlashtiruvchi kesmadan iborat.

Javob: $\frac{5}{2}$.

3. $\int_{AB}(2xy-y^2)dx$ integral hisoblansin. Bu yerda AB markazi koordinata boshida va radiusi R bo'lgan aylananing yuqori qismidan iborat.

Javob: $\frac{4}{3}R^3$.

4. $\int_L (x+y)dl$ integral hisoblansin. Bu yerda L ko'ntur $O(0;0)$, $A(1;0)$ va $B(0;1)$ nuqtalarni birlashtiruvchi uchburchakdan iborat.

Javob: $1+\sqrt{2}$.

5. $A(0;1)$, $B(2;5)$ va $C(0;5)$ nuqtalar berilgan. $\int_c [(x+y)dx-2ydy]$ integral: 1) AB to'g'ri chiziq bo'yicha; 2) $y=x^2+1$ parabolaning $\overset{\frown}{AB}$ yoyi bo'yicha; 3) ABC siniq chiziq bo'yicha hisoblansin.

Javob: 1) -16; 2) $-\frac{52}{3}$; 3) -12.

6. $A(4;2)$ va $B(2;0)$ nuqtalar berilgan. 1) OA to'g'ri chiziq; 2) OBA siniq chiziq bo'yicha $\int_c [(x+y)dx-xdy]$ integral hisoblansin.

Javob: 1) 8; 2) 4.

7. $A(0;-2)$ va $B(1;0)$ nuqtalar berilgan. $\int_L (2+xy^2)\,dx-(3-$ $-x^2y)dy$ integral: 1) $y=2x-2$ to'g'ri chiziq bo'yicha; 2) $y^2=4-4x$ parabola bo'yicha; 3) $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$ ellips bo'yicha hisoblansin.

Javob: 1) -4; 2) -4; 3) -4.

8. $A(a;0;0)$, $B(a;a;0)$ va $C(a;a;a)$ nuqtalar berilgan. OC to'g'ri chiziq va $OABC$ siniq chiziq bo'yicha $\int(ydx+zdy+xdz)$ integral hisoblansin.

Javob: 1) $1{,}5a^2$; 2) a^2.

9. Tomonlari $x=0$, $y=0$, $x+y=a$ to'g'ri chiziqlarda yotgan uchburchak ko'nturi bo'yicha olingan $\oint_L [(x+y)dx-2xdy]$ integral uchun Grin foormulasi yozilsin va tekshirilsin.

10.Grin formulasidan foydalanib, uchlari $A(a;0), B(a;a)$ va $C(0;a)$ nuqtalarda bo'lgan ABCuchburchak ko'nturi bo'yicha

$$\oint_L [y^2dx + (x+y)^2]\,dy$$

integral hisoblansin.

Jovob:$\frac{2a^3}{3}$.

11. $x = accost,\ y = bsint$ ellips yuzi egri chiziqli integral bilan hisoblansin.

Jovob: πab.

12.$x = acos^3t,\ \ y = asin^3t$ astroida bilan chegaralangan yuzni egri chiziqli integral bilan hisoblansin.

Javob: $\frac{3}{8}\pi a^2$.

13. $y^2 = x$ va $x^2 = y$ parabolalar bilan chegaralangan yuza topilsin.

Javob: $\frac{1}{3}kv.bir$

14. $x = e^t cost,\ y = e^t sint,\ z = e^t$ ($-\infty < t \le 0$) egri chiziq bir jinsli yoyning og'irlik markazi topilsin.

Javob: $C\left(\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.

§2. Sirt integrallari

S tekis sirtning har bir nuqtasida uzliksiz bo'lgan $F(M)$ funksiya berilgan bo'lsin. S sirtni ixtiyoriy usul bilan yuzlari $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots \Delta S_n$ lardan iborat n ta qismiy sirtlarga bo'lamiz va ularning har biriga ixtiyoriy $M_1, M_2, \ldots, M_n$ nuqtalarni tanlaymiz. Funksiyaning tanlangan har bir nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz va quyidagi yig'indini tuzamiz:

$$F(M_1)\Delta S_1 + F(M_2)\Delta S_2 + \cdots + F(M_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} F(M_i)\Delta S_i \qquad (1)$$

Bu yig'indi $F(M_i)$ funksiya uchun S sirt yuzasi bo'yicha olingan integral yig'indi deyiladi.

S sirtni qismiy sirtlarga bo'linishlar soni N cheksiz ortib borishi bilan qismiy sirtlarning eng kattasini diametri nolga intilganda yuqoridagi integral yig'indi biror limitga intiladi va bu limitni $F(M_i)$ funksiyadan S sirt yuzasi bo'yicha olingan birinchi tur sirt integrali deyiladi hamda uni quyidagicha yoziladi:

$$\iint_S f(M)\, ds \qquad (2)$$

Koordinatalar bo'yicha, $\iint_S P(M)dxdy$, $\iint_S Q(M)dxdz$ yoki $\iint_S R(M)dydz$ sirt integrallari ham yuqoridagidek aniqlanadi.

Koordinatalar bo'yicha sirt integrali (ikkinchi tur sirt integrali) umumiy holda

$$\iint_S P(M)dxdy + Q(M)dxdz + R(M)dydz \qquad (3)$$

ko'rinishda yoziladi.

Har ikkala turdagi sirt integrallarini hisoblash ikki o'lchovli integralni hisoblashga keltiriladi.

Agar sirt integralini integrallash soxasi S Z=$\varphi(x,y)$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, u holda birinchi tur sirt integrali quyidagi formuladan foydalanib ikki o'lchovli integralni hisoblashga keltiriladi:

$$ds = \sqrt{1 + (\varphi_x') + (\varphi_y')}dxdy \ (4), \qquad \iint_S F(x,y,z)ds =$$

$$= \iint_{S_{xy}} f[x,y,\varphi(x,y)]\sqrt{1 + (\varphi_x')^2 + (\varphi_y')^2}dxdy \qquad (5)$$

Bu yerdaS_{xy} S sirtning oxy tekslikdagi proeksiyasi.

Koordinatalari bo'yicha (ikkinchi tur sirt integrali) sirt integrali quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$\iint_S f(x,y,z)dxdy = \pm \iint_{S_{xy}} f[x,y,\varphi(x,y)]dxdy \qquad (6)$$

Agar S yopiq soxa bo'lsa, u holda uning tashqi tomoni bo'yicha olingan sirt integrali $\oiint\limits_{+S}$ bilan, ichki tomoni bo'yicha olingan sirt integrali $\oiint\limits_{-S}$ bilan belgilanadi.

Yopiq S soxa bo'yicha olingan integralni bu sirt bilan chegaralangan G soxa bo'yicha olingan uch o'lchovli integralga Ostrogradskiy-Gauss formulasi deb ataluvchi quyidagi formula yordamida keltirish mumkin:

$$\oiint\limits_{+S} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_{G} (P'_x + Q'_y + R'_z)dxdydz \qquad (7).$$

Bunda $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ va ularning birinchi tartibli xususiy xosilalari G soxada uzliksiz bo'lishi kerak.

Agar S yopiq soxa bo'lmasa, u holda S sirt bo'yicha olingan integral va shu sohani chegaralovchi L ko'ntur bo'yicha olingan egri chiziqli integral Stoks formulasi deb ataluvchi quyidagi formula bilan bog'langan bo'ladi:

$$\iint\limits_{S} (R'_y - Q'_z)dydz + (P'_z - R'_x)dxdz + (Q'_x - P'_y)dxdy =$$

$$= \oint Pdx + Qdy + Rdz \qquad (8)$$

Bu yerda ham $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ va ularning birinchi tartibli xususiy xosilalari G soxada uzliksiz bo'lishi kerak.

Sirt integrali ham bir qator tatbiqlarga ega:

S sirtning yuzi

$$\iint\limits_{S} ds \qquad (9)$$

dan topiladi

S sirtning massasi

$$m = \iint\limits_{S} \delta(M)ds \qquad (10)$$

dan topiladi. Bu yerda $\delta(M)$ S sirtning M(x,y,z) nuqtasidagi massa taqsimlanish zichligi.

Sirt biror qismining kooirdinata o'qlariga nisbatan inersiya momentlari.

$$J_{ox} = \iint\limits_{S} (y^2 + z^2)ds, J_{oy} = \iint\limits_{S} (x^2 + z^2)ds, J_{oz} = \iint\limits_{S} (x^2 + y^2)ds \qquad (11)$$

lardan topiladi.

Sirt biror qismining og'irlik markazi koordinatalari

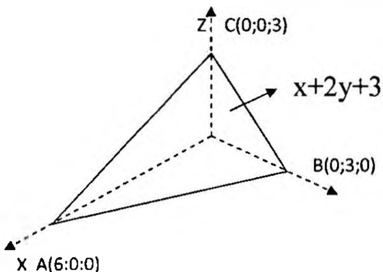
$$x_c = \frac{1}{S}\iint\limits_{S} xds,\ y_c = \frac{1}{S}\iint\limits_{S} yds,\ z_c = \frac{1}{S}\iint\limits_{S} zds \qquad (12)$$

formulalardan topiladi. Bu yerda S sirtning berilgan qismini yuzini bildiradi.

Misollar.

1. $J = \iint\limits_{S} (6x + 4y + 32)ds$ sirt integrali hisoblansin. Bu yerda S sirt $x + 2y + 32 = 6$ tekislikning birinchi oktantadagi qismidan iborat.

Yechish: Berilgan integral birinchi tur sirt integralidan iborat. S integrallash soxasi ABC uchburchakdan iborat (1-chizma)



1-chizma

Berilgan sirt integralini ikki o'lchovli integral bilan almashtiramiz.

$$Z = \frac{1}{3}(6 - x - 2y), \qquad ds = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}dxdy = \frac{\sqrt{14}}{3}dxdy$$

bo'lgani uchun

$$J = \frac{\sqrt{14}}{3} \iint\limits_{S_{xy}} (5x + 2y + 6)dxdy$$

bo'ladi. Bu yerda S_{xy} S sirtning oxy tekislikdagi proeksiyasi, ya'ni ABO uchburchakdan iborat.

Xosil bo'lgan ikki o'lchovli integralni hisoblash uchun uni ikki karrali integral bilan almashtiramiz.

$$J = \frac{\sqrt{14}}{3} \int_0^3 dy \int_0^{6-2y} (5x - 2y + 6)dx = \frac{\sqrt{14}}{3} \int_0^3 \left(\frac{5}{2}x^2 + 2xy + 6x\right)\Big|_0^{6-2y} dy =$$

$$= 2\sqrt{14} \int_0^3 (y^2 - 10y + 21)\, dy = 2\sqrt{14}\left(\frac{y^3}{3} - 5y^2 + 21y\right)\Big|_0^3 = 54\sqrt{14}.$$

2. $J = \iint\limits_S (x^2 + y^2)ds$

integral hisoblansin. Bu yerda S sirt $z^2 = x^2 + y^2$ konus sirtning z=0 va z=1 tekisliklar orasidagi qismidan iborat:

Yechish: Z=$\sqrt{x^2 + y^2}$, $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$ds = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}dxdy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy =$$

$= \sqrt{2}dxdy.$

U holda izlanayotgan integral quyidagi ko'rinishga keladi:

$$J = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\sqrt{2}\, dxdy$$

Bu yerda D integrallash soxasi $x^2 + y^2 \leq 1$ doiradan iborat. Shuning uchun

$$J = \sqrt{2} \iint\limits_D (x^2 + y^2)\, dxdy = 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}.$$

3. Z=$\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ yarim sferaning oz oqqa nisbatan inersiya momenti hisoblansin.

Yechish: $Z'_x = \left(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right)'_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$;

$Z'_y = \left(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right)'_y = -\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$; $\quad ds = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} =$

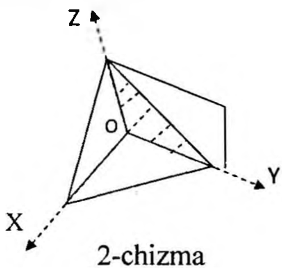
$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2-x^2-y^2} + \frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\, dxdy = \frac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

$$J_{oz} = \iint\limits_S (x^2 + y^2)\, ds = \iint\limits_S (x^2 + y^2) \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy.$$

Integrallash sohasi yarim sferaning XOY tekislikdagi proeksiyasidan, ya'ni $x^2 + y^2 \le a^2$ doiradan iborat. Oxirgi integralni hisoblash uchun qutb koordinatalariga o'tamiz.

$$J_{oz} = \iint\limits_D r^2 \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} rdrd\varphi = 4a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^a \frac{r^3 dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{4}{3}\pi a^4.$$

4. $z = x$ tekislikning $x + y = 1$, $y = 0$, $x = 0$ tekisliklar bilan chegaralangan bo'lagi og'irlik markazi koordinatalari topilsin (2-chizma).



2-chizma

Yechish: $Z = X$ tekislikning ko'rsatilgan qismini yuzini topamiz. z'_x=1, z'_y=0 bo'lganligi uchun

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy = \sqrt{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy = \sqrt{2}\int\limits_0^1 (1 - x)dx =$$

$$= \sqrt{2}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

U holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$x_c=\frac{1}{s}\iint\limits_S xds=\frac{2}{\sqrt{2}}\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{1-x}\sqrt{2}y=2\int\limits_0^1 x(1-x)dx=2\int\limits_0^1(x-x^2)dx=$$

$$=\left(x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3};$$

$$y_c=\frac{1}{s}\iint\limits_S yds=\frac{2}{\sqrt{2}}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\sqrt{2}ydy=\int\limits_0^1(1-x)^2dx=-\frac{1}{3}(1-x)^3\Big|_0^1=\frac{1}{3};$$

$$z_c=\frac{1}{s}\iint\limits_S zds=\frac{1}{S}\iint\limits_S xds\frac{1}{3}.$$

5. $J=\iint\limits_S \sqrt[4]{x^2+y^2}dxdy$

ikkinchi tur sirt integrali hisoblansin. Bu yerda S sirt $x^2+y^2\le a^2$ doiraning quyi qismidan iborat.

Yechish: S sirt o'zining XOY tekislikdagi S_{xy} proeksiyasi bilan bir hil bo'ladi. (6) formulaga asosan

$$J=-\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt[4]{x^2+y^2}dxdy=-\iint\limits_{r\le a}\sqrt{r}\cdot rd\varphi dr=-\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a r^{\frac{3}{2}}dr=$$

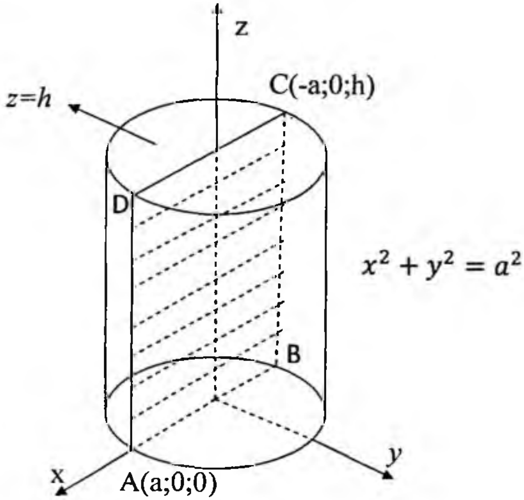
$$=\int\limits_{2\pi}^0\frac{2}{5}r^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a d\varphi=\frac{2}{5}\int\limits_{2\pi}^0 a^{\frac{5}{2}}d\varphi=\frac{2}{5}a^{\frac{5}{2}}\varphi\Big|_{2\pi}^0=-\frac{2}{5}a^{\frac{5}{2}}\cdot 2\pi=-\frac{4}{5}\pi\sqrt{a^5}.$$

6.Ostrogradiskiy-Gauss formulasidan foydalanib

$$J=\oiint\limits_{+S}4x^3dydz+4y^3dxdz-6z^3dxdy$$

sirt integralini hisoblang. Bu yerda S sirt $x^2+y^2=a^2$ silindrning $z=0$ va $z=h$ tekisliklar bilan chegaralangan qismidan iborat (3-chizma).

Ostrogradskiy-Gauss formulasini chap tomoni bilan berilgan integralni taqqoslab $P=4x^3$, $Q=4y^3$, $R=-6z^4$ ekanligini topamiz. Ularning xususiy xosilalari $P'_x=12x^2$, $Q'_x=12y^2$, $R'_z=-24z^3$ lardan iborat. Bularni



3-chizma

$$\oiint_{+S} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_G \left(P'_x + P'_y + P'_z\right)dxdzdy$$

formulaning o'ng tomoniga qo'yamiz. Natijada S yopiq sirt bo'yicha olingan sirt integrali S yopiq sirt chegarasi bilan hosil qilingan G soxa boyicha olingan uch o'lchovli

$$J = 12\iiint_G (x^2 + y^2 - 2z^3)dxdzdy$$

integralni hisoblashga kelamiz.

Bu integralni dastlab z bo'yicha integrallab, so'ngra qytb koordinatalariga o'tamiz.

$$J = 12\oiint_{G_{xy}} dxdy \int_0^h (x^2 + y^2 - 2z^3)dz =$$

$$= 12 \iint_{x^2+y^2 \le a^2} \left[(x^2 + y^2)z - \frac{z^4}{2}\right] \Big|_{z=0}^{z=h} dxdy =$$

$$= 12 \iint\limits_{r \le a} \left(r^2 h - \frac{h^4}{2}\right) r d\varphi dr = 12h \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(r^3 - \frac{h^3}{2} r\right) dr = 6\pi a^2 h (a^2 - h^3).$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. $\iint\limits_S [x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma] ds$ integral, $x + y + z = a$ tekislikning birinchi oktantada yotgan qismini ustki sirti bo'yicha hisoblansin.

Javob: $\frac{a^3}{2}$.

2. $\iint\limits_S (x + y + z) ds$ integral hisoblansin. Bu yerda S sirt $x^2 + {}$ $+y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$ dan iborat.

Javob: 0.

3. $\iint\limits_S (x^2 + y^2) ds$ integral hisoblansin. Bu yerda S sirt $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1$ jismning chegarasidan iborat.

Javob: $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$.

4. Quyidagi ikkinchi tur sirt integrallari hisoblansin:

1) $I = \iint\limits_S x dydz + y dzdx + z dxdy$, bu yerda S sirt $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ sferaning tashqi tomonidan iborat;

2) $I = \iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, bu yerda S sirt $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ sferaning tashqi tomoni.

Javob: 1) $4\pi a^3$; 2) $\frac{8}{3}\pi R^3(a + b + c)$.

5. Ostrogradskiy-Gauss formulasidan foydalanib quyidagi integrallar hisoblansin.

1) $\oiint\limits_{-S} z^2\ dxdy$, bu yerda S sirt $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$ ellipsoid sirtidan iborat;

2) $\oiint\limits_{-S} zdxdy + ydxdz + xdydz$, bu yerda S sirt $x = 0, x = 1, y = 0,$ $y = 1,\ z = 0,\ z = 1$ tekisliklar bilan chegaralangan kub sirtidan iborat.

Javob: 1) 0; 2) -3.

6. $z = 2 - \frac{x^2+y^2}{2}$ sirtning xoy tekisdan pastga joylashgan qismining og'irlik markazi hisoblansin.

Javob: $C\left(0; 0; \frac{307-15\sqrt{5}}{310}\right)$.

7. $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ paraboloidning oz o'qqa nisbatan inersiya momentii $0 \le z \le 1$ shartda hisoblansin.

Javob: $\frac{4\pi(1+6\sqrt{3})}{15}$.

VI BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI

§1.Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalari

Ehtimollar nazariyasi oliy matematikaning bir qismi bolib, natijalari tasodifiy omillarga bog'liq bo'lgan tajribalar uchun qurilgan modellarni o'rganadi.

Har qanday tajriba (eksperiment, kuzatish) qandaydir aniq shartlar to'plamini bajarilishini va uning natijalarini kuzatishdan iborat. Ehtimollar nazariyasida bir xil shartlar istalgancha marta takrorlanishi mumkin bo'lgan tajribalargina qaraladi.

O'tkaziladigan u yoki bu tajribada kuzatish predmeti bo'lib, biror jarayon, fizik holat, iqtisodiy samaradorlik, hosildorlik va hokazolar olinishi mumkin. Demak, ehtimollar nazariyasida hodisa va tajriba tushunchalari asosiy tushunchalardan hisoblanadi.

Ro'y beradi yoki ro'y bermaydi deb gapirish mumkin bo'lgan har qanday voqea hodisa deyiladi. Tajribalar, kuzatishlar, o'lchashlarning natijalari hodisalardan iborat. Masalan:

1) Tanga tashlanganda uning "gerbli" tomonini tushishi;
2) Otilgan o'qning nishonga tegishi;
3) Tolaning uzilishi va hokazolar.

Barcha kuzatiladigan hodisalarni 3 turga ajratish mumkin.

Ular: muqarrar hodisa, ro'y bermaydigan hodisa va tasodifiy hodisalardir.

Tayin shartlar to'plami bajarilganda albatta ro'y beradigan hodisaga muqarrar hodisa deyiladi. Masalan, tomonlari birdan oltigacha nomerlangan bir jinsli kubni (shoshqol toshini) tashlanganda, shu nomerlardan qandaydir bittasini tushishini hodisa deb olsak, bu hodisa albatta ro'y beradi, ya'ni muqarrar hodisa bo'ladi.

Tayin shartlar to'plami bajarilganda mutlaqo ro'y bermaydigan hodisaga mumkin bo'lmagan hodisa deyiladi. Masalan, yuqorida ko'rib o'tilgan kubikni tashlashda 7-nomerni tushishi mumkin bo'lmagan hodisadir.

Tayin shartlar bajarilganda ro'y berishi ham, ro'y bermasligi ham mumkin bo'lgan hodisa tasodifiy hodisa deyiladi. Masalan, yuqoridagi kubikni tashlashda juft nomerlarni yoki toq nomerlarni tushishi tasodifiy hodisadir.

Odatda tasodifiy hodisalarni $A, B, C, D, E, \ldots$ harflar bilan, muqarrar hodisani U bilan, mumkin bo'lmagan hodisani V bilan belgilanadi.

Tasodifiy hodisalar ustida quyidagi amallarga to'xtalamiz:

1. Agar A hodisa ro'y berishidan B hodisaning ham ro'y berishi kelib chiqsa, u holda A hodisa B hodisani ergashtiradi deyiladi va $A \subset B$ kabi yoziladi. Masalan, kubikni tashlaganda A hodisa deb 2 nomerni tushishini, B hodisa deb juft nomerni tushishini belgilasak, u vaqtda A hodisa ro'y berishidan B hodisaning ro'y berishi kelib chiqadi.

2. Agar $A \subset B$ va $B \subset A$, ya'ni A hodisa B hodisani ergashtirsa va aksincha, B hodisa A hodisani ergashtirsa, u holda A va B hodisalar teng (tengkuchli) deyiladi va A=B deb belgilanadi.

3. A va B hodisalarning ikkalasi bir vaqtda ro'y berishidan iborat bo'lgan hodisa A va B hodisalarning *ko'paytmasi* deyiladi va $A \cap B$ (AB) kabi yoziladi.

4. A va B hodisalardan xech bo'lmaganda birining ro'y berishidan iborat bo'lgan hodisa A va B hodisalarning yig'indisi deyiladi va $A \cup B$ (A+B) kabi yoziladi. Masalan, o'q otish qurolidan ikkita o'q otilgan bo'lib, A birinchi otishda nishonga tegish, B ikkinchi otishda nishonga tegish hodisalari bo'lsa, u holda $A \cup B$ (A+B) birinchi otishda yoki ikkinchi otishda yoki har ikkala otishda ham nishonga tegish hodisasi bo'ladi.

5. Bir necha hodisalarning yig'indisi deb, bu hodisalardan kamida birini ro'y berishidan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi.

6. Birgalikda bo'lmagan hodisalar deb bitta sinashda birining ro'y berishi qolganlarining ro'y berishini yo'qqa chiqaradigan hodisaga aytiladi.

Masalan: 1) Detallar solingan yashikdan tavakkaliga bitta detal olindi. Bunda yaroqli detal chiqish hodisasi yaroqsiz detal chiqish hodisasini yo'qqa chiqaradi. Demak, bu hodisalar birgalikda emas;

2) Tanga tashlandi. Gerbli tomonini tushishi raqamli tomonini tushish hodisasini yo'qqa chiqaradi. Bu holda ham gerbli tomoni tushdi va raqamli tomoni tushdi hodisalari birgalikda emas.

7. Agar sinash natijasida bir nechta hodisalardan bittasi va faqat bittasining ro'y berishi muqarrar hodisa bo'lsa, u holda bu hodisa yagona mumkin bo'lgan hodisa deyiladi. Masalan, nishonga qarata o'q uzildi deylik. U holda nishonga tegish yoki tegmaslik hodisalaridan faqat bittasi bajariladi.

8. Agar bir nechta hodisalardan hech birini boshqalariga nisbatan ro'y berishi mumkinroq deyishga asos bo'lmasa, u holda bu hodisalarni teng imkoniyatli hodisalar deyiladi. Masalan: 1) Tanga tashlanganda gerbli tomoni tushishi yoki raqamli tomonini tushishi hodisalari teng imkoniyatlidir; 2) O'yin soqqasi tashlanganda u yoki bu (1,2,3,4,5,6) raqamni tushishi hodisalari teng imkoniyatlidir.

9. Hodisalarning to'la gruppasi deb, sinashning yagona mumkin bo'lgan hodisalari to'plamiga aytiladi. Masalan, mergan nishonga qarata ikkita o'q uzdi deylik, bunda A_1 nishonga bitta o'q tegishi hodisasi, A_2 nishonga ikkita o'q tegishi hodisasi, A_3 nishonga har ikkala o'qni tegmaslik hodisasi. Bunda aytilgan hodisalar to'la gruppa tashkil etadi.

10. Qarama-qarshi hodisalar deb, to'la gruppa tashkil etuvchi yagona mumkin bo'lgan ikkita hodisaga aytiladi. A hodisaga qarama-qarshi hodisani $\bar{A}$ bilan belgilanadi. Masalan: 1) Nishonga o'q uzishda nishonga tegishi va tegmaslik hodisalari qarama-qarshi hodisalardir; 2) Yashikdan olingan detalni yaroqli yoki yaroqsiz chiqish hodisalari qarama-qarshi hodisalardir.

11. Agar ikkita hodisadan birini ro'y berishi ikkinchisini ro'y berishi yoki ro'y bermasligiga bog'liq bo'lmasa, u holda bu hodisalarni erkli hodisalar deyiladi. Masalan, tanga ikki marta tashlandi deylik, u holda birinchi tashlashda gerbli tomoni tushish hodisasi, ikkinchi tashlashda gerbli tomon tushishi yoki tushmaslik hodisasiga bog'liq emas.

12. Bir nechta hodisalarni har ikkitasi bog'liq bo'lmasa, u holda u hodisalarni juft-juft erkli deyiladi. Masalan: tangani uch marta tashlandi deylik A, B, C mos ravishda birinchi, ikkinchi va uchinchi sinashda gerbli tomon tushish hodisasi bo'lsa, bu holda ko'rilayotgan hodisalardan ixtiyoriy ikkitasi bog'liq emas. Demak, A, B va C juft-juft erkli.

13. Agar ikkita hodisadan birining ro'y berishi ikkinchisini ro'y berish yoki ro'y bermasligiga bog'liq bo'lsa, u holda bu hodisalarni o'zaro bog'liq hodisalar deyiladi.

14. Bitta sinashda ikkita hodisadan birini ro'y berishi ikkinchisini ro'y berishini inkor qilmasa, u holda bu hodisalar birgalikda deyiladi.

Ehtimol tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Bu tushunchaning bir necha xil ta'riflari mavjud. Hozircha biz ehtimolning klassik ta'rifini beramiz,

Bu maqsadda biz quyidagi misolni ko'ramiz:

Yashikda yaxshilab aralashtirilgan 6 ta bir xil shar bo'lib, ulardan ikkitasi qizil, 3 tasi ko'k va 1 tasi oq bo'lsin deylik. Shubhasiz yashikdan tavakkaliga rangli shar olinish imkoniyati oq shar olinish imkoniyatidan ko'proq. Bu imkoniyatni son bilan xarakterlash mumkinmi? Ha, mumkin ekan. Mana shu songa hodisaning ehtimoli deyiladi. Shunday qilib ehtimol, hodisaning ro'y berish imkoniyatini xarakterlovchi sondir.

Aytaylik, rangli shar chiqishini A hodisa deylik. Sinashda ro'y berishi mumkin bo'lgan har bir hodisani elementar hodisa deymiz. Ularni E_1, E_2, E_3, va hokazolar bilan belgilaymiz. Bizning misolda 6 ta elementar natija bor. E_1-oq shar, E_2, E_3-qizil shar, E_4, E_5, E_6-ko'k shar chiqdi natijalaridir.

Aniqki bu natijalar yagona mumkin bo'lgan va teng imkoniyatli hodisalardir.

Bizni qiziqtirayotgan hodisani ro'y berishiga olib keladigan elementar natijalarni bu hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi hodisalar deyiladi. Bizni misolda A hodisaning ro'y berishiga quyidagi 5 ta natija E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 lar qulaylik tug'diradi.

A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi elementar natijalar sonining ularning umumiy soniga nisbati A hodisaning ehtimoli deyiladi va $P(A)$ bilan belgilanadi. Ko'rilayotgan misolda jami elementar natijalar 6 ta, ulardan 5 tasi A hodisaga qulaylik tug'diradi. Demak, olingan sharning rangli bo'lish ehtimoli: $P(A) = \frac{5}{6}$.

Umuman olganda, A hodisaning ehtimoli deb, sinashning bu hodisani ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi natijalari sonining sinashning yagona mumkin bo'lgan va teng imkoniyatli elementar natijalari jami soniga nisbatiga aytiladi.

Shunday qilib A hodisaning ehtimoli quyidagi formula bilan aniqlanadi: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Bu yerda m, A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi elementar natijalar soni; n-sinashning mumkin bo'lgan barcha elementar natijalari soni. Bu yerda elementar natijalar yagona mumkin bo'lgan va teng imkoniyatli deb faraz qilinadi.

Ehtimolning ta'rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi.

1) Muqarrar hodisaning ehtimoli 1 ga teng. Bu holda m=n bo'lgani uchun $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1$ bo'ladi.

2) Mumkin bo'lmagan hodisaning ehtimoli nolga teng. Bu holda m=0 bo'lgani uchun $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$ bo'ladi.

3) Tasodifiy hodisaning ehtimoli musbat son bo'lib, u nol va bir orasida bo'ladi. Haqiqatan ham $0 < m < n$ bo'lgani uchun $0 < \frac{m}{n} < 1$ bo'ladi. Demak, $0 < P(A) < 1$. Ehtimolning nolga va birga teng bo'lishi mumkinligini e'tiborga olsak, $0 \leq P(A) \leq 1$ deb yozish mumkin.

Ehdi ehtimol tushunchasi bilan o'zaro bog'liq bir tushuncha nisbiy chastota tushunchasi bilan tanishamiz.

Nisbiy chastota ehtimol tushunchasi bilan bir qatorda ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalari jumlasiga kiradi.

Hodisaning nisbiy chastotasi deb, hodisa ro'y bergan sinashlar sonining aslida o'tkazilgan jami sinashlar soniga nisbatiga aytiladi. Shunday qilib A hodisaning nisbiy chastotasi $W(A) = \frac{m}{n}$ formula bilan aniqlanadi. Bu yerda m-hodisaning ro'y berishlar soni, n-sinashlarning jami soni.

Ehtimol va nisbiy chastota ta'riflaridan ko'rinib turibdiki, ehtimol tajribadan ilgari, nisbiy chastota esa tajribadan keyin hisoblanadi.

1-misol. Texnikaviy nazorat bo'limi tasodifiy tanlangan 80 ta detal partiyasidan 3 ta yaroqsiz detal topdi. Yaroqsiz detal chiqishining nisbiy chastotasi $W(A) = \frac{3}{80}$ ga teng.

2-misol. Nishonga qarata 24 ta o'q uzildi va ulardan 19 tasi nishonga tekkanligi qayd qilindi. Nishonga tegishning nisbiy chastotasi $W(A) = \frac{19}{24}$ ga teng.

Turli tajribalarda nisbiy chastota juda oz o'zgarib, biror o'zgarmas son atrofida tebranadi. Shunday qilib, tajriba yo'li bilan nisbiy chastota aniqlangan bo'lsa, u holda uni ehtimolning taqribiy qiymati sifatida olish mumkin.

3-misol. Shved statistikasi ma'lumotlariga qaraganda, 1935-yida qiz bolalar tug'ilishining nisbiy chastotasi oylar bo'yicha quyidagi sonlar bilan harakterlanadi: 0,486, 0,489, 0,471, 0,478, 0,482, 0,462, 0,484, 0,485, 0,491, 0,482, 0,473.

Nisbiy chastota 0,482 soni atrofida tebranadi.

4-misol. Tanga tashlangan. Unda quyidagi jadvaldagi raqamlar qayd qilingan.

Tanga tashlashlar Soni	Gerbli tomon tushishlar soni	Nisbiy chastota
4040	2048	0,5059
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,05005

Ko'rinib turibdiki, bu yerda ham nisbiy chastota 0,5 soni atrofida tebranib turibdi.

Teorema: Birgalikda bo'lmagan ikkita hodisadan qaysinisi bo'lsa ham, birining ro'y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng.

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Isbot: n-sinashning mumkin bo'lgan elementar natijalar soni; m_1-A hodisaga qulaylik tug'diradigan natijalarning soni; m_2-B hodisaga qulaylik tug'diradigan natijalarning soni.

Yo A hodisa, yoki B hodisa ro'y berishiga qulaylik tug'diradigan natijalarning soni m_1+m_2. Demak

$$P(A+B) = \frac{m_1+m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B).$$

Natija: har ikkitasi birgalikda bo'lmagan bir nechta hodisalardan qaysinisi bo'lsa ham, birining ro'y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollari yig'indisiga teng.

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

Isbot: A, B va C hodisalarni qaraylik. Ularning hech bir 2 tasi birgalikda bo'lmaganligi uchun

$$P(A+B+C) = P[(A+B)+C] = P(A+B) + P(C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

1-misol. Yashikda 30 ta shar bor, ulardan 10 tasi qizil, 5 tasi ko'k, 15 tasi oq. Rangli shar chiqish ehtimolini toping.

Yechish. Rangli shar chiqishi yo qizil shar, yoki ko'k shar chiqishini bildiradi. Qizil shar chiqish (A hodisa) ehtimoli $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$. Ko'k shar chiqish (B hodisa) ehtimoli $P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

A va B hodisalar birgalikda emas, ya'ni qizil rangli shar chiqishi ko'k rangdagi shar chiqish hodisasini yo'qga chiqaradi. Demak, yuqoridagi teoremaga asosan

$$P(A+B) = P(A)+P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Teorema: Qarama-qarshi hodisalar ehtimollarining yig'indisi 1 ga teng, ya'ni

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Isbot: Qarama-qarshi hodisalar to'la gruppa tashkil qiladi. To'la gruppa tashkil qiluvchi hodisalar ehtimollari yig'indisi 1 ga teng.

Eslatma. A hodisaning ehtimolini topishda, ko'pincha $\bar{A}$ hodisa ehtimolini hisoblash, keyin esa izlanayotgan ehtimolni $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ bo'yicha topish qulaydir.

Amaliyotda juda ko'p masalalarni hal qilishda ehtimoli juda kichik, ya'ni nolga yaqin bo'lgan hodisalar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Kichik ehtimolli A hodisa yagona sinashda ro'y bermaydi deb hisoblash mumkinmi. Bunday xulosa qilish mumkin emas, chunki kichik ehtimolli bo'lsada, A hodisa ro'y berib qolishi mumkin.

Agar tasodifiy hodisa juda kichik ehtimolga ega bo'lsa, u holda amalda bu hodisa yagona tajribada ro'y bermaydi deb hisoblash mumkin.

Quyidagicha savolning tug'ilib qolishi tabiiy: yagona sinashda hodisaning ro'y berishi mumkin emas deb hisoblash uchun uning ehtimoli qanchalik bo'lishi kerak. Bu savolga bir qiymatli javob berish mumkin emas.

Mazmunan har xil bo'lgan masalalar uchun javob ham turlichadir. Masalan: Parashyutdan sakralganda parashyutning ochilmaslik ehtimoli 0,01 ga teng bo'lsa, bunday parashyutlardan foydalanishga yo'l qo'yib bo'lmaydi. Uzoqqa qatnaydigan poyezdning kechikib kelish ehtimoli 0,01 ga teng bo'lganda esa poyezdning o'z vaqtida yetib kelishiga ishonch hosil qilish mumkin.

Agar A hodisaning ehtimoli nolga teng bo'lsa, u holda $\bar{A}$ hodisaning ehtimoli 1 ga yaqin bo'ladi.

Agar tasodifiy hodisa birga yaqin ehtimolga ega bo'lsa, u holda yagona tajribada bu hodisa amalda ro'y beradi deb hisoblash mumkin.

Teorema: Ikkita erkli hodisaning birgalikda ro'y berish ehtimoli shu hodisalarning ehtimollari ko'paytmasiga teng.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Natija: Birgalikda bog'liq bo'lmagan bir nechta hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimoli shu hodisalarning ehtimollarini ko'paytmasiga teng.

$$P(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

1.1. Kamida bitta hodisaning ro'y berish ehtimoli

Teorema. Birgalikda bog'liq bo'lmagan A_1, A_2, A_3, ..., A_n hodisalardan kamida bittasining ro'y berish ehtimoli bir soni bilan $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$, ..., $\overline{A_n}$ qarama-qarshi hodisalar ehtimollarining ko'paytmasi orasidagi ayirmaga teng:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n.$$

Xususiy hol. Agar A_1,A_2,A_3, ... ,A_n hodisalar q ga teng bo'lgan bir xil ehtimolga ega bo'lsa, u holda shu hodisalardan kamida bittasining ro'y berish ehtimoli

$$P(A) = 1 - q^n \text{ ga teng.}$$

1.2. Shartli ehtimol

A va B hodisalar bog'liq bo'lsin. Hodisalarning bog'liqligi ta'rifiga ko'ra bu hodisalardan birining ro'y berish ehtimoli ikkinchisining ro'y berish yoki ro'y bermasligiga bog'liqdir. Shuning uchun bizni, masalan, B hodisaning ehtimoli qiziqtirayotgan bo'lsa, u holda A hodisa ro'y bergan yoki ro'y bermaganligini bilishimiz muhimdir.

B hodisaning A hodisa ro'y berdi degan farazda hisoblangan ehtimoliga shartli ehtimol deyiladi.

A va B hodisalar bog'liq bo'lib, P(A) va P_A(B) ehtimollar ma'lum bo'lsin. Bu hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimolini, ya'ni bir vaqtda ham A hodisa, ham B hodisa ro'y berish ehtimolini qanday topish mumkin. Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

Teorema. 2 ta bog'liq hodisaning birgalikda ro'y berish ehtimoli ulardan birining ehtimolini shu hodisa ro'y berdi deb faraz qilingandagi ikkinchi hodisaning shartli ehtimoliga ko'paytmasiga teng.

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Xususan, 3 ta bog'liq hodisa uchun quyidagi tenglik o'rinlidir.

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C).$$

Teorema. Birgalikda bo'lgan ikkita hodisadan kamida bittasining ro'y berish ehtimoli shu hodisalarning yig'indisidan ularning birgalikda ro'y berish ehtimoli ayrilganiga teng. Ya'ni

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Eslatma 1. Bu formulani qo'llashda A va B hodisalar o'zaro erkli ham, bog'liq bo'lishi mumkin ekanligini nazarda tutish kerak.

Erkli hodisalar uchun $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$.

Bog'liq hodisalar uchun esa $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B)$.

Eslatma 2. Agar A va B hodisalar birgalikda bo'lmasa, u holda ularning birgalikda ro'y berishidan iborat bo'lgan hodisa mumkin bo'lmagan hodisa bo'ladi, ya'ni $P(AB) = 0$ bo'ladi. U holda

$P(A + B) = P(A) + P(B)$ bo'ladi.

Faraz qilaylik, A hodisa to'la gruppa tashkil etuvchi birgalikda bo'lmagan $B_1, B_2, \dots, B_n$ hodisalardan bittasining ro'y berganlik shartida ro'y bersin. Bu hodisalarning ehtimollari va A hodisaning $P(B_1)/A/, P(B_2)/A/, \dots, P(B_n)/A/$ shartli ehtimollari ma'lum bo'lsin. A hodisaning ehtimolini qanday topish mumkin? Bunga quyidagi teorema javob beradi.

Teorema. To'la gruppa tashkil etuvchi birgalikda bo'lmagan $B_1, B_2, \dots, B_n$ hodisalardan bittasining ro'y berganlik shartidagina ro'y beradigan A hodisaning ehtimoli, shu hodisalardan har birining ehtimolini A hodisaning mos shartli ehtimollariga ko'paytmasi yig'indisiga teng:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A).$$

Bu formula to'la ehtimol formulasi deyiladi.

1.3.Gipotezalar ehtimoli. Bayes formulasi

Faraz qilaylik, A hodisa to'la gruppa tashkil etuvchi birgalikda bo'lmagan $B_1, B_2, \dots, B_n$ hodisalardan biri ro'y berish shartidagina ro'y berishi mumkin bo'lsin. Bu hodisalardan qaysi biri ro'y berishi avvaldan noma'lum bo'lgani sababli ular gipotezalar deyiladi. A hodisaning ro'y berish ehtimoli quyidagi formuladan topiladi:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A) \quad (1).$$

Faraz qilaylik, sinash o'tkazilgan bo'lib, uning natijasida hodisa ro'y bergan bo'lsin. Gipotezalarning ehtimollari qanday o'zgarganligini aniqlash masalasini qo'yaylik. Boshqacha aytganda $P_A(B_1), P_A(B_2), \dots, P_A(B_n)$ shartli ehtimollarni izlaymiz.

Avval $P_A(B_1)$ shartli ehtimolni aniqlaymiz. Ko'paytirish teoremasiga asosan.

$$P(AB_1) = P(A) \cdot P_A(B_1) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A).$$

Bundan $P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}$ bo'lib,

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}.$$

Shu usulda qolganlarini ham topish mumkin. Bu formulalar Bayes formulalari deyiladi.

Bayes formulalari sinash natijasida A hodisa ro'y berganligi ma'lum bo'lgandan so'ng gipotezalar ehtimollarini qayta baholashga imkon beradi.

Agar bir nechta sinash o'tkazilayotgan bo'lib, har bir sinashda A hodisaning ro'y berish ehtimoli boshqa sinash natijalariga bog'liq bo'lmasa, u holda bunday sinashlar A hodisaga nisbatan erkli deyiladi.

Faraz qilaylik, n ta o'zaro erkli sinash o'tkazilayotgan bo'lib, ularning har birida A hodisa yo ro'y berish, yoki ro'y bermasligi mumkin bo'lsin. A hodisaning ehtimoli har bir sinashda bir xil va p deylik. Demak, har bir sinashda ro'y bermaslik ehtimoli ham o'zgarmas va $q = 1 - p$ ga teng.

n ta sinashda A hodisaning rosa k marta ro'y berish va demak $n - k$ marta ro'y bermaslik ehtimolini hisoblashni oldimizga maqsad qilib qo'yaylik. Shuni aytib o'tish mumkinki, A hodisaning k marta aniq bir ketma-ketlikda ro'y berishi talab qilinmaydi. Masalan, A hodisaning 4 ta sinashda 3 marta ro'y berishi to'g'risida gap ketsa, u holda quyidagi murakkab hodisalar bo'lishi mumkin.

$$AAA\bar{A}, \quad AA\bar{A}A, \quad A\bar{A}AA \text{ va } \bar{A}AAA.$$

$AAA\bar{A}$ yozuv birinchi, ikkinchi va uchinchi sinashda A hodisa ro'y berib to'rtinchisida ro'y bermasligini bildiradi. Izlanayotgan ehtimolni

$P_n(k)$ orqali belgilaymiz. Masalan, $P_5(3)$ yozuv 5 ta sinashda hodisa 3 marta ro'y berishi, demak 2 marta ro'y bermaslik ehtimolini bildiradi.

n ta sinashda A hodisaning rosa k marta ro'y berish va n-k marta ro'y bermasligidan iborat bo'lgan 1 ta murakkab hodisaning ehtimoli erkli hodisalar ehtimollarini ko'paytirish teoremasiga asosan $p^k \cdot q^{n-k}$ ga teng.

Bunday murakkab hodisalar n ta elementdan k tadan nechta gruppani tuzish mumkin bo'lsa, shuncha, ya'ni C_n^k ta bo'ladi. Bu murakkab hodisalar birgalikda bo'lmaganligi uchun birgalikda bo'lmagan hodisalar ehtimollarini qo'shish teoremasiga asosan izlanayotgan ehtimol barcha mumkin bo'lgan murakkab hodisalar ehtimollari yig'indisiga teng. Bu murakkab hodisalarning ehtimollari bir xil bo'lgani uchun izlanayotgan ehtimol bitta murakkab hodisaning ehtimolini ularning soniga ko'paytirganiga teng, ya'ni

$P_{n(k)} = C_n^k \cdot p^k \cdot \ q^{(n-k)}$ yoki $P_{n(k)} = \frac{n!}{k!(n-k)} \cdot p^k \cdot \ q^{n-k}$ dan iborat.

Bu formula <u>Bernulli formulasi</u> deyiladi.

1.4. Laplasning lokal teoremasi

Yuqorida biz n ta sinashda hodisaning rosa k marta ro'y berish ehtimolini hisoblashga imkon beruvchi Bernulli formulasini keltirib chiqardik. Bu formulani keltirb chiqarishda har bir sinashda hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas deb faraz qildik.

<u>Laplasning lokal teoremasi.</u> Agar har bir sinashda A hodisaning ro'y berish ehtimoli p o'zgarmas bo'lib, nol va birdan farqli bo'lsa, u holda n ta sinashda A hodisaning rosa k marta ro'y berish ehtimoli $P_n(k)$ taqriban n qancha katta bo'lsa shuncha aniq

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x).$$

funksiyaning $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ dagi qiymatiga teng.

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiyadagi x argumentning musbat qiymatlariga mos kelgan funksiyaning qiymatlaridan tuzilgan jadvallar mavjud. Funksiya juft bo'lgani uchun bu jadvallardan x ning manfiy qiymatlari uchun ham foydalanish mumkin. Shunday qilib, n ta erkli sinashda A hodisaning rosa k marta ro'y berish ehtimoli taqriban quyidagiga teng bo'ladi.

$P_n \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, bu yerda, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ ga teng.

Faraz qilaylik n ta tajribaning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas va p ga teng bo'lsin. n ta tajribada A hodisaning kamida k_1 marta va ko'pi bilan k_2 marta ro'y berish ehtimoli $P_n(k_1, k_2)$ ni qanday hisoblash mumkin. Bu savolga Laplasning integral teoremasi javob beradi.

Teorema. Agar har bir sinashda A hodisaning ro'y berish ehtimoli p o'zgarmas bo'lib, u nol va birdan farqli bo'lsa, u holda n ta sinashda A hodisaning k_1 dan k_2 martagacha ro'y berish ehtimoli $P_n(k_1, k_2)$ taqriban quyidagiga teng.

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \qquad (*)$$

bu yerda $x' = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$ va $x'' = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$ ga teng.

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ uchun jadval mavjud.

$\Phi(x)$ funksiyani Laplas funksiyasi deyiladi. Laplas funksiyasi jadvalidan foydalanish mumkin bo'lishi uchun (*) formulani quyidagicha o'zgartiramiz.

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x'} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Shunday qilib n ta erkli sinashda A hodisaning k_1 dan k_2 martagacha ro'y berish ehtimoli

$$P_n(k_1, k_2) \simeq \phi(x'') - \phi(x')$$

ga teng. Bu yerda

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Misollar.

1. Yashikda 12 ta shar bo'lib, ulardan 3 tasi oq, 4 tasi qora va 5 tasi qizil. Yashikdan ixtiyoriy ravishda olingan sharning qora bo'lishi ehtimoli topilsin.

Yechish: Olingan sharning qora bo'lish hodisasini A deylik. U holda A hodisani ro'y berishiga imkoniyat yaratuvchi hodisalar soni m=4 va barcha mumkin bo'lgan hodisalar soni n=12.

Demak, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

2. Kitob 100 betdan iborat. Kitobning tasodifan ochilgan betida 5 raqamining qatnashishi ehtimoli topilsin.

Yechish: Barcha mumkin bo'lgan elementar hodisalar soni n=100 ga teng. Hodisaning ro'y berishiga imkoniyat yaratuvchi hodisalar soni m=19. Shuning uchun

$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{19}{100}=0{,}19$.

3. Ikkita tanga bir vaqtda tashlanadi. Ikkala tangada gerb tomonining tushish ehtimoli qanday bo'ladi ?

Yechish: Mumkin bo'lgan hollar quyidagi sxemadagiday bo'ladi?

Hollar	Birinchi tanga	Ikkinchi tanga
1-hol	Gerb	Gerb
2-hol	Gerb	Raqam
3-hol	Raqam	Gerb
4-hol	Raqam	Raqam

Mumkin bo'lgan hollar soni 4 ta. Hodisani ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi hollar soni 1 ta.

Demak, ikkala tangada gerbning tushish ehtimoli $P(A) = \frac{1}{4}$ ga teng.

4. Yashikda 6 ta ko'k, 4 ta yashil, 5 ta qizil, 5 ta oq va 10 ta qora shar bor. Yashikdan tavakkaliga bitta shar olindi. Olingan sharning rangli bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish: Rangli shar chiqish hodisasini A bilan belgilaymiz, ko'k rang chiqish hodisasaini B bilan, yashil rang chiqish hodisasini C bilan, qizil shar chiqish hodisasini D bilan, oq shar chiqish hodisasini E bilan, qora shar chiqish hodisasini esa K bilan belgilaymiz. U holda A=B+C+D bo'ladi. Birgalikda bo'lmagan hodisalar ehtimollarini qo'shish teoremasiga asosan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$P(A) = P(B + C + D) = P(B) + P(C) + P(D) = \frac{6}{30} + \frac{4}{30} + \frac{5}{30} = \frac{15}{30} = 0{,}5.$$

5. Mergan uchta sohaga ajratilgan nishonga qarata o'q uzmoqda. O'qning birinchi sohaga tegish ehtimoli 0,45, ikkinchi sohaga tegish ehtimoli 0,35. Merganning bitta o'q uzishda yo birinchi sohaga, yoki ikkinchi sohaga tekkizish ehtimolini toping.

Yechish: A-"mergan birinchi sohaga tekkizdi" va B-"mergan ikkinchi sohaga tekkizdi" hodisalari birgalikda emas (o'qning bir sohaga tegishi ikkinchi sohaga tegishini yo'qqa chiqaradi), shuning uchun qo'shish teoremasini qo'llash mumkin.

Izlanayotgan ehtimol quyidagiga teng:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}45 + 0{,}35 = 0{,}80.$$

6. Ikkita yashikda oq va qora sharlar bo'lib, birinchisida 7 ta qora, 3 ta oq shar bor. Ikkinchisida 9 ta qora 6 ta oq shar bor. Har bir yashikdan tavakkaliga bittadan shar olinadi. Ikkala sharning oq bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish: A-ikkala sharning oq bo'lish hodisasi, A_1 -birinchi yashikdan olingan sharning oq bo'lish hodisasi, A_2-ikkinchi yashikdan olingan sharning oq bo'lish hodisasi bo'lsin.

A_1 va A_2 hodisalar o'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalar bo'lgani uchun $A = A_1 \cap A_2$ va $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2)$.

Birinchi yashikda 10 ta shar, ikkinchi yashikda 15 ta shar bo'lganligi uchun

$$P(A_1) = \frac{3}{10}, \qquad P(A_2) = \frac{6}{15}, \qquad P(A) = \frac{3}{10} \bullet \frac{6}{15} = \frac{3}{25} = 0{,}12.$$

7. A, B, C va D hodisalar to'la gruppa tashkil qiladi. Agar $P(A) = 0{,}1$; $P(B) = 0{,}4$; $P(C) = 0{,}3$ bo'lsa, D hodisa ehtimoli qanchaga teng bo'ladi.

Yechish: A, B, C va D hodisalar to'la gruppa tashkil etganligi uchun $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$ yoki $0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3 + P(D) = 1$.

Bundan esa P(D)=1-0,8=0,2.

8. Biror kunda yog'ingarchilik bo'lish ehtimoli P=0,7. Shu kuni havo ochiq bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish: "Yog'ingarchilik bo'ladi" va "Havo ochiq bo'ladi" hodisalari o'zaro qarama-qarshi hodisalardir. Shuning uchun izlanayotgan ehtimol $q = 1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$ ga teng.

9. Nasos stansiyasida 4 ta nasos bo'lib, har bir nasosning tayin vaqtda ishlab turish ehtimoli 0,7 ga teng. Tayin vaqtda bitta nasosning ishlab turishi hodisasi A ning ehtimoli topilsin.

Yechish: Nasosning tayin vaqtda ishlab turish va ishlamay turish hodisalari o'zaro qarama-qarshi hodisalar bo'lganligi uchun $p + q = 1$. Bundan nasosning tayin vaqtda ishlamasligi ehtimoli $q = 1 - p = 1 - -0{,}7 = 0{,}3$.

Nasoslarning ishlashi o'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalar bo'lganligi sababli, izlanayotgan ehtimol quyidagicha bo'ladi:

$$P(A) = 1 - q^4 = 1 - 0{,}3^4 = 1 - 0{,}0081 = 0{,}9919.$$

10. Uchta samolyotdan bitta nishonga qarata bomba tashlanadi.

Birinchi, ikkinchi va uchinchi samolyotlardan tashlangan bombalarning nishonga tushish ehtimollari mos ravishda p_1 =0,4; p_2=0,5; p_3=0,7. Uchala samolyotdan bir yo'la bir marta tashlaganda kamida bitta bombaning nishonga tegish ehtimoli topilsin.

Yechish: Birinchi, ikkinchi va uchinchi samolyotlardan bombalarning nishonga tegish hodisalari A_1, A_2 va A_3 lar o'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalar bo'lgani uchun, ularga qarama-qarshi bo'lgan $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$ va $\overline{A_3}$ hodisalar ham o'zaro bog'liq emas va

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$
$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$
$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$

U holda izlanayotgan hodisani A deb olsak, uning ehtimoli quyidagicha bo'ladi:

$$P(A) = 1 - q_1 \bullet q_2 \bullet q_3 = 1 - 0{,}6 \bullet 0{,}5 \bullet 0{,}3 = 1 - 0{,}09 = 0{,}91.$$

11. Hodisaning birgalikda bog'liq bo'lmagan uchta sinashda kamida bir martta ro'y berish ehtimoli 0,936 ga teng. Hodisaning bitta sinashda

ro'y berish ehtimolini toping (har bir sinashda hodisaning ro'y berish ehtimoli bir xil deb faraz qilinadi).

Yechish: Qaralayotgan sinashlar birgalikda bog'liq bo'lmaganligi uchun $P(A) = 1 - q^4$ formulani qo'llashimiz mumkin. Shartga ko'ra $P(A) = 0,936$; $n = 3$. Demak, $0,936 = 1 - q^3$ yoki $q^3 = 1 - 0,936 =$ $= 0,064$.

Bundan q=$\sqrt[3]{0,064} = 0,4$ izlanayotgan ehtimol quyidagiga teng:

$$p = 1 - q = 1 - 0,4 = 0,6.$$

12. Ikkita mergan bittadan o'q uzishdi. Birinchi merganning nishonga tekkizish ehtimoli 0,7 ga, ikkinchi merganning nishonga tekkizish ehtimoli 0,6 ga teng. Merganlardan aqalli bittasini nishonga tekkizish ehtimoli topilsin.

Yechish: $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,6$. A va B hodisalar birgalikda bo'lgani uchun (lekin o'zaro bog'liq emas)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7 + 0,6 - 0,7 \bullet 0,6 = 0,88.$$

13. Agar Andijon shahrida iyul oyining o'rtacha 25 kunida havo ochiq bo'lsa, iyul oyining dastlabki 2 kunida havoni ochiq bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish: Birinchi iyulda havoning ochiq bo'lishini A hodisa deb belgilasak, u holda

$$P(A) = \frac{25}{31}$$

Birinchi iyul kuni havo ochiq bo'ldi degan shartda, ikkinchi iyulda havoni ochiq bo'lishi hodisasi B ning ehtimoli, ya'ni B ning shartli ehtimoli

$$P_A(B) = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

ga teng

Bu holda izlanayotgan ehtimollik, ya'ni iyul oyining dastlabki ikki kunida havoning ochiq bo'lish ehtimoli quyidagiga teng bo'ladi:

$$P(AB) = P(A) \bullet P_A(B) = \frac{25}{31} \bullet \frac{4}{5} = \frac{20}{31}.$$

14. Yashikda 5 ta oq, 4 ta qora va 3 ta ko'k shar bor. Har bir sinash yashikdan bitta shar olishdan iborat bo'lib, olingan shar yashikka qaytarib

solinmaydi. Birinchi sinashda oq shar chiqishi (A hodisa), ikkinchisida qora shar chiqishi (B hodisa) va uchinchisida ko'k shar chiqish (C hodisa) ehtimolini toping.

Yechish: Birinchi sinashda oq shar chiqish ehtimoli:

$$P(A) = \frac{5}{12}.$$

Birinchi sinashda oq shar chiqqan holda ikkinchi sinashda qora shar chiqish ehtimoli, ya'ni shartli ehtimoli:

$$P_A(B) = \frac{4}{11}.$$

Birinchi sinashda oq shar, ikkinchi sinashda qora shar chiqib uchinchi sinashda ko'k shar chiqishi ehtimoli, ya'ni shartli ehtimoli:

$$P_{AB}(C) = \frac{3}{10}.$$

Izlanayotgan ehtimol:

$$P(ABC) = P(A) \bullet P_A(B) \bullet P_{AB}(C) = \frac{5}{12} \bullet \frac{4}{11} \bullet \frac{3}{10} = \frac{1}{22}.$$

15. O'q otish qurolidan berilgan obyektga qarab bir xil shart-sharoitda 6 seriya otish bajarilgan:

Birinchi seriya 5 ta otishdan iborat bo'lib, undan ikkitasi mo'ljalga tekkan;

Ikkinchi seriya 10 ta otishdan iborat bo'lib, undan 6 tasi mo'ljalga tekkan;

Uchinchi seriya 12 ta otishdan iborat bo'lib, undan 7 tasi mo'ljalga tekkan;

To'rtinchi seriya 50 ta otishdan iborat bo'lib, undan 27 tasi mo'ljalga tekkan.

A hodisa o'qning mo'ljalga tegishi. Seriyalardan o'qning mo'ljalga tegishining nisbiy chastotasi topilsin.

Yechish:

$$W_1(A) = \frac{2}{5}; \quad W_2(A) = \frac{6}{10}; \quad W_3(A) = \frac{7}{12}; \quad W_4(A) = \frac{27}{50}.$$

16. Birinchi qutida 20 ta radiolampa bo'lib, ulardan 18 tasi standart; ikkinchi qutida esa 10 ta radiolampa bo'lib, ulardan 9 tasi standart. Ikkinchi qutidan tavakkaliga 1 ta lampa olinib, birinchi qutiga solingan.

Birinchi qutidan tavakkaliga olingan lampaning standart bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish: A bilan birinchi qutidan standart lampa olinganlik hodisasini belgilaymiz.

Ikkinchi qutidan yo standart lampa olingan (B_1 hodisa) yoki nostandart lampa olingan (B_2 hodisa) bo'lishi mumkin.

Ikkinchi qutidan standart lampa olinish ehtimoli:

$$P(B_1) = \frac{9}{10}.$$

Ikkinchi qutidan nostandart lampa olinish ehtimoli

$$P(B_2) = \frac{1}{10}.$$

Ikkinchi qutidan birinchi qutiga standart lampa olib qo'yilganlik shartida birinchi qutidan standart lampa olinishining shartli ehtimoli quyidagiga teng:

$$P_{B_1}(A) = \frac{19}{21}.$$

Ikkinchi qutidan birinchi qutiga nostandart lampa olib qo'yilganlik shartida birinchi qutidan standart lampa olinishining shartli ehtimoli quyidagiga teng:

$$P_{B_2}(A) = \frac{18}{21}.$$

Izlanayotgan ehtimol, ya'ni birinchi qutidan standart lampa olinish ehtimoli to'la ehtimol formulasiga ko'ra quyidagiga teng:

$$P(A) = P(B_1) \bullet P_{B_1}(A) + P(B_2) \bullet P_{B_2}(A) = \frac{9}{10} \bullet \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \bullet \frac{18}{21} = \frac{189}{210} = \frac{9}{10} = 0{,}9.$$

17. Zavod sexida tayyorlanadigan detallar ularning standartligini tekshirish uchun ikki nazoratchidan biriga tushadi. Detalning birinchi nazoratchiga tushish ehtimoli 0,6 ga, ikkinchi nazoratchiga tushish ehtimoli 0,4 ga teng. Yaroqli detalni standart deb tan olish ehtimoli birinchi nazoratchi uchun 0,94 ga, ikkinchisi uchun 0,98 ga teng. Tekshirish vaqtida yaroqli detal standart deb qabul qilinadi. Shu detalni birinchi nazoratchi tekshirganligini ehtimolini toping.

Yechish: A orqali yaroqli detal standart deb qabul qilinganlik hodisasini belgilaymiz. Ikki xil taxmin qilinishi mumkin:

1) Detalni birinchi nazoratchi tekshirgan(B_1 gipoteza)

2) Detalni ikkinchi nazoratchi tekshirgan (B_2 gipoteza).

Izlanayotgan ehtimollikni, ya'ni detalni birinchi nazoratchi tekshirganlik ehtimolini Bayes formulasi bo'yicha topamiz:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}.$$

Masala shartiga asosan $P(B_1) = 0{,}6$ (detalning birinchi nazoratchiga tushish ehtimoli; $P(B_2) = 0{,}4$ (detalning ikkinchi nazoratchiga tushish ehtimoli); $P_{B_1}(A) = 0{,}94$ (birinchi nazoratchining detalni yaroqli deb qabul qilish ehtimoli); $P_{B_2}(A) = 0{,}98$ (ikkinchi nazoratchining yaroqli detalni standart deb qabul qilish ehtimoli).

Izlanayotgan ehtimol:

$$P_A(B_1) = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}94}{0.6 \cdot 0{,}9 + 0.4 \cdot 0{,}98} = 0{,}59.$$

18. Bir sutkada elektr energiya sarfining belgilangan normadan ortib ketmaslik ehtimoli $p = 0{,}75$ ga teng. 6 sutkaning 4 sutkasi davomida elektr energiya sarfining normadan ortib ketmaslik ehtimoli topilsin.

Yechish: 6 sutkaning har birida elektr energiyaning normada sarflanish ehtimoli o'zgarmas va $p = 0{,}75$ ga teng. Demak, har bir sutkada elektr energiyaning normadan ortiq sarflanish ehtimoli ham o'zgarmas va $q = 1 - p = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$ ga teng.

Izlanayotgan ehtimol Bernulli formulasiga asosan quyidagiga teng:

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}(0{,}75)^4 \bullet (0{,}25)^2 = 15 \bullet \frac{3^4}{4^4} \bullet \frac{1}{6} = \frac{1215}{4096} \approx 0{,}3.$$

19. Agar har bir sinashda A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,2 ga teng bo'lsa, 400 ta sinashda bu hodisaning rosa 80 marta ro'y berishi ehtimolini toping.

Yechish: Shartga ko'ra $n = 400,\ k = 80,\ p = 0{,}2,\ q = 0{,}8$ Laplasning asimptotik formulasidan foydalanamiz:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \bullet \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \bullet \varphi(x) = \frac{1}{8}\varphi(x), \qquad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} =$$

$= \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = 0,\quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ funksiya qiymatlari jadvalidan $\varphi(0) = 0{,}3989$ ni topamiz. Bu holda izlanayotgan ehtimol:

$$P_{400(80)} = \frac{1}{8} \bullet 0{,}3989 = 0{,}0986.$$

20. Detalni texnikaviy nazorat bo'limi tekshirmagan bo'lish ehtimoli p=0,2 . Tasodifan olingan 400 ta detaldan 70 tadan 100 tagacha texnikaviy nazorat bo'limi tekshirmagan bo'lish ehtimolini toping.

Yechish: Shartga ko'ra $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, $n = 400$, $k_1 = 70$, $k_2 = 100$.

Laplasning integral teoremasidan foydalanamiz:

$$P_{400}(70, 100) \approx \phi(x'') - \phi(x').$$

Integrallashning yuqori va quyi chegaralarini hisoblaymiz:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}25\,; \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 2{,}5.$$

Demak, $P_{400}(70, 100) = \phi(2{,}5) - \phi(-1{,}5) = \phi(2{,}5) + \phi(1{,}5).$

Jadvaldan $\phi(2{,}5) = 0{,}4938$, $\phi(1{,}5) = 0{,}3944$ larni topamiz. U holda izlanayotgan ehtimollik

$$P_{400}(70, 100) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

1. Yashikda 50 ta bir xil detal bo'lib, ulardan 5 tasi bo'yalgan. Tavakkaliga bitta detal olinadi. Olingan detal bo'yalgan bo'lishi ehtimolini toping.

Javob: $p = 0{,}1$.

2. Kubning barcha yoqlariga 1 dan 6 gacha raqamlar yozilgan. Uni tashlaganda juft raqam tushishi ehtimolini toping.

Javob: $p = 0{,}5$.

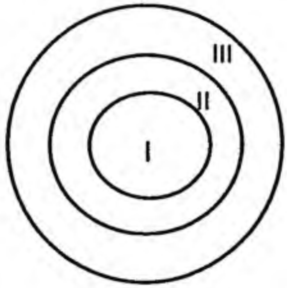
3. Qur'a tashlashda ishtirokchilar yashikdan 1 dan yuzgacha nomerlangan jeton oladilar. Tavakkaliga olingan birinchi jetonning nomerida 5 raqami uchramaslik ehtimoli topilsin.

Javob: $p = 0{,}81$.

4. 8 ta turli kitob bitta tokchaga tavakkaliga terib qo'yiladi. Tayin ikkita kitob yonma yon bo'lib qolish ehtimolini toping.

Javob: $p = \frac{7 \cdot 2! \cdot 6!}{8!} = \frac{1}{4}.$

5. Bir-biri bilan kesishmaydigan 3 ta zonadan tashkil topgan biror D sohaga qarata o'q otiladi (1- chizma).



1-Chizma

O'qning birinchi zonaga tushish ehtimoli $P(A_1) = \frac{5}{100}$, ikkinchi zonaga tushish ehtimoli $P(A_2) = \frac{10}{100}$, uchinchi zonaga tushish ehtimoli $P(A_3) = \frac{17}{100}$. O'qning D sohaga tushish ehtimoli qancha? (A hodisa D sohaga tushish hodisasidir).

Javob: $\frac{32}{100}$.

6. Butun terilgan paxtaning 10% sifatsiz bo'lib, sifatli paxtaning 80% i birinchi nav sifat belgisini qanoatlantiradi. Tavakkaliga tanlab olingan paxta buntining birinchi nav bo'lish ehtimolini toping.

Javob: 0,72 .

7. Bir o'rash mashinasida 4 ta ishchi ishlaydi. Har bir ishchi uchun o'ziga qarashli qismda ma'lum vaqt oralig'ida buzilish ro'y bermaslik hodisasi ehtimoli 0,6 ga teng. Biror vaqt oralig'ida: 1) To'rttala ishchining bo'sh bo'lish; 2) kamida birining band bo'lish hodisalari ehtimollarini hisoblang.

Javob: 1) 0,1206 ; 2) 0,8794.

8. Uchta o'yin soqqasi tashlanganda kamida bitta soqqada 6 ochko tushish (A hodisa) ehtimoli topilsin.

Javob: $\frac{91}{216}$

9. A hodisaning ikkita erkli sinashda kamida bir marta ro'y berish ehtimoli 0,75 ga teng. A hodisaning bitta sinashda ro'y berish ehtimolini toping (hodisaning ikkala sinashda ham ro'y berish ehtimoli bir xil deb hisoblanadi).

Javob: 0,5 .

10. Yig'uvchida 3 ta konik, 7 ta elliptik valchalar bor. Yig'uvchi tavakkaliga bitta valcha, keyin esa yana bitta valcha oldi. Olingan valchalardan birinchisi konik valcha, ikkinchisi esa eliptik valcha bo'lish ehtimolini toping.

Javob: $\frac{7}{30}$.

11. Birinchi va ikkinchi o'q otish qurollaridan o'q otishda nishonga tekkizish ehtimollari mos ravishda p_1=0,7 va p_2=0,8 larga teng. Bitta otishda o'q otish qurollaridan kamida birining nishonga tekkizish ehtimolini toping.

Javob: 0,94 .

12. Ikkita yashikda detallar bor. Birinchi yashikdagi detalning standart bo'lish ehtimoli 0,8 ga. ikkinchi yashikdagi detalning standart bo'lish ehtimoli esa 0,9 ga teng . 363 ıliga tanlangan yashikdan olingan detalning standart bo'lish ehtimolini toping.

Javob: 0,85 .

13. Ikkita mergan bittadan o'q uzishdi. Birinchi merganning nishonga tekkizish ehtimoli 0,7 ga, ikkinchisiniki esa 0,6 ga teng. Merganlardan aqalli bittasi nishonga tekkizganligi ehtimolini toping.

Javob: 0,88 .

14. Sportchilar gruppasida 20 chang'ichi, 6 velosipedchi va 4 yuguruvchi bor. Saralash normasini bajarish ehtimoli chang'ichi uchun 0,9, velosipedchi uchun 0,8, yugiruvchi uchun 0,75. Tavakkaliga ajratilgan sportchining normani bajara olish ehtimolini toping.

Javob: 0,86 .

15. Birinchi yashikda 28 ta detal bo'lib, ulardan 15 tasi standart; ikkinchi yashikda 30 detal bo'lib, ulardan 24 tasi standart; uchinchi yashikda 10 ta detal bo'lib, ulardan 6 tasi standart. Tavakkaliga tanlangan yashikdan olingan detalning standart bo'lishi ehtimolini toping.

Javob: $\frac{43}{60}$.

16. Merganning o'q uzishda nishonga tekkizish ehtimoli p=0,75 ga teng. Mergan 10 ta o'q uzganda 8 ta o'qni nishonga tekkizish ehtimolini toping.

Javob: 0,273 .

17. Beshta farzandi bor oiladagi bolalardan 3 tasi qiz bola va ikkitasi o'g'il bola bo'lish ehtimoli topilsin. Bunda qiz bola va o'g'il bola tug'ilish ehtimolligi bir xil deb hisoblanadi.

Javob: $P_{3,5}=C_5^3p^3q^2=\frac{5}{16}$.

18. Uchta bir xil yashik bo'lib, ularning birinchisida 20 ta oq shar, ikkinchisida 10 ta oq va 10 ta qora shar, uchinchisida esa 20 ta qora shar bor. Tavakkaliga tanlangan yashikdan oq shar olindi. Olingan sharning birinchi yashikdan olingan bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $\frac{2}{3}$.

19. Sexda 100 ta bir xil tipli stanok bor. Ularning har biri ma'lum vaqt oralig'ida $\frac{1}{2}$ ehtimol bilan to'xtaydi. Shu vaqt oralig'ida stanoklarni to'xtash soni 45 dan 60 gacha bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: 0,8180.

20. Ixtiyoriy olingan pillaning yaroqsiz chiqish ehtimoli 0,2 ga teng. Tasodifan olingan 400 ta pilladan 70 tadan 130 tagacha yaroqsiz bo'lishi ehtimoli topilsin.

Javob: 0,8943.

§2. Tasodifiy miqdorlar va ularning turlari. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi. Dispersiya va o'rtacha kvadratik chetlanish tushunchasi

1. Tasodifiy miqdor deb avvaldan noma'lum bo'lgan va oldindan inobatga olib bo'lmaydigan tasodifiy sabablarga bog'liq bo'lgan hamda sinash natijasida bitta mumkin bo'lgan qiymat qabul qiluvchi miqdorga aytiladi.

Tasodifiy miqdorlarga misollar keltiramiz.

1. O'yin soqqasi tashlanganda ochkolar soni tasodifiy miqdordir. 1,2,3,4,5 va 6 sonlar tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlaridir.

2. 100 ta chaqaloq ichida o'g'il bolalar soni 0,1,2,3,...100 qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan tasodifiy miqdordir.

Tasodifiy miqdorni X, Y, Z va hokazolar bilan belgilaymiz. Masalan: X tasodifiy miqdor 3 ta qiymat olish mumkin bo'lsa ularni x_1, x_2, x_3 lar bilan belgilaymiz.

Diskret tasodifiy miqdor deb ayrim ajralgan qiymatlarni ma'lum ehtimol bilan qabul qiluvchi miqdorga aytiladi. Diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari soni chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin.

Uzluksiz tasodifiy miqdor deb chekli yoki cheksiz oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan miqdorga aytiladi.

Yuqorida ko'rib o'tilgan 1 va 2 misoldagi tasodifiy miqdorlar diskret tasodifiy miqdorlardir.

Tasodifiy miqdorlarning mumkin bo'lgan qiymatlari bir xil bo'lib, ularning ehtimollari esa har xil bo'lishi mumkin. Shuning uchun diskret tasodifiy miqdorning berilishi uchun uning mumkin bo'lgan qiymatlarini sanab chiqish yetarli emas, ya'ni uni ehtimollarini ham ko'rsatish zarurdir.

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb, mumkin bo'lgan qiymatlar bilan ularning ehtimollari orasidagi moslikka aytiladi. Taqsimot qonunini jadval orqali, analitik usulda va grafik usulda berish mumkin.

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini jadval orqali berilishida jadvalning birinchi satri mumkin bo'lgan qiymatlardan ikkinchi satri esa ularning ehtimollaridan iborat bo'ladi.

X	$x_1,$	$x_2,$	$x_3,$	$\dots,$	x_n
P	$p_1,$	$p_2,$	$p_3,$	$\dots,$	p_n

Bitta sanashda tasodifiy miqdor mumkin bo'lgan qiymatlardan faqat bittasini qabul qilishini nazarda tutsak $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$ hodisalar to'la gruppa hosil qiladi deb xulosa qilamiz. U holda bu hodisalar ehtimollarning yig'indisi

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots p_n = 1 \qquad \text{bo'ladi.}$$

Faraz qilaylik, n ta erkli sinash o'tkazilayotgan bo'lib ularning har birida A hodisa ro'y berish yoki ro'y bermasligi mumkin bo'lsin. Har bir sinashda hodisaning ro'y berishi o'zgarmas va p deylik (u holda q ham o'zgarmas bo'ladi). X diskret tasodifiy miqdor sifatida bu sinashlarda A hodisaning ro'y berish sonini olamiz.

O'z oldimizga X miqdorning taqsimot qonunini topish masalasini qo'yamiz. Buning uchun X ning mumkin bo'lgan qiymatlari va ularning ehtimollarini topamiz. n ta sinashda A hodisa ro'y bermaydi, yoki 1 marta

2 marta, 3 marta,..., n marta ro'y berishi mumkin. Ya'ni mumkin bo'lgan qiymatlar:

$x_1 = 0, x_2 = 1, x_1 = 2, ... x_{n+1} = n$ lardan iborat.

Bularni ehtimollarini Bernulli formulasi bo'yicha topamiz.

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad \circledast \quad k = 0,1,2,3,...,n.$$

Bu izlanayotgan taqsimot qonunining analitik formulasidir. Ehtimollarning binominal taqsimot qonuni deb, Bernulli formulasi bilan aniqlanadigan ehtimollar taqsimotiga aytiladi.

$\circledast$ formulaning o'ng tomonida Nyuton binomi yoyilmasining umumiy hadi bor. Shuning uchun ham bu qonunni binominal qonun deyiladi. Uning ko'rinishi quyidagicha:

X	n	$n-1$	, ... ,	k	, ... ,	0
P	p^n	$np^{k-1}q$	, ... ,	$C_n^k p^k q^{n-k}$	, ... ,	q^n

Har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli juda kichik bo'lgan va juda ko'p sinashlar o'tkazilganda hodisaning rosa k marta, ro'y berish ehtimolini topish masalasini qaraylik (ilgari bu masalani yechishda Bernulli formulasidan va n yetarlicha katta bo'lganda Laplas formulasidan foydalanganmiz). Lekin bu yerda n ham juda katta va ehtimoli juda kichik bo'lgan holni ko'ramiz.

Quyidagicha $np = \lambda$ shartni qo'yaylik. Bizni qiziqtirayotgan ehtimolni hisoblash uchun Bernulli formulasidan foydalanamiz.

$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...[n-(k-1)]}{k!} p^k (1-p)^{n-k}$; $np = \lambda$ dan

$p = \frac{\lambda}{n}$, demak, $P_n(k) = \frac{n(n-1)...[n-k+1]}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$ $\cdot$ n ni juda kattaligini e'tiborga olib $P_n(k)$ o'rniga $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(k)$ ni topamiz.

$$P_n(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)...[n-(k-1)]}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot 1;\ P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Bu formula ommaviy kam ro'y beradigan hodisalar ehtimollarining Puasson taqsimoti qonunini ifodalaydi.

Hodisalar oqimi deb, vaqtning tasodifiy momentilarida ro'y beruvchi hodisalar ketma-ketligiga aytiladi. Oqimga misol sifatida ATS ga, tez yordamga chaqiriqlarning kelishi, aeroportga samolyotlarning qo'nishi, maishiy xizmat korxonalariga odamlarning kelishi va hokazolar misol bo'la oladi.

Oqimning intensivligi λ deb vaqt birligi ichida ro'y beruvchi hodisalarning o'rtacha soniga aytiladi.

Agar oqimning o'zgarmas intensivligi ma'lum bo'lsa, u holda t vaqt davomida eng oddiy oqimning, ya'ni k ta hodisaning ro'y berish ehtimoli quyidagi formula bilan hisoblanadi.

$$p_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}.$$

Taqsimot qonuni tasodifiy miqdorni to'la xarakterlashini ko'rib o'tdik. Lekin, ko'pincha taqsimot qonuni noma'lum bo'lib, kam ma'lumotlar bilan cheklanishga to'g'ri keladi. Ba'zan tasodifiy miqdorni yig'ma tasvirlaydigan sonlardan foydalanishga to'g'ri keladi. Bunday sonlar tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari deyiladi. Muhim sonli xarakteristikalarga matematik kutilma tegishlidir. Matematik kutilma taqriban tasodifiy miqdorning o'rtacha qiymatiga teng.

Faraz qilaylik n ta sinash o'tkazilgan bo'lib, ularda X tasodifiy miqdor m_1 marta x_1 qiymatni, m_2 marta x_2 qiymatni va hokazo, m_k marta x_k qiymatni qabul qilgan, shu bilan birga $m_1 + m_2 + m_3 + + \cdots + m_k = n$ bo'lsin. U holda x qabul qilgan barcha qiymatlar yig'indisi

$x_1 \cdot m_1 \quad + x_2 \cdot m_2 \quad + x_3 \cdot m_3 \quad \ldots x_k \cdot m_k$ ga teng.

Tasodifiy miqdor qabul qilgan barcha qiymatlarning o'rtacha arifmetik qiymati $\bar{x}$ ni topaylik, buning uchun topilgan yig'indinini sinashlar jami soniga bo'lamiz.

$$\bar{X} = \frac{x_1 \cdot m_1 \quad + x_2 \cdot m_2 \quad + x_3 \cdot m_3 \quad \ldots x_k \cdot m_k}{n} \quad yoki$$

$$\bar{X} = x_1 \cdot \frac{m_1}{n} + x_2 \cdot \frac{m_2}{n} + \cdots x_k \cdot \frac{m_k}{n} \qquad (*)'$$

$\frac{m_1}{n}$ nisbat x_1 qiymatning w_1 nisbiy chastotasi $\frac{m_2}{n}$ nisbat x_2 qiymatning w_2 nisbiy chastotasi $\frac{m_3}{n}$ nisbat x_3 qiymatning nisbiy chastotasi va hokazolar ekanligini e'tiborga olsak, u holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\bar{X} = x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + x_3 \cdot w_3 + x_k \cdot w_k \qquad \circledast''$$

Sinashlar sonini yetarlicha katta deb faraz qilaylik, u holda

$w_1 = p_1, \quad w_2 = p_2, \quad w_3 = p_3, \ldots, w_k = p_k$ bo'lib $\circledast''$ munosabat $\bar{X} \simeq x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \cdots + x_k p_k$ ko'rinishga keladi.

Bu tenglikning o'ng tomoni $M(x)$ dan iborat. Demak $\bar{X} = M(x)$ bo'ladi. Demak matematik kutilma tasodifiy miqdorning kuzatilayotgan qiymatlarini o'rtacha arifmetik qiymatiga teng ekan.

Matematik kutilma quyidagi xossaga ega:

1-xossa. O'zgarmas miqdorning matematik kutilmasi shu o'zgarmasning o'ziga teng: ya'ni $M(C) = C$.

2-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini matematik kutilma belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin, ya'ni $M(CX) = CM(X)$.

3-xossa. X va Y erkli tasodifiy miqdorlar ko'paytmasi matematik kutilmasi ularning matematik kutilmalari ko'paytmalariga teng.

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$$

Natija. Bir nechta o'zaro erkli tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilmasi ularning matematik kutilmalari ko'paytmasiga teng. Masalan, X,Y,Z 3 ta o'zaro erkli tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda quyidagi tenglik o'rinlidir

$$M(XYZ) = M(X) \cdot M(Y) \cdot M(Z)$$

4-xossa. Ikkita tasodifiy miqdor yig'indisining matematik kutilmasi qo'shiluvchilarning matematik kutilmalari yig'indisiga teng:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y)$$

Natija. Bir nechta tasodifiy miqdorlar yig'indisining matematik kutilmasi qoshiluvchilar matematik kutilmalarining yig'indisiga teng.

$$M(X + Y + Z) = M[(X + Y) + Z] = M(X + Y) + M(Z) = M(X) + M(Y) + M(Z).$$

Faraz qilaylik, n ta erkli sinash o'tkazilayotgan bo'lib, ularning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimolli o'zgarmas va p ga teng bo'lsin. Bu sinashlarda A hodisa ro'y berishining o'rtacha soni qanchaga teng?

Bu savolga quyidagi teorema javob beradi:

Teorema: n ta erkli sinashda A hodisa ro'y berishi sonining matematik kutilmasi, sinashlar sonini har bir sinashda hodisaning ro'y berish ehtimoliga ko'paytirilganiga teng:

$$M(X) = np.$$

Aytaylik X va Y tasodifiy miqdorlar quyidagicha taqsimot qonuni bilan berilgan bo'lsin.

X	-0,01	0,01	y	-100	100
P	0,5	0,5	p	0,5	0,5

$M(X) = -0.01 \cdot 0.5 + 0.01 \cdot 0.5 = 0,\qquad M(Y) = 100 \cdot 0.5 + 100 \cdot 0.5 = 0$

Ikkalasining ham matematik kutilmasi bir xil, mumkin bo'lgan qiymatlari esa har xil. X ning mumkin bo'lgan qiymatlari o'zining matematik kutilmasiga yaqin. Y ning mumkin bo'lgan qiymatlari esa matematik kutilmasidan ancha uzoq. Bundan ko'rinib turibdiki matematik kutilma tasodifiy miqdorni to'la xarakterlay olmas ekan. Shu sababli matematik kutilma bilan bir qatorda boshqa sonli xarakteristikalar kiritiladi. Jumladan, tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari uning matematik kutilmasi atrofida qanchalik tarqoqligini baholash uchun dispersiya deb ataluvchi sonli xarakteristikadan foydalaniladi.

Aytaylik, X tasodifiy miqdor, M(X) esa uning matematik kutilmasi bo'lsin, X-M(X) ni qaraymiz.

Chetlanish deb, tasodifiy miqdor bilan uning matematik kutilmasi orasidagi farqqa aytiladi. Yani X-M(X).

X ning taqsimot qonuni ma'lum bo'lsin.

X	$x_1,$	$x_2,$	$x_3,$	$\dots ,$	x_n
P	$p_1,$	$p_2,$	$p_3,$	$\dots ,$	p_n

Chetlanishning taqsimot qonunini yozamiz. U quyidagicha bo'ladi.

$X - M(X)$	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	$\dots x_n - M(X)$
P	p_1	p_2	$\dots \quad p_n$

Teorema: Chetlanishning matematik kutilmasi nolga teng. Ya'ni

$$M[X - M(X)] = 0.$$

Isbot: $M[X - M(X)] = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0$

Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi (tarqoqligi) deb, tasodifiy miqdorni o'zining matematik kutilmadan chetlanish kvadratning matematik kutilmasiga aytiladi.Yani

$D(X) = M[X - M(X)]^2$ ga aytiladi.

Tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan bo'lsin.

X	x_1,	x_2,	x_3,	... ,	x_n
P	p_1,	p_2,	p_3,	... ,	p_n

Chetlanish kvadratining taqsimot qonunini yozamiz. U quyidagicha bo'ladi

$[X - M(X)]^2$	$[x_1 - M(X)]^2$	...	$[x_n - M(X)]^2$
P	p_1	p_2 ...	p_n

Ta'rifga asosan, $D(X) = M[X - M(X)]^2 = [x_1 - M(X)]^2 p_1 + $ $+[x_1 - M(X)]^2 p_2 + \ldots + [x_n - M(X)]^2 p_n.$

Demak, diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi ham o'zgarmas son ekan.

Dispersiyani hisoblashda ko'pincha quyidagi teoremani qo'llash qulay bo'ladi.

Teorema: Dispersiya X tasodifiy miqdor kvadratining matematik kutilmasidan X ning matematik kutilmasi kvadratining ayrilganiga teng. Ya'ni, $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ ga teng.

Isbot. $D(X) = M[X - M(X)]^2 = M[X^2 - 2M(X) \cdot X + M^2(X)] = $ $= M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$

Dispersiya quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. C o'zgarmas miqdorning dispersiyasi nolga teng, ya'ni $D(C) = 0$.

Isbot. $D(C) = M[C - M(C)]^2$;

$D(C) = M[C - C]^2 = M[0] = 0.$

2-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini kvadratga ko'tarib dispersiya belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni

$D(CX) = C^2 D(X).$

Isbot: $D(CX) = M[CX - M(CX)]^2 = M[CX - CM(X)]^2 = $ $= M[C^2(X - M(X))^2] = C^2 M[X - M(X)]^2 = C^2 D(X).$

3-xossa: 2 ta erkli tasodifiy miqdor yig'indisining dispersiyasi bu miqdorlar dispersiyalarining yig'indisiga teng. Ya'ni

$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$

1-natija. $D(X + Y + Z) = D(X) + D(Y) + D(Z).$

2-natija. $D(C + X) = D(X)$.

4-xossa. 2 ta erkli tasodifiy miqdor ayirmasining dispersiyasi ularning dispersiyalari yig'indisiga teng. Ya'ni

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli bir xil bo'lgan n ta erkli sinash o'tkazilayotgan bo'lsin.

Bu sinashlarda hodisaning ro'y berish sonini dispersiyasi qanday aniqlanadi. Bunga quyidagi teorema javob beradi.

Teorema: Har birida A hodisaning ro'y berishi ehtimoli p o'zgarmas bo'lgan n ta erkli sinashda bu hodisa ro'y berishlari sonining dispersiyasi sinashlar sonining bitta sinashda hodisaning ro'y berish va ro'y bermaslik ehtimollariga ko'paytirilganiga teng. Ya'ni

Ya'ni: $D(X) = npq$.

Tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarini uning o'rtacha qiymati atrofida tarqoqligini baholash uchun dispersiyadan tashqari yana ba'zi bir boshqa xarakteristikalar ham xizmat qiladi. Ular jumlasiga o'rtacha kvadratik chetlanish kiradi.

X tasodifiy miqdorning <u>o'rtacha kvadratik chetlanishi</u> deb, dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi. Ya'ni $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Bir nechta o'zaro erkli tasodifiy miqdorlarni o'rtacha kvadratik chetlanishlari ma'lum bo'lsin. Bu miqdorlar yig'indisining o'rtacha kvadratik chetlanishini qanday topish mumkin.

Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

Teorema: Chekli sondagi o'zaro erkli tasodifiy miqdorlar yig'indisining o'rtacha kvadratik chetlanishi bu miqdorlar o'rtacha kvadratik chetlanishlari kvadratlari yig'indisidan olingan kvadratik ildizga teng. Ya'ni.

$$\sigma(X_1 + X_2 + \cdots X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2)^2 + \cdots + \sigma^2(X_N)}.$$

Misollar:

1. Talabalar bitiruv kechasida o'yin o'tkazish maqsadida 100 ta bilet chiqarilgan. Unda bitta 5 ming so'mlik va o'nta ming so'mlik yutuq bor. Bitta bileti bor talabaning yutuqlari taqsimot qonunini toping.

Yechish: X ning mumkin bo'lgan qiymatlarini yozamiz:

$$x_1 = 5, \qquad x_2 = 1, \ x_3 = 0$$

Bu mumkin bo'lgan qiymatlarning ehtimollari quyidagicha:

$$p_1 = 0{,}01, \qquad p_2 = 0{,}1, \qquad p_3 = 1 - (0{,}01 + 0{,}1) = 0{,}89$$

Izlanayotgan taqsimot qonunini yozamiz:

X	5	10	10
P	0,01	0,1	0,89

2. Tanga ikki marta tashlandi. Gerbli tomon tushish sonini bildiruvchi X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini jadval ko'rinishida yozing.

Yechish: Tangani har tashlashda gerbli tomon tushish ehtimoli $p = \frac{1}{2}$, demak, gerbli tomon tushmaslik ehtimoli $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Tangani ikki marta tashlaganimizda gerbli tomoni yo 2 marta, yoki bir marta tushishi mumkin, yoki gerbli tomon mutlaqo tushmasligi mumkin. Shunday qilib, X ning mumkin bo'lgan qiymatlari quyidagilar:

$$x_1 = 2, \; x_2 = 1, \; x_3 = 0.$$

Bu mumkin bo'lgan qiymatlarning ehtimollarini Bernulli formulasidan foydalanib topamiz:

$$P_2(2) = C_2^2 p^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.25;$$

$$P_2(1) = C_2^1 pq = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0.5;$$

$$P_2(0) = C_2^0 q^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.25.$$

Izlanayotgan taqsimot qonunini yozamiz:

X	2	1	0
P	0,25	0,5	0,25

3. Zavod omborga 5000 ta sifatli mahsulot jo'natdi. Mahsulotning yo'lda shikastlanish ehtimoli 0,0002 ga teng. Omborga 3 ta yaroqsiz mahsulot kelishi ehtimolini toping.

Yechish: Shartga ko'ra $n = 5000, p = 0{,}0002, k = 3$. λ ni topamiz:

$$\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1.$$

Izlanayotgan ehtimol Puasson taqsimotiga asosan taqriban quyidagiga teng:

$$P_{500}(3) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}06.$$

4. Bir minutda telefon stansiyasiga o'rtacha ikkita chaqiriq keladi. 5 minut ichida a) 2 ta chaqiriq kelish; b) ikkitadan kam chaqiriq kelish; c) kamida ikkita chaqiriq kelish ehtimollarini toping. Chaqiriqlar oqimini eng oddiy deb hisoblanadi.

Yechish: Shartga asosan λ=2, t=5, k=2. Puasson formulasidan foydalanamiz:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}.$$

a) Izlanayotgan ehtimol, ya'ni 5 minut ichida 2 ta chaqiriq kelish ehtimoli:

$$P_2(2) = \frac{(10)^2 e^{-10}}{2!} = \frac{100 \cdot 0{,}000045}{2} = 0{,}000025.$$

Bu hodisaning amalda ro'y berishi deyarli mumkin emas.

b) "bitta ham chaqiriq kelmadi" va "bitta chaqiriq keldi" hodisalari birgalikda bo'lmagani uchun izlanayotgan ehtimol, ya'ni 5 minut ichida ikkitadan kam chaqiriq kelish ehtimoli qo'shish teoremasiga asosan:

$$P_5(k < 2) = P_5(0) + P_5(1) = e^{-10} + \frac{10 \cdot e^{-10}}{1!} = 0{,}000495.$$

Bu hodisaning amalda ro'y berishi deyarli mumkin emas.

c) "ikkitadan kam chaqiriq keldi" va "kamida ikkita chaqiriq keldi" hodisalari o'zaro qarama-qarshi hodisalar, shuning uchun izlanayotgan ehtimol, ya'ni 5 minut ichida kamida ikkita chaqiriq kelgan bo'lish ehtimoli:

$$P_5(k \geq 2) = 1 - P_5(k < 2) = 1 - 0{,}000495 = 0{,}999505.$$

Bu deyarli muqarrar hodisa.

5. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	3	5	2
P	0,1	0,6	0,3

Uning matematik kutilmasi topilsin.

Yechish: Izlanayotgan matematik kutilma

$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$ formuladan topiladi. Demak, $M(X) =$
$= x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}3 = 0{,}3 + 3 + 0{,}6 =$
$= 3{,}9.$

6. Erkli X va Y tasodifiy miqdorlar quyidagi taqsimot qonunlari bilan berilgan:

X	5	2	4		Y	7	9
P	0,6	0,1	0,3		P	0,8	0,2

XY tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Yechish: $M(X) = 5 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 = 3 + 0,2 + 1,2 = 4,4.$

$$M(Y) = 7 \cdot 0,8 + 9 \cdot 0,2 = 5,6 + 1,8 = 7,4.$$

X va Y tasodifiy miqdorlar erkli bo'lganligi uchun izlanayotgan matematik kutilma quyidagiga teng:

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y) = 4,4 \cdot 7,4 = 32,56.$$

7. Yonlariga 1 dan 6 gacha raqamlar yozilgan 2 ta kubik tashlanganda tushishi mumkin bo'lgan raqamlar yig'indisining matematik kutilmasi topilsin.

Yechish: Birinchi kubikda tushishi mumkin bo'lgan raqamlar sonini X orqali, ikkinchisini Y orqali belgilaymiz. Bu miqdorlarning mumkin bo'lgan qiymatlari bir xil bo'lib, ular 1,2,3,4,5 va 6 ga teng, shu bilan birga bu qiymatlarni har birini qabul qilish ehtimollari ham bir xil bo'lib u $\frac{1}{6}$ ga teng.

Birinchi kubikda tushishi mumkin bo'lgan raqamlar sonining matematik kutilmasini topamiz:

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 21 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

$M(Y) = \frac{7}{2}$ bo'lishini ham topish mumkin. Demak, izlanayotgan matematik kutilma:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7.$$

8. O'q otish qurolidan o'q otilganda nishonga tegish ehtimoli p=0,6. Agar 10 ta o'q otilgan bo'lsa, nishonga tegish jami sonining matematik kutilmasini toping.

Yechish: Har bir o'q otishda nishonga tegish yoki tegmaslik boshqa otishlar natijasiga bog'liq emas. Shuning uchun ko'rilayotgan hodisalar erklidir va, demak, izlanayotgan matematik kutilma:

$$M(X) = np = 10 \cdot 0,6 = 6.$$

9. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping:

X	1	2	5
P	0,3	0,5	0,2

Yechish: Dastlab matematik kutilmani topamiz:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}2 = 2{,}3.$$

Chetlanish kvadratining mumkin bo'lgan barcha qiymatlarini topamiz:

$$[x_1 - M(X)]^2 = (1 - 2{,}3)^2 = 1{,}69;$$
$$[x_2 - M(X)]^2 = (2 - 2{,}3)^2 = 0{,}09;$$
$$[x_3 - M(X)]^2 = (5 - 2{,}3)^2 = 7{,}29;$$

Chetlanish kvadratining taqsimot qonunini yozamiz:

$[x - M(X)]^2$	1,69	0,09	7,29
P	0,3	0,5	0,2

Dispersiyani hisoblash formulasidan foydalanib uni topamiz:

$$D(X) = [x - M(X)]^2 = [x_1 - M(X)]^2 \cdot p_1 + [x_2 - M(X)]^2 \cdot p_2 +$$
$$+[x_3 - M(X)]^2 \cdot p_3 = 1{,}69 \cdot 0{,}3 + 0{,}09 \cdot 0{,}5 + 7{,}29 \cdot 0.2 = 2{,}01.$$

10. X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha berilgan:

X	0	1	2	3
P	0,2	0,3	0,4	0,1

X ning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

Yechish: $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}4 +$ $+3 \cdot 0{,}1 = 1{,}4.$

$M^2(X) = (1{,}4)^2 = 1{,}96; M(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + x_4^2p_4 =$ $= 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0{,}1 = 0{,}3 + 1{,}6 + 0{,}9 = 2{,}8;$

$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 2{,}8 - 1{,}96 = 0{,}84.$

O'rtacha kvadratik chetlanish:

$\sigma(x) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}84} \approx 0{,}92.$

11. Ikkita erkli tasodifiy miqdorning dispersiyalari mos ravishda $D(X) = 4$ va $D(Y) = 3$ larga teng. Bu miqdorlar yig'indisining dispersiyasini toping.

Yechish: Dispersiyaning xossasiga asosan

$D(X + Y) = D(X) + D(Y) = 4 + 3 = 7.$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

1. Diskret tasodifiy miqdorning

X	6	3	1
P	0,2	0,3	0,5

taqsimot qonunini bilgan holda uning matematik kutilmasini toping.

Javob: 2,6.

2. Nishonga qarata 4 ta o'q uzildi. Ularning nishonga tegish ehtimollari $p_1 = 0{,}6,\ p_2 = 0{,}4,\ p_3 = 0{,}5$ va $p_4 = 0{,}7$. Nishonga tegish jami sonining matematik kutilmasi topilsin.

Javob: 2,2.

3. Diskret erkli tasodifiy miqdorlar quyidagi taqsimot qonunlari orqali berilgan:

X	1	2		Y	0,5	1
p	0,2	0,8		p	0,3	0,7

XY ko'paytmaning matematik kutilmasi topilsin.

Javob: 1,53 .

4. Yuqoridagi masaladagi taqsimot qonunlari bilan berilgan tasodifiy miqdorlar uchun X+Y yig'indining matematik kutilmasi topilsin.

Javob: 2,65.

5. O'zaro bog'liq bo'lmagan ikkita tasodifiy miqdor X va Y lar quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	1	2	3	4
P	0,2	0,3	0,4	0,1

Y	1	2	3	4
P	0,1	0,2	0,4	0,3

X+Y va XY larning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishi topilsin:

Javob: $M(X+Y) = 5{,}3;\ M(XY) = 6{,}96;\ D(X+Y) = 1{,}73;$ $D(XY) = 0{,}7476;\ \sigma(X+Y) = 1{,}33;\ \sigma(XY) = 0{,}86.$

6. X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha berilgan

X	1	3	5
P	0,1	0,4	0,5

$3X+2$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispeziyasi topilsin.

Javob: $M(3X+2)=13{,}4;\quad D(3X+2)=15{,}84.$

7. Ikkita erkli tasodifiy miqdorlarning dispersiyalari ma'lum: $D(X)=4,\ D(Y)=3.$ Bu miqdorlar yig'indisining dispersiyasini toping.

Javob: 7.

8. X tasodifiy miqdorning dispersiyasi 5 ga teng. Quyidagi miqdorlarning dispersiyasini toping.

$$a)\ X-1;\quad b)\ -2X;\quad c)\ 3X+6.$$

Javoblar: $a)$ 5 ; $b)$ 20 ; $c)$ 45.

9. Tasodifiy miqdor dispersiyasi D(X)=6,25. σ(X) o'rtacha kvadratik chetlanishni toping.

Javob: 2,5.

10. Tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	2	4	8
P	0,1	0,5	0,4

Bu miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Javob: 2,2.

§3. Matematik statistika elementlari

Ommaviy tasodifiy hodisalar bo'ysunadigan qonuniyatlarni aniqlash statistik ma'lumotlarni kuzatish natijalarini o'rganishga asoslanadi. Matematik statistikaning birinchi vazifasi – statistik ma'lumotlarni to'plash va gruppalash usullarini ko'rsatishdir.

Matematik statistikaning ikkinchi vazifasi – statistik ma'lumotlarni tahlil qilish metodlarini tadqiqot masalalariga muvofiq ishlab chiqishdan iborat.

Xulosa qilib, matematik statistikaning vazifasi ilmiy va nazariy xulosalar hosil qilish maqsadida statistik ma'lumotlarni to'plash va ishlab chiqish metodlarini yaratishdan iborat deb aytish mumkin.

Bir jinsli obyektlar to'plamini bu obyektlarni xarakterlovchi biror sifat yoki son belgiga nisbatan o'rganish talab qilinsin. Masalan, agar biror xil detallar partiyasi bo'lsa, u holda detalning sifat belgisi bo'lib, uning standartligi, son belgisi bo'lib esa detalning o'lchovi hizmat qilishi mumkin.

Ba'zan yalpi tekshirish o'tkaziladi, ya'ni to'plamdagi obyektlarning har birini o'rganilayotgan belgiga nisbatan tekshiriladi. Lekin yalpi tekshirish amalda nisbatan kam qo'llaniladi. Masalan, to'plam juda ko'p (juda katta sondagi) obyektlarni o'z ichiga olgan bo'lsa, u holda yalpi tekshirish o'tkazish jismonan mumkin emas. Bunday hollarda to'plamdan chekli sondagi obyektlar tasodifiy ravishda olinadi va ularni o'rganiladi.

Tanlanma to'plam, yoki oddiy qilib, tanlanma deb tasodifiy ravishda tanlab olingan obyektlar to'plamiga aytiladi.

Bosh to'plam deb tanlanma ajratiladigan obyektlar to'plamiga aytiladi.

To'plam (bosh yoki tanlanma to'plami) hajmi deb bu to'plamdagi obyektlar soniga aytiladi. Masalan, 1000 ta detaldan tekshirish uchun 100 ta detal olingan bo'lsa, u holda bosh to'plam hajmi N=1000, tanlanma hajmi esa n=100.

Eslatma. Bosh to'plam ko'pincha chekli sondagi elementlarni o'z ichiga oladi. Ammo bu son ancha katta bo'lsa, u holda hisoblashlarni soddalashtirish yoki nazariy hisoblarni ixchamlash maqsadini ko'zda tutib, ba'zan bosh to'plam cheksiz ko'p sondagi obyektlardan iborat deb faraz qilinadi. Bunday yo'l qo'yish shu bilan oqlanadiki (ancha katta hajmli) bosh to'plam hajmini orttirish tanlanma ma'lumotlarini ishlab chiqish natijalariga amalda ta'sir etmaydi.

Tanlanmani tuzishda ikki xil yo'l tutish mumkin: obyekt tanlanib va uning ustida kuzatish o'tkazilgandan so'ng, u bosh to'plamga qaytarilishi yoki qaytarilmasligi mumkin. Bunga muvofiq ravishda tanlanmalar takror va notakror tanlanmalarga ajratiladi.

Takror tanlanma deb shunday tanlanmaga aytiladiki, bunda olingan obyekt (keyingisini olishdan oldin) bosh to'plamga qaytariladi.

Takrorsiz tanlanma deb tanlangan element bosh to'plamga qaytarilmaydigan tanlanmaga aytiladi.

Amaliyotda odatda qaytarilmaydigan tasodifiy tanlashdan foydalaniladi.

Tanlanmadagi ma'lumotlar bo'yicha bosh to'plamning bizni qiziqtirayotgan belgisi haqida yetarlicha ishonch bilan fikr yuritish uchun tanlanmaning obyektlari bosh to'plamni to'g'ri tasvirlashi zarur. Bu talab qisqacha bunday ta'riflanadi: tanlanma reprezentativ (tasvirlay oladigan) bo'lishi kerak.

Katta sonlar qonuniga asosan shuni ta'kidlash mumkinki, agar tanlash tasodifiy ravishda amalga oshiriladigan bo'lsa, tanlanma reprezentativ bo'ladi: agar bosh to'plam barcha obyektlarining tanlanmaga tushish ehtimollari bir xil bo'lsa, tanlanmaning har bir obyekti tasodifiy tanlangan bo'ladi.

Agar bosh to'plamning hajmi yetarli katta bo'lib, tanlanma bu to'plamning uncha katta bo'lmagan qismini tashkil qilsa, u holda takror va notakror tanlanmalar orasidagi farq yo'qolib boradi; limit holda, cheksiz bosh to'plam qaralib, tanlanmaning hajmi esa chekli bo'lsa, u holda bu farq yo'qoladi.

Amaliyotda tanlashning turli usullari qo'llaniladi. Bu usullarni tamoyil jihatdan ikki turga bo'lish mumkin:

1. Bosh to'plamni qismlarga ajratishni talab qilmaydigan tanlash, bunga quyidagilar kiradi:
   a) oddiy qaytarilmaydigan tasodifiy tanlash;
   b) oddiy qaytariladigan tasodifiy tanlash;
2. Bosh to'plamni qismlarga ajratilgandan keyin tanlash, bunga quyidagilar kiradi:
   a) tipik tanlash;
   b) mexanik tanlash;
   c) Seriyali tanlash;

Bosh to'plamdan elementlar bittalab olinadigan tanlash <u>oddiy tasodifiy tanlash</u> deyiladi. Oddiy tanlashni turli usullar bilan amalga oshirish mumkin. Masalan, N hajmli bosh to'plamdan n ta obyekt tanlashda quyidagicha yo'l tutiladi. Kartochkalar olib, ularni 1 dan N gacha nomerlanadi. So'ngra ularni yaxshilab aralashtirib, tavakkaliga bitta kartochka olinadi, shu olingan kartochka bilan bir xil nomerli obyekt tekshiriladi. Keyin kartochka dastaga qaytariladi va jarayon takrorlanadi, ya'ni kartochkalar aralashtirib, ulardan biri tavakkaliga olinadi va h.k. n marta shunday qilinadi; natijada n hajmli oddiy takror tasodifiy tanlanma hosil qilinadi.

Agar olingan kartochkalar qaytarilmasa, u holda tanlama oddiy takrorsiz tasodifiy tanlanma bo'ladi.

Bosh tanlanmaning hajmi katta bo'lganda tasvirlangan bu jarayon ko'p mehnat talab qiladi. Bunday holda tasodifiy sonlarning tayyor jadvalidan fodalaniladi, ularda sonlar tasodifiy tartibda joylashgan bo'ladi. Nomerlangan bosh to'plamdan masalan, 50 ta obyekt olish uchun tasodifiy sonlar jadvalining ixtiyoriy sahifasini ochib undan birdaniga 50 ta son yozib olinadi; tanlanmaga nomerlari yozib olingan sonlar bilan bir xil obyektlar kiritiladi. Agar jadvalning tasodifiy soni N dan katta bo'lsa, u holda bunday son tushirib qoldiriladi. Takrorsiz tanlanma bo'lgan holda jadvalning ilgari uchragan sonlari ham tushirib qoldiriladi.

Tipik tanlash deb, shunday tanlashga aytiladik, bunda obyektlar butun bosh to'plamdan emas, balki uning tipik qismlaridan olinadi. Masaln, detal bir nechta stanokda tayyorlanayotgan bo'lsa u holda tanlash barcha detallar to'plamidan emas, balki har bir stanok mahsulotidan ayrim olinadi. Tipik tanlashdan tekshirilayotgan belgi bosh to'plamning turli tipik qismlarida sezilarli o'zgarib turganda foydalaniladi. Masalan, mahsulot bir nechta mashinalarda tayyorlanayotgan bo'lib, mashinalar orasida uncha-muncha eskirganlari bo'lsa, u holda tipik tanlashdan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

Mexanik tanlash deb, shunday tanlashga aytiladiki, bunda bosh to'plam tanlanmaga nechta obyekt kirishi lozim bo'lsa, shuncha gruppaga mexanik ravishda ajratiladi va har bir gruppadan bittadan obyekt tanlanadi.

Masalan, stanokda tayyorlangan detallarning 20% ini ajratib olish lozim bo'lsa, u holda har bir beshinchi detal olinadi; agar 5% detallarni olish talab qilinsa, mexanik tanlash ba'zi tanlanmaning reprezentativligini ta'minlamasligi mumkinligini qayd qilib o'tamiz. Masalan, har bir yig'ilmanchi yo'nilayotgan valcha tanlanayotgan bo'lib, shu bilan birga tanlashdan so'ng darhol kesgich almashtirilsa, u holda tanlangan hamma valchalar o'tmaslangan kesgichlar bilan yo'nilgan bo'ladi. Bunday holda tanlash ritmini kesgichni almashtirish ritmi bilan mos kelishini yo'qotish lozim, buning uchun masalan, yo'nilgan har yigirmata valchadan o'ninchisini olish lozim.

Seriyali tanlash deb shunday tanlashga aytiladiki, bunda obyektlar bosh to'plamdan bittalab emas, balki seriyalab olinadi va ular yalpisiga tekshiriladi. Masalan, buyumlar katta gruppa stanok – avtomatlar tomonidan tayyorlanayotgan bo'lsa u holda faqat bir nechta stanokning buyumlari yalpisiga tekshiriladi. Seriyali tanlashdan tekshirilayotgan belgi turli seriyalarda uncha o'zgarmagan holda foydalaniladi.

Amaliyotda ko'pincha aralash tanlashdan foydalanilishini ta'kidlab o'tamiz, bunda yuqorida ko'rsatilgan usullardan birgalikda foydalaniladi.

Masalan, bosh to'plamni ba'zan bir xil hajmli seriyalarga ajratiladi, keyin oddiy tasodifiy tanlash bilan bir nechta seriya tanlanadi va nihoyat oddiy tasodifiy tanlash bilan ayrim obyektlar olinadi.

Bosh to'plamdan tanlanma olingan deylik. Bunda x_1 qiymat n_1 marta, x_2 qiymat n_2 marta kuzatilgan va hokazo. $\sum n_i =$ n bo'lsin. Kuzatilgan x_i qiymatlar variantalar, variantalarning ortib borishi tartibida yozilgan ketma-ketligi esa variatsion qator deyiladi. Kuzatishlar soni chastotalar, ularning tanlanma hajmiga nisbati $\frac{n_i}{n} = W_i$ esa nisbiy chastotalar deyiladi.

Tanlanmaning statistik taqsimoti deb variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ro'yxatiga aytiladi. Statistik taqsimotni yana intervallar va ularga tegishli chastotalar ketma-ketligi ko'rinishida ham berish mumkin (intervalga mos chastota sifatida bu intervalga tushgan chastotalar yig'indisi qabul qilinadi).

Shuni qayd qilib o'tamizki, taqsimot deyilganda ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslik, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ularning chastotalari yoki nisbiy chastotalari orasidagi moslik tushiniladi.

3.1.Taqsimotning empirik funksiyasi

Aytaylik, X son belgi chastotalarining statistik taqsimoti ma'lum bo'lsin. Quyidagicha belgilashlar kiritamiz: n_x – belgining x dan kichik qiymati kuzatilgan kuzatishlar soni; n – kuzatishlarning umumiy soni (tanlanma hajmi).

Ravshanki, X<x hodisaning nisbiy chastotasi $\frac{n_x}{n}$ ga teng. Agar x o'zgaradigan bo'lsa, u holda umuman aytganda, nisbiy chastotasi ham o'zgaradi, ya'ni $\frac{n_x}{n}$ nisbiy chastota x ning funksiyasidir. Bu funksiya empirik (tajriba yo'li) yo'l bilan topiladigan bo'lgani uchun y empirik funksiya deyiladi.

Taqsimotning empirik funksiyasi (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb har bir x qiymati uchun X<x hodisaning ehtimolini aniqlaydigan $F^*(x)$ funksiyaga aytiladi. Shunday qilib, ta'rifga ko'ra

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

bu yerda n_x – x dan kichik variantalar soni, n tanlanma hajmi.

Shunday qilib, masalan, $F^*(x_2)$ ni topish uchun x_2 dan kichik variantalar sonini tanlanma hajmiga bo'lish lozim;

$$F^*(x_2) = \frac{n_x}{n}.$$

.Bosh to'plam taqsimotining F(x) integral funksiyasini, tanlanma taqsimotining empirik funksiyasidan farq qilib taqsimotning nazariy funksiyasi deyiladi. Empirik va nazariy funksiyalar orasidagi farq shundaki, F(x) nazariy funksiya X<x hodisa ehtimolini, $F^*(x)$ empirik funksiya esa shu hodisaning o'zini nisbiy chastotasini aniqlaydi. Bernulli teoremasidan kelib chiqadiki, X<x hodisaning nisbiy chastotasi, ya'ni $F^*(x)$ shu hodisaning F(x) ehtimoliga ehtimol bo'yicha yaqinlashadi. Boshqacha so'z bilan aytganda $F^*(x)$ va F(x) sonlar bir – biridan kam farq qiladi. Shu yerning o'zidanoq, bosh to'plam taqsimotining nazariy (interval) funksiyasini taqribiy tasvirlashda tanlanma taqsimotining empirik funksiyasidan foydalanish maqsadga muvofiq bo'lishi kelib chiqadi.

Bunday xulosa shu bilan ham tasdiqlanadiki, $F^*(x)$ funksiya F(x) ning barcha xossalariga ega. Darhaqiqat, $F^*(x)$ funksiyaning ta'rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1) empirik funksiyaning qiymatlari [0;1] kesmaga tegishli;

2) $F^*(x)$ – kamaymaydigan funksiya;

3) agar x_1- eng kichik varianta bo'lsa, u holda $x \leq x_1$ da $F^*(x) = 0$; x_k – eng katta varianta bo'lsa, u holda x>x_k da $F^*(x) = 1$.

Shunday qilib, tanlanma taqsimotining empirik funksiyasi bosh to'plam taqsimotining nazariy funksiyasini baholash uchun xizmat qiladi.

Ko'rgazmalilik maqsadida statistik taqsimotning turli grafiklari, jumladan, poligon va gistogrammasi yasaladi.

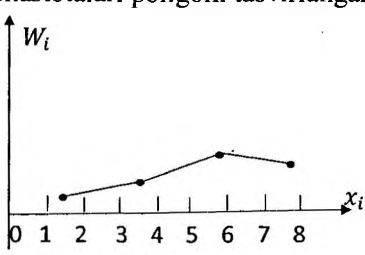
Chastotalar poligoni deb, kesmalari (x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k) nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi. Poligonni yasash uchun absissalar o'qiga x_i variantalarni, ordinatalar o'qiga esa ularga mos n_i chastotalarni qo'yib chiqiladi. So'ngra (x_i, n_i) nuqtalarni to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib chastotalar poligoni hosil qilinadi.

Nisbiy chastotalar poligoni deb kesmalari $(x_1, W_1), (x_2, W_2), \ldots, (x_k, W_k)$ nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi. Nisbiy chastotalar poligonini yasash uchun absissalar o'qiga x_i variantalarni, ordinatalar o'qiga esa ularga mos W_i chastotalarni qo'yib chiqiladi. So'ngra hosil bo'lgan nuqtalarni to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib, nisbiy chastotalar poligoni hosil qilinadi.

1-chizmaga quyidagi

x	1,5	3,5	5,5	7,5
W	0,1	0,2	0,4	0,3

taqsimotning nisbiy chastotalari poligoni tasvirlangan.

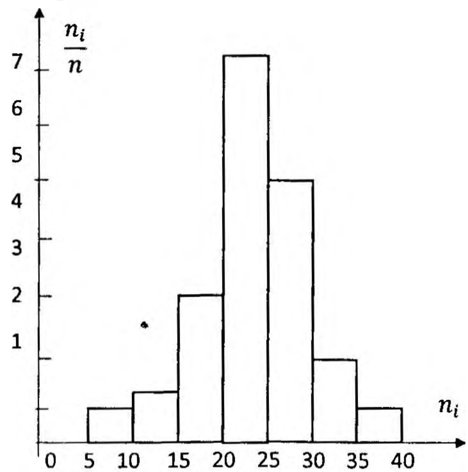


1-chizma

Uzluksiz belgi bo'lgan holda gistogramma yasash maqsadga muvofiqdir, buning uchun belgining kuzatiladigan qiymatlarini o'z ichiga olgan intervalning uzunligi h bo'lgan bir nechta qismiy intervallarga bo'linadi va har bir i- qismiy interval uchun n_i ni - i- intervalga tushgan variantalar chastotalari yig'indisini topiladi. <u>Chastotalar gistogrammasi</u> deb asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{n_i}{h}$ nisbatlarga (chastota zichligi) teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'onaviy figuraga aytiladi.

Chastotalar gistogrammasini yasash uchun absissalar o'qida qismiy intervallar, ularning ustiga esa $\frac{n_i}{h}$ masofada absissalar o'qiga parallel kesmalar o'tkaziladi.

i-qismiy to'g'ri to'rtburchakning yuzi $h \cdot \frac{n_i}{h} = n_i$ ga, ya'ni i- intervaldagi variantalarning chastotalari yig'indisiga teng; binobarin, chastotalar gistogrammasining yuzi barcha chastotalar yig'indisiga ya'ni tanlanma hajmiga teng.



2-chizma

2-chizmada 6- jadvalda keltirilgan n= 100 hajmli taqsimot chastotalari gistogrammasi tasvirlangan.

6-jadval

Uzunligi h=5 bo'lgan qismiy interval	n_i interval variantalari chastotalarining yig'indisi	Chastota zichligi $\frac{n_i}{h}$
5-10	4	0,8
10-15	6	1,2
15-20	16	3,2
20-25	36	7,2
25-30	24	4,8
30-35	10	2,0
35-40	4	0,8

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{W_i}{h}$ nisbatga (nisbiy chastota zichligiga) teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchakalardan iborat pog'onaviy figuraga aytiladi.

Nisbiy chastotalar gistogrammasini yasash uchun absissalar o'qiga qismiy intervallarni qo'yib chiqiladi, ularning tepasidan esa $\frac{W_i}{h}$ masofada absissalar o'qiga parallel kesmalar o'tkaziladi. i-qismiy to'g'ri to'rtburchakning yuzi $h \cdot \frac{W_i}{h}$ ga, ya'ni i-intervalga tushgan variantalarning nisbiy chastotalari yig'indisiga teng. Demak, nisbiy chastotalar gistogrammasining yuzi barcha nisbiy chastotalar yig'indisiga, ya'ni birga teng.

Masalalar

1. Hajmi 20 bo'lgan tanlanmaning chastotalari taqsimoti berilgan:

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Nisbiy chastotalar taqsimotini yozing.

Yechish. Nisbiy chastotalarni topamiz. Buning uchun chastotalarni tanlanma hajmiga bo'lamiz:

$$W_1 = \frac{3}{20} = 0{,}15, \quad W_2 = \frac{10}{20} = 0{,}50, \quad W_3 = \frac{7}{20} = 0{,}35.$$

Nisbiy chastotalar taqsimotini yozamiz:

x_i	2	6	12
W_i	0,15	0,5	0,35

Nazorat qilish: $0{,}15 + 0{,}5 + 0{,}35 = 1$.

2. Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha uning empirik funksiyasini tuzing.

Variantalar	x_i	2	6	10
Chastotalar	n_i	12	18	30

Yechish. Tanlanma hajmini topamiz: $12 + 18 + 30 = 60$. Eng kichik varianta 2 ga teng, demak,

$$x \leq 2 \text{ da } F^*(x) = 0.$$

$X \leq 6$ qiymat, xususan, x_1=2 qiymat 2 marta kuzatilgan, demak,

$$2 < x \leq 6 \text{ da } F^*(x) = \frac{12}{60} = 0{,}2.$$

$X \leq 10$ qiymatlar, jumladan x_1=2 va x_2=6 qiymatlar $12 + 18 = 30$ marta kuzatilgan; demak,

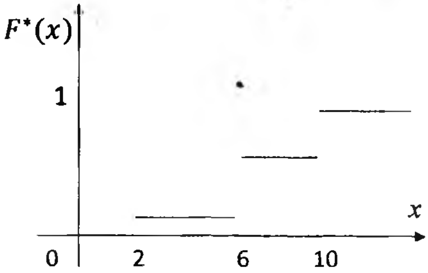
$$6 < x \leq 10 \text{ da } F^*(x) = \frac{30}{60} = 0{,}5.$$

X = 10 eng katta varianta bo'lgani uchun

$$x > 10 \text{ da } F^*(x) = 1.$$

Izlanayotgan empirik funksiya:

$$F^*(x) = \begin{cases} x \leq 2 & da \quad 0, \\ 2 < x \leq 6 & da \quad 0{,}2 \\ 6 < x \leq 10 & da \quad 0{,}5 \\ x > 10 & da \quad 1 \end{cases}$$



3-chizma.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar:

1. Ushbu taqsimotning empirik funksiyasi grafigini yasang:

x_i	5	7	10	15
n_i	2	3	8	7

2. Ushbu taqsimot chastotalari va nisbiy chastotalari poligonlarini yasang:

x_i	1	3	5	7	9
n_i	10	15	30	33	12

3. Ushbu taqsimot chastotalari va nisbiy chastotalari gistogrammalarini yasang (birinchi ustunda qismiy interval, ikkinchi ustunda esa qismiy intervaldagi variantalarning chastotalari yig'indisi ko'rsatilgan).

2-5	9
5-8	10
8-11	25
11-14	6

4. Ushbu taqsimotning empirik funksiyasini tuzing va grafigini yasang:

$$\begin{array}{lllll} x_i & 5 & 7 & 10 & 15 \\ n_i & 2 & 3 & 8 & 7. \end{array}$$

5. Ushbu taqsimot chastotalari va nisbiy chastotalari poligonlarini yasang:

$$\begin{array}{llllll} x_i & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ n_i & 10 & 15 & 30 & 33 & 12. \end{array}$$

6. Ushbu taqsimotning empirik funksiyasini tuzing va grafigini yasang:

$$\begin{array}{lllll} x_i & 11 & 12 & 13 & 14 \\ n_i & 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,2. \end{array}$$

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. И.А.Каримов. “Юксак маънавият – енгилмас куч”. Тошкент.:- 2009 й.
2. И.А.Каримов. “Баркамол авлод - Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори”. Тошкент .:-1998 й.
3. И.А.Каримов. “Ўзбекистон XXI асрга интилмоқда” Тошкент.:- 2000 й.
4. Ўзбекистон Республикасининг “Таълим тўғрисида”ги қонуни. Кадрлар тайёрлаш миллий дастури. Т.: Шарқ. 1997.
5. Азларов.Т., Мансуров.Х. Математик анализ, 1-қисм, Тошкент, “Ўқитувчи” 1994.
6. Т.Жўраев, А.Саъдуллаев ва бошқ. Олий математика асослари, 1-қисм, Тошкент, “Ўзбекистон” 1995.
7. Т.Сўфиев. Мактабда математик анализ элементлари. Тошкент, “Ўқитувчи” 1983.
8. В.П.Минорский. Олий математикадан масалалар тўплами. Тошкент, “Ўқитувчи” 1977.
9. И.А.Марон. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Москва, “Наука” 1970.
10. Г.Н.Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. Москва, “Наука” 1969.
11. Б.П.Демидович. Сборник задач и упражнений по математического анализа. Москва, “Наука” 1990.
12. Г.И.Запорожец. Руководство к решению задач по математического анализа. Москва, «Высшая школа» 1964.
13. Н.С.Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления. Част I. Москва, “Наука” 1985.
14. Н.Р.Расулов, И.И.Сафаров, Р.Т Мухитдинов. Олий математика. Тошкент, 2012.
15. В.Т.Лисичкин, И.Л.Соловейчик. Математика. Москва, «Высшая школа» 1991.
16. И.А.Конлан. Практические занятия по высшей математике. Харьков, 1974.
17. П.Е.Данко и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Москва, 1980.
18. Н.Я.Семигин и др. Сборник задач по высшей математике. Москва, 1967.
19. А.Т.Рогов. Задачник по высшей математике для техникумов. Москва, 1973.
20. Х.Махмудов, А.Ахлимирзаев, А.Юсупова. Математика. Андижон, 2012.
21. А.У.Абдухамидов, Х.А.Насимов, У.М.Носиров, Ж.Х.Хусанов. Алгебра ва математик анализ асослари. I,II қисм, Тошкент, 2008.
22. И.И.Ляшко, А.К.Боярчук, Я.Г.Гай, Г.П.Головач. Математический анализ в примерах и задачах. II-часть. Киев.1977
23. И.М.Уваренков, М.З.Маллер. Курс математического анализа. М.:1977.
24. В.Е.Гмурман. Эхтимоллар назарияси ва математик статистика. Т.:1977.
25. И.А.Каплан. Практические занятия по высшей математике. III-часть Харков.1974.
26. Н.С.Пскунов. Дифференциал ва интеграл хисоб. II-кисм.Т.:1974.
27. Р.С.Гутер, А.Р.Янпольский. Дифференциал тенгламалар. Т.:1978.

MUNDARIJA