Министерство высшего и среднего специального образования
Андижанский машиностроительный институт

ANDIJON MASHINASOZLIK INSTITUTI
ANDIJAN MACHINE-BUILDING INSTITUTE
АНДИЖАНСКИЙ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА «ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ»

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Андижан 2018

УТВЕРЖДЕНО:
Рассмотрено и утверждено учебно-методическим советом Андижанского машиностроительного института.
(Протокол УМС АндМИ №_____ от «____»___________2018 года)
Председатель совета _____________ К. Эрматов

СОГЛАСОВАНО:
Рассмотрено и согласовано учебно-методическим советом машиностроительного факультета.
(Протокол УМС факультета №_____ от «____»___________2018 года)
Председатель совета _____________ М. Кучкаров

РЕКОМЕНДОВАНО:
Рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседание кафедры «Высшая математика» (Протокол заседания кафедры №_____ от «____»___________2018 года)
Заведующий кафедрой:________________ З.Э. Кодиров

Аналитическая геометрия: методические указания.

Составители: доц. Т.А Джалилова, ст. преп. А.Р. Джабборов

Рецензент: к.физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математика» Андижанского государственного университета **А. Каримжонов**.
к.физ.-мат. наук, доцент кафедры «АМП» Андижанского машиностроительного института **М. Мирзаева**.

Методическое указание содержит основные теоретические сведения по разделу «Аналитическая геометрия» курса «Высшая математика», изложенные в форме вопросов и ответов, методические рекомендации по решению задач, банк задач для самостоятельной работы по каждой теме раздела.

Методическое указание предназначено для студентов первого курса инженерных специальностей.

Введение

Среди дисциплин, изучаемых в инженерном вузе, математика занимает особое место. Помимо того, что она играет определяющую роль в развитии творческого потенциала студента и выработке научной методологии, значение математики в инженерном образовании заключается еще и в том, что она является универсальным языком всех естественных наук и основанных на них технических дисциплинах, изучаемых в вузе.

Как известно, человеческое познание развивается ускоренно. К концу XX века одно поколение оказалось свидетелем и участником смены 4 - 5 фактологий знания и основанных на них систем социально значимых технологий. Наше время является периодом чрезвычайно бурного развития математики, ее роль в естествознании и технике стремительно растет. Именно поэтому к математическому образованию современного инженера предъявляются очень высокие требования. Будущий инженер должен не только достаточно глубоко знать основные положения математики, но и уметь применять их в своей конкретной деятельности, и видеть перспективу этой деятельности.

В предлагаемом указании рассматривается один разделов курса высшей математики: аналитическая геометрия. Аналитическая геометрия тесно связана с курсом математического анализа, начертательной геометрии и черчения и, что особенно важно, в значительной степени способствует развитию пространственного мышления студента.

Учебный материал указаний разбит на 6 тем, каждая из которых состоит из основных теоретических сведений, которые представлены в виде вопросов и ответов с необходимыми комментариями, которые в некоторых случаях заменяют доказательства. Многие из вопросов носят проблемный характер. Предполагается, что свой вариант ответа студент может сравнить с предложенным и сделать соответствующий вывод. Всюду, где это возможно, теоретический материал иллюстрируется графически, что в значительной степени облегчает усвоение теории; Методические рекомендации по решению задач. Указания с образцами решенных задач активизирует последующую самостоятельную работу студентов, а преподаватель получает возможность большую часть занятия посвятить решению задач более принципиального характера.

Кроме того, наличие в указаниях большого количества решенных задач разного уровня сложности значительно облегчит самостоятельную работу студентов. Сложность предлагаемых по каждой теме задач повышается постепенно. Задачи предлагаются в количестве, достаточном для приобретения навыков решения типовых задач, что дает возможность уверенно перейти к решению более интересных и сложных задач.

Основная цель указания - помочь студенту, приступающему к изучению высшей математики, организовать свою самостоятельную работу, выделить и усвоить главное, приобрести достаточно прочные навыки решения задач различного уровня сложности.

Объектами изучения аналитической геометрии являются разнообразные геометрические объекты: прямые линии и плоскости, поверхности, линии, заданные на плоскости или в пространстве. Изучаются все эти геометрические объекты методом координат с активным привлечением аппарата векторной алгебры.

ТЕМА 1. **Основные задачи аналитической геометрии. Способы задания линии на плоскости**

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Две основные задачи аналитической геометрии

1. Задано геометрическое место точек, т.е. совокупность точек, обладающих общим свойством. Требуется в некоторой системе координат получить уравнение, которому будут удовлетворять координаты точек заданного геометрического места точек.

2. В некоторой системе координат на плоскости (или в пространстве) задано уравнение $\mathrm{F}(x,y)=0$ (или $\mathrm{F}(x,y,z)=0$). Требуется выяснить: координаты какого геометрического места точек удовлетворяют заданному уравнению.

Пример. Получить уравнение окружности радиуса R, если в некоторой системе координат задана точка $O_1(x_0, y_0)$, являющаяся центром этой окружности.

Решение. Как известно, окружность – это геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой точки, называемой центром окружности.

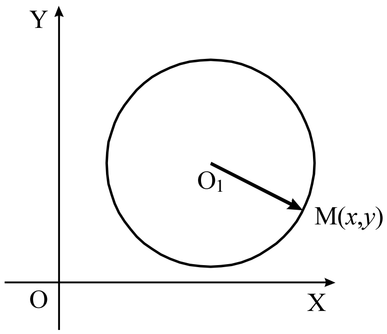


Рис. 1

Пусть M (x, y) – произвольная точка окружности.

По определению окружности

$$\left|\overrightarrow{O_1M}\right| = R .$$

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{O_1M} = (x - x_0,\ y - y_0)$ и воспользуемся формулой длины вектора:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R .$$

Возведем обе части полученного равенства в квадрат, получим каноническое (простейшее) уравнение окружности радиуса R с центром в точке $O_1(x_0, y_0)$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 .$$

Задача решена с использованием метода координат и аппарата векторной алгебры.

1.2. Способы задания линии на плоскости в декартовой системе координат

1. Если задана некоторая функция $y = f(x)$, например, на промежутке $[a,\ b]$, то геометрическое место точек $\mathrm{M}(x, f(x))$ плоскости, где $x \in [a,\ b]$, называемое графиком функции $f(x)$, является, как принято говорить, линией, заданной уравнением $y = f(x)$ (рис. 2 и 3).

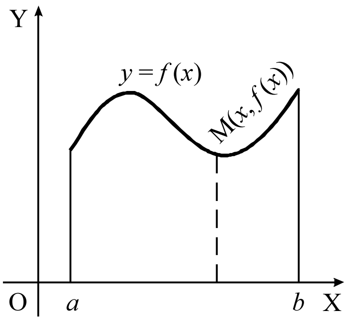


Рис. 2

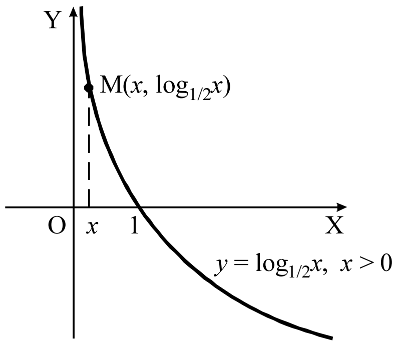


Рис. 3

Этим способом заданы хорошо известные из школьного курса линии: парабола, гипербола, синусоида и многие другие линии.

2. Параметрический способ задания линии на плоскости.

Если на плоскости зафиксировать систему координат, а линией считать след непрерывно движущейся в течение промежутка времени $[t_1,\ t_2]$ точки, тогда в каждый момент времени $t \in [t_1, t_2]$ координаты точки $\mathrm{M}\,(x,\ y)$ этой линии будут зависеть от времени t, т.е. будут некоторыми функциями аргумента t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = q(t) \end{cases}, \text{ где } \ t \in [t_1, t_2].$$

Такой способ задания функции называется параметрическим. Роль параметра может играть угол, длина дуги, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки линии. Существуют и другие величины, играющие роль параметра.

Пример. Получить параметрические уравнения окружности радиуса R с центром в начале координат (рис. 4).

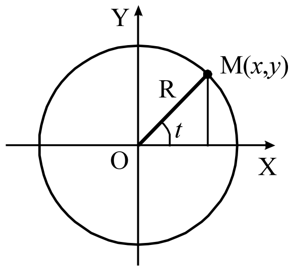


Рис. 4

Решение. Примем за параметр t угол, который образует радиус-вектор точки M (x, y) с осью OX (угол отсчитывается от оси OX против часовой стрелки).

Очевидно $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}$ где $t \in [0, 2\pi]$.

Параметрические уравнения окружности получены.

1.3. Задание линии в полярной системе координат

Полярной системой координат называют совокупность оси с фиксированной на ней точкой и единицы масштаба. Ось называется полярной осью, фиксированная точка оси – полюсом (рис. 5).

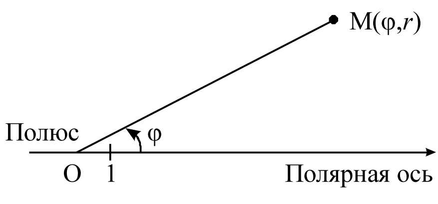


Рис. 5

Полярными координатами точки M в полярной системе координат называют длину r ($r \geq 0$) полярного радиуса OM и угол φ, который отсчитывается от полярной оси в радианах. Положительным направлением отсчета считается отсчет угла против часовой стрелки.

Уравнение линии в полярной системе координат записывается в виде $r = r(\varphi)$ – уравнение, связывающее значение полярного угла с величиной соответствующего ему полярного радиуса.

При построении линии $r = r(\varphi)$, заданной в полярной системе координат, следует учитывать, что переменная $r \geq 0$ и, исходя из этого условия, т.е. путем решения неравенства $r(\varphi) \geq 0$, находить область определения функции $r = r(\varphi)$. На рис. 6 функция определена на промежутке $[\varphi_1, \varphi_2]$.

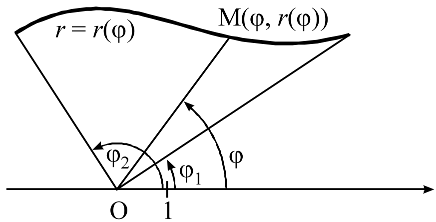


Рис. 6

1.4. Как связаны полярные и декартовы координаты одной и той же точки плоскости?

Поместим начало декартовой системы координат в полюс, а ось OX направим вдоль полярной оси (рис. 7)

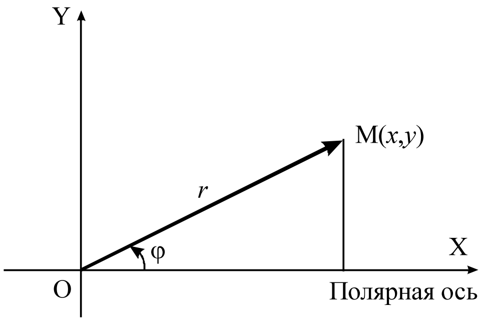


Рис. 7

Очевидно
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad (1)$$

– формулы перехода от полярных координат точки M к ее декартовым координатам.

Легко получаются и формулы обратного перехода:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{arctg} \varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{2}$$

– формулы перехода от декартовых координат точки M к ее полярным координатам.

Пример 1. Построить в полярной системе координат точки

$$M_1\left(\frac{\pi}{4}, 2\right), \quad M_2(\pi, 3) \quad и \quad M_3\left(\frac{5\pi}{3}, 1\right) \text{ (рис. 8).}$$

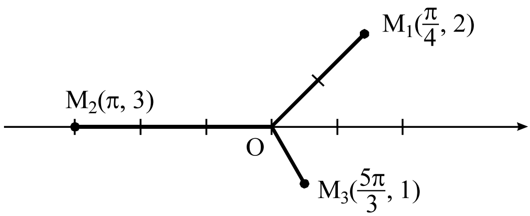


Рис. 8.

Пример 2. Кривая задана в декартовой системе координат уравнением

$$(x^2 + y^2)^2 = 2xy.$$

Получить уравнение этой же кривой в полярной системе координат.

Решение. Воспользуемся формулами (1):

$$(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)^2 = 2r^2 \cos\varphi \sin\varphi,$$

$$r^4 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^2 = 2r^2 \cos\varphi \sin\varphi$$

или

$$r^2 = \sin 2\varphi \Rightarrow r = \sqrt{\sin 2\varphi}$$

– уравнение заданной кривой в полярной системе координат. Заметим, что во многих случаях переход от декартовых координат к полярным значительно облегчает построение кривой. Убедимся в этом на данном примере. Найдем область определения функции $r=\sqrt{\sin 2\varphi}$. Функция определена при условии $\sin 2\varphi \geq 0$. Решение этого неравенства:

$$2\pi n \leq 2\varphi \leq \pi + 2\pi n$$

или $$\pi n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

при $n=0$ $$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

при $n=1$ $$\pi \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi,$$

при $n=2$ $$2\pi \leq \varphi \leq \frac{5}{2}\pi \quad \text{и т.д.}$$

Таким образом, график функции расположен в первой и третьей четвертях. Составим таблицу значений функции для $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. График функции $r=\sqrt{\sin 2\varphi}$ изображен на рис. 9

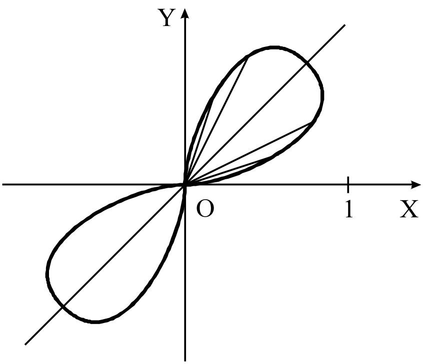


Рис. 9

φ	r
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 0{,}92$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 0{,}92$
$\frac{\pi}{2}$	0

2. Решение задач

2.1. Получить параметрические уравнения циклоиды.

Определение. Циклоидой называется кривая, описанная точкой, лежащей на окружности, если эта окружность катится без скольжения по прямой (рис. 10).

Решение. Пусть окружность радиуса a касается оси OX в начале координат. Получим уравнение линии, которую опишет точка O, когда окружность будет катиться по оси OX.

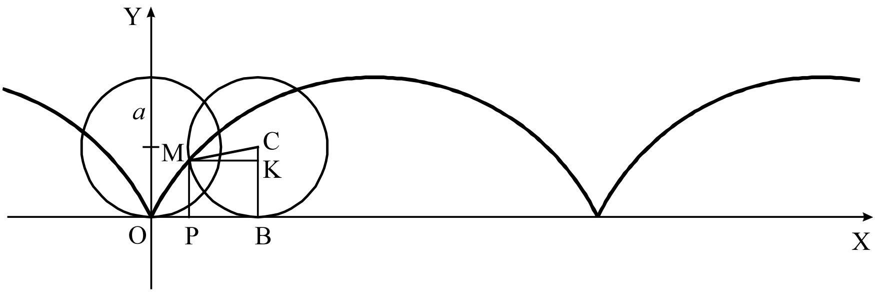


Рис. 10

Пусть M (x, y) – произвольная точка циклоиды. Примем за параметр t $\angle$ MCB. Выразим x и y через t: $x = \mathrm{OP} = \mathrm{OB} - \mathrm{PB}$. Так как окружность катится без скольжения, $\mathrm{OB} = \left|\overset{\cup}{\mathrm{MB}}\right| = a\,t$,

$$\mathrm{PB} = \mathrm{MP} = a\sin t \Rightarrow x = at - a\sin t = a(t - \sin t).$$

Выразим через t переменную y:

$$y = \mathrm{MP} = \mathrm{KB} = \mathrm{BC} - \mathrm{KC} = a - a\cos t = a\,(1 - \cos t).$$

Таким образом, параметрические уравнения циклоиды имеют вид

$$\begin{cases} x = a\ (t - \sin t), \\ y = a\ (1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\,\pi \text{ (для одной арки).}$$

Линия, называемая циклоидой, изображена на рис. 10.

2.2. Построить кривую

$$\begin{cases} x = a\ \cos^3 t, \\ y = a\ \sin^3 t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\,\pi.$$

Решение. Заданная кривая называется астроидой. Очевидно, она симметрична и относительно начала координат, и относительно осей координат. Поэтому достаточно выяснить, как ведет себя астроида для $0 \le t \le \pi/2$, а затем ее симметричным образом достроить в остальных трех четвертях. Составим таблицу значений x и y для $t \in [0, \pi/2]$:

t	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$
x	a	$a\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$	$\dfrac{1}{8}a$	0
y	0	$\dfrac{1}{8}a$	$\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$	$a\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$	a

Замечаем, что для $t \in [0, \pi/2]$ переменная x убывает, а переменная y возрастает, причем при $t = \pi/4$ x и y принимают одинаковые значения. Кривая астроида изображена на рис. 11.

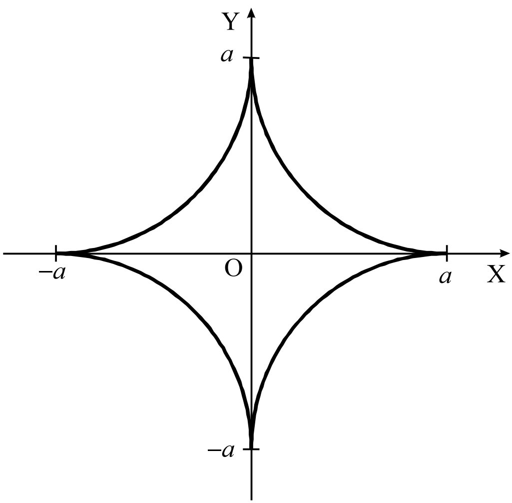


Рис. 11

Если возвести обе части каждого уравнения параметрического задания астроиды в степень 2/3 и затем сложить, получим уравнение астроиды в виде

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

2.3. Построить кривую

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t. \end{cases}$$

Решение. Получим уравнение этой же линии в декартовой системе координат, исключив параметр t из задания кривой:

$$y = \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t \,.$$

Заменяя в полученном уравнении $\sin t$ на x, получим уравнение параболы $y = 1 - 2x^2$ с вершиной в точке O_1 (0, 1) и ветвями, направленными вниз (рис. 12).

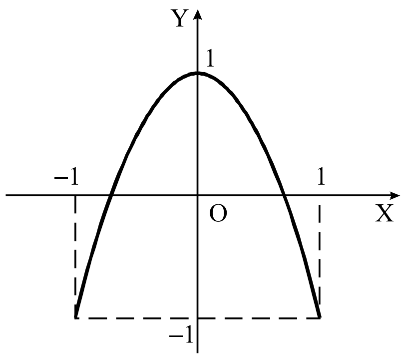


Рис. 12

При построении графика учли, что из параметрического задания кривой следует, что $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$.

2.4. Построить кривую, заданную в полярной системе координат уравнением $r = a \cdot \varphi$, $a > 0$ (const).

Решение. Функция определена при $0 \le \varphi < +\infty$. Очевидно, что с увеличением полярного угла φ полярный радиус тоже будет увеличиваться и кривая будет иметь вид спирали. Для уточнения графика составим таблицу значений полярного радиуса r в зависимости от φ:

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{4}\pi$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	4π
r	0	$1{,}57a$	$2{,}35a$	$3{,}14a$	$4{,}71a$	$6{,}28a$	$7{,}85a$	$9{,}42a$	$12{,}56a$

Построим кривую при $a = 1$ (рис. 13)

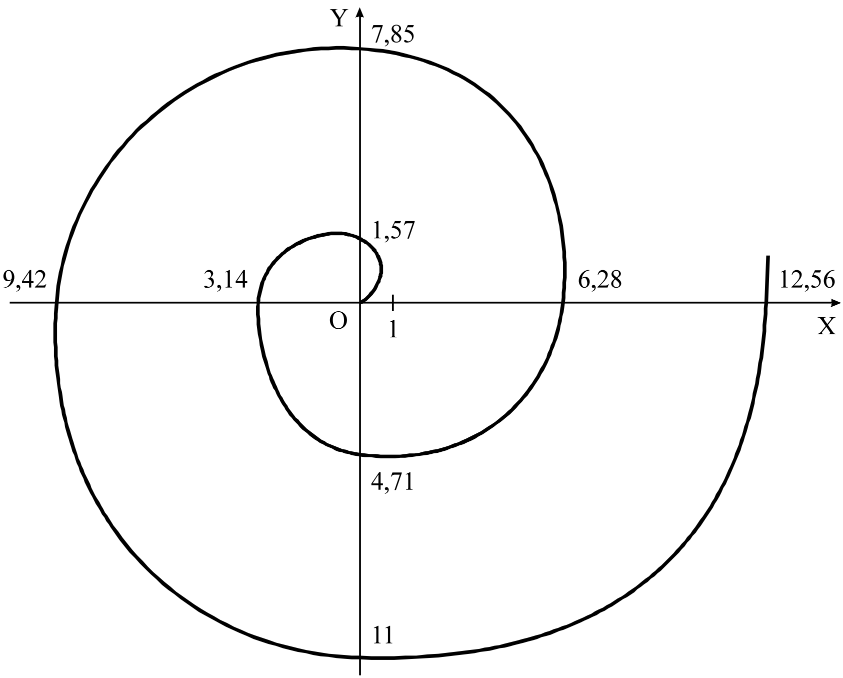


Рис. 13

Построенная кривая носит название спирали Архимеда.

2.5. Построить кривую

$$r = 1 + \cos\varphi .$$

Решение. Так как $1 + \cos\varphi \geq 0$, то кривая определена при любых значениях φ. Построим кривую для $\varphi \in [0, \pi]$, а затем достроим симметрично полученной в силу четности функции $\cos\varphi$.

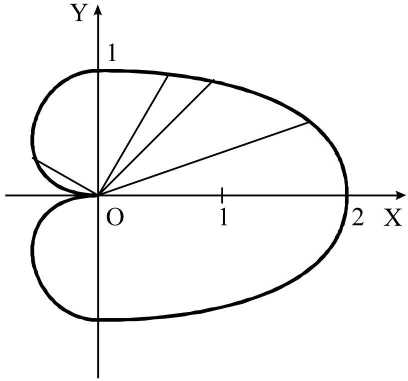


Рис. 14

φ	r
0	2
$\frac{\pi}{6}$	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 1{,}85$
$\frac{\pi}{4}$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 1{,}7$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}$
π	0

Кривая, изображенная на рис. 14, называется кардиоидой.

3. Банк задач для самостоятельной работы

3.1. Построить окружность, определив координаты ее центра и радиус:

$$x^2-4x+y^2+6y=12\,.$$

3.2. Привести уравнение окружности

$$\begin{cases} x=2+\sin t, \\ y=3+\cos t, \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi.$$

к каноническому виду $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ и построить окружность.

3.3. Построить линию $\begin{cases} x=t^2, \\ y=4+t. \end{cases}$

3.4. Получить параметрические уравнения отрезка прямой

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

между точками A $(a, 0)$ и B $(0, b)$, где $a > 0$ и $b > 0$.

3.5. Построить линию $r = a \sin \varphi$ $(a > 0)$ в полярной системе координат.

3.6. Построить линию $r = a \cos \varphi$ $(a > 0)$.

3.7. Построить линию $r = \dfrac{1}{\varphi}$.

3.8. Построить линию $r = \sin 3\varphi$.

3.9. Построить линию $r = a\,(1 - \cos \varphi)$, $a > 0$.

3.10. Переходя к полярным координатам, построить кривую $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

ТЕМА 2. **Прямая на плоскости**

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Какая информация о прямой на плоскости однозначно определяет положение этой прямой относительно заданной системы координат?

Прямая однозначно определена в каждом из следующих двух случаев:

1. На прямой в заданной системе координат известна точка $M_0\ (x_0,\ y_0)$ и известен вектор $\overline{n} = (A, B)$, перпендикулярный этой прямой ($\overline{n} = (A, B)$ называют нормальным вектором прямой).

2. На прямой известны точка $M_0\ (x_0,\ y_0)$ и вектор $\overline{S} = (m, n)$, параллельный этой прямой ($\overline{S}$ называется направляющим вектором прямой).

1.2. Как получить уравнение прямой в том и другом случаях?

Пусть в некоторой системе координат заданы точка $M_0\ (x_0,\ y_0)$ и вектор $\overline{n} = (A, B)$.

Получим уравнение прямой, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overline{n}$.

Пусть $M\ (x,\ y)$ – произвольная точка прямой. По условию задачи $\overline{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow (\overline{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$ или $(\overline{n}, \overline{r} - \overline{r_0}) = 0$ – векторная форма записи уравнения прямой.

Пусть в некоторой системе координат заданы точка $M_0\ (x_0,\ y_0)$ и вектор $\overline{S} = (m, n)$.

Получим уравнение прямой, проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\overline{S}$.

Пусть $M\ (x,\ y)$ – произвольная точка прямой. По условию задачи векторы $\overrightarrow{M_0M} = \overline{r} - \overline{r_0}$ и $\overline{S} = (m, n)$ коллинеарны $\Rightarrow$ их соответствующие координаты

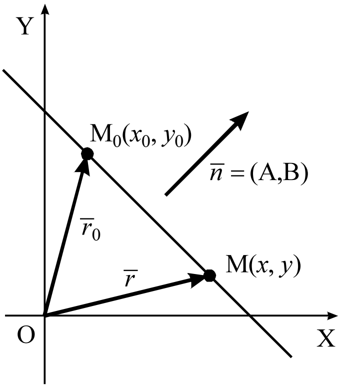


Рис. 1

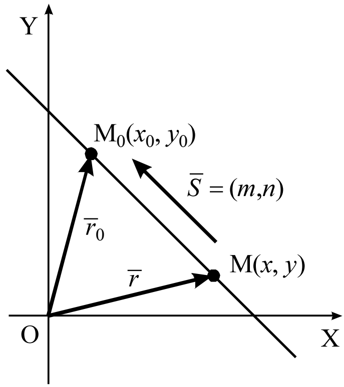


Рис. 2

Переходя к координатам перемножаемых векторов, получим уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 .$$

Введем обозначение

$$C = -A x_0 - B y_0 .$$

Уравнение прямой будет иметь вид

$$Ax + By + C = 0 . \qquad (1)$$

Уравнение (1) называют общим уравнением прямой на плоскости. Подчеркнем, что это уравнение первой степени относительно x и y, а коэффициенты A и B являются координатами нормального вектора $\overline{n}$ прямой. Например, у прямой $3x - 7y + 5 = 0$

$$\overline{n} = (3, -7) .$$

пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} . \qquad (2)$$

Уравнение (2) называется каноническим (простейшим) уравнением прямой. Естественно, это тоже уравнение первой степени относительно x и y.

Если ввести параметр t:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = t ,$$

то получим параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + m\,t, \\ y = y_0 + n\,t. \end{cases} \qquad (3)$$

Если на прямой заданы две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, тогда $\overline{S} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ и уравнение (2) примет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} , \qquad (4)$$

т.е. уравнения прямой, проходящей через две точки.

Таким образом, мы по ходу вывода уравнений прямой доказали, что в декартовой системе координат уравнение прямой является линейным относительно x и y. Можно доказать и обратное утверждение, а именно: любое линейное относительно x и y уравнение в декартовой системе координат определяет на плоскости некоторую прямую.

Пример. Заданы вершины треугольника A (3, 4), B (5, –2) и C (–4, 6) (рис. 3). Требуется составить уравнения:

1) прямой, на которой лежит сторона AB;

2) прямой, на которой лежит медиана CD, проведенная из вершины C;

3) прямой, на которой лежит высота BP, проведенная к стороне AC.

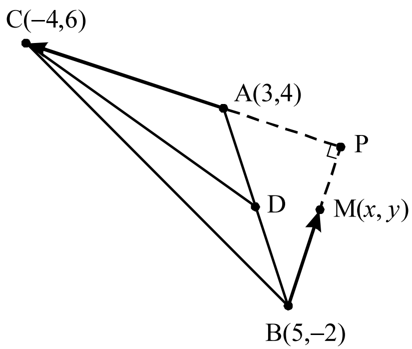


Рис. 3

Решение. 1. Чтобы получить уравнение стороны AB, воспользуемся уравнением прямой (4), проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Уравнение AB примет вид

$$\frac{x-3}{5-3}=\frac{y-4}{-2-4}\Rightarrow\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{-6}.$$

Полученное каноническое уравнение простым преобразованием можно привести к виду $3x+y-13=0$ – общего уравнения прямой, на которой лежит сторона AB.

2. Чтобы получить уравнение медианы CD, найдем координаты точки

$$\mathrm{D}\left(\frac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}}{2},\frac{y_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{B}}}{2}\right)=\mathrm{D}(4,1).$$

И вновь воспользуемся уравнением (4):

$$\frac{x+4}{4+4}=\frac{y-6}{1-6}\Rightarrow\frac{x+4}{8}=\frac{y-6}{-5},$$

это каноническое уравнение прямой, на которой лежит медиана, $5x+8y-28=0$ – общее уравнение этой же прямой.

3. Чтобы получить уравнение высоты BP, воспользуемся тем, что вектор $\overrightarrow{AC}=(-7,2)$ является нормальным вектором прямой, на которой лежит высота BP. Пусть M (x, y) – произвольная точка этой прямой, тогда $\overrightarrow{BM}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BM})=0$. Переходя к координатам перемножаемых векторов, получим $-7(x-5)+2(y+2)=0\Rightarrow 7x-2y-39=0$ – общее уравнение искомой прямой.

1.3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

В школьном курсе математики широко использовалось уравнение прямой $y=kx+b$ с угловым коэффициентом (рис. 4), где $k=\mathrm{tg}\,\alpha$, b – ордината точки пересечения прямой с осью OY.

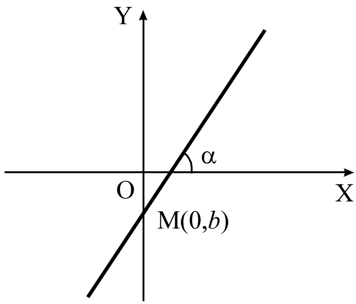


Рис. 4

Очевидно, и от общего, и от канонического уравнений прямой легко перейти к уравнению с угловым коэффициентом:

1) $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathrm{B}y=-\mathrm{A}x-\mathrm{C}\Rightarrow y=-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}x-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}.$$

В полученном уравнении

$$k=-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}},\ b=-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\ \text{ при } \mathrm{B}\neq 0.$$

2) $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}\Rightarrow\frac{y}{n}=\frac{x}{m}-\frac{x_0}{m}+\frac{y_0}{n}\Rightarrow y=\frac{n}{m}x-\frac{n\,x_0}{m}+y_0.$$

В этом уравнении

$$k = \frac{n}{m}, \quad b = -\frac{n\,x_0}{m} + y_0 \quad \text{при} \;\; m \neq 0.$$

Если $m = 0$, уравнение прямой будет иметь вид $x = x_0$.

1.4. Основные задачи на прямую линию на плоскости

1. Нахождение угла между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть в некоторой системе координат заданы две прямые:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (1), \qquad \overline{n}_1 = (A_1,\, B_1),$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (2), \qquad \overline{n}_2 = (A_2,\, B_2).$$

Нахождение угла между двумя прямыми сводится к нахождению угла между их нормальными векторами:

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{n}_1, \overline{n}_2)}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2}} \cdot \sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2}}};$$

(1) || (2) $\Leftrightarrow$ $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ коллинеарны $\Leftrightarrow$ $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$ – условие параллельности прямых.

(1) $\perp$ (2) $\Leftrightarrow$ $\overline{n}_1 \perp \overline{n}_2$ $\Leftrightarrow$ $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ – условие перпендикулярности прямых.

Разделив последнее равенство на $B_1 \cdot B_2$, получим

$$\frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} = -1 \Rightarrow k_1k_2 = -1$$

– условие перпендикулярности прямых, заданных уравнениями $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$. Очевидно, параллельны так заданные прямые будут при выполнении условия $k_1 = k_2$ (tg α_1 = tg α_2).

2. Нахождение расстояния от точки до прямой

Пусть в некоторой системе координат задана точка $M_1(x_1, y_1)$ и прямая $Ax + By + C = 0$. Требуется найти расстояние от точки $M_1(x_1, y_1)$ до заданной прямой (рис. 5).

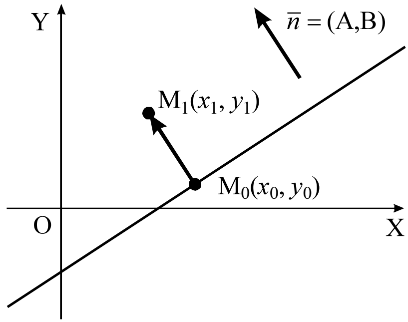


Рис. 5

Рассмотрим скалярное произведение $(\overrightarrow{M_0M_1}, \bar{n})$. Так как векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\bar{n}$ коллинеарны, то

$$(\overrightarrow{M_0M_1}, \bar{n}) = \pm\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|\cdot\left|\bar{n}\right| = \pm d\cdot\left|\bar{n}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \pm\frac{(\overrightarrow{M_0M_1}, \bar{n})}{\left|\bar{n}\right|} = \pm\frac{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \pm\frac{Ax_1 + By_1 - Ax_0 - By_0}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Так как точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит прямой, то

$$Ax_0 + By_0 + C = 0 \Rightarrow -Ax_0 - By_0 = C.$$

Окончательно будем иметь:

$$d = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Объясните появление знаков «±» при выводе формулы.

Пример. Найти расстояние между прямыми $3x-4y+8=0$ и $6x-8y-9=0$.

Решение. Данные прямые параллельны, так как их нормальные векторы коллинеарны $\left(\frac{3}{6}=\frac{-4}{-8}\right)$. Возьмем на первой прямой какую-либо точку, например M_1 (0, 2), и найдем расстояние от этой точки до второй прямой. Это расстояние и будет расстоянием между заданными параллельными прямыми:

$$d=\frac{|6\cdot 0-8\cdot 2-9|}{\sqrt{36+64}}=\frac{25}{10}=2{,}5.$$

2. Решение задач

2.1. Построить прямые $x+2y=6$, $y=2x$ и $x=4$ и изобразить геометрическое место точек плоскости, удовлетворяющих неравенствам

$$y\geq 3-\frac{x}{2},\quad y\leq 2x \quad \text{и} \quad x<4.$$

Решение. Очевидно, если прямая описывается уравнением

$$y=k\,x+b,$$

то неравенству $y>k\,x+b$ удовлетворяют точки, расположенные выше этой прямой, а неравенству $y\leq k\,x+b$ будут удовлетворять координаты точек, расположенных под прямой и на самой прямой.

Точки, расположенные в заштрихованной части плоскости (рис. 6), удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} y\leq 2x, \\ y\geq 3-\dfrac{x}{2}, \\ x<4. \end{cases}$$

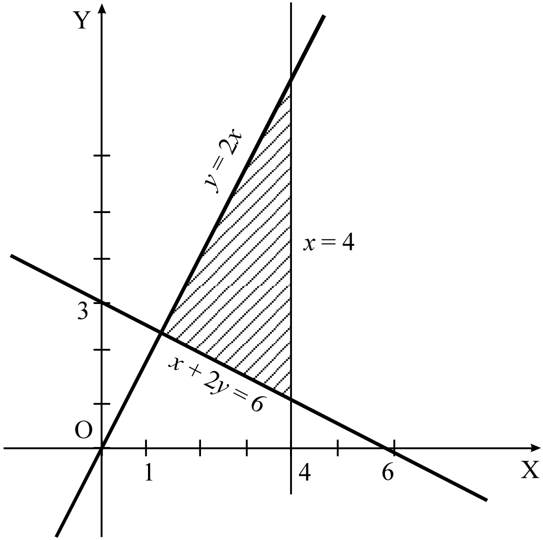


Рис. 6

2.2. Найти проекцию точки M_1 (9, 4) на прямую, проходящую через точки M_2 (2, 3) и M_3 (–1, 4) (рис. 7).

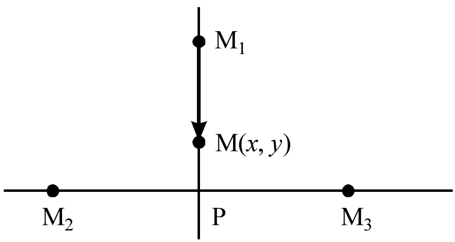


Рис. 7

Решение. При решении геометрических задач часто оказывается полезным составлять план решения. По условию задачи нам требуется найти координаты точки P. С этой целью необходимо:

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точки M_2 и M_3.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M_1, перпендикулярно прямой, на которой лежат точки M_2 и M_3.

3. Решить систему из полученных уравнений, решением которой и будут координаты точки P.

Осталось реализовать составленный план.

1. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $M_2\,(2, 3)$ и $M_3\,(-1, 4)$:

$$\frac{x-2}{-1-2}=\frac{y-3}{4-3}\Rightarrow x+3y-11=0\,.$$

2. Для перпендикулярной прямой вектор $\overrightarrow{M_2M_3}=(-3,1)$ будет нормалью

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_1M}\perp\overrightarrow{M_2M_3}\Rightarrow(\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_2M_3})=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3(x-9)+1\cdot(y-4)=0\Rightarrow -3x+y+23=0\,.$$

3. Решим систему полученных уравнений:

$$\begin{cases} x+3y-11=0, \\ -3x+y+23=0, \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=11-3y, \\ -33+9y+y+23=0, \end{cases}\Rightarrow\quad \begin{array}{l} x=8, \\ y=1. \end{array}$$

Ответ. P (8, 1).

2.3. Даны уравнения двух сторон ромба $3x-10y+37=0$ и $9x+2y-17=0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x-2y-19=0$. Найти уравнение второй диагонали и двух других сторон ромба.

Решение. Так как нормали $\bar{n}_1=(3,-10)$ и $\bar{n}_2=(9,2)$ не коллинеарны, то заданы две смежные стороны ромба (рис. 8).

Очевидно, решение задачи будет зависеть от того, уравнение какой из диагоналей задано. Поэтому план решения задачи будет таким:

1. Найдем координаты точки B.

2. Проверим, удовлетворяют ли координаты точки B уравнению диагонали. Если да, то задана диагональ BD, если нет, то $3x-2y-19=0$ – уравнение диагонали AC.

3. Если окажется, что задано уравнение AC, то, так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны, нормаль $\overline{n}_3 = (3, -2)$ будет для второй диагонали направляющим вектором. Зная на BD точку B и направляющий вектор, получим уравнение BD.

4. Решая соответствующие системы, находим координаты точек A и C.

5. Составляем уравнения для AD и CD, так как на каждой из них известно по точке, и $\overline{n}_1 = (3, -10)$ и $\overline{n}_2 = (9, 2)$ соответственно будут нормалями для CD и AD.

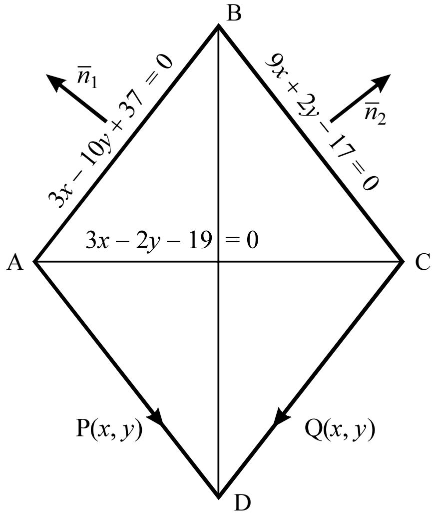


Рис. 8

Реализуем составленный план:

1. Решая систему:

$$\begin{cases} 3x - 10y + 37 = 0, \\ 9x + 2y - 17 = 0, \end{cases}$$

найдем координаты точки B. Систему решим методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -10 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = 96; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -37 & -10 \\ 17 & 2 \end{vmatrix} = 96; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -37 \\ 9 & 17 \end{vmatrix} = 384 \Rightarrow$$

$$x_\text{B} = 1; \quad y_\text{B} = 4.$$

2. Координаты $x_\text{B} = 1$, $y_\text{B} = 4$ уравнению $3x - 2y - 19 = 0$ не удовлетворяют $\Rightarrow$ это уравнение диагонали AC.

3. Получим уравнение BD: $\overrightarrow{\text{BM}}$ и $\overline{n}_3 = (3, -2)$ коллинеарны $\Rightarrow$ их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{-2} \Rightarrow -2x - 3y + 14 = 0$$

– уравнение диагонали BD.

4. Решим системы:

$$\begin{cases}3x-10y+37=0,\\3x-2y-19=0,\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}9x+2y-17=0,\\3x-2y-19=0,\end{cases}$$

тем самым найдем координаты точек A и C.

$$\begin{cases}3x-10y=-37,\\3x-2y=19;\end{cases} \quad \Delta=\begin{vmatrix}3 & -10\\9 & -2\end{vmatrix}=24\,; \quad \Delta_1=\begin{vmatrix}-37 & -10\\19 & -2\end{vmatrix}=264\,;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3 & -37\\3 & 19\end{vmatrix}=168 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix}x_{\text{A}}=11,\\y_{\text{A}}=7;\end{matrix}$$

$$\begin{cases}9x+2y=17,\\3x-2y=19,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}12x=36,\\3x-2y=19,\end{cases} \qquad \begin{matrix}x_{\text{C}}=3,\\y_{\text{C}}=-5.\end{matrix}$$

Таким образом, A (11,7), C (3, –5).

5. Получим уравнение AD: $\overrightarrow{\text{AP}}\perp\overline{n}_2\Rightarrow(\overrightarrow{\text{AP}},\overline{n}_2)=0$. Переходя к координатам перемножаемых векторов, будем иметь

$$\overrightarrow{\text{AP}}=(x-11,\ y-7)\,,\ \ \overline{n}_2=(9,2)\Rightarrow 9(x-11)+2(y-7)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x+2y-113=0$$

– уравнение стороны AD.

Получим уравнение стороны CD:

$$\overrightarrow{\text{CQ}}\perp\overline{n}_1\Rightarrow(\overrightarrow{\text{CQ}},\overline{n}_1)=0\,.$$

Переходя к координатам векторов

$$\overrightarrow{\text{CQ}}=(x-3,\ y+5) \quad \text{и} \quad \overline{n}_1=(3,-10)\,,$$

будем иметь

$$3(x-3)-10(y+5)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-10y-59=0$$

– уравнение стороны CD.

Ответ. $2x+3y-14=0$;

$9x+2y-113=0$;

$3x-10y-59=0$.

2.4. Даны уравнения двух сторон треугольника:

$$5x - 4y + 15 = 0 \quad \text{и} \quad 4x + y - 9 = 0.$$

Его медианы пересекаются в точке (0, 2). Составить уравнение третьей стороны треугольника.

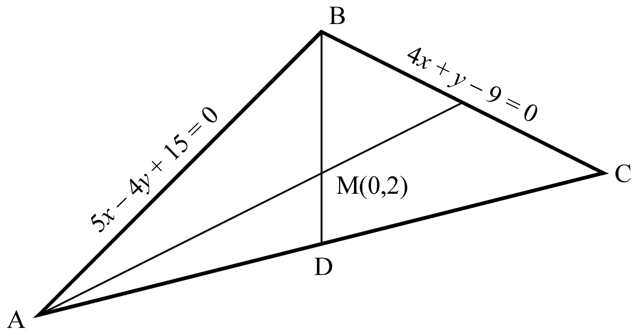


Рис. 9

Решение. 1. Найдем координаты точки B (рис. 9):

$$\begin{cases} 5x - 4y + 15 = 0, \\ 4x + y - 9 = 0, \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{matrix} x = 1, \\ y = 5. \end{matrix}$$

2. Найдем координаты точки D, воспользовавшись формулами деления отрезка в данном отношении:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_1 + \lambda\, x_2}{2}, \\ y_0 = \dfrac{y_1 + \lambda\, y_2}{2}, \end{cases}$$

по свойству медианы $\lambda = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \dfrac{1 + 2x_2}{3}, \\ 2 = \dfrac{5 + 2y_2}{3}, \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

3. Введем обозначения A (x_1, y_1), C (x_2, y_2) и составим систему для нахождения координат точек A и C:

$$\begin{cases} 5x_1 - 4y_1 + 15 = 0, \\ 4x_2 + y_2 - 9 = 0, \\ \dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Решая систему, найдем

$$x_1 = -3; \quad y_1 = 0;$$

$$x_2 = 2; \quad y_2 = 1.$$

4. Составим уравнение AC:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{x+3}{5} = \frac{y}{1} \Rightarrow x - 5y + 3 = 0.$$

Ответ. $x - 5y + 3 = 0.$

2.5. Луч света направлен по прямой $x + y + 3 = 0$. Дойдя до прямой $3x - y + 5 = 0$, луч отразился. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

Решение. Такую задачу проще решить, используя уравнения прямых с угловыми коэффициентами. Уравнение падающего луча $y = -x - 3$, уравнение прямой, от которой луч отразился, $y = 3x + 5$, уравнение отраженного луча $y = k\,x + b$. Задача сводится к нахождению чисел k и b.

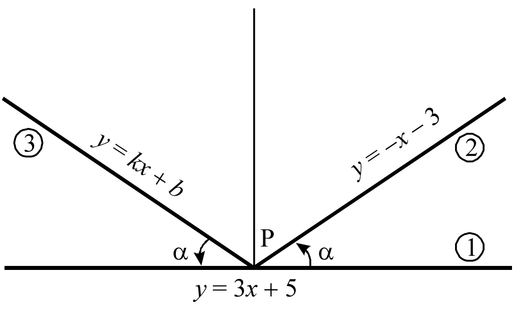


Рис. 10

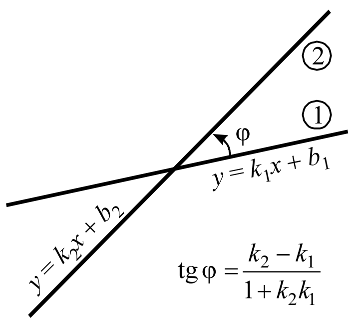


Рис. 11

При решении задачи воспользуемся тем, что угол падения равен углу отражения (рис. 10), и формулой для тангенса угла между двумя прямыми, заданными с угловыми коэффициентами (рис. 11). План решения должен быть таким:

1. Найдем $\operatorname{tg}\alpha$ между прямыми (1) и (2) и между прямыми (3) и (1). Приравнивая полученные результаты, найдем угловой коэффициент прямой (3) .

2. Чтобы найти параметр b прямой (3), на этой прямой нужно знать точку. В качестве этой точки возьмем точку P пересечения прямых (1) и (2).

3.Подставляя найденное k и координаты точки P в уравнение $y = k\,x + b$, найдем b.

Реализуем составленный план.

1. По формуле для $\operatorname{tg}\alpha$ (рис. 11) найдем $\operatorname{tg}\alpha$ между прямыми (1) и (2):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-1-3}{1-3} = 2 .$$

По этой же формуле найдем $\operatorname{tg}\alpha$ между прямой (3) и (1):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3-k}{1+3k} . \operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$$

2. Приравняем полученные двумя способами значения $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\frac{3-k}{1+3k} = 2 \Rightarrow 3 - k = 2 + 6k \Rightarrow k = \frac{1}{7} .$$

3. Найдем координаты точки P:

$$\begin{cases} y = -x - 3, \\ y = 3x + 5, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = -2, \\ y = -1. \end{matrix}$$

4. Найдем значение b, подставляя координаты точки P и $k = \dfrac{1}{7}$ в уравнение $y = k\,x + b$:

$$-1 = \frac{1}{7} \cdot (-2) + b \Rightarrow b = -\frac{5}{7} .$$

Уравнение отраженного луча примет вид

$$y = \frac{1}{7}x - \frac{5}{7} \quad \text{или} \quad x - 7y - 5 = 0 .$$

Ответ. $x - 7y - 5 = 0$.

2.6. Получить уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $3x - 4y - 12 = 0$ и $5y - 3 = 0$.

Решение.

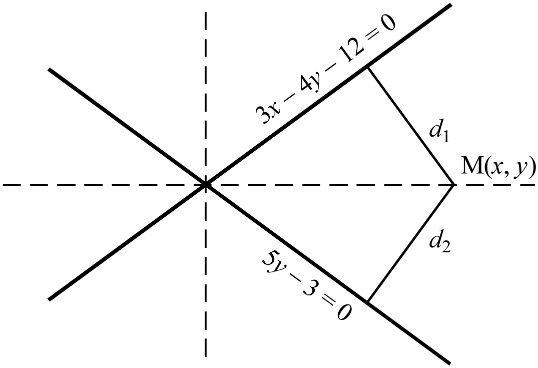


Рис. 12

Уравнения биссектрис получим, используя свойство точек биссектрисы: точки биссектрисы равноудалены от сторон угла. Пусть M (x, y) – текущая точка биссектрисы (рис. 12). Воспользуемся формулой расстояния от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой $Ax + By + C + 0$:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} .$$

Найдем по этой формуле d_1 и d_2:

$$d_1 = \frac{|3x - 4y - 12|}{\sqrt{9+16}}, \quad d_1 = \frac{|3x - 4y - 12|}{5};$$

$$d_2 = \frac{|5y - 3|}{\sqrt{0+25}}, \quad d_2 = \frac{|5y - 3|}{5} .$$

Приравнивая d_1 и d_2, получим

$$\frac{|3x-4y-12|}{5}=\frac{|5y-3|}{5} \Rightarrow 3x-4y-12=\pm(5y-3).$$

Уравнение первой биссектрисы:

$$3x-4y-12=5y-3 \quad \text{или} \quad 3x-9y-9=0 \Rightarrow x-3y-3=0.$$

Уравнение второй биссектрисы:

$$3x-4y-12=-5y+3 \Rightarrow 3x+y-15=0.$$

Очевидно, получили уравнения взаимно перпендикулярных прямых.

Ответ. $x-3y-3=0$;
$3x+y-15=0$.

3. Банк задач для самостоятельной работы

3.1. Изобразите геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

$$y \le x+5, \; y > 3-x, \; x \ge 7.$$

3.2. Заданы две точки M_1 (2, –3) и M_2 (4, 5). Получить:

а) каноническое уравнение прямой, проходящей через данные точки;

б) общее уравнение этой же прямой;

в) уравнение прямой с угловым коэффициентом;

г) параметрические уравнения прямой.

3.3. Прямая проходит через точки M_1 (–2, 6) и M_2 (3, –1). Составить уравнение прямой, проходящей через точку M_0 (–3, –1):

а) параллельно прямой M_1M_2;

б) перпендикулярно прямой M_1M_2.

Ответ. $7x+5y+26=0$;
$7y-5x-8=0$.

3.4. Найти проекцию точки M_1 (–8, 12) на прямую, проходящую через точки M_2 (2, –3) и M_3 (–5, 1).

Ответ. P (–12, 5).

3.5. Даны вершины треугольника A (–5, –2), B (7, 6) и C (5, –4). Составить: а) уравнение высоты, проведенной из вершины C; б) уравнение медианы, проведенной из вершины A. Определить внутренние углы при вершинах B и C.

Ответ. $3x + 2y - 7 = 0$;

$3x - 11y - 7 = 0$;

45° и 90°.

3.6. Получить уравнения прямых, проходящих через точку M_0 (2, 1) под углом 45° к прямой $3x - y = 2$.

Ответ. $y = \frac{1}{2}x$;

$y = -2x + 5$.

3.7. Из точки M_0 (–2, 3) под углом α к оси OX направлен луч света. Известно, что tg α =3. Дойдя до оси OX, луч от нее отразился. Составить уравнения прямых, на которых лежат падающий и отраженный лучи.

Ответ. $3x - y + 9 = 0$;

$3x + y + 9 = 0$.

3.8. Луч света направлен по прямой $x - 2y + 5 = 0$. Дойдя до прямой $3x - 2y + 7 = 0$, луч от нее отразился. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

Ответ. $29x - 2y + 33 = 0$.

3.9. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$5x - 12y + 52 = 0 \quad \text{и} \quad 10x - 24y - 39 = 0.$$

Ответ. 5,5.

3.10. Составить уравнения биссектрис углов, образованных прямыми

$$3x + 4y + 3 = 0 \quad \text{и} \quad 12x + 5y = 0.$$

Ответ. $7x - 9y - 13 = 0$;
$99x + 77y + 39 = 0$.

3.11. Даны две смежные вершины параллелограмма A (2, 5) и B (5, 3) и точка P (–2, 0) пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон параллелограмма.

Ответ. $2x + 3y - 19 = 0$; $8x - 11y - 7 = 0$;
$2x + 3y + 27 = 0$; $8x - 11y + 39 = 0$.

3.12. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, если уравнение его гипотенузы $x - 2y - 3 = 0$, а вершина прямого угла находится в точке C (1, 6).

Ответ. $3x - y + 3 = 0$;
$x + 3y - 19 = 0$.

3.13. Даны две вершины A (–3, 3) и B (5, –1) и точка D (4, 3) пересечения высот треугольника. Составить уравнения его сторон.

Ответ. $x + 2y - 3 = 0$;
$x - 4y + 15 = 0$;
$x = 5$.

3.14. Даны вершины трапеции ABCD (AD || BC): A (–3, –2), B (4, –1), C (1, 3). Известно, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найти координаты вершины D трапеции.

Ответ. $D\left(-\dfrac{123}{8}; \dfrac{29}{2}\right)$.

ТЕМА 3. **Плоскость и прямая в пространстве**

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Какая информация о плоскости однозначно определяет положение этой плоскости относительно заданной декартовой системы координат?

Плоскость однозначно определена в каждом из следующих двух случаев:

1. На плоскости в заданной системе координат известна точка M_0 (x_0, y_0, z_0) и известен нормальный вектор $\overline{n} = (A, B, C)$ этой плоскости.

2. На плоскости известна точка M_0 (x_0, y_0, z_0) и известны два неколлинеарных между собой вектора, параллельных данной плоскости.

1.2. Как получить уравнение плоскости в том и другом случаях?

Пусть в некоторой системе координат задана точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и вектор $\overline{n} = (A, B, C)$. Требуется получить в этой системе координат уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (x_0, y_0, z_0) перпендикулярно вектору $\overline{n} = (A, B, C)$ (рис. 1).

Пусть M (x, y, z) – произвольная точка плоскости. По условию $\overline{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow (\overline{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$.

Если $\overline{r}$ и $\overline{r_0}$ – радиус-векторы точек M и M_0, то будем иметь

Пусть в некоторой системе координат задана точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и два неколлинеарных вектора $\overline{S_1} = (m_1, n_1, p_1)$ и $\overline{S_2} = (m_2, n_2, p_2)$. Требуется получить сравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (x_0, y_0, z_0) параллельно векторам $\overline{S_1}$ и $\overline{S_2}$, которые называются направляющими векторами плоскости (рис. 2).

Пусть M (x, y, z) – произвольная точка плоскости. По условию задачи векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$

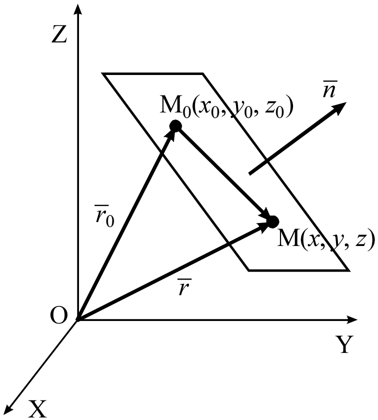


Рис. 1

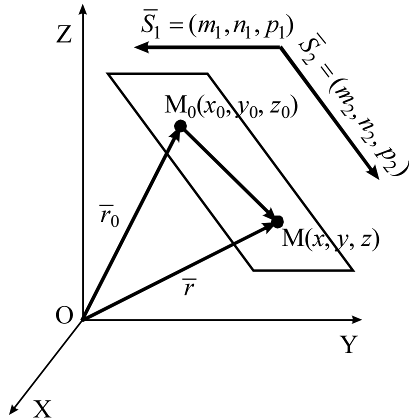


Рис. 2

$$(\overline{n}, \overline{r} - \overline{r}_0) = 0$$

– уравнение плоскости в векторной форме.

Переходя к координатам векторов, получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Введем обозначение

$$D = -A\,x_0 - B\,y_0 - C\,z_0,$$

тогда уравнение плоскости примет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) называют общим уравнением плоскости. Подчеркнем, что в этом уравнении коэффициенты A, B, C – координаты нормального вектора плоскости.

компланарны $\Rightarrow$

$$(\overrightarrow{M_0M}, \overline{S}_1, \overline{S}_2) = 0$$

или $\qquad (\overline{r} - \overline{r}_0, \overline{S}_1, \overline{S}_2) = 0.$

Переходя к координатам векторов, получим

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Раскрывая определитель, получим уравнение в виде (1).

Заметим, что в этом случае $\overline{n} = [\overline{S}_1, \overline{S}_2]$ будет нормальным вектором плоскости.

Заметим, что общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где $\overline{n} = (A, B, C)$ – ее нормальный вектор, получено точно так же, как ранее (тема 2, п. 1.2) было получено общее уравнение

$Ax + By + C = 0$ прямой на плоскости, при этом $\overline{n} = (A, B)$ – нормальный вектор этой прямой. Подчеркнем, что и уравнение прямой, и уравнение плоскости являются уравнениями первой степени относительно своих переменных.

Пример 1. Получить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (1, –2, –3) параллельно плоскости $3x - y - 4z + 5 = 0$.

Решение. По условию задачи плоскости параллельны, следовательно, нормальный вектор заданной плоскости $\overline{n} = (3, -1, -4)$ будет нормальным вектором и для искомой плоскости (рис. 3).

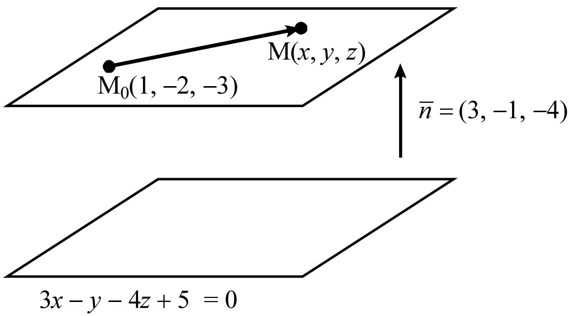


Рис. 3

Таким образом,

$$(\overline{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0 \Rightarrow 3(x-1) - (y+2) - 4(z+3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - y - 4z - 17 = 0$$

– уравнение искомой плоскости.

Пример 2. Получить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки M_1 (2, –1, 1), M_2 (2, 0, –1), M_3 (0, 1, 1).

Решение. Пусть M (x, y, z) – произвольная точка плоскости. Так как векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны (рис. 4), то

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0.$$

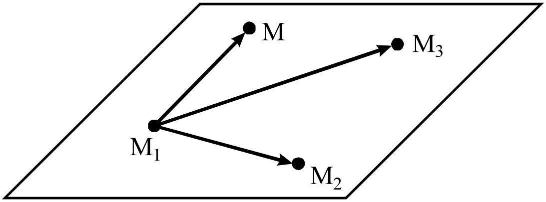


Рис. 4

Переходя к координатам векторов, будем иметь

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

В результате вычисления определителей и приведения подобных получаем уравнение $2x+2y+z-3=0$.

Ответ. $2x+2y+z-3=0$.

1.3. Как зависит положение плоскости относительно системы координат от коэффициентов A, B, C, D уравнения плоскости?

Исследуем положение плоскости в пространстве в зависимости от коэффициентов уравнения $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0$ плоскости.

1. Все коэффициенты уравнения отличны от нуля.

Уравнение плоскости можно записать в виде

$$\frac{x}{-\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{A}}}+\frac{y}{-\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{B}}}+\frac{z}{-\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}}}=1 \quad \text{или} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

– уравнения плоскости в отрезках (рис. 5).

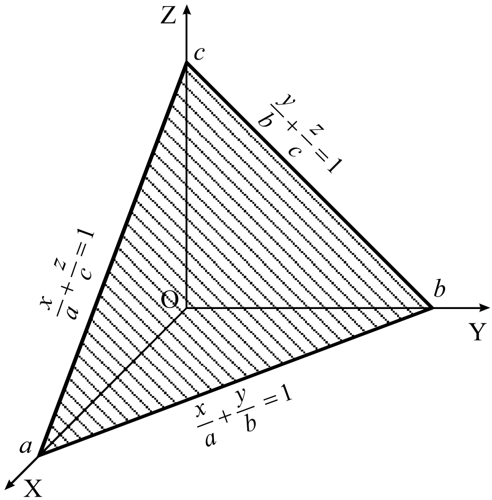


Рис. 5

На рис. 5 указаны уравнения линий пересечения плоскости с плоскостями координат (уравнения следов плоскости).

2. Пусть $\mathrm{A}=\mathrm{O} \Rightarrow \mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0$, $\bar{n}=(\mathrm{O},\mathrm{B},\mathrm{C})$.

Так как $\bar{n}=(\mathrm{O},\mathrm{B},\mathrm{C}) \perp$ оси OX, плоскость оси OX параллельна (рис. 6). Аналогично, $\mathrm{A}x+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0 \,||\, \mathrm{OY}$ (рис. 7) $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{D}=0 \,||\, \mathrm{OZ}$ (рис. 8)

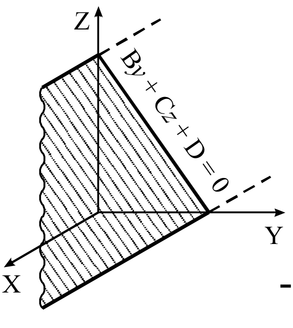


Рис. 6

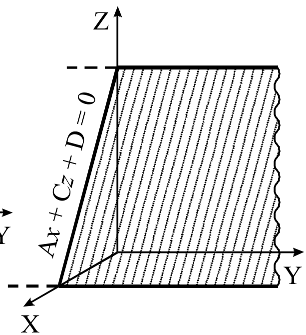


Рис. 7

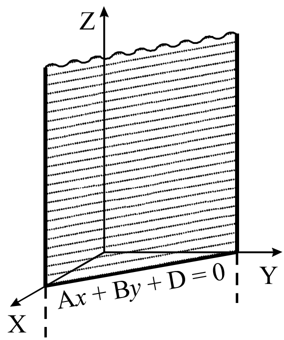


Рис. 8

3. Пусть $D = 0 \Leftarrow Ax + By + Cz = 0$.

Очевидно такая плоскость проходит через начало координат (рис. 9)

Строится такая плоскость построением ее линий пересечения с плоскостями координат.

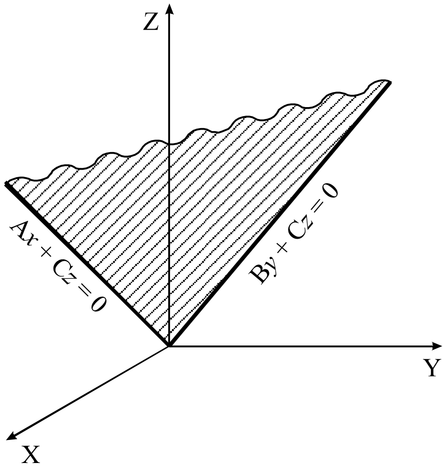


Рис. 9

4. $By + Cz = 0$, $A = 0$, $D = 0 \Rightarrow$ – плоскость проходит через ось OX. Аналогично, $Ax + Cz = 0$ – проходит через ось OY, $Ax + By = 0$ – через ось OZ (рис. 10 – 12).

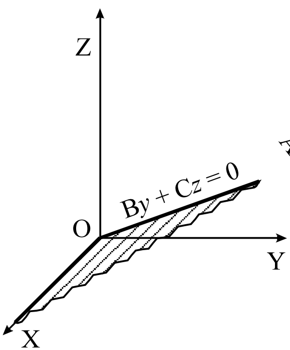


Рис. 10

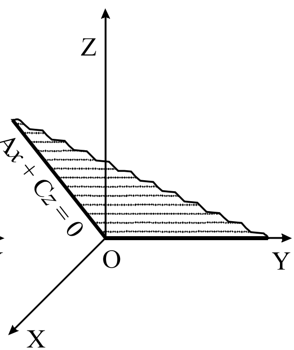


Рис. 11

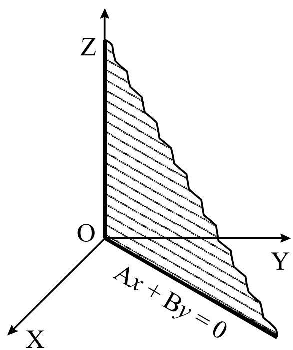


Рис. 12

5. $Ax + D = 0$ || плоскости YOZ (рис. 13);

$By + D = 0$ || плоскости ZOX (рис. 14);

$Cz + D = 0$ || плоскости XOY (рис. 15).

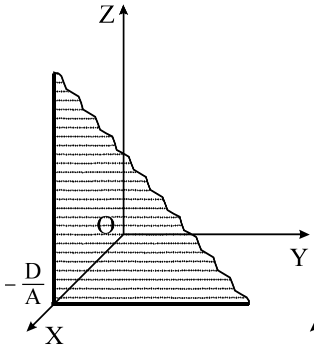


Рис. 13

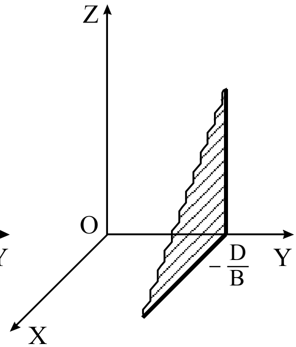


Рис. 14

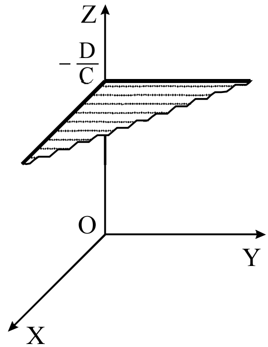


Рис. 15

6. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ – уравнения координатных плоскостей.

1.4. Охарактеризовать взаимное расположение трех плоскостей в зависимости от направления их нормалей

Пусть заданы три плоскости:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \qquad \overline{n}_1 = (A_1, B_1, C_1);$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \qquad \overline{n}_2 = (A_2, B_2, C_2);$$
$$A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0, \qquad \overline{n}_3 = (A_3, B_3, C_3).$$

1. Векторы $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$, $\overline{n}_3$ некомпланарны, т.е. $(\overline{n}_1, \overline{n}_2, \overline{n}_3) \neq 0$. В этом случае плоскости пересекаются в одной точке.

2. Нормали компланарны, т.е. $(\overline{n}_1, \overline{n}_2, \overline{n}_3) = 0$, но среди векторов $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$, $\overline{n}_3$ нет коллинеарных пар векторов. В этом случае плоскости пересекаются либо по одной прямой, либо по трем параллельным прямым.

3. Нормали компланарны, т.е. $(\overline{n}_1, \overline{n}_2, \overline{n}_3) = 0$, и при этом среди нормалей есть коллинеарные векторы. В этом случае две плоскости параллельны, а третья их пересекает, либо все три плоскости параллельны.

1.5. Нахождение угла между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Пусть заданы две плоскости:

(1) $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$, $\quad \overline{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$;

(2) $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$, $\quad \overline{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.

Очевидно, одному из двугранных углов, под которыми пересекаются плоскости, будет соответствовать линейный угол, образованный нормалями этих плоскостей. Косинус этого угла, как известно, находится по формуле

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{n}_1, \overline{n}_2)}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2} + C_1^{\,2}} \cdot \sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2} + C_2^{\,2}}}.$$

Очевидно, плоскости (1) и (2) будут параллельны тогда и только тогда, когда их нормали будут коллинеарны, т.е. при выполнении условия

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Плоскости (1) и (2) будут взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\overline{n}_1 \perp \overline{n}_2$, т.е. при выполнении условия

$$(\overline{n}_1, \overline{n}_2) = 0 \quad \text{или} \quad A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

1.6. Нахождение расстояния от точки до плоскости

Формула расстояния от точки M_1 (x_1, y_1, z_1) до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ получается аналогично формуле расстояния от точки до прямой на плоскости (тема 2, п. 1.4) и имеет вид

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

1.7. Два способа задания прямой в пространстве

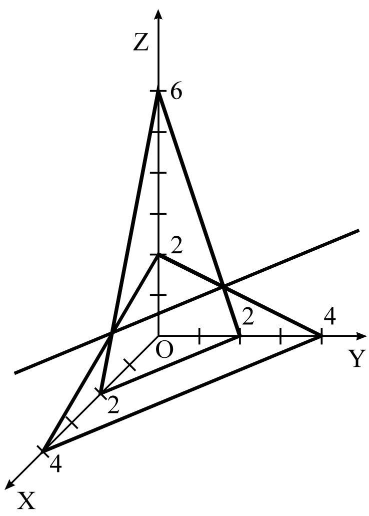
1. Задание прямой как линии пересечения двух плоскостей. В этом случае координаты точки M (x, y, z) прямой должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Система (1) будет задавать прямую в пространстве при условии, что нормальные векторы $\overline{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\overline{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ плоскостей не коллинеарны. Систему (1) называют общим уравнением прямой в пространстве.

Пример. Построить прямую

$$\begin{cases} 3x + 3y + z = 6, \\ x + y + 2z = 4. \end{cases}$$



2. Уравнение прямой в пространстве так же, как и на плоскости, можно получить, если в некоторой системе координат задана на этой прямой точка M_0 (x_0, y_0, z_0) и известен вектор $\overline{S}$, параллельный этой прямой (направляющий вектор прямой) (рис. 16).

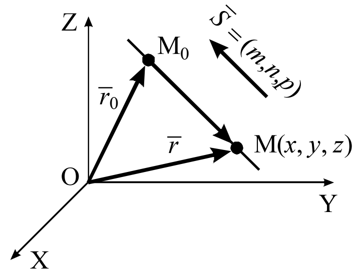


Рис.16

Векторы $\overrightarrow{M_0M} = \overline{r} - \overline{r}_0$, $\overline{S}$ коллинеарны $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (2)$$

Уравнения (2) называются каноническими уравнениями прямой в пространстве.

Если ввести параметр

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t,$$

то очевидным образом получаются параметрические уравнения прямой в пространстве:

$$\begin{cases} x = x_0 + m\,t, \\ y = y_0 + n\,t, \\ z = z_0 + p\,t. \end{cases} \qquad (3)$$

1.8. *Как перейти от общего уравнения (1) прямой к каноническим уравнениям этой же прямой*

Если прямая задана как линия пересечения двух плоскостей, то направляющий вектор $\overline{S}$ этой прямой будет коллинеарен вектору $[\overline{n}_1, \overline{n}_2]$, и это векторное произведение и берут в качестве направляющего вектора прямой. Для нахождения точки $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ одной из ее координат придают любое значение, а две другие координаты находят путем решения системы (1), которая будет содержать уже две неизвестные величины.

Пример. Задана прямая

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 12, \\ 2x + y \qquad\quad\; = 4. \end{cases}$$

Требуется построить эту прямую и получить ее канонические и параметрические уравнения.

Чтобы построить прямую, следует построить обе плоскости и провести линию, по которой эти плоскости пересекаются.

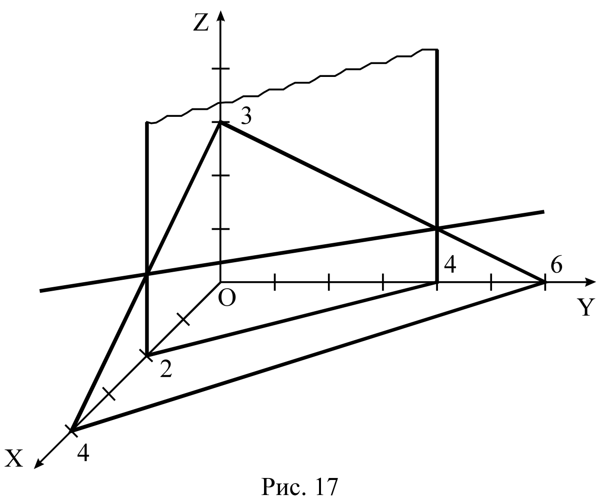


Рис. 17

$$\overline{S} = [\overline{n}_1, \overline{n}_2] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4\overline{i} + 8\overline{j} - \overline{k}\,;$$

$\overline{S} = (-4, 8, -1)$ – направляющий вектор прямой.

Найдем на прямой точку M_0 (x_0, y_0, z_0). Пусть $x_0 = 0$, тогда для нахождения y_0 и z_0 будем иметь систему

$$\begin{cases} 2y + 4z = 12, \\ y = 4, \end{cases} \Rightarrow M_0(0, 4, 1)\,.$$

Канонические уравнения прямой будут иметь вид

$$\frac{x}{-4} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-1}{-1}\,.$$

Из канонических уравнений легко получаются параметрические уравнения этой же прямой:

$$\begin{cases} x = -4t, \\ y = 4 + 8t, \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

Придавая параметру t различные значения, будем получать различные точки прямой.

1.9. Можно ли прямую, заданную каноническими уравнениями, задать как линию пересечения двух плоскостей?

Очевидно, от канонических уравнений прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

можно перейти к системе двух уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}, \\ \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}, \end{cases}$$

которую можно рассматривать как общее уравнение прямой в пространстве.

1.10. *Основные задачи на прямую и плоскость в пространстве*

1. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Пусть в пространстве заданы две прямые каноническими уравнениями:

(1) $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$, где $\overline{S}_1=(m_1,n_1,p_1)$,

$M_1\,(x_1, y_1, z_1)$;

(2) $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$, где $\overline{S}_2=(m_2,n_2,p_2)$,

$M_2\,(x_2, y_2, z_2)$.

Если векторы $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ – коллинеарны, тогда прямые (1) и (2) параллельны. Если прямые не параллельны, то они либо пересекаются, либо являются скрещивающимися. Как выяснить пересекаются или скрещиваются две прямые в пространстве?

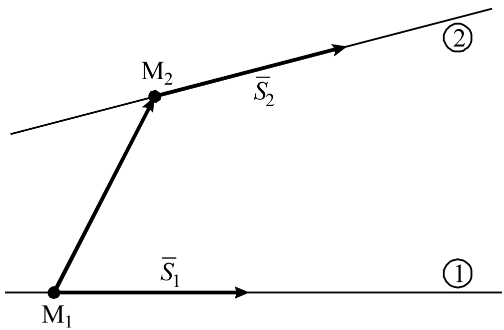


Рис. 18

Очевидно, если $\overline{S}_1 \not\parallel \overline{S}_2$, то прямые (1) и (2) будут пересекаться, когда векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ будут компланарны, т.е. при условии, что $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overline{S}_1, \overline{S}_2)=0$.

Если же $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overline{S}_1, \overline{S}_2)\neq 0$, прямые (1) и (2) будут скрещиваться.

Пример. Выяснить вопрос о взаимном расположении заданных прямых

(1) $x-1=\dfrac{y}{2}=z+2$, $\qquad \bar{S}_1=(1,2,1)$, $M_1\ (1, 0, -2)$;

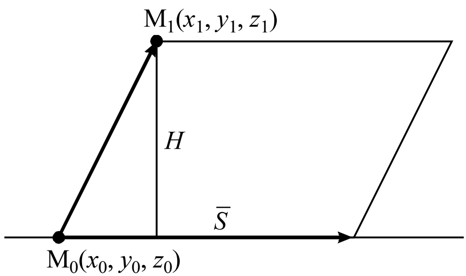
(2) $\dfrac{x+3}{2}=y=z$, $\qquad \bar{S}_2=(2,1,1)$, $M_2\ (-3, 0, 0)$.

$\bar{S}_1 \nparallel \bar{S}_2 \Rightarrow$ прямые (1) и (2) не параллельны. Вычислим смешанное произведение $(\overrightarrow{M_1M_2}, \bar{S}_1, \bar{S}_2)$:

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \bar{S}_1, \bar{S}_2)=\begin{vmatrix}-4 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=-10.$$

$(\overrightarrow{M_1M_2}, \bar{S}_1, \bar{S}_2)\neq 0 \Rightarrow$ прямые (1) и (2) – скрещивающиеся.

2. Нахождение расстояния от точки $M_1\ (x_1, y_1, z_1)$ до прямой $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ (рис. 19).



$M_0\ (x_0, y_0, z_0)$,
$\bar{S}=(m,n,p)$.

Рис. 19

Очевидно, искомое расстояние d равно высоте параллелограмма, построенного на векторах $\bar{S}$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$. Таким образом,

$$d=H=\frac{\left|[\bar{S}, \overrightarrow{M_0M_1}]\right|}{\left|\bar{S}\right|}.$$

3. Нахождение кратчайшего расстояния между скрещивающимися прямыми.

Известно, что если прямые скрещиваются, то существуют две параллельные плоскости, на одной из которых лежит одна прямая, на второй другая. Поэтому расстояние между скрещивающимися прямыми

(1) $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$, где $\bar{S}_1=(m_1,n_1,p_1)$,

$M_1\ (x_1, y_1, z_1)$;

(2) $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$, где $\bar{S}_2=(m_2,n_2,p_2)$,

$M_2\ (x_2, y_2, z_2)$;

будет равно высоте параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ ($\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ отнесены к одному началу) (рис. 20).

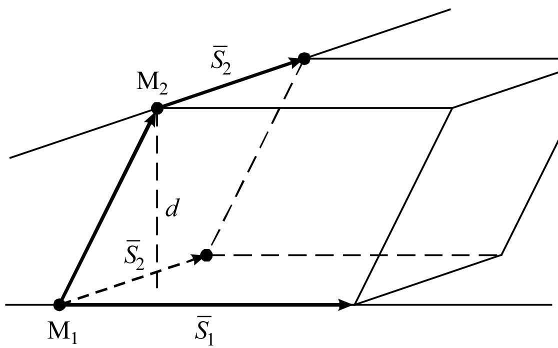


Рис. 20

$$d=H=\frac{V_{\text{пар}}}{S_{\text{осн}}}=\frac{\left|(\overrightarrow{M_1M_2},\bar{S}_1,\bar{S}_2)\right|}{\left|[\bar{S}_1,\bar{S}_2]\right|}.$$

4. Нахождение угла между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

Пусть требуется найти угол между прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \quad \overline{S}=(m,n,p)$$

и плоскостью

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0, \quad \overline{n}=(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}).$$

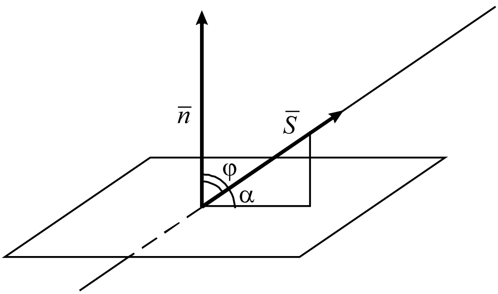


Рис. 21

Поместим начало векторов $\overline{n}$ и $\overline{S}$ в точку пересечения прямой и плоскости (рис. 21).

В условиях данной задачи легко находится

$$\cos\varphi=\frac{(\overline{n},\overline{S})}{|\overline{n}|\cdot|\overline{S}|}.$$

Но $\varphi=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ и, следовательно, $\cos\varphi=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$.

Таким образом, угол α между прямой и плоскостью находится по формуле

$$\sin\alpha=\frac{(\overline{n},\overline{S})}{|\overline{n}|\cdot|\overline{S}|}=\frac{\mathrm{A}m+\mathrm{B}n+\mathrm{C}p}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

$$\mathrm{A}m+\mathrm{B}n+\mathrm{C}p=0$$

– условие параллельности прямой и плоскости;

$$\frac{\mathrm{A}}{m}=\frac{\mathrm{B}}{n}=\frac{\mathrm{C}}{p}$$

– условие перпендикулярности прямой и плоскости.

2. Решение задач

2.1. Построить плоскости:

1) $2x + 3y + 4z = 12$;
2) $x - 2y - 6z = 0$;
3) $3x + y = 6$;
4) $z - 2x = 8$;
5) $z = 4y$;
6) $3y + 7 = 0$.

Решение.

1. $2x + 3y + 4z = 12$ – плоскость общего вида. Найдем точки пересечения плоскости с осями координат (рис. 22):

$$M_1\ (6, 0, 0),\quad M_2\ (0, 4, 0),\quad M_3\ (0, 0, 3).$$

2. $x - 2y - 6z = 0$ – плоскость проходит через начало координат. Построим два следа плоскости (рис. 23):

$$\begin{cases} z = 0, \\ x = 2y \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y = 0, \\ x = 6z. \end{cases}$$

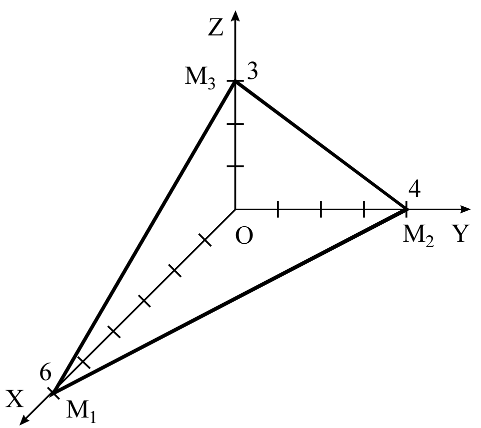


Рис. 22

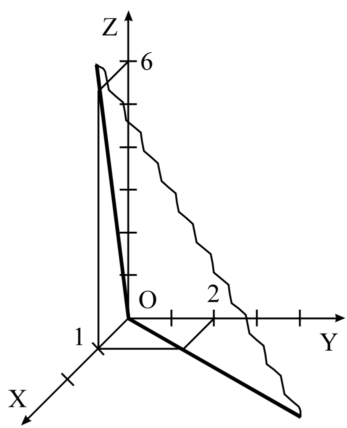


Рис. 23

3. $3x + y = 6$ – плоскость параллельна оси OZ. Найдем точки пересечения с осями координат: M_1 (2, 0, 0), M_2 (0, 6, 0) (рис. 24).

4. $z - 2x = 8$ – плоскость параллельна оси OY. Найдем точки пересечения с осями: K_1 (–4, 0, 0), K_2 (0, 0, 8) (рис. 25).

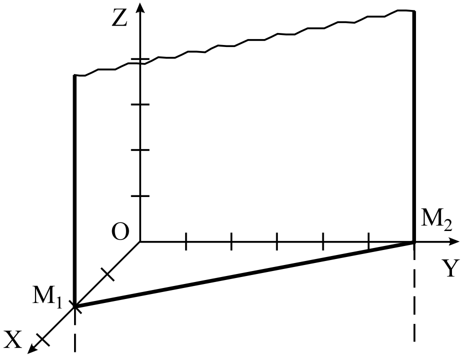


Рис. 24

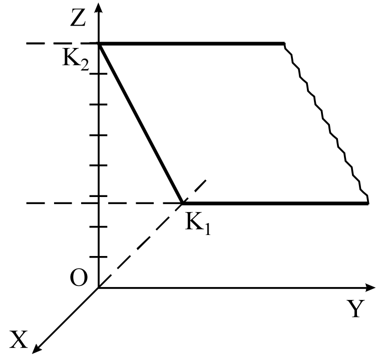


Рис. 25

5. $z = 4y$ – плоскость проходит через ось OX (рис. 26).

6. $3y = 7$ – плоскость параллельна плоскости ZOX (рис. 27).

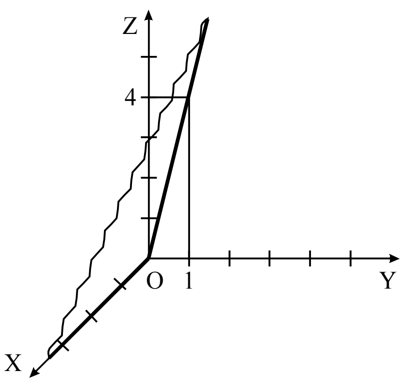


Рис. 26

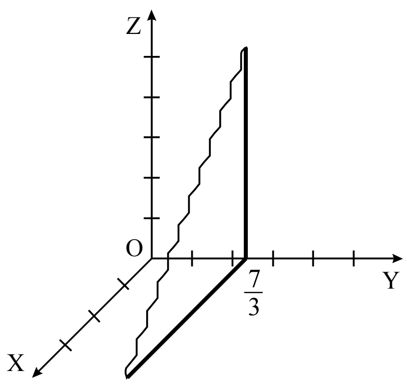


Рис. 27

2.2. Получить уравнение плоскости, зная, что точка M_0 (2, –3, 5) этой плоскости служит основанием перпендикуляра, опущенного из точки M_1 (3, 5, –2) на эту плоскость (рис. 28).

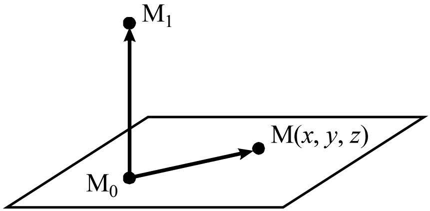


Рис. 28

Пусть М (x, y, z) – текущая точка плоскости. По условию задачи

$$\overrightarrow{M_0M_1} \perp \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow (\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M}) = 0\,;$$

$$\overrightarrow{M_0M_1} = (1, 8, -7)\,, \quad \overrightarrow{M_0M} = (x-2,\ \ y+3,\ \ z-5)\,;$$

$$(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M}) = (x-2) + 8\,(y+3) - 7(z-5) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 8y - 7z + 57 = 0\,.$$

Ответ. $x + 8y - 7z + 57 = 0$.

2.3. Получить уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 (2, 0, –1) и M_2 (3, 4, 2) перпендикулярно плоскости $3x - y + 4z - 5 = 0$ (рис. 29).

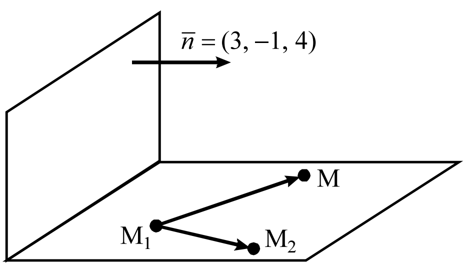


Рис. 29

Решение. Пусть M (x, y, z) – любая точка искомой плоскости. Так как нормаль $\overline{n} = (3, -1, 4)$ параллельна искомой плоскости, векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overline{n}$ компланарны $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overline{n}) = 0.$$

В координатной форме это уравнение примет вид

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-2)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (z+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Окончательно будем иметь

$$19x + 5y - 13z - 51 = 0.$$

Ответ. $19x + 5y - 13z - 51 = 0$.

2.4. Даны уравнения двух граней параллелепипеда

$$x - 2y + 2z = 4, \quad \overline{n}_1 = (1, -2, 2)$$

и

$$2x - 4y + 4z = -7, \quad \overline{n}_2 = (2, -4, 4).$$

Найти высоту параллелепипеда.

Решение. Так как соответствующие координаты нормальных векторов $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ пропорциональны, заданы уравнения параллельных граней, а высота параллелепипеда будет равна расстоянию между ними. Чтобы воспользоваться формулой расстояния от точки M_1 (x_1, y_1, z_1) до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

найдем на одной из граней, например на первой, точку M_1 (x_1, y_1, z_1) так, чтобы ее координаты удовлетворяли уравнению этой грани. Пусть это будет точка M_1 (4, 1, 1). Тогда

$$H = d = \frac{|8 - 4 + 4 + 7|}{\sqrt{4 + 16 + 16}} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}.$$

Ответ. $H = 2{,}5$.

2.6. Заданы две плоскости:

$$x-2y+2z-8=0 \quad \text{и} \quad x+\mathrm{C}\cdot z=6.$$

При каком значении C:

1) плоскости будут перпендикулярны;

2) угол между плоскостями будет 45°?

Решение. 1. Заданные плоскости имеют нормали $\overline{n}_1(1,-2,2)$ и $\overline{n}_2(1,0,\mathrm{C})$. Условие перпендикулярности плоскостей имеет вид

$$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2+\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2+\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2=0.$$

В нашем случае

$$1+2\,\mathrm{C}=0 \Rightarrow \mathrm{C}=-\frac{1}{2}.$$

Таким образом, плоскости

$$x-2y+2z-8=0 \quad \text{и} \quad 2x-z=12$$

будут перпендикулярны.

2. По условию второй части задачи

$$\cos(\overline{n}_1,^{\wedge}\overline{n}_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

В нашем случае $\quad \cos(\overline{n}_1,^{\wedge}\overline{n}_2)=\dfrac{1+2\mathrm{C}}{\sqrt{1+\mathrm{C}^2}\cdot 3}.$

Таким образом, осталось решить уравнение

$$\frac{1+2\mathrm{C}}{3\sqrt{1+\mathrm{C}^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}\cdot(1+2\mathrm{C})=3\sqrt{1+\mathrm{C}^2}.$$

Возводя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение

$$\mathrm{C}^2-8\mathrm{C}+7=0,$$

корни которого $\mathrm{C}_1=1$, $\mathrm{C}_2=7$. Оба корня удовлетворяют иррациональному уравнению.

Ответ. 1) $\mathrm{C}=-\dfrac{1}{2}$; 2) $\mathrm{C}_1=1$, $\mathrm{C}_2=7$.

2.7. Прямая задана как линия пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} x+y+2z=6, \\ 3x+4y+2z=12. \end{cases}$$

Построить прямую и найти ее направляющий вектор.

Решение. Построим плоскости и проведем линию их пересечения (рис. 30):

$$\overline{S}=[\overline{n}_1,\overline{n}_2]=\begin{vmatrix} i & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}=-6\overline{i}+4\overline{j}+\overline{k}\ .$$

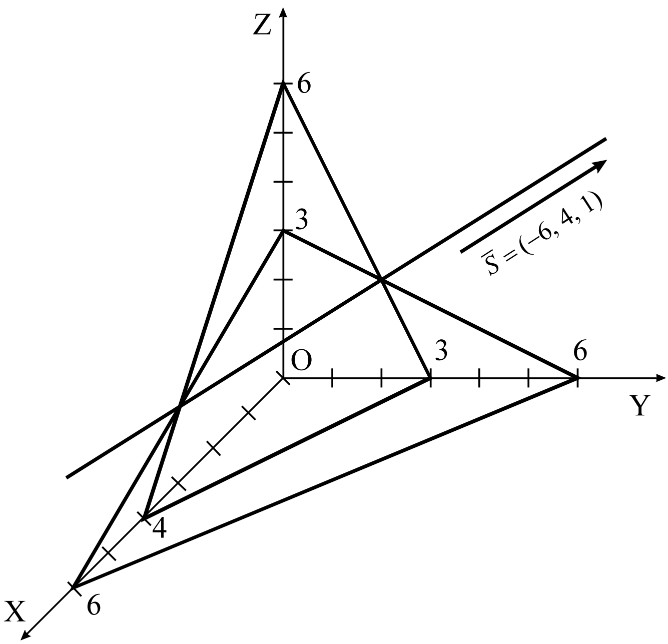


Рис. 30

Ответ. $\overline{S}=(-6; 4; 1)$.

2.8. Найти проекцию точки Q (2, 1, 1) на плоскость (рис. 31)

$$x + y + 3z + 5 = 0 .$$

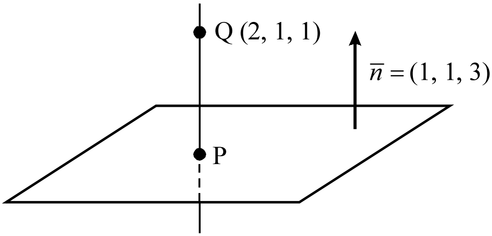


Рис. 31

Решение. Составим канонические уравнения прямой, проходящей через точку Q (2, 1, 1) перпендикулярно плоскости $x + y + 3z + 5 = 0$, нормальный вектор $\overline{n} = (1, 1, 3)$ которой будет направляющим вектором этой прямой:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}.$$

Чтобы найти координаты точки P, необходимо решить систему

$$\begin{cases} x - 2 = y - 1 = \dfrac{z-1}{3} = t, \\ x + y + 3z + 5 = 0. \end{cases}$$

Такая система проще всего решается с использованием параметрических уравнений прямой:

$$\begin{cases} x = t + 2,\ y = t + 1,\ z = 3t + 1, \\ x + y + 3z + 5 = 0. \end{cases}$$

Найдем значение параметра t, при котором пересекутся прямая и плоскость:

$$t + 2 + t + 1 + 9t + 3 + 5 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow \mathrm{P}(1, 0, -2) .$$

Ответ. P (1, 0, –2).

2.9. Заданы плоскость

$$x + y - z + 1 = 0$$

и прямая
$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

Найти уравнение проекции этой прямой на заданную плоскость (рис. 32).

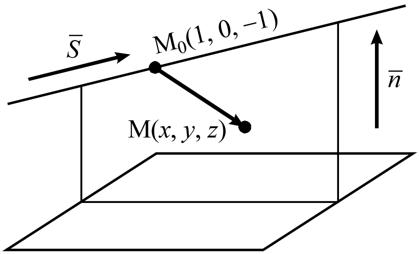


Рис. 32

Решение. Проекцией заданной прямой на данную плоскость будет линия пересечения заданной плоскости и плоскости, ей перпендикулярной, проходящей через заданную прямую. Получим уравнение перпендикулярной плоскости.

Пусть М (x, y, z) – произвольная точка плоскости. Очевидно, направляющий вектор $\overline{S} = (0, 2, 1)$ прямой, нормаль $\overline{n} = (1, 1, -1)$ заданной плоскости и вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x-1, y, z+1)$ будут компланарны $\Rightarrow (\overrightarrow{M_0M}, \overline{S}, \overline{n}) = 0$. Запишем векторное уравнение в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - y + 2z - 1 = 0.$$

Таким образом, искомую проекцию мы зададим как линию пересечения двух плоскостей.

Ответ. $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 3x - y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$

2.10. Найти угол между прямой

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0, \\ y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

и плоскостью $\qquad 4x + y + z - 3 = 0$.

Решение. Чтобы найти угол между прямой и плоскостью, нужно знать направляющий вектор $\overline{S}$ прямой и нормальный вектор $\overline{n}$ плоскости. По условию задачи $\overline{n} = (4, 1, 1)$. Найдем $\overline{S} = [\overline{n}_1, \overline{n}_2]$.

$$\overline{S} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k} .$$

По формуле, полученной в п.1.10, будем иметь

$$\sin\alpha = \frac{(\overline{n}, \overline{S})}{|\overline{n}| \cdot |\overline{S}|} = \frac{-8 - 2 + 1}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{16 + 1 + 1}} = \frac{-9}{9\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} .$$

$$\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 135^\circ .$$

Ответ. $\alpha = 135°$.

2.11. Доказать, что прямые

$$\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}$$

параллельны и найти расстояние между ними.

Решение. Найдем направляющий вектор $\overline{S}_2$ второй прямой:

$$\overline{S}_2 = [\overline{n}_1, \overline{n}_2] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3\overline{i} + \overline{j} - 4\overline{k} .$$

По условию $\overline{S}_1 = (3, -1, 4)$. Векторы $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ коллинеарны $\Rightarrow$ прямые параллельны. Воспользуемся тем, что на первой прямой задана точка M_1 (–7, 5, 9). Найдем точку M_2 (x_0, y_0, z_0) на второй прямой. Пусть $x_0 = 0$, чтобы найти y_0 и z_0 решим систему

$$\begin{cases} 2y - z = 10, \\ -y - z = 22 \end{cases} \Rightarrow 3y = -12, \;\; y_0 = -4, \;\; z_0 = -18.$$

Сделаем чертеж (рис. 33):

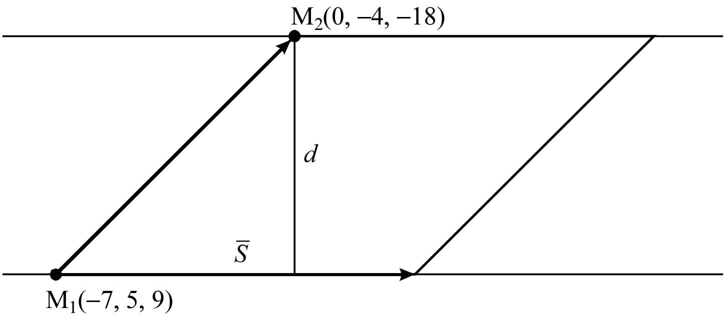


Рис. 33

Очевидно, искомое расстояние d равно высоте параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overline{S}$:

$$H = d = \frac{\left|[\overrightarrow{M_1M_2}, \overline{S}]\right|}{\left|\overline{S}\right|};$$

$$[\overrightarrow{M_1M_2}, \overline{S}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 7 & -9 & -27 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -63\overline{i} - 109\overline{j} + 20\overline{k},$$

$$[\overrightarrow{M_1M_2}, \overline{S}] = \sqrt{63^2 + 109^2 + 20^2} = \sqrt{16250};$$

$$\left|\overline{S}\right| = \sqrt{9 + 1 + 16} = \sqrt{26};$$

$$d = \sqrt{\frac{16250}{26}} = \sqrt{625} = 25.$$

Ответ. $d = 25$.

2.12. Доказать, что заданные прямые – скрещивающиеся, и найти расстояние между ними.

$$\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}; \qquad \bar{S}_1=(4,-3,1),\ \mathrm{M}_1=(9,-2,0);$$

$$\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}; \qquad \bar{S}_2=(-2,9,2),\ \mathrm{M}_2=(0,-7,2).$$

Сделаем чертеж (рис. 34).

Вопрос о взаимном расположении двух прямых в пространстве решается с помощью смешанного произведения $(\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}, \bar{S}_1, \bar{S}_2)$ (п. 1.10)

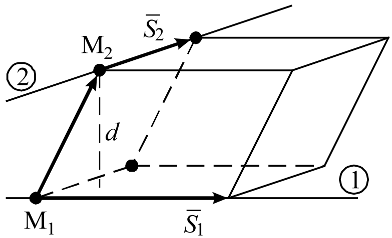


Рис. 34

$$(\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}, \bar{S}_1, \bar{S}_2)=\begin{vmatrix}-9 & -5 & 2\\ 4 & -3 & 1\\ -2 & 9 & 2\end{vmatrix}=245.$$

$(\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}, \bar{S}_1, \bar{S}_2)\neq 0 \Rightarrow$ прямые (1) и (2) – скрещивающиеся. Кратчайшее расстояние между ними равно расстоянию между параллельными плоскостями, на которых они расположены, то есть высоте параллелепипеда (рис. 34):

$$d=H=\frac{V_{\text{пар}}}{S_{\text{осн}}}=\frac{\left|[\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}, \bar{S}_1, \bar{S}_2]\right|}{\left|[\bar{S}_1, \bar{S}_2]\right|}=\frac{245}{\left|[\bar{S}_1, \bar{S}_2]\right|};$$

$$[\bar{S}_1, \bar{S}_2]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & -3 & 1\\ -2 & 9 & 2\end{vmatrix}=-15\bar{i}-10\bar{j}+30\bar{k};$$

$$\left|[\bar{S}_1, \bar{S}_2]\right|=\sqrt{15^2+10^2+30^2}=35 \Rightarrow d=\frac{245}{35}=7.$$

Ответ. $d=7$.

3. Банк задач для самостоятельной работы

3.1. Построить плоскости:

1) $2x - y - 3z = 6$; 2) $2x - y - 3z = 0$;

3) $x = 4z$; 4) $x = 4z + 3$;

5) $x = y + 2z$; 6) $x + 2y = 8$;

7) $2z - 5 = 0$; 8) $3y + 7 = 0$.

3.2. Даны две точки $M_1\,(2, -1, 3)$ и $M_2\,(2, 0, -1)$. Получить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$. Плоскость построить.

Ответ. $y - 4z + 13 = 0$.

3.3. Получить уравнение плоскости, проходящей через три данные точки: $M_1\,(1, 1, -1)$, $M_2\,(1, 0, 2)$ и $M_3\,(2, 1, 1)$. Плоскость построить.

Ответ. $-2x + 3y + z = 0$.

3.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно двум плоскостям

$$2x - y + 5z + 3 = 0, \quad x + 3y - z = 7.$$

Ответ. $2x - y - z = 0$.

3.5. Среди данных плоскостей выбрать параллельные и найти расстояние между ними. Между пересекающимися найти угол.

$$6x - 18y - 9z - 28 = 0,$$

$$x + z = 6,$$

$$x - 2y + 2z = 8,$$

$$4x - 12y - 6z - 7 = 0.$$

Ответ. $d = \dfrac{5}{6}$; $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

3.6. Заданы четыре точки A (2, 0, 1), B (0, 1, 1), C (–1, 0, 2), D (3, 2, 4). На векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ построен параллелепипед. Найти уравнение плоскости основания параллелепипеда и длину высоты, опущенной из вершины D.

Ответ. $x + 2y + 3z = 5$, $H = \sqrt{14}$.

3.7. Получить канонические уравнения прямой, проходящей через точку M_1 (3, –2, –5) параллельно вектору $\overline{S} = (4, 0, -3)$.

Ответ. $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z+5}{-3}$ или $\begin{cases} y = -2, \\ \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{z+5}{-3}. \end{cases}$

3.8. Построить прямую

$$\begin{cases} 2x + z = 4, \\ 3x + y + z = 9. \end{cases}$$

Получить канонические и параметрические уравнения этой прямой.

Ответ. $-x = y - 5 = \dfrac{z-4}{2}$;

$$\begin{cases} x = -t, \\ y = t + 5, \\ z = 2t + 4. \end{cases}$$

3.9. Найти угол между прямой

$$\begin{cases} x - 2y = 5, \\ y - z = 2 \end{cases}$$

и плоскостью $x + 2y - z + 5 = 0$.

Ответ. $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

3.10. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}.$$

Ответ. $d = 3$.

3.11. Найти кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y+2=0, \\ 3y-2z-10=0. \end{cases}$$

Ответ. $d=6$.

3.12. Найти проекцию точки A (3, –1, 4) на плоскость

$$2x+y-z+5=0\ .$$

Ответ. P (1, –2, 5).

3.13. Дана плоскость $x+y-2z=6$ и точка M_1 (1, 1, 1). Найти точку M_2, симметричную точке M_1 относительно данной плоскости.

Ответ. M_2 (3, 3, –3).

3.14. Найти проекцию точки Q (2, 3, 1) на прямую

$$\frac{x+7}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{3}\,.$$

Ответ. P (–5, 2, 4).

3.15. Найти проекцию точки C (3, –4, –2) на плоскость, проходящую через две параллельные прямые

$$\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4} \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}\,.$$

Ответ. P (2, –3, –5).

3.16. Обзорная задача по теме «Плоскость и прямая в пространстве». Даны координаты вершин пирамиды:

A_1 (4, 2, 5), A_2 (0, 7, 2), A_3 (0, 2, 7), A_4 (1, 5, 0).

Требуется найти:

1) длину ребра A_1A_2 и его уравнение;
2) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

3) угол между ребром A_2A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
4) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$;
5) основание высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$;
6) угол между гранями $A_1A_2A_3$ и $A_2A_3A_4$.

Ответ. 1) $\left|A_1A_2\right| = 5\sqrt{2}$, $\dfrac{x-4}{-4} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-5}{-3}$;

2) $x + 2y + 2z - 18 = 0$;

3) $\sin\alpha = -\dfrac{7}{9}$;

4) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z}{2}$;

5) $O\left(\dfrac{16}{9}, \dfrac{59}{9}, \dfrac{14}{9}\right)$;

6) $\cos\varphi = \dfrac{8}{9\sqrt{2}}$.

ТЕМА 4. **Кривые второго порядка**

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Какой вид имеет общее уравнение кривой второго порядка?

При изучении прямых и плоскостей мы неоднократно подчеркивали, что они задаются линейными уравнениями относительно декартовых координат. В данной теме будут рассмотрены кривые, которые задаются уравнением второго порядка относительно декартовых координат. В общем случае такое уравнение имеет вид

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{C}xy + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0, \tag{1}$$

где A, B, C, D, E и F – некоторые константы.

Кривые, задаваемые уравнением (1) называются кривыми второго порядка при условии, что хотя бы один из коэффициентов A, B или C отличен от нуля.

1.2. Какие из кривых, изучаемых школьном курсе, относятся к кривым второго порядка?

Кривыми второго порядка являются

окружность $x^2 + y^2 = R^2$,

парабола $y = a\,x^2 + b\,x + c$

и гипербола $x\,y = k$.

Приступим к подробному изучению кривых второго порядка.

1.3. Окружность

Пусть в некоторой системе координат заданы координаты центра окружности O_1 (x_0, y_0), радиус которой равен R. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка окружности. По определению окружности

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right| = R \Rightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = R^2 .$$

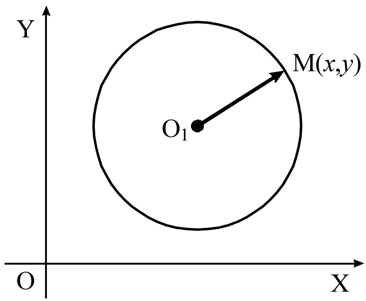


Рис. 1

Возводя обе части в квадрат, получим

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2 \qquad (2)$$

или $$x^2+y^2-2\mathrm{xx}_0-2\mathrm{yy}_0+\mathrm{x}_0{}^2+\mathrm{y}_0{}^2-R^2=0 . \qquad (3)$$

Сравнивая уравнение (3) с общим уравнением (1) кривой второго порядка, можно сделать вывод: уравнение (1) может являться уравнением окружности, если $\mathrm{A}=\mathrm{B}\neq 0$ и $\mathrm{C}=0$.

Пример. Определить центр и радиус окружности

$$x^2+y^2+6x-4y=3 .$$

Решение. В нашем случае $\mathrm{A}=\mathrm{B}=1$, $\mathrm{C}=0$. Уравнение вида (2) получим путем выделения полных квадратов:

$$(x^2+6x+9)+(y^2-4y+4)-9-4=3$$

или $$(x+3)^2+(y-2)^2=16 \Rightarrow \mathrm{O}_1(-3, 2),\ R=4 .$$

1.4. Эллипс. Определение, свойства эллипса

Определение. Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых до двух заданных точек, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная.

Чтобы получить каноническое уравнение эллипса, декартову систему координат построим следующим образом: ось OX направим через фокусы F_1 и F_2 эллипса, а начало координат поместим в середину отрезка F_1F_2 (рис. 2).

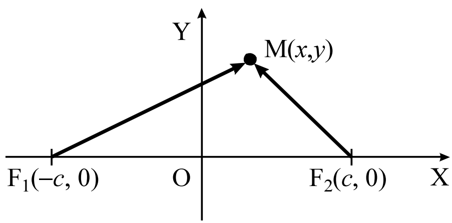


Рис. 2

Положим $\left|F_1F_2\right| = 2c \Rightarrow F_1(-c,0), F_2(c,0)$. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка эллипса. По определению эллипса

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| + \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = 2a \quad (\text{const}),$$

причем по свойству сторон треугольника $a > c$. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{F_1M} = (x + c,\, y)$, $\overrightarrow{F_2M} = (x - c,\, y)$ и их длины:

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,, \quad \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

Уравнение эллипса примет вид

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a\,, \quad a > c.$$

Избавимся от иррациональностей в полученном уравнении:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx\,.$$

Возведя в квадрат обе части равенства еще раз, получим

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2 \Rightarrow x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=$$
$$=a^4-a^2c^2.$$

Так как $a > c$, правомерно обозначение $a^2-c^2=b^2$. Уравнение примет вид

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2\cdot b^2.$$

Разделим обе части равенства на a^2b^2 и окончательно будем иметь уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{4}$$

которое называют каноническим уравнением эллипса.

Из уравнения (4) очевидны свойства эллипса:

1. Эллипс симметричен относительно начала и осей координат.

2. Так как $\frac{x^2}{a^2}\le 1$ и $\frac{y^2}{b^2}\le 1$, эллипс расположен внутри прямоугольника со сторонами $x=\pm a$, $y=\pm b$, касаясь сторон прямоугольника в точках A_1 $(-a, 0)$, A_2 $(a, 0)$, B_1 $(0, -b)$, B_2 $(0, b)$.

Эллипс изображен на рис. 3.

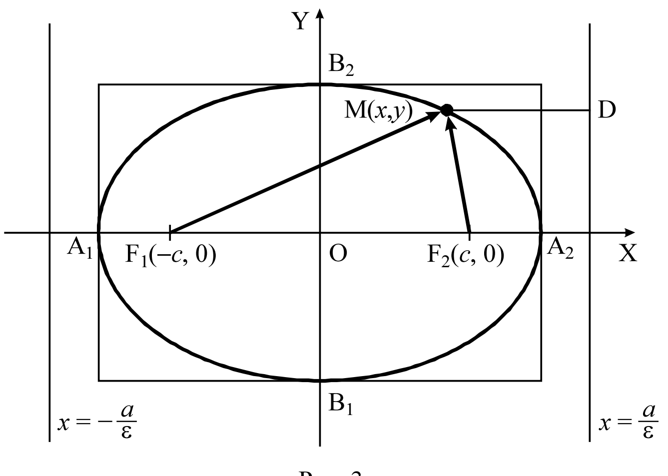


Рис. 3

По определению эллипса, $|F_1M| + |F_2M| = 2a$ для любой точки M (x, y) эллипса. Отрезок $|A_1A_2| = 2a$ называют большой осью эллипса, отрезок $|B_1B_2| = 2b$ – малой осью эллипса. Подчеркнем, что a, b и c связаны соотношением $b^2 = a^2 - c^2$.

1.5. Эксцентриситет и директрисы эллипса

Определение. Число $\frac{c}{a} = \varepsilon$ называется эксцентриситетом эллипса. Так как $c < a$, то $0 < \varepsilon < 1$. Эксцентриситет характеризует форму эллипса (степень его сжатия).

Определение. Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются директрисами эллипса. Так как $\varepsilon < 1$, директрисы проходят вне эллипса (рис. 3).

Теорема. Отношение расстояния от любой точки эллипса до фокуса к расстоянию от этой же точки до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса, т.е. $\frac{|MF_2|}{|MD|} = \varepsilon$ (рис. 3).

Теорему рекомендуется доказать самостоятельно.

Очевидно, если $c = 0$, то $a = b$ и эллипс превращается в окружность, при этом $\varepsilon = 0$.

1.6. Какой особенностью обладает эллипс, у которого b > a?

В этом случае a, b, c связаны соотношением $a^2 = b^2 - c^2$, фокусы F_1 $(0, -c)$ и F_2 $(0, c)$ будут расположены на оси OY, а директрисы будут иметь уравнения $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$. Эллипс будет вытянут вдоль оси OY.

Пример. Построить эллипс

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1.$$

Указать его фокусы, найти эксцентриситет и построить директрисы.

$$c^2=b^2-a^2;\quad c=4\Rightarrow \mathrm{F}_1(0,-4),\,\mathrm{F}_2(0,4).\qquad \varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{4}{5}.$$

$$y=\pm\frac{b}{\varepsilon}=\pm\frac{25}{4}\ \text{– уравнения директрис.}$$

Заметим, что

$$\left|\mathrm{F}_1\mathrm{M}\right|+\left|\mathrm{F}_2\mathrm{M}\right|=10=2b.$$

$$\frac{\left|\mathrm{MF}_1\right|}{\left|\mathrm{MD}\right|}=\varepsilon=\frac{4}{5}.$$

Эллипс изображен на рис. 5.

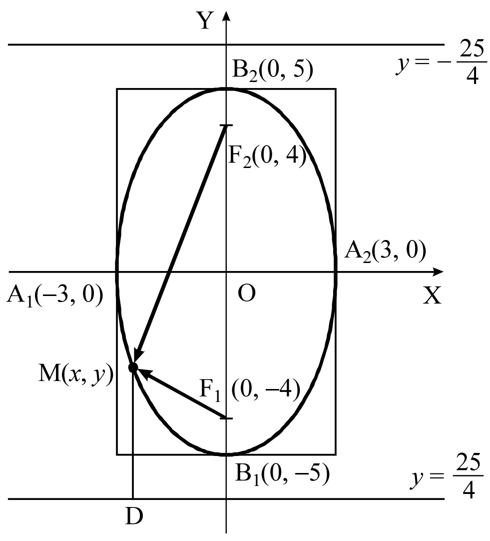


Рис. 5

1.7. Гипербола. Определение гиперболы, ее свойства

Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух заданных точек F_1 и F_2, называемых фокусами гиперболы, есть величина постоянная.

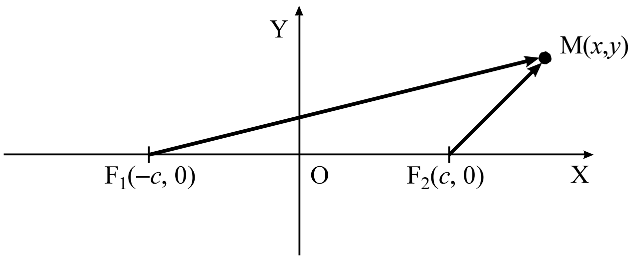


Рис. 4

Положим, как и в случае с эллипсом,

$$\left|F_1F_2\right| = 2c \Rightarrow F_1(-c,0),\ F_2(c,0).$$

По определению гиперболы $\left|\left|\overrightarrow{F_1M}\right| - \left|\overrightarrow{F_2M}\right|\right| = 2a$ для любой точки M (x, y) гиперболы (a = const, из свойства сторон треугольника следует, что $a < c$). В координатной форме уравнение гиперболы примет вид

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

В результате преобразований, аналогичных тем, которые были проведены с уравнением эллипса, получается каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (5)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

Свойства гиперболы:

1. Гипербола симметрична относительно начала и осей координат.

2. Гипербола ось OX пересекает в точках A_1 $(-a, 0)$ и A_2 $(a, 0)$, которые называются вершинами гиперболы. Ось OY гипербола не пересекает.

3. Так как $\dfrac{x^2}{a^2} \geq 1$, гипербола находится вне полосы, ограниченной прямыми $x = \pm a$, касаясь их в точках A_1 и A_2. Ось OY называют мнимой осью, ось OX – действительной осью гиперболы.

4. Можно доказать, что при $x \to +\infty$ расстояние от точек $M(x, y)$ гиперболы до прямой $y = \dfrac{b}{a}x$ уменьшается и стремится к нулю. Аналогично при $x \to -\infty$ уменьшается расстояние от точек гиперболы до прямой $y = -\dfrac{b}{a}x$. Прямые $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ называются асимптотами гиперболы. Гипербола изображена на рис. 6.

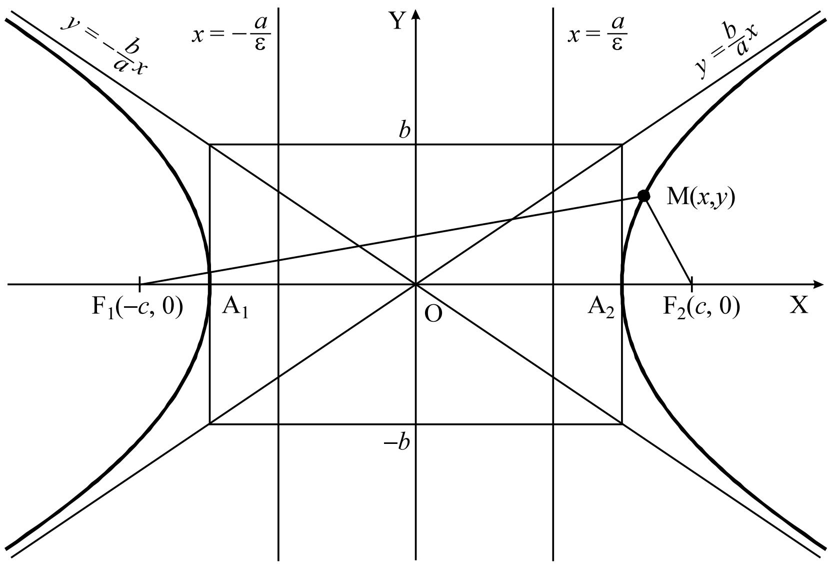


Рис. 6

Определение. Число $\dfrac{c}{a} = \varepsilon$ называется эксцентриситетом гиперболы, а прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ – ее директрисами.

Так как $c > a$, эксцентриситет гиперболы больше единицы.

Так как $\varepsilon > 1$, директрисы $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ проходят между вершинами гиперболы (рис. 6).

Для гиперболы имеет место теорема, аналогичная той, которая была сформулирована для эллипса.

Пример. Построить гиперболу

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

указать ее фокусы, найти эксцентриситет и построить директрисы.

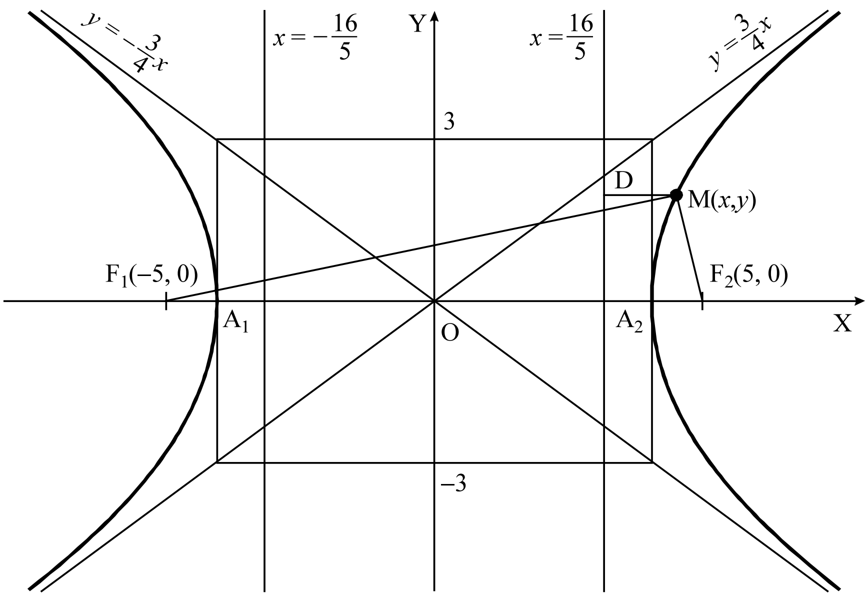


Рис. 7

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow \mathrm{F}_1(-5,0), \mathrm{F}_2(5,0)$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}, \quad x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{16}{5} \text{ – уравнения директрис}$$

$$\frac{|\mathrm{MF}_2|}{|\mathrm{MD}|} = \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{5}{4}; \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{MF}_1}\right| - \left|\overrightarrow{\mathrm{MF}_2}\right| = 8, \quad |\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2| = 8.$$

$$y = \pm\frac{3}{4}x \text{ – асимптоты гиперболы.}$$

1.9. Парабола. Определение, свойства параболы

Определение. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от заданной точки F, называемой фокусом параболы, и данной прямой, называемой директрисой параболы.

Чтобы получить каноническое уравнение параболы ось OX проведем через фокус перпендикулярно директрисе, а начало координат поместим в середину отрезка, соединяющего фокус и точку пересечения директрисы с осью OX (рис. 8).

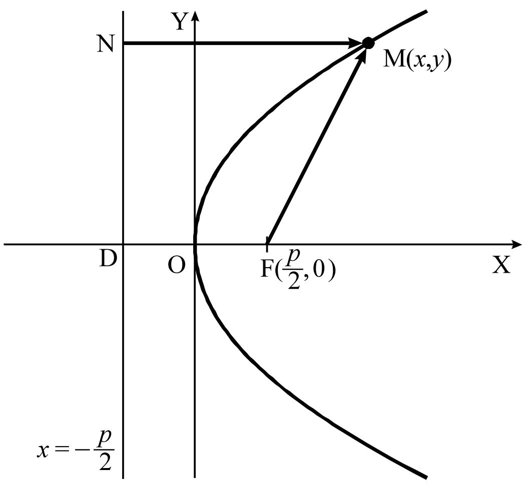


Рис. 8

Положим $|\mathrm{FD}| = p \Rightarrow \mathrm{F}\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $x = -\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы (рис. 8).

Пусть М (x, y) произвольная точка параболы. По определению параболы $\left|\overrightarrow{\mathrm{FM}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{NM}}\right|$.

$$\overrightarrow{\mathrm{FM}} = \left(x - \frac{p}{2}, y\right), \quad \overrightarrow{\mathrm{NM}} = \left(x + \frac{p}{2}, 0\right).$$

Уравнение параболы будет иметь вид:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} .$$

В результате возведения обеих частей равенства в квадрат и простейших преобразований получим каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px \qquad (6).$$

Свойства параболы достаточно хорошо известны из школьного курса математики.

1.10. Указать фокус и построить параболу $x^2 = 2py$ и ее директрису

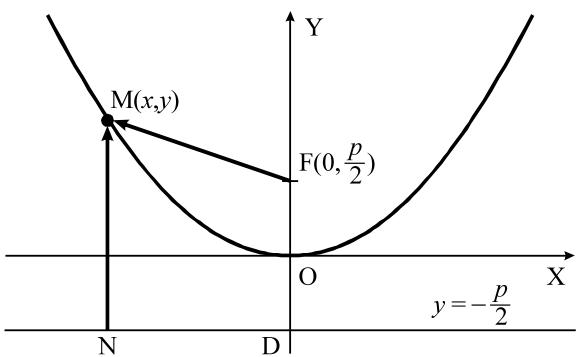


Рис. 9

Если $|\mathrm{FD}| = p$, тогда $\mathrm{F}\left(0, \frac{p}{2}\right)$, $y = -\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы (рис. 9).

1.11. Уравнение эллипса, гиперболы и параболы в полярной системе координат

Для эллипса и гиперболы имеет место утверждение: отношение расстояния от любой точки эллипса (гиперболы) к расстоянию до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса (гиперболы).

Из определения параболы следует, что такое отношение тоже постоянно и равно единице. Таким образом, для эллипса $\varepsilon < 1$, для гиперболы $\varepsilon > 1$, для параболы $\varepsilon = 1$. Это общее свойство кривых второго порядка позволяет получить уравнение этих кривых в полярных координатах, причем, что удивительно, это уравнение одно и то же для всех трех кривых и имеет вид

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi}, \qquad (7)$$

где $p = \dfrac{b^2}{a}$ – параметр, который называется фокальным.

Уравнение (7) получается довольно просто, если поместить полюс полярной системы координат в фокус кривой, а полярную ось направить от фокуса в сторону, противоположную директрисе. Уравнение (7) широко используется в курсе механики.

Пример. Определить тип кривой

$$r = \frac{8}{3 - \cos\varphi}.$$

Решение. Запишем уравнение в виде (7):

$$r = \frac{8}{3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\cos\varphi\right)} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{ данная кривая эллипс.}$$

Кривую проще построить, переходя к декартовым координатам:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad x = r\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

Данное уравнение примет вид

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{8}{3 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + y^2} - x = 8\,.$$

Избавляясь от иррациональности, получим уравнение

$$9x^2 + 9y^2 = 64 + 16x + x^2$$

или $$8(x^2 - 2x + 1) + 9y^2 - 8 = 64 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1\,.$$

Центр симметрии эллипса – O_1 (1, 0),

полуоси: $a = 3,\ b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83\,.$

Построим полученный эллипс (рис. 10).

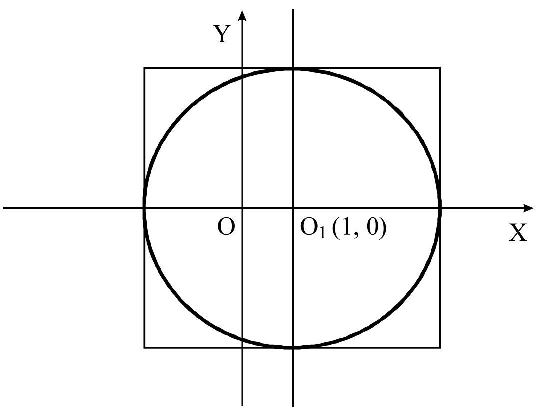


Рис. 10

2. Решение задач

2.1. Построить окружность

$$x^2 + y^2 - 8x + 10y + 50 = 0\ .$$

Решение. Путем выделения полных квадратов найдем координаты центра и радиус окружности (рис. 11):

$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 10y + 25) - 16 - 25 + 50 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-4)^2 + (y+5)^2 = 9 \Rightarrow \mathrm{O}_1(4,-5),\ \mathrm{R} = 3\ .$$

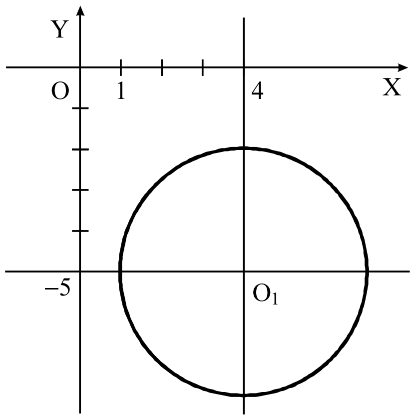


Рис. 11

2.2. Убедиться, что уравнение

$$x^2 + 16y^2 - 6x + 64y + 57 = 0$$

определяет эллипс. Найти координаты его центра симметрии и эксцентриситет.

Решение. Приведем уравнение к виду

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

методом выделения полного квадрата:

$$(x^2-6x+9)+16(y^2+4y+4)-9-64+57=0,$$

$$(x-3)^2+16(y+2)^2=16 \text{ или } \frac{(x-3)^2}{16}+(y+2)^2=1.$$

Полученное уравнение определяет эллипс, у которого центр симметрии находится в точке O_1 (3, –2), $a = 4$, $b = 1$ (рис. 12).

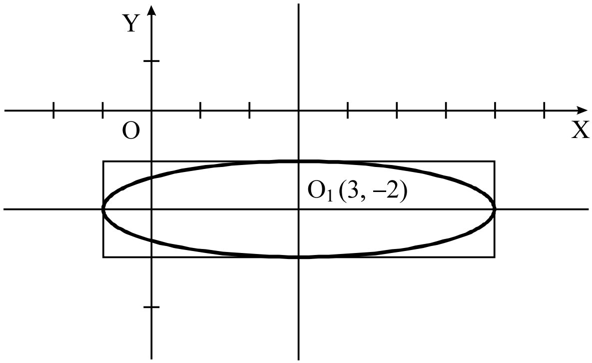


Рис. 12

Если ввести новые переменные $x_1 = x-3$, $y_1 = y+2$, уравнение эллипса примет вид

$$\frac{{x_1}^2}{16}+{y_1}^2=1,$$

$$c^2=a^2-b^2;\;\; c^2=16-1=15;\;\; c=\sqrt{15};\;\; \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

2.3. Построить гиперболу

$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1.$$

Указать ее фокусы, эксцентриситет и директрисы.

Решение. У заданной гиперболы действительной осью является ось OY, ось OX – мнимая. Фокусы находятся на оси OY, директрисы имеют уравнения $y=\pm\dfrac{b}{\varepsilon}$, $\varepsilon=\dfrac{c}{b}$.

$c^2 = a^2 + b^2$; $c^2 = 20$;

$c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \Rightarrow F_1(0, -2\sqrt{5}), F_2(0, 2\sqrt{5})$.

B_1 (0, –4), B_2 (0, 4) – вершины гиперболы;

$\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$;

$y = \pm\frac{b}{\varepsilon} = \pm\frac{8}{\sqrt{5}}$ – уравнения директрис,

$y = \pm 2x$ – уравнения асимптот (рис. 13).

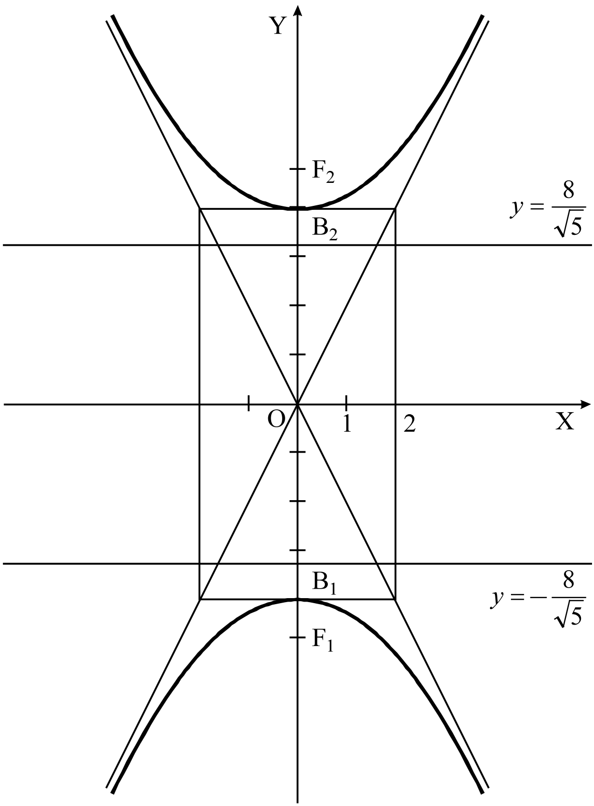


Рис. 13

2.4. Убедиться, что уравнение $4x^2 - 16y^2 - 40x + 96y = 108$ определяет гиперболу. Найти координаты ее центра симметрии и эксцентриситет. Гиперболу построить.

Решение. Приведем данное уравнение к виду

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

методом выделения полного квадрата:

$$4(x^2 - 10x + 25) - 16(y^2 - 6y + 9) - 100 + 144 = 108,$$

$$4(x - 5)^2 - 16(y - 3)^2 = 64, \quad \frac{(x - 5)^2}{16} - \frac{(y - 3)^2}{4} = 1.$$

Если ввести новые переменные $x - 5 = x_1$, $y - 3 = y_1$, то получим каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x_1^{\,2}}{16} - \frac{y_1^{\,2}}{4} = 1,$$

центр симметрии которой в старой системе координат находится в точке $O_1(5, 3)$. У полученной гиперболы OX_1 – действительная ось, $a = 4$, $b = 2$ (рис. 14)

$$c^2 = a^2 + b^2; \;\; c^2 = 20; \;\; c = 2\sqrt{5}, \;\; \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{4}, \;\; \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

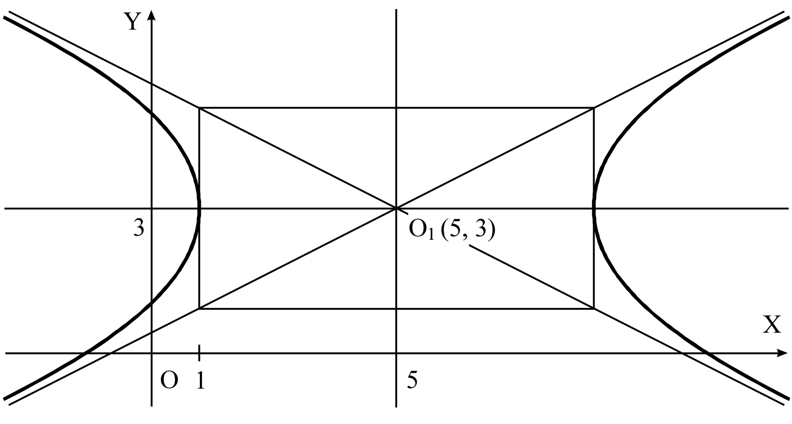


Рис. 14

2.5. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y = \dfrac{x^2}{16}$.

Решение. Запишем уравнение параболы в каноническом виде:

$$x^2 = 16y \ \ (x^2 = 2py).$$

В нашем случае $p = 8 \Rightarrow \mathrm{F}(0, 4)$, $y = -4$ – уравнение директрисы (рис. 15).

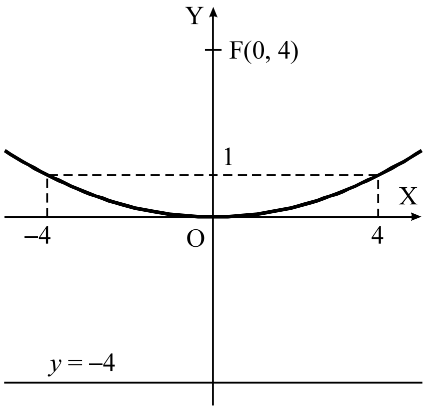


Рис. 15

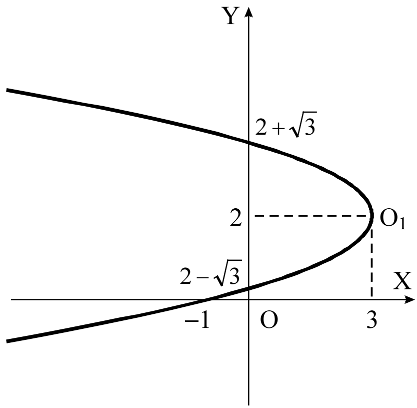


Рис. 16

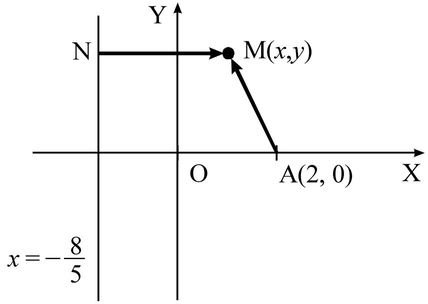
2.6. Построить параболу $x = -y^2 + 4y - 1$.

Решение. Путем выделения полного квадрата найдем координаты вершины параболы: $x = -(y-2)^2 + 3$. Таким образом, вершина параболы находится в точке $O_1(3, 2)$, ветви направлены в сторону, противоположную направлению оси OX. Для уточнения чертежа найдем точки пересечения параболы с осью OY (рис. 16):

$$-y^2 + 4y - 1 = 0, \ \mathrm{D} = 12, \ \ y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

2.7. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки A(2, 0) и от прямой $5x+8=0$ относятся как 5 : 4.

Решение.



Пусть M (x, y) – произвольная точка искомой линии. По условию задачи

$$\frac{\left|\overrightarrow{AM}\right|}{\left|\overrightarrow{NM}\right|}=\frac{5}{4}.$$

Переходя к координатам векторов, получим

$$\frac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{\sqrt{\left(x+\frac{8}{5}\right)^2}}=\frac{5}{4}\Rightarrow 16(x^2-2)^2+16y^2=25\left(x+\frac{8}{5}\right)^2.$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$16x^2-64x+64+16y^2=25x^2+80x+64$$

или
$$9x^2+144x-16y^2=0.$$

Выделяя полный квадрат с переменной x, получим

$$9(x^2+16x+64)-16y^2=576$$

или
$$\frac{(x+8)^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$$

– уравнение гиперболы, центр симметрии которой находится в точке $O_1(-8, 0)$, с полуосями $a = 8$, $b = 6$ (рис. 17).

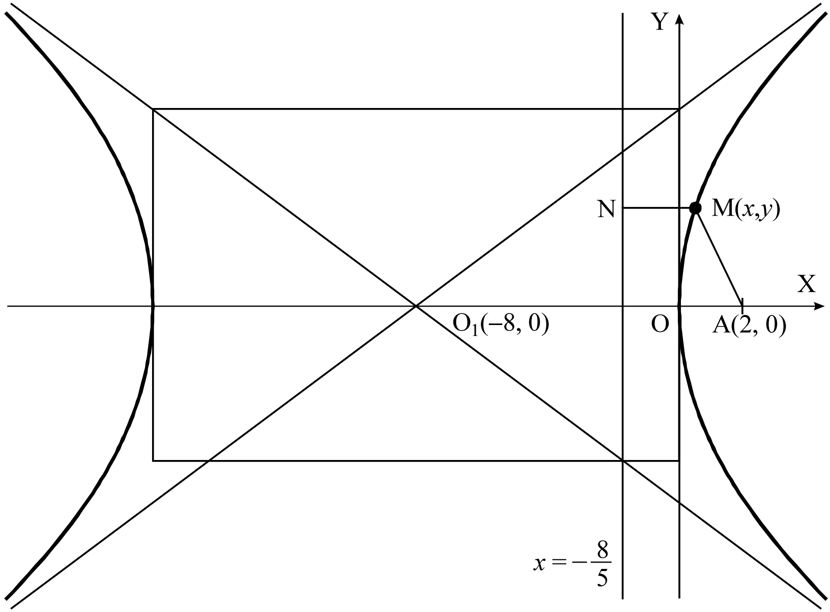


Рис. 17

3. Банк задач для самостоятельной работы

3.1. Построить кривые 1 – 7. У эллипса и гиперболы указать координаты фокусов, найти эксцентриситет, построить директрисы.

1. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$;
2. $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{16} = 1$;
3. $81x^2 + 16y^2 = 1296$;
4. $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{100} = 1$;
5. $25y^2 - 16x^2 = 400$;
6. $-x^2 + 4x - y = 3$;
7. $y^2 + 8y - x + 7 = 0$.

3.2. Убедиться, что уравнение

$$9y^2 - 4x^2 + 40x = 136$$

определяет гиперболу. Найти координаты ее центра симметрии и эксцентриситет. Гиперболу построить.

3.3. Убедиться, что уравнение

$$16x^2 + 9y^2 + 32x - 36y = 47$$

определяет эллипс. Найти координаты его центра симметрии и эксцентриситет. Эллипс построить.

3.4. Определить тип заданных в полярной системе координат кривых второго порядка 1 – 3. Кривые построить, переходя к декартовой системе координат.

1. $r = \dfrac{1}{1-\cos\varphi}$; 2. $r = \dfrac{3}{1-2\cos\varphi}$; 3. $r = \dfrac{3}{2-\cos\varphi}$.

3.5. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от прямой $y = -2$ и точки A(–3, 4). Кривую построить.

Ответ. $x^2 + 6x - 12y + 21 = 0$.

3.6. Определить траекторию точки M(x, y), которая движется так, что ее расстояние от точки A(1, 0) остается вдвое меньше расстояния от точки B(–2, 0). Кривую построить.

Ответ. $x^2 + y^2 = 4x$.

3.7. Найти уравнение траектории движения точки, если квадрат ее расстояния от точки A(3, –4) равен удвоенному квадрату расстояния ее от оси OX. Кривую построить.

Ответ. $x^2 - y^2 + 6x - 8y + 25 = 0$.

3.8. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки A(2, 0) и от прямой $2x + 5 = 0$ относятся как 4 : 5. Кривую построить.

ТЕМА 5. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

До сих пор мы приводили к каноническому виду уравнения кривых второго порядка, не содержащих слагаемого с произведением xy, т.е. уравнения вида

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{C}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0\,. \qquad (1)$$

Путем выделения полных квадратов с переменными x и y нам удавалось найти точку $\mathrm{O}_1(x_0, y_0)$, которая являлась центром симметрии кривой вида (1). В системе координат с центром в точке O_1 и осями координат, параллельным осям старой системы координат, уравнение кривой (1) приобретало канонический вид.

В теме 5 мы будем заниматься приведением к каноническому виду общего уравнения кривой второго порядка:

$$\mathrm{A}x^2 + 2\,\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0\,. \qquad (2)$$

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Какое преобразование системы координат помимо переноса ее начала необходимо, чтобы в новой системе координат уравнение (2) имело канонический вид?

Необходим поворот новой системы координат на некоторый угол α относительно старой системы координат (рис. 1).

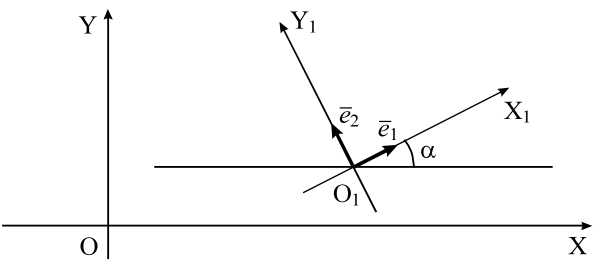


Рис. 1

Предполагается, что новая система координат, как и старая, должна быть правоориентированной.

1.2. Как найти направление осей новой системы координат?

Если новые оси направить по собственным векторам $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$ квадратичной формы

$$\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2,$$

то, как известно, в этом случае квадратичная форма принимает канонический вид

$$\lambda_1 x_1^{\ 2} + \lambda_2 y_1^{\ 2},$$

где λ_1 и λ_2 – собственные значения векторов $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$. Если окажется, что $\lambda_1\lambda_2 > 0$, кривая является эллипсом, если $\lambda_1\lambda_2 < 0$, кривая гипербола, при $\lambda_1\lambda_2 = 0$ – парабола.

Для нахождения угла α используются координаты собственных векторов. Если $\bar{l}_1 = (m_1, n_1)$, $\bar{l}_2 = (m_2, n_2)$, то

$$\cos\alpha = \frac{m_1}{\sqrt{m_1^{\ 2} + n_1^{\ 2}}}, \quad \sin\alpha = \frac{n_1}{\sqrt{m_1^{\ 2} + n_1^{\ 2}}}.$$

1.3. Как преобразовать линейную часть уравнения (2)?

С этой целью используются формулы преобразования координат при повороте осей на угол α:

$$x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha,$$

$$y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha.$$

Подставляя вместо x и y их выражения через x_1 и y_1 в линейную часть $\mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F}$ уравнения (2), получим после соответствующих преобразований новую линейную форму:

$$\mathrm{D}_1 x_1 + \mathrm{E}_1 y_1 + \mathrm{F}_1.$$

В результате уравнение (2) примет вид

$$\lambda_1 x_1^{\,2} + \lambda_2\, y_1^{\,2} + \mathrm{D}_1\, x_1 + \mathrm{E}_1 y_1 + \mathrm{F}_1 = 0\,.$$

Останется выделить полные квадраты, найти центр симметрии кривой, записать ее каноническое уравнение в новой системе координат и построить кривую.

2. Решение задач

2.1. Привести к каноническому виду и построить кривую

$$3x^2 + 10\,xy + 3\,y^2 - 2x - 14\,y - 13 = 0\,.$$

Решение. Найдем собственные значения и собственные векторы квадратичной формы

$$3x^2 + 10\,xy + 3\,y^2\,.$$

Матрица такой квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения λ_1, λ_2 найдем из уравнения

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)^2 = 25\,,\;\; \lambda_1 = -2,\;\; \lambda_2 = 8.$$

Так как $\lambda_1\, \lambda_2 < 0$, кривая – гипербола.

Найдем координаты собственных векторов $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$:

1) $\lambda_1 = -2$: $\quad \begin{cases} 5m_1 + 5\,n_1 = 0, \\ 5m_1 + 5\,n_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad m_1 = -\,n_1$ и $\bar{l}_1 = (1, -1)$;

2) $\lambda_2 = 8$: $\quad \begin{cases} -5m_2 + 5\,n_2 = 0, \\ \;\;5m_2 - 5\,n_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \; m_2 = n_2$ и $\bar{l}_2 = (1, 1)$.

Если ось OX_1 направить по вектору $\bar{l}_1$, а ось OY_1 по вектору $\bar{l}_2$, новая система координат будет правоориентированной, а квадратичная форма в этой системе координат примет вид

$$-\,2x_1^{\,2} + 8\,y_1^{\,2}\,.$$

Найдем $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ для вектора $\bar{l}_1$:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Угол поворота системы координат равен $-45°$. Преобразуем линейную часть исходного уравнения с использованием следующих формул:

$$\begin{cases} x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha, \\ y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha. \end{cases}$$

В нашем случае

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,y_1, \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1, \end{cases}$$

$$-2x - 14y - 13 \Rightarrow -2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right) - 14\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right) - 13 =$$

$$= \left(\frac{14}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)\cdot x_1 - \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{14}{\sqrt{2}}\right)\cdot y_1 - 13 = \frac{12}{\sqrt{2}}\,x_1 - \frac{16}{\sqrt{2}}\,y_1 - 13.$$

Объединяя квадратичную и линейную части, получим

$$-2x_1^{\,2} + 8y_1^{\,2} + \frac{12}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{16}{\sqrt{2}}y_1 - 13 = 0.$$

Выделяя полные квадраты, будем иметь

$$8\left(y_1^{\,2} - \frac{2}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{2}\right) - 2\left(x_1^{\,2} - \frac{6}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{9}{2}\right) - 4 + 9 - 13 = 0,$$

$$8\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8$$

или $$\frac{\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1} - \frac{\left(x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{4} = 1.$$

Таким образом, центр симметрии и, следовательно, начало новой системы координат находится в точке $O_1\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, а полуоси гиперболы $a = 2$ (мнимая), $b = 1$ (действительная) (рис. 2).

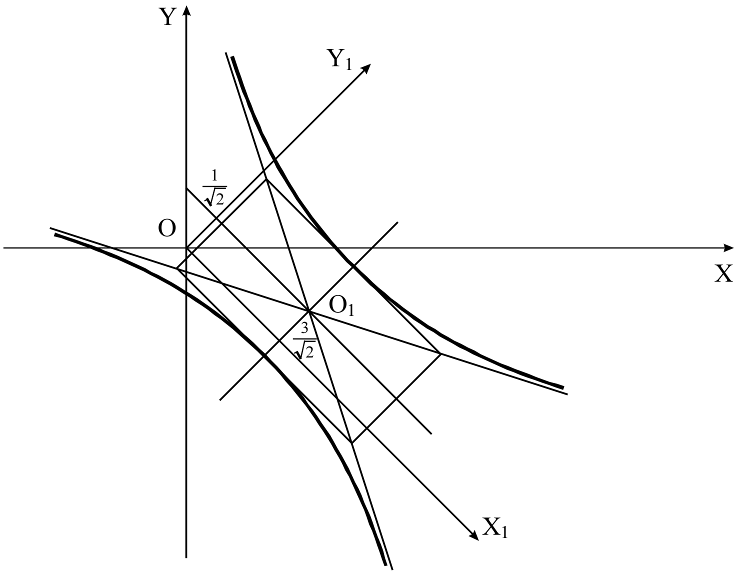


Рис. 2

2.2. Привести уравнение кривой к каноническому виду. Кривую построить.

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y - 28 = 0 .$$

Решение. Найдем собственные значения и собственные векторы квадратичной формы $3x^2 - 2xy + 3y^2$. Собственные значения найдем из уравнения

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 2; \lambda_2 = 4 .$$

Так как $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, данная кривая эллипс. Найдем координаты собственных векторов:

1. $\lambda = 2$ $\qquad \begin{cases} m_1 - n_1 = 0, \\ -m_1 + n_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{l}_1 = (1, 1)$;

2. $\lambda = 4$ $\qquad \begin{cases} -m_2 - n_2 = 0, \\ -m_2 - n_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{l}_2 = (-1, 1)$.

Если ось OX_1 направить по вектору $\bar{l}_1$, а ось OY_1 по вектору $\bar{l}_2$, квадратичная форма примет вид

$$2x_1^2 + 4y_1^2 .$$

Угол поворота системы координат в этом случае 45°.

Преобразуем линейную часть исходного уравнения с использованием формул

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \end{cases}$$

В нашем случае: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} x_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_1, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_1. \end{cases}$

Тогда

$$-4x - 4y - 28 \Rightarrow -\frac{4}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{4}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{4}{\sqrt{2}} x_1 - \frac{4}{\sqrt{2}} y_1 - 28 = -\frac{8}{\sqrt{2}} x_1 - 28 .$$

Объединяя квадратичные и линейные части, получим

$$2x_1^2 + 4y_1^2 - \frac{8}{\sqrt{2}} x_1 - 28 = 0 .$$

Выделяя полный квадрат с переменной x будем иметь

$$2\left(x_1^2 - \frac{4}{\sqrt{2}} x_1 + 2 \right) + 4y_1^2 - 4 - 28 = 0$$

или $$\frac{(x_1 - \sqrt{2})^2}{16} + \frac{y_1^2}{8} = 1 .$$

Таким образом, центр симметрии эллипса в новой системе координат находится в точке $O_1(\sqrt{2}, 0)$, а полуоси эллипса $a = 4$, $b = 2\sqrt{2}$ (рис. 3).

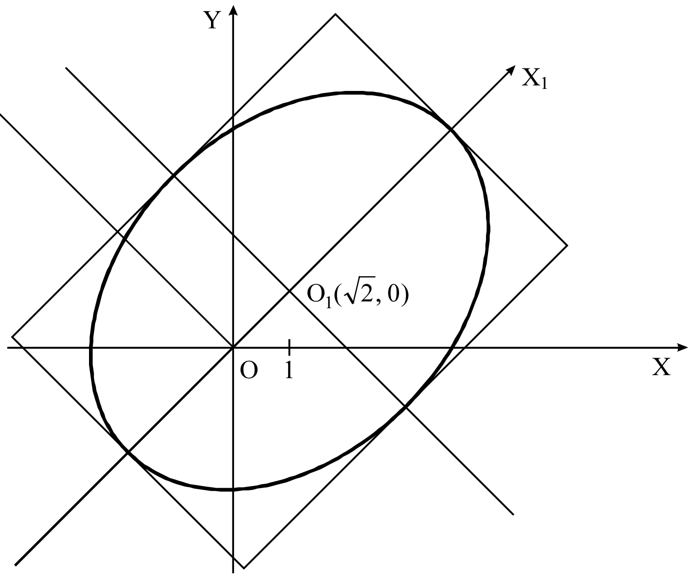


Рис. 3

2.3. Привести кривую $x^2 + 6xy + 9y^2 + 30x - 10y - 10 = 0$ к каноническому виду. Кривую построить.

Решение. Приведем к каноническому виду квадратичную форму $x^2 + 6xy + 9y^2$, матрица которой имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$. Найдем собственные значения:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(9-\lambda) = 9 \Rightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 10 .$$

Так как $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, данная кривая – парабола.

Найдем соответствующие собственные векторы:

1. $\lambda = 0$ $\quad \begin{cases} m_1 + 3n_1 = 0, \\ 3m_1 + 9n_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow m_1 = -3\mathrm{n}_1 \Rightarrow \bar{l}_1 = (3, -1)$;

2. $\lambda = 10$ $\quad \begin{cases} -9m_2 + 3n_2 = 0, \\ 3m_2 - n_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow n_2 = 3m_2 \Rightarrow \bar{l}_2 = (1, 3)$.

Если направить ось OX_1 новой системы по вектору $\bar{l}_1$, а ось OY_2 по вектору $\bar{l}_2$, тогда квадратичная часть уравнения примет вид $10{y_1}^2$. Найдем $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ для вектора $\bar{l}_1$:

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Выполним преобразования линейной части исходного уравнения:

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \end{cases}$$

В нашем случае

$$\begin{cases} x = x_1 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{10}} + y_1 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{10}}, \\ \mathrm{y} = -x_1 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{10}} + y_1 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{10}}. \end{cases}$$

Тогда

$$30x - 10y - 10 \Rightarrow \frac{90}{\sqrt{10}} x_1 + \frac{30}{\sqrt{10}} y_1 + \frac{10}{\sqrt{10}} x_1 - \frac{30}{\sqrt{10}} y_1 - 10 =$$

$$= \frac{100}{\sqrt{10}} x_1 - 10 = 10\sqrt{10} \cdot x_1 - 10.$$

Объединяя квадратичные и линейные части, получим

$$10{y_1}^2 + 10\sqrt{10}\, x_1 - 10 = 0$$

или $\qquad {y_1}^2 + \sqrt{10}\, x_1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}} (1 - {\mathrm{y}_1}^2)$.

Построим полученную параболу (рис. 4).

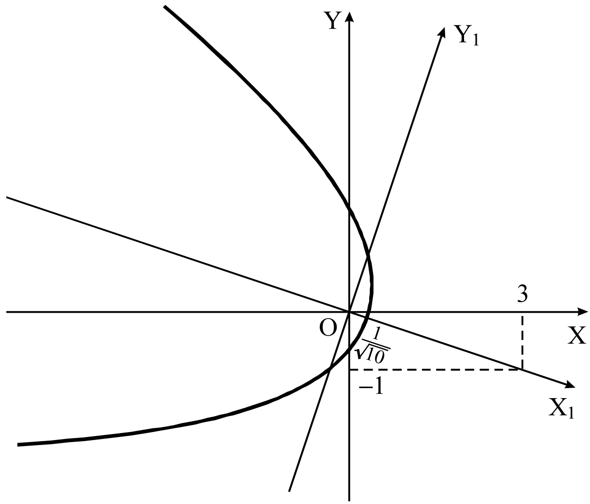


Рис. 4

В этом примере слагаемые с y_1 взаимно уничтожились и поэтому выделять полный квадрат не пришлось.

В результате рассмотренных преобразований по приведению кривой второго порядка к каноническому виду в некоторой декартовой прямоугольной системе координат общее уравнение может принять, помимо рассмотренных канонических уравнений, уравнение одного из следующих видов:

1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$; 2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$; 3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$;

4) $y^2-a^2=0$; 5) $y^2+a^2=0$.

Перечисленные уравнения соответственно определяют:

1) мнимый эллипс; 2) пару пересекающихся прямых; 3) пару мнимых пересекающихся прямых; 4) пару параллельных прямых; 5) пару мнимых параллельных прямых.

Заметим, что мнимому эллипсу и мнимой паре параллельных прямых не удовлетворяет ни одна точка.

3. Банк задач для самостоятельной работы

В заданиях 3.1 – 3.6 требуется привести уравнения кривых к каноническому виду и построить эти кривые.

3.1. $x^2+4y^2-2x-3=0$.

Ответ. $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$.

3.2. $4y^2-9x^2+16y+18x-43=0$.

Ответ. $\dfrac{(y+2)^2}{9}-\dfrac{(x-1)^2}{4}=1$.

3.3. $3x^2+10xy+3y^2-32=0$.

Ответ. $\dfrac{y_1^{\ 2}}{4}-\dfrac{x_1^{\ 2}}{16}=1$.

3.4. $x^2+y^2+xy-3x-3y+2=0$.

Ответ. $\dfrac{x_1^{\ 2}}{2}+\dfrac{\left(y_1-\sqrt{2}\right)^2}{\dfrac{2}{3}}=1$.

3.5. $x^2+4xy+4y^2-20x+10y-50=0$.

Ответ. $y_1^{\ 2}=2\sqrt{5}\,x_1+10$.

3.6. $x^2-4xy+y^2-8x+14y+15=0$.

Ответ. $\dfrac{\left(x_1-\dfrac{11}{3\sqrt{2}}\right)^2}{\dfrac{2}{9}}-\dfrac{\left(y_1-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{\dfrac{2}{3}}=1$.

ТЕМА 6. **Поверхности второго порядка**

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Какой вид может иметь уравнение поверхности в заданной системе координат?

Простейшей поверхностью в пространстве является плоскость, которая, как известно, в заданной декартовой системе координат имеет уравнение

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0 .$$

В общем случае уравнением поверхности в заданной системе координат является уравнение

$$\mathrm{F}(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

с тремя переменными при условии, что этому уравнению удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на этой поверхности, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на поверхности.

Если уравнение (1) удается разрешить относительно одной из переменных величин, например относительно переменной z, то уравнение поверхности принимает вид

$$z = f(x, y) . \tag{2}$$

Чтобы получить уравнение поверхности, необходимо знать свойство, которым обладают точки этой поверхности. Вспомним, что, например, при получении уравнения плоскости

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0$$

мы знали ее нормальный вектор $\overline{n} = (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ и точку $\mathrm{M}_0\,(x_0, y_0, z_0)$ этой плоскости.

Получим, исходя из свойства, которым обладают точки сферы, ее уравнение в заданной системе координат, если известен центр $\mathrm{O}_1(a, b, c)$ сферы и ее радиус R.

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка сферы. По определению сферы

$$\left|\overrightarrow{O_1M}\right| = R,$$

где $\overrightarrow{O_1M} = (x-a,\ y-b,\ z-c)$.

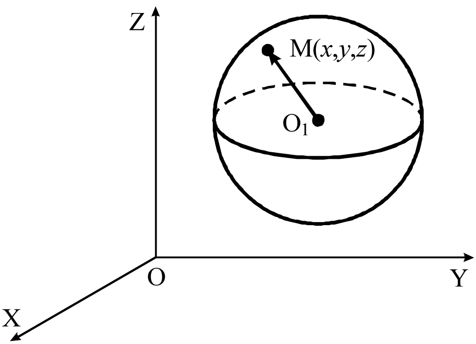


Рис. 1

Используя формулу длины вектора, получим уравнение

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$$

или $$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \qquad (3)$$

Уравнение (3) – уравнение сферы радиуса R с центром в точке $O_1(a, b, c)$.

Разрешая полученное уравнение (3) относительно переменной z, будем иметь

$$z = c + \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} \qquad (4)$$

и $$z = c - \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}. \qquad (5)$$

Уравнение (4) является уравнением верхней части сферы, уравнению (5) удовлетворяют координаты точек нижней половины сферы (рис. 1).

1.2. Какой особенностью обладает уравнение (3)?

Уравнение (3) является частным случаем алгебраического уравнения второй степени вида

$$a_{11}\, x^2 + a_{22} y^2 + a_{33}\, z^2 + 2a_{12}\, xy + 2a_{13}\, xz + 2a_{23}\, yz +$$
$$+2a_{10} x + 2a_{20}\, y + 2\, a_{30}\, z = 0\,. \qquad (6)$$

Определение. Поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат имеет уравнение вида (6), называется поверхностью второго порядка (предполагается, что хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} отличен от нуля).

Таким образом, сфера – пример поверхности второго порядка.

1.4. Какой особенностью обладает уравнение цилиндрической поверхности?

Напомним, что цилиндрической поверхностью называется поверхность, описываемая прямой, называемая образующей, которая перемещается параллельно самой себе, пересекая некоторую кривую, называемую направляющей цилиндрической поверхности.

Выясним, какой особенностью обладает уравнение цилиндрической поверхности, направляющая которой расположена на плоскости XOY и описывается уравнением $\mathrm{F}(x, y) = 0$, а образующая параллельна оси OZ (рис. 2).

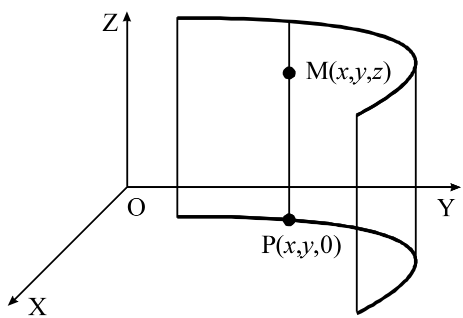


Рис. 2

Поскольку уравнение направляющей $\mathrm{F}(x, y) = 0$ не содержит переменной z, координаты точки M (x, y, z) образующей так же, как и координаты точки P $(x, y, 0)$, будут удовлетворять уравнению $F(x, y) = 0$.

Таким образом, уравнение цилиндрической поверхности будет совпадать с уравнением своей направляющей. Аналогично, если образующая параллельна оси Ox, а направляющая цилиндрической поверхности описывается уравнением $F(y, z) = 0$, то это же уравнение будет уравнением такой цилиндрической поверхности.

Таким образом, если в уравнении поверхности относительно декартовой системы координат отсутствует одна из переменных, то это уравнение является уравнением цилиндрической поверхности:

$F(x, y) = 0$ – уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси OZ;

$F(y, z) = 0$ – уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси OX;

$F(z, x) = 0$ – уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси OY.

Название цилиндрической поверхности определяется названием ее направляющей. Например,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

– эллиптический цилиндр с образующей, параллельной оси OZ;

$$y^2 = 2pz$$

– параболический цилиндр с образующей, параллельной оси OX.

1.5. Уравнение поверхности вращения

Пусть в плоскости ZOX задана линия $F(x, z) = 0$, которая вращается вокруг оси OZ. Найдем уравнение полученной при этом поверхности вращения (рис. 3)

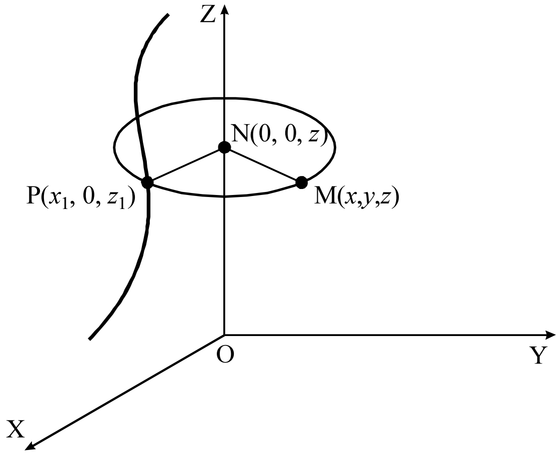


Рис. 3

Пусть M (x, y, z) – произвольная точка поверхности вращения. Проведем через нее плоскость перпендикулярно оси OZ. Пересечением плоскости и поверхности вращения будет окружность с центром в точке N $(0, 0, z)$ и радиусом NM. Очевидно,

$$\mathrm{NM} = \mathrm{NP} = \sqrt{x^2 + y^2} = |x_1| \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Так как точка P лежит на кривой $\mathrm{F}(x, z) = 0$, ее координаты должны удовлетворять уравнению этой кривой. Подставляя

$$x_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{и} \quad z_1 = z$$

в уравнение $\mathrm{F}(x, z) = 0$, получим уравнение

$$\mathrm{F}(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

поверхности вращения.

Таким образом, чтобы получить уравнение поверхности вращения кривой $\mathrm{F}(x, z) = 0$ вокруг оси OZ, нужно в уравнении кривой заменить x на $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

Аналогично получаются уравнения поверхностей вращения вокруг других координатных осей.

Пример. Получить уравнение поверхности, которая получится при вращении окружности $x^2 + y^2 = R^2$ вокруг оси OX.

Решение. Заменим в уравнении окружности y на $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$. Получим уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{R}^2.$$

Полученное уравнение – уравнение сферы с центром в начале координат радиуса R.

1.6. Канонические уравнения основных поверхностей второго порядка

1. Эллипсоид. Вращением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

вокруг оси OZ получим поверхность вращения, уравнение которой в силу изложенной в пункте 1.5 теории будет иметь вид

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{6}$$

Полученная поверхность называется эллипсоидом вращения.

Путем сжатия этой поверхности к плоскости ZOX так, чтобы расстояние от точек поверхности до этой плоскости уменьшилось в постоянном для всех точек отношении b/a, получим поверхность, уравнение которой будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{7}$$

Поверхность, которая в декартовой прямоугольной системе координат описывается уравнением (7), называется эллипсоидом.

Заметим, что эллипсоид получается из эллипсоида вращения сжатием так же, как эллипс получается сжатием окружности.

Из уравнения (7) видно, что эллипсоид – замкнутая, ограниченная поверхность, начало координат – центр симметрии эллипсоида, а координатные плоскости – его плоскости симметрии. Сечения эллипсоида плоскостями, параллельными плоскостям координат, представляют собой эллипсы. Например, в сечении плоскостью $z = h$ получим эллипс

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \quad |h| < c, \end{cases}$$

с полуосями

$$a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} \quad \text{и} \quad b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\,.$$

Эллипс, образуемый сечениями $z = c$ и $z = -c$, вырождается в точку. При $|h| > c$ плоскости $z = h$ эллипсоид не пересекает. Эллипсоид изображен на рис. 4

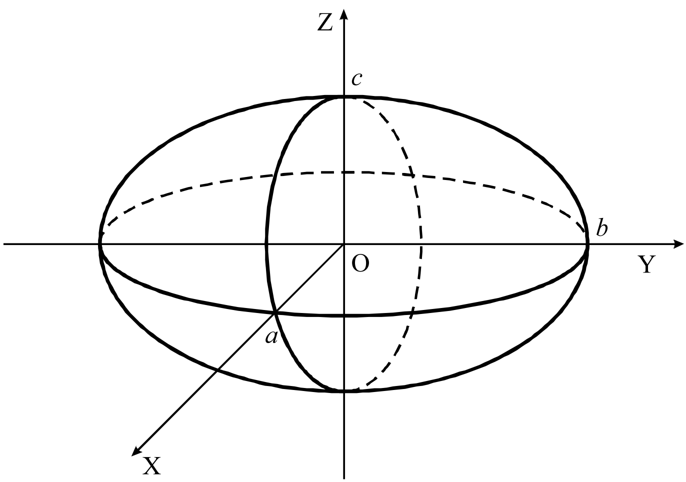


Рис. 4

Величины a, b, c называются полуосями эллипсоида. Если все они различны, эллипсоид называется трехосным.

При $a = b$ ($a = c$ или $b = c$) будем иметь эллипсоид вращения. В случае $a = b = c$ эллипсоид является сферой.

2. Конус. Рассмотрим в плоскости XOZ прямую $az = cx$ и будем вращать ее вокруг оси OZ. В результате получим поверхность, описываемую уравнением

$$az = \pm c\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

которая называется конусом вращения, или прямым круговым конусом.

Путем растяжения этой поверхности в $\dfrac{a}{b}$ раз в направлении оси OY получим поверхность

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{8}$$

которая называется эллиптическим конусом (рис. 5).

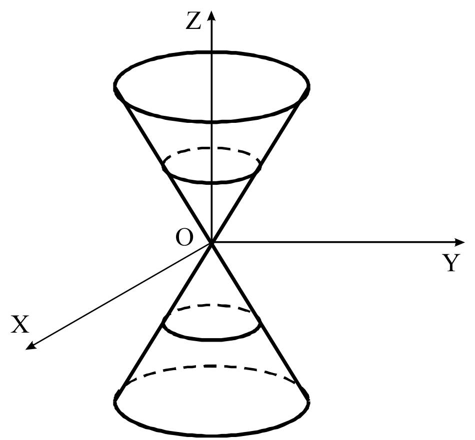


Рис. 5

В сечениях конуса плоскостями $z = h$ получаются эллипсы:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

В сечениях плоскостями $x = h$ ($y = h$) – гиперболы:

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{a^2}, \\ x = h. \end{cases}$$

3. Однополостный гиперболоид. Вращением гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

вокруг оси OZ получим поверхность вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

которая называется однополостным гиперболоидом вращения. В результате растяжения этой поверхности получим поверхность с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (9)$$

которая называется однополостным гиперболоидом.

В сечениях однополостного гиперболоида плоскостями $z = h$ получаются эллипсы

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases} \quad -\infty < h < +\infty .$$

Очевидно, с увеличением $|h|$ полуоси эллипсов тоже возрастают (рис. 6).

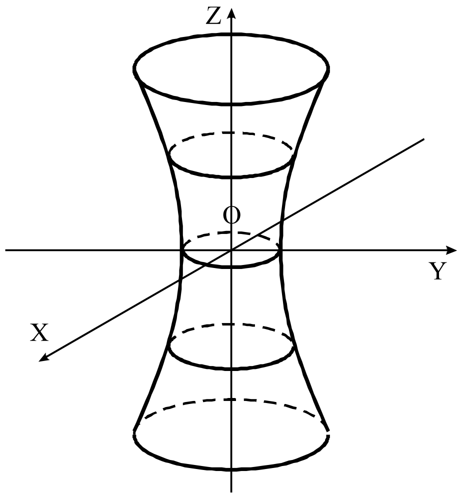


Рис. 6

Интересным свойством однополостного гиперболоида является наличие у него прямолинейных образующих. Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят две прямолинейные образующие, всеми своими точками лежащие на поверхности. Получим уравнения этих прямых. Преобразуем уравнение (9):

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}\Rightarrow\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{a}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

Рассмотрим в пространстве прямую линию

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda}\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\end{cases}\tag{10}$$

где λ – некоторое число, отличное от нуля.

Очевидно, координаты всех точек прямой вида (10) удовлетворяют уравнению (9) и, следовательно, лежат на однополостном гиперболоиде.

Аналогичные рассуждения можно провести для семейства прямых

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\mu\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\mu}\left(1+\dfrac{y}{b}\right). \end{cases} \tag{11}$$

Подставляя координаты любой точки, лежащей на однополостном гиперболоиде в одно из уравнений системы (10) и в одно из уравнений системы (11), можно найти значения параметров λ и μ, которые соответствуют прямолинейным образующим, проходящим через выбранную точку.

4. Двуполостный гиперболоид. Вращением гиперболы

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

вокруг оси OZ (заметим, что ось OZ для заданной гиперболы – действительная ось), получим поверхность вращения

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2+y^2}{a^2}=1,$$

которая называется двуполостным гиперболоидом вращения. Если полученную поверхность растянуть в направлении оси OY в a/b раз, то получим поверхность, описываемую уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{12}$$

которая называется двуполостным гиперболоидом. В сечениях этой поверхности плоскостями $z=h$ получаются эллипсы

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1, \\ z=h, \end{cases}$$

при условии, что $|h|>c$.

При $|h| = c$ эллипс превращается в точку, а с плоскостями $z = h$ при $|h| < c$ двуполостной гиперболоид не пересекается. Этим и объясняется название поверхности. Двум ветвям гиперболы соответствуют две, не связанные между собой, части («полости») поверхности. Двуполостный гиперболоид изображен на рис. 7.

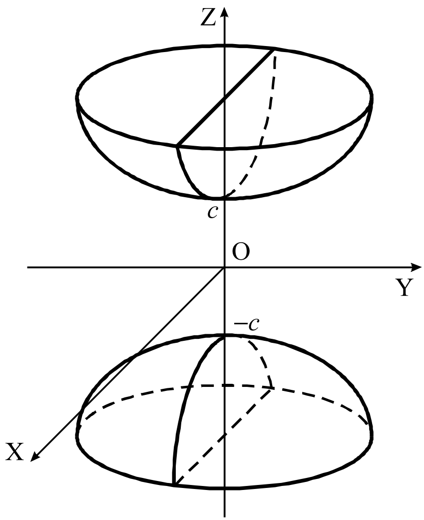


Рис. 7

В сечениях плоскостями $x = h$ и $y = h$ получаются гиперболы

$$\begin{cases} x = h, \\ \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{a^2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = h, \\ \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1 + \dfrac{h^2}{b^2}. \end{cases}$$

5. Эллиптический параболоид. Путем вращения параболы

$$z = \frac{1}{a^2} x^2$$

вокруг оси OZ, получим поверхность

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=z\ ,$$

которая называется параболоидом вращения, или круговым параболоидом.

Путем растяжения параболоида вращения в направлении оси OY в a/b раз получим поверхность

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z\ , \qquad (13)$$

которая называется эллиптическим параболоидом. В сечениях эллиптического параболоида плоскостями $z=h$ ($h>0$) получаются эллипсы, в сечениях плоскостями $x=h$ и $y=h$ – параболы. Этим объясняется название поверхности, определяемой уравнением (13). Эллиптический параболоид изображен на рис. 8.

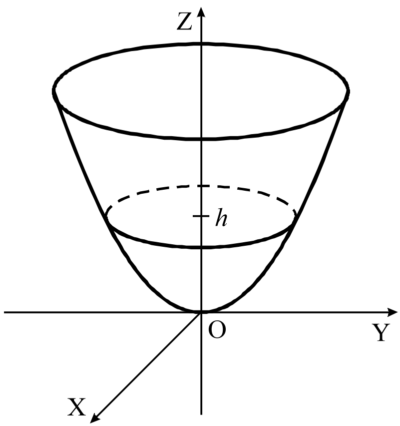


Рис. 8

6. Гиперболический параболоид. По аналогии с уравнением (13) рассмотрим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z\ . \qquad (14)$$

Поверхность, которая описывается в некоторой декартовой прямоугольной системе координат уравнением (14), называется гиперболическим параболоидом. Название станет понятным после того, как мы методом сечений исследуем это уравнение.

В сечении гиперболического параболоида плоскостью $y = 0$ будем иметь параболу

$$\begin{cases} x^2 = a^2 z, \\ y = 0, \end{cases} \tag{15}$$

симметричную относительно оси OZ с ветвями, направленными вверх. В сечениях поверхности плоскостями $x = h$ также будем иметь параболы

$$\begin{cases} z = -\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{h^2}{a^2}, \\ x = h. \end{cases} \tag{16}$$

Все эти параболы ветвями опущены вниз, а вершина каждой из них лежит на параболе (15)

Таким образом, гиперболический параболоид – поверхность, которая получается, когда парабола (16) перемещается так, что ее вершина скользит по параболе (15). Оси парабол (15) и (16) параллельны, параболы лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях, а ветви их направлены в разные стороны (рис. 17).

Плоскость $y = h$ пересекает гиперболический параболоид тоже по параболе

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{h^2}{b^2}, \\ y = h, \end{cases}$$

ветви которой направлены вверх.

В сечениях плоскостями $z = h$ будем иметь гиперболы

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = h, \\ z = h. \end{cases}$$

При $h = 0$ гипербола вырождается в пару прямых.

Все изложенное позволяет заключить, что гиперболический параболоид имеет вид седла (рис. 9).

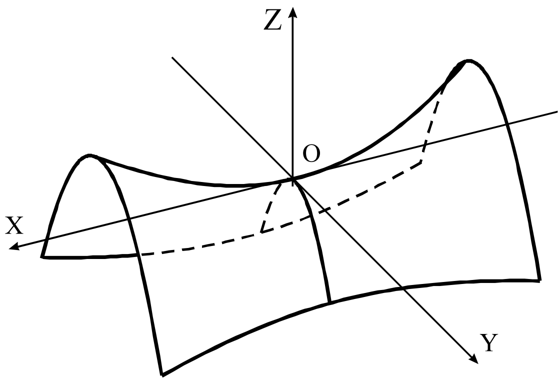


Рис. 9

Замечание 1. Если в канонических уравнениях рассмотренных поверхностей заменить одни переменные на другие, то вид поверхности не изменится, но соответствующим образом изменится ориентация поверхности.

Например,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

– эллиптический параболоид с осью симметрии OZ, а

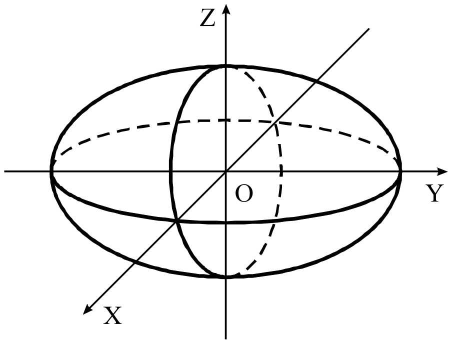
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = y$$

– эллиптический параболоид, у которого ось симметрии – ось OY.

Замечание 2. Если в общем уравнении (6) поверхности второго порядка отсутствуют слагаемые с произведениями переменных, то данное уравнение можно привести к каноническому виду путем выделения квадратов с переменными, содержащимися в уравнении в первой и второй степенях, а сама поверхность при этом будет отличаться от рассмотренных только параллельным переносом.

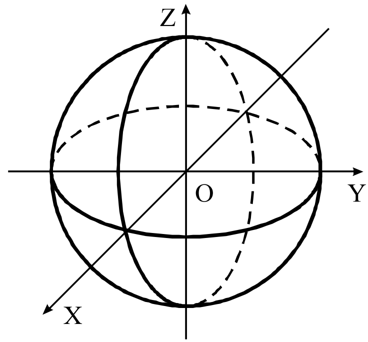
Приведем таблицу поверхностей второго порядка

1. Эллипсоид



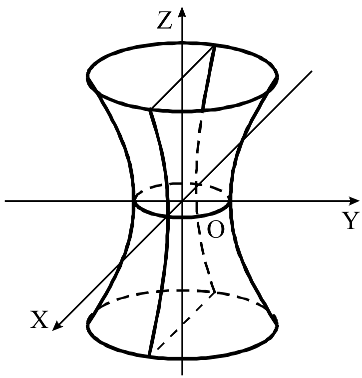
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

2. Сфера



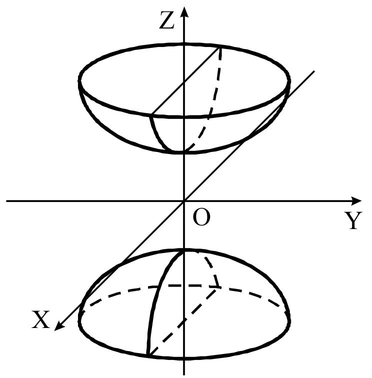
$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

3. Однополостный гиперболоид



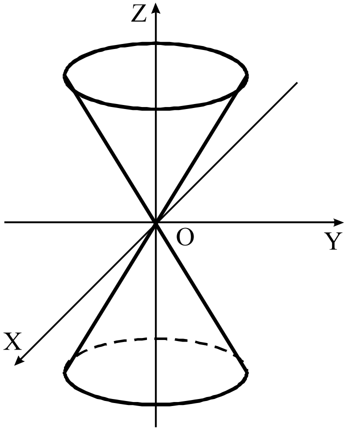
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

4. Двуполостный гиперболоид



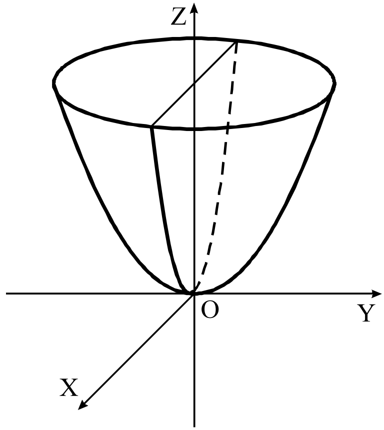
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

5. Конус



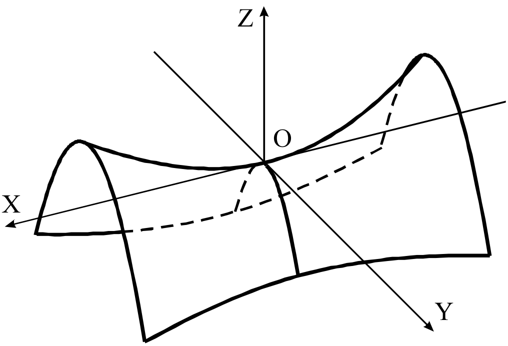
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}.$$

6. Эллиптический параболоид



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z.$$

7. Гиперболический параболоид



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z.$$

8. $\mathrm{F}(x, y)=0$ – уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси OZ.

9. $\mathrm{F}(y, z)=0$ – уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси OX.

10. $\mathrm{F}(z, x)=0$ – уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси OУ.

2. Решение задач

2.1. Установить вид поверхностей $1-10$ и схематично изобразить эти поверхности в декартовой системе координат.

1. $16x^2+4y^2+z^2=16$;
2. $y=\sqrt{4x^2+16z^2+16}$;
3. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=(z-2)^2$;
4. $3x^2-6y^2+4z^2=12$;
5. $z=5-\sqrt{6x+4y-x^2-y^2-9}$;
6. $x+1=-y^2-z^2$;
7. $\dfrac{y^2}{4}-x^2=1$;
8. $z=3-y^2$;
9. $4z^2-24z+x^2+32=0$;
10. $x^2+y^2-6x-4y+12=0$.

Решение.

1. $16x^2+4y^2+z^2=16$.

Приведем уравнение к каноническому виду

$$x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1.$$

Получили каноническое уравнение эллипсоида с полуосями $a=1$, $b=2$, $c=4$ (рис. 10). Так как $c>a$ и $c>b$, эллипс вытянут вдоль оси OZ.

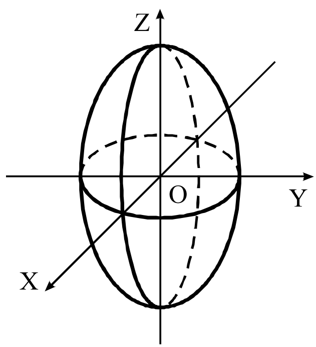


Рис. 10

2. $y=\sqrt{4x^2+16z^2+16}$.

Приведем уравнение к каноническому виду:

$$y^2=4x^2+16z^2+16 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+z^2-\frac{y^2}{16}=-1.$$

Получено каноническое уравнение двуполостного гиперболоида, расположенного вдоль оси OY. Вершина чаши гиперболоида находится в точке O_1 (0, 4, 0) (рис. 11).

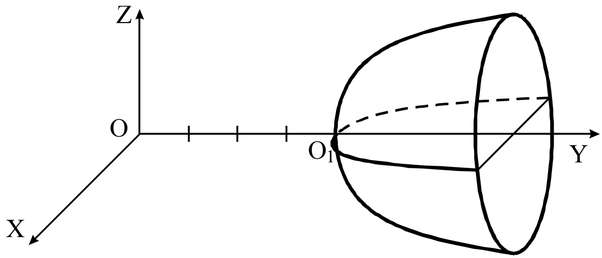


Рис. 11

На чертеже изображена только одна чаша двуполостного гиперболоида, так как по условию переменная y принимает только положительные значения.

3. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=(z-2)^2$.

Уравнение является каноническим уравнением конуса с осью симметрии OZ и вершиной в точке O_1 (0, 0, 2) (рис. 12).

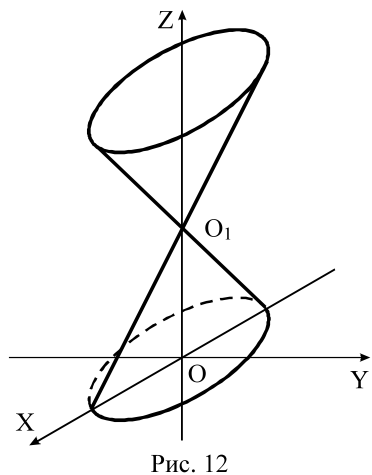


Рис. 12

4. $3x^2 - 6y^2 + 4z^2 = 12$.

Запишем уравнение в виде

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1.$$

Уравнение является каноническим уравнением однополостного гиперболоида, вытянутого вдоль оси OY (рис. 13).

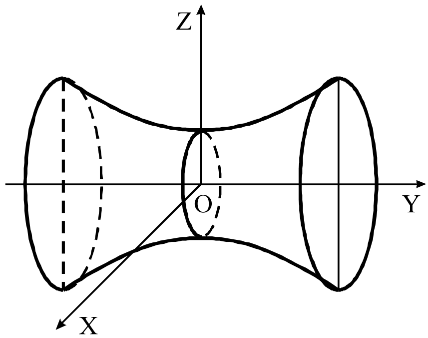


Рис. 13

5. $z = 5 - \sqrt{6x + 4y - x^2 - y^2 - 9}$.

Чтобы привести уравнение к каноническому виду, выделим под знаком корня полные квадраты:

$$z = 5 - \sqrt{-(x^2 - 6x + 9) - (y^2 - 4y + 4) + 9 + 4 - 9},$$

$$z = 5 - \sqrt{4 - (x-3)^2 - (y-2)^2},$$

$$(z-5)^2 = 4 - (x-3)^2 - (y-2)^2,$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 4.$$

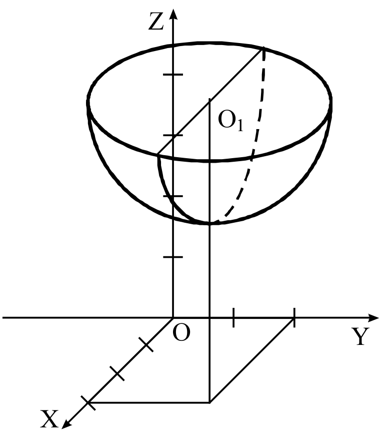


Рис. 14

Получили каноническое уравнение сферы с центром в точке $O_1(3, 2, 5)$ радиуса 2.

Из условия задачи следует, что задано уравнение только нижней половины сферы (рис. 14).

6. $x+1=-y^2-z^2$.

Запишем уравнение в виде

$$x=-1-(y^2+z^2).$$

Уравнение $x=-(y^2+z^2)$ определяет круговой параболоид, направленный в отрицательном направлении оси OX. Заданная поверхность – круговой параболоид с вершиной в точке $O_1(-1, 0, 0)$ (рис. 15)

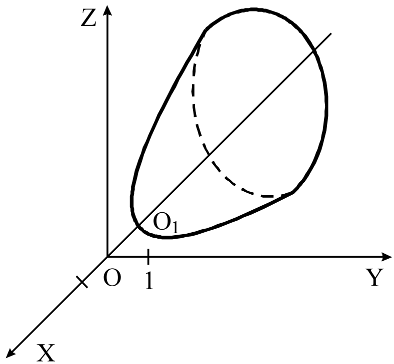


Рис. 15

7. $\frac{y^2}{4}-x^2=1$.

Уравнение не содержит переменной z, следовательно, в пространстве это цилиндрическая поверхность. Так как направляющей этой поверхности является гипербола, данное уравнение является гиперболическим цилиндром с образующей, параллельной оси OZ (рис. 2416

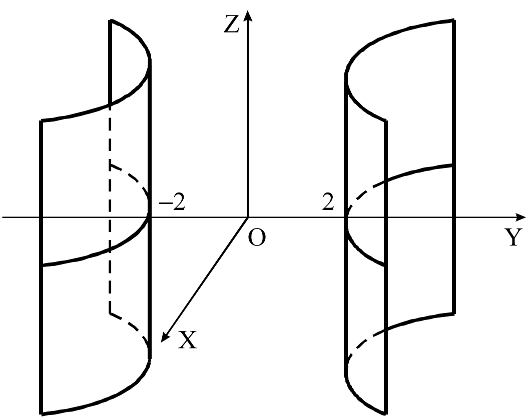


Рис. 16

8. $z = 3 - y^2$.

Уравнение не содержит переменной x, следовательно, поверхность цилиндрическая. Уравнением направляющей цилиндрической поверхности является парабола, следовательно, данное уравнение задает параболический цилиндр с образующей, параллельной оси OX (рис. 17).

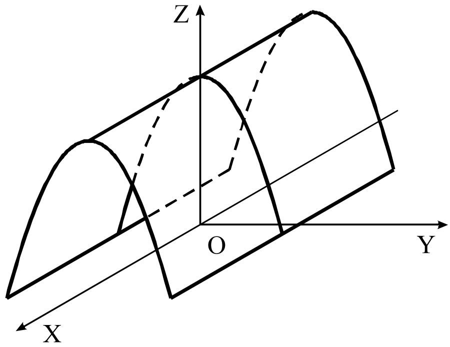


Рис. 17

Вершина направляющей параболы $O_1(0,\ 0,\ 3)$, ветви параболы опущены вниз.

9. $4z^2 - 24z + x^2 + 32 = 0$.

В уравнении отсутствует переменная y, следовательно, уравнение определяет цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси OY. Путем выделения полного квадрата приведем уравнение направляющей к каноническому виду:

$$4z^2 - 24z + x^2 + 32 = 0 \Rightarrow 4(z^2 - 6z + 9) + x^2 + 32 - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(z-3)^2 + x^2 = 4 \Rightarrow (z-3)^2 + \frac{x^2}{4} = 1.$$

Направляющей цилиндрической поверхности является эллипс с центром симметрии в точке $O_1(0,\ 0,\ 3)$. Таким образом, заданное уравнение определяет эллиптический цилиндр с образующей, параллельной оси OY (рис. 18).

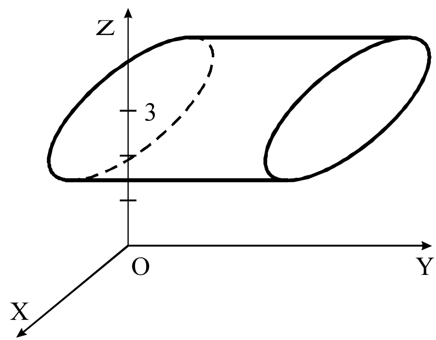


Рис. 18

10. $x^2+y^2-6x-4y+12=0$.

Приведем уравнение направляющей заданной цилиндрической поверхности к каноническому виду:

$$(x^2-6x+9)+(y^2-4y+4)-13+12=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x-3)^2+(y-2)^2=1.$$

Направляющей цилиндрической поверхности является окружность с центром в точке $O_1(3, 2, 0)$ и радиусом, равным 1. Заданное уравнение определяет круговой цилиндр с образующей, параллельной оси OZ (рис. 19).

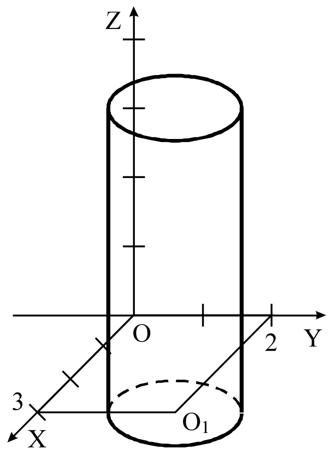


Рис. 19

2.2. В заданиях 1 – 4 требуется построить тела, ограниченные заданными поверхностями.

1. $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=6-x^2-y^2$;

2. $z=0$, $y=2$, $y=x^2$, $z=4-x^2-y^2$;

3. $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=2y$, $z=0$;

4. $z=0$, $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $x^2+y^2=2x$.

Решение.

1. $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=6-x^2-y^2$.

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ – верхняя часть конуса $z^2=x^2+y^2$,

$$z = 6 - x^2 - y^2$$

– круговой параболоид с вершиной в точке $O_1(0, 0, 6)$, направленный вниз. Линией пересечения заданных поверхностей является окружность (рис. 20).

2. $z = 0$, $y = 2$, $y = x^2$, $z = 4 - x^2 - y^2$.

$z = 0$ – уравнение плоскости XOY, $y = 2$ – плоскость, параллельная плоскости ZOX, $y = x^2$ – параболический цилиндр и плоскость $y = 2$ ограничивают тело сбоку, плоскость $z = 0$ ограничивает тело снизу, круговой параболоид $z = 4 - x^2 - y^2$ ограничивает тело сверху (рис. 21).

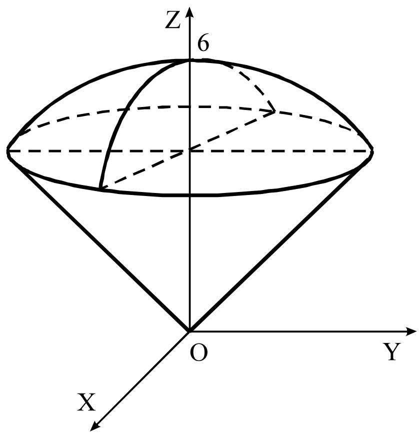


Рис. 20

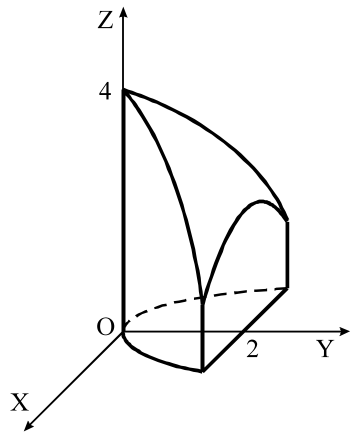


Рис. 21

3. $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 2y$, $z = 0$.

$z = x^2 + y^2$ – круговой параболоид с вершиной в начале координат. Круговой цилиндр $x^2 + y^2 = 2y$ после приведения к каноническому виду будет выглядеть $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Направляющей такого цилиндра является окружность с центром в точке

$O_1(0, 1, 0)$, образующая цилиндра параллельна оси OZ. Этот круговой цилиндр будет ограничивать тело сбоку, снизу тело ограничено плоскостью $z = 0$, сверху – параболоидом $z = x^2 + y^2$ (рис. 22).

4. $z = 0$, $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 = 2y$.

Тело ограничено снизу плоскостью $z = 0$, с боков – цилиндрической поверхностью $x^2 + (y-1)^2 = 1$, сверху – частью сферической поверхности $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, вырезанной из нее цилиндром (рис. 23).

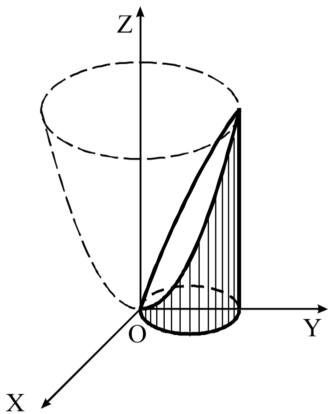


Рис. 22

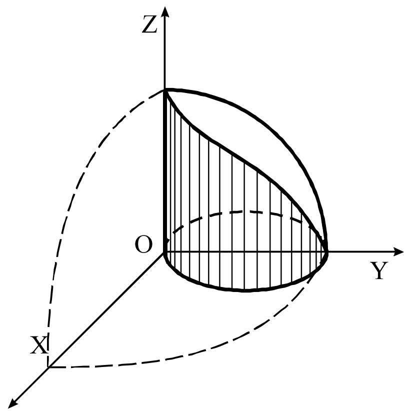


Рис. 23

2.3. Установить, при каких значениях m плоскость

$$x + m\,y - 2 = 0$$

пересекает эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{3} = y$$

а) по эллипсу, б) по параболе.

Решение. а) Выясним, при каких значениях m система

$$\begin{cases} x+m\,y-2=0, \\ \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}=y \end{cases}$$

будет определять эллипс

$$\begin{cases} y=\dfrac{2-x}{m}, \\ \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}=y. \end{cases}$$

Преобразуем уравнение

$$\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{3}=\frac{2-x}{m} \Rightarrow \frac{x^2}{2}+\frac{x}{m}+\frac{z^2}{3}=\frac{2}{m}.$$

Приведем уравнение путем выделения полного квадрата к каноническому виду:

$$\left(\frac{x^2}{2}+2\cdot\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2m}+\frac{1}{2m^2}\right)+\frac{z^2}{3}=\frac{2}{m}+\frac{1}{2m^2},$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2m}\right)^2+\frac{z^2}{3}=\frac{4m+1}{2m^2}.$$

Полученное уравнение будет определять эллипс при выполнении условия

$$\frac{4m+1}{2m^2}>0,$$

т.е. при $m>-\dfrac{1}{4}$ и $m\neq 0$.

б) Система

$$\begin{cases} x+m\,y-2=0, \\ \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}=y \end{cases}$$

будет определять параболу, очевидно, только в одном случае, когда $m = 0$. Уравнение параболы будет иметь вид

$$\begin{cases} x = 2, \\ \dfrac{z^2}{3} = y - 2. \end{cases}$$

3. Банк задач для самостоятельной работы

3.1. Определить вид и построить заданные поверхности:

1. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$;
2. $z = 2 - \dfrac{x^2}{9} - y^2$;
3. $z = 5 + \sqrt{5 - x^2 - y^2 + 4x}$;
4. $z = x^2 + 1$;
5. $x^2 - 4x = y$;
6. $16x^2 + y^2 + 4z^2 = 64$;
7. $x\,y = 1$;
8. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} - z^2 = 1$;
9. $3z + 4y = 12$;
10. $x^2 - y^2 = z$.

3.2. В заданиях 1 – 4 требуется построить тела, ограниченные заданными поверхностями:

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$,
   $z^2 = x^2 + y^2$;
2. $x^2 + y^2 - z^2 = -1$,
   $x^2 + y^2 = 1$;
3. $x^2 + y^2 = a^2$,
   $x^2 + z^2 = a^2$,
   $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;
4. $y = 0$, $z = 0$,
   $y = \sqrt{x}$, $x + z = 2$.

3.3. Установить, что плоскость $z=-1$ пересекает однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$$

по гиперболе. Найти ее полуоси и вершины.

Ответ. $a = 4$, $b = 3$, A_1 (4, 0, –1), A_2 (–4, 0, –1).

3.4. Установить, при каких m плоскость $x+mz-1=0$ пересекает двухполостный гиперболоид

$$x^2+y^2-z^2=-1$$

а) по эллипсу; б) по гиперболе.

Ответ. а) $-\sqrt{2}<m<-1$ и $1<m<\sqrt{2}$;

б) $-1<m<1$.

Заключение. Поверхности второго порядка имеют замечательное «зеркальное» свойство. Если в фокус параболоида вращения (параболического зеркала) поместить источник света, то на выходе получится параллельный пучок световых лучей, и, наоборот, параллельный пучок света такое зеркало соберет в одной точке – фокусе. Это свойство используется в оптике при конструировании зеркальных телескопов. Если же зеркало имеет форму эллипсоида, то лучи, исходящие из точечного источника света, помещенного в одном из фокусов, собираются в другом фокусе. Это свойство нашло применение в квантовой оптике. Эти же свойства используются в акустике. В строительстве широко применяются тонкие оболочки, имеющие форму поверхностей второго порядка.

Список литературы

1. Шилов Г. Е. Конечномерные линейные пространства. – М.: Наука, 1969.
2. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1971.
3. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Наука, 1972.
4. Магазинников Л. И. Высшая математика. Часть 1: Учебное пособие. − Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 1998.
5. Каган М. Л., Самохин М. В. Алгебра и геометрия. – М.: Стройиздат, 2003.
6. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1967.
7. Терехина Л. И., Фикс И. И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Учебное пособие. – Томск: ТГУ, 1998.
8. Письменный Д.Т., Конспект лекции по высшей математике. Москва: Айрис Пресс, 2009.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение ……..…………………………..…......... 3
Тема1. Основные задачи аналитической геометрии ………………………………………5
1.Ключевые вопросы. Краткие ответы......... 5
2. Решение задач ……………………………. 12
3. Банк задач для самостоятельной работы . 16
Тема2. Прямая на плоскости ………………. 18
1.Ключевые вопросы. Краткие ответы......... 18
2. Решение задач ……………………………. 24
3. Банк задач для самостоятельной работы . 33
Тема3. Плоскость и прямая в пространстве… 36
1.Ключевые вопросы. Краткие ответы......... 36
2.Решение задач ……………………………. 51
3. Банк задач для самостоятельной работы . 62
Тема4. Кривые второго порядка 66
1.Ключевые вопросы. Краткие ответы......... 66
2.Решение задач ……………………………. 79
3. Банк задач для самостоятельной работы . 85
Тема5. Приведение общего уравнения 2 порядка к каноническому виду 87
1.Ключевые вопросы. Краткие ответы......... 87
2.Решение задач ……………………………. 89
3. Банк задач для самостоятельной работы . 96
Тема6. Поверхности второго порядка...…............ 97
1.Ключевые вопросы. Краткие ответы......... 97
2.Решение задач ……………………………. 114
3. Банк задач для самостоятельной работы . 123
Список литературы ………………………… 125