Министерство высшего и среднего специального образования
Андижанский машиностроительный институт

КАФЕДРА «ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ»

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Андижан 2018

УТВЕРЖДЕНО:
Рассмотрено и утверждено учебно-методическим советом Андижанского машиностроительного института.
(Протокол УМС АндМИ №_____ от «____»___________2018 года)
Председатель совета _____________ К. Эрматов

СОГЛАСОВАНО:
Рассмотрено и согласовано учебно-методическим советом машиностроительного факультета.
(Протокол УМС факультета №_____ от «____»___________2018 года)
Председатель совета _____________ М. Кучкаров

РЕКОМЕНДОВАНО:
Рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседание кафедры «Высшая математика» (Протокол заседания кафедры №_____ от «____»___________2018 года)
Заведующий кафедрой:________________ З.Э. Кодиров

Линейная алгебра: методические указания. **Составители: ст. преп. А.Р. Джабборов, ст. преп. М. Дадабоева.**

Рецензент: кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математика» Андижанского государственного университета **А.Каримжонов;**
зав.каф. ГПУ Андижанского машиностроительного института, к.ф-м. н, доц. **С. Махмудов.**

Методическое указание содержит основные теоретические сведения по разделу «Векторная алгебра» курса «Высшая математика», изложенные в форме вопросов и ответов, методические рекомендации по решению задач, банк задач для самостоятельной работы по каждой теме раздела.

Методическое указание предназначено для студентов первого курса инженерных специальностей.

Введение

Наше время является периодом чрезвычайно бурного развития математики, ее роль в естествознании и технике стремительно растет. Именно поэтому к математическому образованию современного инженера предъявляются очень высокие требования. Будущий инженер должен не только достаточно глубоко знать основные положения математики, но и уметь применять их в своей конкретной деятельности, и видеть перспективу этой деятельности.

Данное методическое указание рассматривает один из начальных разделов курса высшей математики: векторная алгебра. Векторная алгебра является теоретической основой не только аналитической геометрии, но и широко применяется в дальнейшем как, в самом курсе высшей математики, так и в ее приложениях, например в строительной механике, статике, теории упругости, экономике и ряде других технических дисциплин.

Методические указания составлены так, чтобы помочь студенту, приступающему к изучению высшей математики, организовать свою самостоятельную работу, разобраться в обилии определений и теорем начал математического анализа, выделить и усвоить главное, приобрести прочные навыки решения задач различного уровня сложности.

В методическом указании рассмотрены следующие темы: пространство геометрических векторов, проекция вектора на ось, скалярное произведение векторов, векторное произведение векторов, смешанное произведение векторов, линейные преобразования. Каждая тема изложена в очень доступном и понятном для студента языке, и состоит из:
основных теоретических сведений, которые представлены в виде вопросов и ответов с необходимыми комментариями,

которые в некоторых случаях заменяют доказательства. Многие из вопросов носят проблемный характер. Всюду, где это возможно, теоретический материал иллюстрируется графически, что в значительной степени облегчает усвоение теории;

методических рекомендаций по решению задач с образцами решенных задач, которые активизирует последующую самостоятельную работу студентов, а преподаватель получает возможность большую часть занятия посвятить решению задач более принципиального характера. Кроме того, наличие в указаниях большого количества решенных задач разного уровня сложности значительно облегчит самостоятельную работу студентов;

банк задач для самостоятельной работы. Сложность предлагаемых по каждой теме задач повышается постепенно. Задачи предлагаются в количестве, достаточном для приобретения навыков решения типовых задач, что дает возможность уверенно перейти к решению более интересных и сложных задач.

Основная цель указания - помочь студенту, приступающему к изучению высшей математики, организовать свою самостоятельную работу, выделить и усвоить главное, приобрести достаточно прочные навыки решения задач различного уровня сложности.

ТЕМА 1. **Пространство геометрических векторов**

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Понятие вектора и его длины

Определение. Направленный отрезок (или, что то же, упорядоченную пару точек) называют вектором.

Для вектора принято обозначение $\overrightarrow{AB}$, из которого очевидно, что точка A – начало, точка B – конец вектора.

Определение. Расстояние между началом вектора и его концом называют длиной, или модулем, вектора и обозначают $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Определение. Вектор, у которого совпадают начало и конец, называют нулевым вектором и обозначают $\vec{0}$.

1.2. Чем отличаются векторные величины от скалярных величин?

Величины, которые характеризуются только числом, называются скалярными, например масса, температура, работа, объем и т.д.

Величины, которые характеризуются не только числом, но и направлением, называются векторными, например, скорость, ускорение, сила, моменты силы и т.д. Таким образом, чтобы задать вектор, нужно задать его направление и длину.

1.3. Какие векторы называются коллинеарными? В каком случае векторы компланарны?

Определение. Векторы, расположенные на одной или параллельных прямых, называются коллинеарными.

Коллинеарность векторов принято обозначать $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$. Если хотят подчеркнуть сонаправленность коллинеарных векторов, пишут $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, если же коллинеарные векторы противоположно ориентированы, принята запись $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$. Нулевой вектор принято считать коллинеарным любому вектору.

Определение. Совокупность трех и более векторов, параллельных одной плоскости, называют компланарной.

Очевидно, векторы, расположенные на одной плоскости, компланарны.

1.4. При выполнении каких условий векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ считаются равными?

Два вектора считаются равными, если они одинаково направлены и имеют равные длины, т.е. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, если

1) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ и 2) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$.

Из определения следует, что векторы считаются равными при выполнении условий 1 и 2 независимо от точки их приложения. Это означает, что вектор можно переносить параллельно самому себе, помещая его начало в любую точку пространства. Такие векторы принято называть свободными.

Не следует забывать, что у равных векторов не только равны длины, но они должны быть коллинеарными, причем сонаправленными. Например, на рис. 1, где изображены векторы, совпадающие со сторонами квадрата, нет ни одной пары равных векторов. На рис. 2 тоже нет равных векторов, хотя при этом все стороны и квадрата, и правильного шестиугольника равны между собой.

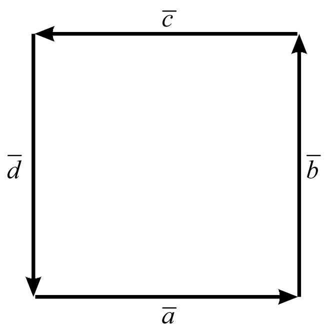


Рис. 1

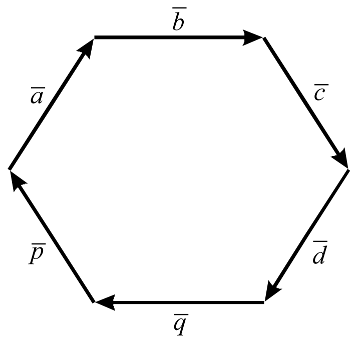


Рис. 2

1.5. Как на множестве векторов определены операции сложения векторов и умножения вектора на число?

Определение. Суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, который строится либо по правилу параллелограмма (рис. 3), либо по правилу треугольника (рис. 4)

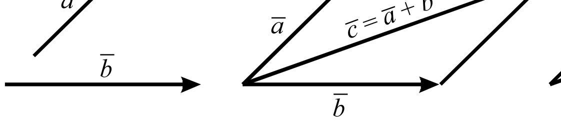


Рис. 3

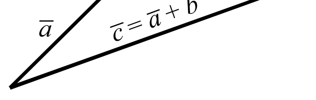


Рис. 4

Сумму трех и большего числа векторов строят по правилу многоугольника (рис. 5)

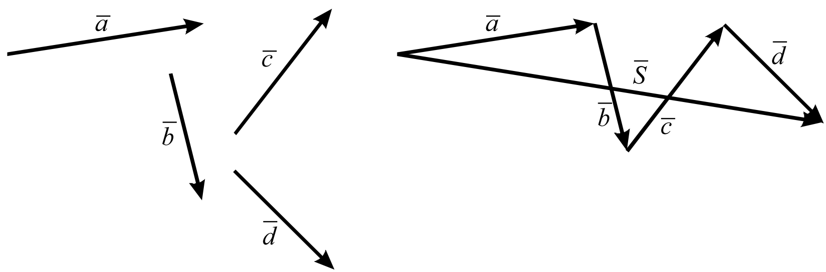


Рис. 5

По правилу многоугольника путем параллельного переноса начало каждого последующего вектора помещают в конец предыдущего. Вектор $\overline{S} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d}$ получен путем соединения начала первого вектора и конца последнего вектора.

Определение. Произведением вектора $\overline{a}$ на число α называется вектор $\overline{b}$, удовлетворяющий условиям:

1. $\overline{b} \uparrow\uparrow \overline{a}$, если $\alpha > 0$;
   $\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{a}$, если $\alpha < 0$.
2. $\left|\overline{b}\right| = \left|\alpha\right| \cdot \left|\overline{a}\right|$.

При этом принята запись $\overline{b} = \alpha\,\overline{a}$.

Определение. Вектор, равный произведению $(-1)\cdot\overline{a}$, называется вектором, противоположным вектору $\overline{a}$.

Определение. Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется сумма вектора $\overline{a}$ и вектора, противоположного вектору $\overline{b}$.

Таким образом, согласно определению $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-1)\cdot\overline{b}$.

Из данного определения следует правило построения вектора разности (рис. 6 и 7).

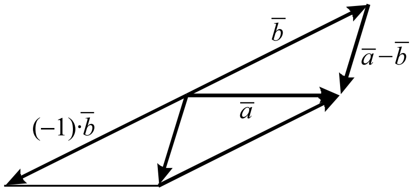


Рис. 6

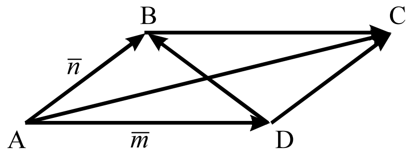


Рис. 7

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ отнесены к одному началу, то вектор, $(\overline{a}-\overline{b})$ направлен из конца вычитаемого вектора в конец уменьшаемого вектора. Если на векторах $\overline{n}$ и $\overline{m}$ построен параллелограмм, то по одной из его диагоналей направлена сумма векторов, по другой – разность векторов: $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overline{m}+\overline{n}$, $\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\overline{n}-\overline{m}$ (рис. 7).

Легко доказать, что для введенных таким образом операций сложения векторов и умножения вектора на число для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ и любых чисел α и β верны следующие утверждения:

1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$;

2) $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$;

3) $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$;

4) для каждого вектора $\overline{a}$ найдется вектор $\overline{b}$, такой, что $\overline{a}+\overline{b}=\overline{0}$;

5) $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$;

6) $\alpha(\beta\,\overline{a})=(\alpha\cdot\beta)\overline{a}$;

7) $(\alpha+\beta)\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$;

8) $\alpha\cdot(\overline{a}+\overline{b})=\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$.

Таким образом, операции сложения векторов и умножения вектора на число удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства (Глава 1, тема 5, п. 1.1.). Это означает, что множество всех геометрических векторов образует линейное пространство. Обозначим его L_3. Обозначим через L_2 множество векторов, параллельных некоторой фиксированной плоскости, а через L_1 – множество всех векторов, параллельных некоторой фиксированнойной прямой. Очевидно, L_1 и L_2 – линейные пространства, являющиеся подпространствами пространства L_3 всех геометрических векторов.

1.6. Теоремы о базисах пространств L_1, L_2 и L_3

Понятия линейной комбинации, линейной зависимости и линейной независимости систем векторов из L_1, L_2, L_3 определяются так же, как для любого линейного пространства. Аналогично даются и понятия базиса и размерности пространств геометрических векторов.

Докажем две вспомогательные теоремы.

Теорема 1. Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны.

Доказательство. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ линейно зависимы. Это означает, что существуют числа α и β, среди которых хотя бы одно не равно нулю, такие, что $\alpha\,\overline{a} + \beta\,\overline{b} = \overline{0}$. Пусть, например, $\alpha \neq 0$. Тогда $\overline{a} = -\dfrac{\beta}{\alpha}\overline{b}$. Из определения операции умножения вектора на число следует, что $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

Пусть $\overline{a} \parallel \overline{b}$. Если векторы нулевые, то такая система векторов, очевидно, линейно зависима. Пусть $\overline{b} \neq \overline{0}$. Введем $\lambda = \dfrac{|\,\overline{a}\,|}{|\,\overline{b}\,|}$, тогда $\overline{a} = \lambda\,\overline{b}$, если $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ и $\overline{a} = -\lambda\,\overline{b}$, если $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$. И в том и другом случае это означает, что $\overline{a}$ и $\overline{b}$ линейно зависимы.

Теорема 2. Система из трех векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда она компланарна.

Доказательство. Пусть система векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ линейно зависима, это означает, что один из векторов является линейной комбинацией двух других, например, $\overline{c} = \alpha\,\overline{a} + \beta\,\overline{b}$. Это означает, что вектор $\overline{c}$ параллелен плоскости, которую определяют векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т.е. система векторов компланарна (если среди векторов есть коллинеарные, то эта система очевидно, компланарна).

Пусть система $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ компланарна (рис. 8). Докажем, что эта система векторов линейно зависима.

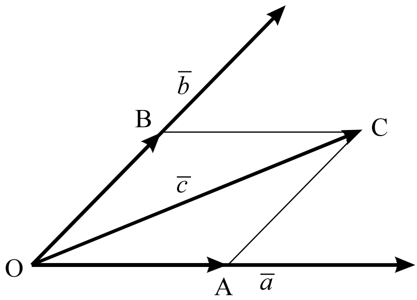


Рис. 8

Через точку C проведем прямые, параллельные направлениям векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ до пересечения с ними. Тогда по теореме 1 будем иметь: $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \alpha\,\overline{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \beta\,\overline{b}$.

По правилу сложения векторов $\overline{c} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \Rightarrow \overline{c} = \alpha\,\overline{a} + \beta\,\overline{b}$, т.е. система векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ линейно зависима.

Заметим, что если среди векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ есть коллинеарные, то линейная зависимость такой системы векторов очевидна.

Напомним определение базиса.

Определение. Система векторов $l_1, l_2, ..., l_n$ называется базисом в L, если

1) эта система линейно независима;

2) любой вектор x из L можно представить в виде

$$x = \alpha_1\, l_1 + \alpha_2\, l_2 + ... + \alpha_n\, l_n.$$

Числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ называются координатами вектора x в базисе $l_1, l_2, ..., l_n$.

С помощью теоремы 1 и теоремы 2 легко доказываются следующие теоремы.

Теорема 3. Любой ненулевой вектор $\bar{l}$ из L_1 является базисом в L_1.

Теорема означает, что любой вектор $\bar{a}$ из L_1 можно представить в виде: $\bar{a} = \alpha_1 \bar{l}$.

Теорема 4. Любая упорядоченная пара $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$ неколлинеарных векторов из L_2 образует базис в L_2.

Теорема означает, что любой вектор $\bar{a}$ из L_2 можно представить в виде

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{l}_1 + \alpha_2 \bar{l}_2 ,$$

где α_1 и α_2 координаты вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{l}_1$, $\bar{l}_2$. Принята запись $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$.

Теорема 5. Любая упорядоченная система из трех некомпланарных векторов $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ образует базис в L_3.

Теорема означает, что любой вектор $\bar{a}$ из L_3 можно представить в виде

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{l}_1 + \alpha_2 \bar{l}_2 + \alpha_3 \bar{l}_3 .$$

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ называются координатами вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$. Принята запись $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

1.7. Какие следствия имеют теоремы 4 и 5?

Из теоремы 4 следует, что любые три вектора из L_2 линейно зависимы, следствие теоремы 5 – любые четыре вектора в L_3 линейно зависимы.

Заметим, что как и в любом линейном пространстве, в пространствах L_1, L_2 и L_3 координаты вектора в данном базисе определяются однозначно.

Напомним, что размерность линейного пространства определяется по количеству базисных векторов. Следовательно, L_3 трехмерное линейное пространство, L_2 – двухмерное, L_1 – одномерное линейное пространство.

Напомним также, что при сложении векторов их соответствующие координаты относительно одного и того же базиса складываются, при умножении вектора на число умножаются на это число и его координаты.

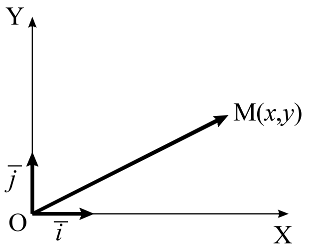
1.8. Какой базис принято называть декартовым?

Векторный базис в L_2 и L_3 называют декартовым, если его векторы попарно ортогональны и единичны. Векторы декартова базиса обозначают $\bar{i}, \bar{j}$ в L_2 и $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ в L_3.

1.9. Чем отличается декартов базис от декартовой системы координат?

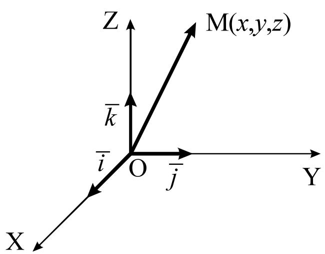
Если на плоскости или в пространстве зафиксирована точка O, к которой приложены векторы декартова базиса, то такая совокупность точки и базиса называется декартовой системой координат.

Оси декартовой системы получили название OX – ось абцисс, OY – ось ординат, OZ – ось аппликат (рис. 9 и 10). Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется радиус-вектором точки M. Координатами точки M в декартовой системе координат называются координаты ее радиуса-вектора.



$\overrightarrow{OM} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j}$

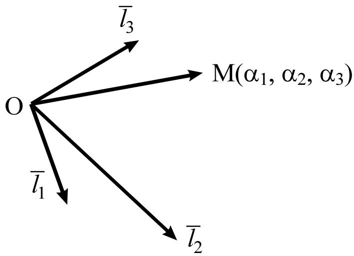
Рис. 9



$\overrightarrow{OM} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k}$

Рис. 10

1.10. Если базис не декартов, понятие системы координат для такого базиса имеет место?



$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \alpha_1 \bar{l}_1 + \alpha_2 \bar{l}_2 + \alpha_3 \bar{l}_3$

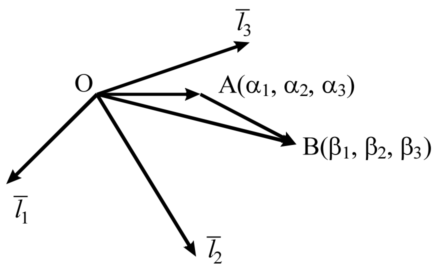
Рис. 11

Да, имеет. Система координат для произвольного базиса $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ – это тоже совокупность базиса и некоторой точки О, к которой приложены базисные векторы. Такая система координат называется аффинной (рис. 11).

1.11. Как найти координаты вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, если известны координаты точек A и B в аффинной системе координат?

Так как координаты точки В совпадают по определению с координатами вектора $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, а координаты точки А с координатами вектора $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, а при вычитании векторов их соответствующие координаты вычитаются, из всего этого следует, что

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (\beta_1 - \alpha_1,\ \beta_2 - \alpha_2,\ \beta_3 - \alpha_3).$$



$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$

Рис. 12

Аналогично находятся координаты вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ в декартовой системе координат. Если заданы $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$ и $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$. Таким образом, чтобы найти координаты вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ следует из координат конца вектора вычесть координаты его начала.

Пример. В декартовой системе координат заданы координаты вершин треугольника ABC: A (2, –1, 4), B (3, 0, –2), C (1, 1, –1). Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ и координаты вектора $\overline{S} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$.

Решение. $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -6)$,

$\overrightarrow{BC} = (-2, 1, 1)$,

$\overrightarrow{CA} = (1, -2, 5)$,

$\overline{S} = (0, 0, 0)$ (рис. 13).

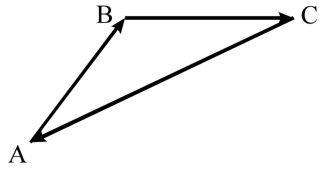


Рис. 13

Почему вектор $\overline{S}$ оказался нулевым вектором?

По определению

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overline{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overline{0}.$$

1.12. Как найти координаты точки M, которая делит отрезок AB в отношении λ, т.е. $\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}$?

Зафиксируем некоторую систему координат, и в этой системе зададим точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Координаты точки $M(x, y, z)$ найдем из условия $\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}$. Так как у равных векторов равны соответствующие координаты, для нахождения координат точки $M(x, y, z)$ будем иметь систему:

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda\,(x_2 - x), \\ y - y_1 = \lambda\,(y_2 - y), \\ z - z_1 = \lambda\,(z_2 - z), \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda\,x_2}{1+\lambda}, \\ y &= \frac{y_1 + \lambda\,y_2}{1+\lambda}, \\ z &= \frac{z_1 + \lambda\,z_2}{1+\lambda}, \quad \lambda \neq -1. \end{aligned}$$

При $\lambda=1$ получим формулы для координат середины отрезка AB:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Пример. В некоторой системе координат заданы вершины треугольника: A (2, –2, 3), B (–4, 0, 1) и C (–2, 4, –3). Найти координаты векторов, совпадающих с медианами этого треугольника, и убедиться, что $\overrightarrow{AM_1}+\overrightarrow{BM_2}+\overrightarrow{CM_3}=\overline{0}$ (рис. 14).

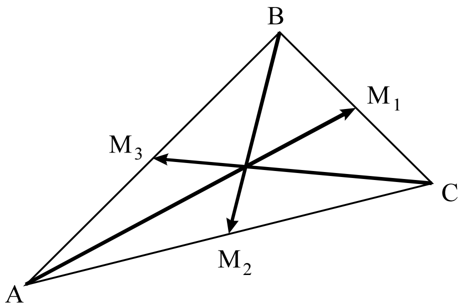


Рис. 14

Решение. Найдем координаты точек M_1, M_2, M_3:

$$M_1\,(-3, 2, -1),\ \ M_2\,(0, 1, 0),\ \ M_3\,(-1, -1, 2).$$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{BM_2}$ и $\overrightarrow{CM_3}$:

$$\overrightarrow{AM_1}=(-5, 4, -4),\quad \overrightarrow{BM_2}=(4, 1, -1),\quad \overrightarrow{CM_3}=(1, -5, 5).$$

Найдем координаты суммы полученных векторов:

$$\overrightarrow{AM_1}+\overrightarrow{BM_2}+\overrightarrow{CM_3}=\overline{0}\,(0, 0, 0).$$

2. Решение задач

2.1. Заданы три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, отнесенные к одному началу. Построить векторы $\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{a}-\overline{c}$ и $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$.

Решение. Векторы $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$ построены по правилу параллелограмма, вектор $\overline{a}-\overline{c}$ направлен из конца вычитаемого вектора $\overline{c}$ в конец уменьшаемого вектора $\overline{a}$.

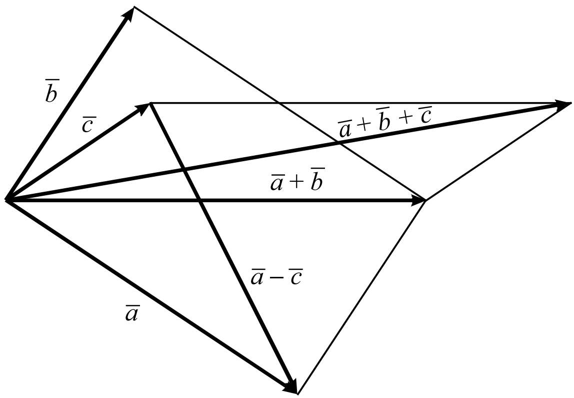


Рис. 15

2.2. В равнобочной трапеции ABCD нижнее основание $\overrightarrow{AB}=\overline{a}$, $\overrightarrow{AD}=\overline{b}$, угол между ними $\alpha=\pi/3$. Принимая векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ за базис, получить разложение по базисным векторам векторов $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ (рис. 16).

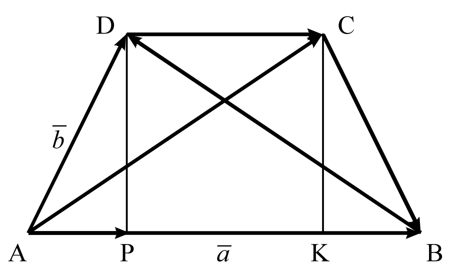


Рис. 16

Решение. При решении задач векторной алгебры часто используется единичный вектор заданного направления. В данной задаче при нахождении вектора $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ нам потребуется единичный вектор $\bar{a}_0$ вектора $\bar{a}$, который записывается в виде

$$\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}.$$

Из условия задачи следует, что

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| = \frac{\left|\bar{b}\right|}{2} \text{ (рис. 16).}$$

Тогда $$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{\left|\bar{b}\right|}{2}\cdot\bar{a}_0 = \frac{\left|\bar{b}\right|}{2}\cdot\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}.$$

Так как трапеция равнобочная,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{KB}}\right| \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{DC}} = \bar{a} - 2\,\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \bar{a} - \frac{\left|\bar{b}\right|}{|\bar{a}|}\bar{a} = \frac{|\bar{a}| - \left|\bar{b}\right|}{|\bar{a}|}\cdot\bar{a}.$$

Вектор $$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \bar{b} + \overrightarrow{\mathrm{DC}} = \bar{b} + \frac{|\bar{a}| - \left|\bar{b}\right|}{|\bar{a}|}\cdot\bar{a},$$

вектор $$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \bar{a} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \bar{a} - \bar{b} - \frac{|\bar{a}| - \left|\bar{b}\right|}{|\bar{a}|}\cdot\bar{a} =$$

$$= \bar{a}\left(1 - \frac{|\bar{a}| - \left|\bar{b}\right|}{|\bar{a}|}\right) - \bar{b} = \bar{a}\cdot\frac{\left|\bar{b}\right|}{|\bar{a}|} - \bar{b}.$$

Вектор $$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \bar{b} - \bar{a}.$$

Ответ. $\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \dfrac{|\bar{a}| - \left|\bar{b}\right|}{|\bar{a}|}\cdot\bar{a}$; $\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \dfrac{\left|\bar{b}\right|}{|\bar{a}|}\cdot\bar{a} - \bar{b}$;

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \bar{b} + \dfrac{|\bar{a}| - \left|\bar{b}\right|}{|\bar{a}|}\cdot\bar{a}$; $\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \bar{b} - \bar{a}$.

2.3. В правильной пирамиде ABCD $\overrightarrow{AB}=\bar{b}$, $\overrightarrow{AC}=\bar{c}$, $\overrightarrow{AD}=\bar{d}$. Принимая векторы $\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ за базис, найти в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{OD}$, где точка O – основание высоты пирамиды.

Решение. $\overrightarrow{BC}=\bar{c}-\bar{b}\Rightarrow\overrightarrow{BC}=(-1,\ 1,0)$;

$\overrightarrow{BD}=\bar{d}-\bar{b}\Rightarrow\overrightarrow{BD}=(-1,0,1)$;

$\overrightarrow{CD}=\bar{d}-\bar{c}\Rightarrow\overrightarrow{CD}=(0,-1,1)$ (рис. 17).

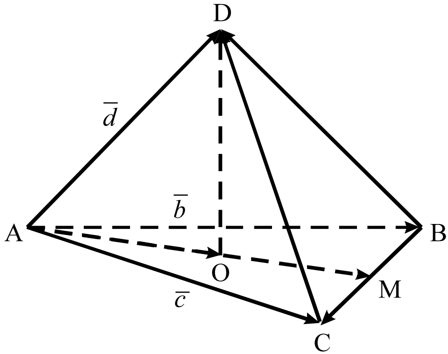


Рис. 17

Чтобы найти координаты $\overrightarrow{OD}$, необходимо знать разложение по базису вектора $\overrightarrow{AO}$, так как $\overrightarrow{OD}=\bar{d}-\overrightarrow{AO}$. По свойству медиан треугольника

$$\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM};$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\bar{b}+\frac{\bar{c}-\bar{b}}{2}=\frac{\bar{c}+\bar{b}}{2}\Rightarrow\overrightarrow{AO}=\frac{\bar{b}+\bar{c}}{3};$$

$$\overrightarrow{OD}=\bar{\mathrm{d}}-\frac{\bar{b}+\bar{c}}{3}\Rightarrow\overrightarrow{OD}=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1\right).$$

2.4. Дан прямоугольный параллелепипед, длины ребер которого 4, 4 и 8 (рис. 18). В вершине A приложены силы $\overline{\text{P}}$, $\overline{\text{Q}}$ и $\overline{\text{F}}$, при этом $|\overline{\text{P}}| = 2$, $|\overline{\text{Q}}| = \sqrt{5}$, $|\overline{\text{F}}| = \sqrt{2}$. Принимая точку A за начало декартовой системы координат, а оси координат направив по ребрам параллелепипеда, найти координаты равнодействующей $\overline{\text{R}} = \overline{\text{P}} + \overline{\text{Q}} + \overline{\text{F}}$ заданных сил в указанной системе координат.

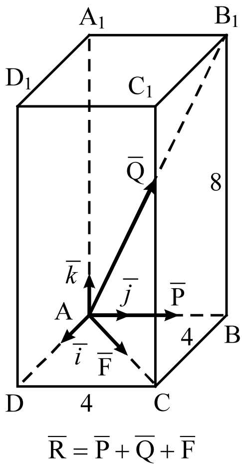


Рис. 18

Решение. Необходимо $\overline{\text{P}}$, $\overline{\text{F}}$ и $\overline{\text{Q}}$ выразить через базисные векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ декартовой системы координат. Очевидно, $\overline{\text{P}} = 2\bar{j}$.
$\overline{\text{F}} = \overrightarrow{\text{AC}_0} \cdot |\overline{\text{F}}|$, где $\overrightarrow{\text{AC}_0}$ – единичный вектор вектора $\overrightarrow{\text{AC}}$. Очевидно, $\overrightarrow{\text{AC}_0} = \dfrac{\overrightarrow{\text{AC}}}{|\overrightarrow{\text{AC}}|}$

Так как параллелепипед прямоугольный,

$$|\overrightarrow{\text{AC}}| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{\text{AD}} + \overrightarrow{\text{AB}} = 4i + 4j \Rightarrow \overrightarrow{\text{AC}_0} = \frac{4\bar{i} + 4\bar{j}}{|\overrightarrow{\text{AC}}|} = \frac{4\bar{i} + 4\bar{j}}{4\sqrt{2}} = \frac{i+j}{\sqrt{2}}.$$

Тогда $$\overline{\text{F}} = \frac{\bar{i} + \bar{j}}{\sqrt{2}} \cdot |\overline{\text{F}}| = \frac{\bar{i} + \bar{j}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \bar{i} + \bar{j}.$$

Аналогично находим $\overline{\text{Q}} = \overline{\text{Q}}_0 \cdot |\text{Q}|$.

$$|\overline{\text{AB}_1}| = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \Rightarrow \overline{\text{Q}}_0 = \frac{4\bar{j} + 8\bar{k}}{4\sqrt{5}} = \frac{\bar{j} + 2\bar{k}}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\text{Q}} = \bar{j} + 2\bar{k}.$$

Таким образом, $\overline{\text{R}} = 2\bar{j} + \bar{i} + \bar{j} + \bar{j} + 2\bar{k} = \bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k}$.

Ответ. $\overline{\text{R}} = (1, 4, 2)$.

2.5. Найти координаты центра тяжести однородной треугольной пластины, если заданы координаты вершин этой пластины A (2, 1, –2), B (2, 3, –4), C (0, 1, –2).

Решение. Центр тяжести однородной треугольной пластины находится в точке пересечения медиан треугольника (рис. 19).

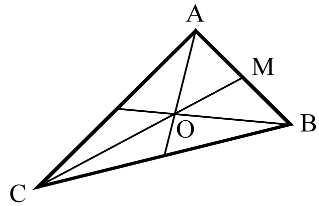


Рис. 19

По свойству медиан $$\frac{|\mathrm{CO}|}{|\mathrm{OM}|}=\frac{2}{1}.$$

Найдем координаты точки M и далее воспользуемся формулой деления отрезка в данном отношении:

$$\mathrm{M}\left(\frac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B}}{2},\frac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2}+\frac{z_\mathrm{A}+z_\mathrm{B}}{2}\right)=\mathrm{M}(2,2,-3).$$

По формулам

$$x=\frac{x_1+\lambda\, x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda\, y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda\, z_2}{1+\lambda}$$

при $\lambda=2$ найдем координаты точки O:

$$x=\frac{4}{3},\quad y=\frac{5}{3},\quad z=-\frac{8}{3}.$$

Ответ. $\mathrm{O}\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},-\frac{8}{3}\right)$.

2.6. Заданы векторы $\bar{a}=3\bar{i}+\bar{j}$, $\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}$ и $\bar{c}=\bar{i}-3\bar{j}$. Разложить вектор $\bar{c}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ аналитически и геометрически.

Решение.

1. По условию задачи требуется найти числа α и β, такие, что

$$\overline{c} = \alpha\,\overline{a} + \beta\,\overline{b}\ .$$

Приравнивая соответствующие координаты векторов, получим систему для нахождения α и β:

$$\begin{cases} 1 = 3\alpha + 2\beta \\ -3 = \alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = -1,\ \beta = 2 \Rightarrow \overline{c} = -a + 2\overline{b}\ .$$

2. Построим векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ (рис. 20):

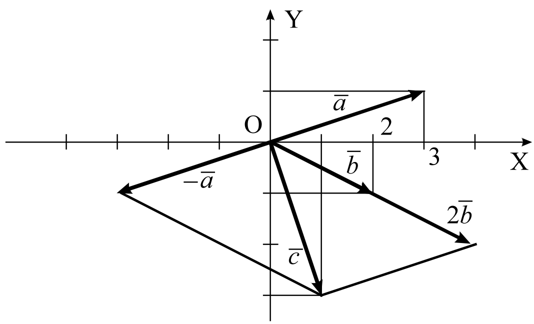


Рис. 20

Из чертежа следует

$$\overline{c} = -\overline{a} + 2\overline{b}.$$

2.7. Среди заданных векторов $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$, $\overline{c} = -6\overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{d} = 6\overline{i} - 3\overline{j} + 3\overline{k}$ указать коллинеарные пары векторов.

Решение. Коллинеарные векторы линейно зависимы, следовательно, их соответствующие координаты пропорциональны. Среди заданных векторов

$$\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{d}, \quad \text{так как} \quad \frac{2}{6} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \overline{a} = \frac{1}{3}\,\overline{d}\,,$$

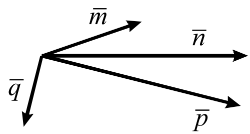
$$\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{c}, \quad \text{так как} \quad \frac{3}{-6} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \overline{b} = -\frac{1}{2}\,\overline{c}\ .$$

3. Банк задач для самостоятельной работы

3.1. В треугольнике ABC вектор $\overrightarrow{AB} = \overline{m}$, $\overrightarrow{AC} = \overline{n}$. Построить следующие векторы:

$$\frac{\overline{m} + \overline{n}}{2}, \quad \overline{n} - \overline{m}, \quad 2\overline{m} + 3\overline{n}.$$

3.2. Заданы векторы $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$ и $\overline{q}$, имеющие общее начало:



Построить вектор $\overline{s} = \overline{m} - \overline{n} - 2\overline{p} + 3\overline{q}$.

3.3. В правильном шестиугольнике ABCDEF заданы векторы, совпадающие с его ребрами $\overrightarrow{AB} = \overline{p}$, $\overrightarrow{BC} = \overline{q}$. Выразить через $\overline{p}$ и $\overline{q}$ векторы $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

3.4. Векторы $\overrightarrow{AC} = \overline{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \overline{b}$ служат диагоналями параллелограмма ABCD. Выразить через $\overline{a}$ и $\overline{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

3.5. Точки К и Р служат серединами сторон ВС и СД параллелограмма. Полагая $\overrightarrow{AK} = \overline{m}$, $\overrightarrow{AP} = \overline{n}$ выразить через $\overline{m}$ и $\overline{n}$ векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$.

3.6. В ромбе ABCD даны диагонали $\overrightarrow{AC} = \overline{a}$, $\overrightarrow{BD} = \overline{b}$. Принимая $\overline{a}$ и $\overline{b}$ за базис, найти в этом базисе координаты векторов, совпадающих со сторонами ромба.

Ответ. $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

$\overrightarrow{CD} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{DA} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

3.7. Зная векторы, служащие сторонами треугольника $\overrightarrow{AB} = \overline{c}$, $\overrightarrow{BC} = \overline{a}$, $\overrightarrow{CA} = \overline{b}$, найти вектор $\overrightarrow{AK}$, совпадающий с биссектрисой $\angle$ A.

Указание. Воспользуйтесь свойством биссектрисы треугольника: биссектриса делит противолежащую углу сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

Ответ. $\overrightarrow{AK} = \overline{c} + \dfrac{|\overline{c}|}{|\overline{b}| + |\overline{c}|} \cdot \overline{a}$.

3.8. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы векторы, совпадающие с его ребрами: $\overrightarrow{AB} = \overline{m}$, $\overrightarrow{AD} = \overline{n}$, $\overrightarrow{AA_1} = \overline{p}$. Принимая эти векторы за базис, найти в этом базисе координаты векторов, совпадающих с диагоналями $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{DB_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{AC_2}$ параллелепипеда.

Ответ. $\overrightarrow{BD_1} = (-1, 1, 1)$; $\overrightarrow{DB_1} = (1, 1, -1)$;
$\overrightarrow{AC_1} = (1, 1, 1)$; $\overrightarrow{CA_1} = (-1, 1, 1)$.

3.9. В правильной треугольной пирамиде ABCD заданы векторы, совпадающие с боковыми ребрами пирамиды $\overrightarrow{DA} = \overline{a}$, $\overrightarrow{DB} = \overline{b}$, $\overrightarrow{DC} = \overline{c}$. Принимая эти векторы за базис, найти в этом базисе координаты вектора $\overrightarrow{DO}$, совпадающего с высотой пирамиды.

Ответ. $\overrightarrow{DO} = \dfrac{\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}}{3} \Rightarrow \overrightarrow{DO} = \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$.

3.10. Показать, что точки A (2, 1, –1), B (3, –1, 1), C (0, 5, –5) лежат на одной прямой.

3.11. Построить векторы $\overline{a} = \overline{i} - 7\overline{j}$, $\overline{b} = 4\overline{i} - 2\overline{j}$ и $\overline{c} = 3\overline{i} + 5\overline{j}$. Разложить вектор $\overline{c}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ аналитически и геометрически.

Ответ. $\overline{c} = \overline{b} - \overline{a}$.

3.12. Дан прямоугольный параллелепипед, длины ребер которого 2, 6 и 4 (рис. 21). В вершине C приложены силы $\overline{F}$, $\overline{P}$ и $\overline{Q}$, причем $\left|\overline{F}\right| = 3$, $\left|\overline{P}\right| = \sqrt{10}$, $\left|\overline{Q}\right| = \sqrt{13}$. Найти координаты равнодействующей $\overline{R} = \overline{F} + \overline{P} + \overline{Q}$ в декартовой системе координат с началом в точке C и осями координат, направленными по ребрам параллелепипеда.

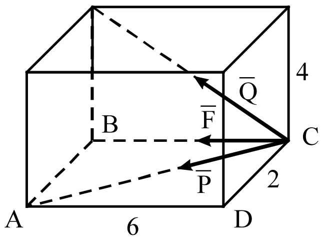


Рис. 21

Ответ. $R = \overline{i} + 9\overline{j} + 2\overline{k}$.

ТЕМА 2. **Проекция вектора на ось. Скалярное произведение векторов**

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Как спроектировать точку на ось в пространстве?

Направленную прямую будем называть осью.

Определение. Ортогональной проекцией точки A на ось $\bar{l}$ называется точка A_1 пересечения оси с перпендикулярной к ней плоскостью, проходящей через точку A (рис. 1).

Очевидно, если точка A и прямая лежат в одной плоскости, ортогональной проекцией точки A на ось $\bar{l}$ будет точка A_1 пересечения оси с перпендикулярной к ней прямой, проходящей через точку A (рис. 2).

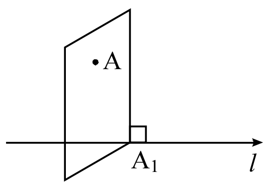


Рис. 1

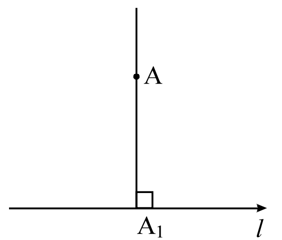


Рис. 2

1.2. Что называют векторной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось $\bar{l}$?

Определение. Векторной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось $\bar{l}$ называют вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$, у которого точка A_1 является ортогональной проекцией точки A, а точка B_1 – ортогональной проекцией точки B на ось $\bar{l}$ (рис. 3, рис. 4).

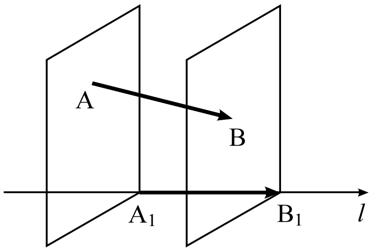


Рис. 3

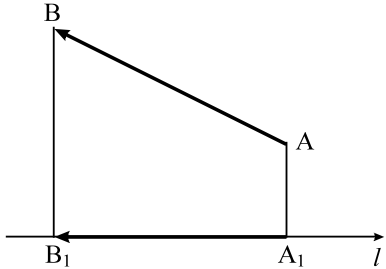


Рис. 4

1.3. Определение скалярной проекции вектора на ось

Скалярной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось $\bar{l}$ называется число, равное длине векторной проекции $\overrightarrow{A_1B_1}$, взятое со знаком плюс, если $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\bar{l}$ сонаправлены (рис. 3), и со знаком минус, если $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\bar{l}$ направлены противоположно (рис. 4). Для скалярной проекции принято обозначение $\text{Пр}_{\bar{l}}\,\overrightarrow{AB}$.

Таким образом,

$$\text{Пр}_{\bar{l}}\,\overrightarrow{AB} = \begin{cases} |\overrightarrow{A_1B_1}|, \text{ если } \overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow \bar{l}, \\ -|\overrightarrow{A_1B_1}|, \text{ если } \overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow \bar{l}. \end{cases}$$

1.4. Какими свойствами обладают скалярные проекции?

1. $\text{Пр}_{\bar{l}}\,\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi$, где φ – угол между осью $\bar{l}$ и вектором $\bar{a}$, отсчитываемый от оси $\bar{l}$ до $\bar{a}$ против часовой стрелки.

2. $\text{Пр}_{\bar{l}}\,\alpha\,\bar{a} = \alpha\,\text{Пр}_{\bar{l}}\,\bar{a}$, где α – любое число.

3. $\text{Пр}_{\bar{l}}\,(\bar{a}+\bar{b}) = \text{Пр}_{\bar{l}}\,\bar{a} + \text{Пр}_{\bar{l}}\,\bar{b}$. Из свойств 2 и 3 очевидно следует, что $\text{Пр}_{\bar{l}}(\alpha\,\bar{a}+\beta\,\bar{b}) = \alpha\,\text{Пр}_{\bar{l}}\,\bar{a}+\beta\,\text{Пр}_{\bar{l}}\,\bar{b}$, a,b – любые числа.

4. Равные векторы имеют на одну и ту же ось равные проекции.

5. Скалярные проекции вектора на параллельные и одинаково направленные оси равны между собой.

Свойства 1 – 3 рекомендуется доказать самостоятельно.

6. Координаты вектора в декартовой системе координат равны скалярным проекциям этого вектора на оси координат (рис. 5, рис. 6).

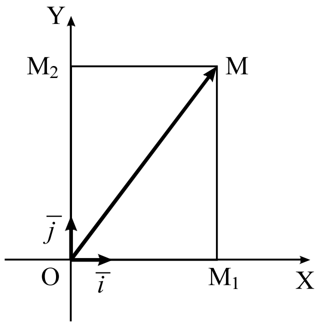


Рис. 5

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j},$$

где

$$x = \text{Пр}_{\overline{OX}}\,\overrightarrow{OM},$$

$$y = \text{Пр}_{\overline{OY}}\,\overrightarrow{OM}.$$

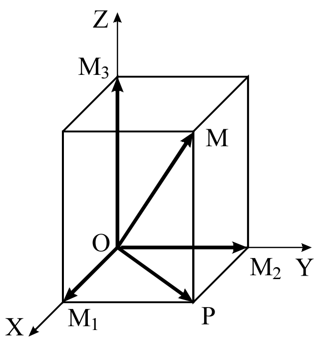


Рис. 6

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3},$$

где M_1, M_2 и M_3 – проекции точки M соответственно на оси OX, OY и OZ.

$$\overrightarrow{OM_1} = x\,\bar{i}, \text{ где } x = \text{Пр}_{\overline{OX}}\,\overrightarrow{OM},$$

$$\overrightarrow{OM_2} = y\,\bar{j}, \text{ где } y = \text{Пр}_{\overline{OY}}\,\overrightarrow{OM},$$

$$\overrightarrow{OM_3} = z\,\bar{k}, \text{ где } z = \text{Пр}_{\overline{OZ}}\,\overrightarrow{OM}.$$

Таким образом,

$$\overrightarrow{OM} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k}.$$

1.5. *Определение скалярного произведения векторов*

Определение. Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Для скалярного произведения принято обозначение $(\overline{a},\overline{b})$.

Таким образом, по определению

$$(\overline{a},\overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi . \qquad (1)$$

Если хотя бы один из векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ нулевой, скалярное произведение полагается равным нулю.

1.6. *Скалярной или векторной величиной является скалярное произведение?*

Согласно данному определению, скалярное произведение двух векторов – это число.

1.7. *Свойства скалярного произведения*

1. $(\overline{a},\overline{b}) = 0 \Leftrightarrow \overline{a} \perp \overline{b}$ (для ненулевых векторов);
2. $(\overline{a},\overline{b}) = (\overline{b},\overline{a})$;
3. $(\lambda\,\overline{a},\overline{b}) = \lambda \cdot (\overline{a},\overline{b}), \quad \lambda \in R$;
4. $(\overline{a},\overline{a}) = |\overline{a}|^2$ при $\overline{a} \neq \overline{0}$, $(\overline{0},\overline{0}) = 0$;
5. $(\overline{a},\overline{b}) = |\overline{a}| \cdot \text{Пр}_{\overline{a}}\, \overline{b} = |\overline{b}| \cdot \text{Пр}_{\overline{b}}\, \overline{a}$;
6. $(\overline{a},\overline{b}_1 + \overline{b}_2) = (\overline{a},\overline{b}_1) + (\overline{a},\overline{b}_2)$;
7. $(\overline{i},\overline{i}) = (\overline{j},\overline{j}) = (\overline{k},\overline{k}) = 1$;

   $(\overline{i},\overline{j}) = (\overline{j},\overline{k}) = (\overline{k},\overline{j}) = 0$.

Свойства 1 – 7 легко доказываются на основании определения скалярного произведения.

1.8. Можно ли вычислить скалярное произведение векторов, зная их координаты в декартовой системе координат?

Да, можно. Пусть в некоторой декартовой системе координат заданы векторы $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$. Тогда имеет место формула

$$(\overline{a}, \overline{b}) = x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2\,. \tag{2}$$

Получим формулу (2):

$$(\overline{a}, \overline{b}) = (x_1\, \overline{i} + y_1\, \overline{j} + z_1\, \overline{k}, \quad x_2 \overline{i} + y_2\, \overline{j} + z_2\, \overline{k}) =$$

$$= x_1 x_2\, (\overline{i}, \overline{i}) + x_1 y_2 (\overline{i}, \overline{j}) + x_1 z_2\, (\overline{i}, \overline{k}) + y_1 x_2 (\overline{j}, \overline{i}) + y_1 y_2 (\overline{j}, \overline{j}) + y_1 z_2 (\overline{j}, \overline{k}) +$$

$$+ z_1 x_2\, (\overline{k}, \overline{i}) + z_1 y_2 (\overline{k}, \overline{j}) + z_1 z_2\, (\overline{k}, \overline{k}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2\,.$$

1.9. Какие свойства скалярного произведения были использованы при выводе формулы (2)?

Использованы свойства 6, 3, 7. Проследите, на каком этапе вывода формулы использованы перечисленные свойства.

1.10. В чем состоит физический смысл скалярного произведения?

Из школьного курса физики известна формула нахождения работы силы $\overline{F}$, когда точка ее приложения перемещается вдоль вектора $\overline{S}$ под углом φ к этому вектору:

$$A = \left|\overline{F}\right| \cdot \left|\overline{S}\right| \cos\varphi\,.$$

Из определения скалярного произведения следует, что

$$(\overline{F}, \overline{S}) = \mathrm{A}\,. \tag{3}$$

С использованием определения скалярного произведения и, в частности, формулы (2) решаются все основные задачи векторной алгебры.

1.11. Какие величины можно найти с помощью скалярного произведения?

1. Длину вектора:

$$\left|\overline{a}\right|^2 = (\overline{a},\overline{a}) \Rightarrow \left|\overline{a}\right| = \sqrt{(\overline{a},\overline{a})}\,. \tag{4}$$

Если $\overline{a} = x_1\,\overline{i} + y_1\,\overline{j} + z_1\overline{k}$, то по формуле (2) будем иметь

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}}\,. \tag{4.1}$$

2. Расстояние между двумя точками: $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$ и $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$:

$$d = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \tag{5}$$

3. $\text{Пр}_{\overline{b}}\,\overline{a}$:

$$(\overline{a},\overline{b}) = \left|\overline{b}\right|\cdot\left|\overline{a}\right|\cos\varphi = \left|\overline{b}\right|\cdot \text{Пр}_{\overline{b}}\,\overline{a} \Rightarrow \text{Пр}_{\overline{b}}\,\overline{a} = \frac{(\overline{a},\overline{b})}{\left|\overline{b}\right|}\,. \tag{6}$$

Если векторы заданы в декартовой системе координат, тогда

$$\text{Пр}_{\overline{b}}\,\overline{a} = \frac{x_1\,x_2 + y_1\,y_2 + z_1\,z_2}{\sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2} + z_2^{\,2}}}\,. \tag{6.1}$$

4. Угол между двумя векторами:

$$(\overline{a},\overline{b}) = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{(\overline{a},\overline{b})}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}\,. \tag{7}$$

Если векторы заданы в декартовой системе координат, будем иметь

$$\cos\varphi = \frac{x_1\,x_2 + y_1\,y_2 + z_1\,z_2}{\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}}\cdot\sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2} + z_2^{\,2}}}\,. \tag{7.1}$$

Из 7.1. следует условие перпендикулярности ненулевых векторов:

$$\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow (\overline{a},\overline{b}) = 0 \Leftrightarrow x_1\,x_2 + y_1\,y_2 + z_1\,z_2 = 0\,. \tag{8}$$

5. Направляющие косинусы вектора.

Определение. Направляющими косинусами вектора $\bar{a}$ называются косинусы углов, которые образует этот вектор с осями координат и, что то же, с ортами координатных осей (рис. 7).

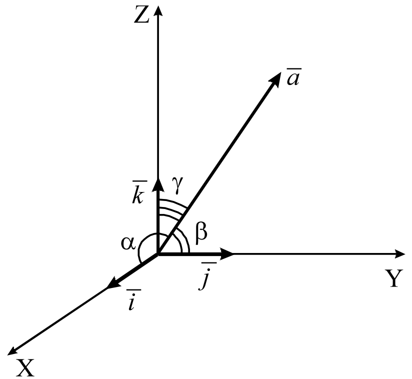


Рис. 7

Так как $\bar{i} = (1,0,0)$, $\bar{j} = (0,1,0)$, $\bar{k} = (0,0,1)$,

$$\cos\alpha = \frac{(\bar{a},\bar{i})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{i}|} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}}},$$

$$\cos\beta = \frac{(\bar{a},\bar{j})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{j}|} = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}}}, \tag{9}$$

$$\cos\gamma = \frac{(\bar{a},\bar{k})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{k}|} = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}}}.$$

Легко доказать свойство направляющих косинусов:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{10}$$

Направляющие косинусы определяют направление вектора в пространстве (или на плоскости).

6. Координаты орта $\overline{a}_0$ вектора $\overline{a}$.

Орт вектора $\overline{a}$ – это единичный вектор вектора $\overline{a}$. Вектор $\overline{a}$ и его орт $\overline{a}_0$ связаны соотношением

$$\overline{a} = |\overline{a}|\overline{a}_0 \Rightarrow \overline{a}_0 = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = \frac{x_1\,\overline{i} + y_1\,\overline{j} + z_1\,\overline{k}}{|\overline{a}|} \Rightarrow \overline{a}_0\left(\frac{x_1}{|\overline{a}|}, \frac{y_1}{|\overline{a}|}, \frac{z_1}{|\overline{a}|}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{a}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\,. \qquad (11)$$

Вывод. Координаты орта любого вектора в декартовой системе координат равны направляющим косинусам вектора. Формула (10)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

теперь имеет очевидный геометрический смысл.

Пример 1. Построить вектор $\overline{a} = (4, -4, 7)$, найти его длину и координаты орта.

Решение.

$$|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,,$$

$$|\overline{a}| = \sqrt{16 + 16 + 49} = \sqrt{81} = 9$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{|a|} = \frac{4}{9};$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|a|} = -\frac{4}{9};$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|a|} = \frac{7}{9}$$

$$\overline{a}_0 = \left(\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{7}{9}\right).$$

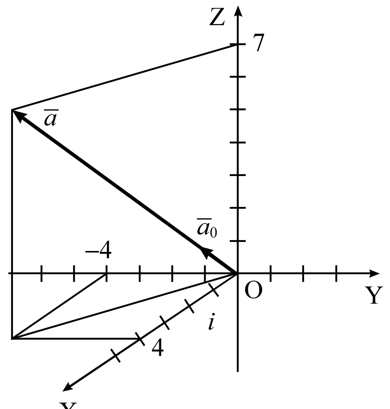


Рис. 8

Пример 2. Заданы векторы $\overline{a} = 2\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$ и $\overline{b} = \overline{i} + \overline{k}$.

Найти: 1) угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

2) $\text{Пр}_{\overline{a}}\,\overline{b}$;

3) орты $\overline{a}_0$ и $\overline{b}_0$.

Решение. 1. По формуле (7)

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \frac{2+0+1}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{1+1}} = \frac{3}{3\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

2. По формуле (6) $\text{Пр}_{\overline{a}}\,\overline{b} = \dfrac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}|} = \dfrac{3}{3} = 1$.

3. Найдем по формулам (9) направляющие косинусы заданных векторов:

1) $\overline{a} = \{2,-2,1\}$; $\cos\alpha = \dfrac{2}{|\overline{a}|} = \dfrac{2}{3}$; $\cos\beta = \dfrac{-2}{|\overline{a}|} = -\dfrac{2}{3}$; $\cos\gamma = \dfrac{1}{|\overline{a}|} = \dfrac{1}{3}$;

2) $\overline{b} = \{1,0,1\}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos\beta = 0$; $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Таким образом, $\overline{a}_0 = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, $\overline{b}_0 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Решение задач

2.1. Заданы векторы

$$\overline{a} = \overline{i} - 2\overline{j} - 3\overline{k}, \quad \overline{b} = 3\overline{i} + 4\overline{j} - 5\overline{k}, \quad \overline{c} = 2\overline{j} + \overline{k}.$$

Найти длину вектора $\overline{d} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$.

Решение. Найдем координаты вектора $\overline{d}$, складывая соответствующие координаты данных векторов:

$$\overline{d} = (4, 4, -7) \Rightarrow |\overline{d}| = \sqrt{16+16+49} = \sqrt{81} = 9.$$

2.2. Найти длину вектора $\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$, если известно, что $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{b}| = 4$, $|\bar{c}| = 5$ и угол между каждой парой векторов равен 120°.

Решение. В отличие от предыдущей задачи координаты векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ не заданы, поэтому длину вектора $\bar{d}$ будем находить по формуле $|\bar{d}| = \sqrt{(\bar{d}, \bar{d})}$, используя определение и свойства скалярного произведения:

$$|\bar{d}| = \sqrt{(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c},\ \bar{a} + \bar{b} + \bar{c})} =$$

$$= \sqrt{(\bar{a},\bar{a}) + (\bar{a},\bar{b}) + (\bar{a},\bar{c}) + (\bar{b},\bar{a}) + (\bar{b},\bar{b}) + (\bar{b},\bar{c}) + (\bar{c},\bar{a}) + (\bar{c},\bar{b}) + (\bar{c},\bar{c})} =$$

$$= \sqrt{|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 + |\bar{c}|^2 + 2(\bar{a},\bar{b}) + 2(\bar{b},\bar{c}) + 2(\bar{a},\bar{c})} =$$

$$= \sqrt{36 + 16 + 25 + 2\cdot 6\cdot 4\cdot \cos 120° + 2\cdot 4\cdot 5\cdot \cos 120° + 2\cdot 6\cdot 5\cdot \cos 120°} =$$

$$= \sqrt{77 - 24 - 20 - 30} = \sqrt{3}\,.$$

2.3. Найти проекцию вектора $\bar{a} = (4, -3, 2)$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

Решение. На указанной оси возьмем единичный вектор $\bar{b}_0$, причем по условию задачи $\bar{b}_0 = (\cos\alpha, \cos\alpha, \cos\alpha)$. Величину $\cos\alpha$ найдем, используя свойство (10) направляющих косинусов:

$$3\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Так как по условию задачи угол α острый, то

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \bar{b}_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

По формуле (6)

$$\text{Пр}_{b_0}\bar{a} = \frac{(\bar{a}, \bar{b}_0)}{|\bar{b}_0|} \Rightarrow \text{Пр}_{\bar{b}_0}\bar{a} = \frac{\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}}{1} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,.$$

2.4. Даны векторы $\overline{a}=2\overline{m}-\overline{n}$ и $\overline{b}=3\overline{m}+\overline{n}$, причем $|\overline{m}|=2$, $|\overline{n}|=2$, угол между $\overline{m}$ и $\overline{n}$ равен 60°. Найти $\text{Пр}_{\overline{a}}\,\overline{b}$.

Решение. В этой задаче не заданы декартовы координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, поэтому задачу будем решать по формуле (6), используя далее определение и свойства скалярного произведения векторов:

$$\text{Пр}_{\overline{a}}\,\overline{b}=\frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}|}=\frac{(2\overline{m}-\overline{n},\ 3\overline{m}+\overline{n})}{\sqrt{(2\overline{m}-\overline{n},\ 2\overline{m}-\overline{n})}}=$$

$$=\frac{6(\overline{m},\overline{m})+2(\overline{m},\overline{n})-3(\overline{n},\overline{m})+(\overline{n},\overline{n})}{\sqrt{4(\overline{m},\overline{m})-4(\overline{n},\overline{m})+(\overline{n},\overline{n})}}=\frac{6|\overline{m}|^2-(\overline{n},\overline{m})+|\overline{n}|^2}{\sqrt{4|\overline{m}|^2-4(\overline{n},\overline{m})+|\overline{n}|^2}}=$$

$$=\frac{24-2\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}+4}{\sqrt{4\cdot 4-4\cdot 2\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}+4}}=\frac{26}{\sqrt{12}}=\frac{13}{\sqrt{3}}.$$

2.5. Даны вершины треугольника A (2, 1, –1), B (–1, 0, 1) и C (4, 1, 2). Найти внутренний угол при вершине A и внешний угол при вершине B (рис. 9).

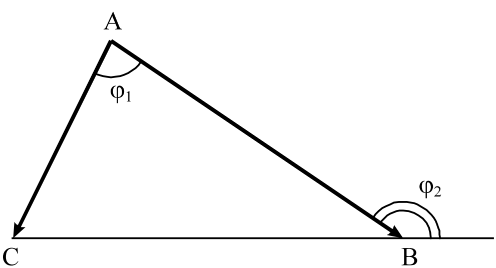


Рис. 9

Решение.

$$\cos\varphi_1=\frac{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|},\quad \overrightarrow{AC}=(2,0,3),\quad \overrightarrow{AB}=(-3,-1,2);$$

$$(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})=-6+6=0\Rightarrow\angle\varphi_1=\pi/2.$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB})}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|}, \quad \overrightarrow{BA} = (3, 1, -2), \quad \overrightarrow{CB} = (-5, -1, -1);$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{-15-1+2}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{27}} = \frac{-14}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{27}} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{14}{3}}.$$

2.6. Зная, что $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}| = 1$, угол между векторами $\frac{2}{3}\pi$, определить, при каком α векторы $\overline{p} = \alpha\,\overline{a} + 2\overline{b}$ и $\overline{q} = 3\overline{a} - \overline{b}$ окажутся перпендикулярными.

Решение. Воспользуемся условием перпендикулярности двух векторов:

$$(\overline{p}, \overline{q}) = 0 \Rightarrow (\alpha\,\overline{a} + 2\overline{b},\ 3\overline{a} - \overline{b}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\alpha \cdot |\overline{a}|^2 - \alpha \cdot (\overline{a}, \overline{b}) + 6 \cdot (\overline{b}, \overline{a}) - 2 \cdot |\overline{b}|^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\alpha \cdot 16 - \alpha \cdot 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = 0.$$

Получили линейное уравнение относительно α:

$$50\alpha = 14 \Rightarrow \alpha = \frac{7}{25}.$$

Ответ. $\alpha = 7/25$.

2.7. Даны три силы $\overline{F_1} = (2, -1, 1)$, $\overline{F_2} = (3, 0, -1)$ и $\overline{F_3} = (4, 1, 1)$, приложенные к точке M_1 (2, –3, 1). Найти работу, которую производит равнодействующая данных сил, если точка приложения силы, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки M_1 в точку M_2 (4, 1, 2).

Решение. $A = (\overline{F}, \overline{S})$, где $\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3}$, $\overline{S} = \overrightarrow{M_1M_2}$. Найдем координаты $\overline{F}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$: $\overline{F} = (9, 0, 1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (2, 4, 1)$. Используя вычислительную формулу для скалярного произведения, получим

$$A = (\overline{F}, \overrightarrow{M_1M_2}) = 18 + 0 + 1 = 19 \text{ (ед. работы)}.$$

3. Банк задач для самостоятельной работы

3.1. В декартовой системе координат заданы точки A (5, –3, 4) и B (7, –4, 2). Построить в системе координат вектор $\overrightarrow{AB}$, найти его длину и орт $\overrightarrow{AB_0}$.

Ответ. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3$, $\overrightarrow{AB_0} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

3.2. Заданы векторы $\overline{a} = 5\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$ и $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$. Вычислить $(\overline{a}, \overline{b})$.

Ответ. 6.

3.3. Заданы векторы

$$\overline{a} = \overline{m} + 4\overline{n}, \quad \overline{b} = 2\overline{m} - \overline{n}, \quad |\overline{m}| = 2, \quad |\overline{n}| = 1, \quad (\overline{m}, \hat{\ } \overline{n}) = \frac{2}{3}\pi.$$

Вычислить $(\overline{a}, \overline{b})$.

Ответ. –3.

3.4. Заданы векторы $\overline{a} = (4, -2, 4)$ и $\overline{b} = (6, -3, 2)$. Вычислить $(2\overline{a} - 3\overline{b}, \overline{a} + 2\overline{b})$.

Ответ. –200.

3.5. Даны три вектора

$$\overline{a} = (3, -5, 1), \quad \overline{b} = (-1, 1, 4), \quad \overline{c} = (4, 4, -2).$$

Найти $\text{Пр}_{\overline{c}}(3\overline{a} - 2\overline{b})$.

Ответ. $-\frac{7}{3}$.

3.6. Заданы координаты вершин треугольника A (3, 4, 1), B (5, 5, 3) и C (4, 5, 1). Найти внутренний угол при вершине A и внешний угол при вершине C.

Ответ. $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$; $\cos\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

3.7. Найти длину вектора $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, если

$$\left|\overline{a}\right| = 1, \ \left|\overline{b}\right| = 2, (\overline{a}, \hat{\ } \overline{b}) = \frac{\pi}{3}.$$

Ответ. $\sqrt{7}$.

3.8. Даны два вектора

$\overline{a} = -3\overline{m} + 2\overline{n}$, $\overline{b} = \overline{m} + \overline{n}$, $\left|\overline{m}\right| = 1$, $\left|\overline{n}\right| = 2$, $(\overline{m}, \hat{\ } \overline{n}) = \dfrac{2}{3}\pi$.

Найти $\text{Пр}_{\overline{b}}\, \overline{a}$.

Ответ. $2\sqrt{3}$.

3.9. Найти угол между векторами $\overline{a} = 2\overline{p} + 4\overline{q}$ и $\overline{b} = \overline{p} - \overline{q}$, где $\overline{p}$ и $\overline{q}$ единичные векторы, угол между которыми равен 120°.

Ответ. 120°.

3.10. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах

$$\overline{a} = 2\overline{m} + \overline{n}, \ \overline{b} = 2\overline{m} - \overline{n},$$

если $\left|\overline{m}\right| = 1$, $\left|\overline{n}\right| = \sqrt{2}$, $(\overline{m}, \hat{\ } \overline{n}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Ответ. 45°.

3.11. Найти угол между биссектрисами координатных углов XOY и YOZ.

Ответ. $\varphi = 60°$.

3.12. При каком λ векторы $\overline{a} = 3\overline{m} + \lambda\overline{n}$ и $\overline{b} = 4\overline{m} - 5\overline{n}$ будут перпендикулярны, если $\left|\overline{m}\right| = 2$, $\left|\overline{n}\right| = 1$, $(\overline{m}, \hat{\ } \overline{n}) = \dfrac{2}{3}\pi$?

Ответ. $\lambda = 7$.

3.13. В точке M_1 (2, 1, −1) приложены силы $\overline{F_1} = (3,-4,2)$ и $\overline{F_2} = (1,5,0)$. Найдите работу, которую производит равнодействующая этих сил, если точка приложения силы, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки M_1 в точку $M_2(4, 1, 1)$.

Ответ. 12 (ед. работы).

3.14. В вершине параллелепипеда, ребра которого равны 4, 4 и 8, приложены две силы (рис. 10). Найти величину и направление равнодействующей этих сил, если $\left|\overline{F}\right| = \sqrt{2}$, $\left|\overline{Q}\right| = \sqrt{5}$.

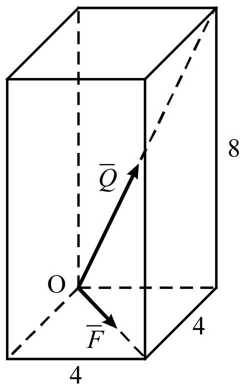


Рис. 10

Ответ. $\left|\overline{R}\right| = 3$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$.

3.15. Найти проекцию вектора $\overline{a} = \sqrt{8}\,\overline{i} + 5\overline{j} - 7\overline{k}$ на ось, составляющую с координатными осями OX и OY углы $\alpha = 45°$ и $\beta = 60°$, а с осью OZ тупой угол.

Ответ: 8.

ТЕМА 3. **Векторное произведение векторов**

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Какая тройка некомпланарных векторов называется правоориентированной?

Определение. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$, отнесенных к одному началу, называется правоориентированной (правой), если кратчайший поворот от $\bar{l}_1$ к $\bar{l}_2$ виден из конца вектора $\bar{l}_3$ происходящим против часовой стрелки. Если такой поворот из конца $\bar{l}_3$ виден происходящим по часовой стрелке, то $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ называют левоориентированной тройкой векторов.

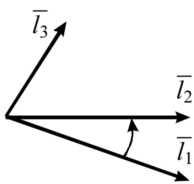


Рис. 1

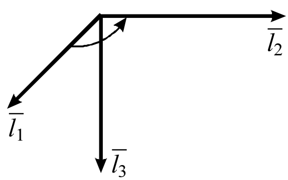


Рис. 2

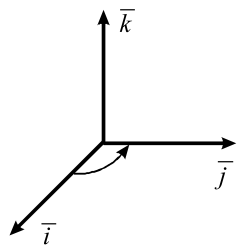


Рис. 3

На рис. 1 изображена правоориентированная тройка векторов $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$, на рис. 2 – левоориентированная, тройка векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ (рис. 3) – правоориентированная.

1.2. Определение векторного произведения векторов

Определение. Векторным произведением двух неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, удовлетворяющий трем условиям:

1) $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$;

2) вектор $\overline{c}$ направлен так, чтобы тройка векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ была правоориентированной;

3) $|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Для векторного произведения принято обозначение $\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}]$. Векторное произведение изображено на рис. 4 – 6.

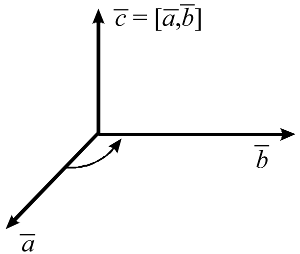


Рис. 4

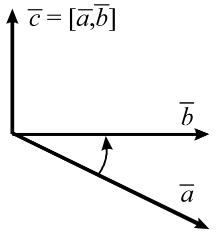


Рис. 5

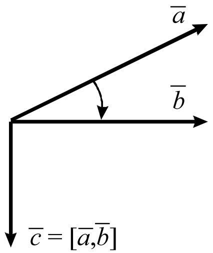


Рис. 6

1.3. Свойства векторного произведения

1) $[\overline{a}, \overline{b}] = -[\overline{b}, \overline{a}]$;

2) $[\lambda\,\overline{a}, \overline{b}] = \lambda\,[\overline{a}, \overline{b}], \quad \lambda \in R$;

3) $[\overline{a} + \overline{b}, \overline{d}] = [\overline{a}, \overline{d}] + [\overline{b}, \overline{d}]$;

4) величина $|[\overline{a}, \overline{b}]|$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

5) $[\overline{i}, \overline{i}] = [\overline{j}, \overline{j}] = [\overline{k}, \overline{k}] = \overline{0}$,

$[\overline{i}, \overline{j}] = \overline{k}$, $[\overline{j}, \overline{k}] = \overline{i}$, $[\overline{k}, \overline{i}] = \overline{j}$.

Свойства 1 – 5 рекомендуется доказать самостоятельно.

1.4. Имеет ли векторное произведение приложения в курсах физики и механики?

Приведем примеры некоторых приложений векторного произведения.

1. В курсе механики используется векторная величина, которая называется моментом силы $\overline{F}$ относительно неподвижной точки O некоторого твердого тела (рис. 7):

$$\overline{\mathrm{mom}_O \overline{F}} = [\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overline{F}]. \qquad (1)$$

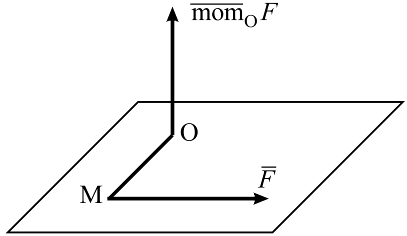


Рис. 7

2. Линейная скорость $\overline{V}$ точки, вращающейся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\overline{\varpi}$, есть векторное произведение вектора $\overline{\varpi}$ и радиуса-вектора $\overline{R}$ этой точки, т.е.

$$\overline{V} = [\overline{\varpi}, \overline{R}]. \qquad (1')$$

1.5. Можно ли найти координаты вектора $\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}]$, если в некоторой декартовой системе координат известны координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$?

Да, можно. Пусть

$$\overline{a} = x_1 \overline{i} + y_1 \overline{j} + z_1 \overline{k}, \overline{b} = x_2 \overline{i} + y_2 \overline{j} + z_2 \overline{k}.$$

Тогда имеет место формула

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \overline{k} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Покажем, как получена эта формула:

$$\left[\overline{a},\overline{b}\right] = [x_1\,\overline{i} + y_1\,\overline{j} + z_1\,\overline{k},\quad x_2\,\overline{i} + y_2\,\overline{j} + z_2\,\overline{k}] =$$

$$= x_1x_2[\overline{i},\overline{i}] + x_1y_2[\overline{i},\overline{j}] + x_1z_2[\overline{i},\overline{k}] + y_1x_2[\overline{j},\overline{i}] + y_1y_2[\overline{j},\overline{j}] + y_1z_2[\overline{j},\overline{k}] +$$

$$+ z_1x_2[\overline{k},\overline{i}] + z_1y_2[\overline{k},\overline{j}] + z_1z_2[\overline{k},\overline{k}] = x_1y_2\,\overline{k} - x_1z_2\,\overline{j} - y_1x_2\,\overline{k} + y_1z_2\,\overline{i} +$$

$$+ z_1x_2\,\overline{j} - z_1y_2\,\overline{i} = (y_1z_2 - z_1y_2)\overline{i} - \overline{j}\,(x_1z_2 - z_1x_2) + \overline{k}\,(x_1y_2 - y_1x_2) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\overline{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\overline{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\overline{k} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

1.6. Перечислите свойства векторного произведения, которые были использованы при выводе формулы (2)

Использованы свойства 3, 2, 5 и 1.

2. Решение задач

2.1. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол $\dfrac{\pi}{6}$, $\left|\overline{a}\right| = \dfrac{1}{5}$, $\left|\overline{b}\right| = 2$. Вычислить $\left|[\overline{a} + 3\overline{b},\ 3\overline{a} - \overline{b}]\right|$.

Решение.

$[\overline{a} + 3\overline{b}, 3\overline{a} - \overline{b}] = 3[\overline{a},\overline{a}] - [\overline{a},\overline{b}] + 9[\overline{b},\overline{a}] - 3[\overline{b},\overline{b}] = -10[\overline{a},\overline{b}]$;

$\left|[\overline{a} + 3\overline{b},\ 3\overline{a} - \overline{b}]\right| = \left|-10[\overline{a},\overline{b}]\right| = 10\left|\,\overline{a}\,\right|\left|\,\overline{b}\,\right|\sin\dfrac{\pi}{6} = 10 \cdot \dfrac{1}{5} \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 2$.

Ответ. 2.

2.2. Даны вершины треугольника A (5, –6, 2), B (1, 3, –1), C (1, –1, 2). Найти длину высоты треугольника, опущенную из вершины A (рис. 8).

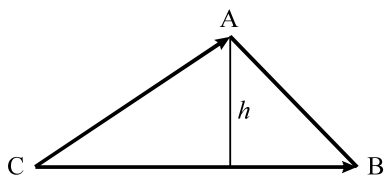


Рис. 8

Решение.

$$S_\Delta = \frac{1}{2} h \cdot \left| \overrightarrow{\mathrm{CB}} \right| \Rightarrow h = \frac{2S_\Delta}{\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|} = \frac{S}{\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|},$$

где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$, $S = \left| \left[\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}} \right] \right|$. Векторное произведение $[\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}}]$ найдем по формуле (2). Чтобы воспользоваться формулой (2), найдем координаты векторов $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (4, -5, 0), \quad \overrightarrow{\mathrm{CB}} = (0, 4, -3).$$

Тогда

$$[\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 15\bar{i} + 12\bar{j} + 16\bar{k} \Rightarrow \mathrm{S} = \left| 15\bar{i} + 12\bar{j} + 16\bar{k} \right| = \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} =$$

$$= \sqrt{625} = 25.$$

Найдем $\left| \overrightarrow{\mathrm{CB}} \right| = \sqrt{16+9} = 5 \Rightarrow h = \frac{25}{5} = 5.$

Ответ. $h = 5$.

2.3. Найти площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $5\bar{m} + \bar{n}$ и $\bar{m} - 3\bar{n}$, причем $\left|\bar{m}\right| = 1$, $\left|\bar{n}\right| = 2$, $(\bar{m}, ^{\Lambda}\, \bar{n}) = \frac{\pi}{6}$ (рис. 9).

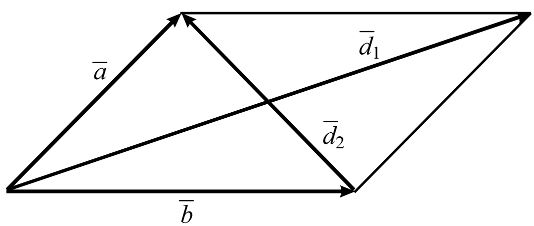


Рис. 9

Решение. $S = \left|[\overline{a},\overline{b}]\right|$.

Составим систему для нахождения $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$\begin{cases}\overline{a}+\overline{b}=\overline{d}_1\\ \overline{a}-\overline{b}=\overline{d}_2\end{cases} \Rightarrow\ \overline{b}=\frac{\overline{d}_1-\overline{d}_2}{2}=\frac{4\overline{m}+4\overline{n}}{2}=2\overline{m}+2\overline{n};$$

$$\overline{a}=\frac{\overline{d}_1+\overline{d}_2}{2}=3\overline{m}-\overline{n};$$

$$[\overline{a},\overline{b}]=[3\overline{m}-\overline{n},\ 2\overline{m}+2\overline{n}]=6[\overline{m},\overline{m}]+6[\overline{m},\overline{n}]-2[\overline{n},\overline{m}]-2[\overline{n},\overline{n}]=$$

$$=8[\overline{m},\overline{n}];$$

$$S=\left|8[\overline{m},\overline{n}]\right|=8\left|\overline{m}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|\sin\frac{\pi}{6}=8\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}=8.$$

Ответ. $S = 8$ (кв. ед.).

2.4. При каком значении λ векторы $\overline{p}=\lambda\,\overline{a}+3\overline{b}$ и $\overline{q}=2\overline{a}-\overline{b}$ будут коллинеарны, если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны?

Решение. Векторы $\overline{p}$ и $\overline{q}$ будут коллинеарны при условии $[\overline{p},\overline{q}]=\overline{0}$. Найдем $[\overline{p},\overline{q}]$:

$$[\overline{p},\overline{q}]=[\alpha\,\overline{a}+3\overline{b},\ 2\overline{a}-\overline{b}]=2\alpha[\overline{a},\overline{a}]+6[\overline{b},\overline{a}]-3[\overline{b},\overline{b}]-\alpha[\overline{a},\overline{b}]=$$

$$=-\alpha[\overline{a},\overline{b}]-6[\overline{a},\overline{b}]=(-\alpha-6)\cdot[\overline{a},\overline{b}].$$

Так как по условию $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны, $[\overline{a},\overline{b}]\neq\overline{0}$. Таким образом, $[\overline{p},\overline{q}]=\overline{0}$ при условии, что $(-\alpha-6)=0\Rightarrow\alpha=-6$.

Ответ. $\alpha=-6$.

2.5. Сила $\overline{F}=(5,6,-1)$ приложена к точке A (0, 3, –4). Определить величину и направление момента силы $\overline{\mathrm{F}}$ относительно точки B (1, 2, –2).

Решение. По формуле (1) $\overline{\mathrm{mom}_{\mathrm{B}}\overline{F}}=[\overrightarrow{\mathrm{BA}},\overline{F}]$.

Найдем координаты $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = (-1, 1, -2)$. По формуле (2)

$$\overline{\mathrm{mom}_\mathrm{B}}\,\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 11\overline{i} - 11\overline{j} - 11\overline{k},$$

$$\left|\overline{\mathrm{mom}_\mathrm{B}}\,\overline{F}\right| = \sqrt{11^2 + 11^2 + 11^2} = 11\sqrt{3}.$$

Найдем направляющие косинусы вектора $\overline{\mathrm{mom}_\mathrm{B}}\,\overline{F}$:

$$\cos\alpha = \frac{11}{11\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ. $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos\beta = \cos\gamma = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

2.6. Найти вектор $\overline{x}$, перпендикулярный векторам $\overline{a} = (2, 1, 2)$ и $\overline{b} = (0, 2, 2)$, если известно, что $|\overline{x}| = 12$ и он образует с осью OY тупой угол.

Решение. Так как по условию $\overline{x} \perp \overline{a}$ и $\overline{x} \perp \overline{b}$, вектор $\overline{x}$ будет коллинеарен вектору $\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}]$. Найдем $\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}]$ по формуле (2):

$$\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\overline{i} - 4\overline{j} + 4\overline{k}.$$

Так как $\overline{x}$ и $\overline{c}$ коллинеарны, $\overline{x} = \lambda\,\overline{c} \Rightarrow \overline{x} = (-2\lambda, -4\lambda, 4\lambda)$. Величину λ найдем из условия

$$|\overline{x}| = 12 \Rightarrow \sqrt{4\lambda^2 + 16\lambda^2 + 16\lambda^2} = 12 \Rightarrow 6|\lambda| = 12, \ \lambda = \pm 2.$$

Так как по условию задачи ордината вектора $\overline{x}$ должна быть отрицательной, $\lambda = 2$.

Ответ. $\overline{x} = (-4, -8, 8)$.

3. Банк задач для самостоятельной работы

3.1. Найти $\left|\left[2\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k},\ 2\overline{j}+2\overline{k}\right]\right|$.

Ответ. 6.

3.2. Вычислить $\left|\left[3\overline{a}+4\overline{b},\ \overline{a}-\overline{b}\right]\right|$, если

$$\left|\overline{a}\right|=\frac{1}{7},\quad \left|\overline{b}\right|=4,\quad (\overline{a},^{\Lambda}\overline{b})=\frac{5}{6}\pi .$$

Ответ. 2.

3.3. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=2\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$ и $\overline{b}=3\overline{j}-2\overline{k}$.

Ответ. $\sqrt{53}$.

3.4. Найти площадь треугольника с вершинами в точках

A (–1, 2, 3), B (1, 3, 5), C (–1, 4, 5).

Ответ. 3.

3.5. Даны вершины треугольника

A (7, 3, 4), B (1, 0, 6), C (4, 5, –2).

Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины C.

Ответ. 7.

3.6. Найти площадь и высоту параллелограмма, построенного на векторах

$$\overline{a}=5\overline{m}+\overline{n}\quad \text{и}\quad \overline{b}=\overline{m}-3\overline{n}\ ,$$

если
$$\left|\overline{m}\right|=1,\ \left|\overline{n}\right|=2\ ,\ (\overline{m},^{\Lambda}\overline{n})=\frac{\pi}{3}\ .$$

Ответ. $S=16\sqrt{3}$, $h=2\sqrt{11}$.

3.7. Даны $\left|\overline{a}\right|=4$, $\left|\overline{b}\right|=5$, $\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|=15$. Вычислить $(\overline{a},\overline{b})$.

Ответ. $5\sqrt{7}$.

3.8. Векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ связаны соотношением $[\overline{a}, \overline{c}] = [\overline{a}, \overline{d}]$ и $[\overline{b}, \overline{c}] = [\overline{b}, \overline{d}]$. Доказать, что векторы $\overline{a} - \overline{b}$ и $\overline{c} - \overline{d}$ коллинеарны.

3.9. Даны три силы:

$$\overline{F_1} = (11, 5, -4), \quad \overline{F_2} = (6, 9, 5) \quad \text{и} \quad \overline{F_3} = (-9, 3, 0),$$

приложенные к точке A (2, –1, 3). Найти величину и направление момента равнодействующей этих сил относительно точки B (–1, 0, 2).

Ответ. $\left| \overline{\mathrm{mom}_{\mathrm{B}} \overline{F}} \right| = 5\sqrt{2}$.

3.10. Найти вектор $\overline{x}$, перпендикулярный векторам

$$\overline{a} = (2, 1, 2) \quad \text{и} \quad \overline{b} = (3, -4, 2)$$

при условии, что $|\overline{x}| = 45$ и он образует острый угол с осью OZ.

Ответ. $\overline{x} = (-30, -6, 33)$.

ТЕМА 4. **Смешанное произведение векторов**

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Определение смешанного произведения трех векторов

Определение. Смешанным произведением трех векторов называется скалярное произведение векторного произведения двух первых векторов на третий вектор.

Для смешанного произведения принято обозначение $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$. Таким образом, по определению

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=([\overline{a},\overline{b}],\overline{c}).$$

1.2. Скалярной или векторной величиной является смешанное произведение?

Из определения следует, что смешанное произведение – это число.

1.3. Свойства смешанного произведения

1. Абсолютная величина $\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|$ смешанного произведения некомпланарных векторов численно равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

Докажем свойство 1. Введем обозначение $[\overline{a},\overline{b}]=\overline{d}$. По определению векторного произведения $\overline{d}\perp\overline{a}$, $\overline{d}\perp\overline{b}$ и направлен так, как показано на рис. 1.

По определению $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=([\overline{a},\overline{b}],\overline{c})=(\overline{d},\overline{c})$. По определению скалярного произведения $(\overline{d},\overline{c})=\left|\overline{d}\right|\cdot\left|\overline{c}\right|\cos\alpha$, а по определению векторного произведения $|\overline{d}|=S$ – площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Таким образом, $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = S\cdot|\overline{c}|\cos\alpha$, но $|\overline{c}|\cos\alpha = H$, H – высота параллелепипеда. Окончательно будем иметь $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = S\cdot H \Rightarrow (\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = V$, где V – объем параллелепипеда. На рис. 1 $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ – правоориентированная тройка векторов, если бы тройка $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ была левоориентированной, тогда $\cos\alpha$ был бы отрицательным и $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = -V$.

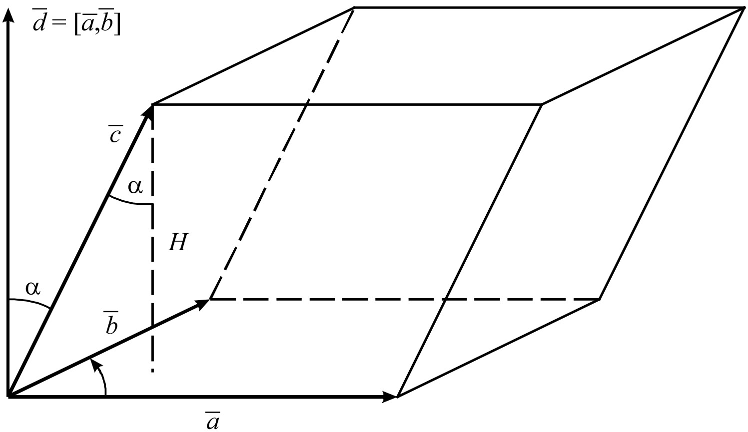


Рис.1

Таким образом, $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \pm V$, знак плюс, если тройка векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ правая и минус, если $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ левоориентированная тройка векторов.

2. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов, т.е.

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = (\overline{b},\overline{c},\overline{a}) = (\overline{c},\overline{a},\overline{b}),$$

и изменяет знак при перестановке двух векторов, т.е.

$$(a,b,c) = -(b,a,c) = -(a,c,b) = -(\overline{c},\overline{b},\overline{a}).$$

3. Смешанное произведение равно 0 тогда и только тогда, когда векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны.

1.4. Выражение смешанного произведения через координаты его сомножителей в декартовой системе координат

Если

$$\overline{a} = x_1 \overline{i} + y_1 \overline{j} + z_1 \overline{k}, \quad \overline{b} = x_2 \overline{i} + y_2 \overline{j} + z_2 \overline{k},$$
$$\overline{c} = x_3 \overline{i} + y_3 \overline{j} + z_3 \overline{k},$$

тогда имеет место формула

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Формулу (1) рекомендуется получить самостоятельно, используя определение смешанного произведения и вычислительные формулы для векторного и скалярного произведений векторов.

Заметим, что из формулы (1) очевидным образом следуют свойства 2 и 3 смешанного произведения.

2. Решение задач

2.1. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, если

$$|\overline{a}| = 2, \quad |\overline{b}| = 4, \quad |\overline{c}| = 5,$$

$$\alpha = (a,^\wedge b) = 60°, \ \beta = ([a,b],^\Lambda c) = 150°.$$

Решение. $V = \left|(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})\right|$.

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = ([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}) = \left|[\overline{a}, \overline{b}]\right| \cdot |\overline{c}| \cos\beta = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \sin\alpha \cdot |\overline{c}| \cos\beta .$$

Используя данные задачи, будем иметь

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = 2\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 5\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -30 \Rightarrow V = \left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right| = 30.$$

Ответ. $V = 30$.

2.2. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{c} = 2\overline{i} - \overline{k}$.

Решение. Так как векторы заданы в декартовой системе координат, воспользуемся формулой (1):

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 11 \Rightarrow V = 11.$$

Ответ. $V = 11$.

2.3. Выяснить аналитически и геометрически, какой является заданная тройка векторов $\overline{a} = 4\overline{i} + \overline{j}$, $\overline{b} = i - 3\overline{j}$, $\overline{c} = -2\overline{j} + 4\overline{k}$.

Решение. Выясним знак $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$:

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -52 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overline{a},\overline{b},\overline{c}$ – левоориентированная тройка векторов.

Убедимся в этом геометрически.

Кратчайший поворот от $\overline{a}$ к $\overline{b}$ из конца вектора $\overline{c}$ виден происходящим по часовой стрелке, следовательно, $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ – левоориентированная тройка векторов (рис. 2).

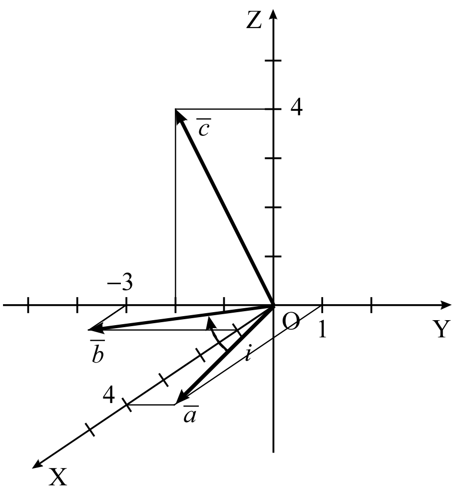


Рис. 2

2.4. Даны вершины пирамиды A (–4, 2, 6), B (2, –3, 0), C (–10, 5, 8) и D (–5, 2, –4). Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной из вершины D (рис. 3).

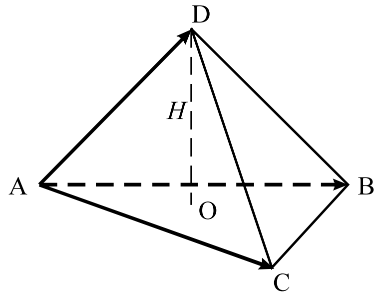


Рис. 3

Решение. Из школьного курса известно, что объем пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, равен 1/6 от объема параллелепипеда, построенного на тех же векторах.

Таким образом, $V_{\text{пир}} = \dfrac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB} = (6, -5, -6)$, $\overrightarrow{AC} = (-6, 3, 2)$, $\overrightarrow{AD} = (-1, 0, -10)$.

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 6 & -5 & -6 \\ -6 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -10 \end{vmatrix} = 112. \qquad V_{\text{пир}} = \frac{112}{6} = \frac{56}{3}.$$

Из курса школьной геометрии известно, что

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H \Rightarrow H = \frac{3V_{\text{пир}}}{S_{\Delta\,\text{ABC}}},$$

$$S_{\Delta\text{ABC}} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right|,$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 6 & -5 & -6 \\ -6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8\bar{i} + 24\bar{j} - 12\bar{k}.$$

$$\text{S}_{\Delta\,\text{ABC}} = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 24^2 + 12^2} = 2\sqrt{4 + 36 + 9} = 14.$$

Таким образом, $H = \dfrac{56}{14} = 4$.

Ответ. $\text{V} = \dfrac{56}{3}$, $H = 4$.

2.5. Убедиться, что точки A (0, 0, 5), B (2, 1, 6), C (3, 2, 5) и D (3, –1, 14) лежат в одной плоскости и получить разложение вектора $\overrightarrow{BD}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Решение. Очевидно, точки будут лежать в одной плоскости, если векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$ будут компланарны. Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BA}=(-2,-1,-1)$, $\overrightarrow{BC}=(1,1,-1)$, $\overrightarrow{BD}=(1,-2,8)$. Напомним, что $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=0$. Найдем $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})$:

$$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})=\begin{vmatrix}-2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 8\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}$ – компланарны.

Осталось найти α и β, при которых $\overrightarrow{BD}=\alpha\overrightarrow{BA}+\beta\overrightarrow{BC}$.

Приравнивая соответствующие координаты векторов этого равенства, получим систему, которой должны удовлетворять α и β:

$$\begin{cases}1=-2\alpha+\beta,\\ -2=-\alpha+\beta,\\ 8=-\alpha-\beta,\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}1=-2\alpha+\beta,\\ 6=-2\alpha,\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}\alpha=-3,\\ \beta=-5.\end{matrix}$$

Ответ. $\overrightarrow{BD}=-3\overrightarrow{BA}-5\overrightarrow{BC}$.

2.6. Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}+\overline{c}$, $\overline{c}-3\overline{b}$ и $\overline{a}+\overline{b}$ в два раза больше объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$.

Решение. $V_1=\left|(\overline{a}+\overline{c},\ \overline{c}-3\overline{b},\ \overline{a}+\overline{b})\right|$, $V_2=\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|$. Воспользуемся определением и свойствами смешанного произведения:

$$(\overline{a}+\overline{c},\ \overline{c}-3\overline{b},\ \overline{a}+\overline{b})=([\overline{a}+\overline{c},\ \overline{c}-3\overline{b}],\overline{a}+\overline{b})=$$

$$=([\overline{a},\overline{c}]-3[\overline{a},\overline{b}]+[\overline{c},\overline{c}]-3[\overline{c},\overline{b}],\overline{a}+\overline{b})=$$

$$=(\overline{a},\overline{c},\overline{a})+(\overline{a},\overline{c},\overline{b})-3(\overline{a},\overline{b},\overline{a})-3(\overline{a},\overline{b},\overline{b})-3(\overline{c},\overline{b},\overline{a})-3(\overline{c},\overline{b},\overline{b})=$$

$$=(\overline{a},\overline{c},\overline{b})-3(\overline{c},\overline{b},\overline{a})=-(\overline{a},\overline{b},\overline{c})+3(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=2(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\Rightarrow V_1=2V_2.$$

3. Банк задач для самостоятельной работы

3.1. Доказать компланарность векторов

$$\overline{a}=(2,-1,1),\ \overline{b}=(0,1,3)\ \text{ и }\ \overline{c}=(4,-1,5).$$

3.2. Аналитически и геометрически покажите, что

$$\overline{a}=2\overline{i}+\overline{j}+\overline{k},\ \ \overline{b}=\overline{j}+\overline{k},\ \ \overline{c}=3\overline{j}-\overline{k}$$

– левоориентированная тройка векторов.

3.3. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}=2\overline{i}-\overline{j}$, $\overline{b}=\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{c}=3\overline{i}-\overline{j}$.

Ответ. 1.

3.4. Даны вершины пирамиды

A (1, 2, –1), B (0, 1, 5), C (0, 4, –1), D (3, 2, 1).

Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань ABD.

Ответ. $V=6,\ \ H=\dfrac{15}{\sqrt{51}}$.

3.5. Объем треугольной пирамиды равен 2, три его вершины находятся в точках A (–1, 1, 1), B (1, 2, 1), C (7, 12, 3). Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси OY.

Ответ. D_1 (0, 1, 0), D_2 (0, –5, 0).

3.6. Показать, что точки

A (3, 0, 1), B (3, 2, 2), C (–2,–1,3), D (2, 7, 5)

лежат в одной плоскости и разложить вектор $\overrightarrow{AC}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Ответ. $\overrightarrow{AC}=-18\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AD}$.

3.7. Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}-2\overline{b}$, $2\overline{a}-3\overline{c}$ и $a+\overline{b}-2\overline{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

Обзорные задания по разделу «Векторная алгебра»

1. Найти угол при вершине равнобедренного треугольника, если известно, что медианы, проведенные к равным сторонам треугольника, взаимно перпендикулярны.

Ответ. $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$.

2. Заданы длины 4, 6, 8 ребер пирамиды (рис. 4), у которой одно из ребер перпендикулярно плоскости основания. В точке O приложены силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, направленные по медианам граней и по величине совпадающие с длинами медиан. Найти момент равнодействующей этих сил относительно вершины C.

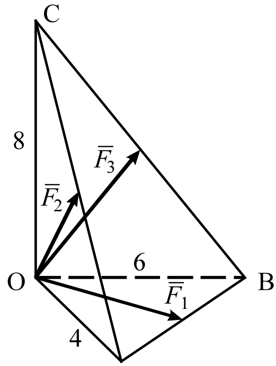


Рис. 4

Ответ. $\overline{\mathrm{mom}_C \overline{F}} = 2\sqrt{13}$.

3. Заданы вершины треугольника

A (2, 1, 4), B (6, –2, 4), C (2, –2, 4).

Требуется:

1) Доказать, что треугольник прямоугольный.

2) Найти его катеты и гипотенузу и в правильности полученного результата убедиться с помощью теоремы Пифагора.

3) Найти проекции катетов на гипотенузу.

4) Убедиться, что перпендикуляр, опущенный на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.

4. Даны вершины треугольника A (1, –3, –2), B (3, 5, 7), C (–1, 5, –3). Найти координаты точки D пересечения медиан треугольника.

Ответ. $D\left(1, \dfrac{7}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

5. Найти проекцию вектора $\overline{a} = (4, -3, 2)$ на ось, составляющую равные острые углы с осями координат.

Ответ. $\sqrt{3}$.

6. Задайте координаты точек A, B, C, D в некоторой декартовой системе координат так, чтобы точки не оказались в одной плоскости. Найдите:

1) Объем пирамиды ABCD.
2) Высоту пирамиды, опущенную из вершины D.
3) Проекцию ребра AD на ребро AB.
4) Проекцию ребра AD на грань ABC.
5) Плоские углы боковых граней при вершине D пирамиды.
6) Площадь боковой поверхности пирамиды.

7. Приведите примеры пары коллинеарных и пары взаимно перпендикулярных векторов, заданных своими координатами. К паре ортогональных векторов добавьте третий вектор, такой, чтобы все три оказались компланарными.

8. Задайте в декартовой системе координат четыре вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ и найдите

$$\overline{a} \cdot (\overline{b}, \overline{c}), \quad [\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]], \quad ([\overline{a}, \overline{b}], \overline{d}),$$

$$([\overline{a}, \overline{b}], [\overline{c}, \overline{d}]), \quad (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}], [\overline{a}, \overline{d}]).$$

ТЕМА 5. Линейные преобразования. Собственные векторы и собственные числа линейного преобразования. Приведение квадратичной формы к главным осям

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Что называют отображением линейного пространства L_1 в линейное пространство L_2?

Определение. Говорят, что задано отображение (преобразование) f линейного пространства L_1 в L_2, если по некоторому закону каждому вектору x из L поставлен в соответствие y из L_2. Принята запись f: $L_1 \to L_2$.

1.2. Что называют преобразованием линейного пространства L?

В частном случае, когда задано отображение $f: \ L \to L$, его называют преобразованием линейного пространства L. В этом случае каждому вектору x из L ставится в соответствие вектор x', принадлежащий этому же пространству L.

1.3. В каком случае преобразование называется линейным?

Определение. Линейное преобразование или линейный оператор принято обозначать $\mathbf{A}$: $L \to L$. Преобразование $\mathbf{A}$ линейного пространства L называется линейным, если для любых векторов x и y из L и любого числа λ выполняются равенства

$$\mathbf{A}\,(x+y)=\mathbf{A}\,(x)+\mathbf{A}\,(y),\;\; \mathbf{A}\,(\lambda\, x)=\lambda\,\mathbf{A}\,(x),$$

где $\mathbf{A}\,(x+y)$, $\mathbf{A}\,(x)$, $\mathbf{A}\,(y)$ – образы векторов $(x+y)$, x и y, полученные в результате преобразования **A**.

1.4. Что можно сказать на основании данного определения о линейном преобразовании линейной комбинации векторов из L?

Очевидно, что при линейном преобразовании линейная комбинация векторов переходит в линейную комбинацию их образов с теми же коэффициентами, т.е.

$$\mathbf{A}\,(\lambda_1\, x+\lambda_2 y)=\lambda_1\cdot\mathbf{A}\,(x)+\lambda_2\,\mathbf{A}\,(y).$$

Пример 1. Пусть векторы линейного пространства L имеют вид

$$x=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},$$

где x_1, x_2, x_3 – некоторые числа, и пусть задана некоторая квадратная матрица B. Столбцу x ставится в соответствие столбец $y=\mathrm{B}\cdot x$. Такое преобразование будет линейным, так как в силу свойств операции умножения матриц будем иметь

$$\mathrm{B}\cdot(x+y)=\mathrm{B}\cdot x+\mathrm{B}\cdot y \quad \text{и} \quad B\cdot(\lambda\, x)=\lambda\cdot(B\cdot x).$$

Каким должен быть размер матрицы B?

Пример 2. Пусть L – множество многочленов, степень которых не превышает n (ранее было доказано, что L – линейное пространство). Преобразование **A**, которое сопоставляет каждому многочлену его производную, является линейным преобразованием, так как производная суммы равна сумме производных, а постоянный множитель можно выносить за знак производной. Кроме того, дифференцирование понижает степень многочлена, а значит, вновь полученный многочлен тоже будет принадлежать L.

1.5. Как найти координаты образа A (x), если в некотором базисе заданы координаты вектора x?

Пусть в L выбран базис $l_1, l_2, ... l_n$ и x из L представлен в виде

$$x = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + ... + \alpha_n l_n .$$

Тогда $$\mathbf{A}(x) = \alpha_1 \mathbf{A}(l_1) + \alpha_2 \mathbf{A}(l_2) + ... + \alpha_n \mathbf{A}(l_n) .$$

Так как $\mathbf{A}(l_1), \mathbf{A}(l_2), ..., \mathbf{A}(l_n)$ – векторы из L, то они тоже имеют свои координаты в базисе $l_1, l_2, ... l_n$:

$$\begin{cases} \mathbf{A}(l_1) = a_{11}\ l_1 + a_{21}\ l_2 + ... + a_{n1}\ l_n, \\ \mathbf{A}(l_2) = a_{12}\ l_1 + a_{22}\ l_2 + ... + a_{n2}\ l_n, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \mathbf{A}(l_n) = a_{1n}\ l_1 + a_{2n}\ l_2 + ... + a_{nn}\ l_n. \end{cases}$$

Тогда

$$\mathbf{A}(x) = \alpha_1 (a_{11} l_1 + a_{21} l_2 + ... + a_{n1} l_n) + \alpha_2 (a_{12} l_1 + a_{22} l_2 + ... + a_{n2} l_n) + ... +$$

$$+ \alpha_n (a_{1n} l_1 + a_{2n} l_2 + ... + a_{nn} l_n) = (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + ... + \alpha_n a_{1n}) l_1 +$$

$$+ (\alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + ... + \alpha_n a_{n2}) l_2 + ... + (\alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + ... + \alpha_n a_{nn}) l_n .$$

Запишем полученный результат в матричном виде:

$$\mathbf{A}(x) = \mathrm{A} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, координаты $\mathbf{A}(x)$ находятся по формуле

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\mathbf{11}} & a_{\mathbf{12}} \ldots a_{\mathbf{1}n} \\ a_{\mathbf{21}} & a_{\mathbf{22}} \ldots a_{\mathbf{2}n} \\ . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n\mathbf{1}} & a_{n\mathbf{2}} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}(x) = \beta_1\ l_1 + \beta_2\ l_2 + ... + \beta_n\ l_n .$$

Определение. Матрица

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей линейного преобразования **A** в базисе $l_1, l_2, \dots l_n$.

1.5. Какой особенностью обладает матрица линейного преобразования?

Столбцы матрицы A – координатные столбцы образов базисных векторов $l_1, l_2, \dots l_n$ при преобразовании **A**.

1.6. Собственные векторы и собственные числа линейного преобразования

Определение. Ненулевой вектор x называется собственным вектором линейного преобразования **A**, если существует число λ, такое, что

$$\mathbf{A}(x)=\lambda\, x\,.$$

Число λ называется собственным значением вектора x относительно линейного преобразования **A**.

Пример. Исходя из определения, убедиться, что вектор

$$x=\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

является собственным вектором линейного преобразования, матрица которого имеет вид

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\mathbf{A}(x)=\begin{pmatrix}5 & 6 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\ -2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36\\ -8\\ 4\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}9\\ -2\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow \lambda=4$$

– собственное значение вектора $x=\begin{pmatrix}9\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$.

1.7. Как находятся собственные числа линейного преобразования с заданной матрицей?

Пусть A – матрица линейного преобразования **A**. Тогда, если x – собственный вектор преобразования **A**, то $\mathrm{A}\cdot x=\lambda\, x$. Пусть E – единичная матрица того же размера, что и матрица A. Тогда $\mathrm{A}\, x=\lambda\, x$ можно переписать в виде

$$\mathrm{A}\, x=\lambda\,\mathrm{E}\, x\Rightarrow(\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{E})\, x=0\,.$$

Полученное соотношение представляет собой матричную запись однородной системы линейных уравнений. Как известно, такая система имеет нетривиальное решение при условии

$$\det(\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{E})=0\,.$$

Запишем это уравнение в виде

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\ \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2}\ \ldots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0\,.$$

Полученное уравнение называется характеристическим. Оно является уравнением степени n относительно λ. Решая это уравнение, найдем собственные значения линейного преобразования.

1.8. Как находятся собственные векторы линейного преобразования?

После того как найдены собственные значения, подставляя их поочередно в систему

$$(\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{E})\,x=0$$

и решая эту систему, найдем собственные векторы, отвечающие найденным собственным значениям. Запишем систему в развернутом виде

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}\ x_2+\ldots+a_{1n}\ x_n=0,\\ a_{21}\ x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\ldots+a_{2n}\ x_n=0,\\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\\ a_{n1}\ x_1+a_{n2}\ x_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0.\end{cases}$$

Так как определитель этой системы равен нулю, ранг матрицы из коэффициентов при неизвестных будет меньше числа неизвестных, то система будет иметь множество решений.

Пример. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, матрица которого имеет вид

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}5&6&3\\-1&0&1\\1&2&-1\end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}5-\lambda&6&3\\-1&-\lambda&1\\1&2&-1-\lambda\end{vmatrix}=0\,.$$

Решим это уравнение:

$$(5-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&1\\2&-1-\lambda\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}-1&1\\1&-1-\lambda\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-1&-\lambda\\1&2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(5-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2)-6\lambda+3(-2+\lambda)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(5-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-1)-3(\lambda+2)=(\lambda+2)(-\lambda^2+6\lambda-8)=0\,.$$

$\lambda_1=-2$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=4$ – собственные значения линейного оператора.

Система для нахождения собственных векторов имеет вид

$$\begin{cases} (5-\lambda)x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ \quad -x_1 - \lambda\, x_2 + x_3 = 0, \\ \quad x_1 + 2x_2 + (-1-\lambda)\, x_3 = 0. \end{cases}$$

1. Пусть $\lambda = \lambda_1 = -2$. Система примет вид

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как det A = 0, то rang A < 3. Минор $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, примем его за базисный минор , а x_3 – за свободное неизвестное. Решим систему:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = -x_3, \\ \quad x_1 + 2x_2 = -x_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_2 = -2x_3, \\ x_1 = -x_3 - 2x_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 = -x_3, \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = -1, \quad x_1 = 0$.

Множество собственных векторов, соответствующих числу $\lambda = -2$ будет иметь вид $\overline{b_1} = (0, -t, 2t)$, где $t \neq 0$.

2. Пусть $\lambda = \lambda_2 = 2$. Система для нахождения собственных векторов будет иметь вид

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ \quad x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{минор } \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Решим систему

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ \quad x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \end{cases}$$

в которой свободным неизвестным будет x_1:

$$\begin{cases} -2x_2 + x_3 = x_1, \\ \quad 2x_2 - 3x_3 = -x_1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0, \\ x_1 = -2x_2, \end{cases}$$

получим $\overline{b_2} = (-2t,\, t, 0)$, $t \neq 0$.

3. Полагая $\lambda = 4$, получим систему

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{минор} \quad \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

опуская первое уравнение, получим

$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \end{cases}$$

где x_3 – свободное неизвестное. Решая систему

$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 = -x_3, \\ x_1 + 2x_2 = 5x_3, \end{cases}$$

будем иметь $\quad x_2 = -2x_3, \quad x_1 = 9x_3$

и, следовательно, $\quad \overline{b_3} = (9t, -2t, t), \ t \neq 0$.

Ответ. $\overline{b_1} = (0, -t, 2t), \ t \neq 0$.

$\overline{b_2} = (-2t, t, 0), \ t \neq 0$

$\overline{b_3} = (9t, -2t, t), \ t \neq 0$.

1.9. Какими основными свойствами обладают собственные значения и собственные векторы?

1. Собственные значения линейного преобразования не изменяются при изменении базиса в L.

2. Любая линейная комбинация собственных векторов, соответствующих одному и тому же собственному значению, является также собственным вектором с тем же собственным значением.

3. Матрица линейного преобразования в базисе $l_1, l_2, ..., l_n$ имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда все векторы базиса – собственные векторы преобразования.

4. Если собственные векторы $x_1, x_2, ..., x_k$ соответствуют попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, то эти собственные векторы линейно независимы.

5. Если в n-мерном линейном пространстве линейное преобразование имеет n попарно различных собственных значений, то существует базис из собственных векторов этого преобразования.

6. Для всякого линейного преобразования, матрица которого симметрична, существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого линейного преобразования.

Последующие вопросы 1.10 – 1.12 связаны, в частности, с приложением теории собственных векторов к решению задач аналитической геометрии.

1.10. Определение квадратичной формы двух переменных

Квадратичной формой двух переменных называется однородный многочлен второй степени относительно этих переменных:

$$\mathrm{F}(x, y) = a_{11}\, x^2 + 2a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 .$$

При условии, что $a_{12} = a_{21}$, квадратичную форму можно записать в виде

$$\mathrm{F}(x, y) = a_{11}\, x^2 + a_{12}\, xy + a_{21}\, xy + a_{22}\, y^2 .$$

Тогда матрица A вида

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ где } a_{12} = a_{21},$$

называется матрицей квадратичной формы.

1.11. Какая квадратичная форма называется канонической?

Канонической называется квадратичная форма, содержащая только квадраты переменных, т.е. квадратичная форма вида

$$\mathrm{F}(x, y) = a_{11}\, x^2 + a_{22}\, y^2 .$$

При решении многих задач возникает необходимость приведения квадратичной формы к каноническому виду.

1.12. Как привести квадратичную форму к каноническому виду?

Так как матрица A квадратичной формы симметричная, то по свойству 6 собственных векторов существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов матрицы A.

Векторы ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называются главными осями квадратичной формы. Главные оси совпадают с ортонормированным базисом, состоящим из собственных векторов матрицы A, а канонические коэффициенты являются ее собственными числами. Таким образом, квадратичная форма имеет вид

$$\Phi(x', y') = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 .$$

Пример. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$\mathrm{F}(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 .$$

Решение. Матрица A данной квадратичной формы имеет вид

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения λ_1 и λ_2 этой матрицы, решая уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3;\ \lambda_2 = -1 .$$

Найдем собственные векторы $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$ матрицы, решая системы для соответствующих собственных значений.

Для $\lambda_1 = 3$ будем иметь

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_2 .$$

Пусть $x_1 = 1$, тогда $x_2 = -1$ и $\bar{l}_1 = (1;-1)$.

Для $\lambda_2 = -1$ система примет вид

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow l_2 = (1;1).$$

Если главные оси направить по векторам $\bar{l}_1 = (1;-1)$ и $\bar{l}_2 = (1;1)$, то в новом базисе квадратичная форма будет иметь канонический вид:

$$\Phi(x', y') = 3(x')^2 - (y')^2.$$

Если найти единичные собственные векторы

$$\bar{l}_1^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{и} \quad \bar{l}_2^0 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\},$$

то получим выражение новых координат через старые

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y),$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y).$$

2. Решение задач

2.1. Пусть в трехмерном линейном пространстве задан базис $l_1 = (1, 0, 0)$, $l_2 = (0, 1, 0)$, $l_3 = (0, 0, 1)$ и вектор $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в этом базисе. Рассмотрим преобразование **A** этого пространства, которое каждому вектору x ставит в соответствие вектор

$$y = (\alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_2 - \alpha_3, \ \alpha_1 + 3\alpha_3).$$

Очевидно, оператор **A** линейный. Требуется найти матрицу этого преобразования и образ вектора $z = (3, 5, -2)$ в этом базисе.

Решение. Чтобы получить матрицу A данного преобразования, необходимо найти координаты образов **A** (l_1), **A** (l_2) и **A** (l_3). По определению заданного линейного оператора будем иметь:

$$\mathbf{A}\,(l_1) = (1, 0, 1), \quad \mathbf{A}\,(l_2) = (-1, 2, 0), \quad \mathbf{A}\,(l_3) = (0, -1, 3).$$

Следовательно, $$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

– матрица заданного преобразования. Найдем **A** (z):

$$\mathbf{A}(\mathrm{z}) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{z} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{A}\,(z) = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2.2. В трехмерном линейном пространстве заданы два линейных преобразования своими матрицами:

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 - x_3, \\ x_2' = \phantom{2x_1 + {}} x_2 - 2x_3, \\ x_3' = x_1 + x_2 + 3x_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' = x_1' + 3x_2', \\ x_2'' = 2x_1' - x_2' + x_3', \\ x_3'' = \phantom{2x_1' - {}} 2x_2' - x_3'. \end{cases}$$

Найти преобразование, в результате которого вектор $x'' = (x_1'', x_2'', x_3'')$ выражается через вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Решение. Запишем заданные преобразования в матричном виде:

$$x' = \mathrm{A} \cdot x\,, \quad x'' = \mathrm{B} \cdot x' \Rightarrow x'' = \mathrm{B}(\mathrm{A} \cdot x) = (\mathrm{B} \cdot \mathrm{A}) \cdot x\,.$$

Найдем произведение матриц B · A:

$$\mathrm{B} \cdot \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 5 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Таким образом:

$$x_1'' = 2x_1 + 4x_2 - 7x_3,$$
$$x_2'' = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3,$$
$$x_3'' = -x_1 + x_2 - 7x_3.$$

2.3. Найти собственные векторы линейного преобразования с матрицей

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

и убедиться, что найденные собственные векторы образуют базис линейного пространства с заданным в нем линейным преобразованием (см. свойство 5 собственных векторов).

Решение. Запишем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решая его, получим

$$(4-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -\lambda \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0,$$

$$\lambda_1 = 4;\ \ \lambda_2 = 2;\ \ \lambda_3 = -1.$$

Запишем систему для нахождения собственных векторов:

$$\begin{cases} (4-\lambda)x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ \qquad\qquad -\lambda\, x_2 + x_3 = 0, \\ \qquad\qquad 2x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

При $\lambda_1 = 4$ будем иметь

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 0, \\ -4x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 - 3x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_2 = x_3 = 0, \\ x_1 - \text{любое}, \end{matrix} \quad \Rightarrow \ \overline{b_1} = (1, 0, 0).$$

При $\lambda_2 = 2$ получим

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ \quad\; - 2x_2 + x_3 = 0, \\ \quad\;\; 2x_2 - x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 2x_2, \\ x_1 = 0, \end{array} \Rightarrow \overline{b}_2 = (0, 1, 2).$$

При $\lambda_3 = -1$ будем иметь

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ \qquad x_2 + x_3 = 0, \\ \quad\; 2x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = -x_3, \\ x_1 = \dfrac{3}{5}x_3, \end{array} \Rightarrow \overline{b}_3 = (3, -5, 5).$$

Убедимся, что $\overline{b}_1$, $\overline{b}_2$, $\overline{b}_3$ линейно независимы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ векторы линейно независимы и образуют базис в R_3.

2.4. Найти собственные векторы симметричной матрицы

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

и убедиться в справедливости свойства 6 собственных векторов.

Решение. Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Найдем собственные значения:

$$(2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 4\lambda + 3) + 2(\lambda - 1) = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3) + 2(\lambda-1) =$$

$$= (\lambda-1)(-\lambda^2 + 5\lambda - 4) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1,\ \ \lambda_3 = 4.$$

При $\lambda=1$ будем иметь

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{x_1}=-x_2-x_3, \\ \underline{b_1}=(1,-1,0), \\ b_2=(1,1,-2). \end{array}$$

При $\lambda=4$ получим систему

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=0, \\ \quad x_1-2x_2+x_3=0, \\ \quad x_1+x_2-2x_3=0, \end{cases}$$

минор $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, примем этот минор за базисный, а x_3 – за свободное неизвестное. Получим систему

$$\begin{cases} x_1-2x_2=-x_3, \\ x_1+x_2=2x_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1=1, \\ x_2=1, \\ x_3=1, \end{array} \Rightarrow b_3=(1,\ 1,\ 1).$$

Таким образом,

$$\begin{array}{l} \overline{\underline{b_1}}=(1,-1,0), \\ \underline{b_2}=(1,1,-2),. \\ \overline{b_3}=(1,1,1). \end{array}$$

Легко убедиться, что все три вектора попарно ортогональны и линейно независимы, т.е. справедливо свойство 6 собственных векторов линейного преобразования с симметричной матрицей.

2.5. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$\mathrm{F}(x,y)=x^2+4xy+4y^2.$$

Решение. Матрица квадратичной формы имеет вид

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^2-5\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=5.$$

Найдем координаты соответствующих собственных векторов. Для $\lambda_1 = 0$ будем иметь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 = -2x_2 \Rightarrow \bar{l}_1 = (-2, 1).$$

При $\lambda_2 = 5$ получим

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ \quad 2x_1 - x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_2 = 2x_1 \Rightarrow \bar{l}_2 = (1, 2).$$

Заметим, что $\bar{l}_1 \perp \bar{l}_2$, так как это собственные векторы симметричной матрицы.

Если ось OX' направить по $\bar{l}_1$, а ось OY' по $\bar{l}_2$, то в новой системе координат квадратичная форма будет иметь вид

$$\Phi(x', y') = 0 \cdot x'^2 + 5y'^2 = 5y'^2.$$

3. Банк задач для самостоятельной работы

3.1. Пусть в R_2 задан базис $\bar{l}_1 = (1, 0)$ и $\bar{l}_2 = (0, 1)$ и вектор $\bar{x} = \alpha_1 \bar{l}_1 + \alpha_2 \bar{l}_2$ в этом базисе. Преобразование **A** заключается в том, что каждому вектору $\bar{x}$ ставится в соответствие вектор $\bar{y} = (2\alpha_1 - \alpha_2,\ 3\alpha_1 + 5\alpha_2)$. Найти матрицу такого преобразования.

Ответ. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

3.2. Линейный оператор **A** задан в R_3 по закону

$$\mathbf{A}(x) = (4\alpha_1, 2\alpha_1 + 2\alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3),$$

где $\bar{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в базисе $\bar{l}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{l}_2 = (0, 1, 0)$, $\bar{l}_3 = (0, 0, 1)$. Найти матрицу этого оператора и доказать, что вектор $\bar{b} = (0, 2, -1)$ является собственным вектором для этой матрицы.

3.3. В R_3 заданы два линейных преобразования:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = -x_1 + x_3, \\ y_3 = x_2 - x_3, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z_1 = 2y_1 + y_2, \\ z_2 = y_1 - y_2 - y_3, . \\ z_3 = \quad -y_2 + y_3. \end{cases}$$

Найти линейное преобразование, выражающее z_1, z_2, z_3 через x_1, x_2, x_3.

Ответ. $z_1 = x_1 + 2x_2 + 5x_3,$
$z_2 = 2x_1 + 2x_3,$
$z_3 = x_1 + x_2 - 2x_3.$

3.4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования с матрицей

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\lambda_1 = -3, \quad \overline{b_1} = (t, -t), \quad t \neq 0;$

$\lambda_2 = 7, \quad \overline{b_2} = (t, t), \quad t \neq 0.$

3.5. Найдите собственные векторы линейного преобразования с симметричной матрицей

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Убедитесь, что собственные векторы симметрической матрицы взаимно перпендикулярны.

Ответ. $\lambda_1 = 2, \ \overline{b_1} = (1, -2, 0);$

$\lambda_2 = 4, \ \overline{b_2} = (0, 0, 1);$

$\lambda_3 = 7, \ \overline{b_3} = (2, 1, 0).$

3.6. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования с матрицей

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\lambda_1 = 5$, $\overline{b_1} = (t, 0, 0)$, $t \neq 0$;

$\lambda_{2,3} = 1$, $\overline{b_2} = (-4t, t, t)$, $t \neq 0$.

3.7. Убедиться, что векторы $\overline{b_1} = (1, -1, 0)$ и $\overline{b_2} = (1, 1, -2)$ являются собственными векторами линейного преобразования с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

соответствующими одному и тому же собственному значению λ_0, и показать, что линейная комбинация $\overline{b} = 2\overline{b_1} + 3\overline{b_2}$ тоже будет собственным вектором линейного преобразования с тем же собственным значением λ_0 (см. свойство 1 собственных векторов).

3.8. Привести квадратичные формы

$$F_1(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 6xy,$$

$$F_2(x, y) = 9x^2 + 6xy + y^2$$

к каноническому виду.

Ответ. $\Phi_1(x', y') = 2(x')^2 + 8(y')^2$,

$\Phi_2(x', y') = 10(y')^2$.

Список литературы

1. Шилов Г. Е. Конечномерные линейные пространства. – М.: Наука, 1969.
2. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1971.
3. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Наука, 1972.
4. Магазинников Л. И. Высшая математика. Часть 1: Учебное пособие. − Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 1998.
5. Каган М. Л., Самохин М. В. Алгебра и геометрия. – М.: Стройиздат, 2003.
6. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1967.
7. Терехина Л. И., Фикс И. И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Учебное пособие. – Томск: ТГУ, 1998.
8. Писменный Д.Т., Конспект лекции по высшей математике. Москва: Айрис Пресс, 2009.

СОДЕРЖАНИЕ