O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O`RTA MAXSUS TA`LIM VAZIRLIGI
TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI

Qo`l yozma xuquqida

UDK______________

SHONAZAROV SOATMUROT QULMURODOVICH

Laminar chegaraviy qatlam muammosi va uni sonli modellashtirish

5A130202 – Amaliy matematika va axborot texnalogiyalari

Magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan

DISSERTATSIYA

Ilmiy rahbar:

f.m.f.dots. Yusupova D.A.

Termiz – 2014 yil

Mundarija

Kirish

XIX asr oxirida suyuqliklar harakati to`g`risidagi fan bir – biri bilan o`zaro bog`liq bo`lmagan ikkita tarmoqqa ajraldi. Bir tomondan, ishqalanishsiz suyuqlik harakatini tavsiflovchi Eyler tenglamalaridan kelib chiqqan tadqiqotlarni o`z ichiga olgan Nazariy gidrodinamika yo`nalishi.

Aytish lozimki, klassik gidrodinamika deb ataluvchi bu tadqiqotlar natijalari bu tajribaga keskin zid bo`lib qoldi. Ayniqsa o`ta muhim bo`lgan masalalarda qat`iy ziddiyat paydo bo`ldi, masalan, truba va kanallarda bosimning yo`qolishi, suyuqlikda harakatlanayotgan jismga suyuqlikning qarshilik ko`rsatishi. Shu sababli, klassik gidrodinamika amaliyot uchun juda kam ahamiyatga ega bo`lib qoldi, bu o`z navbatida muhandislar va amaliy matematika sohasidagi mutaxasislar oldiga texnika taraqqiyoti bilan bog`liq ko`pgina muhim muammolarni hal qilish uchun suyuqliklar harakatini o`rganishga bag`ishlangan fan – gidrodinamik nazariyani yaratish vazifasini qo`ydi. Bu fan ko`p sonli eksperemental natijalarga tayangan holda nazariy gidrodinamikadan juda keskin farq qildi, bu farq o`zining qo`llayotgan metodlari va ko`zlayogan maqsadlari bilan batamom ajralib turadi.

XX asr boshlarida L.Prandtl suyuqliklar harakati haqidagi bir- biridan ancha uzoqlashgan ikkita fanning yana yaqinlashuviga asos soldi. Bundan tashqari, amaliyotni nazariya bilan bog`lagan holda L.Prandtl kutulmagan yutuqlarga ega bo`lgan yangi bir yo`nalishga asos soldi. Ana shu L.Prandtlning katta xizmatlaridan iborat. Ishqalanishga ega bo`lgan suyuqliklar harakatini tavsiflaydigan tenglamalar Nave-Stoks tenglamalari tuzildi. Ammo, bu tenglamalar o`ta murakkab bo`lganligi sababli, ulardan ishqalanishga ega bo`lgan suyuqlik harakatini nazariy tadqiq etishga qo`llab bo`lmaydi, ayrim xususiy hollarni inobatga olmaganda. Shu bilan birgalikda suv va havo uchun, yani texnikada juda muhim bo`lgan suyuqliklar uchun yopishqoqlik koeffitsienti juda kichik edi va o`z navbatida, yopishqoqlik bilan bog`liq ishqalanish kuchi boshqa kuchlar (og`irlik kuchi va bosim kuchlari) ga nisbatan umuman olganda unchalik katta emas, shu sababli, uzoq vaqt mobaynida juda kichik ishqalanish kuchlari suyuqlikning harakatiga hal qiluvch ta’sir ko`rsatishni tushunish mumkin bo`ldi, bu kuchlarni klassik nazariyada juda kichik deb hisoblab, ularni inobatga olmas edi.

1904-yilda L.Prandtl o`zini Geydelberg shaxrida matematiklar kongressida “Kichik ishqalanishga ega bo`lgan suyuqlik harakati haqida” deb nomlangan ma`ruzasida ishqalanishga ega bo`lgan suyuqlik harakatining amaliy jihatdan muhim bo`lgan masalalarda nazariy tadqiq etish yo`lini ko`rsatdi. U nazariy mulohazalar va ba`zi sodda eksperiment natijalariga tayangan holda suyuqlikdagi jism atrofidagi oqimni ikkita sohaga bo`lish mumkin ekanligini ko`rsatdi: jism atrofidagi juda kichik qatlam sohasi (chegaraviy qatlam), bu yerda ishqalanish muhim ro`l o`ynaydi va bu qatlamdan tashqaridagi soha, bu sohada ishqalanishni inobatga olmaslik mumkin. Ushbu gipoteza, bir tarafdan, qarshilik muammosida yopishqoqlikning rolini fizik jihatdan juda yaxshi tushuntirishga, boshqa tarafdan mavjud matematik qiyinchiliklarni bartaraf etishga va ishqalanishga ega bo`lgan suyuqliklarni nazariy tadqiq etishga yo`l ochib berdi.

Shunday qilib, L.Prandtl gipotezasi nazariya va amaliyot o`rtasida yo`qolib ketgan aloqani tikladi. Prandtlning chegaraviy qatlam nazariyasi o`ta sermahsul bo`lib, uning maqolasi chop etilgandan keyin kelgusi nazariy tadqiqotlar uchun kuchli turtki vazifasini o`tadi.

Chegaraviy qatlam nazariyasining tadbiqiy sohasi sifatida,suyuqlikda harakatlanayotgan jismga qarshilikni hisoblash, korabl, qanot profili, samalyot fyuzellaji yoki turbina lopitkalari ishqalanish qarshiliklarini hisoblashlarni eslatib o`tish kifoya. Chegaraviy qatlamning o`ziga xosligi shundaki, devorga (chegaraga) bevosita yaqin bo`lgan sohada teskari oqim paydo bo`ladi. Ushbu xosssaga bog`liq ravishda chegaraviy qatlamning jismdan uzilishi va kuchsiz hamda kuchli uyurmalar hosil bo`lishi kuzatiladi. Ushbu xodisa suyuqlikdagi jism sirtida bosim taqsimoti turlicha bo`lishiga olib keladi, ayni shu paytda jismdan juda uzoq masofada oqimni ishqalanishsiz harakatlanayapti deb hisoblash mumkin, bu suyuqlikda harakatlanayotgan jismga nisbatan bosim qarshiligining paydo bo`lishiga sabab bo`ladi.

Chegaraviy qatlam nazariyasi ushbu qarshilikni hisoblash yo`lini ko`rsatadi. So`ngra chegaraviy qatlam nazariyasi shunday muhim savolga javob beradi: suyuqlikdagi jism qanday formaga ega bo`lishi lozimki, suyuqlik oqimining jismdan zararli ajralib, uzilib ketishi sodir bo`lmasin. Ammo, oqimning jismdan ajralib ketishi nafaqat suyuqlikdagi harakatlanayotgan jismga, balki, kanallardagi suyuqlik oqimlarida ham kuzatish mumkin. O`z navbatida chegaraviy qatlam nazariyasi gidravlik va gazli mashinalarda (nasos va trubinalar) lopatkalararo kanallarda mavjud bo`ladigan oqimlarni tadqiq etish imkoniyatini beradi. Faqatgina chegaraviy qatlam nazariyasi orqaligina samalyot qanotini ko`tarish kuchining maksimal qiymatiga ega bo`lishi, hamda oqimning qanotdan uzilishida paydo bo`ladigan hodisalarni tushuntirish imkoniyati mavjud bo`ladi. Va nihoyat, jism va uni o`rab oqib o`tayotgan suyuqlik yoki gaz bilan issiqlik uzatish jarayoni ham chegaraviy qatlamdagi oqimlarning o`ziga xosligi bilan bog`liq.

Dastlab chegaraviy qatlam nazariyasi asosan qisilmaydigan muhitdagi oqimga nisbatan qaralgan. Bunday oqimlarda ishqalanish kuchi Stoksning ishqalanish qonuni asosida hisoblanadi. Bu yo`nalishdagi tadqiqotlar juda ko`p sonli izlanishlarda o`z ifodasini topgan va asosan ularni yakunlangan deb hisoblash mumkin.

Suyuqliklar va gazlar mexanikasida laminar (qatlamli) formadagi oqimning turbulentlikka o`tishi hodisasi fundamental ahamiyatga ega.

Matematik modellashtirish amaliy xarakterga ega bo`lgan masalalarni yechishda o`ta muhim ahamiyatga ega. Amaliy masalalarda tabiat hodisasi, ishlab chiqarish jarayoni, konstruksiya, boshqarish sistemasi, iqtisodiy reja va shu kabi “nomatematik” obyektlar bevosita beriladi. Tadqiqot obyektini formallashtirishdan, tegishli matematik modelni qurishdan boshlanadi. Obyektning eng muhim xususiyatlari va xossalari kiritiladi hamda matematik munosabatlar yordamida tavsiflanadi. Matematik model qurilgandan so`ng, ya`ni masalaga matematik forma berilgandan keyingina uni o`rganish uchun matematik modellardan foydalanish mumkin.

Amaliy masalalarda matematik modelni qurish ishining eng murakkab va mas`uliyatli bosqichlaridan biridir. Tajriba ko`rsatadiki, ko`p hollarda modelning to`g`ri tanlanishi – muammoning yarmidan ko`pini hal qilish demakdir. Bu bosqichning qiyinligi shundan iboratki, matematik va sotsial bilimlarning uyg`unlashishini talab etadi. Ammo, amaliy matematikada qaraladigan katta muammolar uchun mutaxasislarning bunday uyg`unlashishi bejiz emas. Odamga matematik amallar ustida matematiklar hamda o`rganilayotgan obyekt tegishli bo`lgan sohaning mutaxasislari birlashganda ishlaydilar. Ularning faoliyati muvoffaqqiyatli bo`lishi uchun bir-birini tushunishi g`oyatda muhim. Bunday uyg`unlikka matematiklar obyekt haqida maxsus bilimlarga ega bo`lganda, ularning sheriklari esa ma`lum darajada matematik bilimga, o`z sohasiga tadqiqotning matematik metodlarni qo`llanishi tajribasiga ega bo`lgandagina erishish mumkin.

Matematik modelni hech qachon qaralayotgan obyekt bilan aynan bir xil bo`lmaydi, uning barcha xossalarini va xususiyatlarini bera olmaydi. Soddalashtirishga, idellashtirishga asoslangan model obyektning taqribiy tavsifidan iborat. Shuning uchun modelni tahlil qilishdan olingan natijalar obyekt uchun doim taqribiy xarakterga ega bo`ladi.

Ularning aniqligi model va obyektning moslik, adekvatlik darajasiga bog`liqdir. Aniqlik haqidagi natijalarning ishonchliligi masala amaliy matematikaning eng nozik masalalaridan biridir. Obyekt holati va xossalarini aniqlaydigan qonunlar to`liq ma`lum va ularning qo`llanilishi bo`yicha katta amaliy tajribaga ega bo`lganda aniqlik masalasi osonlik bilan hal bo`ladi. Undan natijalarning qaralayotgan model ta`minlaydigan aniqligini apriori (tajribagacha, ya`ni matematik modelni yechish boshlanguncha) baholash mumkin.

O`rganilayotgan obyekt haqida ma`lumotlar yetarli bo`lmaganda yanada murakkabroq holat yuz beradi. Bu holda gipoteza xarakteriga ega bo`lgan qo`shimcha farazlar kiritishga to`g`ri keladi. Bu gipotetik modelki tadqiq qilishdan olingan natijalar o`rganilayotgan obyekt uchun shartli xarakterga ega. Ularning o`rganilganilganligi boshlang`ich farazlar qanchalik to`g`ri ekanligiga bog`liq. Ularni tekshirish uchun modelni tadqiqot qilish natijalarini o`rganilayotgan obyekt haqidagi barcha ma`lumotlar bilan taqqoslash lozim. Hisobab topilgan va eksperimental ma`lumotlarning yaqinlik darajasi gipotetik modelning sifati haqida, boshlang`ich farazlarning to`g`riligi yoki xatoligi haqida fikr yuritishga imkon beradi. Shunday qilib, matematik modelni qaralayotgan obyektni o`rganishga tadbiq etish masalan: oddiy matematik masala emas va uni matematik modellar yordamida his etib bo`lmaydi. Haqiqatning asosiy me`zoni amaliyot, hisoblash eksperimenti o`tkazishdir.

Dissertatsiya mavzusining asoslanishi va uning dolzarbligi: dissertatsiya ishida chegaraviy qatlam muammosi va sonli modellashtirish masalasi qaralgan. Chegaraviy qatlam tenglamalari tuzilgan va chegaraviy qatlamning uzilish holatlari tahlil etilgan. Chegaraviy qatlam tenglamalarining umumiy xossalari o`rganilgan, chegaraviy qatlam tenglamalarining ayrim avtomodel ya`ni xususiy hollardagi yechimlari olingan. Chegaraviy qatlam tenglamalari chiziqli bo`lmagan differensial tenglamalardan iborat bo`lganligi uchun, ularning aniq yechimlarini analitik (formula) ko`rinishida topib bo`lmaydi, shu sababli ularni yechishga mo`ljallangan universal metodlar bu sonli metodlardir. Chegaraviy qatlam tenglamalarini batafsil tahlil etish va sonli yechish metolarini ishlab chiqish mavzuning dolzarbligidan dalolat beradi.

Tadqiqot obyekti va predmetining belgilanishi: tadqiqot obyekti sifatida chegaraviy qatlam tenglamalari qaraladi, ushbu tenglamalarning ayrim xususiy avtomodel yechimlarini va sonli yechimlarini topish tadqiqot predmeti bo`lib hisoblanadi.

Tadqiqot maqsadi va vazifalari: chegaraviy qatlam tenglamalarini tahlil etish, uning avtomodel yechimlari va sonli yechimlarini olish tadqiqotning asosiy maqsadi bo`lib, quyidagi vazifalarni bajarish ko`zda tutiladi.

- chegaraviy qatlam tenglamalarini tuzish;

- chegaraviy qatlamning uzilishi sabablarini aniqlash, plastinkadagi chegaraviy qatlamni tahlil etish;
- chegaraviy qatlam tenglamalarini integrallash, yopishqoqlik evaziga paydo bo`ladigan ishqalanish qarshiligi tabiatini o`rganish;
- plastinkadagi chegaraviy qatlam tenglamalarini chiqarish;
- chegaraviy qatlam tenglamalarining umumiy xossalarini tahlil etish, chegaraviy qatlamda Peynol`ds soni, ayniy yechimlar va konturli aloqalarning o`rnini ko`rsatish;
- chegaraviy qatlam tenglamalarining avtomodel yechimlarini tuzish;
- chegaraviy qatlam tenglamalarini issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasiga aylantirish;
- issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasini ayirmali sxemalar bilan yechish algoritmini chiqarish;
- algoritm uchun Pascal tilida dastur tuzish va sonli hisoblashlar o`tkazish.

Tadqiqotning asosiy masalalari va vazifalari:

- Chegaraviy qatlam tenglamalarini tuzish;
- Reynol`ds sonining turg`unlikka ta`siri;
- Ayniy yechimlar;
- Konturli aloqalar va ularning o`rganilayotgan obyekt parametrlariga ta`siri;
- Pona atrofidagi oqim;
- Torayuvchi kanaldagi oqim;
- Silindr atrofidagi oqim;
- Chegaraviy qatlam tenglamasini issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasiga keltirish;
- Sonli hisoblashlar o`tkazishdan iborat bo`lib, quyidagi farazga asoslanadi, asosiy statsionar oqim Nave-Stoks tenglamalarini qanoatlantiradi.

**Mavzu bo`yicha qisqacha adabiyotlar tahlili:** mavzu bo`yicha quyidagi adabiyotlar asos qilib olindi:

1. Линь Ц.Ц. Теория гидродинамической устойчивости. –М.:

Иностр. лит., 1958. -195с.

2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. -М.: Наука, 1974. -571с.
3. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность.- Новосибирск: Наука, Сиб. Отд-ние, 1977.-366с.
4. Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости.-Т,: Фан ва техналогия, 2011, 188с.

Ushbu adabiyotlarda chegaraviy qatlam tenglamalari, ularning avtomodel yechimlari, plastinkadagi chegaraviy qatlam hamda ularni sonli yechish metodlari to`g`risida tadqiqotlar keltirilgan.

**Tadqiqotda qo`llanilgan uslublarning qisqaqcha tavsifi:** Tadqiqotda chegaraviy qatlam tenglamalarini yechishga ayirmali sxemalar qo`llanilgan, ularni yechish uchun progonka metodi algoritmi chiqarilgan, metodning to`g`ri va teskari yo`llari batavsil yoritilgan.

Tadqiqot natijalarining nazariy va amaliy ahamiyati: chegaraviy qatlam tenglamalari chiqarilganligi, ularning ba`zi avtomodel yechimlari tuzilganligi, chegaraviy qatlamdagi oqimda Reynol`ds soni, ayniy yechimlar va konturli aloqalarning ahamiyati ko`rsatilganligi ishning nazariy jihatini ko`rsatsa, chegaraviy qatlam tenglamasini hisoblash eksperementi vositasida zamonaviy kompyuterlarda tahlil etilganligi tadqiqotning amaliy ahamiyatini ko`rsatadi.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi: Chegaraviy qatlam tenglamalari chiziqli bo`lmagan tenglamalar bo`lganligi uchun ularni sonli modellashtirish vositasida tadqiq etilganligidan iborat.

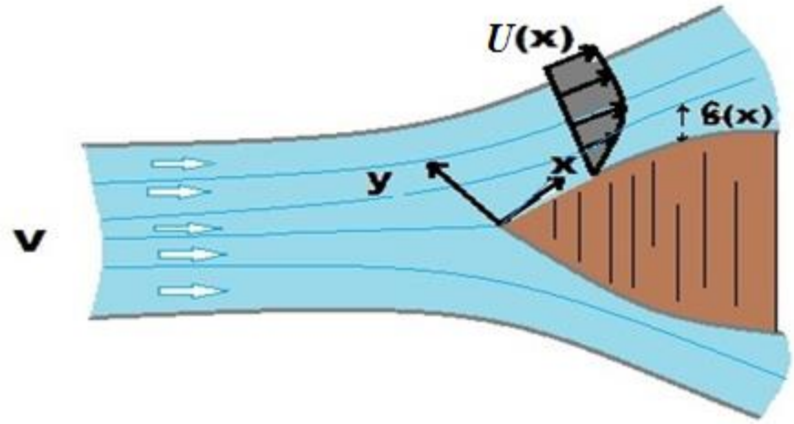
Dissertatsiya tarkibining qisqacha tavsifi:

Dissertatsiya kirish, to`rtta bob, o`n uchta paragrap, xulosa va adabiyotlar ro`yxatidan tashkil topgan bolib, uning birinchi bobida chegaraviy qatlam tenglamalari to`g`risida ma`lumotlar keltirilgan. Ikkinchi bobda plastinkadagi chegaraviy qatlam masalasi yoritilgan. Chegaraviy qatlam tenglamalarining umumiy xossalari uchinchi bobda berilgan. Dissertatsiyaning to`rtinchi bobida chegaraviy qatlam tenglamalarining aniq yechimlari to`g`risida ma`lumotlar keltirilgan bo`lib, ularda chegaraviy qatlamdagi pona atrofidagi oqim, torayuvchi kanaldagi oqim, silindr atrofidagi oqim, chegaraviy qatlam tenglamalarini issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasiga keltirish va uni sonli modellashtirish masalalari qaralgan. Dissertatsiya xulosalanib, foydalanilgan adabiyotlar ro`yxati keltirilgan.

I bob. Chegaraviy qatlam tenglamalari

1-§. Chegaraviy qatlam tenglamalarini tuzish.

Ushbu paragrafda yopishqoqlik juda kichik bo`lgan holni qaraymiz, bu holda Reynol`ds soni juda katta bo`ladi. Misol tariqasida silindrsimon jism atrofidagi tekis oqimni qaraylik



Jism sirtidan ancha uzoq masofada yopishqoqlik kichik bo`lganligi sababli, inersiya kuchlari ustunlikka ega bo`ladi, u sohada yopishqoqlikning ta`siri deyarli sezilmaydi. Oqimning tezligi jism sirtigacha jismdan uzoqlikda qanday qiymat V ga ega bo`lsa, xuddi shu qiymatga ega bo`ladi. Tok chiziqlari yo`nalishi va tezlikning suyuqlik ichidagi taqsimoti amalda ishqalanishsiz potensial suyuqlik oqimdagi singari bo`ladi. Ammo, juda aniq kuzatishlar ko`rstadiki, suyuqlik xuddi potensial oqimdagidek, jism sirti bo`ylab sirg`alib o`tmaydi, balki unga yopishadi. Jism sirtidagi nolga teng bo`lgan tezlikdan tezlikning to`liq qiymati $U(x)$ ga erishish, devordan ma`lum masofadagi yupqa qatlamda sodir bo`ladi, bu qatlam chegaraviy qatlam yoki ishqalanish qatlami deyiladi. O`z navbatida, qaralayotgan oqimdagi ikkita sohani farqlashimiz lozim, albatta, ular orasidagi aniq chegarani o`tkazib bo`lmaydi.

1. Birinchi soha – jismning bevosita yaqinida bo`lgan juda yupqa qatlam. Bu sohada devorga perpendikulyar yo`nalgan tezlik gradienti $\partial u/\partial y$ juda katta (chegaraviy qatlam), yopishqoqlik μ esa, u qanchalik kichik bo`lishidan qat`iy nazar, oqimga jiddiy ta`sir ko`rsatadi, albatta, bu yerda urinma kuchlanish

$\tau = \mu \,{}^{\partial u}\!/_{\partial y}$, u ishqalanish evaziga paydo bo`ladi, juda katta qiymatni qabul qilishi mumkin.

2. Ikkinchi soha – chegaraviy qatlamdan tashqaridagi barcha oqim. Bu sohada tezlik gradientlari chegaraviy qatlamdagidek katta qiymatlarga ega bo`lmaydi, shu sababli, yopishqoqlikning ta`siri hech qanday ahamiyatga ega emas va bu sohada oqimni potensial deb qarash mumkin

Odatda chegaraviy qatalam qanchalik yupqa bo`lsa, yopishqoqlik ham shunchalik kam bo`ladi yoki, yanada umumiyroq talqinda, Reynol`de soni shunchalik katta bo`ladi. Chegaraviy qatlam qalinligi δ kinematik yopishqoqlikdan olingan kvadrat ildizga teng, yani

$$\delta \sim \sqrt{\nu}$$

bu yerda ν - kinematik yopishqoqlik, $\nu = {}^{\mu}\!/_{\rho}$, μ- yopishqoqlik, ρ – zichlik.

Nave – Stoks tenglamalaridan Chegaraviy qatlam tenglamalarini olishda chegaraviy qatlam qalinligi δ, jismning biror – bir xarakterli chiziqli o`lchami L ga nisbatan juda kichik deb qabul qilinadi, ya`ni

$$\delta \ll L.$$

Shunday qilib, chegaraviy qatlam tenglamalarining yechimi mohiyat jihatdan Nave – Stoks tenglamalarining Reynol`de soni juda katta bo`lgandagi asimptotik yechimidan iborat bo`lar ekan.

Endi Nave – Stoks tenglamalarini chegaraviy qatlamdagi oqim uchun soddalashtirishga o`tamiz. Buning uchun Nave – Stoks tenglamalarida alohida olingan hadlarini ularning miqdoriy tartibi bo`yicha baholaymiz. Biz ikki o`lchovli masalani qaraymiz.

Suyuqlik oqib o`tayotgan devor tekis deb hisoblaymiz. $x$ o`qini devor bo`ylab, $y$ o`qini devorga perpendikulyar qilib yo`naltiramiz. Nave – Stoks tenglamalarini o`lchamsiz ko`rinishda yozib olamiz, buning uchun barcha tezliklarni oqim tezligi V ga, barcha uzunliklarni esa – jismning xarakterli chiziqli o`lchami L ga bo`lamiz, uni shunday tanlaymizki, o`chamsiz miqdor $\partial u/\partial x$ oqimning qaralayotgan sohasida tartibi bo`yicha 1 dan oshib ketmasin.

Bosim va vaqtni ularni mos ravishda ρV^2 va L/V ga bo`lib, o`chamsiz ko`rinishga keltiramiz. Soddalik uchun o`lchamsiz miqdorlarni yana o`sha harflar orqali belgilaymiz. Va nihoyat, Reynol`ds sonini kiritamiz

$$Re = \frac{VL\rho}{\mu} = \frac{VL}{\nu}$$

u bizning farazimizga ko`ra, juda katta bo`lishi lozim. Natijada Nave – Stoks tenglamalarini qaralayotgan ikki o`lchamli masala uchun quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi:

x yo`nalish bo`yicha

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1.1}$$

$1 \quad 1 \;\; 1 \quad \delta \;\; \frac{1}{\delta} \qquad \delta^2 \quad 1 \quad \frac{1}{\delta^2}$

y yo`nalish bo`yicha tenglama

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}\right), \tag{1.2}$$

$\delta \quad 1 \;\; \delta \quad \delta \;\; 1 \qquad \delta^2 \quad \delta \quad \frac{1}{\delta}$

Uzluksizlik tenglamasi o`lchamsiz ko`rinishda quyidagicha bo`ladi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0\,, \tag{1.3}$$

$1 \quad 1$

Chegaraviy shartlar sifatida suyuqlikning chegaraga yopishish shartlari, ya`ni

$$u = \vartheta = 0 \text{ agar } y = 0 \text{ bo`lsa,}$$

va chegaraviy qatlamning tashqi chegarasida tezlik u ning tashqi oqim tezligi *U* bilan mos tushishi qaraladi, ya`ni:

$$u = U \text{ agar } y \to \infty \text{ da.}$$

Endi chegaraviy qatlam qalinligi δ ni jismning xarakterli chiziqli o`lchami L ga bo’lib, bu qalinlikni ham o’lchamsiz ko`rinishga keltiramiz. Bunday o`lchamsiz chegaraviy qatlam qalinligini δ belgilaymiz, u yuqorida kiritilgan mulohazalarga ko`ra 1 dan juda ham kichik bo`ladi, ya`ni

$$\delta << 1.$$

Tenglamalar (1.1) - (1.3) ning alohida olingan hadlarini baholashga kirishamiz, bundan asosiy maqsad tenglamadagi kichik hadlarni tashlab yozish orqali tenglamalarni soddalashtirishdan iborat. Uzluksizlik tenglamasi (1.3) dan ko`rinadiki, miqdor $\partial u/\partial x$ ning tartibi 1 ga teng, xuddi shu tartibda $\partial u/\partial x$ miqdor ham ega. Devorda (chegarada) tezlik $\vartheta = 0$ bo`lganligi uchun chegaraviy qatlamda tezlik υ ning miqdori δ tartibli bo`ladi. Shu sababli, chegaraviy qatlamda ${\partial\vartheta}/_{\partial x}$ va ${\partial^2\vartheta}/_{\partial x^2}$ miqdorlar ham δ tartibli bo`ladi. Miqdor ${\partial^2 u}/_{\partial x^2}$ ning tartibi ham birinchi bo`ladi. Bunday baholash natijalari tenglama (1.1) - (1.3) da o`sha miqdorlar tagiga yozilgan.

So`ngra, lokal tezlanish $\partial u/\partial t$ ning miqdori, konvektiv tezlanish u ${\partial u}/_{\partial x}$ ning miqdoriga teng deb qabul qilamiz. Bu shuni anglatadiki, juda to`satdan berilgan tezlanish, masalan, kuchli bosim to`lqini ta`sirida paydo bo`ladigan tezlanishlar qaralmaydi deb hisoblaymiz. Yopishqoqlik bilan bog`liq bo`lgan hadlar, tenglama (1.1) va (1.2) da kichik ko`paytuvchi $1/Re$ bilan qatnashadi. Ushbu hadlarning ayirmalari yuqoridagi mulohazalarga asosan hech bo`lmaganda chegaraning bevosita yaqinida inertsion hadlar bilan bir xil tartibli miqdorlar bo`lishi lozim. O`z navbatida, chegaraga yaqin qatlamda tezlikning ikkinchi hosilalarining ayrimlari juda katta bo`ladi. Yuqoridagi aytilganlarga ko`ra, bunday hosilalar sifatida faqat ${\partial^2 u}/_{\partial y^2}$ va ${\partial^2\vartheta}/_{\partial y^2}$ hosilalargina bo`lishi mumkin. Chegaraga parallel bo`lgan tezlik komponentlari qalinligi δ bo`lgan yupqa sohada o`zgarib, u chegaradagi nol qiymatdan tashqi oqim chegarasidagi 1 qiymatga erishadi, bu holda

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta}\ va\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta}$$

bo`ladi, ayni shu paytda

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial y} \sim \frac{\delta}{\delta} = 1\ va\ \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta}$$

bo`ladi. Ushbu baholarni tenglamalar (1.1) va (1.2) dagi mos miqdorlar tagiga yozib, birinchi tenglamadan ko`rishimiz mumkinki, yopishqoqlikka bog`liq bo`lgan hadlar chegaraviy qatlamda inertsion hadlar bilan bir xil tartibli bo`ladi, agarda Reynol`ds soni $1/\delta^2$ tartibli bo`lsa, ya`ni ushbu shart bajarilganda

$$\frac{1}{Re} = \delta^2 \tag{1.4}$$

Shunday qilib, Reynol`ds soni Re juda katta bo`lgan oqimlarda birinchi harakat tenglamasini soddalashtirish mumkin, buning uchun $\partial^2 u/_{\partial y^2}$ ga nisbatan kichik miqdor bo`lgan $\partial^2 u/_{\partial x^2}$ ni tashlab yozish mumkin. Uzluksizlik tenglamasi (1.3) Re (Reynol`de) sonining katta qiymatlarida o`zgarishsiz qoladi, chunki, y Re dan bog`liq emas. Ikkinchi harakat tenglamasi (1.2) ni qaraydigan bo`lsak, undan ko`rinadiki, $\partial p/\partial y$ miqdor δ tartibli bo`ladi, o`z navbatida, chegaraviy qatlamga ko`ndalang bo`lgan bosimlar ayirmasi miqdori δ^2 tartibli bo`ladi, ya`ni juda kichik miqdor va shu sababli, chegaraviy qatlamga ko`ndalang yo`nalgan bosim amalda o`zgarmas bo`ladi. Uni chegaraviy qatlamning tashqi chegarasidagi bosimga teng deb qabul qilish mumkin, bu sohada oqimni ishqalanishga ega emas deb qaraladi. Shunday qilib, chegaraviy qatlamda bosimni faqat uzunasiga koordinata *x* va vaqt *t* dan bog`liq bo`lgan ma`lum funksiya deb qarash mumkin.

Chegaraviy qatlamdan tashqarida uzunasiga tezlik u tashqi oqim tezligi *U*(*x*,*t*) ga o`tadi. Chunki, bu sohada chegaraga perpendikulyar yo`naltirilgan kuchli tezlik gradientlari mavjud bo`lmaydi, bu holda tenglama (1.1) da Reynol`de sonining katta qiymatlarida yopishqoqlik bilan bog`liq barcha hadlarni inobatga olmaslik mumkin. Shu sababli, tashqi oqim uchun uchun tenglama (1.1) quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi

$$\frac{\partial U}{\partial \mathrm{t}} + U\frac{\partial U}{\partial \mathrm{x}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}} \tag{1.5}$$

Statsionar oqim uchun $\frac{\partial U}{\partial t}=0$ va bosim faqat *x* dan bog`liq bo`ladi hamda tenglama (1.5) undagi xususiy hosilalarni oddiy xosilalar bilan almashtirsak yanada soda ko`rinishga ega bo`ladi

$$U\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\,. \qquad (1.5a)$$

Bu tenglamani integrallab, Bernulli tenglamasiga kelamiz

$$p+\frac{\rho}{2}U^2=const\,. \qquad (1.6)$$

Tashqi oqim uchun chegaraviy shartlar, xuddi ishqalanishga ega bo`lmagan oqimniki kabi bo`ladi.

Shunday qilib, o`tkazilgan barcha soddalashtirishlardan keyin Nave – Stoks tenglamalaridan faqat bittasi qoladi, bu tenglama yana o`lchamli o`zgaruvchilarga o`tsak, uzluksizlik tenglamasi bilan birgalikda ushbu ko`rinishni oladi:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,, \qquad (1.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \vartheta}{\partial y}=0\,, \qquad (1.8)$$

bunday chegaraviy shartlar

$$\begin{cases} u=\vartheta=0 \ \text{ agar y} = 0 \text{ da}\,, \\ u=U(x,t) \text{ agar } y\to\infty \text{ cha}, \end{cases} \qquad (1.9)$$

dan iborat bo`ladi.

Tenglamalar sistemasi (1.7) va (1.8) chegaraviy qatlam uchun Prandtl tenglamasi deb ataladi.

Statsionar oqim uchun tenglamalar sistemasi (1.7) va (1.8) yanada sodda ko`rinishni oladi

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,, \qquad (1.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \vartheta}{\partial y}=0\,, \qquad (1.11)$$

bunda chegaraviy shartlar quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi:

$u = 0, \vartheta = 0$, agar y=0 da; u=$U(x)$, agar $y \to \infty$ cha. (1.12)

Xulosada ta`kidlab o`tamizki, formula (1.4) dan chegaraviy qatlam qalinligi uchun quyidagi bahoga ega bo`lamiz:

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}} = \sqrt{\frac{\nu}{VL}} \qquad (1.13)$$

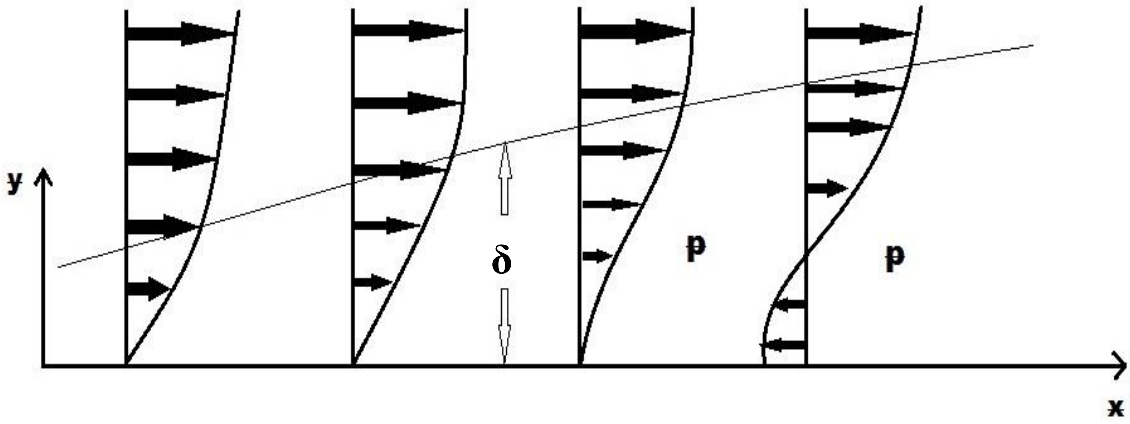
bu ilgari Nave – Stoks tenglamalarining aniq yechimidan olingan bahoni tasdiqlaydi

$$\delta \sim \sqrt{\nu}$$

2-§. Chegaraviy qatlamning uzilishi.

Yuqoridagi paragrafda ta`kidlangan muloxazalarga tayangan holda, chegaraviy qatlam tenglamalarini integrallamasdan turib, chegaraviy qatlamning fizik mohiyati to`g`risida ayrim muhim xulosalarga kelish mumkin. Avvalambor, qanday sharoitlarda chegaraviy qatlamda tormozlangan suyuqlik tashqi oqimga ko`chishini aniqlash mumkin, boshqacha qilib aytganda, qanday sharoitlarda oqim chegaradan uziladi. Agar jism konturi bo`ylab bosimning o`sish sohasi mavjud bo`lsa, bu holda umuman olganda, chegaraviy qatlamda tormozlangan suyuqlik, u unchlik katta bo`lmagan kinetik energiyaga ega, yuqori bosim sohasiga siljishi imkoniyatiga ega emas. Buning o`rniga u yuqori bosim sohasidan qisib chiqariladi, jismdan uziladi, hamda chegaradan tashqi oqimga tomon yo`naltiriladi. Bundan tashqari, chegara yaqinida tormozlangan suyuqlik zarralari bosim gradient ta`sirida tashqi oqim yo`nalishiga qarama-qarshi yo`nalishda harakatlana boshlaydi. Uzilish nuqtasini biz chegaraga yaqin qatlamda to`g`ri va teskari yo`nalishda harakatlanayotgan oqimning chegarasi sifatida aniqlashimiz mumkin, o`z navbatida, uzilish nuqtasida quyidagi tenglik o`rinli bo`lishi lozim

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$$



$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0} > 0\,; \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0} = 0\,; \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0} < 0$$

Bu shuni anglatadiki, chegaraviy qatlamning uzilish nuqtasida tezlik profili chegaraga nisbatan nolga burchakni tashkil etuvchi urinma ta`sirga ega bo`ladi.

Uzilish nuqtasiga yaqin joydagi tezlik profillari chegara yaqinida asosiy oqim yo`nalishiga qarama- qarshi yo`nalishdagi tezlikka ega bo`lgan sohalarga ega bo`ladi.

Chegaraviy qatlamda uzilish sodir bo`lishi, agar sodir bo`lsa, aynan qaysi nuqtada bo`ladi degan savollarga javob berish uchun chegaraviy qatlam tenglamalarini integrallashni bajarish kerak bo`ladi.

II bob. Plastinkadagi chegaraviy qatlam.

1-§. Chegaraviy qatlam tenglamalarini integrallash.

Chegaraviy qatlam tenglamalarini ham nostatsionar holda (tenglamalar (1.7) va (1.8)), ham statsionar holda (tenglamalar (1.10) va (1.11)) integrallash uchun, ko`pincha dastlab uzluksizlik tenglamalari qanoatlantiriladi, buning uchun tok funksiyasi $\psi(x, y, z)$ kiritiladi, ya`ni

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{y}}\ , \quad \vartheta = -\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{y}} \tag{2.1}$$

deb hisoblanadi. Bu ifodani (1.7) ga qo`yib, quyidagiga ega bo`lamiz:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\,, \tag{2.2}$$

ya`ni, uchinchi tartibli differensial tenglamaga ega bo`lamiz. Chegaraviy shartlar sifatida chegaraga yopishish shartlari qaraladi, o`z navbatida, ushbu shartlar bajarilishi lozim

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0\,, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \quad \text{chegarada.}$$

So`ngra vaqtning *t=0* momentida tezliklar taqdimoti beriladi

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

butun fazo bo`yicha. Tenglama (2.2) tok funksiyasi uchun olingan tenglama, uni to`liq Nave – Stoks tenglamalaridan hosil qilingan tenglama bilan

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} = \nu\Delta\Delta\psi$$

taqqoslasak, chegaraviy qatlam tenglamalarini chiqarishda qilinga n soddalashtirishlar natijasida tok funksiyasi uchun hosil qilingan differensial tenglamaning tartibi to`rtinchidan uchinchiga tushar ekan.

2-§. Ishqalanish qarshiligi.

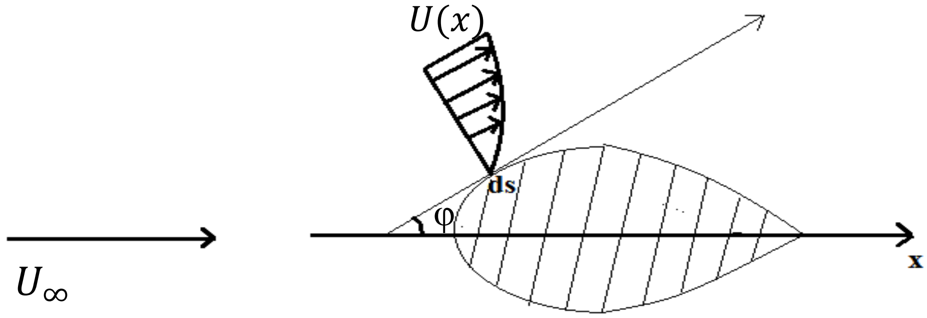
Chegaraviy qatlam tenglamalarini integrallashdan asosiy maqsad tezliklar taqsimotini oliy va uzilish nuqtasi holatini aniqlashdan iborat. Chegaraviy qatlamdagi tezliklar taqsimotini bilgan holda, harakatlanayotgan suyuqlikning jism sirtiga ishqalanishi tufayli paydo bo`ladigan qarshilikni osongina hisoblash mumkin. Buning uchun jismning butun sirti bo`yicha urinma kuchlanishni integrallashga to`g`ri keladi. Chegaradagi (devordagi) kuchlanish ushbuga teng

$$\tau_0 = \mu(\frac{\partial u}{\partial y})_{y=0}\,.$$

Silindrsimon jismni tekis oqib o`tishida, ishqalanish qarshiligi uchun quyidagi formulaga ega bo`lamiz:

$$W_{\tau_0} = b\int_{k=0}^{l}\tau_0 \cos\varphi ds \qquad (2.3)$$

bu yerda b jismning balandligi, φ – oqib kelayotgan suyuqlik tezligi U_∞ yo`nalishi bilan jism sirtiga o`tkazilgan urinma orasidagi burchak, s – esa jism sirti bo`ylab o`lchanadigan koordinata



Integrallashni butun oqib o`tadigan sirt bo`ylab, jismning oldidagi kritik nuqtadan uning orqasidagi nuqtagacha olib borish lozim, bunda chegaraviy qatlamda uzilish sodir bo`lmaydi deb hisoblaymiz. Endi

$$\cos\varphi\, ds = dx$$

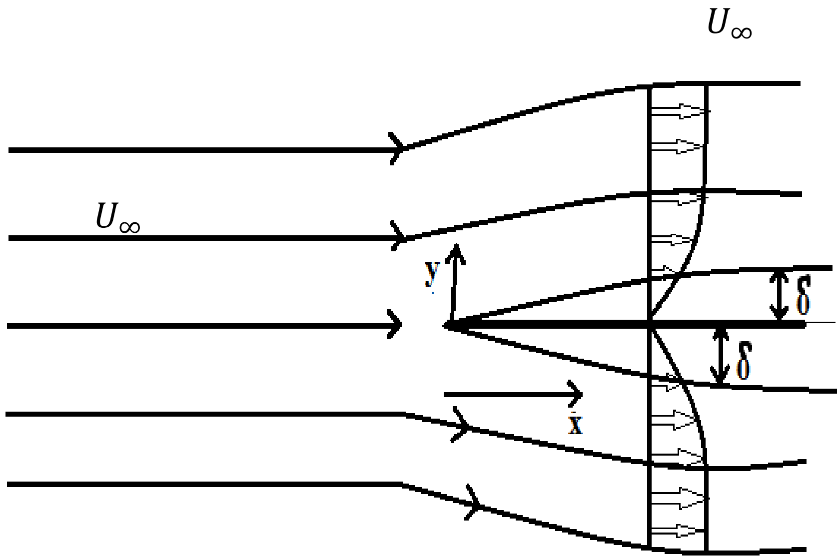
ekanligidan, formula (2.3) ni quyidagicha yozish mumkin

$$W_{\tau\rho} = b\mu\int_{x=0}^{l}(\frac{\partial u}{\partial y})_{y=0}dx\,, \qquad (2.4)$$

Shunday qilib, ishqalanish qarshiligi hisoblash uchun chegaradagi tezlik gradientini bilish talab qilinadi. Bu gradient faqat chegaraviy qatlam tenglamalarini integrallash yo`li bilan aniqlanadi. Agar chegaraviy qatlamdagi uzilish oqib o`tayotgan jismnning orqa tomoniga yetmasdan sodir bo`lsa, u holda formula (2.4) bilan hisoblashni faqat uzilish nuqtasigacha bajarish mumkin. So`ngra, agar laminar chegaraviy qatlam biror-bir joyda turbulentlikka aylansa, u holda formula (2.4) bilan hisoblash turbulentlikka aylanish nuqtasigacha olib boriladi.

3-§. Plastinkadagi chegaraviy qatlam tenglamalari.

Chegaraviy qatlam tenglamalarining oddiy tadbiqi sifatida juda yupqa tekis plastinka bo`ylab oqimni qarash mumkin



Koordinata boshini plastinkaning bosh qismiga joylashtiramiz, x o`qini plastinka bo`ylab yo`naltiramiz, $y$ tezligi $U_\infty$ bo`lgan oqib keluvchi oqim tezligiga parallel bo`lsin.

Plastinkaning uzunligini cheksiz, oqimni esa statsionar deb faraz qilamiz. Qaralayotgan holda potesial oqim o`zgarmas bo`ladi, bu holda

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

va chegaraviy qatlam tenglamalari (1.10) – (1.12) ushbu ko`rinishni oladi:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0 \tag{2.6}$$

bunda chegaraviy shartlar

$u = \vartheta = 0$, agar y $= 0$ da, u $= U_\infty$, agar y $\to \infty$ cha, (2.7)

bo`ladi.

Qaralayotgan sistema biror – bir xarakterli uzunlikka ega bo`lmaganligi sababli, tezlik profili *u(y)* plastinkaning oldidagi turli x masofalarda o`zaro affin – o`xshash bo`ladi, ya`ni u va y uchun mos masshtablarni tanlash orqali bir –

biriga tushishiga keltirilishi mumkin. Bunda u uchun masshtab sifatida oqib keluvchi oqim tezligi U_∞ ni, *y* uchun masshtab sifatida – chegaraviy qatlam qalinligi δ(x) ni qabul qilamiz, y kordinata *x* ortib borishi bilan o`sadi. Bu holda tezlik profillari o`zaro affin-o`xshash bo`lishi sharti quyidagicha yoziladi

$$\frac{u}{U_\infty} = \varphi(\frac{y}{\delta})$$

bunda plastinkaning bosh qismidan barcha x masofalar uchun funksiya φ aynan bir xil ko`rinishda bo`ladi.

Chegaraviy qatlam qalinligi baholash uchun quyidagi usulga tayanamiz. Nave-Stoks tenglamalarining ilgari aniqlangan aniq yechimlarigako`ra chegaraviy qatlam qalinligini aniqlanganda, mos

$$\delta \sim \sqrt{\nu t}$$

baho hosil bo`ladi, bu to`satdan harakatga keltirilgan platinkada ro`y beradi, bu yerda t harakat paydo bo`lgan momentdan boshlab hisoblangan vaqt. Qaralayotgan masalaga nisbatan t vaqt sifatida suyuqlik zarralarining plastinkaning bosh qismidan to koordinatasi x bo`lgan nuqtasigacha bo`lgan masofani bosib o`tishga ketgan vaqtni belgilashimiz mumkin. Agar zarralar chegaraviy qatlamdan tashqarida oqayotgan bo`lsa, u holda bu vaqt

$$t = \frac{x}{U_\infty}$$

ga teng. O`z navbatida, qaralayotgan holda chegaraviy qatlam qalinligi uchun ushbu bahoga ega bo`lamiz

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}.$$

Endi y koordinata o`rniga boshqa bir o`lchamsiz koordinatani qaraymiz, buning uchun y ni δ ga bo`lamiz, ya`ni

$$\eta = \frac{y}{\delta}$$

deb olamiz yoki δ ni uning qiymati bilan almashtirish orqali

$$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \tag{2.8}$$

ga ega bo`lamiz.

So`ngra uzluksizlik tenglamasini integrallash uchun xuddi yuqorida aytilganidek tok funksiyasi *φ(x,y)* ni kiritamiz. So`ngra

$$\psi = \sqrt{\nu x U_\infty} f(\eta) \tag{2.9}$$

deb qabul qilamiz, bu yerda $f(\eta)$ – o`lchamsiz tok funksiyasi. U holda plastinka bo`ylab uzunasiga tezlik u uchun ushbu ifodaga ega bo`lamiz

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\infty f'(\eta), \tag{2.10}$$

buda yerda f funksiyadagi shtrix η bo`yicha differensiallashni anglatadi, tezlikning ko`ndalang komponentasi ϑ uchun quyidagi formulani hosil qilamiz

$$\vartheta = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}}(\eta f' - f\,.) \tag{2.11}$$

Tezliklar u va ϑ ning bu qiymatlarini tenglama (2.5) ga qo`ysak, o`lchamsiz tok funksiyasi $f(\eta)$ ni topish uchun tenglama vujudga keladi

$$-\frac{U_\infty^2}{2x}\eta f' f'' + \frac{U_\infty^2}{2x}(\eta f' - f) f'' = \nu \frac{U_\infty^2}{x\nu} f'''$$

yoki soddalashtirgandan keyin

$$2f''' + ff'' = 0 \tag{2.12}$$

ni hosil qilamiz, ya`ni, oddiy differensial tenglama. Chegaraviy shartlar (2.7), (2.10) va (2.11) tenglamalar asosan quyidagicha bo`ladi:

$$f = 0, f' = 0, \text{ agar } \eta = 0 \text{ da, } f' = 1\,, \text{ agar } \eta \to \infty \text{ cha.} \tag{2.13}$$

Shunday qilib, formulalar (2.8), (2.9) bilan aniqlanadigan affin almashtirishlarni qo`llash natijasida ikkita xususiy hosilali tenglamalar (2.5), (2.6) ni tok funksiyasi uchun bitta oddiy differensial tenglamaga ega bo`lamiz. Hosil bo`lgan tenglama – chiziqlimas va uchinchi tartibli, o`z navbatida uchta chegaraviy shartlar (2.13) yechimni to`liq aniqlash uchun yetarli bo`ladi.

III bob. Chegaraviy qatlam tenglamalarining umumiy xossalari.

1-§. Reynol`ds soni

Nave-Stoks tenglamalaridan chegaraviy qatlam tenglamalarini chiqarishda biz ularni o`lchamsiz ko`rinishda yozdik, buning uchun tezliklarni asosiy oqimning xarakterli tezligi U_0 ga va barcha uzunliklarni jismning xarakterli uzunligi L ga bo`ldik. O`lchamsiz miqdorlarni o`chamli miqdorlar belgilangan harflar bilan belgilaymiz, faqat harflar ustiga shtrixlar qo`yamiz, ya`ni quyidagicha yozamiz:

$$\frac{u}{U_0} = u', \frac{\vartheta}{U_0} = \vartheta', \dots, \frac{x}{L} = x', \dots$$

Bu holda statsionar tekis oqim uchun chegaraviy qatlam tenglamalari quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi:

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x} + \vartheta' \frac{\partial u'}{\partial y'} = U' \frac{dU'}{dx'} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} = 0 \tag{3.2}$$

bunda chegaraviy shartlar ushbu ko`rinishda bo`ladi:

$u' = \vartheta' = 0$, agar $y' = 0$,

$u' = \vartheta'(x')$, agar $y' = \infty$.

Tenglama (3.1) ga Re orqali Reynol`ds soni belgilangan bo`lib, oqim tezligi U_0 va xarakterli uzunlik L dan bog`liq, ya`ni

$$Re = \frac{U_0 L}{\nu} = \frac{\rho U_0 L}{\mu}, \ \nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{3.3}$$

bunda $\rho -$ suyuqlikning zichligi, $\mu -$ uning yopishqoqligi, $\nu -$ esa kinematik yopishqoqlik. Tenglamalar (3.1) - (3.2) dan ko`rish mumkinki, berilgan formadagi jism uchun va o`z navbatida berilgan potensial oqim $U'(x')$ uchun chegaraviy qatlamning rivojlanishi faqat bitta parameter Reynol`ds soniga bog`liq bo`lar ekan.

2-§. Ayniy yechimlar

Qisilmaydigan suyuqlik ($\rho = const$) ning statsionar tekis oqimi uchun chegaraviy qatlam tenglamalari ushbu ko`rinishga ega

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

uning chegaraviy shartlari

$u=\vartheta=0$ agar $y=0$ da, $u=U_0$ agar $y=\infty$, bo`ladi. Tenglama (3.4) da ikkinchi tenglama ya`ni uzluksizlik tenglamasini tok funksiyasi kiritib integrallaymiz, ya`ni

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}\ ,\vartheta=-\frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{3.5}$$

deb olamiz, bunda $\Psi(x,y)$ - tok funksiyasi. Bu holda tenglama (1.4) dagi birinchi tenglama, ya`ni harakat tenglamasi quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=U\frac{dU}{dx}+\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \tag{3.6}$$

Uning chegaraviy shartlari

$\frac{\partial\psi}{\partial x}=0\ ,\frac{\partial\psi}{\partial y}=0,$ agar $y=0$ da, va $\frac{\partial\psi}{\partial y}=U_0$ agar $y=\infty$ da.

Yuqoridagi paragrafda keltirilgan usulda o`lchamsiz o`zgaruvchilarga o`tamiz, buning uchun xarakterli uzunlik L va xarakterli tezlik $U_0$ ni tanlab olamiz va hisoblashlar uchun Reynol`ds soniga ega bo`lamiz

$$Re=\frac{U_0L}{\mu}.$$

Ayni bir vaqtda ko`ndalang koordinata y uchun o`lchamsiz masshtabli ko`paytuvchi *g(x)* ni kiritamiz va o`z navbatida

$$\xi=\frac{x}{L}\ ,\eta=\frac{y\sqrt{Re}}{L\,\mathrm{g}(x)} \tag{3.7}$$

(oqimga ko`ndalang koordinata $y$ ushbu $\sqrt{Re}$ ga ko`paytirilgan). Bunday holda o`lchamsiz tok funksiyasi $f(\xi,\eta)$ ushbu ko`rinishda olamiz

$$f(\xi,\eta)=\frac{\psi(x,y)\sqrt{Re}}{LU(x)\mathrm{g}(x)} \tag{3.8}$$

Shunday qilib, tezlik komponentalari u va ϑ quyidagicha bo`ladi

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U\frac{\partial f}{\partial \eta} = Uf', \\ -\sqrt{Re}\vartheta = \sqrt{Re}\frac{\partial \psi}{\partial x} = Lf\frac{d}{dx}(U\mathrm{g}) + U\mathrm{g}(\frac{\partial f}{\partial \xi} - L\frac{\mathrm{g}'}{\mathrm{g}}\eta f') \end{cases} \quad (3.9)$$

bu yerda f' ifoda η bo`yicha differensiallashni anglatsa, $\mathrm{g}'$ - $x$ o`zgaruvchi bo`yicha differensiallashni bildiradi.

Tenglama (3.5) ga nisbatan o`lchamsiz o`zgaruvchilar (3.7) va (3.8) ni kiritsak $f(\xi, \eta)$ funksiya uchun quyidagi differensial tenglamaga kelamiz

$$f''' + \alpha f f'' + \beta\left(1 - f'^2\right) = \frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}_0}\mathrm{g}^2(f'\frac{\partial f'}{\partial \xi} - f''\frac{\partial f}{\partial \xi}), \quad (3.10)$$

bu yerda soddalik uchun α va β sifatida x bo`yicha quyidagi funksiyalar belgilangan

$$\alpha = \frac{L\,\mathrm{g}}{U_0}\frac{d}{dx}(U\mathrm{g}), \beta = \frac{L}{U_0}\mathrm{g}^{\alpha}U', \quad (3.11)$$

bunda

$$U' = \frac{dU}{dx}.$$

Tenglama (3.10) uchun chegaraviy shartlar ushbu ko`rinishda bo`ladi

$f = 0$, $f' = 0$ agar $\eta = 0$ da va $f' = 1$ agar $\eta = \infty$ da.

Bu tenglamaning ayniy yechimlari mavjud bo`ladi, agarda $f$ va $f'$ funksiyalar $\xi$ dan bog`liq bo`lmasa, ya`ni, tenglama (3.10) ning o`ng tomoni bo`lmasa.

Shunday qilib, chegaraviy qatlam tenglamalarining ayniy yechimlari mavjud bo`lishi uchun funksiya $f(\eta)$ quyidagi oddiy differensial tenglamani qanoatlantirishi lozim

$$f''' + \alpha f f'' + \beta\left(1 - f'^2\right) = 0 \quad (3.12)$$

bunda chegaraviy shartlar

$f = 0, f' = 0$, agar $\eta = 0$ da va $f' = 1$ agar $\eta = \infty$ da (3.13)

3-§. Konturli aloqalar.

Chegaraviy qatlam tenglamalari uchun konturli aloqalarni o`rnatish maqsadida, o`lchamsiz parametrlardan foydalanamiz, ammo, soddalik uchun ulardagi shtrixlarni yozmasdan bizga ma`lum bo`lgan tenglamani hosil qilamiz

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{dp}{dx}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad (3.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \vartheta}{\partial y}=0 \qquad (3.15)$$

uning chegaraviy shartlari

$u=0, \vartheta=0,$ agar *y=0* (devorda)

$u=U_0,$ agar $y=\infty$ da bo`ladi.

Shunday qilib, tenglamalar (3.14) va (3.15) da

x o`zini almashtiradi $\frac{x}{L}$,

y o`zini almashtiradi $\frac{y}{L}\sqrt{\frac{U_0 L}{\nu}}$,

u o`zini almashtiradi $\frac{u}{U_0}$

ϑ o`zini almashtiradi $\frac{\vartheta}{U_0}\sqrt{\frac{U_0 L}{\nu}}$,

p o`zini almashtiradi $\frac{p}{\rho U_0^2}$.

Uzluksizlik tenglamasi (15) da u funksiya o`rniga uning qator orqali ifodasi

$$U(x,y)=a_1 y+\frac{a_2}{2!}y^2+\frac{a_3}{3!}y^3+\cdots \qquad (3.16)$$

ni qo`yib, y o`zgaruvchi bo`yicha integrallashni bajarsak tezlikning ko`ndalang komponentasi ϑ ni topamiz:

$$-\vartheta=\frac{a_1}{2!}y^2+\frac{a_2}{3!}y^3+\frac{a_3}{4!}y^4+\cdots$$

So`ngra, $\vartheta$ ning ushbu qiymatini hamda u ning (3.16) dagi qiymatini (3.14) ga qo`yamiz va *y* o`zgaruvchining bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib, $a_1,\ a_2,\ldots$ koeffitsientlar uchun ushbu tenglamalarni hosil qilamiz yoki ushbu qiymatlarni

$$\begin{cases} a_1 \text{ixtiyoriy tanlanadi}, a_2 = f(x), a_3 = 0, \\ a_4 = a_1 a_1 \text{navbatida tanlash ixtiyoriy}, \\ a_5 = 2a_1 f^{'};\ a_6 = 2ff^{'} \\ a_7 = 4a_1^2 a_1^1 - a_1 a_1^{12}, \text{tanlash ixtiyoriy} \\ a_8 = 10a_1^2 f^{''} - 13a_1 a_1^4 f + 9(a_1 a_1^2 + a_1^{12})f, \\ a_9 = 40a_4 ff^{''} - 16a_1 f^{12} \end{cases} \tag{3.17}$$

Shunday qilib, a_1 , a_4 , a_7 , a_{10} , ... koeffitsientlar ixtiyoriy tanlanadi, boshqa barcha koeffitsientlar esa a_1 , a_4 , a_7 , a_{10} , ... lar bilan konturli bog`langan.

IV bob. Chegaraviy qatlam tenglamalarining aniq yechimi.

1-§. Pona atrofidagi oqim.

Chegaraviy qatlam tenglamalari aniq yechimlarining eng sodda sinfi ayniy yechimlardir. Ayniy yechimlar faqat shu holda mavjud bo`ladiki, bunda potensial oqim tezligi x masofa darajasiga proporsional bo`lsa, bu masofa oqimning oldingi tarafidagi kritik nuqtadan hisoblanadi, ya`ni, agar

$$U(x) = u_1 x^m$$

bo`lsa.

Erkli o`zgaruvchi *y* ni ayniy almashtirishlar ushbu tenglamalarni

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial u}{\partial y} = U\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad (4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0 \qquad (4.2)$$

$u = 0, \vartheta = 0$ agar *y=0* da; *u=U(x)* agar $y = \infty$ da oddiy differensial tenglamaga olib keladi hamda ushbu almashtirish quyidagi ko`rinishga ega

$$\eta = y\sqrt{\frac{m+1}{2}\frac{U}{\nu x}} = y\sqrt{\frac{m+1}{2}\frac{u_1}{\nu}}x^{\frac{m-1}{2}} \qquad (4.3)$$

Uzluksizlik tenglamasi (2) tok funksiyasi kiritish orqali integrallanadi, tok funksiyasini quyidagicha olish mumkin

$$\psi(x,y) = \sqrt{\frac{2}{m+1}}\sqrt{\nu u_1}x^{\frac{m+1}{2}}f(\eta).$$

Bu holda tezlik vektori komponentalari u va ϑ

$$\left.\begin{aligned} u &= u_1 x^m f'(\eta) = Uf'(\eta), \\ \vartheta &= \sqrt{-\frac{m+1}{2}\nu u_1 x^{m-1}}\left[f + \frac{m-1}{m+1}\eta f'\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

shunday aniqlanadi. Tezlik komponentalari u va υ ning bu qiymatlarini (4.1) ga qo`yib, yozuvlarni soddalashtirish uchun ushbu belgilashlarni olsak

$$m = \frac{\beta}{2-\beta}, \beta = \frac{2m}{m+1} \qquad (4.5)$$

va hamma hadlarning umumiy ko`paytuvchisi mu_1x^{2m-1} ni tashlab yozsak, biz $f(\eta)$ uchun oddiy differensial tenglamaga kelamiz

$$f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0$$

uning chegaraviy shartlari $f = 0\,, f' = 0$ agar $\eta = 0$; $f' = 1$ agar $\eta = \infty$ da bo`ladi.

Ushbu tezlik taqsimotiga ega bo`lgan

$$\vartheta(x) = u_1 x^m$$

potensial oqim, ponasimon jismda oldingi kritik nuqta yaqinida oqib o`tishda paydo bo`ladi. Ushbu ponaning qiyalik burchagi $\pi\beta$ ga teng. Kritik nuqta yaqinidagi ($\beta = 1\,,\ m = 1$), xuddi shuningdek, tekis plastinkadagi uzunasiga oqib o`tayotgan ($\beta = 0\,,\ m = 0$) chegaraviy qatlam ponasimon jismdan oqib o`tayotgan suyuqlikning xususiy hollari bo`ladi.

Ayniqsa $\beta = 1/2\ ,\ m = 1/3$ bo`lgan hol juda qiziqarli funksiya $f(\eta)$ uchun $\beta$ va $m$ ning ko`rsatilgan qiymatlari differensial tenglama ushbu ko`rinishni oladi:

$$f''' + ff'' + \frac{1}{2}(1 - f'^2) = 0\,.$$

Bu tenglamada quyidagi almashtirishlarni olamiz:

$$\eta = \sqrt{2}\varphi\,, \frac{df}{d\eta} = \frac{d\varphi}{d\xi}$$

va φ uchun tenglamani hosil qilamiz

$$\varphi''' + 2\varphi\varphi'' + 1 + \varphi'^2 = 0\,,$$

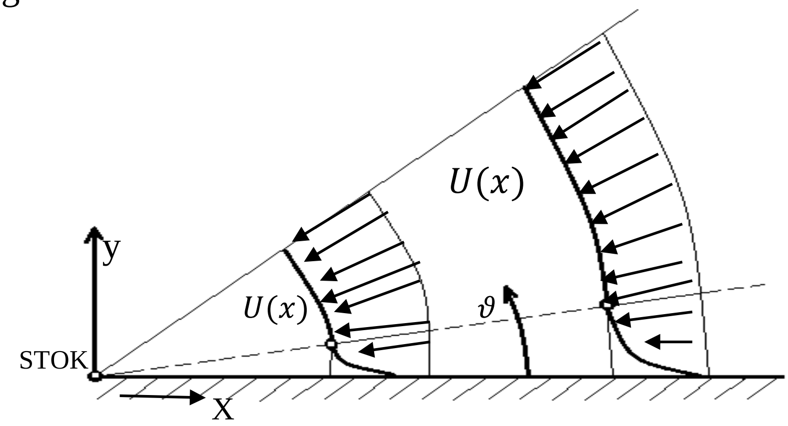
bu tenglama kritik nuqta yaqinidagi o`qqa simmetrik oqimni xarakterlovchi differensial tenglama bilan mos tushadi. Bu shuni anglatadiki, kritik nuqta yaqinidagi o`qqa simmetrik oqim chegaraviy qatlamni hisoblashda pona atrofidagi tekis chegaraviy qatlamni qiyalik burchagi $\pi\beta = \pi/2$ bilan hisoblashga keltirish mumkin ekan.

2-§. Torayuvchi kanaldagi oqim.

Pona atrofidagi oqimga turdosh bo`lgan yana bir potensial oqim

$$U(x) = \frac{u_1}{-x}$$

bo`lib, u ham ayniy yechimlarga olib keladi va $u_1 > 0$ uchun tekis devorlarga ega bo`lgan torayuvchi kanaldagi tekis oqim deb qarash mumkin, bu quyidagi rasmda keltirilgan:



Qiyalik burchagi 2π ga teng va oqim qatlami 1 ga teng bo`lganda, oqib o`tuvchi suyuqlik miqdori

$$Q = 2\pi u_1$$

ga teng. Ayniy almashtirish

$$\eta = y\sqrt{\frac{U}{-x\nu}} = \frac{y}{x}\sqrt{\frac{u_1}{\nu}} = \frac{y}{x}\sqrt{\frac{Q}{2\pi\nu}}$$

va tok funksiyasi kiritib

$$\psi(x,y) = -\sqrt{\nu u_1} f(\eta) ,$$

tezlik vektori komponentalari u va υ uchun

$$u = Uf' , \vartheta = -\sqrt{\nu u_1}\frac{\eta}{x} f' ,$$

ga ega bo`lamiz. Ularning bu qiymatlarini tenglama (4.1) ga kiritib, tok funksiyasi uchun quyidagi differensial tenglamaga kelamiz

$$f''' - f'^2 + 1 = 0. \qquad (4.6)$$

Uning chegaraviy shartlari

$$f' = 0 \text{ agar } \eta = 0 ,$$

$$f' = 1, f'' = 0 \text{ agar } \eta = \infty.$$

bo`ladi. Tenglama (6) ni $f''$ ga ko`paytirib va uni bir marta integrallab

$$f''^2 - \frac{2}{3}(f' - 1)^2(f' + 2) = a,$$

ni hosil qilamiz, bu yerda a integrallash o`zgarmasi. Endi $\eta \to \infty$ cha hosilalar $f' = 1, f'' = 0$ ekanligidan, a=0 bo`ladi va shu sababli

$$\frac{df'}{d\eta} = \sqrt{\frac{2}{3}(f' - 1)^2(f' + 2)}.$$

bo`ladi. Ushbu tenglamani yana bir marta integrallab

$$\eta = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^{f'} \frac{df'}{\sqrt{(f' - 1)^2(f' + 2)}},$$

ga ega bo`lamiz, bunda integrallash o`zgarmasi yana nolga teng bo`lasi, chunki, chegaraviy shartlarga ko`ra $f' = 1$ agar $\eta = \infty$ da. Hosil bo`lgan integral jadvalli integrallar yordamida hisoblanadi va u

$$\eta = \sqrt{2}\left\{Arth\frac{\sqrt{2 + f'}}{\sqrt{3}} - Arth\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$$

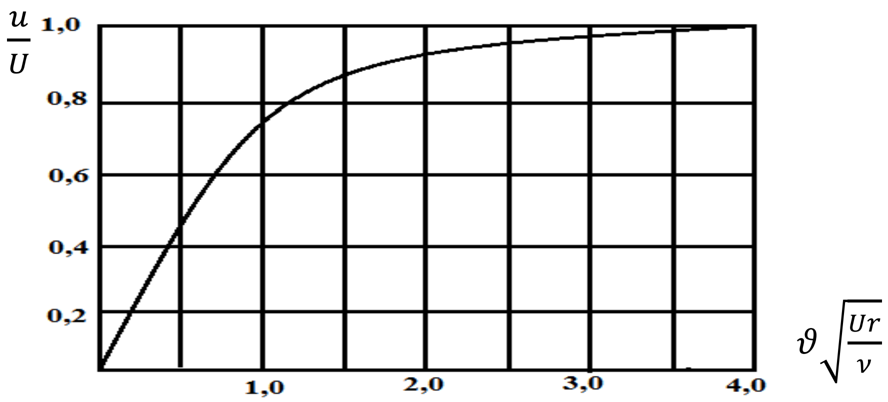
ga teng, yoki uni $f' = u/\vartheta$ ga nisbatan yechsak va $Arth\sqrt{1/3}$ ni uning qiymati 1,146 bilan almashtirsak quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$f' = \frac{u}{U} = 3th^2\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} + 1{,}146\right) - 2. \qquad (4.7)$$

Almashtirish (4.3) ga boshqa ko`rinishni ham berish mumkin, agar qutb koordinata sistemasi $\theta = y/x$ kiritsak va $Q = 2\pi r v$ deb olsak, bu yerda $r$ manbadan radial masofa, bu holda almashtirish ushbu ko`rinishni oladi:

$$\eta = \vartheta\sqrt{\frac{Ur}{\nu}} = \frac{y}{x}\sqrt{\frac{Ur}{\nu}} \qquad (4.8)$$

Tezliklar taqsimoti quyidagi rasmda keltirilgan



η=3 bo`lganda chegaraviy qatlam potensial oqimga tutashib ketadi. O`z navbatida chegaraviy qatlamning qalinligi ushbuga teng

$$\delta = 3z\sqrt{\frac{\nu}{Ur}}$$

ya`ni y $1/\sqrt{Re}$ bilan bir xil tartibli.

3-§. Silindr atrofidagi oqim.
(Blazius qatori)

Ushbu paragrafda Blazius tomonidan tavsiya etilgan va simmetrik hol uchun qaralgan usulni batafsil ko`rib o`tamiz, so`ngra uni doiraviy silindrga tadbiq etamiz. Potensial oqim tezligi quyidagi qator ko`rinishida berilgan bo`lsin

$$U(x) = u_1x + u_3x^3 + u_5x^5 + u_7x^7 + u_9x^9 + u_{11}x^{11} + \cdots \qquad (4.9)$$

Koeffitsientlar $u_1, u_3, \ldots$ jism formasidan bog`liq bo`ladi, ularni ma`lum deb hisoblaymiz. Qator (4.9) ni uning hosilasiga ko`paytiramiz, ya`ni ${dU}/{dx}$ ga va bosimni aniqlash uchun qatorni hosil qilamiz

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = U\frac{dU}{dx} = u_1^2x + 4u_1u_3x^3 + x^5(6u_1u_5 + 3u_3^2) +$$

$$+x^7(8u_1u_7 + 8u_3u_5) + x^9(10u_1u_9 + 10u_3u_7 + 5u_5^2) +$$

$$+x^{11}(12u_1u_{11} + 12u_3u_9 + 12u_5u_7) + \cdots \qquad (4.10)$$

Chegaraviy qatlamning uzluksizlik tenglamasini yana tok funksiyasi $\psi(x, y)$ ni kiritish orqali integrallaymiz.

Chegaradan bo`lgan masofa y o`rniga o`lchamsiz koordinatani kiritamiz

$$\eta = y\sqrt{\frac{u_1}{\nu}}$$

bunda U_0 qator (4.9) dagi birinchi had bilan almashtirilgan, ya`ni $u_1 x$ miqdor bilan.

Bosimni aniqlashga mo`ljallangan qatorga o`xshash qilib, tok funksiyasi $\psi(x,y)$ uchun ushbu qatorni olamiz

$$\psi = \sqrt{\frac{\nu}{u_1}}\{u_1 x f_3(\eta) + 4u_3 x^3 f_1(\eta) + 6u_5 x^5 f_5(\eta) +$$

$$+8u_7 x^7 f_7(\eta) + 10u_9 x^9 f_9(\eta) + 12u_{11} x^{11} f_{11}(\eta) + \cdots \quad (4.11)$$

Qatorning koeffitsientlari bo`lgan $f_1, f_3, ...$ funksiyalar qaralayotgan oqim profiliga bog`liq bo`lmagan miqdorlar bo`lishi uchun, ya`ni, $u_1, u_3, u_5, ...$ koeffitsientlardan bog`liq bo`lmasligi uchun $f_i$ larni $f_1$ dan boshlab quyidagi yig`indi ko`rinishida ifodalaymiz:

$$\left.\begin{aligned}
f_5 &= g_5 + \frac{u_3^2}{u_1 u_5} h_5,\\
f_7 &= g_7 + \frac{u_3 u_5}{u_1 u_7} h_7 + \frac{u_3^3}{u_1^2 u_7} k_7,\\
f_9 &= g_9 + \frac{u_3 u_7}{u_1 u_9} h_9 + \frac{u_5^3}{u_1 u_9} k_9 + \frac{u_3^2 u_5}{u_1^2 u_9} j_9 + \frac{u_3^4}{u_1^3 u_9} q_9,\\
f_{11} &= g_{11} + \frac{u_3 u_9}{u_1 u_{11}} h_{11} + \frac{u_5 u_7}{u_1 u_{11}} k_{11} + \frac{u_3^2 u_7}{u_1^2 u_{11}} j_{11} +\\
&\quad + \frac{u_3 u_5^2}{u_1^2 u_{11}} q_{11} + \frac{u_3^3 u_5}{u_1^3 u_{11}} m_{11} + \frac{u_3^5}{u_1^4 u_{11}} n_{11}.
\end{aligned}\right\} \quad (4.12)$$

Bu holda shtrixlar orqali η bo`yicha differensiallashni belgilasak, tezlik komponentalari $u$ va $\vartheta$ uchun ushbu qatorlarga ega bo`lamiz:

$$u = u_1 x_1 f_1' + 4u_3 x^3 f_3' + 6u_5 x^5 f_5' + 8u_7 x^7 f_7' + 10u_9 x^9 f_9' + \cdots \quad (4.13)$$

$$\vartheta = -\sqrt{\frac{\nu}{u_1}}\begin{bmatrix} u_1 f_1 + 12u_3 x^2 f_3 + 30u_5 x^4 f_5 + 56u_7 x^6 f_7 + \\ +90u_9 x^8 f_9 + 132u_{11} x^{10} f_{11} + \cdots \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Differensial tenglama (4.1) ga U, u, ϑ lar o`rniga ularning (4.10), (4.13), (4.14) ifodalar orqali yozilgan qiymatlarini qo`ysak x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirsak, $f_1, f_3, f_5, ...$ larni aniqlash uchun oddiy differensial tenglamalar sistemasiga kelamiz. Bu sistemaning dastlabki to`rtta tenglamasi quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi:

$$\left.\begin{aligned} f_1'^2 - f_1 f_1'' &= 1 + f_1''', \\ 4f_1' f_3' - 3f_1'' f_3 - f_1 f_3'' &= 1 + f_3''', \\ 6f_1' g_5' - 5f_1'' g_5 - f_1 g_5'' &= 1 + g_5''', \\ 6f_1' h_5' - 5f_1'' h_5 - f_1 h_5'' &= \frac{1}{2} + h_5''' - 8(f_3'^2 - f_3 f_3''). \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

$f_1, f_3, f_5, \ldots$ funksiyalar uchun chegaraviy shartlar ushbu ko`rinishda bo`ladi:

$$\left.\begin{aligned} f_1 = f_1' = 0,\ f_3 = f_3' = 0,\ g_5 = g_5' = 0, h_5 = h_5' = 0 \text{ agar } \eta = 0; \\ f_1' = 1, f_3' = \frac{1}{4}, g_5' = \frac{1}{6}, h_5' = 0 \text{ agar } \eta = 0. \end{aligned}\right\}$$

4-§. Chegaraviy qatlam tenglamalasini issiqlik o`tkazish tenglamasiga aylantirish

Ushbu paragrafda chegaraviy qatlam tenglamalarini, ularning matematik tomondan o`ziga xos jixatlarini ochib berishga imkon beradigan almashtirish xususida fikr yuritiladi. Bunday almashtirish o`tkazish uchun to`g`ri burchakli koordinatalar x va y o`rniga yangi erkli o`zgaruvchilar kiritiladi: x koordinata va tok funksiyasi ψ . Kiritilgan yangi koordinatalar $\xi = x, \eta = \psi$ uchun hosilalar $\partial u / \partial x$ va $\partial v / \partial y$ ni hisoblaymiz.

Bunda ushbuni nazarda tutgan holda

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}\ , \vartheta = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

quyidagiga ega bo`lamiz

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \vartheta\frac{\partial u}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 - \frac{\partial u}{\partial \psi}.$$

Ushbu ifodalarni statsionar chegaraviy qatlam tenglamasi

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

kiritsak,

$$u\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi}=\nu u\frac{\partial}{\partial \psi}\left(u\frac{\partial u}{\partial \psi}\right). \qquad (4.16)$$

ga ega bo`lamiz. So`ngra to`liq bosim deb ataluvchi ifodani kiritamiz

$$\mathrm{g}=p+\frac{\rho}{2}\vartheta^2$$

(juda kichik miqdor $\rho v^2/2$ ni inobatga olmaymiz); u holda, tenglama (4.16), agarda ξ o`zgaruvchidan *x* o`zgaruvchiga o`tsak quyidagi ko`rinishni oladi:

$$\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial x}=\nu u\frac{\partial^2 \mathrm{g}}{\partial \psi^2} \qquad (4.17)$$

Endi

$$u=\sqrt{\frac{2}{\rho}[\mathrm{g}-p(x)]}$$

ekanliginni yodda tutish lozim.

Shunday qilib, to`liq bosim $\mathrm{g}(x,\psi)$ ni aniqlash uchun xususiy hosilali differensial tenglamaga ega bo`ldik. Uning chegaraviy shartlari

$\mathrm{g}=p(x)$ agar $\psi=0$ da;

$\mathrm{g}=p(x)+\frac{\rho}{2}U^2=const$ agar $\psi=\infty$ da.

So`ngra *xy* tekislikda oqim dinamikasini hosil qilish uchun $\psi$ o`zgaruvchidan yana *y* o`zgaruvchiga quyidagi almashtirish orqali o`tish lozim, ya`ni

$$y=\int\frac{d\psi}{u}=\sqrt{\frac{\rho}{2}}\int\limits_{\psi=0}\frac{d\psi}{\sqrt{\mathrm{g}-p(x)}}.$$

Tenglama (4.16) issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasiga o`xshash. Haqiqatdan, bir jinsli sterjenda issiqlik tarqalish tenglamasi

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (4.17)$$

bilan aniqlanadi, bu yerda *T* – temperatura, *t* – vaqt, *x* – uzunlikni ko`rsatuvchi koordinata, o`tkazuvchanlik koeffitsienti. Tog`rirog`i, tenglama (4.16) tenglama (4.17) dan farqli ravishda chiziqli bo`lmagan tenglama, unga temperatura o`tkazuvchanlik koeffitsienti a o`rniga $\nu u$ miqdor kirgan, $y$ esa ham erkli o`zgaruvchi x dan, ham erksiz o`zgaruvchi $g$ dan bog`liq.

5-§. Sonli hisoblashlar.

Ushbu paragrafda issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasini sonli yechish algoritmini qaraymiz. Dastlab differensial masalani qo`yamiz

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \; 0 < x < 1, \; 0 < t < T \qquad (4.18)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \; 0 \le x \le 1 \qquad (4.19)$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \; u(1,t) = \mu_2(t) \qquad (4.20)$$

Differensial masala (4.18) – (4.20) qaralayotgan soha to`g`ri to`rtburchakli

$$\overline{D} = \{0 \le x \le 1 \,, 0 \le t \le T\}$$

sohadan iborat, $u(x,t)$ - sterjenning x nuqtasidagi vaqtning t momentidagi temperatura, $f(x,t)$ - tashqi issiqlik manbalarining zichligi, a^2 - temperatura o`tkazuvchanlik koeffitsienti, $u_0(x)$ - boshlang`ich temperature, $\mu_1(t)$ va $\mu_2(t)$ - sterjenning chap va o`ng tomonlaridagi temperaturalar. Masala (4.18) – (4.20) ning yechimi $u(x,t)$ ni toppish talab qilinadi.

Endi differensial masala (4.18) – (4.20) ga mos ayirmali masalani qo`yamiz

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = a^2 \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \varphi_i^j \;, 0 < i < N, 0 \le j < M, \qquad (4.21)$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \; 0 \le i \le N \qquad (4.22)$$

$$y_0^{j+1} = \mu_1\left(t_{j+1}\right), \; y_N^{j+1} = \mu_2\left(t_{j+1}\right), \; 0 \le j < M. \qquad (4.23)$$

$$\varphi_i^j = f(x_i \,, t_j + \tfrac{\tau}{2})$$

Sistema (4.21) – (4.23) Progonka metodi bilan yechiladi, tenglama (4.21) ni

$$A_i Y_{i-1} - C_i Y_i + B_i Y_{i+1} = -F_i \;, \quad 0 < i < N$$

ko`rinishga keltiramiz

$$\frac{\tau}{h^2} y_{i-1}^{j+1} - \left(1 + 2\frac{\tau}{h^2}\right) y_i^{j+1} + \frac{\tau}{h^2} y_{i+1}^{j+1} = -\left(y_i^j + \tau y_i^j\right), 0 < i < N \qquad (4.24)$$

Sistema (4.24), (4.22) – (4.23) Progonka metodi bilan yechiladi.

$$\begin{cases} \vec{\alpha}_{i+1} = \frac{\beta_i}{C_i-\alpha_i A_i}, \alpha_1 = 0 \; i = 1,2,\dots,N-1 \\ \vec{\beta}_{i+1} = \frac{A_i\beta_i+F_i}{C_i-\alpha_i A_i}, \beta_1 = \mu_1\left(t_{j+1}\right), \; i = 1,2,\dots,N-1 \\ y_M^{j+1} = \mu_2(t_{j+1}) \\ \overleftarrow{y}_i^{j+1} = \alpha_{i+1}y_i + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, N-2, \dots 2,1,0, \\ \qquad\qquad\qquad j = 0,1,2,\dots,M-1 \end{cases} \tag{4.25}$$

$$A_i = B_i = \frac{\tau}{h^2}, \quad C_i = 1 + 2\frac{\tau}{h^2}, \qquad F_i = y_i^j + \tau y_i^j$$

Sipov funksiyalari metodi bilan differensial masalani qo`yamiz. Sipov funksiyasini

$$u(x,t) = x^4 + t^3$$

ko`rinishida izlaymiz, bu holda

$$f(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3t^2 - 12x^2,$$

$$y_i^0 = u_0(x_i) = x_i^4 = (ih)^4,$$

$$y_0^{j+1} = t_{j+1}^3 = (t_j+\tau)^3, \; y_N^{j+1} = 1 + (t_j+\tau)^3$$

Qo`yilgan masalani progonka metodi bilan yechish algoritmi uchun Pascal tilida dastur tuzamiz va sonli hisoblashlar o`tkazamiz.

Dasturimiz quyidagicha bo`ladi:

```
Program progonka;
const n=10;m=5;t=0.05;
var y,v:array[0..n,0..m] of real;
alfa,betta:array[0..n] of real;
F,h,ta,p1,b,c,a,AK:real;
i,j:integer;
begin
write('AK=');readln(AK);
h:=1/n;ta:=t/m;
for i:=1 to n do
```

```
y[i,0]:=exp(3*ln(i*h));
a:=AK*ta/(h*h);b:=a;c:=1+2*a;
for j:=0 to m-1 do
 begin
 y[0,j+1]:=((j+1)*ta)*((j+1)*ta)*((j+1)*ta);
 y[n,j+1]:=1+y[0,j+1];
 for i:=1 to n-1 do
 begin
 F:=y[i,j]+3*(j*ta)*(j*ta)-12*(i*h)*(i*h);
 p1:=c-alfa[i]*a;
 alfa[i+1]:=b/p1;betta[i+1]:=(a*betta[i]+F)/p1;
 end;
 for i:=n-1 downto 0 do
 y[i,j+1]:=alfa[i+1]*y[i+1,j+1]+betta[i+1];
 end;
 for j:=0 to m do
 for i:=0 to n do
 v[i,j]:=(i*h)*(i*h)*(i*h)*(i*h)+(j*ta)*(j*ta)*(j*ta);
 for j:=0 to m do
 for i:=0 to n do
 writeln('J=',j,',I=',i,'y[',i,'.',j,']=',y[i,j],'V[',i,'.',j,']=',v[i,j]);
 end.
```

Dastur natijasi quyidagicha bo`ladi:

AK=0.1 da

J=0,	I=0	y[0.0]=0	V[0.0]=0
J=0,	I=1	y[1.0]=0.001	V[1.0]=0.0001
J=0,	I=2	y[2.0]=0.008	V[2.0]=0.0016
J=0,	I=3	y[3.0]=0.027	V[3.0]=0.0081
J=0,	I=4	y[4.0]=0.064	V[4.0]=0.0256
J=0,	I=5	y[5.0]=0.125	V[5.0]=0.0625

J=0,	I=6	y[6.0]=0.216	V[6.0]=0.1296
J=0	,I=7	y[7.0]=0.343	V[7.0]=0.2401
J=0,	I=8	y[8.0]=0.512	V[8.0]=0.4096
J=0,	I=9	y[9.0]=0.729	V[9.0]=0.6561
J=0,	I=10	y[10.0]=1	V[10.0]=1
J=1,	I=0	y[0.1]=0	V[0.1]=1E-6
J=1,	I=1	y[1.1]=-0.140385912330836	V[1.1]=0.000101
J=1,	I=2	y[2.1]=-0.494630947970032	V[2.1]=0.001601
J=1,	I=3	y[3.1]=-1.07518546330954	V[3.1]=0.008101
J=1,	I=4	y[4.1]=-1.87759461174449	V[4.1]=0.025601
J=1,	I=5	y[5.1]=-2.89594987762433	V[5.1]=0.062501
J=1,	I=6	y[6.1]=-4.12380391974744	V[6.1]=0.129601
J=1,	I=7	y[7.1]=-5.549697159345	V[7.1]=0.240101
J=1,	I=8	y[8.1]=-7.10256199239259	V[8.1]=0.409601
J=1,	I=9	y[9.1]=-8.00104674936605	V[9.1]=0.656101
J=1,	I=10	y[10.1]=1.000001	V[10.1]=1.000001
J=2,	I=0	y[0.2]=0	V[0.2]=8E-6
J=2,	I=1	y[1.2]=-0.301780684126147	V[1.2]=0.000108
J=2,	I=2	y[2.2]=-1.0205090862054	V[2.2]=0.001608
J=2,	I=3	y[3.2]=-2.2010188706384	V[3.2]=0.008108
J=2,	I=4	y[4.2]=-3.8428627283599	V[4.2]=0.025608
J=2,	I=5	y[5.2]=-5.94038775223556	V[5.2]=0.062508
J=2,	I=6	y[6.2]=-8.48529152222359	V[6.2]=0.129608
J=2,	I=7	y[7.2]=-11.4480713169731	V[7.2]=0.240108
J=2,	I=8	y[8.2]=-14.5975926880031	V[8.2]=0.409608
J=2,	I=9	y[9.2]=-15.9004210151386	V[9.2]=0.656108
J=2,	I=10	y[10.2]=1.000008	V[10.2]=1.000008
J=3,	I=0	y[0.3]=0	V[0.3]=2.7E-5
J=3,	I=1	y[1.3]=-0.481207048946027	V[1.3]=0.000127
J=3,	I=2	y[2.3]=-1.56867774609085	V[2.3]=0.001627

J=3,	I=3	y[3.3]=-3.34983504209018	V[3.3]=0.008127
J=3,	I=4	y[4.3]=-5.83115405260728	V[4.3]=0.025627
J=3,	I=5	y[5.3]=-9.00738630559811	V[5.3]=0.062527
J=3,	I=6	y[6.3]=-12.8656040922144	V[6.3]=0.129627
J=3,	I=7	y[7.3]=-17.3389475787382	V[7.3]=0.240127
J=3,	I=8	y[8.3]=-21.9330536829134	V[8.3]=0.409627
J=3,	I=9	y[9.3]=-23.0937697361916	V[9.3]=0.656127
J=3,	I=10	y[10.3]=1.000027	V[10.3]=1.000027
J=4,	I=0	y[0.4]=0	V[0.4]=6.4E-5
J=4,	I=1	y[1.4]=-0.676933999099328	V[1.4]=0.000164
J=4,	I=2	y[2.4]=-2.13813749973166	V[2.4]=0.001664
J=4,	I=3	y[3.4]=-4.52093853677208	V[3.4]=0.008164
J=4,	I=4	y[4.4]=-7.84177452063152	V[4.4]=0.025664
J=4,	I=5	y[5.4]=-12.0958151847334	V[5.4]=0.062564
J=4,	I=6	y[6.4]=-17.2611446401884	V[6.4]=0.129664
J=4,	I=7	y[7.4]=-23.2088795753839	V[7.4]=0.240164
J=4,	I=8	y[8.4]=-29.0829344770359	V[8.4]=0.409664
J=4,	I=9	y[9.4]=-29.6827973199127	V[9.4]=0.656164
J=4,	I=10	y[10.4]=1.000064	V[10.4]=1.000064
J=5,	I=0	y[0.5]=0	V[0.5]=0.000125
J=5,	I=1	y[1.5]=-0.887433965038498	V[1.5]=0.000225
J=5,	I=2	y[2.5]=-2.7278675894687	V[2.5]=0.001725
J=5,	I=3	y[3.5]=-5.71360211126924	V[3.5]=0.008225
J=5,	I=4	y[4.5]=-9.87397237804145	V[4.5]=0.025725
J=5,	I=5	y[5.5]=-15.204321218913	V[5.5]=0.062625
J=5,	I=6	y[6.5]=-21.6677304015799	V[6.5]=0.129725
J=5,	I=7	y[7.5]=-29.0449971981621	V[7.5]=0.240225
J=5,	I=8	y[8.5]=-36.0314402225271	V[8.5]=0.409725
J=5,	I=9	y[9.5]=-35.7509407018045	V[9.5]=0.656225
J=5,	I=10	y[10.5]=1.000125	V[10.5]=1.000125

AK=0.01 da

J=0,	I=0	y[0.0]=0	V[0.0]=0
J=0,	I=1	y[1.0]=0.001	V[1.0]=0.0001
J=0,	I=2	y[2.0]=0.008	V[2.0]=0.0016
J=0,	I=3	y[3.0]=0.027	V[3.0]=0.0081
J=0,	I=4	y[4.0]=0.064	V[4.0]=0.0256
J=0,	I=5	y[5.0]=0.125	V[5.0]=0.0625
J=0,	I=6	y[6.0]=0.216	V[6.0]=0.1296
J=0,	I=7	y[7.0]=0.343	V[7.0]=0.2401
J=0,	I=8	y[8.0]=0.512	V[8.0]=0.4096
J=0,	I=9	y[9.0]=0.729	V[9.0]=0.6561
J=0,	I=10	y[10.0]=1	V[10.0]=1
J=1,	I=0	y[0.1]=0	V[0.1]=1E-6
J=1,	I=1	y[1.1]=-0.121316468326227	V[1.1]=0.000101
J=1,	I=2	y[2.1]=-0.474279769275136	V[2.1]=0.001601
J=1,	I=3	y[3.1]=-1.05521999773767	V[3.1]=0.008101
J=1,	I=4	y[4.1]=-1.85815999996716	V[4.1]=0.025601
J=1,	I=5	y[5.1]=-2.87709999891222	V[5.1]=0.062501
J=1,	I=6	y[6.1]=-4.10603988907927	V[6.1]=0.129601
J=1,	I=7	y[7.1]=-5.5389686871728	V[7.1]=0.240101
J=1,	I=8	y[8.1]=-7.16876620254654	V[8.1]=0.409601
J=1,	I=9	y[9.1]=-8.87518397257399	V[9.1]=0.656101
J=1,	I=10	y[10.1]=1.000001	V[10.1]=1.000001
J=2,	I=0	y[0.2]=0	V[0.2]=8E-6
J=2,	I=1	y[1.2]=-0.245689271733333	V[1.2]=0.000108
J=2,	I=2	y[2.2]=-0.958658884177326	V[2.2]=0.001608
J=2,	I=3	y[3.2]=-2.13953998684029	V[3.2]=0.008108
J=2,	I=4	y[4.2]=-3.78241999976516	V[4.2]=0.025608
J=2,	I=5	y[5.2]=-5.88129999249078	V[5.2]=0.062508
J=2,	I=6	y[6.2]=-8.43017934307215	V[6.2]=0.129608

J=2,	I=7	y[7.2]=-11.4230040929413	V[7.2]=0.240108
J=2,	I=8	y[8.2]=-14.849369419659	V[8.2]=0.409608
J=2,	I=9	y[9.2]=-18.3660564576182	V[9.2]=0.656108
J=2,	I=10	y[10.2]=1.000008	V[10.2]=1.000008
J=3,	I=0	y[0.3]=0	V[0.3]=2.7E-5
J=3,	I=1	y[1.3]=-0.37150454869301	V[1.3]=0.000127
J=3,	I=2	y[2.3]=-1.44453679335369	V[2.3]=0.001627
J=3,	I=3	y[3.3]=-3.22535995565125	V[3.3]=0.008127
J=3,	I=4	y[4.3]=-5.70817999904456	V[4.3]=0.025627
J=3,	I=5	y[5.3]=-8.886999 37755	V[5.3]=0.062527
J=3,	I=6	y[6.3]=-12.7558177303881	V[6.3]=0.129627
J=3,	I=7	y[7.3]=-17.3084742219967	V[7.3]=0.240127
J=3,	I=8	y[8.3]=-22.5281436191413	V[8.3]=0.409627
J=3,	I=9	y[9.3]=-27.7452329645192	V[9.3]=0.656127
J=3,	I=10	y[10.3]=1.000027	V[10.3]=1.000027
J=4,	I=0	y[0.4]=0	V[0.4]=6.4E-5
J=4,	I=1	y[1.4]=-0.49815458578206	V[1.4]=0.000164
J=4,	I=2	y[2.4]=-1.93131288046906	V[2.4]=0.001664
J=4,	I=3	y[3.4]=-4.31207988669301	V[3.4]=0.008164
J=4,	I=4	y[4.4]=-7.63483999709319	V[4.4]=0.025664
J=4,	I=5	y[5.4]=-11.8935999123568	V[5.4]=0.062564
J=4,	I=6	y[6.4]=-17.0823540255443	V[6.4]=0.129664
J=4,	I=7	y[7.4]=-23.1947376543524	V[7.4]=0.240164
J=4,	I=8	y[8.4]=-30.2034645187385	V[8.4]=0.409664
J=4,	I=9	y[9.4]=-37.0142813428496	V[9.4]=0.656164
J=4,	I=10	y[10.4]=1.000064	V[10.4]=1.000064
J=5,	I=0	y[0.5]=0	V[0.5]=0.000125
J=5,	I=1	y[1.5]=-0.625037697085518	V[1.5]=0.000225
J=5,	I=2	y[2.5]=-2.41838652451688	V[2.5]=0.001725
J=5,	I=3	y[3.5]=-5.39909975673004	V[3.5]=0.008225

J=5,	I=4	y[4.5]=-9.56179999264661	V[4.5]=0.025725
J=5,	I=5	y[5.5]=-14.9004997839051	V[5.5]=0.062625
J=5,	I=6	y[6.5]=-21.4091867299983	V[6.5]=0.129725
J=5,	I=7	y[7.5]=-29.0811441214882	V[7.5]=0.240225
J=5,	I=8	y[8.5]=-37.873748226551	V[8.5]=0.409725
J=5,	I=9	y[9.5]=-46.174723112858	V[9.5]=0.656225
J=5,	I=10	y[10.5]=1.000125	V[10.5]=1.000125

XULOSA

1. Chegaraviy qatlam tenglamalari chiqarildi va tahlil qilindi.
2. Chegaraviy qatlam tenglamalarini integrallash masalasi qarab chiqildi.
3. Chegaraviy qatlam tenglamalarining umumiy xossalari o`rganildi, Reynol`ds soni, ayniy yechimlar, konturli aloqalar uchun tenglamalar chiqarildi.
4. Turli formadagi jismlar pona atrofidagi oqim, torayuvchi kanaldagi oqim va silindr atrofidagi oqimlar uchun chegaraviy qatlam tenglamalari chiqarildi, ularga mos chegaraviy shartlar qo`yildi.
5. Chegaraviy qatlam tenglamalarini issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasiga olib keladigan almashtirishlar o`tkazildi.
6. Issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasini sonli yechish uchun Pascal tilida dastur tuzildi va sonli hisoblashlar o`tkazildi. Hisoblash natijalari algoritm va dasturning to`g`ri amalga oshirilganligini ko`rsatadi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro`yxati

1. Лин Ц.Ц. «Теория гидродинамической устойчивости». –М.: Иностранная литература., 1958−195с.
2. Бетчов Р. , Кпиминале В. «Вопросы гидродинамической устойчивости». –М.: Мир, 1971 –350с.
3. Шлихтинг Г. «Теория пограничного слоя» –М.: Наука, 1974 –571с.
4. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. «Гидродинимическая устойчивость и турбулентность». –Новосибирск: Наука, Сиб. отд –ние, 1977 –366с.
5. Дразин Ф. «Введение в теорию гидродинамической устойчивости». –М.:Физматлит, 2005 –88с.
6. Orszag S. A. “Accurate Solution of the Orr−Sommerfeld Stability Equation”//J.fluid mech. −1971.−№4(50).−P.689−701.
7. Grosch C.E., Salwen H. “The Stability of steady and time development plane Poiseulle flow”// J.fluid mech. −1968. −№1(34). –P.177−205.
8. Zebib A. “A Chebyshev Method for the Solution of boundary value problems”//J.comput.phys. −1984. −№3(53). –P.443−455.
9. Абуталиев Ф. Б., Нармурадов Ч. Б. “Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости” – Ташкент, Фан ва техналогия, 2011−188с.
10. Марчук Г. И. “Методы вычеслительной математики” –М.: Наука, 1980−536.
11. Самарский А. А. «Теория разносных схем» −М.:Наука, 1977−656.
12. Бахвалов Н. С. «Численные методы». –М.: Наука , 2003−632.
13. Пашковский С. «Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева » −М.: Наука. 1983−384с.
14. Сёге Г. «Ортогональные многочлены» −М.: Физматлит., 1962−500с.
15. Калиткин Н.Н. «Численные методы» −М.: Наука, 1980−426с.
16. Самарский А. А. «Введение в численные методы» −М.: Наука, 2005−288с.

17. Волков Е. А. «Численные методы» −М.: Наука, 2007−256с.

18. Березин И.С., Жидков Н.П. «Методы вычислений. Том 1». – М.: Наука, 1966. – 632 с.

19. Васильев Ф.П. «Численные методы решения экстремальных задач». – М.: Наука, 1980. – 520 с.

20. Годунов С.К., Рябенький В.С. «Разностные схемы (введение в теорию)».– М.: Наука, 1973. – 400 с.

21. Дыхненко Л.М. и др. «Основы моделирования сложных систем: Учебное пособие для втузов». – Киев: Вища школа. 1981. – 359 с.

22. Ибрагимов И.А. и др. «Моделирование систем: Учебное пособие». – Баку: Азинефтехим, 1989. – 83 с.

23. Лебедев А.Н. «Моделирование в научно-технических исследованиях». М.: Радио и связь, 1989. – 224с.

24. Советов Б.Я., Яковлев С.Я. «Моделирование систем: Учебник для вузов».– М.: "Высшая школа", 1998. – 320 с.

25. Хикс Ч.Р. «Основные принципы планирования эксперимента». – М.: Мир, 1967. – 406 с.

26. Шилейко А.В., Кочнев В.Ф., Химушин Ф.Ф. «Введение в информационную теорию систем». – М.: Радио и связь, 1985. – 280 с.

27. Nazirov Sh.A, Musayev M.M., Ne'matov A.N., Qobulov R.V. "Delphi tilida dasturlash asoslari". –T.: G'ofur G'ulom, 2007 –167b.

28. Файсман А. «Профессиональное программирование на Турбо Паскале». –М.: –Санкт –Петербург. 1992г.

29. G'ulomov S. "Axborot tizimlari va texnalogiyalari".–T.: «Sharq», 2000 y.

30. Oripov M., Haydarov A. "Informatika asoslari".–T.: «O'qituvchi0», 2002 y.

31. Abduqodirov A., Xaitov A., Rashidov R. "Axborot texnalogiyalari". – T.: «O'qituvchi», 2002 y.

32. Култин М.В. «Програмирование в Турбо Паскале и Делпхи». –М.: –Санкт –Петербург. 2002г

Termiz Davlat Universiteti Fizika – matematika fakulteti Amaliy matematika va axborot texnalogiyalari mutaxasisligi 2- bosqich talabasi Shonazarov Soatmurotning “Laminar chegaraviy qatlam muammosi va uni sonli modellashtirish” mavzusidagi magistrlik dissertatsiyasiga

T A Q R I Z

Magistrlik dissertatsiyasida kirish, to`rtta bob, o`n uchta paragraf, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro`yxati keltirilgan.

Birinchi bobda chegaraviy qatlam tenglamalari va chegaraviy qatlamning oqib o`tayotgan jismdan yoki chegaradan uzilishi holatlari bayon qilingan.

Dissertatsiyasining ikkinchi bobida qisilmaydigan yopishqoq suyuqlikning yarim cheksiz tekis plastinkadagi oqimi qaralgan bo`lib, bunda chegaraviy qatlam tenglamalarini integrallash, suyuqlikning ishqalanish qarshiligi ta`siri va chegaraviy qatlam tenglamalari chiqarilgan.

Chegaraviy qatlam tenglamalarining umumiy xossalari uchinchi bobda keltirilgan bo`lib, unda Reynol`de soni, kritik Reynol`de soni, ayniy yechimlar va konturli aloqalar to`g`risida ma`lumotlar keltirilgan.

To`rtinchi bobda ba`zi oqimlar, xususan, pona atrofidagi oqim, torayuvchi kanaldagi oqim silindr atrofidagi oqim uchun chegaraviy qatlam tenglamalarining aniq yechimlarini olish yo`llari ko`rsatilgan, chegaraviy qatlam tenglamalari issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasiga keltirilgan. Hosil bo`lgan tenglamaga mos differensial va ayirmali masala qo`yilgan, ayirmali masalani yechish algoritmi chiqarilgan, algoritm uchun Pascal tilida kompyuter dasturi tuzilgan va sonli hisoblashlar o`tkazilgan. Sipov funksiyalari metodi bilan olib borilgan hisoblashlar tanlangan Sipov funksiyasi va masalaning kompyuterda hisoblangan taqribiy yechimi o`zaro yaqin ekanligini ko`rsatadi.

Magistrlik dissertatsiyasi “Amaliy matematika va axborot texnalogiyalari” mutaxasisligi talablariga to`liq javob beradi.

Taqrizchi:

iqtisod fanlari

nomzodi, dotsent Safarmaxmatov N