O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O`RTA MAXSUS

TA`LIM VAZIRLIGI
TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI

Qayd raqami___ **“Tasdiqlayman ”**

O’quv ishlari pro.
________ O’.Axmedov
«____» ____ 2018

“Differensial tenglamalar” fani bo’yicha

O`QUV- USLUBIY MAJMUA

TERMIZ – 2018

Mazkur o’quz-uslubiy majmua Oliy va o’rta maxsus ta’lim vazirligining 2016 yil 6 apreldagi 137-sonli buyrug’i bilan tasdiqlangan o’quv rela va dastur asosida   tayorlandi.

Tuzuvchilar: **f.m.f.n I.Xayrullaev.**
kat.o’qit.   X.Islomov.

Ushbu o’quv uslubiy majmua Termiz davlat universiteti   O’quv -uslubiy Kengashining   2018 yil   ___ dagi___ sonli   qarori bilan foydalanishga tavsiya qilingan.

MUNDARIJA

I.Sillabus……………………………………………………….
II.1. Ishchi o'quv reja……………………………………………………
II.2. Namunaviy va ishchi o'quv dastur………………………………..
III. Modulni o'qitishda foydalaniladigan interfoal ta'lim metodlari.

I-SEMESTR

IV. Ma'ruza materiallari.

1-ma'ruza. Oddiydifferentsial tenglamalarga olib keluvchi amaliy masalalar…………………………………………..
2-ma'ruza. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differentsial tenglamalar. Yechim tushunchasi. Koshi masalasi……………………
3-ma'ruza.Yechimning mavjudligi va yagonaligi haqida teorema. Yechimning geometrik ma'nosi.,……………………………………….

4-ma'ruza.O`zgaruvchilari ajralgan va unga keltiriladigan differentsial tenglamalar. O`zgaruvchilarigi nisbatan bir jinsli tenglamalar……………………………………………………………..

5-ma'ruza. Chiziqli differentsial tenglamalar. Yechimning xossalari. O`zgarmasni variatsiyalash usuli………………………………………
6-ma'ruza. Bernulli va Rikkati tenglamalari………………………….
7-ma'ruza. To`la differentsialli tenglamalar. Integrallovchi ko`paytuvchi

8-ma'ruza.Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differentsial tenglamalar. ……………………………………………….

9-ma'ruza. Parametr kiritish yo`li bilan tenglamalarni integrallash. Lagranj va Klero tenglamalari…………………..

10-ma'ruza n-tartibli differentsial tenglamalar. Yechim, umumiy yechim, Koshi masalasining qo'yilishi…………………………..

11-ma'ruza.Yuqori tartibli tenglamalarning tartibini pasaytirish…..

12-ma'ruza.O`zgaruvchilariga nisbatan bir jinsli va umumlashgan bir jinsli yuqori tartibli tenglamalarni integrallash………………

13-ma'ruza.Bir jinsli chiziqli differentsial tenglamalar. Yechimning asosiy xossalari. ……………………………………………

14-ma'ruza.Vronskiy determinanti va uning xossalari. Yechimning fundamental sistemasi……………………………………

15-ma'ruza Ostrogradskiy -Liuvill formulasi…………………………..

16-ma’ruza.Bir jinsli bo`lmagan $n-$ tartibli chiziqli differentsial tenglamalar. O`zgarmasni variatsiyalash usuli. ………….

17-ma’ruza.Xususiy yechimni topishning Koshi usuli. O`zgarmas koeffitsyientli chiziqli differentsial tenglamalar……………………..

18-ma’ruza.Bir jinsli bo`lmagan o`zgarmas koeffitsyienti chiziqli differentsial tenglamalar.……………………………………………….

V. AMALIY MASHG’ULOT MATERIALLARI

1-Amaliy mashg’ulot. Oddiydifferentsial tenglamalarga olib keluvchi amaliy masalalar………………………..

5-Amaliy mashg’ulot. Chiziqli differentsial tenglamalar. i. O`zgarmasni variatsiyalash usuli………………………………………

6-Amaliy mashg’ulot.Bernulli va Rikkati tenglamalari………………………….

13-Amaliy mashg’ulot.Bir jinsli chiziqli differentsial tenglamalar. Chiziqli bog‘liq va chiziqli erkli funksiyalar………………………….

14-Amaliy mashg’ulot.Vronskiy determinanti va uning xossalari. Yechimning fundamental sistemasi………………………………………

15-Amaliymashg’ulotOstrogradskiy-Liuvill formulasi…………………………..

16-Amaliy mashg’ulot. $n-$ tartibli chiziqli differentsial tenglamalar. O`zgarmasni variatsiyalash usuli. ……………………………………

17-Amaliy mashg’ulot.Xususiy yechimni topishning Koshi usuli. O`zgarmas koeffitsyientli chiziqli differentsial tenglamalar……………………..
18-Amaliy mashg’ulot.Bir jinsli bo`lmagan o`zgarmas koeffitsyienti chiziqli differentsial tenglamalar………………………………………

II-SEMESTR

IV.MA’RUZA MATERIALLARI

20-ma’ruza.Differentsial tenglamalar sistemasini normal ko`rinishga keltirish…………………………………………………………….

21-ma’ruza. Differentsial tenglamalarning normal sistemasi uchun mavjudlik va yagonalik teoremasi………………………………

22-ma’ruza. Chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi………….

23-ma’ruza O`zgarmaskoeffitsyientli chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi…………………………………………..

24-ma’ruza Matritsa ko`rinishdagi chiziqli tenglamalar sistemasi. Koshi integral formulasi. Eksponentsial matritsa……………………

25-ma’ruzaYechimningboshlangichqiymatlargavaparametr-largauzluksizbog‘liqligihaqidateorema……………………………………

26-ma’ruza Yechimning boshlangich qiymatlar va parametrlar bo`yicha differentsiallanuv-chanligi haqida teorema…………………..

27-ma’ruza Avtonom sistemalar. Avtonom sistemaning muvozanat holati. Xolatlar fazosi va traektoriyasi…………………………………….

28-ma’ruza Chiziqli bir jinsli ikkinchi tartibli o`zgarmas koeffitsientli avtonom sistemaning holatlar tekisligi……………………..

29-ma’ruza.Differentsial tenglamalar yechimining turg‘unligi…….

30-ma’ruza.Noturgun va asimptotik turgunlik ....

31-ma’ruza. Lyapunovning birinchi metodi. Birinchi yaqinlanish bo‘yicha turgunlik..

32-ma’ruzaIkkinchi tartibli chiziqli differentsial tenglamani sodda ko‘rinishga keltirish. ....

31-ma’ruzaCHegaraviy masalalar. Grin funktsiyasi. Grin funktsiyasining mavjudligi va yagonaligi haqida. ………………………

33-ma’ruzaXos sonlari va xos funktsiyalari tushunchasi………….

34-ma’ruzaIkkinchi tartibli differentsial tenglamalarni darajali qatorlar yordamida integrallash………………………………………..

35-ma’ruza Xususiy hosilali differentsial tenglamalar haqida tushuncha……………………………………………………………

36-ma’ruza Xususiy hosilali birinchi tartibli kvazichiziqli differentsial tenglamalarning xarakteristikalari…………………………………..

37-ma’ruza.Xususiy hosilali birinchi tartibli kvazichiziqli differentsial tenglamalarning xarakteristikalari. …………………

38-ma'ruza. YEchim, umumiy yechim va maxsus yechim tushunchasi. Koshi masalasi. ………………………………

V.AMALIY MASHG'ULOT MATERIALLARI

20-Amaliy mashg'ulot. Differentsial tenglamalar sistemasini normal ko`rinishga keltirish……………………………….
21-Amaliy mashg'ulot.Differentsial tenglamalarning normal sistemasi ga doir misollar echish………………………………

22-Amaliy mashg'ulot. Chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi………….

23-Amaliy mashg'ulot. O`zgarmaskoeffitsyientli chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi……………………………………………..

25-Amaliy ashg'ulot.Yechimningboshlangichqiymatlargavaparametrlargabog'liqligigadoir misollar echish……………………………………

26-Amaliy mashg'ulot. Yechimning boshlangich qiymatlar va parametrlar bo`yicha differentsiallanuv-chanligi haqida teorema…………………..

27-Amaliy mashg'ulot. Avtonom sistemalar. Avtonom sistemaning muvozanat holati. Xolatlar fazosi va traektoriyasi…………………………………….

28-Amaliy mashg'ulot. Chiziqli bir jinsli ikkinchi tartibli o`zgarmas koeffitsientli avtonom sistemaning holatlar tekisligi……………………..
29-Amaliy mashg'ulot.Differentsial tenglamalar yechimining turg'unligiLyapunovma'nosida turgunlik.. ....
30-Amaliy mashg'ulot.Noturg'un va asimptotik turg'unlik haqidagiteoremaemalar. ....

31-Amaliy mashg'ulot. 19-Amaliy mashg'ulot. 19-Amaliy mashg'ulot.Lyapunovning birinchi metodi. Birinchi yakinlanish bo'yicha turgunlik...

32-Amaliy mashg'ulot.Ikkinchi tartibli chiziqli differentsial tenglamanisoddako'rinishga keltirish.

33-Amaliy mashg'ulot. Chegaraviy masalalar. Grin funktsiyasi. Grin funktsiyasining mavjudligi va yagonaligi.………………………

34-Amaliy mashg'ulot. Xos sonlari va xos funktsiyalari tushunchasi. ……

35-Amaliy mashg'ulot. Ikkinchi tartibli differentsial tenglamalarni darajali qatorlar yordamida integrallash………………………………………..

36-Amaliy mashg'ulot. Xususiy hosilali differentsial tenglamalar haqida tushuncha……………………………………………………

37-Amaliy mashg'ulot. Xususiy hosilali differentsial tenglamalar.…………………………………………………………

38-Amaliy mashg’ulot. Xususiy hosilali birinchi tartibli kvazichiziqli differentsial tenglamalar…………………………….

So'z boshi

Mazkur o'quv uslubiy majmua " Diffeensial tenglamalar"fanidan "5130100-Математика" ta'lim yo'nalisi uchun mo'ljallangan bo'lib , fizika-matematika fakultetining "Математика" kafedrasi professor – o'qituvchilari tamonidan ishlab chiqilgan. " Diffeensial tenglamalar"fani o'quv uslubiy majmuasini yaratishda namunaviy o'quv dasturida asosiy adabiyotlar ro'yxatiga kiritilgan M.Saloxitdinov ,G'.Nasriddinov "Oddiy differensial tenglamalar",V.I.Pontryagin "Obiknovennie differensialnie uravnenie " va boshqalarning kitoblaridan foydalanildi.

" Diffeensial tenglamalar"fani "5130100-Математика" ta'lim yo'nalishi o'quv rejasiga asosan 3- va 4-semestrlarda mos ravishda 152 va 152 auditoriya soatlarda o'qitiladi. 1-semestrda Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differentsial tenglamalar. Yechim tushunchasi. Xususiy va umumiy yechim. Integral chiziq. Koshi masalasi. Echimning mavjudligi va yagonaligi haqida teorema.

O'zgaruvchilari ajralgan va unga keltiriladigan differentsial tenglamalar. O'zgaruvchilarigi nisbatan bir jinsli va umumlashgan bir jinsli tenglamalar. Chiziqli differentsial tenglamalar. Yechimning xossalari. O'zgarmasni variatsiyalash usuli. Bernulli va Rikkati tenglamalari. To'la differentsial tenglamalar. Integrallovchi ko'paytuvchi va uning mavjudligi haqidagi teoremalar.

Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differentsial tenglamalar va ularni integrallash usullari. Mavjudlik va yagonalik teoremasi. Maxsus yechimlar va ularning mavjudligi. Parametr kiritish yo'li bilan tenglamalarni integrallash. Lagranj va Klero tenglamalari.

2-semestrda differentsial tenglamalar sistemasini normal ko'rinishga keltirish. Differentsial tenglamalarning normal sistemasi uchun mavjudlik va yagonalik teoremasi. Gronuolla-Belman lemmasi. CHiziqli differentsial tenglamalar sistemasi. $y' = A(x)Y + F(x)$ sistema uchun mavjudlik va yagonalik teoremasi. CHiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi yechimlarining xossalari. Ostrogradskiy–Liuvill formulasi. CHiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy yechim haqida teorema. CHiziqli bir jinsli bo'lgan tenglamalar sistemasi. YEchimlarning xossalari. YEchimning mavjudligi va yagonaligi haqida teorema. O'ng tamoni maxsus ko'rinishda bo'lgan chiziqli o'zgarmas koeffitsiyentli differentsial tenglamalar sistemasi.

Matritsa ko'rinishdagi chiziqli tenglamalar sistemasi. Koshi integral formulasi. Eksponentsial matritsa. Matritsali differentsial tenglamalarni integrallash.

Echimning davomiyligi. YEchimning boshlangich qiymatlarga va parametrlarga uzluksiz bogliqligi haqida teorema. YEchimning boshlangich qiymatlar va parametrlar bo'yicha differentsiallanuvchanligi haqida teorema.

Avtonom sistemalar. Avtonom yechimining xossalari. Avtonom sistemaning muvozanat xolati. Xolatlar fazosi va trayektoriyasi. CHiziqli bir jinsli ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli avtonom sistemaning xolatlar teksligi.

Lyapunov ma'nosida turgunlik. YEchimning turgunligi. Trivial yechimning turgunligi, noturgun va asimptotik turgunlik haqidagi teoremalar. Lyapunovning birinchi metodi. Birinchi yakinlanish bo'yicha turgunlik.

Ikkinchi tartibli chiziqli differentsial tenglamani sodda ko'rinishga keltirish. CHegaraviy masalalar. Grin funktsiyasi. Grin funktsiyasining mavjudligi va yagonaligi haqida. Xos sonlari va xos funktsiyalari tushunchasi. Ikkinchi tartibli differentsial tenglamalarni darajali qatorlar yordamida integrallash.

Xususiy hosilali differentsial tenglamalar haqida tushuncha. Xususiy hosilali birinchi tartibli kvazichiziqli differentsial tenglamalarning xarakteristikalari. YEchim, umumiy yechim va maxsus yechim tushunchasi. Koshi masalasi. Mavjudlik va yagonalik teoremasi. Koshi-Kovalevskaya teoremasi. Koshi masalasining geometrik talqini.

Ushbu uslubiy qo'llanma besh qismdan iborat bo'lib, ular sillabus,ishchi oquv reja

,namunaviy va ishchi o’quv dastur, modulni o’qitishda foydalaniladigan inter foal ta’lim metodlari ,ma’ruza materiallari,adabiyotlar ro’yxati, mustaqil na’lim mavzulari,glossariy,keslar banki, nazorat savollari va test savollari va amaliy mashg’lotlar materiallaridan tashkil topgan

Maruza va amaliy mashg’ulotlar semestrlarga ajratilgan holda berilgan

10+

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Руйхатга олинди:
№БД 5130100-305
2015 йил "7" 08

Ўзбекистон Республикаси Олий ва
ва ўрта махсус таълим вазирлигининг
2015 йил "2" 02 даги
"32" - сонли буйруғи билан
тасдиқланган.

«ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР»
фанининг

ЎҚУВ ДАСТУРИ

Билим соҳаси: **100000 – Гуманитар соҳа**

Таълим соҳаси: **130000 – Математика**

Таълим йўналиши: **5130100 – Математика**

Тошкент – 2015

Фаннинг ўкув дастури Олий ва ўрта махсус касб-хунар таълими йўналишлари бўйича Ўкув-услубий бирлашмалар фаолиятини Мувофиклаштирувчи Кенгашининг 2015 «7» 01 даги 1- сонли мажлиси баёни билан маъкулланган.

Фаннинг ўкув дастури МИРЗО УЛУҒБЕК номидаги ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИда ишлаб чикилди.

Тузувчилар:

Тўхтасинов М.	Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети "Дифференциал тенгламалар" кафедраси профессори, физика-математика фанлари доктори
Зикиров О.С.	Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети "Дифференциал тенгламалар" кафедраси мудири, физика – математика фанлари доктори.

Такризчилар:

Каримов Э.Т.	ЎзМУ қошидаги Математика институти катта илмий ходими, физика-математика фанлари номзоди.
Абдуллаев О.Х.	ЎзМУ "Дифференциал тенгламалар" кафедраси доценти, физика-математика фанлари номзоди.

Фаннинг ўкув дастури Олий ва ўрта махсус касб-хунар таълими йўналишлари бўйича Ўкув-услубий бирлашмалар фаолиятини Мувофиклаштирувчи Кенгашининг 2014 «26» 12 даги 6- сонли мажлиси баёни билан маъкулланган.

КИРИШ

Дифференциал тенгламалар фани турли хил физик жараёнларни ўрганиш билан чамбарчас боғлиқдир. Бундай жараёнлар қаторига гидродинамика, электродинамика масалалари ва бошқа кўплаб масалаларни келтириш мумкин. Турли жараёнларни ифодаловчи математик масалалар кўпгина умумийликка эга бўлиб, дифференциал тенгламалар фанининг асосини ташкил этади. Дифференциал тенгламалар олий математиканинг асосий фундаментал ва тадбиқий бўлимларидан бири бўлиб, у бакалавриатнинг математика, механика, амалий математика ва информатика каби йўналишлари ўқув режасидаги умумкасбий фанлардан бири ҳисобланади. Ҳозирги кунда фан ва техниканинг жадал ривожланиб бориши турли мураккаб техник, механик, физик ва бошқа жараёнларни ўрганиш, уларни математик нуқтаи назардан тасаввур қилиш, математик моделларини тузиш ва ечиш нафақат тадбиқий жиҳатдан балки назарий жиҳатдан ҳам долзарб, ҳам амалий ахамиятга эга бўлган муаммолардан бири ҳисобланади.

Ўқув фанининг мақсади ва вазифалари

Дифференциал тенгламалар фанининг асосий мақсади бакалавриатнинг математика йўналиши талабаларига бу фаннинг фундаментал асосларини етарли даражада ўқитиш, бу назарий билимлар ёрдамида механика, физика, техника ва бошқа соҳаларда содир бўладиган жараёнларни дифференциал тенгламалар кўринишда ифодалашни, математик моделллар учун масаланинг берилишига қараб, уларни ечишга ўргатиш ва ихтисослик фанларини ўргатишга тайёрлашдан иборат.

Дифференциал тенгламалар фани фундаментал ва тадбиқий фанларнинг асосини ташкил қилади. Жараёнларнинг дифференциал тенгламалар ёрдамида математик моделини тузиш ва ечимларини топиш усулларини ўрганиш, масаланинг берилишига қараб, унинг ечимини назарий таҳлил қилиш дифференциал тенгламалар фанининг асосий вазифасига киради.

Фан бўйича талабалар билим, кўникма ва малакаларига қўйиладиган талаблар

Дифференциал тенгламалар ўқув фанини ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида бакалавр:

- фан бўйича талабалар оддий дифференциал тенгламаларни интеграллашни, Коши масаласининг қўйилишини, ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги исботлашни, дифференциал тенглама ечимининг турғунлиги назарияси, чизиқли дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечишнинг Грин функцияси усулини ***билиши керак;***
- фанни ўрганишда талабалар тегишли жараёнлар ҳақида тасаввурга эга бўлишлари, айни пайтида уларни мантиқий фикрлаш ва тўғри хулосалар чиқариш ***кўникмаларига эга бўлиши керак;***
- дифференциал тенгламалар ва тенгламалар системаси учун Коши масаласи, иккинчи тартибли чизиқли тенглама учун чегаравий масала ва бошқа масалалар ечимларининг ягона ва мавжуд эканлигини исботлаш ҳамда ўрганилган назарий билимларни амалиётга қўллаш ***малакаларига эга бўлиши керак.***

Дифференциал тенгламалар фани асосий ихтисослик фани ҳисобланиб, 3-4 семестрларда ўкитилади. Бу фан математик анализ, функционал анализ, дифференциал неометрия ва шу каби предметлар билан ўзаро боғлик ва услубий жиҳатдан уларнинг давомидир.

Фаннинг ишлаб чиқаришдаги ўрни

Дифференциал тенгламалар фани "Математика" йўналиши бўйича мутахассислар тайёрлашнинг ўкув жараёнида бакалаврларнинг юкори даражадаги математик тайёргарлиги ва кўпгина махсус фанлар бўйича чукур билимлар эгаси бўлишида асосий ўрин тутади. Мазкур фан дастурга кўра ушбу фан доирасида кўплаб модель масалалар ўрганиладики бу мазкур фанни чуқур ўрганган ҳар бир бакалавр олган билим ва кўникмаларни илмий-тадқиқот ишларида, шунингдек, таълим тизимида самарали фойдаланиш имконини беради.

Фанни ўқитишда замонавий ахборот ва педагогик технологиялар

Талабаларнинг математик физика тенгламалари фанини ўзлаштиришлари учун ўқитишнинг замонавий педагогик усулларидан ва информацион технологиялардан фойдаланиш муҳим аҳамиятга эгадир. Бунда электрон дарслик, услубий кўлланмалар, таркатма материаллар, виртуал стендлар ва янги нашр этилган замонавий адабиётлардан фойдаланилади.

Асосий қисм

Фаннинг назарий машғулотлар мазмуни

Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар. Ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар. Ечим тушунчаси. Хусусий ва умумий ечим. Интеграл чизиқ. Коши масаласи. Ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақида теорема.

Ўзгарувчилари ажралган ва унга келтириладиган дифференциал тенгламалар. Ўзгарувчилариги нисбатан бир жинсли ва умумлашган бир жинсли тенгламалар. Чизикли дифференциал тенгламалар. Ечимнинг хоссалари. Ўзгармасни вариациялаш усули. Бернулли ва Риккати тенгламалари. Тўла дифференциал тенгламалар. Интегралловчи кўпайтувчи ва унинг мавжудлиги ҳақидаги теоремалар. $y' = f(x,y)$ тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳакидаги теореманинг исботи.

Ҳосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар ва уларни интеграллаш усуллари. Мавжудлик ва ягоналик теоремаси. Махсус ечим ва унинг мавжудлиги. Параметр киритиш йўли билан тенгламаларни интеграллаш. Лагранж ва Клеро тенгламалари.

Юқори тартибли дифференциал тенгламалар. $n-$тартибли дифференциал тенгламалар. Каноник кўринишдаги $n-$тартибли дифференциал тенгламалар ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳакидаги теорема. Юқори тартибли тенгламаларнинг тартибини пасайтириш. Ўзгарувчилариги нисбатан бир жинсли ва умумлашган бир жинсли юқори тартибли тенгламаларни интеграллаш.

$n-$тартибли чизикли дифференциал тенгламалар ва уларнинг умумий хоссалари. Умумий ечимнинг хоссалари. Мавжудлик ва ягоналик теоремаси.

Бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламалар. Ечимнинг асосий хоссалари. Чизикли боглик ва чизиқли эркли функциялар. Вронский детерминанти ва унинг хоссалари. Ечимнинг фундаментал системаси. Остроградский -Лиувилл формуласи.

Бир жинсли бўлмаган $n-$тартибли чизикли дифференциал тенгламалар ва уларнинг умумий ва хусусий ечимларини топиш. Ечимнинг хоссалари. Умумий ечим ҳақида теорема. Ўзгармасни вариациялаш методи. Коши формуласи.

Ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар, Эйлер тенгламаси. Бир жинсли бўлмаган ўзгармас коэффициенти чизиқли дифференциал тенгламалар ва уларнинг хусусий ечимларини топиш усуллари. (Ўнг тамони махсус кўринишда бўлган тенгламалар).

Дифференциаллар тенгламалар системаси. Дифференциал тенгламалар системасини нормал кўринишга келтириш. Дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси учун мавжудлик ва ягоналик теоремаси. Гронуолла-Белман леммаси. Чизиқли дифференциал тенгламалар системаси. $y' = A(x)Y + F(x)$ система учун мавжудлик ва ягоналик теоремаси. Чизиқли бир жинсли тенгламалар системаси ечимларининг хоссалари. Остроградский–Лиувилл формуласи. Чизиқли бир жинсли тенгламалар системасининг умумий ечим ҳақида теорема. Чизиқли бир жинсли бўлган тенгламалар системаси. Ечимларнинг хоссалари. Ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақида теорема. Ўнг тамони махсус кўринишда бўлган чизиқли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар системаси.

Матрица кўринишдаги чизикли тенгламалар системаси. Коши интеграл формуласи. Экспоненциал матрица. Матрицали дифференциал тенгламаларни интеграллаш.

Ечимнинг давомийлиги. Ечимнинг бошлангич қийматларга ва параметрларга узлуксиз богликлиги ҳақида теорема. Ечимнинг бошлангич қийматлар ва параметрлар бўйича дифференциалланувчанлиги ҳақида теорема.

Автоном системалар. Автоном ечимининг хоссалари. Автоном системанинг мувозанат холати. Холатлар фазоси ва траекторияси. Чизиқли бир жинсли иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли автоном системанинг холатлар текслиги.

Турғунлик назарияси. Ляпунов маъносида тургунлик. Ечимнинг тургунлиги. Тривиал ечимнинг тургунлиги, нотургун ва асимптотик тургунлик ҳақидаги теоремалар. Ляпуновнинг биринчи методи. Биринчи якинланиш бўйича тургунлик.

Иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламани содда кўринишга келтириш. Чегаравий масалалар. Грин функцияси. Грин функциясининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақида. Хос сонлари ва хос функциялари тушунчаси. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни даражали қаторлар ёрдамида интеграллаш.

Биринчи тартибли хусусий хосилали дифференциал тенгламалар. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ҳақида тушунча. Хусусий ҳосилали биринчи тартибли квазичизикли дифференциал тенгламаларнинг характеристикалари. Ечим, умумий ечим ва махсус ечим тушунчаси. Коши масаласи. Мавжудлик ва ягоналик теоремаси. Коши-Ковалевская теоремаси. Коши масаласининг геометрик талқини.

Амалий машғулотларини ташкил этиш бўйича кўрсатмалар

Амалий машғулотларни ўтказишдан мақсад маъруза материаллари бўйича талабаларнинг билим ва кўникмаларини чукурлаштириш ва кенгайтиришдан иборатдир. Бунда талабалар мисол ва масалалар ечишда, ечимларни таҳлил қилишда олган назарий билимларини кўллай олишлари назарда тутилади.

Амалий машғулотлар мавзулари

1. Берилган эгри чизиқлар асосида дифференциал тенгламалар тузиш. Изоклина.
2. Дифференциал тенгламага келтириладиган физик масалалар.
3. Ўзгарувчилари ажралган ва унга келтириладиган дифференциал тенгламалар. Ўзгарувчилариги нисбатан бир жинсли ва умумлашган бир жинсли тенгламалар.
4. Чизиқли дифференциал тенгламалар. Ўзгармасни вариациялаш усули.
5. Бернулли ва Риккати тенгламалари.
6. Тўла дифференциал тенгламалар. Интегралловчи кўпайтувчи ва уни топиш.
7. Ҳосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар ва уларни интеграллаш усуллари.
8. Параметр киритиш йўли билан тенгламаларни интеграллаш. Лагранж ва Клеро тенгламалари.
9. Юқори тартибли дифференциал тенгламаларнинг тартибини пасайтириш. Ўзгарувчилариги нисбатан бир жинсли ва умумлашган бир жинсли юқори тартибли тенгламаларни интеграллаш.
10. Ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар.
11. Ўзгарувчи коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар. Эйлер тенгламаси.
12. Ўнг тамони махсус кўринишда бўлган ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар ва уларнинг хусусий ечимларини топиш.
13. Ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлган тенгламалар системаси.
14. Ўнг тамони махсус кўринишда бўлган чизиқли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар системасини ечиш.
15. Экспоненциал матрицани ҳисоблаш. Матрицали дифференциал тенгламаларни интеграллаш.
16. Чизиқли бир жинсли иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли автоном системанинг холатлар текислиги.
17. Тургунлик назарияси. Ечимнинг тургунлиги таъриф бўйича текшириш. Ляпуновнинг биринчи методи. Махсус нуқталарнинг классификацияси.

17. Ечимнинг Ляпунов маъносида турғунлиги.
18. Чизиқли тенгламалар системаси мувозанат ҳолатининг турлари.

Изоҳ: Мустақил таълим соатлари ҳажмларидан келиб чиққан ҳолда ишчи дастурда маъруза ва амалий машғулотларга тайёргарлик кўриш, фан бўйича талаба дунёқарашини кенгайтирадиган мустақил таълим мавзулари шакллантирилади.

Дастурнинг информацион-услубий таъминоти

Фанни ўқитиш жараёнида замонавий компьютерлар, ахборот ва ҳисоблаш тармоқлари, Internet тизими, электрон алоқа (E-mail), амалий программалар пакетларидан фойдаланилади. Шунингдек, мавжуд электрон дарсликлар, Интернет тизими Web сайтларидаги маълумотлардан, хусусан www.intuit.ru Web сайтидан фойдаланилади. Замонавий педагогик ва ахборот технологиялари усуллари ва воситаларидан фойдаланилади.

Фойдаланиладиган адабиётлар рўйхати

Асосий адабиётлар

1. Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, " Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенние дифферциальные уравнения. М.:Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Гиз.Физ-мат. Литература.1958
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление. М.: Наука.. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Қўшимча адабиётлар

1. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: изд-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука.1980.
6. Самойленко А.М. и др. дифференциальные уравнения. М., 1989. 384 с.
7. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М.: Наука. 1987.

Электрон манбалар

1. www.lib.homelinex.org/math
2. www.eknigu.com/lib/Mathematics/
3. www.eknigu.com/info/M_Mathematics/MC

O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI

“Tasdiqlayman”

O’quv ishlari bo`yicha prorektor

Ro’yxatga olindi **________O’.Axmedov**

______________________ **“____” _______2018 yil**

DI F F E R E N S I A L T E N G L A M A L A R

fanidan

ishchi o’quv dasturi

Bilim sohasi: 100000 – Gumanitar

Ta’lim sohasi: 130000 – Matematika

Ta’lim yo’nalishi: 5130100 - Matematika

Umumiy o’quv soati- 258 soat
Ma’ruza - 72soat,
Amaliy mashg’ulot - 72soat

Mustaqil ta’lim - 114 soat

Termiz-2018

Fannig ishchi o'quv dasturi o'quv, ishchi o'quv reja va o'quv dasturiga muvofiq ishlab chiqildi.

Tuzuvchilar:

I.Xayrullayev. "Matematika" kafedrasi mudiri fiz, mat. fanlari.nomzodi.

X.Islomov. **"**Matematika" kafedrasi katta o'qituvchisi.

Taqrizchi: **M.Mirsaburov** Fizika matemanika fanlari doktori, professor.

Fanning ishchi dasturi "Matematika" kafedrasining 2018 yil __ ___ sonli yig`ilishida muhokamadan o'tgan va fakultet kengashida muhokama qilisyga tavsiya qilingan .

Kafedra mudiri: _________ I.Xayrullayev

Mazkur ish dasturi fizika – matematika fakultetining kengashida muhokamadan o'tgan va foydalanish uchun tavsiya etilgan.

(2018 yil ______ № ______bayonnomasi)

Fakultet Kengashi raisi: _________ O'.Berdiyev

Fanning ishchi dasturi Termiz davlat universiteti usludiy Kengashinig 2018 yil " " _______ dagi ___ sonli majlisida tasdiqlangan..

O'quv-uslubiy boshqarma boshlig'i: ____

KIRISH

Differensial tenglamalar fani turli xil fizik jarayonlarni o‘rganish bilan chambarchas bog’liqdir. Bunday jarayonlar qatoriga gidrodinamika, elektrodinamika masalalari va boshqa ko‘plab masalalarni keltirish mumkin. Turli jarayonlarni ifodalovchi matematik masalalar ko‘pgina umumiylikka ega bo‘lib, differentsial tenglamalar fanining asosini tashkil etadi. Differentsial tenglamalar oliy matematikaning asosiy fundamental va tadbiqiy bo‘limlaridan biri bo‘lib, u bakalavriatning matematika, mexanika, amaliy matematika va informatika kabi yo‘nalishlari o‘quv rejasidagi umumkasbiy fanlardan biri hisoblanadi. Hozirgi kunda fan va texnikaning jadal rivojlanib borishi turli murakkab texnik, mexanik, fizik va boshqa jarayonlarni o‘rganish, ularni matematik nuqtai nazardan tasavvur qilish, matematik modellarini tuzish va yechish nafaqat tadbiqiy jihatdan balki nazariy jihatdan ham dolzarb, ham amaliy axamiyatga ega bo‘lgan muammolardan biri hisoblanadi.

O‘quv fanining maqsadi va vazifalari

Differentsial tenglamalar fanining asosiy maqsadi bakalavriatning matematika yo‘nalishi talabalariga bu fanning fundamental asoslarini yetarli darajada o‘qitish, bu nazariy bilimlar yordamida mexanika, fizika, texnika va boshqa sohalarda sodir bo‘ladigan jarayonlarni differentsial tenglamalar ko‘rinishda ifodalashni, matematik modelllar uchun masalaning berilishiga qarab, ularni yechishga o‘rgatish va ixtisoslik fanlarini o‘rgatishga tayyorlashdan iborat.

Differentsial tenglamalar fani fundamental va tadbiqiy fanlarning asosini tashkil qiladi. Jarayonlarning differentsial tenglamalar yordamida matematik modelini tuzish va yechimlarini topish usullarini o‘rganish, masalaning berilishiga qarab, uning yechimini nazariy tahlil qilish differentsial tenglamalar fanining asosiy vazifasiga kiradi.

Fan bo‘yicha talabaning bilimiga, ko‘nikma va malakasiga qo‘yiladigan talablar

Differentsial tenglamalar o‘quv fanini o‘zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida bakalavr:

- fan bo‘yicha talabalar oddiy differentsial tenglamalarni integrallashni, Koshi masalasining qo‘yilishini, yechimning mavjudligi va yagonaligi isbotlashni, differentsial tenglama yechimining turG’unligi nazariyasi, chiziqli differentsial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishning Grin funktsiyasi usulini ***bilishi kerak;***
- fanni o‘rganishda talabalar tegishli jarayonlar haqida tasavvurga ega bo‘lishlari, ayni paytida ularni mantiqiy fikrlash va to‘G’ri xulosalar chiqarish ***ko‘nikmalariga ega bo‘lishi kerak;***
- differentsial tenglamalar va tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi, ikkinchi tartibli chiziqli tenglama uchun chegaraviy masala va boshqa masalalar yechimlarining yagona va mavjud ekanligini isbotlash hamda o‘rganilgan nazariy bilimlarni amaliyotga qo‘llash ***malakalariga ega bo‘lishi kerak.***

Fanning o‘quv rejadagi boshqa fanlar bilan o‘zaro boG’liqligi va uslubiy jihatdan uzviy ketma-ketligi

Differentsial tenglamalar fani asosiy ixtisoslik fani hisoblanib, 3- semestrlarda o‘qitiladi. Bu fan matematik analiz, funktsional analiz, differentsial neometriya va shu kabi predmetlar bilan o‘zaro boG’liq va uslubiy jihatdan ularning davomidir

Fanning ishlab chiqarishdagi o‘rni

Differentsial tenglamalar fani “fizira” yo‘nalishi bo‘yicha mutaxassislar tayyorlashning o‘quv jarayonida bakalavrlarning yuqori darajadagi matematik tayyorgarligi va ko‘pgina maxsus fanlar bo‘yicha chuqur bilimlar egasi bo‘lishida asosiy o‘rin tutadi. Mazkur fan dasturga ko‘ra ushbu fan doirasida ko‘plab model masalalar o‘rganiladiki bu mazkur fanni chuqur o‘rgangan har bir bakalavr olgan bilim va ko‘nikmalarni ilmiy-tadqiqot ishlarida, shuningdek, ta’lim tizimida samarali foydalanish imkonini beradi.

Fanni o‘qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar

O’quv jarayoni bilan bog’liq ta’lim sifatini belgilovchi holatlar quyidagilar: yuqori ilmiy-pedagogik darajada dars berish, muammoli ma’ruzalar o’qish, darslarni savol-javob tarzida qiziqarli tashkil qilish, ilg’or pedagogic texnologiyalardan va multimedia vositalaridan foydalanish, tinglovchilarni undaydigan, o’ylantiradigan muammolarni ular oldiga qo’yish, talabchanlik, tinglovchilar bilan individual ishlash, erkin muloqot yuritishga, ilmiy izlanishga jalb qilish.

“Differentsial tenglamalar” kursini loyihalashtirishda quyidagi asosiy konseptual yondashuvlardan foydalaniladi:

Shaxsga yo’naltiriladigan ta’lim. Bu ta’lim o’z mohiyatiga ko’ra ta’lim jarayonining barcha ishtirokchilarini to’laqonli rivojlanishlarini ko’zda tutadi.Bu esa ta’limni loyihalashtirilayotganda, albatta, ma’lum bir ta’lim oluvchining shaxsini emas, avvalo, kelgusidagi mutaxassislik faoliyati bilan bog’liq o’qish maqsadlaridan лудшисhiqqan holda yondashilishni nazarda tutadi.

Tizimli yondashuv. Ta’limtexnologiyasi tizimning barcha belgilarini o’zida mujassam etmog’I lozim: jarayonning mantiqiyligi, uning barcha bo’g’inlarini o’zaro bog’langanligi, yaxlitligi.

Faoliyatga yo’naltirilgan yondashuv. Shaxsning jarayonli sifatlarini shakllantirishga, ta’lim oluvchining faoliyatni aktivlashtirishva intensivlashtirish, o’quv jarayonida uning barcha qobiliyati va imkoniyatlari, tashabbuskorligini ochishga yo’naltirilgan ta’limni ifodalaydi.

Dialogik yondashuv.Bu yondashuv o’quv munosabatlarini yaratish zaruriyatini bildiradi.Uning natijasida shaxsning o’z-o’zini ko’rsata olishi kabi ijodiy faoliyati kuchayadi.

Hamkorlikdagi ta’limni tashkil etish. Demokratik, tenglik, ta’lim beruvchi va ta’lim oluvchi faoliyat mazmunini shakllantirishda va erishilgan natijalarni baholashda birgalikda ishlashni joriy etishga e’tiborni qaratish zarurligini bildiradi.

Muammili ta’lim. Ta’lim mazmunini muammoli tarzda taqdim qilish orqali ta’lim oluvchi faoliyatini aktivlashtirish usullaridan biri. Bunda ilmiy bilimni obyektiv qarama-qarshiligi va uni hal etish usullarini, dialektik mushohadani shakllantirish va rivojlantirishni, amaliy faoliyatga ularni ijodiy tarzda qo’llashni mustaqil ijodiy faoliyati ta’minlanadi.

Axborotni taqdim qilishning zamonaviy vositalari va usullarini qo’llash – yangi kompyuter va axborot texnologiyalarini o’quv jarayoniga qo’llash.

O’qitishning usullari vatexnikasi. Ma’ruza(kirish, mavzuga oid, vizuallash), muammoli ta’lim, keys-stadi, pinbord, paradoks va loyihalash usullari, amaliy ishlar.

O’qitishni tashkil etishshakllar: dialog, polilog, muloqot hamkorlik va o’zaro o’rganishga asoslangan frontal, kollektiv va пгкгрю

O’qitish vositalari: o’qitishning an’anaviy shakllari (darslik, ma’ruza matni) bilan bir qatorda – kompyuterva axborot texnologiyalari.

Kommunikatsiya usullari: tinglovchilar bilan operativ teskari aloqaga asoslangan bevosita o’zaro munosabatlar.

Teskari aloqa usullari va vositalari: kuzatish, blits-so’rov, oraliq va joriy va yakunlovchi nazorat natijalarini tahlili asosida o’qitish diagnostikasi.

Boshqarish usullari vavositalari: o’quv mashg’uloti bosqichlarini belgilab beruvchi texnologik karta ko’rinishidagi o’quv mashg’ulotlarini rejalashtirish, qo’yilgan maqsadga erishishda o’qituvchi va tinglovchining birgalikdagi harakati , nafaqat auditoriya mashg’ulotlari, balki auditoriyadan tashqari mustaqil ishlarning nazorati.

Monitoring va baholash: o’quv mashg’ulotida ham butun kurs davomida ham o’qitishning natijalarini rejali tarzda kuzatib boorish. Kurs oxirida test topshiriqlari yoki yozma ish variantlari yordamida tinglovchilarning bilimlari baholanadi.

“Differensial tenglamalar” fanini o’qitishjarayonidakompyuter texnologiyasidan, “Excel” electron jadvallar dasturlaridan foydalaniladi. Ayrim mavzular bo’yicha talabalar bilimini baholash test asosidava kompyuter yordamida bajariladi. “Internet” tarmog’idagi rasmiy iqtisodiy ko’rsatkichlardan foydalaniladi, tarqatma materiallar tayyorlanadi, test tizimi hamda tayanch so’z va iboralar asosida oraliq va yakuniy nazoratlar o’tkaziladi.

Fan o’quv soatlarining semester bo’yicha taqsimoti

№	**Ma`ruza**	**Amaliy mashg’ulot**	**Mustaqil Ta’lim**	Jami
III	36	**36**	**57**	**129**
IV	36	**36**	**57**	**129**
	Jami	**72**	**72**	**258**

Asosiy qism: Fanning uslubiy jihatdan uzviy ketma-ketligi

Asosiy qismda (ma’ruza) fanni mavzulari mantiqiy ketma-ketlikda keltiriladi. Har bir mavzuning mohiyati asosiy tushunchalarva tezislar orqali ochib beriladi. Bunda mavzu bo’yicha talabalarga DTS asosida yetkazilishi zarur bo’lgan bilim va ko’nikmalar to’la qamrab olinishi kerak.

Asosiy qism sifatiga qo’yiladigan talab mavzularning dolzarbligi, ularning ish beruvchilar talablari va ishlab chiqarish ehtiyojlariga mosligi, mamlakatimizda bo’layotgan ijtimoiy-siyosiy va demokratik o’zgarishlar, iqtisodiyotni erkinlashtirish, iqtisodiy-huquqiy va boshqa sohalardagi islohotlarning ustuvor masalalarini qamrab olishi hamda fan va texnologiyalarning so’nggi yutuqlari e’tiborga olinishi tavsiya etiladi.

Maruza mashg’lulotlari

Kirish.Birinchi tartibli differentsial tenglamalar. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differentsial tenglamalar. Yechim tushunchasi. Xususiy va umumiy yechim. Integral chiziq. Koshi masalasi. Echimning mavjudligi va yagonaligi haqida teorema.

O‘zgaruvchilari ajralgan va unga keltiriladigan differentsial tenglamalar. O‘zgaruvchilarigi nisbatan bir jinsli va umumlashgan bir jinsli tenglamalar. Chiziqli differentsial tenglamalar. Yechimning xossalari. O‘zgarmasni variatsiyalash usuli. Bernulli va Rikkati tenglamalari. To‘la differentsial tenglamalar. Integrallovchi ko‘paytuvchi va uning mavjudligi haqidagi teoremalar. $y' = f(x, y)$ tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremaning isboti.

Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differentsial tenglamalar va ularni integrallash usullari. Mavjudlik va yagonalik teoremasi. Maxsus yechimlar va ularning mavjudligi. Parametr kiritish yo‘li bilan tenglamalarni integrallash. Lagranj va Klero tenglamalari.

Qo’llaniladigan ta’lim texnogiyalari:*, muammoli ta’lim, , menyu, , munozara, o’z-o’zini nazorat.*

Adabiyotlar:A1, A2, A3, A4, Q6, Q7, Q8, Q9, Q10, Q15

Yuqori tartibli differentsial tenglamalar(26 soat) $n-$tartibli differentsial tenglamalar. Kanonik ko‘rinishdagi $n-$tartibli differentsial tenglamalar yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema. YUqori tartibli tenglamalarning tartibini pasaytirish. O‘zgaruvchilarigi nisbatan bir jinsli va umumlashgan bir jinsli yuqori tartibli tenglamalarni integrallash.

$n-$tartibli chizikli differentsial tenglamalar va ularning umumiy xossalari. Umumiy yechimning xossalari. Mavjudlik va yagonalik teoremasi. Bir jinsli chiziqli differentsial tenglamalar. Yechimning asosiy xossalari. CHiziqli bogliq va chiziqli erkli funktsiyalar. Vronskiy determinanti va uning xossalari. YEchimning fundamental sistemasi. Ostrogradskiy -Liuvill formulasi.

Bir jinsli bo‘lmagan $n-$tartibli chizikli differentsial tenglamalar va ularning umumiy va xususiy yechimlarini topish. Yechimning xossalari. Umumiy yechim haqida teorema. O‘zgarmasni variatsiyalash metodi. Koshi formulasi.

O‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differentsial tenglamalar. Eyler tenglamasi. Bir jinsli bo‘lmagan o‘zgarmas koeffitsiyenti chiziqli differentsial tenglamalar va ularning xususiy yechimlarini topish usullari. (O‘ng tamoni maxsus ko‘rinishda bo‘lgan tenglamalar).

Qo’llaniladigan ta’lim texnogiyalari:*diyologik yondashuv, muammoli ta’lim, Bingo, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algaritm, munozara, o’z-o’zini nazorat.*

Adabiyotlar:A1, A2, A3, A4, Q6, Q7, Q8, Q9, Q10, Q15

Differentsial tenglamalar sistemasini yechish usullari (18 soat)

Differentsial tenglamalar sistemasini normal ko‘rinishga keltirish. Differentsial tenglamalarning normal sistemasi uchun mavjudlik va yagonalik teoremasi. Gronuolla-Belman lemmasi. CHiziqli differentsial tenglamalar sistemasi. $y' = A(x)Y + F(x)$ sistema uchun mavjudlik va yagonalik teoremasi. CHiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi yechimlarining xossalari. Ostrogradskiy–Liuvill formulasi. CHiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy yechim haqida teorema. CHiziqli bir jinsli bo‘lgan tenglamalar sistemasi. YEchimlarning xossalari. YEchimning mavjudligi va yagonaligi haqida teorema. O‘ng tamoni maxsus ko‘rinishda bo‘lgan chiziqli o‘zgarmas koeffitsiyentli differentsial tenglamalar sistemasi.

Matritsa ko‘rinishdagi chiziqli tenglamalar sistemasi. Koshi integral formulasi. Eksponentsial matritsa. Matritsali differentsial tenglamalarni integrallash.

Echimning davomiyligi. YEchimning boshlangich qiymatlarga va parametrlarga uzluksiz bogliqligi haqida teorema. YEchimning boshlangich qiymatlar va parametrlar bo‘yicha differentsiallanuvchanligi haqida teorema.

Avtonom sistemalar. Avtonom yechimining xossalari. Avtonom sistemaning muvozanat xolati. Xolatlar fazosi va trayektoriyasi. CHiziqli bir jinsli ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli avtonom sistemaning xolatlar teksligi

Qo’llaniladigan ta’lim texnogiyalari:*diyologik yondashuv, muammoli ta’lim, Bingo, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algaritm, munozara, o’z-o’zini nazorat.*

Adabiyotlar:A1, A2, A3, A4, Q6, Q7, Q8, Q9, Q10, Q15

Differentsial tenglamalar yechimining turg‘unligi (4 soat)

Lyapunov ma’nosida turgunlik. YEchimning turgunligi. Trivial yechimning turgunligi, noturgun va asimptotik turgunlik haqidagi teoremalar. Lyapunovning birinchi metodi. Birinchi yakinlanish bo‘yicha turgunlik.

Ikkinchi tartibli chiziqli differentsial tenglamani sodda ko‘rinishga keltirish.

CHegaraviy masalalar. Grin funktsiyasi. Grin funktsiyasining mavjudligi va yagonaligi haqida. Xos sonlari va xos funktsiyalari tushunchasi. Ikkinchi tartibli differentsial tenglamalarni darajali qatorlar yordamida integrallash.

Qo'llaniladigan ta'lim texnogiyalari:*diyologik yondashuv, muammoli ta'lim, Bingo, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algaritm, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar:A1, A2, A3, A4, Q6, Q7, Q8, Q9, Q10, Q15

Xususiy hosilali differensial tenglamalar

Xususiy hosilali differentsial tenglamalar haqida tushuncha. Xususiy hosilali birinchi tartibli kvazichiziqli differentsial tenglamalarning xarakteristikalari. YEchim, umumiy yechim va maxsus yechim tushunchasi. Koshi masalasi. Mavjudlik va yagonalik teoremasi. Koshi-Kovalevskaya teoremasi. Koshi masalasining geometrik talqini.

Qo'llaniladigan ta'lim texnogiyalari:*diyologik yondashuv, muammoli ta'lim, Bingo, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algaritm, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar:A1, A2, A3, A4, Q6, Q7, Q8, Q9, Q10, Q15

Differentsial tenglamalar fani bo'yicha ma`ruza mashg'ulotlarining soatlar bo'eycha taqsimoti

T/r	Mavzu nomi	Ajratilgan soat
	I. bob Kirish.Birinchi tartibli differentsial tenglamalar	
1.	Differentsial tenglamalar nazariyasining kelib chiqish tarixi. Oddiy differentsial tenglamalarga olib keluvchi amaliy masalalar.	**2**
2.	Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differentsial tenglamalar. Yechim tushunchasi. Xususiy va umumiy yechim. Integral chiziq. Koshi masalasi. Yechimning mavjudligi va yagonaligi haqida teorema.	**4**
3.	Yechimning geometrik ma'nosi	**2**
4.	O`zgaruvchilari ajralgan va unga keltiriladigan differentsial tenglamalar. O`zgaruvchilarigi nisbatan bir jinsli va umumlashgan bir jinsli tenglamalar.	**4**
5.	Chiziqli differentsial tenglamalar. Yechimning xossalari. O`zgarmasni variatsiyalash usuli. Bernulli va Rikkati tenglamalari.	**4**
6.	To`la differentsialli tenglamalar. Integrallovchi ko`paytuvchi va uning mavjudligi haqidagi teoremalar	**2**
7.	Pikar teoremasining isboti	**2**
8.	Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differentsial tenglamalar. Mavjudlik va yagonalik teoremasi.	**2**
9.	Maxsus yechimlar va ularning mavjudligi.	**2**
10.	Parametr kiritish yo`li bilan tenglamalarni integrallash. Lagranj va Klero tenglamalari.	**2**
	II bob Yuqori tartibli differentsial tenglamalar.	
11.	$n-$tartibli differentsial tenglamalar. Yechim, umumiy yechim, Koshi masalasining qo'yilishi.	**2**
12.	Yuqori tartibli tenglamalarning tartibini pasaytirish.	**4**
13.	O`zgaruvchilariga nisbatan bir jinsli va umumlashgan bir jinsli yuqori tartibli tenglamalarni integrallash.	**2**
14.	Bir jinsli chiziqli differentsial tenglamalar. Yechimning asosiy	**2**

	xossalari. Chiziqli bog‘liq va chiziqli erkli funksiyalar.	
15.	Vronskiy determinanti va uning xossalari. Yechimning fundamental sistemasi. Ostrogradskiy -Liuvill formulasi.	**4**
16.	Bir jinsli bo`lmagan $n-$tartibli chiziqli differentsial tenglamalar va ularning umumiy va xususiy yechimlarini topish. Yechimning xossalari. Umumiy yechim haqida teorema. O`zgarmasni variatsiyalash usuli.	**2**
17.	Xususiy yechimni topishning Koshi usuli.	**2**
18.	O`zgarmas koeffitsyientli chiziqli differentsial tenglamalar	**2**
19.	Bir jinsli bo`lmagan o`zgarmas koeffitsyienti chiziqli differentsial tenglamalar va ularning xususiy yechimlarini topish usullari. (O`ng tamoni maxsus ko`rinishda bo`lgan tenglamalar).	**2**
20.	O’zgarmas koeffitsientliga keltiriladigan tenglamalar	**2**
21.	2-tartibli chiziqli differensial tenglamalar	**2**
22.	Ikkinchi tartibli differentsial tenglamalarni darajali qatorlar yordamida integrallash.	**2**
III bob. Differentsial tenglamalar sistemasini yechish usullari		
23.	Differentsial tenglamalar sistemasini normal ko`rinishga keltirish.	**2**
24.	Differentsial tenglamalarning normal sistemasi uchun mavjudlik va yagonalik teoremasi.	**2**
25.	Chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi	**2**
26.	O`zgarmaskoeffitsyientli chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi	**2**
27.	Matritsa ko`rinishdagi chiziqli tenglamalar sistemasi. Koshi integral formulasi. Eksponentsial matritsa. Matritsali differentsial tenglamalarni integrallash.	**2**
28.	Yechimning davomiyligi. Yechimning boshlangich qiymatlarga va parametrlarga uzluksiz bog‘liqligi haqida teorema.	**2**
29.	Yechimning boshlangich qiymatlar va parametrlar bo`yicha differentsiallanuv-chanligi haqida teorema.	**2**
30.	Avtonom sistemalar. Avtonom yechimining xossalari. Avtonom sistemaning muvozanat holati. Xolatlar fazosi va traektoriyasi. Chiziqli bir jinsli ikkinchi tartibli o`zgarmas koeffitsientli avtonom sistemaning holatlar teksligi.	**2**
31.	Differentsial tenglamalar yechimining turg‘unligi	**2**
32.	Chegaraviy masalalar. Grin funktsiyasi. Grin funktsiyasining mavjudligi va yagonaligi haqida.	**2**
IV bob. Xususiy hosilali differensial tenglamalar		
33.	Xususiy hosilali differentsial tenglamalar haqida tushuncha.	**2**
34.	Xususiy hosilali birinchi tartibli kvazichiziqli differentsial tenglamalarning xarakteristikalari.	**2**
	Jami	**72**

Amaliy mashg’ulotlarining mavzulari

Kirish.Birinchi tartibli differentsial tenglamalar.

Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differentsial tenglamalar. Yechim tushunchasi. Xususiy va umumiy yechim. Integral chiziq. Koshi masalasi. Echimning mavjudligi va yagonaligi haqida teorema.

O‘zgaruvchilari ajralgan va unga keltiriladigan differentsial tenglamalar. O‘zgaruvchilarigi nisbatan bir jinsli va umumlashgan bir jinsli tenglamalar. Chiziqli differentsial tenglamalar. Yechimning xossalari. O‘zgarmasni variatsiyalash usuli. Bernulli va Rikkati tenglamalari. To‘la differentsial tenglamalar. Integrallovchi ko‘paytuvchi va uning mavjudligi haqidagi teoremalar. $y' = f(x, y)$ tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremaning isboti.

Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differentsial tenglamalar va ularni integrallash usullari. Mavjudlik va yagonalik teoremasi. Maxsus yechimlar va ularning mavjudligi. Parametr kiritish yo‘li bilan tenglamalarni integrallash. Lagranj va Klero tenglamalari.

Qo’llaniladigan ta’lim texnogiyalari:*diyologik yondashuv, muammoli ta’lim..*

Adabiyotlar:A1, A2, A3, A4, Q6, Q7, Q8, Q9, Q10, Q15

Yuqori tartibli differentsial tenglamalar. $n-$tartibli differentsial tenglamalar. Kanonik ko‘rinishdagi $n-$tartibli differentsial tenglamalar yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema. YUqori tartibli tenglamalarning tartibini pasaytirish. O‘zgaruvchilarigi nisbatan bir jinsli va umumlashgan bir jinsli yuqori tartibli tenglamalarni integrallash.

$n-$tartibli chizikli differentsial tenglamalar va ularning umumiy xossalari. Umumiy yechimning xossalari. Mavjudlik va yagonalik teoremasi. Bir jinsli chiziqli differentsial tenglamalar. Yechimning asosiy xossalari. CHiziqli bogliq va chiziqli erkli funktsiyalar. Vronskiy determinanti va uning xossalari. YEchimning fundamental sistemasi. Ostrogradskiy -Liuvill formulasi.

Bir jinsli bo‘lmagan $n-$tartibli chizikli differentsial tenglamalar va ularning umumiy va xususiy yechimlarini topish. Yechimning xossalari. Umumiy yechim haqida teorema. O‘zgarmasni variatsiyalash metodi. Koshi formulasi.

O‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differentsial tenglamalar. Eyler tenglamasi. Bir jinsli bo‘lmagan o‘zgarmas koeffitsiyenti chiziqli differentsial tenglamalar va ularning xususiy yechimlarini topish usullari. (O‘ng tamoni maxsus ko‘rinishda bo‘lgan tenglamalar).

Qo’llaniladigan ta’lim texnogiyalari:*diyologik yondashuv, muammoli ta’lim,shaxsga yo’naltirilgan ta’lim.*

Adabiyotlar:A1, A2, A3, A4, Q6, Q7, Q8, Q9, Q10, Q15

Differentsial tenglamalar sistemasini yechish usullari

Differentsial tenglamalar sistemasini normal ko‘rinishga keltirish. Differentsial tenglamalarning normal sistemasi uchun mavjudlik va yagonalik teoremasi. Gronuolla-Belman lemmasi. CHiziqli differentsial tenglamalar sistemasi. $y' = A(x)Y + F(x)$ sistema uchun mavjudlik va yagonalik teoremasi. CHiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi yechimlarining xossalari. Ostrogradskiy–Liuvill formulasi. CHiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy yechim haqida teorema. CHiziqli bir jinsli bo‘lgan tenglamalar sistemasi. YEchimlarning xossalari. YEchimning mavjudligi va yagonaligi haqida teorema. O‘ng tamoni maxsus ko‘rinishda bo‘lgan chiziqli o‘zgarmas koeffitsiyentli differentsial tenglamalar sistemasi.

Matritsa ko‘rinishdagi chiziqli tenglamalar sistemasi. Koshi integral formulasi. Eksponentsial matritsa. Matritsali differentsial tenglamalarni integrallash.

Echimning davomiyligi. YEchimning boshlangich qiymatlarga va parametrlarga uzluksiz bogliqligi haqida teorema. YEchimning boshlangich qiymatlar va parametrlar bo‘yicha differentsiallanuvchanligi haqida teorema.

Avtonom sistemalar. Avtonom yechimining xossalari. Avtonom sistemaning muvozanat xolati. Xolatlar fazosi va trayektoriyasi. CHiziqli bir jinsli ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli avtonom sistemaning xolatlar teksligi

Qo’llaniladigan ta’lim texnogiyalari:*diyologik yondashuv, muammoli ta’lim, aqliy xujum.keys-stadi.*

Adabiyotlar:A1, A2, A3, A4, Q6, Q7, Q8, Q9, Q10, Q15

Differentsial tenglamalar yechimining turg‘unligi

Lyapunov ma’nosida turgunlik. YEchimning turgunligi. Trivial yechimning turgunligi, noturgun va asimptotik turgunlik haqidagi teoremalar. Lyapunovning birinchi metodi. Birinchi yakinlanish bo‘yicha turgunlik.

Ikkinchi tartibli chiziqli differentsial tenglamani sodda ko‘rinishga keltirish. CHegaraviy masalalar. Grin funktsiyasi. Grin funktsiyasining mavjudligi va yagonaligi haqida. Xos sonlari va xos funktsiyalari tushunchasi. Ikkinchi tartibli differentsial tenglamalarni darajali qatorlar yordamida integrallash.

Qo’llaniladigan ta’lim texnogiyalari:*diyologik yondashuv, muammoli ta’lim, aqliy xujum, keys-stadi, pinbord, paradokslar*.

Adabiyotlar:A1, A2, A3, A4, Q6, Q7, Q8, Q9, Q10, Q15

Xususiy hosilali differensial tenglamalar

Xususiy hosilali differentsial tenglamalar haqida tushuncha. Xususiy hosilali birinchi tartibli kvazichiziqli differentsial tenglamalarning xarakteristikalari. YEchim, umumiy yechim va maxsus yechim tushunchasi. Koshi masalasi. Mavjudlik va yagonalik teoremasi. Koshi-Kovalevskaya teoremasi. Koshi masalasining geometrik talqini.

Qo’llaniladigan ta’lim texnogiyalari:*diyologik yondashuv, muammoli ta’lim, aqliy xujum, keys-stadi, pinbord, paradokslar*.

Adabiyotlar:A1, A2, A3, A4, Q6, Q7, Q8, Q9, Q10, Q15

Amaliy mashg’ulotlarining mavzulari

№	**Mavzular**	**soat**
I. bob Kirish.Birinchi tartibli differentsial tenglamalar(24soat)		
1.	Differentsial tenglamalar nazariyasining kelib chiqish tarixi. Oddiy differentsial tenglamalarga olib keluvchi amaliy masalalar.	**2**
2.	Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differentsial tenglamalar. Yechim tushunchasi.	**4**
3.	Yechimning geometrik ma’nosi	**2**
4.	O`zgaruvchilari ajralgan va unga keltiriladigan differentsial tenglamalar. O`zgaruvchilarigi nisbatan bir jinsli va umumlashgan bir jinsli tenglamalar.	**2**
5.	Chiziqli differentsial tenglamalar. Yechimning xossalari. O`zgarmasni variatsiyalash usuli. Bernulli va Rikkati tenglamalari.	**4**
6.	To`la differentsialli tenglamalar. Integrallovchi ko`paytuvchi va uning mavjudligi haqidagi teoremalar	**2**
7.	Pikar teoremasining isboti	**2**
8.	Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differentsial tenglamalar. Mavjudlik va yagonalik teoremasi.	**2**
9.	Maxsus yechimlar va ularning mavjudligi.	**2**
10.	Parametr kiritish yo`li bilan tenglamalarni integrallash. Lagranj va Klero tenglamalari.	**2**

II bob Yuqori tartibli differentsial tenglamalar(26 soat)		
11.	$n-$tartibli differentsial tenglamalar. Yechim, umumiy yechim, Koshi masalasining qo'yilishi.	**2**
12.	Yuqori tartibli tenglamalarning tartibini pasaytirish.	**2**
13.	O`zgaruvchilariga nisbatan bir jinsli va umumlashgan bir jinsli yuqori tartibli tenglamalarni integrallash.	**2**
14.	Bir jinsli chiziqli differentsial tenglamalar. Yechimning asosiy xossalari. Chiziqli bog'liq va chiziqli erkli funksiyalar.	**2**
15.	Vronskiy determinanti va uning xossalari. Yechimning fundamental sistemasi. Ostrogradskiy -Liuvill formulasi.	**4**
16.	Bir jinsli bo`lmagan $n-$tartibli chiziqli differentsial tenglamalar va ularning umumiy va xususiy yechimlarini topish. Yechimning xossalari. Umumiy yechim haqida teorema. O`zgarmasni variatsiyalash usuli.	**4**
17.	Xususiy yechimni topishning Koshi usuli.	**2**
18.	O`zgarmas koeffitsyientli chiziqli differentsial tenglamalar	**2**
19.	Bir jinsli bo`lmagan o`zgarmas koeffitsyienti chiziqli differentsial tenglamalar va ularning xususiy yechimlarini topish usullari. (O`ng tamoni maxsus ko`rinishda bo`lgan tenglamalar).	**2**
20.	O'zgarmas koeffitsientliga keltiriladigan tenglamalar	**2**
21.	2-tartibli chiziqli differensial tenglamalar	**4**
22.	Ikkinchi tartibli differentsial tenglamalarni darajali qatorlar yordamida integrallash.	**2**
III bob. Differentsial tenglamalar sistemasini yechish usullari (14 soat)		
23.	Differentsial tenglamalar sistemasini normal ko`rinishga keltirish.	**2**
24.	Differentsial tenglamalarning normal sistemasi uchun mavjudlik va yagonalik teoremasi.	**2**
25.	Chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi	**2**
26.	O`zgarmaskoeffitsyientli chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi	**2**
27.	Matritsa ko`rinishdagi chiziqli tenglamalar sistemasi. Koshi integral formulasi. Eksponentsial matritsa. Matritsali differentsial tenglamalarni integrallash.	**2**
28.	Yechimning davomiyligi. Yechimning boshlangich qiymatlarga va parametrlarga uzluksiz bog'liqligi haqida teorema.	**2**
29.	Yechimning boshlangich qiymatlar va parametrlar bo`yicha differentsiallanuv-chanligi haqida teorema.	**2**
30.	Avtonom sistemalar. Avtonom yechimining xossalari. Avtonom sistemaning muvozanat holati. Xolatlar fazosi va traektoriyasi. Chiziqli bir jinsli ikkinchi tartibli o`zgarmas koeffitsientli avtonom sistemaning holatlar teksligi.	**2**
31.	Differentsial tenglamalar yechimining turg'unligi	**2**
32.	Chegaraviy masalalar. Grin funktsiyasi. Grin funktsiyasining mavjudligi va yagonaligi haqida.	**2**
IV bob. Xususiy hosilali differensial tenglamalar (4 soat)		
33.	Xususiy hosilali differentsial tenglamalar haqida tushuncha.	**2**
34.	Xususiy hosilali birinchi tartibli kvazichiziqli differentsial tenglamalarning xarakteristikalari.	**2**
	Jami	**72**

Mustaqil ta'lim etishning tashkil etishning shakli va mazmuni

“Differensial tenglamalar” bo’yivha talabaning mustaqil ta’limi shu fanni o’rganish jarayoning tarkibiy qismi bo’lib, uslubiy va axborot resurslari bilan to’la taminganligi.

Talabalar auditorya mashg’ulotlarida professor-o’qituvchilarining bilan ma’ruzasini tinglaydilar, misol va masalar yechadilar. Auditoryadan vazifa sifatoda berilgan misol va masalalarni yechadi. Bundan tashqari ayrim mavzularni kengroq o’rganish maqsadida qo’shimcha adabiyotlarini o’qib refaratlar tayyorlaydilar hamda mavzu bo’yicha testlar yechadi. Mustaqil ta’lim natijalari reyting tizmi asosida baxolanadi.

Uyga vazifalarni bajarish, qo’shimcha darslik va adabiyotlardan yangi bilimlarni mustaqil o’rganish, kerakli ma’lumotlarni izlash va ularni toppish yo’llarini aniqlash, internet tarmoqlaridan foydalanib ma’lumotlar to’plash va ilmiy izlanishlar olib boorish, ilmiy to’garak doirasida yoki mustaqil ravishda ilmiy manbalardan foydalanib maqola va ma’ruzlar tayyorlash kabilar talabalarning darsda olganbilimlarini chuqurlashtiradi, ularning mustaqil fikrlash va ijodiy qobilyatlarini rivojlantiradi. Shuning uchun ham mustaqil ta’limsizo’quv faolyati sanarali bo’lishi mumkin emas.

Uy vazifalarini tekshirish va baxolash amaliy mashg’ulotlar olib boruvchi o’qituvchi tomonidan, konspektlarni va mavzuni o’zlashtirish darajasini tekshirish va baxolash esa ma’ruza darslarini olib boruvchi o’qituvchi tomonidan hars darsda amalga oshiradi.

“Differensial tenglamalar” fanidan mustaqil ish majmuasi fanning barcha mavzularini qamrab olgan va quydagi 18 mavzudan iborat.

Talabalar mustaqil ta’limining mazmuni va hajmi

T/r	Mustaqil ta’lim mavzulari	Berilgan topshiriqlar	Bajar muddat	Hajm (soatda)
I semestr				
1.	Chiziqli differentsial tenglamalar .Yechimning xossalari.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	1,2,3 -haftalar	6
2.	. O`zgarmasni variatsiyalash usuli. Pikar teoremasining isboti Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differentsial tenglamalar.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	4,5,6,7-haftalar	6
3.	Bernulli va Rikkati tenglamalari. .	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	8,9,10, 11-haftalar	6

4.	To`la differentsialli tenglamalar.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	12,13,14-haftalar	**6**
5.	Integrallovchi ko'paytuvchi va uning mfvjudligi haqidagi teorema .	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	15,16-haftalar	**6**
6.	Parametr kiritish yo`li bilan tenglamalarni integrallash	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	17,18-haftalar	6
7	Lagranj va Klero tenglamalari.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	17,18-haftalar	6
8	O`ng tamoni maxsus ko`rinishda bo`lgan chiziqli o'zgarmas koeffisentli differensial tenglamalarni sistemasini echish .	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	17,18-haftalar	6
				48
		II semstr		
9	. Eksponentsial matritsani hisoblash . .	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	1-5 -haftalar	6
10	Matritsali differentsial tenglamalar sistemasini integrallash.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	6-10-haftalar	6
	Avtonom sistemaning holatlar tekisligi .	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	11-12-haftalar	6
12	Chegaraviy masalalar uchun Grin funktsiyasi qurush.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	13-114-haftalar	6

13	. Shutur-Liuvill masalasi. Xos sonlari va xos funktsiyalar.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	15-16 -haftalar	6
14	Yuqori tartibli tenglamalar uchun Koshi masalasi echimining . mavjudlig va yagonaligi haqidagi teorema	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	17-18-haftalar	6
15	Yechimning boshlangich qiymatlarga va parametrlarga uzluksiz bog'liqligi haqidagi teorema.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	17,18-haftalar	6
16	Yechimning boshlangich qiymatlar va parametrlar bo`yicha differentsiallanuvchanligi haqida teorema	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	17,18-haftalar	8
17	Yechimning Lyapunov ma'nosida turgunligi. turgunligi	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	17,18-haftalar	8
18	Chiziqli tenglamalar sistemasi muvozanat holatinig turlari	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish.	17,18-haftalar	8
	Jami			66
	Hammasi			114

"Differensial tenglamalar" fanidan talabalar bilimini reyting tizimi asosida baxolash mezoni.

"Differensial tenglamalar" fani bo'yicha reyting jadvallari nazorat turi shakli, soni hamda har bir nazotatga ajratilgan maksimal ball , shuningdek joriy va oraliq nazoratlarining saralash ballari haqidagi malumotlar fan bo'yicha birinchi mashg'lotda talabalarga elon qilinadi . Fan bo'yicha talabalarning bilim saviyasi va o'zlashtirish darajasining Davlat ta'lim standartlariga muvofiqligigini ta'minlash uchun quydagi nazorat turlari o'tkaziladi:

- Joriy nazorat (JN) -talabaning fan mavzulari bo'yicha bilim va ko'nikma darajasini aniqlash va baholash usuli . Joriy nazorat fanning hususiyatidan kelib chiqqan holda amaliy mashg'ulotlarda og'zaki so'rov test o'tkazish , suhbat , nazorat ishi , kollikvium uy vazivalarini tekshirish va shu kabi boshqa shakillarda o'tkazilishi mumkin;

- Oraliq nazorat (ON) semestr davomida o’quv dasturining tegishli (fanlarining bir necha mavzularini o’z ichiga olgan) bilimi tugallangan keyin talabaning nazariy bilim va amaliy ko’nikma darajasini aniqlash va baholash usuli . Oraliq nazorat bir semestrda ikki marta o’tkaziladi va shakli (yozma , og’zaki , va hakozo) o’qu faniga ajratilgan umumiy saotlar xajmidan kelib chiqqan holda belgilanadi:
- Yakuniy nazorat (YN) -semestr yakunida muayyan fan bo’yicha nazariy bilim va amaliy ko’nikmalarni talabalar tomonidan o’zlashtirish darajasini baholash usuli. Yakuniy nazorat asosan tayanch tushuncha va iboralarga asoslangan “yozma ish” shaklida o’tkaziladi

ON o’tkazish jaroyoni kafedra mudiri tomonidan tuzilgan komissiya ishtirokida muntazam ravishda o’rganib boriladi va uni o’tkazish tartiblari buzilgan hollarda ON natijalari bekor qilinishi mumkin . Bunday hollarda ON qayta o’tkaziladi

Oliy ta’lim muassasasi rahbarining buyrug’ bilan ichki nazorat va manitorig bo’limi rahbarligida tuzilgan komissiya ishtirokida YN ni o’tkazish jarayonida muntazam ravishda o’rganib boriladi va uni o’tkazish tartiblari buzilgan hollarda YaN natijalari bekor qilinishi mumkin .bunday hollarda YaN qayta o’tkaziladi.

Talabaning bilim saviyasi , ko’nikma va malakalarini nazorat qilishning reyting tizimi asosida talabaning fan bo’yicha o’zlashtirish darajasi ballar orqali ifodalanadi.

“Differensial tenglamalar “ fani bo’yicha talabalarning semestr davomidagi o’zlashtirish ko’rsatkichi 100 ballik tizimda baholanadi

Ushbu 100 ball baholash turlari bo’yicha quydagicha taqsimlanadi

YaN – 30 ball

qolgan 70 ball esa J.N.– 40 ball, O.N.– 30 ballqilib taqsimlanadi :

Ball	Baho	Talabaning bilim darajasi
86-100	A’lo	Hulosa va qaror qabul qilish Ijodiy fikrlay olish mustaqil mushohada yurita olish Olgan bilimlarni amalda qo’llay olish. Tasavurga ega bo’lish
71-85	Yaxshi	Mustaqil mushohada qilish Olgan bilimlarni amlda qo’llay olish . Bilish aytib berish Tasavurga ega bo’lish
55-70	Qoniqarli	Mohiyatini tushintirish . Bilish aytib berish Tasavvurga ega bo’lish
0-54	Qoniqarsiz	Aniq tasavvurva ega bo’lmaslik . Bilmaslik

Fan bo'yicha saralash balli 55 ballni tashkil etadi .Talabaning saralash ballidan past bo'lgan o'zlashtirishi reyting daftarchasidan qayd etilmaydi.

Talabalarning o'quv fani bo'yicha mustaqil ishi joriy, oraliq va yakuniy nazoratlar jaroyaniga tegishli topshiriqlarni bajarishi va unga ajratilgan ballardan kelib chiqqan holda baxolanadi .

Talabaning fan bo'yicha reytingi quydagicha aniqlanadi

R =V*O'/100

Bu yerda **: V -** semesterda fanga ajratilgan umumiy o'quv yuklamasi (saotlarda)
O'- fan bo'yicha o'zlashtirish darajasi (ballarda)

Fan bo'yicha jotiy va oraliq nazoratlarga ajratilgan umumiy ballning 55% saralash ball hisoblanib , ushbu % dan kam to'plagan talaba yakuniy nazoratga kiritilmaydi

Joriy **JN** va oraliq **ON** turlari bo'yicha 55 ball va undan yuqori ball to'plagan talaba fanni o'zlashtirgan deb hisoblanadi va ushbu fan bo'yicha yakuniy nazoratga kirmasligiga yo'l qo'yiladi

Talabaning semester jarayonida fan bo'yicha to'plagan umumiy ball har bir nazoratqoyidalariga muvofiq to'plagan ballari yig'ndisiga teng

ON va YaN turlari calendar tematik rejasiga muvofiq dekanat tomonidan tuzilgan reyting nazorat jadvallari asosuda o'tkaziladi YaN semistr ohirgi 2 haftasi mobaynida o'tkaziladi

JN va ON nazoratlarda saralash balidan kam ball to'plagan va uzirli sabablarga ko'ra nazoratlarda qatnasha olmagan talabaga qayta topshirish uchun navbatdagi shu nazorat turigacha so'ngi joriy va oraliq nazoratlar uchun esa yakuniy nazoratgacha bo'lgan muddat beriladi

1 Talabaning semestrda JN va ON turlari bo'yicha to;plagan ballari ushbu nazorat turlarining umummiy ballarining 55 foizidan kam bo'lsa yoki semester yakuniy joriy , oraliq va yakuniy nazorat turlaari bo'yicha to'plagan ballari yig'indisining 55 baldan kam bo'lsa, u akademik qarzdor deb xisoblanadi .

2 Talaba nazirat natijalaridan norozi bo'lsa , fan bo'yicha nazorat turin natijalari e'lon qilingan vaqtdan boshlab bir kun mobaynida fakultet dekaniga ariza bilan murojaat etish mumkin. Bunday holda fakultet dekanining taqdim nomasiga ko'ra rektor buyrug'i bilan 3 (uch) a'zodan kam bo'lmagan tartibda apellyatsiya komissiyasi tashkil etiladi.

3. Apellyatsiya komissiyasi talabarning arizasini ko'rib chiqib , shu kunning o'zida xulosani bildiradi.

4. Baholashning o’rnatilgan talablar asosida belgilangan mudatlarda o’tqazilishi hamda rasmiylashtirilishi fakultet dekani , kafedra mudiri , o’quv uslubiy boshqarma hamda ichki nazorat va monitoring bo’limi tomonidan nazorat qilinadi.

Talabalarning O N dan to’playdigan ballarning namunaviy mezonlari

№	**Ko’rsatkichlar**	**Oraliq nazorat ballari**		
		maks	**1-o n**	**2-o n**
1	Darsdagi qatnashganlik darajasi. Ma`ruza darsdagi faolligi, konspekt daftariging yuritilishi va to’liqligi.	10	0-5	0-5
2	Talabalarning mustaqil ta`lim topshiriqlarni o’z vaqtida va sifatli bajarish va o’zlashtirilish.	10	0-5	0-5
3	Og’zaki savol-javoblar kollokvium va boshqa nazorat turlari natijalari bo’yicha	10	0-5	0-5
Jami oraliq nazorat ballari		30	0-15	0-15

Talabalarning J N dan to’playdigan ballarning namunaviy mezonlari

№	**Ko’rsatkichlar**	**Joriy nazorat ballari**		
		maks	**1-j n**	2-j n
1	Darsdagi qatnashganlik darajasi. Amaliy darsdagi faolligi, amaliy mashg’ulot daftariging yuritilishi va holati	15	0-7	0-8
2	Mustaqil ta`lim topshiriqlarni o’z vaqtida va sifatli bajarishi. Mavzular bo’yicha uy vazifalarini bajarilishi va o’zlashtirilishi darajasi.	15	0-7	0-8
3	Yozma nazorat ishi yoki test savollariga berilgan javoblar	10	0-5	0-5
Jami joriy nazorat ballari		40	0-19	0-21

Yakuniy nazorat “yozma ish” shaklida belgilangan bo’lsa, u holdas yakuniy mazorat 30 ballik “yozma ish” variantlari asosida o’tkaziladi.

Agar yakuniy nazorat markazlashgan test asosida tashkil etilgan bo’lib fan bo’yicha yakuniy nazorat “yozma ish” shaklida belgilangan bo’lsa, u holda yakuniy nazorat quyidagi jadval asosida amalga oshiriladi

№	Ko’rsatkichlar	Yakuniy nazorat ballari	
		maksimal	O’zlashtirish oralig’i
1	Fan bo’yicha yakuniy yozma ish nazorat	6	0-6
2	Fan bo’yicha yakuniy test nazorati	24	0-24
Jami		30	0-30

Yakuniy nazoratda “yozma ish”lari baxolash mezoni

Yakuniy nazorat “yozma ish” shaklida amalga oshirilganda, sinov ko’p variantli usulda o’tkaziladi. Har bir variant 2ta nazariy savol va 4ta amaliy topshiriqdan iborat. Nazariy savollar fan bo’yicha tayanch so’z va iboralar asosida tuzilgan bo’lib, fanning barcha mavzularini o’z iciga qamrab olgan.

Har bir nazariysavolga yozilgan javoblar bo’yicha o’zlashtirilishi ko’rsatkichi 0-3 ball oralig’ida baholanadi.Amaliy topshiriq esa-0-6 ball oralig’ida baholanadi.Talaba maksimal 30ball to’plashi mumkin.

Yozma sinov bo’yicha umumiy o’zlashtirilishi ko’rsatkichini aniqlash uchun variantda berilgan savollarning har biri uchun yozilgan javoblarga qo’yilgan o’zlashtirish ballari qo’shiladi va yig’indi talabaning yakuniy nazorat bo’yicha o’zlashtirilish bali hisoblanadi.

Yakuniy nazoratda “yozma ish”lari baxolash mezoni

Yakuniy nazorat “yozma ish” shaklida amalga oshirilganda, sinov ko’p variantli usulda o’tkaziladi. Har bir variant 2ta nazariy savol va 4ta amaliy topshiriqdan iborat. Nazariy savollar fan bo’yicha tayanch so’z va iboralar asosida tuzilgan bo’lib, fanning barcha mavzularini o’z iciga qamrab olgan.

Har bir nazariysavolga yozilgan javoblar bo’yicha o’zlashtirilishi ko’rsatkichi 0-3 ball oralig’ida baholanadi.Amaliy topshiriq esa-0-6 ball oralig’ida baholanadi.Talaba maksimal 30ball to’plashi mumkin.

Yozma sinov bo’yicha umumiy o’zlashtirilishi ko’rsatkichini aniqlash uchun variantda berilgan savollarning har biri uchun yozilgan javoblarga qo’yilgan o’zlashtirish ballari qo’shiladi va yig’indi talabaning yakuniy nazorat bo’yicha o’zlashtirilish bali hisoblanadi.

Foydalaniladigan adabiyotlar.

Asosiy adabiyotlar

1. Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенние дифферциальные уравнения. М.:Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Гиз.Физ-мат. литература.1958
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление. М.: Наука.. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Зборник задач по дифференсиальным уравнениям М, Наука.1979 5-издания

Қўшимча адабиётлар

6. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1991. 314 с.
7. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, “Высшая школа”, 1977.
8. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: изд-во Моск. Ун-та. 1984.
9. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1987.
10. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука.1980.

Internet resurslari:

1.WWW.INTUIT.RU; http://www.mcmee.ru;

2.http://lib.mexmat.ru; http://www.exponenta.ru.

3; www.lib.homelinex.org/math/;

4.www.eknigu.com/lib/Mathematics/;

5.www.eknigu.com/info/M_Mathematics/MC;

6.www.allmath.ru/highermath/

I. SILLABUS

“ Differensial tenglamalar fanining “ sillabusi

(2018-2019 o’quu yili)

Kafedra nomi	Matematika	
O’qituvchi haqida bma’lumot	f.m.f.n I.Xayrullaev kat.o’qit.X.Islomov	Xayrillaev58@mail.ru Islomov57@mail.ru
Semestr va o’quv kursining davomiyligi	3-4- semestr va jami soat	
O’quv soatlari hajmi	Jami	258
	Shuningdek	
	Ma’ruza	72
	Amaliy mashg’ulot	72
	Mustaqil ta’lim	114
Yo’nalish nomi va shifri	5130100	Matematika

Kursning predmeti va mazmuni: Differensial tenglamalar fani turli xil fizik jarayonlarni o‘rganish bilan chambarchas bog’liqdir. Bunday jarayonlar qatoriga gidrodinamika, elektrodinamika masalalari va boshqa ko‘plab masalalarni keltirish mumkin. Turli jarayonlarni ifodalovchi matematik masalalar ko‘pgina umumiylikka ega bo‘lib, differentsial tenglamalar fanining asosini tashkil etadi. Differentsial tenglamalar oliy matematikaning asosiy fundamental va tadbiqiy bo‘limlaridan biri bo‘lib, u bakalavriatning matematika, mexanika, amaliy matematika va informatika kabi yo‘nalishlari o‘quv rejasidagi umumkasbiy fanlardan biri hisoblanadi. Hozirgi kunda fan va texnikaning jadal rivojlanib borishi turli murakkab texnik, mexanik, fizik va boshqa jarayonlarni o‘rganish, ularni matematik nuqtai nazardan tasavvur qilish, matematik modellarini tuzish va yechish nafaqat tadbiqiy jihatdan balki nazariy jihatdan ham dolzarb, ham amaliy axamiyatga ega bo‘lgan muammolardan biri hisoblanadi.

Kursni o’qitishning maqsadi va vazifalari: Differentsial tenglamalar fanining asosiy maqsadi bakalavriatning matematika yo‘nalishi talabalariga bu fanning fundamental asoslarini yetarli darajada o‘qitish, bu nazariy bilimlar yordamida mexanika, fizika, texnika va boshqa sohalarda sodir bo‘ladigan jarayonlarni differentsial tenglamalar ko‘rinishda ifodalashni, matematik modelllar uchun masalaning berilishiga qarab, ularni yechishga o‘rgatish va ixtisoslik fanlarini o‘rgatishga tayyorlashdan iborat.

Differentsial tenglamalar fani fundamental va tadbiqiy fanlarning asosini tashkil qiladi. Jarayonlarning differentsial tenglamalar yordamida matematik modelini tuzish va yechimlarini topish usullarini o‘rganish, masalaning berilishiga qarab, uning yechimini nazariy tahlil qilish differentsial tenglamalar fanining asosiy vazifasiga kiradi.

Kursning tarkibi va mazmuni				
№	Mavzular	Ma`ruza	Amaliy mashg'u lot	Mustatt a`lim
I-semestr				
1	Oddiy differentsial tenglamalarga olib keluvchi amaliy masalalar.	2	2	2
2	Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differentsial tenglamalar. Yechim tushunchasi. Xususiy va umumiy yechim. Integral chiziq.	2	2	2
3	Koshi masalasi. Yechimning mavjudligi va yagonaligi haqida teorema. Yechimning geometrik ma'nosi	2	2	2
4	O`zgaruvchilari ajralgan va unga keltiriladigan differentsial tenglamalar. O`zgaruvchilarigi nisbatan bir jinsli tenglamalar.	2	2	2
5	Chiziqli differentsial tenglamalar. Yechimning xossalari. O`zgarmasni variatsiyalash usuli.	2	2	2
6	Bernulli va Rikkati tenglamalari.	2	2	2
7	To`la differentsialli tenglamalar. Integrallovchi ko`paytuvchi	2	2	2
8	Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differentsial tenglamalar. Mavjudlik va yagonalik teoremasi.	2	2	2
9	Maxsus yechimlar va ularning mavjudligi	2	2	2
10	Parametr kiritish yo`li bilan tenglamalarni integrallash. Lagranj va Klero tenglamalari.	2	2	2
11	$n-$tartibli differentsial tenglamalar. Yechim, umumiy yechim, Koshi masalasining qo'yilishi.	2	2	2
12	Yuqori tartibli tenglamalarning tartibini pasaytirish.	2	2	2
13	O`zgaruvchilariga nisbatan bir jinsli va umumlashgan bir jinsli yuqori tartibli tenglamalarni integrallash	2	2	2
14	Bir jinsli chiziqli differentsial tenglamalar. Yechimning asosiy xossalari. Chiziqli bog'liq va chiziqli erkli funksiyalar	2	2	2
15	Vronskiy determinanti va uning xossalari. Yechimning fundamental sistemasi. Ostrogradskiy - Liuvill formulasi.	2	2	2
16	Bir jinsli bo`lmagan $n-$tartibli chiziqli differentsial tenglamalar va ularning umumiy va xususiy yechimlarini topish	2	2	2
17	Yechimning xossalari. Umumiy yechim haqida teorema. O`zgarmasni variatsiyalash usuli.	2	2	2
18	O`zgarmas koeffitsyientli chiziqli differentsial tenglamalar Xususiy yechimni topishning Koshi	2	2	2

	usuli.			
II-semestr				
19	Bir jinsli bo`lmagan o`zgarmas koeffitsyienti chiziqli differentsial tenglamalar va ularning xususiy yechimlarini topish usullari	2	2	2
20	O’zgarmas koeffitsientliga keltiriladigan tenglamalar	2	2	2
21	2-tartibli chiziqli differensial tenglamalar	2	2	2
22	Ikkinchi tartibli differentsial tenglamalarni darajali qatorlar yordamida integrallash	2	2	2
23	Differentsial tenglamalar sistemasini normal ko`rinishga keltirish.	2	2	2
24	Differentsial tenglamalarning normal sistemasi uchun mavjudlik va yagonalik teoremasi.	2	2	2
25	Chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi	2	2	2
26	O`zgarmaskoeffitsyientli chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi	2	2	2
27	Matritsa ko`rinishdagi chiziqli tenglamalar sistemasi. Koshi integral formulasi	2	2	2
28	Eksponentsial matritsa. Matritsali differentsial tenglamalarni integrallash	2	2	2
29	Yechimning davomiyligi. Yechimning boshlangich qiymatlarga va parametrlarga uzluksiz bog‘liqligi haqida teorema.	2	2	2
30	Yechimning boshlangich qiymatlar va parametrlar bo`yicha differentsiallanuv-chanligi haqida teorema	2	2	2
31	Avtonom sistemalar. Avtonom yechimining xossalari. Avtonom sistemaning muvozanat holati. Xolatlar fazosi va traektoriyasi	2	2	2
32	Chiziqli bir jinsli ikkinchi tartibli o`zgarmas koeffitsientli avtonom sistemaning holatlar teksligi.	2	2	2
33	Ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni darajali qatorlar yordamida echish	2	2	2
34	Differentsial tenglamalar yechimining turg‘unligi	2	2	2
35	Birinchi yaqinlashish bo’yicha turgunlik	2	2	2
36	Chegaraviy masalalar. Grin funktsiyasi. Grin funktsiyasining mavjudligi va yagonaligi haqida.	2	2	2
37	Xususiy hosilali differentsial tenglamalar haqida tushuncha	2	2	2
38	Xususiy hosilali birinchi tartibli kvazichiziqli differentsial tenglamalarning xarakteristikalari.	2	2	2
Jami		**76**	**76**	**114**

2. ASOSIY QISM.

2.1 Ma`ruza mashg'ulotlari.

1- mavzu. Differentsial tenglamalar nazariyasining kelib chiqish tarixi. Oddiy differentsial tenglamalarga olib keluvchi amaliy masalalar. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Differentsial tenglamalar nazariyasining kelib chiqish tarixi.
2. Oddiy differentsial tenglamalarga olib keluvchi amaliy masalalar.

IPT- Sharhlovchi ma'ruza.

IAT- ma'ruza matni, internet resurslari.

2- mavzu. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differentsial tenglamalar. Yechim tushunchasi. Xususiy va umumiy yechim. Integral chiziq. Koshi masalasi. Yechimning mavjudligi va yagonaligi haqida teorema. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differentsial tenglamalar.
2. Yechim tushunchasi. Xususiy va umumiy yechim.
3. Integral chiziq.
4. Koshi masalasi.
5. Yechimning mavjudligi va yagonaligi haqida teorema.

IPT- Muammoli ma'ruza.

IAT-Axborot texnologiyasi.

3- mavzu. Yechimning geometrik ma'nosi. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Yechimning geometrik ma'nosi

IPT - Aqliy hujum yordamidagi ma'ruza.

IAT - Informatsion texnologiya.

Tavsiya etiladigan adabiyotlar.

4- mavzu. O`zgaruvchilari ajralgan va unga keltiriladigan differentsial tenglamalar. O`zgaruvchilarigi nisbatan bir jinsli va umumlashgan bir jinsli tenglamalar. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. O`zgaruvchilari ajralgan differentsial tenglamalar.
2. O`zgaruvchilari ajralgan tenglamalarga keltiriladigan differentsial tenglamalar.
3. O`zgaruvchilarigi nisbatan bir jinsli tenglamalar.
4. O`zgaruvchilarigi nisbatan umumlashgan bir jinsli tenglamalar.

IPT - Aqliy hujum yordamidagi ma'ruza.

IAT - Informatsion texnologiya.

5- mavzu. Chiziqli differentsial tenglamalar. Yechimning xossalari. O`zgarmasni variatsiyalash usuli. Bernulli va Rikkati tenglamalari. (4 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Chiziqli differentsial tenglamalar.
2. Yechimning xossalari.
3. O`zgarmasni variatsiyalash usuli.
4. Bernulli tenglamasi.
5. Rikkati tenglamasi

IPT-SHarhlovchi ma'ruza

IAT-Ma'ruza matni.

6- mavzu. To`la differentsial tenglamalar. Integrallovchi ko`paytuvchi va uning mavjudligi haqidagi teoremalar (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. To`la differentsial tenglamalar.
2. Integrallovchi ko`paytuvchi va uning mavjudligi haqidagi teoremalar

IPT - Aqliy hujum yordamidagi ma’ruza.
IAT - Informatsion texnologiya.

7- mavzu. Pikar teoremasining isboti (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Pikar teoremasi
2. Pikar teoremasining isboti.

IPT - Aqliy hujum yordamidagi ma’ruza.
IAT - Informatsion texnologiya.

8- mavzu. Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differentsial tenglamalar va ularni integrallash usullari. Mavjudlik va yagonalik teoremasi. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differentsial tenglamalar va ularni integrallash usullari.
2. Mavjudlik va yagonalik teoremasi.

IPT - Aqliy hujum yordamidagi ma’ruza.
IAT - Informatsion texnologiya.

9- mavzu. Maxsus yechimlar va ularning mavjudligi. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Maxsus yechimlar va ularning mavjudligi.

IPT - Aqliy hujum yordamidagi ma’ruza.
IAT - Informatsion texnologiya.

.

10- mavzu. Parametr kiritish yo`li bilan tenglamalarni integrallash. Lagranj va Klero tenglamalari.
(2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Parametr kiritish yo`li bilan tenglamalarni integrallash.
2. Lagranj va Klero tenglamalari.

IPT - Aqliy hujum yordamidagi ma’ruza.
IAT - Informatsion texnologiya..

11- mavzu. $n-$ **tartibli differentsial tenglamalar. Yechim, umumiy yechim, Koshi masalasining qo’yilishi. (2 soat)**

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. $n-$ tartibli differentsial tenglamalar.
2. Yechim, umumiy yechim.
3. Koshi masalasining qo’yilishi.

IPT- Munozarali ma`ruza.
IAT- axborot texnologiyasi.

13- mavzu. O`zgaruvchilariga nisbatan bir jinsli va umumlashgan bir jinsli yuqori tartibli tenglamalarni integrallash. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. O`zgaruvchilariga nisbatan bir jinsli va umumlashgan bir jinsli yuqori tartibli tenglamalar.
2. O`zgaruvchilariga nisbatan bir jinsli va umumlashgan bir jinsli yuqori tartibli tenglamalarni integrallash.

IPT- Munozarali ma`ruza.

IAT- axborot texnologiyasi.

14- mavzu. Bir jinsli chiziqli differentsial tenglamalar. Yechimning asosiy xossalari. Chiziqli bog‘liq va chiziqli erkli funksiyalar. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Bir jinsli chiziqli differentsial tenglamalar.
2. Yechimning asosiy xossalari.
3. Chiziqli bog‘liq va chiziqli erkli funksiyalar.

IPT- Munozarali ma’ruza.

IAT- Informatsion texnologiya, ma’ruza matni.

15- mavzu. Vronskiy determinanti va uning xossalari. Yechimning fundamental sistemasi. Ostrogradskiy -Liuvill formulasi. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Vronskiy determinanti va uning xossalari.
2. Yechimning fundamental sistemasi.
3. Ostrogradskiy -Liuvill formulasi.

IPT- Munozarali ma’ruza.

IAT- Informatsion texnologiya, ma’ruza matni.

Tavsiya etiladigan adabiyotlar.

16- mavzu. Bir jinsli bo`lmagan $n-$tartibli chiziqli differentsial tenglamalar va ularning umumiy va xususiy yechimlarini topish. Yechimning xossalari. Umumiy yechim haqida teorema. O`zgarmasni variatsiyalash usuli. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Bir jinsli bo`lmagan $n-$tartibli chiziqli differentsial tenglamalar va ularning umumiy va xususiy yechimlarini topish.
2. Yechimning xossalari.
3. Umumiy yechim haqida teorema.
4. O`zgarmasni variatsiyalash usuli.

IPT - Aqliy hujum yordamidagi ma’ruza.

IAT - Informatsion texnologiya.

17- mavzu. Xususiy yechimni topishning Koshi usuli. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Bir jinsli bo`lmagan $n-$tartibli chiziqli differentsial tenglamalar va ularning umumiy va xususiy yechimlarini topish.
2. Xususiy yechimni topishning Koshi usuli.

IPT - Aqliy hujum yordamidagi ma’ruza.

IAT - Informatsion texnologiya.

18- mavzu. O`zgarmas koeffitsyientli chiziqli differentsial tenglamalar. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. O`zgarmas koeffitsyientli chiziqli differentsial tenglamalar.
2. Eyler tenglamasi.

IPT- Usuli: ma’ruza.

IAT- Informatsion texnologiya, ma’ruza matni.

19- mavzu. Bir jinsli bo`lmagan o`zgarmas koeffitsyienti chiziqli differentsial tenglamalar va ularning xususiy yechimlarini topish usullari. (O`ng tamoni maxsus ko`rinishda bo`lgan tenglamalar). (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Bir jinsli bo`lmagan o`zgarmas koeffitsyienti chiziqli differentsial tenglamalar
2. Ularning xususiy yechimlarini topish usullari. (O`ng tamoni maxsus ko`rinishda bo`lgan tenglamalar).

IPT- Usuli: ma'ruza.

IAT- Informatsion texnologiya, ma'ruza matni.

20- mavzu. O'zgarmas koeffitsientliga keltiriladigan tenglamalar (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. O'zgarmas koeffitsientliga keltiriladigan tenglamalar

IPT- Usuli: ma'ruza.

IAT- Informatsion texnologiya, ma'ruza matni.

21- mavzu. 2-tartibli chiziqli differensial tenglamalar (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. 2-tartibli chiziqli differensial tenglamalar

IPT- Usuli: ma'ruza.

IAT- Informatsion texnologiya, ma'ruza matni.

22- mavzu. Ikkinchi tartibli differentsial tenglamalarni darajali qatorlar yordamida integrallash. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. 2-tartibli chiziqli differensial tenglamalar
2. Ikkinchi tartibli differentsial tenglamalarni darajali qatorlar yordamida integrallash.

IPT- Usuli: ma'ruza.

IAT- Informatsion texnologiya, ma'ruza matni.

23- mavzu. Differentsial tenglamalar sistemasini normal ko`rinishga keltirish. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Differentsial tenglamalar sistemasini normal ko`rinishga keltirish.

IPT - Aqliy hujum yordamidagi ma'ruza.

IAT - Informatsion texnologiya.

24- mavzu. Differentsial tenglamalarning normal sistemasi uchun mavjudlik va yagonalik teoremasi. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Differentsial tenglamalarning normal sistemasi uchun mavjudlik va yagonalik teoremasi.

IPT - Aqliy hujum yordamidagi ma'ruza.

IAT - Informatsion texnologiya.

25- mavzu. Chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi.
2. Chiziqli differentsial tenglamalar sistemasini yechish usullari.

IPT - Aqliy hujum yordamidagi ma'ruza.

IAT - Informatsion texnologiya.

26- mavzu. O`zgarmas koeffitsyientli chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

3. O`zgarmas koeffitsyientli chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi.
4. O`zgarmas koeffitsyientli chiziqli differentsial tenglamalar sistemasini yechish usullari.

IPT - Aqliy hujum yordamidagi ma'ruza.

IAT - Informatsion texnologiya.

27- mavzu. Matritsa ko`rinishdagi chiziqli tenglamalar sistemasi. Koshi integral formulasi. Eksponentsial matritsa. Matritsali differentsial tenglamalarni integrallash. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Matritsa ko`rinishdagi chiziqli tenglamalar sistemasi.
2. Koshi integral formulasi.
3. Eksponentsial matritsa.
4. Matritsali differentsial tenglamalarni integrallash.

IPT - Aqliy hujum yordamidagi ma'ruza.

IAT - Informatsion texnologiya.

28- mavzu. Yechimning davomiyligi. Yechimning boshlangich qiymatlarga va parametrlarga uzluksiz bog'liqligi haqida teorema. (4 soat)

1-ma`ruza (4 soat)

Reja:

. Yechimning davomiyligi.

. Yechimning boshlangich qiymatlarga va parametrlarga uzluksiz bog'liqligi haqida teorema.

IPT - Aqliy hujum yordamidagi ma'ruza.

IAT - Informatsion texnologiya.

29- mavzu. Avtonom sistemalar. Avtonom yechimining xossalari. Avtonom sistemaning muvozanat holati. Xolatlar fazosi va traektoriyasi. Chiziqli bir jinsli ikkinchi tartibli o`zgarmas koeffitsientli avtonom sistemaning holatlar teksligi. (2 soat)

1-ma`ruza (4 soat)

Reja:

1. Avtonom sistemalar.
2. Avtonom yechimining xossalari.
3. Avtonom sistemaning muvozanat holati.
4. Xolatlar fazosi va traektoriyasi. C
5. hiziqli bir jinsli ikkinchi tartibli o`zgarmas koeffitsientli avtonom sistemaning holatlar teksligi.

IPT - Aqliy hujum yordamidagi ma'ruza.

IAT - Informatsion texnologiya.

30- mavzu. Differentsial tenglamalar yechimining turg'unligi. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Chiziqsiz differentsial tenglamalar uchun yechimning mavjudligi va yagonaligi xaqida Koshi-Lipshits teoremasi.
2. Lyapunov ma`nosida yechimning turg'unligi, asimptotik turg'unligi.
3. Yechimning turg'unligi, turg'unmasligi, asimptotik turg'unligi haqida teoremalar.
4. Turg'unlik nazariyasining amaliy masalalari.

IPT - Aqliy hujum yordamidagi ma'ruza.

IAT - Informatsion texnologiya.

31- mavzu. Chegaraviy masalalar. Grin funktsiyasi. Grin funktsiyasining mavjudligi va yagonaligi haqida. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Chegaraviy masalalar.
2. Grin funktsiyasi.
3. Grin funktsiyasining mavjudligi va yagonaligi haqida.

IPT - Aqliy hujum yordamidagi ma'ruza.

IAT - Informatsion texnologiya.

1. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука.1980.

32- mavzu. Xususiy hosilali differentsial tenglamalar haqida tushuncha. Xususiy hosilali birinchi tartibli kvazichiziqli differentsial tenglamalarning xarakteristikalari. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Xususiy hosilali differentsial tenglamalar haqida tushuncha.
2. Xususiy hosilali birinchi tartibli kvazichiziqli differentsial tenglamalarning xarakteristikalari.

IPT- Muammoli ma’ruza.

IAT-Axborot texnologiyasi.

1- mavzu. Oddiy differentsial tenglamalarga olib keluvchi amaliy masalalar. (2 soat)

Reja:

1. Differentsial tenglamalar nazariyasining kelib chiqish tarixi.
2. Oddiy differentsial tenglamalarga olib keluvchi amaliy masalalar.

Differensial tenglamalar tuzishni talab etadigan geometrik va fizikaviy masalalarni yechish ko`pincha qiyinchiliklar tug`diradi: konkret fizikaviy masalalarning spetsifikasi turli fizikaviy qonunlarni bilishi talab etadi. Differensial tenglamalarni tuzishning barcha hollar uchun yarokli bo`lgan universal usulini ko`rsatish mumkin emas;faqat ba`zi bir umumiy ko`rsatmalar berish mumkin xolos.

Geometrik yoki fizikaviy masalalar shartlariga qarab birinchi tartibli differensial tenglamalar tuzishda ko`pincha tenglamalarning quyidagi uch ko`rinishidan biriga kelinadi:

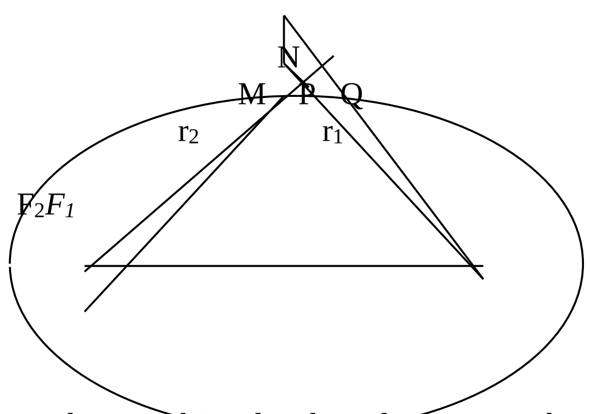
1)differensiallar ishtirok etgan differensial tenglamalar ;

2) hosilalar ishtirok etgan differentsial tenglamalar;

3) keyinchalik differentsial tenglamalarga almashtiriladigan eng sodda integral tenglamalar.

bunday ko`rinishdagi tenglamalar qanday tuzilishini ayrimg`ayrim ko`rib chiqamiz.

I. D i f f e r e n s i a l l a r i sh t i r o k e t g a n t e n g l a m a l a r. Birinchi tartibli differentsial tenglamalar tuzishda ko`pincha differensialusuli deb ataladigan usuldan foydalanishmaqsadga muvofiq bo`ladi. Bu usul shundan iboratki, masala shartidan taqribiy yo`l bilan differensiallar orasida munosabatlar tuziladi. Bunda masalani soddalashtiruvchi va natijalarga ta`sir qilmaydigan yo`l qo`yishlarga ruxsat etiladigan. Jumladan, kattaliklaring kichik orttirmalari ularning differensiallari bilan almashtiriladigan, notekis o`tadigan fizikaviy jarayonlar (nuqtaning notekis harakati, jismning qizishi yoki sovushi, idishdan suvning oqishi va h. k.) kichik vaqt oralig`ida tekis, o`zgarmas tezlik bilan yuz beradigan jarayonlar sifatida qaraladi . Orttirmalar differensiallar bilan almashtirish kichikligi eng yuqori bo`lgan cheksiz kichik miqdorlarin tashlab yuborishga keltirilganligi uchun bunday yo`l qo`yishlar oxirgi natijaning to`g`riligiga ta`sir etmaydi. Funksiyaning va uning argumenti differensiallarining nisbati ularing orttirmalari nisbatlarning limiti bo`lganligi sababli, orttirmalar nolga intiladi borgan sari bizning yo`l ko`ygan farazlarimiz katta aniqlik bilan bajariladi. Agar bunda hosil bo`ladigan differensial tenglamalar differensiallarga nisbatan bir jinsli va chiziqli bo`lsa, bu tenglamalar aniq bo`ladi.

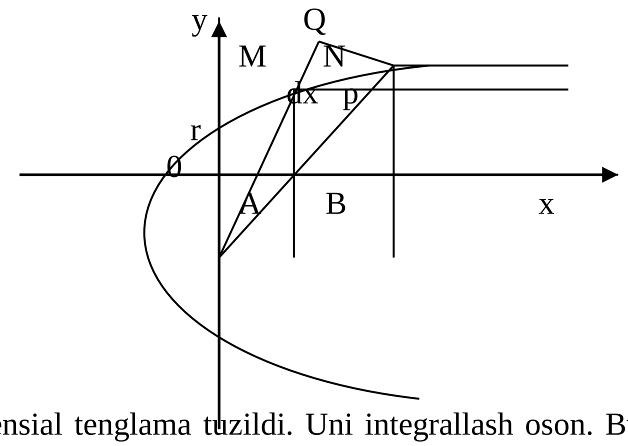


Differensiallar metodining tatbiq qilinishiga doir geometrik misol ko`ramiz.

1-misol. Bir nuqtadan chiquvchi yorug`lik nurlari reflektor ko`zgusidan qaytib, boshqa bir nuqtada kesishishi uchun reflektor ko`zgusini qanday aylanish sirti bo`yicha silliqlash kerak?

Ye ch i l i sh i. Masala izlanayotgan sirtning yorug`lik manbai joylashgan $F_1$ nuqta va qaytgan nurlar kesishadigan $F_2$ nuqta orqali o`tadigan meridian tekislik bilan kesilishidan hosil bo`lgan kesimning tenglamasini topishga keltirilishi ravshandir. *MQ* –bu kesimning kesik yoyi bo`lsin. Uni to`g`ri chiziq kesmasa deb hisoblab hamda F_1 va F_2 nuqtalarni markaz qilib $F_1M=r_1$ va $F_2M=r_2$ radiusli aylanalarning *MN* va *MP* yoylarini chizamiz. Bu yoylarni ham to`g`ri chiziq kesmalari deb hisoblaymiz. *MQN*va*MQP* uchburchaklar umuiy *MQ* gipotenuzaga ega bo`lib, tug`ri burchaklidirlar (<*MNQ* va<*MQP*—tug`ri burchaklar). Optikadagi tushush va qaytish burchaklarining tengligi ma`lum teoremadan va vertical burchakalar, tengligi xossasidan foydalanib, <*MNQ* =<*MQP* ekanligini topamiz, binobarin uchburchaklar o`zaro teng ekan. Bu yerdan *QN=QP* ekanligi kelib chiqadi, biroq $ON=-\Delta r_1$, $QP=\Delta r_2$ bo`lganligi uchun r_1 va r_2 radius vektor-larning orttirmalarini ularning differensiallari bilan almashtirib topamiz:

$dr_1 + dr_2 = 0$ **(1)**



Differensial tenglama tuzildi. Uni integrallash oson. Buning uchun uni quyidagicha qayta yozib olamiz:

$d(r_1 + r_2) = 0$

Bu erdan umumiy integralni topamiz.

$r_1 + r_2 = C$ **(2)**

Shunday qilib izlanayotgan sirtning meridian tekislik bilan kesimi ellips ekan.Demak, reflektor ko`zgusini aylanish ellipsoidi bo`yicha silliqlash kerak ekan.

Bu masalani quyidagicha o`zgartiramiz. $F_1$nuqtadan chiqayotgan nurlar qaytgandan sung parallel bo`lsinlar deb faraz qilaylik.

Koordinatalar sistemasini shunday tanlab olamizki, yorug`lik manbai koordinatalar boshida joylashsin,qaytgan nurlar esa *Ox* o`qqa parallel bo`lsin (1- rasm). *MN*—kesimning kichik yoyi bo`lsin, uni ilgarigidek, tug`ri chiziq kesmasi deb hisoblaymiz.*O* ni markaz qilib, *ON=OM+MQ* radius aylananing *NQ* yoyini o`tkazamiz. Bu yoyni ham to`g`ri chiziq kesmasa deb hisoblaymiz. Absissalari *x* va *x+dx* bo`lgan *M* va *N* nuqtalardan *Ox* o`qqa *MA* va *N**B***perpendikulyarlar tushiramiz, bundan tashqari *M* nuqtadan *BN* ga u bilan *P* nuqtada kesishadigan perpendikulyar o`tkazamiz. MQN vaMPN uchburchaklarning MNgipotenuzasi umumiy bo`lib, ular to`g`ri burchaklidir (<MQNva <*MPN*—to`g`ri burchaklar). Bu uchburchaklar o`zaro teng, chunki ularning bittadan o`tkir burchaklari teng: <*QMN=*<*PMN;* bu tushishva qaytish burchaklarining tengligidan hamda vertikal burchaklarning tengligidan kelib chiqadi. Shu sababli *MQ=MP* va *MQ=dr (*Δrorttirmani *dr* differensial bilan almashtirdik) hamda *MR=dx* bo`lganligidan differensial tenglama

$dr = dx$ (3)

ko`rinishga ega bo`ladi.

Umumiy integralni integrallash bilan topamiz:

r=x+C (4)

yoki r ni $\sqrt{x^2+y^2}$ bilan almashtirsak ,

$$\sqrt{x^2+y^2}=x+C$$

Agar tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga oshirsak,

$y^2=2Cx+C^2$ (5)

ni hosil qilamiz, bu kesim parabola ekanini ko`rsatadi. Demak, bu holda reflektor ko`zgusini aylanish paraboloidi bo`yicha silliqlash kerak.

Differensial metod tatbiq qilib yechiladigan fizikaga doir misollarni be yerda keltirib o`tirmaymiz. 2-§ning bir qator masalalari u erda ochiq -oydin gapirilmagan bo`lsada, bu metod bilan yechilgan. Ularning ana shu nuqtai nazardan yana bir bor diqqat bilan qarab chiqishni maslahat beramiz.

2- mavzu.Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differentsial tenglamalar. Xususiy va umumiy yechim.

Reja:

1. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differentsial tenglamalar.
2. Yechim tushunchasi. Xususiy va umumiy yechim.
3. Integral chiziq..

Biz birinchi tartibli hosilaga nisbatan yechilmagan oddiy diferensial tenglamalarni qo'raymiz:

$$F(x,y,y')=0 \,(1`)$$

Bunda x-erkli o'zgaruvchi , y-uning nomalum funksiyasi , $y'=\frac{dy}{dx}$ esa noma'lum funksiyasining hosilasi.

(1`) tenglamaning muhim xususiy holiga to'xtalamiz.

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\,(1)$$

bu tenglamaga hosilaga nisbatan yechilgan oddiy differensial tenglamadeyiladi. (1)tenglama (1`) tenglamaniy` ga nisbatan yechish natijasida hosil bo'lgan deb qaramasdan, balki (1) ga f(x,y) funksiya G sohada berilgan deb qaraymiz.

Izoh 1. Soha deyilganda faqat yopiq yoki faqat ochiq bog'langan to'plamni olamiz. Agar berilgan G to'plamning ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashtiruvchi va shu to'plamga tegishli biror chiziq mavjud bo'lsa,u holda G to'plam bog'langan bo'ladi.

Izoh 2. Agar I intervalda yopiq bo'lsa u holda uning chap uchiga o'ng hosila, o'ng uchiga esa chap hosila nazarda tutiladi.

Tarif 1. (1) chi tenglama berilgan bo'lib, undaf(x,y) funktsiya R^2 tekislikning G sohasida aniqlangan bo'lsin. Agar I (ochiq,yopiq yoki yarim ochiq) intervalda aniqlangan $\varphi(x)$ funksiya uchun quyidagi uch shart

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ\ (\mathrm{x},\ \varphi(\mathrm{x}))\in \Gamma, \Gamma\subset R^2, x\in I \\ 2^\circ\ \varphi(\mathrm{x})\in C^1(I) \\ 3^\circ\ \dfrac{\alpha\varphi(\mathrm{x})}{\alpha x}=f(x,\varphi(x)), x\in I \end{array}\right\} \textbf{(2)}$$

bajarilsa, u holda bu funksiya I intervalda (1) diferensial tenglamaning yechimi deyiladi.

(1) differensial tenglamaning har bir $y=\varphi(x)$ yechimga mos kelgan egri chiziq (ya'ni $y=\varphi(x)$ funksiyaning grafigi) shu tenglamaning integral egri chizig'i deyiladi. (1) tenglamaning yechimi ba'zi hollarda oshkormas F(x,y)=0 ko'rinishda bo;lsa , ba'zi hollarda parametrik $x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ t_\circ<t<t_1\ \ x'(t)\neq 0$ ko'rinishda bo'lishi mumkin.

Koshi masalasining qo'yilishi.

(1) tenglama berilgan bo'lib unda f(x,y) funktsiya R^2 tekislikning Gsohasida aniqlangan, uzluksiz va I interval x o'qidagi interval bo'lsin, x_0 ni o'z ichiga oladigan I intervalni va shu I intervalda aniqlangan uzluksiz differensiallanuvchi hamda ushbu

`

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ\ \ (x,\ \varphi(x))\in\Gamma,\qquad x\in I \\ 2^\circ\ \ \varphi'(x)=f(x,\varphi(x))\qquad (\in I) \\ 3^\circ\ \ \varphi(x_\circ)=y_\circ\ ,\ (x_\circ,y_\circ)\in\Gamma \end{array}\right\}(3)$$

Shartlarni qanoatlantiruvchi $y=\varphi(x)$ funksiyani topish talab etiladi.

Bu masala qisqasha $y'=f(x,y),\ \ y(x_\circ)=y_\circ$ kabi yoziladi va (1) tenglama uchun koshi masalasi (yoki boshlang'ich masala) deyiladi.

(3)-shartni qanoatlantiruvchi $y=\varphi(x)$ funksiya I intervalda (k) Koshi masalasini yechimi deyiladi. Endi G sohaning (k) masala yagona yechimga ega bo'ladigan (x,y) nuqtalaridan tuzilgan kesmini $D_2^*\subset\Gamma$ $(D_2\equiv\Gamma)$ deb belgilaylik. Shunga ko'ra D_2^* to'plamning har bir (x,y) nuqtasida (1) tenglamaning yagona integral chizig'i o'tadi.

Tarif 2. (1) differensial tenglama x,c o'zgaruvchilarning biror o'zgarish sohasida aniqlangan hamda x bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchi

$y=\varphi(x,c)$(4)

Funksiya berilgan bo'lsin. Agar $\forall\ (x,y)\in D_2^*$ nuqta uchun (4) munosabat c ning $c=\psi(x,y)$ (4`) qiymatini bir qiymatli aniqlasa va bu qiymatni ushbu $\dfrac{dy}{dx}=\varphi_x^`(x,c)$ (4``) tenglikka qo'yish natijasida (1) tenglama hosil bo'lsa, u holda (4) funksiya (1) tenglamaning D_2 to'plamda aniqlangan umumiy yechimi deyiladi.

Tarif 3. (1) tenglama va (4) chiziqlar oilasi berilgan bo'lsin.

Agar

1) f(x,c) funksiya I intervalda x bo'yicha uzluksiz hosilaga ega bo'lsa;

2) Har bir $(x,y)\in D_2^*$ nuqta uchun (4) munosabat c ning (4`) qiymatini bir qiymatli aniqlasa;

3) $y=\varphi(x,\psi(x,y))$ funksiya (1) tenglamaning yechimi bo'lsa, uholda (4) funksiya (1) tenglamaning umumiy yechimi deyiladi.

Har bir natijasida Koshi masalasi yagona yechimga ega bo'ladigan yechim xususiy techim deyiladi, (1) tenglamaning barcha yechimlarini topish asosiy masala hisoblanadi. Barcha yechimlarini topish jarayoni differensial tenglamani integrallash deyiladi. Agar (1) chi tenglamaning yechimini elementar funksiyalar va ularning integrallari yordamida yozish mumkin bo'lsa, u holda differensial tenglama kvadraturalarda integrallanadi deyiladi.

$D=D_2\cap D_2{}^*$ to'plamning har bir (x,y) nuqtasidan o'tadigan integral chiziqlar yagona emasligi kelib chiqadi. Har bir nuqtasidan yechimning yagonaligi buziladigan yechimlar maxsus yechimlar deyiladi. Umumiy yechish formulasi (4) maxsus yechimlarni o'z ichiga olmaydi. Agar F(x,y,c)=0 munosabat D_2^* to'plamda $y=\varphi(x,c)$ umumiy yechimni aniqlasa, u holda (4```) ni (1) differensial tenglamaning umumiy integrali deyiladi.

Masalan ; $y = ce^x$ chiziqlar oilasi berilgan bo'lsin. U holda $y' = ce^x$ izlangan differensial tenglama y`=y bo'ladi. Ravshanki, bu tenglamaning umumiy yechimi; $y = ce^x$

Agar umumiy yechim ma'lum bo'lmasa, Koshi masalasini yechish qiyinlashadi. Bunda differensiyal tenglama taqribiy integrallash metotlari yordamida yechiladi.

Masalaning qo'yilishi.

(1) differensial tenglama uchun Koshi masalasi ((1),(3)) ning yechimi bormi yoki yo'qmi ? Agar bunday yechim bor bo'lsa, ular nechta ? Qachon Koshi masalasi yechimga ega emas?

Bu savolga javob beradigan teoremalar mavjudlik va yagonalik teoremalari deb ataladi.

1–teorema. (Koshi teoremasi) Agar f(x,y) funksiya G sohada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, uning y bo'yicha xususiy hosilasi $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ biror $\mathrm{Q}(\mathrm{Q} \subset \Gamma)$ sohada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa , u holda.

1^0 (1) tenglamaning x_0 o'z ichiga oladigan biror intervalda aniqlangan va har bir berilgan $(x_0, y_0) \in Q$ nuqta uchun $y(x_0)= y_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud.

2^0 Agar (1) tenglamaning ikkita $y = \varphi(x)$ va $\mathrm{y} = \psi(\mathrm{x})$ yechimlari x_0 ga ustma – ust tushsa ya'ni $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = y_0$ bo'lsa, u holda bu $\mathrm{y} = \varphi(\mathrm{x}),\ \mathrm{y} = \psi(\mathrm{x})$ yechimlar aniqlanish sohalarining umumiy qismiga ustma – ust tushadi.

Tarif 8. Agar f(x,y) funksiya Gsohada aniqlangan bo'lib, shu funksiya uchun shunday musbat L son mavjud bo'lsa bo'lsaki, $\forall(x, y_1) \in \Gamma, (x, y_2) \in \Gamma$ nuqtalar uchun $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2| \quad (\mathrm{L})$ tengsizlik bajarilsa, u holda f(x,y) funksiya Gsohada y bo'yicha Lipshis shartini qanoatlantiradi deyiladi, L esa Lipshis o'zgarmasi deyiladi.

2-teorema. (Koshi – Pikar – Lindelef teoremasi).

Agar f(x,y) funksiya G sohada x va y bo'yicha aniqlangan va uzluksiz bo'lib, G sohada y bo'yicha Lipshist shartini qanoatlantirsa, u holda shunday o'zgarmas h>0 son topiladiki, natijada (1) tenglamaning $(x_0, y_0) \in \mathrm{G}$ bo'lgan (3) boshlang'ich shartni qanoatlantiradigan va $I = \{x : |\mathrm{x} - \mathrm{x}_0| \le h\}$ yopiq intervalda aniqlangan yagona yechim mavjud bo'ladi.

3-teorema. (Peano teoremasi)

Agar f(x,y) funksiya G sohada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda G sohaning berilgan $(x_0, y_0) \in \mathrm{G}$ nuqtasidan (1) tenglamaning kamida bitta integral chizig'i o'tadi.

Yuqoridagi teoremalarning qo'llanilishiga doir misol ko'raylik.

Misol. $\begin{cases} y` = y^{2/3} \\ y(-2) = 1 \end{cases}$

Koshi masalasida $\Gamma = R^2,\ \frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})}{\partial \mathrm{y}} = \frac{2}{3} y^{-1/3}$ ga ko'ra

$Q = Q_1 \bigcup Q_2,\ \mathrm{Q}_1 = R^1 \times R^1,\ \mathrm{Q}_2 = R^1 \times R^1,\ \mathrm{Q} \subset \Gamma$ ekani kelib ccchiqadi.

$\Gamma = Q \cup \{(x, y), y = 0\}$ **va** $(-2{,}1) \in \mathrm{Q} \subset \Gamma$ umumiy yechim

$y = \left(\frac{x + c}{3}\right)^2$ $\mathrm{x} = -2, \mathrm{y} = 1, \mathrm{c} = 5.$ Koshi masalasi yechimi $y = \left(\frac{x + c}{3}\right)^2$ bo'lib, bu yechim Q_2 ga yagonadir.

$$\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(-2) = 0 \quad \Gamma = \mathrm{R}^2,\ (-2{,}0) \in \Gamma \quad \dfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}} = \dfrac{2}{3} y^{-1/3} \end{cases}$$

(-2;0) nuqtada uzluksiz emas. Shuning uchun (-2;0) nuqtadan cheksiz ko'p integral chiziqlar o'tadi, (-2;0) nuqtadan $y = \left(\dfrac{x+2}{3}\right)^3$ y=0 integral chiziqlar o'tadi. Shuning uchun

$$(x) = \begin{cases} y = \left(\dfrac{x+2}{3}\right)^3, & \mathrm{x} < -2 \\ 0, & \mathrm{x} = 2 \\ y = \left(\dfrac{x+k}{3}\right)^3, & \mathrm{x} \geq -\mathrm{k},\ \mathrm{k} > -2 \end{cases}$$

Funksiya berilgan tenglamaning R^2 ga aniqlangan yechimi bo'ladi.

Agar $y = \varphi(x)$, $\mathrm{I_r} = \{x : r_1 < x < r_2\}$ ga $\psi(x)$ funksiya $\mathrm{I_S} = \{x : S_1 < x < S_2\}$ aniqlangan $x_0 \in I_r \cap I_S$ uchun $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ bo'lsa, u holda $\varphi(x) \equiv \psi(x)$, $\mathrm{x} \in \mathrm{I_r} \cap I_s$ bunda $\mathrm{I_r} \neq I_s$. Agar $\mathrm{I_r} \supset I_s$ bo'lsa, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ning davomi deyiladi.

3- mavzu.Koshi masalasi. Yechimning mavjudligi va yagonaligi haqida teorema. (2 soat)

Reja:

1.Koshi masalasi.
2.Yechimning mavjudligi va yagonaligi haqida teorema.

Agar

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \textbf{(1)}$$

tenglamada $f(x,y)$ funksiya

1^0 $D = \{(x,y)\ \mathrm{x}_0 - a \leq x \leq x_0 + a,\ \ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$ to'g'ri to'rburchakda uzluksiz (demak unda chegaralangan, ya'ni $|f(x,y)| \leq M$, $\mathrm{M} > 0$) bo'lsa.

2^0 y bo'yicha Lipshist shartlarini qanoatlantirsa, u holda (9) tenglama

$$y(x_0) = y_0 \ \textbf{(6)}$$

shartni qanoatlantiradigan va $|x - x_0| \leq h$, $\mathrm{h} = \min\left(\mathrm{a}, \dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{m}}\right)$ intervalda aniqlangan yagona yechimga ega. Agar D to'plamning $\forall$ ikki (x ,y_1) va (x ,y_2) nuqtasi ushbu

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \ \textbf{(7)}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa f(x,y) funksiya D da y bo'yicha Lipshist shartini qanoatlantiradi deyiladi, L esa Lipshist o'zgarmasi deyiladi.

Pikart teoremasining isbotini keltirishdan avval zarur ikki tasdiqni keltiramiz.

Ekvivalentlik lemmasi

Agar $y = \varphi(x)$ funksiya x_0 nuqtani o'z ichiga olgan biror I intervalda aniqlangan bo'lib, (5) – (6) Koshi masalasining yechimi bo'lsa, u holda $y = \varphi(x)$ funksiya I intervalda

(8)

integral tenglamaning yechimi bo'ladi, aksincha agar $y = \varphi(x)$ funksiya I intervalda uzluksiz bo'lsa, u holda $y = \varphi(x)$ funksiya (9)-(10) Koshi masalasining ham yechimi bo'ladi.

Gronuoll lemmasi

Agar u(x) funksiya $[x_0, x_0 + h]$ intervalda manfiymas, uzluksiz bo'lib, shu intervalda ushbu

$$u(x) \leq A + B\int_{x_0}^{x} u(\tau)d\tau, \ \ \mathrm{A} \geq 0, \ \mathrm{B} \geq 0 \ (9)$$

integral tengsizlikka qanoatlantirsa, shu u(x) funksiya uchun quyidagi

$$u(x) \leq Ae^{B(x-x_0)}, \quad \mathrm{x}_0 \in [x_0, x_0 + h] (10)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Pikar teoremasining isboti. Mavjudligi. Ekvivalentlik lemmasiga ko'ra Koshi masalasi (9)-(10) o'rniga ushbu

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y)d\tau \ (11)$$

integral tenglamani yechish masalasini ko'ramiz. Bu tenglamaning yechimini Pikarning ketma-ket yaqinlashish metodi bilan izlaymiz. $|x - x_0| \leq h$ intervalda yaqinlashgan funksiyalar ketma-ketligini quyidagicha ko'ramiz;

$$y_0(x) = y_0 \quad (\text{nolinchi yaqinlashish})$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_0)d\tau \ \ (1\text{ - yaqinlashish})$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau \ \ (2\text{ - yaqinlashish})$$

– –

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_{n-1}(\tau))d\tau \ \ (\text{n - yaqinlashish})$$

shu funksiyalarning grafigi $|x - x_0| < h,$ intervalda

$D_h = \{(x, y) : |x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq b,\}$

to'g'ri to'rtburchakdan chiqib ketmaydi, ya'ni $(x, y_n(x)) \in D_h$, $\mathrm{n} = 0,1,2,3...$ haqiqatdan.

$$(x_0, y_0) \in D_k$$

$$|y_1(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(\tau, y_0)d\tau\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(\tau, y_0(\tau))|d\tau\right| \le M|x - x_0| \le Mh \le b_1$$

$$|y_2(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(\tau, y_1(\tau))d\tau\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(\tau, y_1(\tau))|d\tau\right| \le M|x - x_0| \le Mh \le b$$

$$|y_n(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(\tau, y_{n-1}(\tau))d\tau\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(\tau, y_{n-1}(\tau))|d\tau\right| \le M|x - x_0| \le Mh \le b$$

tasdiqlab o'tamizki, $\{y_n(x)\}$ ketma-ketlikning hadlari ko'rilayotgan $|x - x_0| \le h,$ intervalda uzluksiz, hatto differensiallanuvchidir.

Endi qurilgan $\{y_n(x)\}$ ketma-ketlik $|x - x_0| \le h,$ intervalda tekist yaqinlashuvchi ekanligini intervalda tekis yaqinlashuvchi ekanligini isbotlaymiz. Ushbu

$$y_0 + [y_1(x) - y_0] + [y_2(x) - y_1] + ... + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] + ... \quad \textbf{(12)}$$

Funksional qatorni ko'ramiz. Uning **n-** xususiyyig'indisi $S_n(x) = y_n(x)$ bundan $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$. Shuning uchun (12) qatorning tekis yaqinlashuvchi ekanligi isbot qilish yetarli, (12) qatorning har bir hadini baholaymiz , (10) tengsizlikni hisobga olgan holda

$$|y_1(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(\tau, y_0)d\tau\right| \le M|x - x_0|$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} [f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_0)]d\tau\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} [f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, y_0)]d\tau\right| \le L\left|\int_{x_0}^{x} |y_1(\tau) - y_0|d\tau\right| \le$$

$$\le LM\left|\int_{x_0}^{x} |\tau - x_0|d\tau\right| = LM\,\frac{(x - x_0)^2}{2!}$$

Induksiya usuli bilan:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le L^{n-1}M\,\frac{(x - x_0)^n}{n!} \quad (13)$$

Tengliksiz o'rinli bo'lsa, shu qonun **n** dan **n+1** ga o'tganda ham o'rinli ekanligini isbotlash mumkin:

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} [f(\tau)y_n(\tau) - f(\tau, y_{n-1}(\tau))]d\tau\right| \le \int_{x_0}^{x} [f(\tau)y_n(\tau) - f(\tau, y_{n-1}(\tau))]d\tau \le$$

$$\le L\int_{x_0}^{x} [y_n(\tau) - y_{n-1}(\tau)]d\tau \le \frac{L^n M}{n!}\left|\int_{x_0}^{x} |\tau - x_0|^n d\tau\right| = \frac{L^n M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}$$

Shunday qilib (13) tengsizlik ixtiyoriy natural n lar uchun to'g'ri. Haqiqatdan (13) ga ko'ra

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\le L^{n-1}M\frac{h^n}{n!} \quad \text{va} \quad |y_0|+\sum_{n=1}^{\infty}L^{n-1}M\frac{h^n}{n!}$$

sonli qator yaqinlashuvchi, shunki Dalamber alomatiga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L^nM\dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}}{L^{n-1}M\dfrac{h^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{h}{n+1}=0<1$$

Shunday qilib, matematik analiz kursidan ma'lum bo'lgan Veyershtrass teoremasiga ko'ra $\{S_n(x)=y_n(x)\}$ ketma – ketlik uzluksiz $\varphi(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi $\varphi(x)$ funksiyaning uzluksizligi har bir $y_n(x)-y_{n-1}(x)$ ayirma yuqori limiti o'zgaruvchi bo'lgan integraldan iboratligidan ko'rinadi. Ma'lumki, bunday integral yuqori limitining uzluksiz funksiyasidan iboratdir.

Enditopilganshuy=$\varphi(x)$limitfunksiya (5) – (6masalasiningyechimiekanliginiisbotqilamiz, buninguchun $n\to\infty$ da $y_{n+1}(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,y_n(\tau))d\tau$ tenglikdan

$$\varphi(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,\varphi(\tau))d\tau \quad (14)$$

Tenglik kelib chiqishini isbotlash lozim, haqiqatdan ravshanki

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,\varphi(\tau))d\tau-\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,y_n(\tau))d\tau\right|\le\left|\int\limits_{x_0}^{x}|f(\tau,\varphi(\tau))-f(\tau,y_n(\tau))|d\tau\right|\le L\left|\int\limits_{x_0}^{x}|\varphi(\tau)-y_n(\tau)|d\tau\right|$$

$\{y_n\}$ ketma –ketlikning $\varphi(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashuvidan $\forall\varepsilon>0$ uchun shunday N nomer topiladiki, n>N bo'lganda $|\varphi(x)-y_n(x)|\le\dfrac{\varepsilon}{Lh}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi shuning uchun

$$L\left|\int\limits_{x_0}^{x}|\varphi(\tau)-y_n(\tau)|d\tau\right|\le L\frac{\varepsilon}{Lh}\left|\int\limits_{x_0}^{x}d\tau\right|=\frac{\varepsilon}{h}|x-x_0|\le\frac{\varepsilon}{h}\cdot h=\varepsilon$$ bo'ladi. Bunda

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,y_n(\tau))d\tau=\int\limits_{x_0}^{x}f\left(\tau,\lim_{n\to\infty}y_n(\tau)\right)d\tau=\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,\varphi(\tau))d\tau$$ shunday qilib

$$\lim_{n\to\infty}y_{n+1}=\lim_{n\to\infty}(y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,\varphi(\tau))d\tau)$$ dan (18) ning o'rinli ekanligini kelib chiqadi.

Yagonaligi

(5) tenglamaning (6) shartni qanoatlantiradigan yana bitta $y=\psi(x)$ yechim bo'lsin. Uning aniqlanish intervali $|x-x_0|\le h$ bo'lib $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalaning aniqlanish intervallarining umumiy qismi $|x-x_0|\le h_0$ dan iborat bo'lsin. U holda $|x-x_0|\le h_0$ da $\varphi(x)\equiv\psi(x)$ ekanligini isbotlaemiz

Shartga ko'ra $\varphi(x)=y_o+\int\limits_{x_o}^{x}f(\tau,\varphi(\tau))d\tau,\quad \psi(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,\psi(\tau))d\tau)$

ayniyatlarga egamiz.

Bundan $[x_0,x_0+h]$ uchun

$$|\varphi(x)-\psi(x)|=\left|\int\limits_{x_o}^{x}f(\tau,\varphi(\tau))d\tau-\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,\psi(\tau))d\tau\right|\le L\int\limits_{x_0}^{x}|\varphi(\tau)-\psi(\tau)|d\tau$$, yani

$|\varphi(x)-\psi(x)| \le L\int_{x_0}^{x}|\varphi(\tau)-\psi(\tau)|d\tau$ ga egamiz. Bu yerdan Gronuall lemmasining natijasiga ko'ra $\varphi(x) \equiv \psi(x)$, $x \in [x_0, x_0+h]$ kelib chiqadi $x \in [x_0-h,\ x_0]$ uchun ham mulohazalar shunga o'xshashdir. Yagonaligi isbot etiladi. Pikar teoremasi isbotlanadi.

4- mavzu.O`zgaruvchilari ajralgan va unga keltiriladigan differentsial tenglamalar. O`zgaruvchilarigi nisbatan bir jinsli va umumlashgan bir jinsli tenglamalar. (2 soat)

Reja:

1.O`zgaruvchilari ajralgan differentsial tenglamalar.

2.O`zgaruvchilari ajralgan tenglamalarga keltiriladigan differentsial tenglamalar.

3.O`zgaruvchilarigi nisbatan bir jinsli tenglamalar.

4.O`zgaruvchilarigi nisbatan umumlashgan bir jinsli tenglamalar.

1. y'**=f(x) ko'rinishidagi tenglama.**

Bu tenglamani $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ko'rinishida yozib olamiz va $dy = f(x)dx$. Ikkala tomonini integrallab $y = \int f(x)dx + C$ ko'rinishidagi umumiy yechimni yozamiz.

Misol: $y'=x^2$

Yechish: $\frac{dy}{dx} = x^2$, bundan $dy = x^2dx$ va $y = \int x^2dx$.

Demak, umumiy yechim $y = \frac{x^3}{3} + C$ ko'rinishida bo'ladi.

2. $y' = \varphi(y)$ **ko'rinishidagi tenglama**.

$\frac{dy}{dx} = \varphi(y)$ va bundan $\frac{dy}{\varphi(y)} = dx$ yoki umumiy yechim $x = \int \frac{dy}{\varphi(y)} + C$ ko'rinishida bo'ladi.

Misol: $y'=y$

Yechish: $\frac{dy}{dx} = y$ bundan $\frac{dy}{y} = dx$. Ikkala tomonini integrallab, $\int \frac{dy}{y} = x + \ln C$ yoki $y = C \cdot e^x$ ko'rinishidagi umumiy yechimni topamiz.

3. $y' = f(x)\cdot\varphi(y)$ **ko'rinishidagi tenglama.** Bu tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama deb aytiladi. Tenglamaning o'zgaruvchilarini ajratamiz:

$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot\varphi(y)$ va bundan $\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx$. Ikkala tomonini integrallab (agar integrallash mumkin bo'lsa) $\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C$ ko'rinishidagi umumiy yechimni topamiz.

Misol: $y' = \frac{y}{x}$

Yechish: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ bundan $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ kelib chiqadi. $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$, lny = lnx + lnC, yoki y=Cx.

4. $y' = f(ax+by+c)$ **ko'rinishidagi tenglama**.

Tenglamani integrallash uchun nomalum funksiyani quyidagicha almashtiramiz:

$U = ax + by + c$ (2). Bundan $y = \frac{1}{b}(U - ax - c)$. U holda $y' = \frac{1}{b}(U' - a)$ (3) bo’ladi. (2) va (3) ifodalarni (1) tenglamaga qo’yib, $\frac{1}{b}(U' - a) = f(u)$ yoki $U' = bf(u) + a$ tenglamaga kelamiz. Bu esa o’zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo’lib, uni quyidagicha integrallaymiz:

$\frac{du}{dx} = bf(u) + a$ $\int \frac{du}{bf(u) + a} = x + C$ (4)

Agar (4) ning chap tomonidagi integralni hisoblash mumkin bo’lsa, keyin (2) orqali yana y ga qaytamiz.

Misol: $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$

Yechish: 4x+2y-1=u almashtirish olamiz. Bundan $y = \frac{1}{2}(u - 4x + 1)$ va $y' = \frac{1}{2}(u' - 4)$. Berilgan tenglama qo’yib,

$\frac{1}{2}(u' - u) = \sqrt{u}$ yoki $u' = 2\sqrt{u} + 4$

$\frac{du}{dx} = 2\sqrt{u} + 4$ $\frac{du}{2\sqrt{u} + 4} = dx$ yoki $\int \frac{du}{2\sqrt{u} + 4} = x + C$.

Oxirgi tenglamaning chap tomonidagi integralni hisoblab, $\sqrt{u} - 2\ln(\sqrt{u} + 2) = x + C$ va undan $\sqrt{4x + 2y - 1} - 2\ln(\sqrt{4x + 2y - 1} + 2) = x + C$ umumiy yechimni topamiz.

1. **Bir jisli funksiyalar.**

Ta’rif. f(x,y) funksiya m-darajasi bir jinsli deyiladi, agar har qanday k>0 uchun $f(kx, ky) = k^m f(x, y)$ tenglik o’rinli bo’lsa.

Masalan: 1) f(x,y)=xy bo’lsin.

$f(kx, ky) = kx \cdot ky = k^2 xy = k^2 f(x, y)$ ikkinchi darajali bir jinsli.

2) $f(x, y) = \frac{x}{y}$

$f(kx, ky) = \frac{kx}{ky} = \frac{x}{y} = k^0 f(x, y)$ nolinchi darajali bir jinsli.

2. Bir jinsli tenglamalar.

a) $y' = f(\frac{x}{y})$ (1) ko’rinishidagi tenglama bir jinsli differensial tenglama deb aytiladi. Bu tenglamani integrallash uchun y=ux (2) almashtirish olamiz. U holda $y' = u'x + u$ (3) bo’ladi va (2) va (3) ni (1) ga qo’yib $u'x + u = f(u)$ tenglamani hosil qilamiz. Undan $\frac{du}{dx}x = f(u) - u$ yoki o’zgaruvchilarini ajratib $\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$ va $\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln Cx$ ga kelamiz.

Agar chap tomondagi integralni hisoblash mumkin bo’lsa, integralni hisoblab keyin dastlabki o’zgaruvchiga qaytamiz.

Misol: $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$

Yechish: berilgan tenglamani $y' = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}$ ko’rinishida yozib olsak, u (1) tenglama ko’rinishiga keladi. Demak, y=ux almashtirish olamiz. Undan $y' = u'x + u$. Berilgan tenglamaga qo'yib $u'x+u=u-e^u$ yoki $u'x=-e^u$. Undan $\frac{du}{dx}x=-e^u$. $-e^{-u}du=\frac{dx}{x}$, $e^{-u}=\ln Cx$ yoki $u=-\ln\ln Cx$. Dastlabki o'zgaruvchiga qaytsak, $\frac{y}{x}=-\ln\ln Cx$ yoki $y=-x\ln\ln Cx$ umumiy yechimni topamiz.

b) $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ (4) tenglama bir jinsli tenglama deyiladi, agar M(x,y) va N(x,y) funksiyalar bir xil darajali bir jinsli funksiyalar bo'lsa.

Faraz qilamiz, (4) tenglamada M(x,y) va N(x,y) funksiyalar bir xil darajali bir jinsli funksiyalar bo'lsin. y=ux almashtirish olamiz. U holda, $dy=xdu+udx$ va

$$M(x,ux)dx+N(x,ux)(xdu+udx)=0$$

$$xM(1,u)dx+xN(1,u)(xdu+udx)=0$$

$$M(1,u)dx+N(1,u)\cdot xdu+uN(1,u)dx=0$$

$$(M(1,u)+UN(1,u))dx+N(1,u)xdu=0$$

Oxirgi tenglamada o'zgaruvchilarini ajratib $\frac{N(1,u)}{M(1,u)+uN(1,u)}du+\frac{dx}{x}=0$ tenglamani hosil qilamiz.

Misol: $\begin{matrix}(y^2-2xy)dx+x^2dy=0\\ M=y^2-2xy, N=x^2\end{matrix}$. Ko'rinib turibdiki ikkala funksiya ham ikkinchi darajali bir jinsli. Haqiqatdan, $M(kx,ky)=(ky)^2-2kx\cdot ky=k^2(y^2-2xy)=k^2M(xy)$

Y=ux almashtirish olamiz. dy=udx+xdu.

$((ux)^2-2x\cdot xu)dx+x^2(udx+xdu)=0$. x^2 ga qisqartirib, $(u^2-2u)dx+udx+xdu=0$ yoki $(u^2-u)dx+xdu=0.$ $\frac{du}{u^2-u}+\frac{dx}{x}=0$ integrallab $\ln|u-1|-\ln|u|+\ln x=\ln C, \frac{u-1}{u}x=C$ yoki dastlabki funksiyaga qaytib (y-x)x=Cy umumiy yechimni topamiz.

$y'=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$ (5) tenglamani qaraymiz.

a) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$ (6) bo'lsin. U holda $a_1=ka_2$, $b_1=kb_2$ bo'ladi. (5) tenglamaga qo'yib

$y'=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})=f(\frac{k(a_2x+b_2y)+c_2}{a_2x+b_2y+c_2})$ $a_2x+b_2y=u$ deb olsak, $y=\frac{1}{b_2}(u-a_2x)$ va $y'=\frac{1}{b_2}(u'-a_2x)$ bo'ladi. $\frac{1}{b_2}(u'-a_2x)=f(\frac{ku+C_1}{u+C_2})$ tenglamaga keladi. Bu esa o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadir.

$\int\frac{du}{b_2f(\frac{ku+C_1}{u+C_2})+a_2}=C+x$ umumiy yechimga kelamiz.

b) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=k$ (7) bo'lsin. U holda $a_1=ka_2$, $b_1=kb_2$, $c_1=kc_2$ bo'ladi.

$$y'=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})=f(\frac{k(a_2x+b_2y+c_2)}{a_2x+b_2y+c_2})=f(k)$$

$\frac{dy}{dx}=f(k)\ y=f(k)x+C$ umumiy yechim hosil bo'ladi.

Misol: (2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0.

Yechish: (6) shart bajariladi, demak 2x+y=u deb belgilash kiritamiz. U holda dy=du-2dx

$y'=u'-2$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y+1}{4x+2y-3}$

$u'-2=\frac{u+1}{2u-3},u'=\frac{u+1+4u-6}{2u-3}=\frac{5u-5}{2u-3}$

$\int\frac{2u-3}{u-1}du=5\int dx+\ln C,2u-\ln|u-1|=5x+\ln C$

yoki eski o'zgaruvchiga qaytib

$4x+2y-5x=\ln C+lc\,|2x+y-1|,C(2x+y-1)=e^{2y-x};$

v) Endi (5) tenglamada $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ bo'lsin. U holda $a_1x+b_1y+c_1=0$ va $a_2x+b_2y+c_2=0$ to'g'ri chiziqlar kesishadi va ularning kesishish nuqtasi (x_0, y_0) $\left.\begin{matrix}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{matrix}\right\}$ sistemaning yechimidan iboratdir. $\left.\begin{matrix}u=y-y_0\\ v=x-x_0\end{matrix}\right\}$ almashtirish olamiz. du=dy, dv=dx, $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dv}$.

$\left.\begin{matrix}y=u+y_0\\ x=v+x_0\end{matrix}\right\}$ (8)

(8)ni (5) ga qo'yib

$\frac{du}{dv}=f(\frac{a_1(v+x_0)+b_1(u+y_0)+c_1}{a_2(v+x_0)+b_2(u+y_0)+c_2})=f(\frac{a_1v+b_1u}{a_2v+b_2u})=f(\frac{a_1+b_1\frac{u}{v}}{a_2+b_2\frac{u}{v}})=f^*(\frac{u}{v})$ bir jinsli tenglamaga kelamiz.

Misol: $y'=2(\frac{y+2}{x+y-1})^2$

Yechish: $\left.\begin{matrix}y+2=0\\ x+y-1=0\end{matrix}\right\}$ sistemani yechamiz. $\left.\begin{matrix}y=-2\\ x=3\end{matrix}\right\}$

$\left.\begin{matrix}y=u-2\\ x=v+3\end{matrix}\right\}$ almashtirish olamiz. u holda $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dv}$

$\frac{du}{dv}=2(\frac{u-2+2}{v+3+u-2-1})^2=2(\frac{u}{v+u})^2=2(\frac{\frac{u}{v}}{1+\frac{u}{v}})^2$

$\frac{u}{v}=z\ u=zv\ u'=z'v+z$

$z'v+z=2(\frac{z}{1+z})^2$ oxirgi tenglamani integrallab $\ln z+2arctgz+\ln v=\ln C$

$zve^{2arctgz}=C$ yoki $ue^{2arctg\frac{u}{v}}=C$ va nihoyat x va y ga qaytib $(y+2)e^{2arctg\frac{y+2}{x-3}}=C$.

4. y'=f(x,y) tenglamada $y=z^m$ almashtirish olamiz. U holda $y'=mz^{m-1}z'$. Bundan

$mz^{m-1}z' = f(x, z^m)$ (9) tenglama hosil bo'ladi. Agar (9) tenglama m ning biron qiymatida bir jinsli tenglama bo'lsa, u holda bu almashtirish o'rinli bo'ladi.

Misol: $2xy' + y = y^2\sqrt{x - x^2y^2}$

Yechish: y=z^m almashtirish olamiz. U holda $y' = mz^{m-1}z'$. Tenglamaga qo'yib $2x \cdot mz^{m-1}z' + z^m = z^{2m}\sqrt{x - x^2y^{2m}}$. Malumki, bu tenglama bir jinsli bo'lishi uchun x va y ga nisbatan ko'phadlarning darajalari teng bo'lishi kerak:

$$1 + m - 1 = m = 2m + \frac{1}{2} = 2m + 1 + m$$

x z^{m-1} z^m z$^{2m}\sqrt{x}$ z$^{2m}\sqrt{x^2z^{2m}}$

$$\left.\begin{aligned} m &= 2m + \frac{1}{2} \\ m &= 3m + 1 \end{aligned}\right\} \text{ bundan m=-1/2}$$

Demak, $y = z^{-\frac{1}{2}}$ almashtirish berilgan tenglamani bir jinsli tenglamaga keltiriladi.

$-xz^{-\frac{3}{2}}z' + z^{-\frac{1}{2}} = z^{-1}\sqrt{x - x^2z^{-1}}$ yoki $z - z' = \sqrt{zx - x^2}, z' = \frac{z}{x} - \sqrt{\frac{z}{x} - 1}$

$\frac{z}{x} = u$, $z' = u'x + u$, $u'x + u = u - \sqrt{u-1}, xu' = -\sqrt{u-1}$

$\frac{du}{\sqrt{u-1}} = -\frac{dx}{x}$ $2\sqrt{u-1} = -\ln Cx$ eski o'zgaruvchilarga qaytib: $2\sqrt{\frac{z}{x} - 1} = -\ln Cx$ yoki $2\sqrt{\frac{1}{xy^2} - 1} = -\ln Cx$

$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$ (*) ko'rinishidagi tenglama Bernulli tenglamasi deyiladi.

Agar $\alpha = 0$ bo'lsa (*) tenglama chiziqli, $\alpha = 1$ bo'lsa o'zgaruvchilari ajraladigan differnsial tenglamaga keladi. Demak $\alpha \neq 0$ va $\alpha \neq 1$.

(1) tenglamani $y^{-\alpha}$ ga ko'paytiramiz.

$$y^{-\alpha}y' = a(x)y^{1-\alpha} + b(x)$$

$y^{1-\alpha} = u$ almashtirish olamiz. U holda $y^{-\alpha}y' = \frac{1}{1-\alpha}u'$ (1) tenglamaga qo'yib $\frac{1}{1-\alpha}u' = a(x)u + b(x)$ chiziqli differensial tenglamaga kelamiz.

Misol: $xy^2y' = x^2 + y^3$

Yechish: $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y^2}$

a(x)=1/x, b(x)=x, $\alpha = -2$

y^2 ga ko'paytirib $y^2y' = \frac{y^3}{x} + x$

y^3=u, 3y^{2}y'=u' almashtirish olib tenglamaga qo'yamiz.

$\frac{u'}{3} = \frac{u}{x} + x$ yoki $u' = \frac{3u}{x} + 3x$ chiziqli tenglamaga kelamiz.

U'=3u/x, $\frac{du}{u} = \frac{3dx}{x}$, u=Cx^3

O’zgarmasni variatsiyalab, $u=c(x)x^3$ $u'=c'(x)x^3+3c(x)x^2$
Tenglamaga qo’yib,

$$c'(x)x^3+3c(x)x^2=\frac{3c(x)x^3}{x}+3x$$

$$c'(x)x^3=3x\ c'(x)=3x^{-2}\ c(x)=-\frac{3}{x}+C$$

$$u=cx^3-3x^2.$$

$y'=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$ (1) tenglama Rikatti tenglamasi deyiladi, bunda $a(x)\neq 0, c(x)\neq 0.$

Agar c(x)=0 bo’lsa Bernulli tenglamasi, a(x)=0 bo’lsa chiziqli tenglama hosil bo’ladi.
Umuman olganda Rikatti tenglamasi kvadraturada integrallanmaydi. Agar Rikatti tenglamasining bitta xususiy yechimi malum bo’lsa, u kvadraturada integrallanadi.
Haqiqatdan ham $y=\varphi(x)$ (1) tenglamasining xususiy yechimi bo’lsin.

$$\varphi'(x)=a(x)\varphi^2(x)+f(x)\varphi(x)+c(x)\ (2)$$

$y=u+\varphi(x)$ almashtirish olamiz. U holda $y'=u'+\varphi'(x)$ va (1) tenglamaga qo’yib

$$u'+\varphi'(x)=a(x)(u+\varphi(x))^2+b(x)(u+\varphi(x))+c(x)=a(x)u^2+2a(x)\varphi(x)u+a(x)\varphi^2(x)+b(x)u+$$
$$+b(x)\varphi(x)+c(x)$$

Oxirgi tenglikni (2) ga asosan
$u'=a(x)u^2+2a(x)\varphi(x)u+b(x)u$ yoki $u'=a(x)u^2+[2a(x)\varphi(x)+b(x)]u$ Bernulli tenglamasiga keladi.
Misol: $y'-2xy+y^2=5-x^2$
Rikatti tenglamasining xususiy yechimini izlaymiz.
$y_1=ax+b$ $y_1'=a$
berilgan tenglamaga qo’yib

$$a-2x(ax+b)+(ax+b)^2=5-x^2$$

$$a-2ax^2-2bx+a^2x^2+2abx+b^2=5-x^2$$

$$\left.\begin{aligned}-2a+a^2&=-1\\-2b+2ab&=0\\a+b^2&=5\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}a&=1\\b&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow y_1=x+2$$

Shunday qilib, y=u+x+2 almashtirish olamiz:
$y'=u'+1$ va tenglamaga qo’yib

$$u'+1-2x(u+x+2)+(u+x+2)^2=5-x^2,$$

$$u'+1-2xu-2x^2-4x+u^2+x^2+4+2ux+4u+4x=5-x^2,\quad u'+u^2+4u=0$$

$$\frac{du}{u^2+4u}=-dx,\qquad \ln\frac{u}{u+4}=-4x+\ln C,\qquad \frac{u}{u+4}=Ce^{-4x},\qquad u=\frac{4C}{e^{4x}-C}\quad \text{va}$$

tenglamasining umumiy yechimi $y=\dfrac{4C}{e^{4x}-C}+x+2$ bo’ladi.

5- mavzu.Chiziqli differentsial tenglamalar. Yechimning xossalari. O`zgarmasni variatsiyalash usuli. Bernulli va Rikkati tenglamalari. (4 soat)

Reja:

1. Chiziqli differentsial tenglamalar.
2. Yechimning xossalari.
3. O`zgarmasni variatsiyalash usuli.
4. Bernulli tenglamasi.

5. Rikkati tenglamasi

y'=a(x)y+b(x) (1) ko'rinishidagi tenglama chiziqli differensial tenglama deyiladi, bunda $a(x) \neq 0$.
Agar (1) tenglamada b(x)=0 bo'lsa, u holda chiziqli bir jinsli tenglama deyiadi, aks holda, ya'ni $b(x) \neq 0$ bo'lsa, chiziqli bir jinslimas tenglama deyiladi.
Izoh. Chiziqli bir jinsli tenglamani bir jinsli tenglama bilan almashtirish yaramaydi.
Endi (1) tenglamani integrallash masalasiga to'xtalamiz. Dastlab (1)ga mos keluvchi chiziqli bir jinsli tenglamani qaraymiz: y'=a(x)y (2).
Bu o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama, uni integrallab $\frac{dy}{dx} = a(x)y,\ \frac{dy}{y} = a(x)dx,\ \ln y = \int a(x)dx + \ln C$ yoki $y = Ce^{A(x)}, A(x) = \int a(x)dx$ (3).
Endi (3)dagi o'zgarmas sonni biror nomalum C(x) funksiya bilan almashtiramiz va uni (1) tenglamaning yechimi deb olamiz. $y = C(x)e^{A(x)}$ (4)
(4) (1)ning yechimi bo'lgani uchun uni qanoatlantirishi kerak:

$$y' = c'(x)e^{A(x)} + c(x)a(x)e^{A(x)}$$

$$c'(x)e^{A(x)} + c(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)c(x)e^{A(x)} + b(x)$$

$$c'(x)e^{A(x)} = b(x)$$

Bundan c(x)ni topsak, $c(x) = \int b(x)e^{-A(x)}dx + C$ (5)
(5)ni (4)ga qo'yib (1)ning umumiy yechimini hosil qilamiz.

$$y = [\int b(x)e^{-A(x)}dx + C]e^{A(x)}, A(x) = \int a(x)dx \qquad (6).$$

Yuqorida bayon qilingan bu usul o'zgarmasni variatsiyalash usuli deyiladi.
Misol: $x^2y' + xy + 1 = 0$
Yechish: $y' + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$
a(x)=-1/x, b(x)=-1/x^2
umuman olganda (6) formuladagi bu qiymatlarni qo'yib umumiy yechimni yozish mumkin. Lekin biz tenglamani o'zgarmasni variatsiyalash usulini qo'llab integrallaymiz. Dastlab mos chiziqli bir jinsli tenglamani integrallaymiz.

$$y' + \frac{y}{x} = 0 \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad y = \frac{C}{x}$$

Endi o'zgarmasni variatsiyalaymiz.

$$y = \frac{C(x)}{x}(*),\ y' = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$$

Berilgan tenglamaga qo'yib

$$\frac{c'(x)}{x} - \frac{c(x)}{x^2} + \frac{c(x)}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\frac{c'(x)}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \text{ yoki } c'(x) = -\frac{1}{x}$$

$$c(x) = C - \ln|x|$$

Buni (*)ga qo'yib berilgan tenglamaning umumiy yechimini yozamiz.

$$y = \frac{c - \ln|x|}{x} \quad \text{yoki} \quad xy = C - \ln|x|.$$

O'rniga qo'yish usuli. (1) tenglamada $y = uv$ deb o'zgaruvchini o'zgartiramiz. Bu bilan u o'rniga izlayotgan yangi o'zgaruvchi, masalan u ni kiritgan bo'lamiz. SHu sababli ikkinchi o’zgaruvchi v ni yordamchi o’zgaruvchi deb qarab uni uz hohishimizga qarab tanlashimiz mumkin. Kelgusida shunday qilinadi xam.

$\frac{dy}{dx}$ ni hisoblab, y va $\frac{dy}{dx}$ ning u va v orqali ifodalarni (1) tenglamaga keltirib ko’yamiz:

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

bo’lgani uchun, tenglama ushbu ko’rinishga keldi:

$$v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} = a(x)uv + b(x).\ uv' = (a(x) - u')v + b(x) \quad (2)$$

Yordamchi o’zgaruvchi v ni ixtiyoriy tanlash mumkinligidan foydalanib, uni o’rta qavs ichidagi ifoda nolga aylanadigan qilib olamiz, ya`ni

$$a(x)u + u' = 0 \quad (3)$$

bo’lishini talab qilamiz.

Bu o’zgaruvchilari o’zgaradigan tenglama. Uning ikkala qismini v ga bo’lib va dx ga ko’paytirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{du}{u} = a(x)dx,$$

bu yerdan integrallab quyidagini topamiz:

$$u = e^{\int a(x)dx} \quad (4)$$

v ning bu ifodasini (2) tenglamaga ko’rsak, u uchun o’zgaruvchilari ajraladigan tenglamani hosil qilamiz:

$$v' = b(x)e^{-\int a(x)dx} \quad (5)$$

Bu tenglamadan *v* topsak

$$v = \int b(x)e^{-\int a(x)dx} + C \quad (6)$$

(6) va (4) formulalar u va v ning x orqali ifodasini beradi, u ning x ga bog’lanishini topishimiz kerakligidan va u=uv bo’lgani uchun (1) chiziqli tenglamaning umumiy ychimi quyidagi ko’rinishda yoziladi:

$$y = uv = [\int b(x)e^{-\int a(x)dx} + C]e^{\int a(x)dx} \quad (7)$$

(3) tenglamani integrallashdan hosil bo’lgan ixtiyoriy S o’zgarmas u va v ko’paytirishga qistarib ketganini qayd qilib o’tamiz. Shunday bo’lishi xam kerak edi, chunki birinchi tartibli tenglamaning umumiy yechimi faqat bitta ixtiyoriy o’zgarmasga ega bo’lishi kerak. Buni oldindan bilgan holda (4) yechimda oldindan S=1 deb olish va (3) tenglamaning yechimi o’rniga $u = e^{\int a(x)dx}$ xususiy yechimini olish mumkin edi, amalda odatda ana shunday qilinadi.

Bu yerda ko’rib chiqilgan o’rniga qo’yish usilii bitta (1) chiziqli tenglamani integral masalini o’zgaruvchilari ajraladigan ikkita (3) va (5) tengamalarning yechimini izlashga olib keladi.

Masalan , o’rniga qo’yish usilii yordamida

$y' - ay = e^{bx}$

chiziqli tenglamaning yechimini topaylik. $y = uv$ deylik: u holda $y' = vu' + uv'$ va tenglama

$$vu + u(v' - av) = e^{bx}$$

ko’rinishga keladi. $v' - av = 0$ bo’lishini talab qilamiz. O’zgaruvchilarni ajratib, $\frac{dv}{v} - adx = 0$ ni hosil qilamiz, bu yerda $v = Ce^{ax}$

Yukorida aytib o’tilganidek, $v = e^{ax}$ xususiy yechimi bilan cheklanish mumkin. v ning ifodasini almashtirilgan tenglamaga qo’yamiz: $e^{ax}u' = e^{bx}$ yoki $du = e^{(b-a)x}dx$ bu yerdan: agar $b \neq a$ bo’lsa, $v = \frac{1}{b-a}e^{(b-a)x} + C, b = a$ bo’lsa, $u = x + C$. Ma`lumki , u holda umumiy yechim $b \neq a$ bo’lganda $y = \frac{e^{bx}}{b-a} + Ce^{ax}, b = a$ bo’lganda esa $y = (x + C)e^{ax}$ ko’rinishda hosil bo’ladi.

6- mavzu.To`la differentsial tenglamalar. Integrallovchi ko`paytuvchi va uning mavjudligi haqidagi teoremalar (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1.To`la differentsial tenglamalar.

2.Integrallovchi ko`paytuvchi va uning mavjudligi haqidagi teoremalar

9-Tarif Agar

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

tenglamaning chap tomoni birorta $u(x,y)$-ikki o’zgaruvchili funksiyaning to’liq differensiali bo’lsa, bu tenglamaga to’la differinsial tenglama deyiladi. U holda bu tenglamani

$$du(x,y)=0$$

ko’rinshda yozish mumkin.

Oxirgi ifodani integrallab, umumiy integralni hosil qilamiz:

$$u(x,y)=C$$

1-Teorema. Ushbu

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

ifoda birorta $u(x,y)$ funksiyaning to’liq differensiali bo’lishi uchun qaralayotgan sohaning barcha nuqtalarida

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (2)$$

shart bajarishi zarur va yetarlidir.

6-Misol.

$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$ tenglamaning umumiy integrali topilsin.

Yechish: Bu misolda $P(x,y)=\frac{2x}{y^3}$, $Q(x,y)=\frac{y^2-3x^2}{y^4}$.

Bundan ko'rinadiki

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P=\frac{2x}{y^3}\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q=\frac{y^2-3x^2}{y^4}$$

$y\neq 0$ shartda

$$\frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\delta x}{y^4}\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{\delta x}{y^4}$$

Demak, (23) shart bajarildi. Berilgan tenglamaning chap qismi qandaydir *u(x,y)* funksiyaning to'liq differensialini ifodalar ekan. Shu funksiyani aniqlaymiz.

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y^3}$ ifodadan:

$$u(x,y)=\int\frac{2x\,dx}{y^3}+\varphi(y),\ \ u(x,y)=\frac{x^2}{y^3}+\varphi(y).$$

Bu munosabatni y bo'yicha differensiyallaymiz:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{3x^2}{y^4}+\varphi'(y)$$

Endi $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y^2-3x^2}{y^4}$ ni hisobga olganda:

$$\frac{y^2-3x^2}{y^4}=-\frac{3x^2}{y^4}+\varphi'(y)$$

$$\frac{y^2}{y^4}-\frac{3x^2}{y^4}=-\frac{3x^2}{y^4}+\varphi'(y)\text{ dan}$$

$$\varphi'(y)=\frac{1}{y^2}\text{ hosil bo'ladi,}$$

yoki

$$\frac{d\varphi}{dy}=\frac{1}{y^2}.$$

bundan $\varphi'(y)=-\frac{1}{y}+C$

U holda $u(x,y)=\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}+C$

Tenglamaning umumiy integrali: $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C_1$.

Integrallovchi ko`paytuvchi

Agar

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{1}$$

tenglama uchun

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{2}$$

shart bajarilmagan bo'lsa, uning chap qismi biror funksiyanig to'liq differensiali bo'laolmaydi. Bunday holatlarga ba'zan (22) tenglamani $\mu(x,y)$ funksiyaga ko'paytirish bilan uni to'la differensialli tenglamaga keltirish mumkin bo'ladi. Bunday holda $\mu(x,y)$ funksiyaga (22) tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchisi deyiladi. Integral ko'paytuvchini qanday aniqlashni ko'rsatamiz. Buning uchun (22) ni $\mu(x,y)$ ga ko'paytiramiz:

$$\mu\ P(x,y)dx+\mu Q(x,y)dy=0.$$

Bu tenglama to'la differensialli tenglama bo'lishi uchun

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

shart bajarilishi zarur va yetarlidir.
Ya'ni

$$Q\frac{\partial\mu}{\partial x}-P\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) \tag{24}$$

$\mu(x,y)$ ni topish uchun xususiy hosilali (24) differensial tenglamani integrallash kerak.

Oxirgi tenglamaning ikkala qismini μ ga bo'lamiz:

$$Q\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}-P\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{25}$$

Ravshanki, bu tenglamani qanoatlantiradigan funksiya $\mu(x,y)$ (22) tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchisi bo'ladi.

Umumiy holda (25) tenglamadan $\mu(x,y)$ ni topish oddiy differensial tenglamani integrallashdan qiyinroqdir. Shu sababli xususiy holni, ya'ni μ funksiya faqat x yoki y o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan holini qaraymiz.

Masalan, (22) tenglama faqat y ga bog'liq integral ko'paytuvchiga ega bo'lsin. Bu holda (25) da

$$\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=0$$

ekanligini hisobga olib,

$$\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

ni hosil qilamiz.

Bundan

$$\ln\mu=\int\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy+C$$

yoki

$$\mu(y)=\exp\left[\int\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy+C\right]$$

<u>7-Misol.</u>

$$(y+xy^2)dx-xdy=0$$

tenglama yechilsin.

<u>Yechish:</u> Bu yerda

$$P(x,y)=y+xy^2,\ Q(x,y)=-x,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1+2xy,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-1.$$

Ko'rinibturibdiki $\dfrac{\partial p}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

Demak, tenglamato'la differensiallitenglama emas. Butenglamafaqatyga bog'liqintegralko'paytuvchiga egaliginiko'rsatamiz.

$$\frac{1}{p}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\frac{-1-1-2xy}{y+xy^2}=-\frac{2}{y}$$

bo'lgani uchun

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y}=-\frac{2}{y}$$

bo'ladi. Bundan

$$\ln \mu=-2\ln y$$

$$\mu(y)=\frac{1}{y^2}\quad .$$

Endi berilgan tenglamani topilgan integral ko'paytuvchi $\mu(y)=\frac{1}{y^2}$ ga ko'paytirsak:

$$\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{x}{y^2}dx=0$$

to'la differensialli tenglama hosil bo'ladi.

Haqiqatan ham

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2},\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}$$

bu yerda

$$P(x,y)=\frac{1}{y}+x\qquad Q(x,y)=-\frac{x}{y^2}$$

Oxirgi tenglamani yechib, uning umumiy integralini topamiz:

$$\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}+C=0$$

yoki

$$y=-\frac{2x}{x^2+2C}.$$

Yuqorida biz $\dfrac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}$ ifoda *x* ga bog'liq bo'lmagan holdagina *y* ga bog'liq $\mu(y)$ integrallovchi ko'paytuvchi topish usulini ko'rsatdik.

Xuddi shunday usul bilan agar $\dfrac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}$ ifoda *y* ga bog'liq bo'lmasdan faqat x ning funksiyasidan iborat bo'lsa, u holda faqat *x* ga bog'liq bo'lgan integrallovchi ko'paytuvchi topish mumkinligini ta'kidlaymiz.

8- mavzu.Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differentsial tenglamalar va ularni integrallash usullari. Mavjudlik va yagonalik teoremasi. (2 soat)

Reja:

1. Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differentsial tenglamalar va ularni integrallash usullari.
2. Mavjudlik va yagonalik teoremasi.

.

Hosilaga nisbatan yechilmagan 1- tartibli oddiy differensial tenglamalar ushbu

$$F(x,y,y')=0\,(1)$$

ko'rinishda yoziladi. Bu yerda F uch nargumentli funksiya bo'lib, uch o'lchovli fazoning ochiq D_3 to'plamida (D_3 sohaga) aniqlangan. Agar bu to'plamni R^2 tekisligiga ortogonal proeksiyalasak, R^2 ga biror ochiq Gto'plam (G soha) hosil bo'ladi.

Tarif 4. (1) differensial tenglama berilgan bo'lib, $F(x,y,y')=0$ funksiya R^3 fazoning D_3 sohasida aniqlangan bo'lsin.

Agar I (ochiq,yopiq va yoki yarim ochiq) intervalda aniqlangan (x) funksiya uchun quyidagi uchta shart

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ\ (\mathrm{x},\varphi(\mathrm{x}))\in\Gamma,\mathrm{x}\in\mathrm{I},(\mathrm{x},\varphi(\mathrm{x})),\varphi`(x)\in D_3,\Gamma\subset\mathrm{R}^2\ \ D_3\subset\mathrm{R}^3 \\ 2^\circ\ \ \varphi(x)\in\mathrm{C}^1(\mathrm{I}) \\ 3^\circ\ \ \mathrm{F}(\mathrm{x},\varphi(x)),\ \varphi`(x)\equiv 0,\mathrm{x}\in\mathrm{I} \end{array}\right\}$$

bajarilsa, bu funksiya I intervalda (1) differensial tenglamaning yechimi deyiladi. (1) tenglamaning yechimiga mos egri chiziq, uning integral egri chizig'i deyiladi.

Agar parametrik ko'rinishda berilgan $x=x(t),\ \mathrm{y}=y(t),\ \ \mathrm{t}\in\mathrm{I_t}$ ($\mathrm{I_t}$ parametr t ning o'zgarish sohasi yopiq ochiq, yarim ochiq intervaldan iborat) funksiya uchun $x'(t)\neq 0,\ \ t\in I_t$ bo'lib, quyidagi uchta shart

$$1^\circ\ \ (\mathrm{x}(\mathrm{t}),y(t))\in\Gamma,\ (\mathrm{x}(\mathrm{t}),y(t)),\ \frac{\mathrm{y}'(\mathrm{t})}{\mathrm{x}(\mathrm{t})}\in D_3,\quad t\in I_t$$

$$2^\circ\ \ \mathrm{y}(\mathrm{t})\in C^1(I_t),\ \ (\mathrm{x}(\mathrm{t})\in C^1(I_t));$$

$$3^\circ\ \ \mathrm{F}\left(\mathrm{x}(\mathrm{t}),y(t),\ \frac{y`(t)}{x`(t)}\right)\equiv 0,\ \ \mathrm{t}\in\mathrm{I_t}$$

bajarilsa u holda x=x(t), y=y(t) funksiya I_t intervalda (1) differensial tenglamaning yechimi deyiladi. Ba'zi hollarda yechimni shu ko'rinishida yozish yoki izlash qulay bo'ladi.

(1) differensialn tenglama uchun ham (1) differensial tenglama uchun aytilganidek yechim uch : $x=x(t),\ \mathrm{y}=y(t),\ (\ \mathrm{t}\in\mathrm{I_t});y=f(x);\ \Phi(\mathrm{x},\mathrm{y})=0$ ko'rinishdan bittasi orqali izlanadi.

(1) differensial tenglama ochiq G to'plamning har bir (x,y) nuqtasida y` ning bitta yoki bir necha qiymatlarini aniqlasin deylik. Har bir (x,y) nuqtada y` dan foydalanib, bitta yoki bir necha birlik vector chizamiz. Natijada yo'nalishlar maydoni hosil bo'ladi.

Umumiy yechim tushunchasini kiritishdan avval (1) tenglama uchun Koshi masalasini qo'llaymiz.

Koshi masalasi.

(1) differensial tenglamaning $y(x_0)=y_0,\ (x_0,y_0)\in\Gamma$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin yoki geometrik nuqtai nazardan (1) differensial tenglamaning $(x_0,y_0)\in\Gamma$ nuqtadan o'tuvchi integral chizig'i ko'rsatilsin. (1) differensial tenglama y` ga nisbatan yechimi mumkin deylik. U holda $(x_0,y_0)$ nuqtaning biror atrofida y` uchun bir necha haqiqiy qiymatlarni topamiz.

$$y`=f_k(x,y),\ \ \mathrm{k}=1,2...,\mathrm{m}\,(2)$$

Agar har bir $f_k(x,y),\ \mathrm{k}=1,2...,\mathrm{m}$ funksiya biror mavjudlik va yagonalik teoremasining shartlarini qanoatlantirsa, u holda (x_0,y_0) nuqtadan (5) differensial tenglamaning integral chizig'i o'tadi. Ba'zan $f_{k_1}, f_{k_2}, .., f_{k_{2n}}$ $\left(f_{k_{2n}} \le M\right)$ funksiyalar kompleks bo'lsa , u holda biz faqat $f_{k_{2n+1}}, ..., f_n$ holda $\left(x_0, y_0\right)$ nuqtadan tegishli differensial tenglamaning m-k_{2n} ta integral chizig'i o'tadi.

Agar (5) differensial tenglamaning haqiqiy $f_1(x,y), .., f_k(x,y)$ $(\mathrm{k} \le \mathrm{m})$ funksiyalarga mos kelgan va $\left(x_0, y_0\right)$ nuqtada uning integral chiziqlariga o'tkazilgan urunmalar turli burchak koeffisiientlariga ega bo'lsa, uholda Koshi masalasi yagona yechimga ega deyiladi.

Tarif 5. (5) differensial tenglama $\left(x_0, y_0\right)$ nuqtaning biror atrofida y` ga nisbatan yechilishi mumkin , ya'ni (7) tenglamalarga ajraladi deylik.

Agar har bir (7) tenglama

$$y = f_k(x,c), \ \mathrm{k} = 1,2..., \mathrm{m} \ (3)$$

umumiy yechimga yoki $\Phi_k(x,y) = c, \ \ \mathrm{k} = 1,2..., \mathrm{m}$ c- ixtiyoriy o'zgarmas (3) umumiy integralga ega bo'lsa, u holda (7) umumiy yechimlar to'plami berilgan (1) differensial tenglamaning umumiy yechimi deyiladi.

Tarif 6. Agar (1) tenglamaning biror I intervalda aniqlangan $y = \varphi(x)$ yechimning har bir nuqtasida Koshi masalasi yechimga ega bo'lsa, u holda $y = \varphi(x) \ x \in I$ yechim berilgan tenglamaning xususiy yechimi deyiladi.

Yuqoridagi tariflar munosabati bilan maxsus yechim tushunchasini kiritish lozim bo'ladi.

Tarif 7. Agar $y = \varphi(x)$ funksiya biror I intervalda (5) differensial tenglamaning yechimi bo'lib, uning har bir nuqtasida yagona yechimga ega (yagonalik xossaga ega) bo'lmasa, yani uning har bir nuqtasidan bir xil yo'nalishda kamida ikkita integral chiziq o'tsa , u holda $y = \varphi(x)$ funksiya (1) tenglamaning o'sha intervalda aniqlangan maxsus yechimi deyiladi.

Misol . $(y`)^3 = y^2, D_3 = \{(x,y,y`): -\infty < x < +\infty, \ -\infty < y < +\infty, \ 0 \le y` < +\infty\}$ differensial tenglamani $y` = y^{2/3}$ ko'rinishda yozish mumkin.

Ma'lumki, obsissa o'qi (ya'ni y=0 chiziq) va $y = \dfrac{(x+1)^3}{27}$ kubik parabolalar bu tenglama uchun integral chiziq bo'lib xizmat qiladi. Ammo y=0 chiziqning har bir nuqtasidan kamida ikkita integral chiziq o'tadi. Shuning uchun y=0 maxsus yechimdir.

Teorema 4. Agar
$F(x,y,y`) = 0 \ (1)$

Differensial tenglamada $F(x,y,y`)$ funksiya uchun ushbu ikki shart.

1^0 $F(x,y_0,y`) = 0 \ (2)$

Tenglamaning haqiqiy ildizi , $y_0^`$ uchun $\left(x, y_0, y_0^`\right) \in D_3\left(\left(x_0, y_0\right) \in \Gamma\right)$ nuqtaning biror yopiq D_3 atrofida $F(x,y,y`)$ funksiya uzluksiz va birinchi tartibli xususiy hosilalarga ega.

$2^0 F_y^`\left(x_0, y_0, y_0`\right) \ne 0$ bajardi u holda, shunday h>0 mavjud bo'ladiki, (1) tenglamaning $|x - x_0| \le h$ intervalda aniqlangan $y(x_0) = y, \ \mathrm{y}`(\mathrm{x}) = y_0^`$ shartlarini qanoatlantiruvchi yagona y=y(x) yechimi mavjud.

Isbot. Oshkormas funksiyalar haqidagi ma'lum teoremaga ko'ra (1) tenglama y` ni bir qiymatli funksuiya sifatida aniqlaydi, ya'ni

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$(3)
Bunda f(x,y) funksiya yopiq $\bar{\Gamma}_0(\bar{\Gamma}_0 \subset \Gamma)$ to'plamda uzluksiz, 1-tartibli uzluksiz hosilaga ega va $f(x_0, y_0) = y_0^{`}$; $(x_0, y_0) \in \bar{\Gamma}_0$ shuning uchun f(x,y) funksiya yopiq $\bar{\Gamma}_0$ to'plamda y bo'yicha Lipshist shartini qanoatlantiradi demak (3) differensial tenglama Pikar teoremasiga asosan $|x - x_0| \le h$ intervalda aniqlangan va yagona y=y(x) yechimga ega bo'lib , $y(x_0) = y_0$ bo'ladi. Xuddi shu yechimga (3) tenglama ham ega. Endi $y^{`}(x_0) = y_0^{`}$ ekanini ko'rsataylik. Haqiqatdan (3) tenglama y=y(x) uchun ayniyatga aylanadi.

$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$, $|x - x_0| \le h$ agar $x=x_0$ bo'lsa $y^{`}(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0) = y^{`}$

Natija 1. teorema shartiga ko'ra $(x_0, y_0 y_i^{`})$ nuqtaning $\bar{D}_3^0$ atrofida $\frac{\partial F(x, y, y^{`})}{\partial y^{`}} \ne 0$, $\left|\frac{\partial F(x, y, y^{`})}{\partial y^{`}}\right| \le A$, $0 < A = \text{const}$

Natija 2. agar (1) tenglama bir necha haqiqiy ildizga ega bo'lsa, har bir $(x_0, y_0 y_i^{`})$ nuqtaning yopiq $\bar{D}_3^0$ atrofida (19)tenglama y` ni bir qiymatli aniqlaydi, y`=f_i(x,y). shu bilan birga har bir $i(i = 1, \overline{m})$ uchun tegishli differensial tenlama $(x_0, y_0) \in \bar{\Gamma}_0$ nuqtadan o'yuvchi yagona integralchiziqqa ega. Boshqacha aytganda, (x_0,y_0) nuqtadan m ta yo'nalish bo'yicha faqat m ta integral chiziq o'tadi.

Agar (x_0,y_0) nuqtada Koshi masalasi yagona yechimga ega bo'lsa u nuqtaga oddiy nuqta deyiladi bu nuqtaga mos yechim oddiy yechim, integral chiziqnio oddiy integral chiziq deyiladi.

Agar (x_0,y_0) nuqtada Koshi masalasi uchun yagonalik o'rinli bo'lmnasa u holda bu nuqta (2) tenglamaning maxsus nuqtasi deyiladi hamda uning girafigi maxsus integral chiziq deyiladi. Demak, $(x_0, y_0 y_0^{`})$ nuqtaning yetarli kichik yopiq atrofida teoremaning biror sharti buzilganda maxsus nuqtaga bo'lishimiz mumkin. Bu teorema faqat yetarli shartni belgilagani uchun
$(x_0, y_0 y_0^{`})$ nuqta aytilgan holda maxsus bo'lishi ham bo'lmasli ham mumkin .

Ushbu malakaviy bitiruv ishda ko'rilayotgan masala shundan iboratki berilgan tenglama uchun umumiy yechim bilan bir qatorda maxsus yechimlarni ham izlash, maxsus nuqtalarni topishning ratsional yo'nalishlarini ko'satishdan iborat, bundan tashqari yechimlar to'plami maxsus nuqtalar atrofida qanday joylashadi, ularning grafik tasviri qanday bo'ladi. Shu kabi masalalarni atroflicha o'rganamiz.

9- mavzu. Maxsus yechimlar va ularning mavjudligi. (2 soat)
1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Maxsus yechimlar va ularning mavjudligi.
2. Hosilaga nisbatan echilgan tenglamalarning maxsus echimlari
3. Hosilaga nisbatan echilmagan tenglamalarning maxsus echimlari

Biz birinchi tartibli differensial tenglamaning maxsus yechimlarini izlash usullariga to'xtalamiz.

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ (1) tenglamaning o'ng tomonidagi funksiya biror soxada uzluksiz va u bo'yicha chegaralangan xususiy hosilaga ega bo'lsa, u holda shu soxaning har bir $(x_\circ, y_\circ)$

nuqtasida yagona integral chiziq o'tadi. Bu chiziqlar bir parametrli (y_0 ni parametr deb qabul qilamiz) chiziqlar oilasiga mansub bo'lib parametr biror aniq son qiymatga ega bo'lganda shu oilada hosil qilinadi. Bu bir parametrli chiziqlar oilasi umumiy yechimni beradi. Bunda boshqa yechimlar, xususan, maxsus yechimlar ham bo'lmaydi.

Ma`lumki, maxsus yechimlar deb, har bir nuqtasida yechimning yagonaligi buziladigan nuqtalarga aytiladi, ya`ni hamma nuqtalarida yagonalik xossasi bajarilmaydi. Koshi teoremasi biror soxada maxsus yechimning yo'qligini yetarli shartini beradi. Bundan kelib chiqib, maxsus yechim mavjud bo'lishi uchun Koshi teoremasi shartlari bajarilmasligi kerak. Xususan (1) tenglamaning o'ng tomoni qaralayotgan soxada uzluksiz bo'lsa, maxsus yechim faqat LipShits sharti bilan bajarilmaydigan nuqtalardan o'tishi kerak. Agar $f(x,y)$ barcha nuqtalarda chekli yoki cheksiz u bo'yicha hosilaga ega bo'lsa, Lipshits sharti $\frac{df}{dy}=\infty$ (2) bo'ladigan nuqtalarda bajarilmaydi. Shunday qilib biz hosilaga nisbatan yechiladigan 1–tartibli differensial tenglamaning maxsus yechimlarini topish uchun quyidagi qoidani keltiramiz:

1) (2) tenglamani qanoatlantiradigan nuqtalarni o'rnini topish;

2) agar bu nuqtalar bir yoki bir necha egri chiziqlarning (1) tenglamaning integral chizig'i bo'lish yoki bo'lmasligini tekshiramiz;

3) bu chiziqlarning har bir nuqtasida yagonalikning buzilishini tekshiramiz, agar bu shartlar bajarilsa, demak, hosil bo'lgan egri chiziqlar maxsus yechimlar bo'ladi.

Misol 1.

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{(x-y)^2+1}$$ tenglama maxsus yechimga egami?

Echish:

Tenglamaning o'ng tomoni R^2 da uzluksiz, lekin

$$\frac{df}{dy}=\frac{2}{3}(y-x)^{-\frac{1}{3}}$$

Xususiy hosila $y\to x$ da chegaralanmagan. Demak, $y=x$ to'g'ri chiziqda yechimning yagonaligi buzilishi mumkin. Ammo bu tenglama uchun $y=x$ funksiya yechim ekani ravshan. Demak, $y=x$ maxsus egri chiziq. Berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

$$y-x=\frac{(x-c)^3}{27}$$ egri chiziqlar oilasidan iborat.

$y=x$ ning har bir nuqtasidan cheksiz ko'p integral to'g'ri chiziq o'tishi ko'rinib turibdi.

Demak, $y=x$ chiziqning har bir nuqtasida yagonalik buziladi. Shuning uchun $y=x$ chiziq berilgan differensial tenglamaning maxsus yechimi bo'ladi.

Ma`lumki, umumiy yechim maxsus yechimni o'z ichiga olmaydi, ya`ni S ning har qanday qiymatida ham maxsus yechimni hosil qilib bo'lmaydi. Yo'qoridagi misoldan ko'rinib turibdiki $x=c$ bo'lganda maxsus yechimni hosil qilamiz, ya`ni S parametr ekanligidan har bir xususiy yechimning $x=c$ nuqtasida yagonalik buziladi va ko'rinib turibdiki, $y=x$ to'g'ri chiziqning har bir nuqtasiga to'g'ri keladi. shuning uchun $y=x$ chiziq berilgan differensial tenglamaning maxsus yechimi bo'ladi. chizmasi 1 – rasmdagi ko'rinishda bo'ladi.

II. Hosilaga nisbatan yechilmagan differensial tenglamalarning maxsus yechimlarini izlaymiz.

$$F(x,y,\ y')=0 \qquad (3)$$

Agar bu tenglamani y' ga nisbatan yechsak

$$y_i = f_i\ (x, y) \quad (i = 1,2,........, n) \qquad (4)$$

hosil bo'ladi va bu funksiyalarda faqat haqiqiy tenglamalarnigina qaraymiz. Bu tenglamalar uchun LipShits sharti qanday bajariladi.

$$\frac{df}{dy} = -\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dy'}} \qquad (5)$$

Bu tenglamadan ko'rinib turibdiki, (2) tenglik bajarilishi uchun

$$\frac{df(x, y, y')}{dy'} = 0 \qquad (6)$$

Bo'lishi kerak. Bunda differensiallashni bajargandan keyin chap tomonda y' ning o'rniga (3) tenglama bilan aniqlanadigan $f_i\ (x, y)$ funksiyadan birortasini olish kerak. Boshqacha qilib aytganda LipShits sharti bajarilmaydigan XOY tekislikdagi nuqtalarning urinmaning geometrik tenglamasi hosil qilish uchun (3) va (6) tenglamalarda y' ni yo'qotish kerak. Oliy algebrada ikkita algebraik tenglamada batta o'zgaruvchini ratsional amallar bilan yo'qotish usuli bu tenglamalarning rezul'tantasini topish keltiriladi. (3) va (6) tenglamalardan y' ni yo'qotib, $F(x, y,) = 0$ (7) ko'rinishidagi chiziqlarni hosil qilamiz. Bu chiziqlar (1) tenglamaning diskriminant chiziqlari deyiladi.

Shunday qilib, biz (3) tenglamaning maxsus yechimlarini topish uchun quyidagi qoidani keltiramiz.

1) (3) va (6) tenglamalardan y' ni yo'qotib, (7) chiziqlarni hosil qilamiz;

2) agar bu chiziqlar (3) tenglamani qanoatlantirsa, u holda bu chiziq maxsus yechim bo'ladi.

Misol 2.

$$x - y = \frac{4}{9} p^2 - \frac{8}{27} p^3$$

Bu tenglamaning umumiy integrali $P = y'\ (y - c) = (x - c)^3$. Diskriminant chiziqlari hosil qilish uchun P bo'yicha differensiallab $\frac{8}{9} = \left(P - P^2\right) = 0$ hosil qilamiz.

Bundan $P = 0$, $\quad P = 1$ hosil bo'ladi. Berilgan tenglama qo'yib

1) $x - y = 0$

2) $x - y = \frac{4}{27}$

diskriminant chiziqlrani hosil qilamiz.

Tenglamaning umumiy integrali yarim kubik parabolalar oilasidan iborat. (2 – chizma) $x - y = \frac{4}{27}$ urinma to'g'ri chiziq maxsus yechim, chunki berilgan tenglamani qanoatlantiradi. $y = x$ to'g'ri chiziq esa qaytish nuqtalarining geometrik o'rni bo'lib yechim bo'la olmaydi.

Boshqa masalalarni yechishda ham yuqorida keltirilgan qoidaning 3 – punkti uchun shunga o'xshash analitik usul bilan muloxaza yuritish orqali ko'rsatish mumkin.

III. 2 – punktda keltirilgan usul algebraik operatsiyalar differensiallash va yo'qotishga asoslangan. Agar berilgan tenglama x, y, y' bo'yicha algebraik bo'lsa, u holda maxsus yechim ham algebraik bo'ladi va biz har doim tenglamani integrallay olmasak ham uni topa olamiz.

Maxsus yechimni topish quyida keltiriladigan usuli esa differensial tenglamaning umumiy integrali ma`lum bo'lganda qo'llash mumkin. (3) tenglamaning umumiy integrali

$F(x, y,\ y')=0$ (8) tenglama bilan berilgan chiziqlar oilasi urinmaga ega bo'lsa va bu urinma:

1) Differensial tenglamaning yechimi bo'lsin. Urinmaning har bir nuqtasida x, y, y' element (8) integral chiziqlar oilasining yechimi bo'lgani uchun urinmaning ham barcha elementlari bu tenglamani qanoatlantiradi.

2) Urinma maxsus yechimni beradi. Haqiqatdan integral chiziqlarning urinma bilan kesishadigan yoylaridan tuzilgan chiziqlar oilasini qaraymiz. Urinmaning har bir nuqtasining biror nuqtasidan xuddi shunday chiziq o'tadi. Bu chiziqlar (4) bilan aniqlanuvchi (3) tenglamaning biror shoxchasi maydoniga to'g'ri keladi. Bu urinmaning har bir nuqtasida yagonalik buziladi. chunki, uning har bir nuqtasidan ikkita integral chiziq o'tadi. Biri urinmaning uzi bo'lsa, ikkinchsi esa unga urinuvchi chiziqlar oilasidir. Bunday maxsus yechimni topishning quyidagi qoidasi kelib chiqadi. Agar umumiy yechim (8) ma`lum bo'lsa, urinmalarni topish uchun (8) ni S bo'yicha differensiallaymiz.

$$\frac{df(x, y, c)}{dc}=0 \qquad (9)$$

(8) va (9) tenglamalardan S ni yo'qotamiz. Hosil bo'lgan munosabat

$$4(x, y,)=0 \qquad (10)$$

maxsus yechimni beradi. (agar u yechim bo'lsa).

Izoh: Differensial geometriyadan ma`lumki, (10) tenglama nafaqat urinmani, balki (8) chiziqlar oilasi uchun karrali nuqtalarning (tugun nuqtalari, qaytish nuqtalari va xokazo) geometrik o'rnini beradi, faqat chu vaqtdagi, qachon (10) chiziq bo'ylab

$$\frac{df}{dx}=0, \qquad \frac{df}{dy}=0 \qquad (11)$$

bo'lsa.

Miso l 3.

$$y=\sqrt[3]{\frac{(y')^2}{4y}}\left(x\sqrt[3]{\frac{(y')^2}{4y}}-1\right)^2$$

differensial tenglama berilgan bo'lsin. Bu tenglama umumiy yechimi

$$y-c^3x^2+2c^2x-c=0$$

dan iborat. Demak,

$$\Phi=y-c^3x^2+2c^2x-c, \qquad \frac{d\phi}{dc}=-3c^2x^2+4cx-1=0$$

$$-3c^2x^2+4cx-1=0$$

$$3c^2x^2+4cx-1=0, \quad D=16x^2-12x^2=4x^2>0.$$

$$C_{1/2}=\frac{4x\pm 2x}{6x^2}=\frac{2\pm 1}{3x}; \qquad C_1=\frac{1}{x}, \qquad C_2=\frac{1}{3x}$$

Hosil bo'lganlardan foydalanib S ni yo'qotamiz.

1) $y-\frac{1}{x^3}\cdot x^2+2\frac{1}{x^2}\cdot x-\frac{1}{x}=0.$

$$y-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0. \qquad y=0.$$

2) $y-\frac{1}{27x^3}\cdot x^2+\frac{2}{9x^2}-\frac{1}{3x}=0.$

tenglamalardan S ni yo'qotib $y=0$; $x\neq 0$; $y=\dfrac{7}{27x}$; $x\neq 0$ urinmalarni hosil qildik. Bu har ikki chiziq ham urinmadir. chunki,

$$\frac{d\phi}{dx}=-2c^3x+2c^2\ ,\quad \frac{d\phi}{dy}=1\neq 0.$$

Demak, bu chiziqlar differensial tenglamaning maxsus yechimlari bo'ladi.

$y=0$; $x\neq 0$; $y=\dfrac{4}{27x}$; $x\neq 0$ chiziqlardan biri obstsissa o'qi bo'lsa, ikkinchsi shoxchalari 1 va 3 – kvadratlarda joylashgan giperboladan iborat.

10- mavzu.Parametr kiritish yo`li bilan tenglamalarni integrallash. Lagranj va Klero tenglamalari.

(2 soat)

Reja:

1. Parametr kiritish yo`li bilan tenglamalarni integrallash.
2. Lagranj va Klero tenglamalari.

Hosilaga nisbatan yechilmagan

$$F(x,y,p)=0 \qquad (1)$$

differensial tenglamaning integrallashdagi asosiy masala uni hosilaga nisbatan yechishdan iboratdir. Agar x,y,p ni fazodagi dekart koordinatalari deb qarasak (1) tenglama fazoda biror sirtni aniqlaydi.

Ma`lumki, fazodagi sirt nuqtalarini ikkita u,ϑ o'zgaruvchilarini funksiyasi shaklida ifodalash mumkin:

$$\begin{cases} x=\varphi(u,\sigma) \\ y=\psi(u,\sigma) \\ p=\chi(u,\sigma) \end{cases} \qquad (2)$$

(1) va (2) tenglamalar o'zaro ekvivalentdir.

Ma`lumki

$$dy=pdx$$

Bunga dx,dy,p qiymatlarni (2) dan keltirib qo'ysak

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}d\sigma=\chi(u,\sigma)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}d\sigma\right)$$

Agar bunda u ni argument uchun, ϑ ni funksiya uchun qabul qilsak, bu tenglamani qo'yidagicha yozish mumkin.

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}-\chi\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right)\frac{d\vartheta}{du}=\chi\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial\psi}{\partial u} \qquad \textit{ёки}$$

$$\frac{d\vartheta}{du}=\chi\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\Big/\frac{\partial\psi}{\partial u}-\chi\frac{\partial\varphi}{\partial u}$$

Bu esa hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differensial tenglamadir. Faraz etaylik bu tenglamaning umumiy yechimi

$\vartheta=\omega(u,c)$ bo'lsin.

U holda (2) ga asosan (1) tenglamaning umumiy yechimi

$$\begin{cases} x=\varphi(u,\omega(u,c)) \\ y=\psi(u,\omega(u,c)) \end{cases}$$ bo'ladi.

(1) tenglamani yechishda qo'yidagi hollar bo'lishi mumkin.

1- hol. (1) tenglamani u ga nisbatan yechish osonroq bo'lsin.

$y=f(x,p)$ (4)

Bu tenglamani har ikkala tomoni x ga nisbatan differensial-laymiz.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}+\frac{df}{dp}\frac{dp}{dx} \quad \text{ёки} \quad p=\frac{df}{dx}+\frac{df}{dp}\frac{dp}{dx} \qquad (5)$$

Bu tenglama, r va x ga nisbatan birinchi tartibli differensial tenglamadir.
Agar bu tenglamaning umumiy yechimi $p=\beta(x,c)$ bo'lsa, u holda

(4) tenglamaning umumiy yechimi $y=f(x,\beta(x,c))$ bo'ladi.

Misol. $y=xy'-x^2y'^3$ $\quad y'=p \quad y=xp-x^2p^3$

$$p=p-2xp^3+(x-3x^2p^2)\frac{dp}{dx} \qquad 2xp^3=x(1-3xp^2)\frac{dp}{dx} \qquad \frac{dx}{dp}+\frac{3}{2p}x=\frac{1}{2p^3}$$

$$x=\ell^{-\frac{3}{2}\ell np}\left[\int \ell^{\frac{3}{2}\ell np}\frac{1}{2p^3}dp+c\right]=p^{-\frac{3}{2}}\left[\int\frac{1}{2p^{3-\frac{3}{2}}}dp+c\right]=p^{-\frac{3}{2}}\left[-p^{-\frac{1}{2}}+c\right]=$$

$$=-p^{-2}+cp^{-\frac{3}{2}} \qquad xp^2=c\sqrt{|p|}-1$$

Agar $p=0$ bo'lsa $y=0$ ham tenglamaning yechimi bo'ladi.

2- hol. (1) tenglamani x ga nisbatan yechish osonroq bo'lsin:

$x=f(y,p)$ (5)

har ikkala tomonidan u ga nisbatan hosilasini olamiz.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{df}{dy}+\frac{df}{dp}\frac{dp}{dy}$$

Bu r va u ga nisbatan birinchi tartibli differensial tenglamadir.
Agar bu tenglamaning umumiy yechimi $p=\alpha(y,c)$ bo'lsa,

(5) tenglamaning umumiy integrali $x=f(y,\alpha(y,c))$ bo'ladi.

Misol $\quad y'=\ell^{\frac{xy'}{y}} \qquad y'=p \qquad p=\ell^{\frac{xp}{y}} \qquad \ell np=\frac{xp}{y}$

$$x=\frac{y}{p}\ell np \quad (*) \quad \frac{1}{p}=\frac{1}{p}\ell np+\left(-\frac{y}{p^2}\ell np+\frac{y}{p^2}\right)+\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{1}{p}(1-\ell np)=\frac{y}{p^2}(1-\ell np)\frac{dy}{dy} \qquad 1-\ell np=0 \qquad \ell np=1 \qquad p=\ell \qquad y=\ell x$$

$$1-\ell np\neq 0 \qquad \frac{1}{p}=\frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy} \qquad \frac{dp}{p}=\frac{dy}{y} \qquad \ell np=\ell ny+\ell nc \qquad p=cy$$

$(*)$ дан $\quad xp=y\ell np \qquad xcy=y\ell ncy \qquad cx=\ell ncy$

$F(x,y,y')=0$ (1)

tenglama yechimining mavjudlik va yagonalik teoremasi

1) $F(x,y,y')$ funksiyasi (x_0, y_0, y'_0) nuqtaning yopiq atrofida o'zining barcha F'_y, F'_y xususiy hosilalari bilan birga aniqlangan va uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin.

2) Bu nuqtada $F(x_0, y_0, y'_0)=0$

3) $F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$

U holda (1) tenglama $x=x_0$ nuqta atrofida aniqlangan va uzluksiz differensiallanuvchi yagona $y=y(x)$ yechimga ega bo'lib, bu yechim $y(x_0)=y_0$, boshlang'ich shartni hamda $y'(x_0)=y'_0$ shartni qanoatlantiradi.

Lagranj tenglamasi

Differensiallash metodi bilan kvadraturaga keltiraladigan hosilaga nisbatan yechilmagan tenglamalardan biri Lagranj tenglamasi bo'lib, uning umumiy ko'rinishi

$A(p)y+B(p)x+C(p)=0$ (1)

bo'ladi. Bunda $A(p), B(p), C(p)$ ko'rilayotgan soxada uzluksiz funksiyalar bo'lib unda $A(p)\neq 0$ (1) tenglamadan ko'rinadikim. Lagranj tenglamasi x va u larga nisbatan chiziqli differensial tenglamadir (1) ning har ikkala tomoni $A(p)\neq 0$ ga bo'lsak,

$y=\varphi(p)x+\psi(p)$ (2)

tenglamaga ega bo'lamiz.

Bunda $$\varphi((p)=\frac{-B(p)}{A(p)}, \qquad \psi(p)=-\frac{C(p)}{A(p)}$$

(2) Lagranj tenglamasining kanonik (sodda) ko'rinishidir.

(2) tenglamani yechish uchun differensiallash usulidan foydalanamiz

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(p)+x\varphi'(p)\frac{dp}{dx}+\psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$p=\varphi(p)+(x\varphi'(p)+\psi'(p))\frac{dp}{dx} \qquad (3)$$

$$p-\varphi(p)=(x\varphi'(p)+\psi'(p))\frac{dp}{dx}$$

$p-\varphi(p)\neq 0$ bo'lmasin.

(3) tenglamada x ni funksiya r-ni argument deb qabul etsak, tenglamani

$$\frac{dx}{dp}=\frac{x\varphi'(p)+\psi'(p)}{p-\varphi(p)}=-\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}x-\frac{\psi'(p)}{\varphi(p)-p}$$

$$\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}x=-\frac{\psi'(p)}{\varphi(p)-p}$$

Bu esa birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamadir.

Ma`lumki uning umumiy yechimi

$$x=\ell^{-\int\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}dp}\left[-\int\ell^{\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}dp}\frac{\psi'(p)}{\varphi(p)-P}dp+c\right]=c\omega(p)+\alpha(p)$$

dan iborat.

Bu topilgan qiymatni (2) ga olib borib qo'ysak Lagranj tenglamasining parametrga bog'liq bo'lgan umumiy yechimiga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} x = c\omega(p) + \alpha(p) \\ y = \varphi(p)\left[c\omega(p0 + \alpha(p)\right] + \psi(p) \end{cases}$$

Faraz etaylik $\varphi(p) - p = 0$ bo'lsin.

Bu tenglamaning yechimlaridan biri $p = c_0$ bo'lsin ya`ni

$\varphi(c_0) - c_0 \equiv 0.$

u holda (2) dan $y = c_0 x + \psi(c_0)$ ga ega bo'lamiz

Bu ham Lagranj tenglamasining yechimidir. Bu yechim tenglamaning maxsus yechimi bo'lishi mumkin.

Misol. $y = (1 + y')x + y^{12}$ $y = (1 + p)x + p^2$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + p + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx} = 1 + p + (x + 2p)\frac{dp}{dx}$$

$$p = 1 + p + (x + 2p)\frac{dp}{dx} \qquad (x + 2p)\frac{dp}{dx} = -1 \qquad \frac{dx}{dp} = -(x + 2p)$$

$$\frac{dx}{dp} + x = 2p \qquad x = \ell^{-p}\left[-2\int \ell^p p dp + c\right] = \ell^{-p}\left[-2\ell^p(p-1) + c\right] =$$

$$= -2(p-1) + c\ell^{-p} \qquad (\int \ell^u du = \ell^u(u-1) + c)$$

$$\begin{cases} x = c\ell^{-p} - 2p + 2 \\ y = (1 + p)(c\ell^{-p} - 2p + 2) + p^2 \end{cases}$$

Klero tenglamasi.

Lagranj tenglamasining xususiy holi Klero tenglamasidir Lagranj tenglamasida $\varphi(p) \equiv p$ bo'lsa

$$y = px + \psi(x) \qquad (1)$$

Bu Klero tenglamasining kanonik ko'rinishidir Klero tenglamasining ham differensiallash usulidan foydalanib yechamiz.

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx} = p + (x + \psi'(p))\frac{dp}{dx}$$

$$p = p(x - \psi'(p))\frac{dp}{dx} \qquad (x + \psi'(p))\frac{dp}{dx = 0}$$

Bundan $\dfrac{dp}{dx} = 0$ va $x + \psi'(p) = 0$ $\dfrac{dp}{dx} = 0$ *дан* $p = c$ buni (1) tenglamaga qo'ysak $y = cx + \psi(c)$ Klero tenglamasining umumiy yechimiga ega bo'lamiz.

Bundan ko'rinadikim Klero tenglamasining umumiy yechimi, ixtiyoriy o'zgarmasga (parametr) bog'liq bo'lgan to'g'ri chiziqlar oilasidan iboratdir.

Endi $x + \psi'(p) = 0$ ni p ga nisbatan yechish mumkin bo'lsin.

$p = \omega(x)$

U holda (1) dan $y = x\omega(x) + \psi(\omega(x))$ (2)

ga ega bo'lamiz. Bu ham Klero tenglamasining yechimi bo'lib, u maxsus yechim bo'lishi mumkin.

Klero tenglamasining umumiy yechimini

$$\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p) \end{cases} \qquad (3)$$

parametr ko'rinishda ham yozish mumkin. (2) yechimni umumiy yechimdan farqi shundaki unda birinchidan o'zgarmas son qatnashmaydi. Ikkinchidan ixtiyoriy o'zgarmas sonning hech qanday qiymatida uni hosil qilib bo'lmaydi. (2) yechimga Klero tenglamasining maxsus yechimi deyiladi.
Ma`lumki maxsus yechim

$$\begin{cases} y = cx + \psi(c) \\ x + \psi'(c) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

tenglamalardan ixtiyoriy o'zgarmas s ni yo'qotish natijasida hosil bo'ladi. (4) ning ikkinchisi, birinchisining parametr s ga nisbatan differensiallashdan hosil bo'lgan.
Differensial geometriyadan ma`lumki bunday amallar yordamida hosil bo'lgan chiziq, bitta parametrga bog'liq bo'lgan

$$y = cx + \psi(c)$$

to'g'ri chiziqlar oilasining o'ramasidan iboratdir.
Demak geometrik nuqtai nazaridan Klero tenglamasining maxsus yechimi, uning umumiy yechimini ifodalovchi to'g'ri chiziqlar oilasini o'ramasidan iboratdir

Misol $\quad y = xy' + y'^2 \qquad y = px + p^2 \qquad y = cx + c^2$

Tenglamaning umumiy yechimi.

$$\frac{dy}{dx} = p + (x+2p)\frac{dp}{dx} \qquad p = p + (x+2p)\frac{dp}{dx} \qquad (x+2p)\frac{dp}{dx} = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \qquad p = c \qquad x + 2p = 0 \qquad p = -\frac{x}{2}$$

$$y = -\frac{x}{2}x + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}$$

11- mavzu. $n-$ tartibli differentsial tenglamalar. Yechim, umumiy yechim, Koshi masalasining qo'yilishi. (2 soat)

Reja:

1. $n-$ tartibli differentsial tenglamalar.
2. Yechim, umumiy yechim.
3. Koshi masalasining qo'yilishi.

Ushbu

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

ko'rinishdagi tenglama n – tartibli odddiy differensial tenglama deyiladi. Bu yerda $F\left(x, y, y^1, \dots, y^{(n)}\right) = 0$ funksiya (n + 2) o'lchovli R^{n+2} fazoning D_{n+2} sohasida aniqlangan. Ko'p hollarda (4.1) tenglama ushbu

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \qquad (2)$$

ko'rinishga keltiriladi. Bu tenglama yuqori tartibli hosilaga nisbatan yechilgan yoki kanonik ko'rinishdagi n – tartibli oddiy differensial tenglama deb yuritiladi. (4.2) tenglamada $f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ funksiya (n+1) o'lchovli $\underline{R}^{n+1}$ fazosining D_{c+1} sohasida aniqlangan.
Agar (1) va (2) da n = 1bo'lsa, birinchi tartibli oddiy differensial tenglamaga ega bo'lamiz. Bu holni 1 va 3 – boblarda ko'rganmiz. endi $n \geq 2$ bo'lsin.

1.Avval (2) differensial tenglamani chuqurroq o'rganamiz.

4.1–ta`rif. (4.2) tenglama berilgan bo'lib, $f\left(x,\ y,\ y',\ ....\ ,y^{\ (n-1)}\right)$ funksiya R^{n+1} fazoning D_{n+1} sohasida
aniqlangan bo'lsin. Agar 1 intervalda aniqlangan biror φ(x) funksiya uchun quyidagi uchta

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ.\ \varphi(x)\in C^n\ (1)^{\cdot} \\ 2^\circ.\left(x,\varphi(x),\varphi'\ (x),\ .....\ ,\ \varphi^{n-1}\ (x)\right)\in D_{n+1,}\ \ x\in I; \\ 3^\circ.\ \varphi^{(n)}\ (x)=f\ \left(x,\varphi(x),\ \varphi'\ (x),\ ....\ ,\ \varphi^{(n-1)}\ (x)\right),x\in I; \end{array}\right\} \qquad (3)$$

shart bajarilsa, u holda $\varphi(x)$ funksiya I intervalda (2) differensial tenglamaning yechimi deyiladi.

(2) tenglama yechimining grafigi, ya`ni $y=\varphi(x)$ funksiyaning grafigi, uning integral chizig'i deyiladi.

M i s o l l a r. 1. $y^n+n^2y=C,\ \ D_3=R^2$ tenglama uchun n = 2 bo'lib, $y=\sin\omega x,:=R^1$ funksiya uning yechimidir. Ravshanki, bu holda 4.1 – ta`rifning barcha shartlari bajariladi.

2. $y'''+3y'-2y=0,\ \ D_4=R$ 3 – tartibli differensial tenglama bo'lib, $y=e^x$ funksiya uning $-\infty<x\le+\infty$ intervalda aniqlangan yechimlar.

3. $y'=2yy'$ uchun $D_3=\underline{R}^3$ va $y=tgx$ funksiya $-\dfrac{\pi}{2}<x>\dfrac{\pi}{2}$ intervalda berilgan yechimdir.

Eslatib o'tamizki, birinchi tartibli differensial tenglamalardagi kabi yuqori tartibli differensial tenglamalarda ham yechim ba`zida oshkor $y=\varphi\ (x)$ ko'rinishda yozilsa, ba`zida oshkormas $\Phi\ (x,\ y)=0$ funksiya ko'rinishida yozilishi mumkin. Yechimni ba`zan parametrik ko'rinishda.

$x=\ x(t),\ y=\ y\ (t),\ \ t\in I_t$ (t – parametr)

izlash ham qulay bo'ladi. Biz parametrik ko'rinishda yoziladigan yechimning ta`rifini keltirib o'tirmaymiz.

4.2 – ta`rif. (4.2) differensial tenglama va $x,\ C_1,\ C_2,\ ....\ ,\ C_n$ o'zgaruvchilarning biror o'zgarish sohasida aniqlangan hamda x bo'yicha n marta uzluksiz differensiallanuvchi

$$y=\varphi\ \left(x,\ C_1,\ C_2,\ ....\ ,\ C_n\right) \qquad (4)$$

Funksiya berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $\left(x,\ y,\ y',\ ....\ ,\ y^{(n-1)}\right)\in$
$\in D_{n+1}$ nuqta uchun ushbu

$$\left.\begin{array}{l} y=\varphi\ \left(x,\ C_1,\ C_2,\ ....\ C_n\right), \\ y'=\varphi_x\ \left(\ x,\ C_1,\ C_2,......\ ,C_n\right), \\ .... \\ y^{(n-1)}=\varphi_{x^{n-1}}{}^{(n-1)}\ \ \left(x,\ C_1,\ C_2,\ ....\ C_n\right) \end{array}\right\} \qquad (5)$$

munosabatlar $C_1,\ C_2,\ ....\ C_n$ larning

$$\left.\begin{array}{l} C_1=\varphi_1\left(x,\ y,\ y',\ ....\ ,\ y^{(n-1)}\right), \\ C_2=\varphi_2\left(x,\ y,\ y',\ ....\ ,\ y^{(n-1)}\right) \\ .... \\ \dot{C}_n=\varphi_n\left(x,\ y,\ y',\ ....\ ,\ y^{(n-1)}\right) \end{array}\right\} \qquad (6)$$

qiymatlarini bir qiymatli aniqlasa va bu qiymatlarni ushbu

$$y^{(n)}=\varphi^{(n)}{}_{x^n}\ \left(x,\ C_1,\ C_2,\ ....\ ,\ C_n\right) \qquad (7)$$

tenglikka quyish natijasida aynan (2) tenglama hosil bo'lsa, u holda (4) funksiya (2) tenglamaning $D_{(n+1)}$ sohada aniqlangan umumiy yechim deyiladi.

SHunday qilib, (2) differensial tenglamaning umumiy yechimi n ta ixtiyoriy o'zgarmas sonni uz ichiga oladi.

(2) differensial tenglamaning barcha yechimlarini topish asosiy masaladir. Umumiy yechim formulasi (4.4) ni olaylik. Unda $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ larga ma`lum qiymatlar bersak, tegishli yechim hosil bo'ladi. Umuman aytganda (2) tenglamaning (4) formula o'z ichiga olmagan yechimlari ham bo'lishi mumkin. Bunday yechimlar maxsus yechimlar deyiladi. Bu tasdiqning dalili sifatida ikkita misol ko'ramiz.

M i s o l l a r. 1. $y^n = x,\ D_3 = \underline{R}^3$ tenglama uchun $y = \dfrac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$ funksiya umumiy yechim bo'ladi. Haqiqatan, $y' = \dfrac{x^2}{2} + C_1,\ y^n = x$ hosilalardan oxirgisida C_1 va C_2 lar qatnashmaydi, u munosabat berilgan tenglama bilan ustma – ust tushadi. Umumiy yechim formulasi tenglamaning barcha yechimlarini o'z ichiga oladi.

2. $y^n = \dfrac{(y')^2}{y},\ D_3 = \left\{(x, y, y') \vdots -\infty < x < +\infty, y > 0, -\infty < y' < +\infty\right\}$

Differensial tenglama uchun $y = e^{C_1 x + C_2}$ funksiya umumiy yechim bo'ladi. Haqiqatan, $y' = C_1 e^{C_1 x + C_2},\ y^n = C^2{}_1 e^{C_1 x + C_2}$ yoki $y' = C_1 y,\ \ y^n = C_1{}^2 y = \left(\dfrac{y'}{y}\right)^2 y = \dfrac{(y')^2}{y}$. Bu oxirgi munosabat berilgan differensial tenglama bilan ustma – ust tushadi. Ammo umumiy yechim formulasi berilgan tenglamaning barcha yechimlarini o'z ichiga olmaydi. Ko'rilayotgan holda $y = C(C = const \neq 0)$ funksiya ham yechimdir. Bu yechim umumiy yechim formulasi $y = e^{C_1 x + C_2}$ dan C_1 va C_2 larning bironta ham qiymatida hosil bo'lmaydi. Shunday qilib, $y = C \neq 0$ yechim maxsus yechim bo'ladi.

(2) differensial tenglamaning uning umumiy yechimi formulasi (4) dan $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ larga qiymatlar berib hosil qiladigan har bir yechim (2) tenglamaning xususiy yechimi deyiladi.

Xususiy yechimni izlash Koshi masalasining yechimini izlashga keladi.

Agar (2) tenglama, $\left(x_0, y_0, Y_0', \ldots\ldots, y_0^{(n-1)}\right) \in D_{n+1}$ nuqta va ushbu

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (8)$$

munosabatlar berilgan bo'lsa, (2) differensial tenglamaning (8) tengliklarni qanoatlantiradigan yechimini izlash (2) tenglama uchun Koshi masalasi deyiladi. Unda (8) tengliklar boshlang'ich shart, $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ qiymatlar esa boshlang'ich qiymatlar deb yuritiladi. $n = 2$ bo'lganda Koshi masalasi aniq geometrikma`noga ega.Masalan; $y^n = f(x, y, y')$ tenglama uchn $y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_0'$ shartni qanoatlantiruvchi integral chiziq tegishli sohaning (x_0, y_0) nuqtasidan berilgan y_0' burchak koeffisientli urinma bilan o'tishi lozim.

Agar (2) differensial tenglamaning umumiy yechimi (4) ma`lum bo'lsa, tegishli Koshi masalasini yechish uchun Ushbu

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x_0, C_1, C_2, \ldots\ldots C_n) = y_0, \\ \varphi'(x_0, C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n) = y_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \ldots\ldots C_n) = y_0^{(n-1)}\end{array}\right\} \qquad (9)$$

Tenglamalar sistemasini $C_1, C_2, ... C_n$ larga nisbatan yechish kerak bo'ladi. Bu sistema yagona yechimga ega bo'lishi, bittadan ortiq yechimga ega bo'lishi yoki umuman yechimga ega bo'lmasligi mumkin.(4.9) sistema yagona yechimga ega bo'lganda (4.2), (4.8) Koshi masalasida yagonalik buzilgan bo'ladi.

Agar (4.2) differensial tenglamaning xususiy yechimi $\Phi(x, y) = 0$ ko'rinishda berilsa, bu munosabat berilgan differensial tenglamaning integrali deb ataladi. Agar umumiy yechim $\Phi(x, y, C_1, C_2, ... , C_n) = 0$ ko'rinishda yozilgan bo'lsa, bu munosabat (4.2) tenglamaning umumiy integrali deyiladi.

(4.2) differensial tenglamaning barcha (xususiy va maxsus) yechimlarini topish differensial tenglamani integrallash jarayoni bo'ladi. Tenglamani integrallash jarayoni aniqmas integrallarni hisoblashga kelganda differensial tenglama kvadraturalarda integrallanadi deyiladi.

Endi yuqorida keltirilgan ta`riflarga misol ko'raylik.

M i s o l. $y'' + \omega^2 y = 0$ differensial tenglama ikkinchisi tartibli bo'lib, uning yechimi $y = C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x$ bo'ladi.

Agar $y'' + \omega^2 y = 0$ differensial tenglama uchun $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$ boshlang'ich shartni qanoatlantiradigan yechimni topish talab qilinsa, umumiy yechimdan foydalanib, $1 = y(0) = C_1 \vdots -1 = y'(0) = C_2\omega$ tengliklarni hosil qilamiz. Bundan:

$C_1 = 1 =;\ C_2 \dfrac{1}{\omega},\ \omega \neq 0$. Demak, aniqlangan (yagona) yechim $y = \cos\omega x - \dfrac{1}{\omega} \sin\omega x$. bo'ladi.

2. Endi (.2) differensial tenglama uchun yechimning mavjudlikka yagonalik teoremalarini keltiramiz.

4.1 – teorema (Koshi teoramasi): kasr (2) differensial tenglamada Ushbu $f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right),\ \dfrac{df}{dy},\ \dfrac{df}{dy}, ... , \dfrac{df}{dy^{(n-1)}}$ funksiyalar $D_{n+1} \subset \underline{R}^{n+1}$ sohada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda:

1°. (4.2) differensial tenglamaning biror I intervalda aniqlangan, $y(x_0) = y_0,\quad y'(x_0) = y'_0,\quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)'}\ \left(x_0, y_0, y'_0, ... , y_0^{(n-1)}\right) \in D_{n+1}$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud.

2°. Agar $\varphi(x),\ x \in I_1$ va $\psi(x),\ x \in I_2$ funksiyalarning har biri (4.2) differensial tenglamaning yechimi bo'lib, berilgan x_0 uchun $\varphi(x_0) = \psi(x_0),\ \varphi'(x_0) = \psi'(x_0),\ ..... , \psi^{(n-1)}(x_0)$ bo'lsa, $\varphi(x)$ va $\varphi(x)$ yechimlar aniqlanish sohalarining umumiy qismida ustma – ust tushadi. Boshqacha aytganda, agar $x_0 \in I_1 \cap I_2$ nuqtada $\varphi^{(1)}(x_0) = \psi^{(1)}(x_0),\ i = 0,1,...., n-1$ bo'lsa, u holda $I_1 \cap I_2$ intervalda $\varphi(x) \equiv \varphi(x)$ bo'ladi.

4.3 – ta`rif. Agar $f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ funksiya $D_{n+1} \subset \underline{R}^{n+1}$ sohada barcha argumentlar bo'yicha aniqlangan uzluksiz bo'lib, bu funksiya uchun shunday musbat L son mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy

$\left(x, y_1, y'_1, ..., y_1^{(n-1)}\right) \in D_{n+1},\ \left(x_1, y_2, y'_2, ..., y_2^{(n-1)}\right) \in D_{n+1}$ nuqtalar uchun ushbu

$$f\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}\right) - f\left(x_1, y_2, y_2', ..., y_2^{(n-1)}\right)| \le \qquad (L)$$

$$\le L \sum_{i=0}^{n-1} | y_1'^{(1)} - y_2^{(1)} |),$$

$$y_1^{(0)} = y_1, y_2^{(0)} = y_2, L > 0$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ funksiya D_{n+1} sohada $y, y', ..., y^{(n-1)}$ lar bo'yicha Lipshits shartini qanoatlantiradi deyiladi, L esa Lipshits o'zgarmasi deyiladi.

Agar $(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ funksiya $D_{n+1} \subset \underline{R}^{n+1}$ sohada barcha argumentlari bo'yicha aniqlangan va uzluksiz bo'lib, shu D_{n+1} sohada $y, y', ..., y^{(n-1)}$ lar bo'yicha Lipshits shartini qanoatlantirsa, u holda shunday o'zgarmas $h > 0$ son topiladiki, natijada (4.2) tenglamaning $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right) \in D_{(n+1)}$ bo'lganda (4.8) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan va $I = \left\{x : |x - x_0| \le h\right\}$ intervalda aniqlangan yagona yechimi mavjud bo'ladi.

4.3 – teorema. Agar $f\left(x, y, y', ..., y_0^{(n-1)}\right)$ funksiya D_{n+1} sohada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right) \in D_{(n+1)}$ bo'lsa, u holda (2) differensial tenglamaning (4.8) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan kamida bitta yechimi mavjud.

4.2 teoremaning isboti. Isbot ikki qismdan iborat: avval (2) tenglamaning (4.8) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan va I yopiq intervalda aniqlangan yechimining mavjudligini, so'ngra bu yechimning yagonaligini isbotlaymiz.

Datsavval ba`zi yordamchi mulohazalar yuritamiz. D_{n+1} sohada (n+1) o'lchovli yopiq.

$$P = \left\{\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b, ..., |y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| \le b\right\}$$

parallelepipedni ko'ramiz. D_{n+1} sohada uzluksiz bo'lgan $f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ funksiya $P = D_{n+1}$ da ham uzluksiz bo'ladi. R yopiq bo'lgani uchun $f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ funksiya unda chegaralangan bo'ladi. Shuning uchun

$$\max_{\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) \in P} \left| f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) \right| = \mathrm{M}, \ |\mathrm{M}| > 0$$

deylik. Shu R parallelepipedning ixtiyoriy $\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}\right)$ va $\left(x, y_2, y_2', ..., y_2^{(n-1)}\right)$ nuqtalari uchun (L) tengsizligining bajarilishi ravshan (4.2 – teoremaning shartiga ko'ra). Qayd qilamizki, $\left(x, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right)$ nuqta R parallelepipedning markazidan iborat. endi (4.2) differensial tenglamaning (8) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan va yopiq $|x - x_0| \le h, \ h \le a$ intervalda aniqlangan yagona yechimning mavjudligini isbotlaymiz. Buning uchun avval (2) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx}=y\\
&\frac{d}{dx}(y')=y'',\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{d}{dx}\left(y^{(n-2)}\right)=y^{(n-1)},\\
&\frac{d}{dx}\left(y^{(n-1)}\right)=f\left(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

3. Bu punktda yuqori hosilaga nisbatan yechilmagan (4.1) differensial tenglamani o'rganamiz.

4.4 – ta`rif. (4.1) differensial tenglama berilgan bo'lib, $F\left(x,y,y',\dots,y^{(n)}\right)$ funksiya R^{n+1} fazoning biror ochiq D_{n+2} to'plamida aniqlangan bo'lsin. Agar I intervalda aniqlangan $\varphi(x)$ funksiya uchun quyidagi uchta shart.

$1^\circ.\varphi(x)\in C^n(\mathrm{I})$;

$2^\circ.\ (x,\varphi(x))\in D_2,\ (x,\varphi(x),\varphi'(x),\ \dots,\ \varphi^n(x))\in D_{n+2}, D_2\subset R_2,\ x\in \mathrm{I}$;

$3^\circ.F\,(x,\varphi(x))\in D_2,\ (x,\varphi(x),\varphi'(x),\ \dots,\ \varphi^{(n)}(x))=0,\ x\in \mathrm{I}$

bajarilsa, u holda funksiya I intervalda (4.1) differensial tenglamaning yechimi deyiladi.
Har bir yechimning grafigi tenglamaning integral egri chizig'i (qisqagina, integral chizig'i) deyiladi va uning grafigi R tekislikning biror D_2 to'plamida chiziladi.
Birinchi tartibli differensial tenglamalardagi kabi bu holda ham yechim parametrik ko'rinishda yozilishi yoki izlanishi mumkin.
Agar (4.1) differensial tenglama $y^{(n)}$ ga nisbatan bir qiymatli yechilsa, (2) differensial tenglamaga kelamiz. Umuman aytganda, (2) differensial tenglama $y^{(n)}$ ning bir necha, hatto cheksiz ko'p qiymatini aniqlashi mumkin. Jumladan, $(y'')^2-x^4=0,\ x>0$ differensial tenglama y'' ning ikkita $y''=\pm x^2$ qiymatini $y''+|y''|=0$ differensial tenglama esa y'' ning $-\infty<y''\le 0$ intervalni qoplaydigan qiymatlarini aniqlaydi.
Tekshirib ko'rish mumkinki, bu tenglamalar uchun $y=\pm\dfrac{x^2}{12}$,

$-\infty<x<+\infty$ va $y=\dfrac{ax^2}{2}$ lar mos ravishda (a - ixtiyoriy haqiqiy son) yechim bo'ladi.

(4.1) differensial tenglama uchun ham Koshi masalasini qo'yish mumkin:(4.1)differensial tenglama

$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \dots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

(1) differensial tenglama $y^{(n)}$ga nisbatan yechilishi mumkin deylik. U holda $\mathrm{M}_0=\left(x_0,y_0,y_0',\dots,y_0^{(n-1)}\right)\in D_{n+1}$ nuqtaning biror atrofida ushbu

$$y^n=f_k\left(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}\right), k=1,\ 2,\dots\dots\qquad(17)$$

Munosabatlarga ega bo'lamiz. Agar (17) differensial tenglamalarning har biri uchun yechimning mavjudlik va yagonalik teoremasining shartlari bajarilsa, u holda M nuqtada Koshi masalasi yagona yechimga ega deyiladi.

4.4 – t e o r e m a. Agar (4.1) differensial tenglama $F\left(x,y,y',\dots,y^{(n)}\right)$ funksiya uchun ikki shart

1. $F\left(x_0,y_0,y_0',\dots,y_0^{(n-1)},\ y^{(n)}\right)=0$

biror haqiqiy ishiga y_0 uchun $\left(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)}\right) \in D_{n+2}$ nuqtasining biror yopiq $\overline{D^{\circ}}$ atrofida $F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right)$ funksiya uzluksiz va 1 – tartibli uzluksiz hosilalarga ega;

2. $\dfrac{dF\left(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)}\right)}{[dy^{(n)}} \neq 0$

bajarilsa, u holda shunday musbat h son mavjud bo'ladiki, (4.1) differensial tenglamaning $|x - x_0| < 0$ intervalda aniqlangan, (4.8) shartni va yana $y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}$ munosabatni qanoatlantiradigan yagona $y = y(x)$ yechimi mavjud.

Bu teorema. 3.1 – teoremaga o'xshash isbotlanadi.

4.1 – natija. 4.4. teoremaga ko'ra $\left(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)}\right)$ nuqtaning $\overline{D^{\circ}}$ atrofida $\dfrac{dF\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right)}{dy^{(n)}} \neq 0, \left|\dfrac{dF}{dy^{(n)}}\right| \leq \text{A}, \ i = 0, 1, \dots, n-1.$ Demak, yagonalik buziladigan nuqtalar to'plami

$$F = 0, \ \frac{dF}{dy^{(n)}} = 0$$

munosabatlarni qanoatlantiradi. Tegishli nuqtalar maxsus nuqtalar deyiladi. Yuqori hosilaga nisbatan yechilmagan (1) differensial tenglamaning har bir nuqtasida yagonalik buziladigan yechimi uning maxsus yechimi deyiladi. Maxsus nuqtalar to'plami maxsus bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin. Maxsus yechimning grafigi maxsus integral chiziq deyiladi.

4.5 – t a ` r i f. (4.1) differensial tenglama $\left(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)}\right)$ nuqtaning biror atrofida $y^{(n)}$ ga nisbatan yechilishi, ya`ni (17) tenglamalarga ajratilishi mumkin deylik. Agar har bir (4.17) tenglama

$$y = \varphi_k\left(x, C_1, C_2, \dots, C_n\right), \ k = 1, 2, \dots \qquad (18)$$

ko'rinishda umumiy yechimga (yoki

$$\Phi_k\left(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n\right) = 0, \ k = 1, 2, \dots \qquad (19)$$

umumiy integralga) ega bo'lsa, u holda (4.18) umumiy yechimlar to'plami (yoki (19) umumiy integrallar to'plami) (4.1) differensial tenglamaning umumiy yechimi (yoki umumiy integrali) deyiladi.

M i s o l l a r. 1. $(y'')^2 - x^4 = 0, x > 0$ differensial tenglama uchun ixtiyoriy $\left(x_0, y_0, y_0', y_0\right), \ y_0 \neq 0$ nuqta atrofida ikkita $y'' = x^2, \ y'' = -x^2$ differensial tenglamaga egamiz. Mos ravishda ularning yechimlari

$$y = \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2 x, \quad y = -\frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2 x.$$

Ular birgalikda tenglamaning umumiy yechimini beradi.

2. $\cos y'' = U$ differensial tenglama uchun $y'' = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi.$ k – butun son.

Undan $y'' = \left(\pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\dfrac{\pi}{2} + C_1 x + C_2$ endi k ga barcha qiymatlar berib, umumiy yechimlar to'plamini olsak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi chiqadi.

Noma`lum funksiya qatnashmagan yuqori tartibli differensial tenglamalar.

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

(1) tenglamani integrallash uchun

$y^{(k)} = z$ (2) almashtirishni olamiz.

Bundan $y^{(k+1)} = z'$ $y^{(k+2)} = z'', \dots, y^{(n)} = z^{(n-k)}$

Bularga asosan (1) tenglamani

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0 \qquad (3)$$

ko'rinishga keltiramiz.
Faraz etamiz (3) tenglamaning umumiy integrali

$$\phi(x, z, c_1, c_2, \ldots c_{n-k}) = 0 \qquad (4)$$

bo'lsin.
Bundagi z o'rniga (2) dan uning qiymatini keltirib qo'ysak

$$\phi(y^{(k)}, x, c_1, c_2, \ldots c_{n-k}) = 0 \qquad (5)$$

ga ega bo'lamiz. Bu (1) tenglamaning oraliq integralidir.
Agar (5) ni $y^{(k)}$ ga nisbatan yechsak

$$y^{(k)} = f(x, c_1, c_2, \ldots c_{n-k})$$

birinchi tipdagi differensial tenglamaga ega bo'lamiz.
Bu tenglamani k- marta ketma-ket integrallash natijasida (1) tenglamaning umumiy yechimi.

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots c_{n-k}, \ldots, c_n)$$

ga ega bo'lamiz.

Misol. $4y' + y'^2 = 4xy''$

$$y' = z, \qquad y'' = z' \qquad 4z + z^2 = 4xz'$$

$$\frac{4dz}{4z + z^2} = \frac{dx}{x} \qquad \ell nx + \ell nc_1 = 4\int \frac{dz}{(z+2)^2 - 4} = \ell n\frac{(z+2) - 2}{(z+2) + 2}$$

$$c_1 x = \frac{z}{z+4} \qquad z = c_1 xz + 4c_1 x \qquad z = \frac{4c_1 x}{1 - c_1 x} \qquad y' = \frac{4c_1 x}{1 - c_1 x}$$

$$y = 4\int \frac{c_1 x}{1 - c_1 x} dx + c_2 = 4\int \left(\frac{1}{1 - c_1 x} - 1 \right) dx + c_2 = -\frac{4}{c_1} \ell n|1 - c_1 x| - 4x + c_2$$

Argument qatnashmagan yuqori tartibli differensial tenglamalar

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

Bunday ko'rinishdagi tenglamada u ni argument, y' ni funksiya uchun qabul qilib $y' = p$ almashtirish yordamida tenglama tartibini 1 taga pasaytirish mumkin. Buning uchun u dan x bo'yicha olingan

$y', y'', \ldots y^{(n)}$ hosilalarni p dan y ga nisbatan olingan hosilalar bilan almashtiramiz:

$$p = p(y)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = p; \qquad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy} \right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dx} \right) \cdot \frac{dy}{dx} = p\left[\left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + p\frac{d^2 p}{dy^2} \right]$$

....

$$y^{(n)} = p\omega(p, p', p'', \ldots, p^{(n-1)})$$

Butopilganqiymatlarni (1) tenglamagaqo'ysak, quyidagigaegabo'lamiz:

$$F(y, p, pp_y^1, \ldots, p\omega(p, p', p'', \ldots, p^{(n-1)}) = 0 \qquad (2)$$

farazetaylik (2) tenglamaningumumiyintegrali

$\phi(y, p, c_1 c_2, .., c_{n-1}) = 0$ nirganisbatanyechishmumkinbo'lsin:

$p = \varphi(y, c_1, c_2, ..., c_{n-1})$

bundan $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, c_1, c_2, ..c_{n-1})$ $\qquad dy = \varphi(y, c_1, c_2, ..., c_{n-1})dx$

$$\frac{dy}{\varphi(y, c_1, c_2, .., c_{n-1})} = dx \qquad x + c_n = \int \frac{dy}{\varphi(y, c_1, c_2, ..c_{n-1})}$$

Bu (1) tenglamaning umumiy integralidir.

Misol. $\qquad 1 + y'^2 = 2yy'' \qquad y' = p \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$

$$1 + p^2 = 2yp\frac{dp}{dy} \qquad \frac{dy}{y} = \frac{2pdp}{1+p^2} \qquad \ell ny + \ell nc_1 = \ell n(1 + p^2)$$

$$1 + p^2 = c_1 y \qquad p^2 = c_1 y - 1 \qquad p = \sqrt{c_1 y - 1} \qquad \frac{dy}{dx} = \sqrt{c_1 y - 1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{c_1 y - 1}} = dx \qquad \frac{2}{c_1}\sqrt{c_1 y - 1} = x + c_2 \qquad 4(c_1 y - 1) = c_1^2 (x + c_2)^2$$

12- mavzu. Yuqori tartibli tenglamalarning tartibini pasaytirish. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. $n-$tartibli differentsial tenglamalar.
2. Yuqori tartibli tenglamalarning tartibini pasaytirish.

1. $y^n = f(x)$ **ko'rinishdagi tenglama.** Mavjudlik va yagonalik teoremasining shartlari bajarilishi uchun $f(x)$ funksiya biror I intervalda uzluksiz bo'lish etarli. Shunday deb faraz etaylik. U holda differensial tenglamani n marta ketma – ket integrallab, umumiy yechimni topish mumkin:

$$y(x) = \underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\dots\int_{x_0}^{x}}_{n\,ma} f(x)\underbrace{dx\,dx\dots dx} + \frac{C_1}{(n-1)!}(x - x_0)^{(n-1)} +$$

$$+\frac{C_2}{(n-2)!}(x - x_0)^{(n-2)} + C_{(n-1)}(x - x_0)^{(n-1)} + C_n$$

Buni matematik analizdagi Dirixle formulasi yordamida soddaroq

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)|}\int_{x_0}^{x} f(z)(x - z)^{n-1}dz + \frac{C_1}{(n-1)!}(x - x_0)^{(n-1)} + C_1$$

(4.20)

ko'rinishda yozish mumkin. (4.20) formula $y^n = f(x)$ tenglamaning barcha yechimlarini o'z ichiga oladi va umumiy yechim bo'ladi. Maxsus yechimlar yo'k. Koshi masalasining yechimi bunday yoziladi:

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)|}\int_{x_0}^{x}(x - z)^{(n-1)} f(z)dz + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \dots + y_0(x - z_0) + y^0$$

Bu formulada $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ miqdorlarni ixtiyoriy deb qarash mumkin. U holda bu formula Koshi formulasidagi umumiy yechim bo'ladi.

2. $F\left(x, y^{(n)}\right)=0$ **ko'rinishdagi tenglama**. Agar bu tenglamani $y^{(n)}$ ga nisbatan yechish mumkin bo'lsa (ya`ni $y^{(n-1)} = f_{,}(x),\ k=1,2,\dots$) u holda bu $F\left(x, y^{(n)}\right)=0$ tenglamalarni integrallab, berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

tenglama ga nisbatan yechilmasin deylik. x va $y^{(n)}$ lar parametrik ko'rinishda yozilishi mumkin, deb faraz etamiz, ya`ni $x=\phi(t),\ y^{(n)}=x(t)$. U holda $dy^{(n-1)}=y^{(n)}\ dx$ ga ko'ra $dy^{(n-1)}=x(t)\phi'(t)\vdots dt$. Bundan:

$y^{(n-1)}=x_1(t, C_1), y^{(n-2)}=x_2(t, C_1, C_2), \dots\dots, y=x_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n),$

Shunday qilib, umumiy yechim $x=\phi(t), y=x_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n)$, bo'ladi.

3. $F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right)=0$ **ko'rinishdagi tenglama.** a) Tenglamani $y^{(n)}$ga nisbatan yechish mumkin bo'lsin: $y^{(n)}=f\left(y^{(n-1)}\right)$. Agar $z=y^{(n-1)}$ desak, $z'=f(z)$ ga kelamiz.Bu o'zgaruvchilari ajraladigan birinchi tartibli differensial tenglama. Uning yechimi $x=C_1+\int\frac{dz}{f(z)}$ bo'ladi. Bu tenglik $z$ga nisbatan yechilishi mumkin bo'lish ham, bo'lmasligi ham mumkin. Agar uni $z$ga nisbatan yechish mumkin bo'lsa (ya`ni $z=\varphi_1(x, C_1)$), u holda $y^{(n-1)}=\varphi_1(x, \quad C_1)$ dan $y=\phi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$umumiy kelib chiqadi. Mabodo yuqoridagi tenglik $z$ga nisbatan yechilmasa, parametr kiritish usulidan foydalaniladi.

b) Tenglamani $y^{(n)}$ ga nisbatan yechish mumkin emas, ammo $y^{(n)}=x(t), y^{(n-1)}=\varphi(t)$- parametrik ifoda ma`lum deylik. U holda $dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx$ dan $\mathrm{dx}=\frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}}=\frac{\varphi(t)dt}{x(t)}$ va $\mathrm{x}=\int\frac{\varphi(\mathrm{t})dt}{x(t)}+C_1$ kelib chiqadi. endi $\mathrm{dy}^{(\mathrm{n}\text{-}2)}=y^{(n-1)}dx$ dan $\mathrm{d}y^{(n-2)}=\int y^{(n-1)}dx+C_2=\int\varphi(t).\ \frac{\varphi'(t)}{x(t)}dt+C_2$ -ni hosil qilamiz. Shunga o'xshash muloxazalar yuritib, $dy^{(n-3)}=y^{(n-2)}dx, \dots, \mathrm{dy}=\mathrm{y}\mathrm{dx}$

tengliklarni integrallaymiz va $y=\int y'\,dx+\mathrm{C}_2$ dan u uchun parametrik ifodani topamiz. Ma`lumki, x ning parametrik ifodasida bitta (C_1) ixtiyoriy o'zgarmas, $\mathrm{y}^{(\mathrm{n}\text{-}2)}$da ham bitta (C_2), $y^{(n-3)}$ da ikkita $(C_2\ \textit{в}a\ \mathrm{C}_2), \dots\dots, y^{n-(n-1)}$ da n – 2 ta, u da esa n – 1 ta ixtiyoriy o'zgarmas qatnashadi. U holda x va u larning parametrik ifodalarida n ta ixtiyoriy o'zgarmas qatnashadi. Demak,

$$\mathrm{x}=\int\frac{\varphi'(\mathrm{t})dt}{x(t)}+C_1,\ y=\int y'\,dx+C$$

umumiy yechim bo'ladi.

4. $F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right)=0$ **ko'rinishdagi tenglama**. Ushbu $y^{(n-2)}=z$ almashtirish berilgan tenglamani $F\ (z, z'')=0$ ko'rinishga olib keladi.

a) Oxirgi tenglamani z''ga nisbatan yechish mumkin bo'lsin: $z''=f(z)$. Bu tenglama 1 – punktda ko'rilgan usul bilan integrallanadi. Boshqacha usuli quyidagicha: uning ikki tomonini $2z''$ga ko'paytirsak, $d\,(z')^2=2f(z)dz$ bo'ladi, undan $(z')^2=2\int f(z)dz+C_1$ kelib chiqadi. endi uni integrallab, ushbu

$\int \frac{dz}{\pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} = x + C_2$ formulaga kelamiz. z o'rniga $y^{(n-2)}$ni qo'ysak, $\Phi(y^{(n-2)}, x, C_1, \quad C_2) = 0$. bu tenglama 2 – puktda ko'rilgan differensial tenglama ko'rinishiga o'xshash. Uni integrallasak, yana n – 2 ta ixtiyoriy o'zgarmas qatnashadi va berilgan tenglamaning umumiy yechimi hosil bo'ladi.

b) Berilgan tenglama $y^{(n)}$ ga nisbatan yechilmasin, ammo $y^{(n-2)} = \varphi(t),\ y^{(n)} = x(t)$– parametrik ifoda ma`lum deylik. Ma`lumki, $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx,\ dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx$. Bu tengliklardan $\frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{dy^{(n-2)}}{y^{(n-1)}}$ yoki $y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = y^{(n)}\ \mathrm{dy}^{(\mathrm{n}-2)} = x(t)\varphi'(t)dt$ munosabat kelib chiqadi. Bundan $y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int x(t)\varphi'(t)dt + C_2}$. keyingi muloxazalar 2 – puktdagi kabi bo'ladi. x uchun topiladigan ifoda ikki ixtiyoriy o'zgarmas $(C_2\ \textit{ва}\ \mathrm{C}_2)$ qatnashadi. Oxirgi tenglamani ketma – ket integrallab borsak, yana $(C_3\ \mathrm{C}_4),......, C_n$ – ixtiyoriy o'zgarmaslar ishtirok yetadi. Umumiy yechimni bunday yozish mumkin: $x = \int \frac{dy^{(n-2)}}{y^{(n-1)}} + C_1 = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\pm\sqrt{2\int x(t)\varphi'(t)dt + C_2}} + C_1, .$

5. $F\left(y^{(n)}\right) = \left(y^{(n)}\right)^2 + a_1\,(y)^{n-1} + ... + a_{n-1}\left(y^{(n)}\right) + a_n = 0, a_1 = const,\ i = 1,2,....\ , s$

n ko'rinishdagi tenglama. Bu differensial tenglamani $y^{(n)}$ga nisbatan k – tartibli algebraik tenglama deb qaraymiz. Uning haqiqiy ildizlari $\mathrm{P}_1, P_2, ..., P_3, s \le k$ bo'lsin. U holda $y^{(n)} = \mathrm{P}_1,\ \mathrm{j} = 1\ ,\ 2,\ .....\ , s$ differensial tenglamani marta integrallasak,

$$\mathrm{y} = \mathrm{P}_{\mathrm{i}}\frac{x^n}{n} + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)^2} + ... + C_{n-2}\frac{x^3}{21} + C_{n-1}x + C_n$$

kelib chiqadi. Undan;

$$\mathrm{P}_{\mathrm{i}} = \frac{n1}{\mathrm{x}^{\mathrm{x}}}\left(y - C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)1} - ... - C_{n-1}x - C_n\right)$$

Shu topilgan P_i ni berilgan tenglamaga $y^{(n)}$ o'rniga qo'ysak, uning umumiy yechimi

$$\mathrm{F} = \left(\frac{n1}{\mathrm{x}^{\mathrm{x}}}\left(y - C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)1} - ... - C_{n-1}x - C_n\right)\right) = 0$$

hosil bo'ladi. Agar

$$\left(\mathrm{y}^{(\mathrm{n})}\right)'' + a_1\left(x,\ y,\ y',\ .....\ , y^{(n-1)}\right)\left(\mathrm{y}^{(\mathrm{n})}\right)^{k-1} + ... + a_{k-1}$$
$$\left(x,\ y,\ y',\ .....\ , y^{(n-1)}\right)y^{(n)} + a_k\left(x,\ y,\ y',\ .....\ , y^{(n-1)}\right) = 0,\ a \in C(D_{n+1})$$

differensial tenglama ko'rilsa, u holda uni ga ko'ra k – tartibli algebraik tenglama deb qarash mumkin. Agar haqiqiy ildizlarni topish mumkin bo'lsa, u holda Ushbu yuqori hosilaga nisbatan yechilgan

$$y^{(n)} = p_1\left(x,\ y,\ y', ..., y^{(n-1)}\right),\ i = 1,\ 2,\ ....\ , s, s \le k$$

tenglamalarga ega bo'lamiz.

6.Oraliq integrallari

n- nchi tartibli

$$F(x, y, y', y'', ..y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

differensial tenglama berilgan bo'lsin.

Ma`lumki, bu tenglamaning umumiy integrali x,u va ixtiyoriy n ta $c_1, c_2, \ldots, c_n$ o'zgarmas sonlar orasidagi

$$\phi(x, y, c_1, c_2 \ldots c_n) = 0 \qquad (2)$$

bog'lanishdan iborat edi.

Boshqacha qilib aytganda (2) tenglik va undan x ga nisbatan ketma-ket olingan n ta hosilalaridan tuzilgan tenglamalar sistemasidan ixtiyoriy o'zgarmas $c_i\,(i = \overline{1, n})$ larni yo'qotish natijasida (1) tenglama hosil bo'lsa, (2) ifodaga (1) ning umumiy integrali deyiladi.

Faraz etaylik $\psi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(k)}, c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n) = 0 \qquad (3)$

ifoda berilgan bo'lsin.

Bunda $c_i\,(i = \overline{k+1, n})$ ixtiyoriy o'zgarmas sonlar (3) ni x ga nisbatan ketma-ket n-k marta differensiallaymiz.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y' + \frac{\partial \psi}{\partial y'} y'' + \ldots\ldots + \frac{\partial \psi}{\partial y^{(k)}} y^{(k+1)} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^{n-k} \psi}{\partial x^{n-k}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial \psi}{\partial y^{(k)}} y^{(n)} = 0$$

n-k+1 ta (3) va (4) tenglamalardan n-k ta c_i $(i = \overline{k+1, n})$ ixtiyoriy o'zgarmas sonlarni yo'qotish natijasida (1) tenglama hosil bo'lsa (3) ga (1) tenglamaning oraliq integrali deyiladi.

Agar oraliq integrali bitta ixtiyoriy o'zgarmas c_1 ga bog'liq bo'lsa, ya`ni

$$\psi(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n-1)}, c_1) = 0$$

bunga (1) differensial tenglamaning birinchi integrali deyiladi.

Agar (3) ifodani differensial tenglama deb qarasak, uning o'zi ham k nchi tartibli differensial tenglamadan iborat bo'ladi. Bu tenglamaning har qanday yechimi (1) tenglamaning ham yechimi bo'ladi.

Haqiqatdan ham $y = y(x)$ (3) tenglamaning yechimi bo'lsa, u (3) va (4) tenglamalarni ayniyatga aylantiradi. (1) esa (3) va (4) ning natijasi bo'lgani sababli, bu funksiya (1) ni ham qanoatlantiradi. Ya`ni u (1) ning ham yechimi bo'ladi.

Agar (3) ni x ga nisbatan k marta ketma-ket integrallasak, uning umumiy integralida $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots c_n$ ixtiyoriy sonlardan tashkari

$c_1, c_2, \ldots c_k$ ixtiyoriy o'zgarmas sonlar ham qatnashadi.

Yuqorida aytilganlarga asosan bu umumiy integral, (1) tenglamaning ham umumiy integrali bo'ladi.

Demak (1) differensial tenglama (3) ko'rinishdagi oraliq integraliga ega bo'lsa, uni integrallash masalasi k – nchi tartibli differensial tenglamaning integrallash masalasiga keltiriladi.

Tenglamaning chap tomoni biror funksiyaning hosilasiga teng bo'lgan differensial tenglamalar

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

tenglamaning chap tomonidagi funksiya $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$ o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan $\phi(x, y, y^1, \ldots, y^{(n-1)})$ funksiyadan x bo'yicha olingan hosilasiga teng bo'lsin ya`ni $\frac{d}{dx}\phi(x, y, y', ..y^{(n-1)}) = F(x, y, y', ...y^{(n)})$

Uholda (1) ga asosan keyingi tenglamadan

$$\frac{d}{dx}\phi(x, y, y^1, y''.., y^{(n-1)}) = 0$$

ga ega bo'lamiz.

Bundan

$\phi(x, y, y', y'',.., y^{(n-1)}) = c_1$ bo'ladi

ya`ni berilgan tenglamaning tartibi 1 taga pasaydi.

Misol $y'' - xy' - y = 0$ $\qquad \phi = y' - xy$

$$\frac{d}{dx}(y' - xy) = 0 \qquad y' - xy = c_1 \qquad y = \ell^{\frac{x^2}{2}}\left[c_1\int \ell^{-\frac{x^2}{2}}dx + c_2\right]$$

Butenglamaningumumiyyechimidir.

13- mavzu. O`zgaruvchilariga nisbatan bir jinsli va umumlashgan bir jinsli yuqori tartibli tenglamalarni integrallash. (2 soat)

Reja:

1. O`zgaruvchilariga nisbatan bir jinsli va umumlashgan bir jinsli yuqori tartibli tenglamalar.
2. O`zgaruvchilariga nisbatan bir jinsli va umumlashgan bir jinsli yuqori tartibli tenglamalarni integrallash.

$$F(x, y, y', y'',..y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

tenglamada F funksiya noma`lum funksiya va uning hosilalariga nisbatan bir jinsli bo'lsin. Ya`ni har qanday $t > 0$ uchun

$$F(x, ty, ty', ty'',..ty^{(n)}) \equiv t^m F(x, y, y', y'',...y^{(n)})$$

ayniyati bajarilsin.

Bunday tipdagi differensial tenglamalarni

$$y' = yz \qquad (2)$$

almashtirish yordamida tenglama tartibini bittaga pasaytirish mumkin. Buning uchun noma`lum funksiyani hosilalarini aniqlaymiz.

$$y'' = y'z + yz' = yzz + yz' = y(z^2 + z') = y(z' + z^2)$$

$$y''' = y'(z' + z^2) + y(z'' + 2zz') = y(zz' + z^3 + 2zz' + z'') = y(z'' + 3zz' + z^3)$$

....

$$y^{(n)} = y\omega(z, z', z'',...z^{(n-1)})$$

bu topilgan qiymatlarni (1) tenglamaga qo'ysak

$$F(x, y, yz, y(z' + z^2),....,y\omega(z, z',....,z^{(n-1)})) = 0$$

tenglamagaegabo'lamiz.

Shartgako'raFbirjinslifunksiya. Shuninguchunkeyingitenglikdan.

$$y^m F(x,1, z, z' + z^2,....,\omega(z, z',...,z^{(n-1)})) = 0 \qquad (3)$$

agarm>0 bo'lsatenglamaningharikkalatomonini y^m gabo'lib, uni

$$F_1(x,z,z',z'',\ldots,z^{(n-1)})=0$$
holga keltirish mumkin.
Faraz etamiz bu tenglamaning umumiy integrali
$$\varphi(x,z,c_1,c_2,\ldots,c_{n-1})=0$$
ni z ga nisbatan yechish mumkin bo'lsin:
$$z=\psi(x,c_1,c_2,\ldots,c_{n-1})=0$$
U holda (2) ga asosan:
$$y'=y\psi(x,c_1,c_2,\ldots,c_{n-1})=0$$
ga ega bo'lamiz. Bu esa o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadir.
$$\frac{dy}{y}=\psi(x,c_1,c_2,\ldots,c_{n-1})dx$$
$$\ln|y|-\ln c_n=\int\psi(x,c_1,c_2,\ldots,c_{n-1})dx$$
$$y=c_n e^{\int\psi dx}=c_n e^{\int\psi(x,c_1,c_2,\ldots,c_{n-1})dx}$$
Bu (1) tenglamasiningumumiyyechimidir. Umumiyyechimy=0 yechimnihamo'zichidasaqlaydi. c_n=0 bo'lsay = 0 bo'ladi.

Misol

$$xyy''-xy'^2=yy',$$
$$y'=yz,\ y''=y(z'+z^2)$$
$$xy\cdot y(z'+z^2)-xy^2z^2=y\cdot yz$$
$$x(z'+z^2)-xz^2=z,\quad xz'=z,\quad \frac{dz}{z}=\frac{dx}{x}$$
$$\ln z=\ln x+\ln c_1 2,\quad z=2c_1x$$
$$y=c_2e^{2\int c_1xdx}=c_2e^{c_1x^2},$$

Umumlashgan bir jinsli yuqori tartibli differensial tenglamalar.

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0 \qquad (1)$$

differensial tenglamada x ni bir o'lchovli, u ni k o'lchovli y' ni k-1 o'lchovli, …., $y^{(n)}$ ni k-n o'lchovli deb olganda tenglamadagi hamma xadlarning o'lchovlari bir xil bo'lsa, bunday tenglamaga umumlashgan bir jinsli differensial tenglama deyiladi.
Ya`ni ixtiyoriy t>0 uchun (1) tenglamaning chap tomonidagi funksiya uchun.
$$F(tx,t^ky,t^{k-1}y',\ldots,t^{k-n}y^{(n)})\equiv t^mF(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})$$
sharti bajarilsin.
Bunday tipdagi differensial tenglamalarni yechish uchun t va z yangi o'zgaruvchilarni kiritamiz. Bu o'zgaruvchilar bilan eski x va y o'zgaruvchilar orasida bog'lanish
$$x=\ell^t$$
$$y=z\ell^{kt} \qquad (2)$$
dan iboratdir
bunda $z=z(t)$
Bu holda y dan x bo'yicha olingan hosilalarni z dan t bo'yicha olingan hosilalar bilan almashtiramiz.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(z\ell^{kt}) = \frac{d}{dt}(z\ell^{kt})\frac{dt}{dx} = \ell^{-t}(\ell^{kt}\frac{dz}{dt} + k\ell^{kt}z) = \ell^{(k-1)t}\left(\frac{dz}{dt} + kz\right)$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dt}(\ell^{(k-1)t}(z' + kz))\frac{dt}{dx} = \ell^{-t}\left[\ell^{(k-1)t}(z'' + kz') + (k-1)\ell^{(k-1)t}(z' + kz)\right] =$$

$$= \ell^{(k-2)t}(z'' + (2k-1)z' + (k-1)\cdot kz)$$

....

$$y^{(n)} = \ell^{(k-n)t}\omega(z, z', z'', .., z^{(n)})$$

Bu topilgan qiymatlarni (1) tenglamaga quyib, uning bir jinsligini e`tiborga olsak, (1) tenglamani

$$F(e^t, ze^{kt}, e^{(k-1)t}(z' + kz), \ldots\ldots, e^{(k-n)t}\omega(z, z', .. z^{(n)})) = 0$$

$$e^{tm}F(1, z, z' + kz), \ldots\ldots, \omega(z, z', z'' .. z^{(n)})) = 0$$

yoki $\phi(z, z', z'', \ldots., z^{(n)}) = 0$ (3)

ko’rinishga keltirish mumkin

Bu 5 nchi tipdagi differensial tenglamadir.

Ma`lumki (3) tenglamani yechish uchun

$$z' = \frac{dz}{dt} = p \qquad z'' = p\frac{dp}{dz}, \ldots., z^{(n)} = p\alpha(p, p', .. p^{(n-1)})$$

almashtirishlarni (3) tenglamaga qo’ysak

$$\phi(z, p, pp', , \ldots p\alpha(p, p', \ldots p^{(n-1)}) = 0$$

tenglamaga yoki

$\phi_1(z, p, p', p'', \ldots, p^{(n-1)}) = 0$ (4)

tenglamaga ega bo’lamiz.

Agar (4) tenglamaning umumiy integrali

$\varphi(z, p, c_1, c_2, \ldots., c_{n-1}) = 0$ ni

r ga nisbatan yechish mumkin bo’lsa:

$$p = \psi(z, c_1, c_2, \ldots c_n)$$

u hola $\dfrac{dz}{dt} = \psi(z, c_1, c_2, .. c_n)$

$$\frac{dz}{\psi(z, c_1, c_2, .. c_n)} = dt \qquad t + c_n = \int \frac{dz}{\psi(z, c_1, c_2, .. c_{n-1})}$$

Agar bu keyingi tenglikni z ga nisbatan yechsak

$z = \omega(t, c_1, c_2, .., c_n)$ bo’ladi.

U holda (2) almashtirishga asosan (1) tenglamaning umumiy yechimi $y = z\ell^{kt} = x^k\omega(en|x|, c_1, c_2, .. c_n)$ dan iborat bo’ladi.

Misol $x^4y'' - (x^3 + 2xy)y' + 4y^2 = 0$

$$4 + k - 2 = 3 + k - 1 = 1 + k + k - 1 = 2k \qquad k = 2$$

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = ze^{2t} \end{cases} \qquad y' = e^t(z' + 2z), \qquad y'' = (z'' + 3z' + 2z)$$

$$e^{4t}(z'' + 3z' + 2z) - (e^{3t} + 2e^t ze^{2t})e^t(z^1 + 2z) + 4z^2e^{4t} = 0$$

e^{4t} ga qisqartib, ixchamlasak

$z'' + 2(1-z)z' = 0 \qquad z' = p \qquad z'' = p\dfrac{dp}{dz} \qquad p\dfrac{dp}{dz} + 2(1-z)p = 0$

$p = 0 \quad z = c \qquad y = cx^2 \qquad dp + 2(1-z)dz = 0 \qquad dp = 2(z-1)dz$

$p = z^2 - 2z + c_1^2 + 1 = (z-1)^2 + c_1^2 \qquad z' = p \qquad \dfrac{dz}{dt} = (z-1)^2 + c_1^2$

$\dfrac{dz}{(z-1)^2 + c_1^2} = dt \qquad \dfrac{1}{c_1} arctg\,\dfrac{z-1}{c_1} = t + c_2 \qquad arctg\,\dfrac{z-1}{c_1} = c_1(t + c_2)$

$\dfrac{z-1}{c_1} = tgc_1(t + c_2) \qquad z = 1 + c_1 tg\ell_1(t + c_2) \qquad y = x^2\left[1 + c_1 tg(c_1 \ell n|x| + c_2)\right]$

14- mavzu.Bir jinsli chiziqli differentsial tenglamalar. Yechimning asosiy xossalari. Chiziqli bog‘liq va chiziqli erkli funksiyalar. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Bir jinsli chiziqli differentsial tenglamalar.
2. Yechimning asosiy xossalari.
3. Chiziqli bog‘liq va chiziqli erkli funksiyalar.

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots\ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (1)$$

bir jinsli chizikli differensial tenglama berilgan bulsin.
Kuyidagi belgilashni kiritamiz.

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots\ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y$$

u xolda (1) tenglamani $L[y] = 0$ (1)

kurinishda yozish mumkin. $L[y]$ ga chizikli differensial operator deyiladi. U noma’lum u uzgaruvchi ustida bajarilgan amallar tuplamini bilidiradi.
CHizikli differensial operator kuyidagi xossalarga ega:

1 xossa. Yigindinig operatori, operatorlar yigindinsiga teng. YA’ni

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$$

2 xossa. Uzgarmas sonni operator ishorasidan tashkariga chikorish mumkin ya’ni $L[cy] = cL[y]$

Bu xossalarni isbotlash juda xam oson.

TEOREMA 1. Agar y_1 va y_2 (1) tenglamaning echimlari bulsa u xolda $y_1 + y_2$ xam (1) tenglamaning echimlari buladi

Isbot. Operator xossasiga asosan

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$$

lekin, shartga kura y_1 va y_2 (1) tenglamaning echimlari bulgani uchun

$$L[y_1] \equiv 0, \qquad L[y_2] \equiv 0$$

SHuning uchun $L[y_1 + y_2] \equiv 0$

Bu kursatadikim $y_1 + y_2$, (1) tenglamaning echimidir

TEOREMA 2. Agar u₁ (1) tenglamaning echimi bulsa, u xolda cy_1 $(c = const)$ xam

(1) tenglamani echimi buladi.
Isbot. Operator xossasiga asosan $L[cy_1] = cL[y_1]$ lekin $L[y_1] \equiv 0,$
Bulgan uchun $L[cy_1] \equiv 0,$ bundan su$_1$ (1) tenglamaning echimi ekanligi kelib chikadi.
Natija. Agar $y_1, y_2, ..., y_k$ lar (10 tenglamaning xususiy echimlari bulsalar u xolda ularning chizikli

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_k y_k$$

kombinatsiyasi xam (1) tenglamaning echimi buladi.
Agar $k = n$ bulsa $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$

(1) tenglamaning umumiy echimi buladi. $y_1, y_2, ..., y_n$ lar (xususiy echimlar) umumiy echimni tashkil kilishi ularning chizikli boglik va boglik bulmasligiga boglikdir.

Ta'rif. Xammasi birdaniga nolga teng bulmagan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sonlar mavjud bulsakim, $[a,b]$ oraligida aniklangan $\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), ... \varphi_n(x)$ funksiyalar, x ning bu oralikdagi xamma kiymatlari uchun

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + ... + \alpha_n\varphi_n(x) \equiv 0 \qquad (2)$$

ayniyat bajarilsa, u xolda bu oralikda $\varphi_i(x)(i = \overline{1,n})$ funksiyalar chizikli boglangan deyiladi.

Agar (2) ayniyat fakat $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ kiymatda bajarilsa,u xolda $\varphi_i(x)$ funksiyalari, kurilayotgan oralikda chizikli boglanmagan buladi.

Misol1. Faraz etaylik $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ...\varphi_n(x)$ funksiyalardan biri kurilayotgan oralikda nolga teng bulsin. U xolda bu funksiyalar chizikli boglangan buladilar. $\varphi_n(x) = 0$

$$0 \cdot \varphi_1(x) + 0 \cdot \varphi_2(x) + ... + \alpha_n\varphi_n(x) \equiv 0$$

$$x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = 0$$

Misol 2. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ bulsa

$$\varphi_1(x) = \sin^2 x, \quad \varphi_2(x) = \cos^2 x, \quad \varphi_3(x) = 1$$

funksiyalari chizikli boglagan buladi, chunki

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 1 \equiv 0$$

Misol 3. $1, x, x^2, ..., x^n$ funksiyalar $(-\infty, \infty)$ oralikda chizikli boglanmagan.
Xakikatan xam faraz etaylik ular chizikli boglangan bulsin. U xolda xammasi birdaniga nolga teng bulmagan shunday $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}$ sonlari mavjudki

$$\alpha_1 + \alpha x + \alpha_3 x^2 + .. + \alpha_n x^{n-1} + \alpha_{n+1} x^n \equiv 0 \qquad (3)$$

ayniyat x ning xamma kiymatlarida bajariladi.
Lekin bu oxirgi tenglik n nchi darajali algebraik tenglamadir. Ma'lumki bu tenglama fakat x ning n ta kiymatida nolga teng buladi .
Bu karama-karshilik kursatadikim, berilgan funksiyalar $(-\infty, \infty)$ oralikda chizikli boglanmagan.

15- mavzu. Vronskiy determinanti va uning xossalari. Yechimning fundamental sistemasi. Ostrogradskiy -Liuvill formulasi.(2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Vronskiy determinanti va uning xossalari.
2. Yechimning fundamental sistemasi.
3. Ostrogradskiy -Liuvill formulasi.

x ga nisbatan $n-1$ nchi tartibli uzluksiz xosilalarga ega bulgan $y_1, y_2, y_3, ...y_n$ funksiyalardan tuzulgan

$$w[y_1, y_2, ..., y_n] = w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & ... & y_n \\ y_1^1 & y_2^1 & y_3^1 & ... & y_n^1 \\ y_1^{11} & y_2^{11} & y_3^{11} & ... & y_n^{11} \\ ..... & & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

determinantga Vronskiy determinanti deyiladi. (Vronskiy YUzef 1778-1853 polyak)

Teorema 3. Agar $y_1, y_2, ..., y_n$ funksiyalar $[a,b]$ oraligada chizikli boglik bulsalar,u xolda bu oralikda ularning Vronskiy determinanti aynan nolga teng buladi.YA'ni $w(x) \equiv 0$

Isbot. SHartga asosan $y_1, y_2, ..., y_n$ funksiyalar $[a,b]$ oraligida chizikli boglangan bulganligi sababli xammasi nolga teng bulmagan shunday $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sonlari mavjudki x ning xamma kiymatlari uchun

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + ... + \alpha_{n-1} y_{n-1} + \alpha_n y_n \equiv 0$$

tenglik bajariladi.

Faraz etaylik $\alpha_n \neq 0$ bulmasin. U xolda keyingi tenglikdan

$$y_n = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + ... + \beta_{n-1} y_{n-1} \qquad (5)$$

ga ega bulamiz.Bunda $\beta_i = -\dfrac{\alpha_i}{\alpha_n}$ $(i = \overline{1, n-1})$.(5)ni ketma-ket $n-1$ marta differensiallash natijasida

1 1 1
2 2 1 1
‼ ‼ ‼ ‼
1 1 2 2 1 1

(6)

(1) (1) (1)
1 1 (1) 1

ga ega bulamiz.

Agar Vronskiy determinantini 1-nchi ustun elementlarini $-\beta_1$ ga, 2-nchi ustun elementlarini $-\beta_2$ ga va xokazo $n-1$ nchi ustun elementlarini $-\beta_{n-1}$ ga kupaytirib, ularning yigindisini oxirgi ustun elementlari bilan kushsak (6)ga asosan oxirgi ustun elemenilari nolga teng buladi U xolda determinantning kiymati xam nolga teng buladi ya'ni

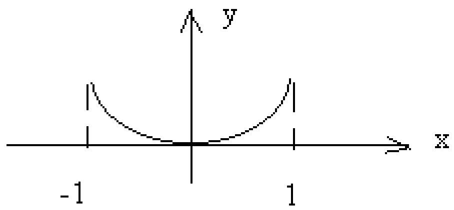
$$w(x) \equiv 0$$

Vronskiy determinantining nolga teng bulishi berilgan funksiyalarining kurilayotgan oralikda chizikli boglangan bulishligining fakat zaruriy sharti buladi, etarli shart emas. $[-1,1]$ oraligida

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \le x \le 0 \\ 0 & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x \le 0 \\ x^2 & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^! & y_2^! \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad -1 \le x \le 1$$



chunki $-1 \le x \le 1$ oralikda ikkinchi ustun elementlari nolga teng. $0 < x \le 1$ oraligida esa birinchi ustun elementlari nolga teng .Lekin $y_1(x), y_2(x)$ funksiyaliri $-1 \le x \le 1$ oralikda chizikli boglanmagandirlar. CHunki

$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \equiv 0$ ayniyatdan $-1 \le x \le 0$ oralikda $\alpha_1 = 0,\quad 0 < x \le 1$ oralikda $\alpha_2 = 0$ ekanligi kelib chikadi.

Bu kursatadikim $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar $[-1,1]$ oraligida chizikli boglanmaganlirlar.

Teorema 4. Agar $y_1, y_2, ..., y_n$ (1) tenglamaning $[a,b]$ da chizikli boglik bulmagan echimlari bulsa ,u xolda uning Vronskiy determinanti kurilayotgan oralikning xech bir nuktasida nolga teng bulmaydi ya'ni

$$w(x) \ne 0$$

Isbot. Teskarisincha faraz etaylik $x = x_0 \quad \alpha < x_0 < b$ nuktasida $w(x_0) = 0$ bulsin.

Kuyidagi tenglamalar sistemasini tuzamiz.

$$\begin{cases} c_1 y_{10} + c_2 y_{20} + ... + c_n y_{n0} = 0 \\ c_1 y_{10}^! + c_2 y_{20}^! + ... + c_n y_{n0}^! = 0 \\ .... \\ c_1 y_{10}^{cn-!!} + c_2 y_{20}^{cn-!!} + ... + c_n y_{n0}^{cn-!!} \end{cases} \qquad (7)$$

bunda $x = x_0$ bulganda $y_i^{(K)}(x_0) = y_{i0}^{(K)} \quad (i = \overline{1,n}, k = \overline{0, n-1})$.

Agar (7) sistemada $c_1, c_2, ...c_n$ larni nomalum deb karasak, $c_1, c_2, ...c_n$ larga nisbatan n noma'lumli n ta bir jinsli chizikli algebraik tenglamalar sistemaga ega bulamiz. Bu sistemani asos determinati Vronskiy determinatidan iborat bulib farazimizga asosan $w(x_0) = 0$ bulgani uchun (7) sistemadan trivial bulmagan

$c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, ...c_n^{(0)}$ echimlarga ega bulamiz.

U xolda (7) dan

$$
\begin{aligned}
&c_1^{(0)}y_{10}+c_2^{(0)}y_{20}+\ldots+c_n^{(0)}y_{n0}\equiv 0\\
&c_1^{(0)}y'_{10}+c_2^{(0)}y'_{20}+\ldots+c_n^{(0)}y'_{n0}\equiv 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_1^{(0)}y_{10}^{(n-1)}+c_2^{(0)}y_{20}^{(n-1)}+\ldots+c_n^{(0)}y_{n0}^{(n-1)}\equiv 0
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

ega bulamiz.

Kuyidagi funksiyani tuzamiz

$$y(x)=\quad c_1^{(0)}y_1+c_2^{(0)}y_2+\ldots+c_n^{(0)}y_n \qquad (9)$$

Teorema1,2 va uning natijasiga asosan (9), (1) tenglamaning echimi buladi.(9) dan n-1 marta xosila olib, sungra unda $x=x_0$ desak (8)ga asosan

$$y(x_0)=0,\ y'(x_0)=0,\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=0 \qquad (10)$$

ga ega bulamiz.(10) boshlangich kiymatlar mavjudlik teoremasiga asosan, (1) tenglama fakat $y\equiv 0$ echimga ega bulishligini kursatadi. U xolda (9) dan, x ning $a<x<b$ oraligidagi xamma kiymatlari uchun

$$c_1^{(0)}y_1+c_2^{(0)}y_2+\ldots+c_n^{(0)}y_n\equiv 0$$

ayniyatga ega bulamiz ya'ni $y_1,y_2,\ldots,y_n$ lar chizikli boglangan.Bu karama-karshilik teoremani tugriligini isbot etadi.

Ta'rif. n –nchi tartibli bir jinsli chizikli differensial tenglamaning n ta chizikli boglanmagan $y_1,y_2,\ldots,y_n$ echimlariga ,tenglamaning fundamental echimlar sistemasi deyiladi.

Teorema 5. Koeffitsientlari uzluksiz bulgan xar kanday n-nchi tartibli bir jinsli chizikli differensial tenglamalar, fundamental echimlar sistemasiga ega.

Isbot. n^2 ta a_{ik} (i,k=$\overline{1,n}$) sonlaridan nolga teng bulmagan determinant tuzamiz.

$$\begin{vmatrix} a_{11},a_{12}\ldots\ldots a_{1n}\\ a_{21},a_{22}\ldots\ldots a_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1},a_{n2}\ldots\ldots a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0 \qquad (11)$$

(1) tenglamaning $y_1,y_2,\ldots,y_n$ xususiy echimlarini $x=x_0$ bulganda $y_i(x_0)=a_{1i}$, $y_i^{(k)}(x_0)=a_{k+1,i}$ $(i=\overline{1,n};k=\overline{1,n-1})$ boshlangich shartlar yordamida aniklaymiz. U xolda (11) ga asosan ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti nolga teng bulmaydi.4 teoremaga asosan ,kurilayotgan oralikda x ning xamma kiymatlarida xam Vronskiy determinanti nolga teng bulmaydi. Demak bu kurilayotgan oralikda funksiyalar chizikli boglanmagan buladilar,ya'ni ular tenglamaningfundamental echimlar sistemasini tashkil etadi.

Misol: $y_1=1+x,\qquad y_2=\ell^x\qquad (x\neq 0)$

$$\begin{vmatrix}1+x & \ell^x\\ 1 & \ell^x\end{vmatrix}=\ell^x+x\ell^x-\ell^x=x\ell^x$$ $x\neq 0$ da ular fundamental echimlar sistemasi tashkil etadi.

TEOREMA 6. Agar $y_1,y_2,\ldots.y_n$ (1) tenglamaning fundamental echimlar sistemasi bulsa, u xolda tenglamaning umumiy echimi.

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\ldots\ldots+c_ny_n \qquad (12)$$

dan iborat. $c_i(i=\overline{1,n})$ uzgarmas sonlar.

Isbot. Ma'lumki ixtiyoriy n ta uzgarmas sonlarga boglik bulgan ifodadan ichtiyoriy uzgarmaslarni ma'lum bir kiymatlarida tenglamaning xamma xususiy echimlari kelib

chiksa bunday ifoda tenglamaning umumiy echimi bular edi.
Ma’lumki xususiy echimlar boshlangich shartlar yordamida bir kiymatli aniklanadi. (mavjudlik va yagonalik teoremasiga asosan) x=x_0 bulganda

$$y(x_0) = y_0 \qquad y' = y_0' \qquad y_0',\ldots, y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)} \tag{13}$$

$y_0, y_0^1, \ldots y_0^{(n-1)}$ ixtiyoriy sonlar, $a < x_0 < b$

(12) ning umumiy echim ekanligini isbotlash uchun undagi $c_1, c_2, \ldots c_n$ larni shunday aniklash mumkin b¢lsakim, (13) boshlanђich shartlar bajarilsin. (12) dan ketma-ket n-1 marta xosila olib, ularning x=x_0 dagi šiymatlarni aniklaymiz.

$$\begin{aligned} &c_1 y_{10} + c_2 y_{20} + \ldots + c_n y_{n0} = y_0 \\ &c_1 y_{10}^! + c_2 y_{20}^! + \ldots + c_n y_{n0}^! = y_0^1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &c_1 y_{10}^{(n-1)} + c_2 y_{20}^{(n-1)} + \ldots + c_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \end{aligned} \tag{14}$$

Agar (14) sistemada $c_i (i = \overline{1,n})$ larni noma’lum deb šarasak, (15) bir jinsli bulmagan algebraik tenglamalar sistemasini tashkil etadi. Bu sistemaning asos determinanti Vronskiy determinatida x urniga x_0 š¢yilgan determinatidan ya’ni $w(x_0)$ iborat bulib, u 4 teoremaga asosan nolga teng emas; $w(x_0) \neq 0$

SHuning uchun (14) sisitemadan c_i lar bir šiymatli aniklanadi.

c_i ning bu topilgan šiymatlarida (12), boshlanђich (13) shartni kanoatlantiradi.

Demak (12) ifoda (1) tenglamaning umumuiy echimidir.

TEOREMA 7. Agar n- nchi tartibli bir jinsli chizikli differensial tenglamalar $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ xususiy echimlarga ega bulsa, bu echimlar chizikli boђlangan buladilar. Boshkacha aytganda n-nchi tartibli bir jinsli chizikli differensial tenglamalar n tadan ortik chizikli boђlanmagan echimga ega emas.

Isbot. Faraz etaylik $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lar chizišli boђlangan bulsinlar. U xolda n ta chizišli boђlangan funksiyalar $(n+1)$ ta chizišli boђlangan funksiyalarning xususiy xolidir. Xašišatan xam, x ning ќamma šiymatlarida

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n + 0 \cdot y_{n+1} \equiv 0$$

ayniyat bajariladi.

2 xol. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funksiyalar chizikli boђlanmagan bulsin. U xolda ular fundamental echimlar sistemani tashkil etadi.

Ma’lumki tenglamaning ixtiyoriy xususiy echimi bular orkali koeffitsentlari uzgarmas bulgan chizikli ravishda ifodalanadi, shu jumladan y_{n+1} echim xam

$$y_{n+1} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n$$

ya’ni ular chizšli boђlangandir.

TEOREMA 8. Agar ikkita bir jinsli chizikli differensial tenglamalar

$$\begin{aligned} &y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + P_{n-1}(x) y^1 + p_n(x) y = 0 \\ &y^{(n)} + q_1(x) y_1^{(n-1)} + q_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + P_{n-1}(x) y^1 + q_n(x) y = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

bir xil fundamental echimlar sistemasiga ega b¢lsa ,u ќolda ular aynan ¢zaro tengdir ya’ni $q_i(x) \equiv p_i(x) \quad (i = \overline{1,n})$

Isbot. (15) tenglamalarning birinchisidan ikkinchisini ќadlab ayiramiz:

$$(p_1 - q_1) y^{(n-1)} + (p_2 - q_2) y^{(n-2)} + \ldots + (p_n - q_n) y = 0 \tag{16}$$

tenglamaga ega b¢lamiz.

Faraz etaylik $p_1 \neq q_1$ b¢lmasinlar u ќolda $p_i(x)$ *ва* $q_i(x)$ uzluksiz funksiyalar bulgani sababli shunday $\alpha < x < \beta$ orališ topiladikim bu orališda ayirma nolga teng b¢lmaydi:

$$p_i(x) - q_i(x) \neq 0.$$

shuning uchun (16) ni ќar ikkala tomonini $p_i(x) - q_i(x)$ bulib ,uni

$$y^{(n-1)} + \frac{p_2 - q_2}{p_1 - q_1} y^{(n-2)} + \ldots + \frac{p_n - q_n}{p_1 - q_1} y = 0$$

bu tenglama (15) tenglamalarning natijasi bulgani uchun $y_1, y_2, ..., y_n$ lar bu tenglamaning fundamental echimlar sistemasini tashkil etadi.

Lekin bu tenglama (n-1) tartibli bulgani uchun u n ta chizikli boglik bulmagan $y_1, y_2, ..., y_n$ echimlarga ega bulolmaydi (7 teorema).Bu karama-karshilik kursatadikim

$$p_i(x) - q_i(x) \equiv 0.$$

Xuddi shunday davom ettirsak natijada

$$P_i(x) \equiv q_i(x) \qquad (i = \overline{1,n})$$

ga ega bulamiz. Demak (15) tenglamalar bitta tenglamadan iboratdir.

Masala. Agar n- nchi tartibli bir jinsli chizikli differensial tenglamaning fundamental echimlari $y_1, y_2, ..., y_n$ berilgan bulsa, tenglamani tuzing.

Echish. Faraz etaylik izlangan bir jinsli chizikli differensial tenglama

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(y-2)} + ... + p_n(x) y = 0 \qquad (17)$$

bulsin.Bunda $p_i(x)$ koeffitsentlar xozircha aniklanmagan funksiyalardir.

SHartga kura $y_1, y_2, ..., y_n$ lar (17) tenglamaning echimlari bulgani uchun:

$$\begin{array}{l} y_1^{(n)} + p_1(x) y_1^{(n-1)} + p_2(x) y_1^{(n-2)} + ...p_n(x) y_1 \equiv 0 \\ y_2^{(n)} + p_1(x) y_2^{(n-1)} + p_2(x) y_2^{(n-2)} + ...p_n(x) y_{21} \equiv 0 \\ .... \\ y_{n1}^{(n)} + p_1(x) y_{n1}^{(n-1)} + p_2(x) y_n^{(n-2)} + ...p_n(x) y_n \equiv 0 \end{array} \qquad (18)$$

(18) $p_i(x)$ larga nisbatan bir jinsli bulmagan algebraik tenglamalar sistemasidan iborat. Uning asos determinati Vronskiy determinatdan

iborat bulgani uchun u nolga teng emas (chunki $y_i \quad i = \overline{1,n}$ tenglamaning fundamental echimlar sisietemasidir) shuning uchun (18) sistemadan $p_i(x)$ lar bir kiymatli aniklanadi. Bu topilgan $p_i(x)$ kiymatlarni (17) tenglamaga kuysak, izlangan bir jinsli tenglamaga ega bulamiz.

Topilgan tenglamani determinat shaklida yozish mumkin:

$$\begin{vmatrix} y^{(n)} \ y^{(n-1)} .....y^1 \ y \\ y_1^{(n)} y_1^{(n-1)} ......y_1^1 \quad y_1 \\ y_2^{(n)} y_2^{(n-1)} ....y_2^1 \quad y_2 \\ .... \\ y_n^{(n)} \quad y_n^{(n-1)} ....y_n^1 \quad y_n \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ёки} \begin{vmatrix} y_1 \quad y_{2.} ....y_n \quad y \\ y_1^1 \quad y_2^1 ....y_n^1 \quad y^1 \\ y_1^{11} \quad y_2^{11} ....y_n^{11} \quad y'' \\ .... \\ y_1^{(n-1)} y_2^{(n)} ......y_n^{(n)} \quad y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \qquad (19)$$

xakikatdan xam oxirgi ustun elementlari urniga $y_1, y_2, ..., y_n$ larni kuysak ikki ustun elementlari teng bulgani uchun determinat kiymati nolga teng buladi. (19) topilishi kerak bulgan bir jinsli chizikli differensial tenglamadir.

Misol. Xusuiy echimlari $\ell^x, \ell^{2x}, \ell^{3x}$ bulgan bir jinsli tenglamani tuzing

Isbot etish mumkinki bu funksiyalar chizili boglanmagan.

$$\begin{vmatrix} \ell^{x} & \ell^{2x} ..... \ell^{3x} & y \\ \ell^{x} & 2\ell^{2x} \quad 3\ell^{3x} & y' \\ \ell^{x} & 4\ell^{2x} \quad 9\ell^{3x} & y'' \\ \ell^{x} & 8\ell^{2x} \quad 27\ell^{3x} & y''' \\ n & & \end{vmatrix} = 0 \qquad \ell^{x+2x+3x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 2 & 3 & y^{1} \\ 1 & 4 & 9 & y'' \\ 1 & 8 & 27 & y''' \end{vmatrix} = 0$$

determinatni ochib chikib, ixchamlasak $y'''-6y''+11y'-6y=0$ ga ega bulamiz.
(19) determinatni oxirgi ustun elementlari buyicha ochib chikamiz

$$y^{(n)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2. & .... & y_n \\ y_1^1 & y_2^1 & .... & y_n^1 \\ .... \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & .... & y_2^{(n-1)} \\ . \end{vmatrix} - y^{(n-1)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2. & .... y_n \\ y_1^1 & y_2^1. & .... y_n^1 \\ .... \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & ...... y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix} + ... + (-1)^n \begin{vmatrix} y_1^1 & y_2^1 ..... y_n^1 \\ y_2^{11} & y_2^{11} .... y_n^{11} \\ .... \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} .... y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

(20)

$y^{(n)}$ oldidagi koeffitsient Vronskiy determinatidan iborat bulgani uchun u nolga teng emas. SHuning uchun (20) xar ikkala tomonini $w(x)$ ga bulish mumkin.

Sungra xosil bulgan tenglama bilan (17) ni solishtirib karasak

$$p_1(x) = -\frac{\begin{vmatrix} y_1 \ y_2 ...... y_n \\ y_1^1 \ y_2^1 ...... y_n^1 \\ .... \\ y_1^{(n)} \ y_2^{(n)} .... y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{w(x)} \qquad (21)$$

ga ega bulamiz.
(21) ning surati, maxrajining xosilasidan iboratdir.
Xakikatan xam oliy, algebradan ma’lumki elementlari x ning funksiyasidan iborat bulgan n-nchi tartibli determinatning xosilasi, n ta n-nchi tartibli determinatlar yigindisiga teng bulib, ularning birinchisida birinchi satr elementlaring xosilasi olinib kolgan elementlar uzgartirilmay koladi. Ikkinchi determinatda ikkinchi satr elementlarning xosilasi olinib kolgan elementlar uz xolicha koladi va xokazo shunday davom ettirsak n-nchi determinatning n-nchi satr elemantlari, ularning xosilasi bilan almashtirib kolgan elementlar uz xolicha koldiriladi. SHunday kilib, n-1 ta n-nchi tartibli determinatlarda ikki satr elementlari uzaro teng bulgani uchun ular nolga teng.oxirgi n-nchi determinat esa (21) determinatning suratidan iborat buladi. ya’ni $p_1(x) = -\frac{w'(x)}{w(x)}$

Bu uzgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalardir

$$\frac{dw(x)}{w(x)} = -p_1(x)dx$$

$$\ell nw(x) = -\int_{x_0}^{x} p_1(x)dx + \ell nw(x_0)$$

agar $w(x_0) = c$

$$w(x) = w(x_0)\ell^{-\int_{x0}^{x} p_1(x)dx}$$

desak $\qquad w(x) = c\ell^{-\int_{x}^{x} p(x)dx} \qquad (23)$

(22) ga Ostorgradskiy – Liuvillь formulasi deyiladi.

Ostrogradskiy-Liuvillь formulasini, ikkinchi tartibli differensial tenglamalarning umumiy echimini topishga tadbik etamiz.

Faraz etaylik u1

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

tenglamaning xususiy echimi bulsin. u esa uning y_1 dan fark kiluvchi ixtiyoriy echimi (23) ga asosan

$$\begin{vmatrix} y & y_1 \\ y' & y_1^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1^1 & y' \end{vmatrix} = c_1\ell^{-\int p_1(x)dx}$$

$$y' y_1 - yy_1^1 = C_1\ell^{-\int p_1(x)dx}$$

Bu tenglamaning xar ikkala tomonini y_1^2 ga bulamiz:

$$\frac{y' y_1 - yy_1^1}{y_1^2} = \frac{c_1}{y_1^2}\ell^{-\int p_1(x)dx}$$

$$d\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{c_1}{y_1^2}\ell^{-\int p_1(x)dx} \qquad \frac{y}{y_1} = c_1\int \frac{\ell^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} + C_2$$

$$y = y_1\left\{c_1\int \frac{\ell^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}dx + c_2\right\}$$

ga ega bulamiz. Bu formulada ikkita ixtiyoriy uzgarmas son katnashayotir.
Bu ikkinchi tartibli chizikli differensial tenglamaning umumiy echimidir.

Xulosa. Agar bir jinsli ikkinchi tartibli chizik differensial tenglamaning bitta xususiy echimi berilgan bulsa uning umumiy echimi kvadratura yordamida aniklangadi.

n-nchi tartibli bir jinsli chizikli differensial tenglama berilgan bulsin.

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y^1 + p_n(x)y = 0 \qquad (1)$$

Agar bu tenglamaning nolga teng bulmagan y1 xususiy echimi berilgan bulsa

$$y = y, z$$

almashtirish yordamida (1) tenglamaning tartibini bittaga pasaytirish mumkin. Xakikatan xam, (2) dan

$$y' = y_1 z' + y_1^1 z$$

$$y'' = y_1 z'' + 2y_1^1 z' + y_1^{11} z$$

$$y''' = y_1 z''' + 3y_1^1 z'' + 3y_1^{11} z' + y_1^{111} z$$

....

$$y^{(n-1)} = y, z^{(n-1)} + c_{n-1} y_1^1 z^{(n-2)} + c_{n-1}^2 y_1^{11} z^{(n-3)} + ... + y_1^{(n-1)} z$$

$$y^{(n)} = y, z^{(n)} + c'_n y_1^1 z^{(n-1)} + c_n^2 y_1^{11} z^{(n-2)} + ... + y_1^{(n)} z$$

Bu topilgan kiymatlarni (1) tenglamaga kuyib ixchamlasak

$$y_1 z^{(n)} + (p_1(x) y_1 + c_n^1 y_1^1) z^{(n-1)} + ... + (y_1^{(n)} + p_1(x) y_1^{(n-1)} + p_2(x) y_1^{(n-2)} + .. + P_{n-1}(x) y_1^1 + p_n(x) y_1) z = 0$$

ga ega bulamiz.shartga asosan $y_1 \neq 0$ (1) tenglamaning echimi ya'ni

$L[y_1] \equiv 0$ shuning uchun keyingi tenglamadagi z oldidagi koeffitsient nolga teng buladi.

(3)tenglamaning xar ikkiala tomonini u_1 ga bulsak.

$$z^{(n)} + Q_1(x) z^{(n-1} + Q_2(x) z^{(n-2)} + ...+ Q_1(x) z^1 = 0$$

tenglamaga ega bulamiz.

Bu tenglamada $z' = u$ almashtirishni olib uni

$$u^{(n-1)} + Q_1(x) u^{(n-2)} + ... + Q_1(x) u = 0 \qquad (4)$$

kurinishga keltiramiz.

Agar (4) tenglamaning fundamental echimlar sistemasi u_1, $u_2, ..., u_{n-1}$ bulsa, u xolda (1) tenglamaning xusuiy echimlari

$$y_1; \quad y_2 = y_1 \int u_1 dx; \quad y_3 = y_1 \int u_2 dx, ..., y_n = y_1 \int u_{n-1} dx \qquad (5)$$

buladi. Isbot etamizki bu echimlar chizikli boglanmagandirlar. ya'ni ular (1) tenglamaning fundamental echimlar sistemasini tashkil etadi.

Teskarincha faraz etaylik bular chizikli boglangan bulsinlar.U xolda birdaniga xammasi nolga teng bulmagan shunday $c_1, c_2, ... c_n$ sonlari topiladikim, x –ning kurilayotgan oralikdigi xamma kiymatlari uchun

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n \equiv 0 \qquad (6)$$

ayniyati bajariladi.

Bundan u_1 nolga teng bulmaganli sababli (6) dan

$$c_1 + c_2 \left(\frac{y_2}{y_1} \right) + c_3 \left(\frac{y_3}{y_1} \right) + .. + c_n \left(\frac{y_n}{y_1} \right) = 0 \qquad (7)$$

(5) va (7) ga asosan

$$c_2 u_1 + c_3 u_2 + ... + c_n u_{n-1} = 0$$

ga ega bulamiz.

Lekin $u_1, u_2, ... u_{n-1}$ lar chizikli boglik bulmaganligi sababli , keyingi tenglikdan

$$c_2 = c_3 = ... = c_n = 0$$

kelib chikadi. U xolda (6) dan $c_1 = 0$ kelib chikadi.

Bu karama-karshilik kursatadikim $y_1, y_2, ... y_n$ lar chizikli boglik emas.

Demak ular (1) tenglamaning fundamental echimlari sistemasini tashkil etadi.

Faraz etaylik (1) tenglamaning k ta $y_1, y_2, ... y_л$ xususiy echimlari berilgan bulsin.

$u = \left(\frac{y}{y_1} \right)'$ almashtirish yordamida (1) tenglama (4) kurinishga keladi.

Lekin (4) tenglamaning

$$u_1 = \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^1, \qquad u_2 = \left(\frac{y_3}{y_1} \right)^1, \quad ....., \quad u_{k-1} = \left(\frac{y_k}{y_1} \right)^1 \qquad (8)$$

echimlari mavjud buladi.

Isbot etamizkim, (8) echimlar sistemasi uzaro chizikli boglik emas. Aksincha faraz etaylik bular chizikli boglik bulsinlar. U xolda xammasi birdaniga nolьga teng bulmagan shunday $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k$ sonlarni topish mumkinkim

$$\gamma_2 u_1 + \gamma_3 u_2 + ... + \gamma_k u_{k-1} \equiv 0 \qquad (9)$$

(9) ni xar ikkala tomonini integrallaymiz

$$\gamma_2 \int u_1 dx + \gamma_3 \int u_2 dx + ... + \gamma_k \int u_{k-1} dx = -\gamma_1$$

(γ_1 - integrallash doimiyligi)

bu keyingi tenglikdan

$$\gamma_2 \left(\frac{y_2}{y_1} \right) + \gamma_3 \left(\frac{y_3}{y_1} \right) + ... + \gamma_k \left(\frac{y_k}{\gamma_1} \right) = -\gamma_1$$

$$\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \gamma_3 y_3 + ... + \gamma_k y_k = 0$$

shartga asosan $y_1, y_2, ..., y_k$ lar chizikli boglanmagan, shuning uchun keyingi tenglikdan

$$\gamma_1 = \lambda_2 = ... = \gamma_k = 0$$

Bu karma- karshilik kursatadikim

$$u_1, u_2, ..., u_k$$

lar chizikli boglanmagandirlar

YA'ni ular (4) tenglamaning fundamental echimlar sistemasini tashkil etadi.

(4) tenglamada $\vartheta = \left(\frac{u}{u_1} \right)^1$ almashtirishni olsak tenglamaning tartibi bittaga pasayadi (1) tenglamaning tartibi esa ikki birlikka pasayadi.

Bundan shunday xulosaga kelamiz.

Agar bir jinsli chizikli differensial tenglamaning k ta chizikli boglik bulmagan xususiy echimlari berilgan bulsa, u xolda uning tartibi k birlikka kamayadi ya'ni (1) tenglamani integrallash n-k nchi tartibli tenglamani integrallashga keltiriladi.

Ikkinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamaning bitta $y_1 \neq 0$ xususiy echimi berilgan bulsin

$$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0 \qquad (10)$$

$y = y_1 \int u dx$ almashtirishni olamiz

$$y^1 = y_1 u + y_1' \int u dx \quad y'' = 2y_1 \, u + y_1 u' + y_1^{11} \int u dx$$

Bularga asosan (10) tenglamani

$$y_1 u^1 + \left(2y^1{}_1 + p_1(x) y_1 \right) u + (y_1^{11} + p_1(x) y_1^1 + p_2(x) y_1 = 0$$

$$u^1 + \frac{2y^1{}_1 + p_1(x) y_1}{y_1} u = 0 \qquad \frac{u^1}{u} = -\left(\frac{2y_1^1}{y_1} + p_1(x) \right)$$

$$\ln u = -2 \ln y_1 - \int p_1(x) dx + \ln c_1 \qquad u = \frac{c_1 e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2}$$

Bu kiymatni $y = y_1 \int u dx + c_2$ ga kuysak

$$y = y_1 \left[\int \frac{c_1 e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx + c_2 \right]$$

ga ega bulamiz. Bu esa (10) tenglamaning umumiy echimidir.

$$u=\left(\frac{u}{u_1}\right)^1 \quad \frac{y}{y_1}=\int udx+c$$

Misol

$$x^3y^{111}-3x^2y^{11}+6xy^1-6y=0$$

tenglamaning 2 ta xususiy echimi $y_1=x,\ y_2=x^2$ berilgan bulsa, tenglamaning umumiy echimini toping.

$y=x\int udx$ almashtirshini olamiz.

$$y^1=\int udx+xu \quad y^{11}=2u+xu^1 \quad y^{111}=3u^1+xu^{11}$$

$$x^3(3u^1+xu^{11})-3(2u+xu^1)x^2+6x(\int udx+xu)-6x\int udx=0$$

$$x^2u^{11}=0\ u^{11}=0$$

$$u_1=\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^1=\left(\frac{x^2}{x}\right)^1=(x)^1=1 \qquad u_1=1$$

$$v=\left(\frac{u}{u_1}\right)^1 \qquad u=u_1\int vdv=\int vdv$$

$$u'=v, \qquad u''=v' \qquad v'=0 \qquad v=2$$

$$u_2=u_1\int vdx=2\int dx=2x$$

$$u_1=\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^1 \qquad u_2=\left(\frac{y_3}{y_1}\right)^1 \qquad y_3=y_1\int u_2dx=x\int 2xdx=x^3$$

$$y=c_1x+c_2x^2+c_3x^3.$$

16- mavzu.Bir jinsli bo`lmagan $n-$tartibli chiziqli differentsial tenglamalar va ularning umumiy va xususiy yechimlarini topish. O`zgarmasni variatsiyalash usuli. (2 soat)

Reja:

1. Bir jinsli bo`lmagan $n-$tartibli chiziqli differentsial tenglamalar va ularning umumiy va xususiy yechimlarini topish.
2. Yechimning xossalari.
3. Umumiy yechim haqida teorema.
4. O`zgarmasni variatsiyalash usuli.

1. n-tartibli chiziqli bir jinsli bo`lmagan tenglamalar bir jinsli tenglamalardan o`ng tomonida g(x) funksiya borligi bilan farq qiladi. Shuning uchun

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=g(x) \qquad (1)$$

tenglamaning umumiy yechimi haqida fikr yuritishda

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad (2)$$

tenglama yechimlari haqidagi tasdiqlardan foydalanamiz.

1-teorema. Agar $y = \psi(x)$, $x \in I$ funksiya (1) bir jinsli bo`lmagan tenglamaning biror xususiy yechimi bo`lib, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), x \in I$ funksiyalar tegishli (2) bir jinsli tenglamaning fundamental sistemasi bo`lsa, u holda bir jinsli bo`lmagan tenglamaning umumiy yechimi uning xususiy yechimi $\psi(x)$ bilan tegishli bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $\sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i(x)$ yig`indisidan iborat bo`ladi,ya'ni:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i\psi_i(x) + \psi(x) \qquad (3)$$

Isbot. $\psi(x)$ funksiya (1) ning yechimi bo`lgani uchun $L[\varphi(x)] = g(x)$ bo`ladi. Endi (1) tenglamada

$$y = z + \psi(x) \qquad (4)$$

almashtirish bajaraylik. Bundan:

$$g(x) = L[y] = L[z + \psi(x)] = L[z] + L[\psi(x)] = L[z] + g(x)$$

Demak, $L[z] = 0$. Bu (1) ga mos bir jinsli tenglamadir. Agar $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), x \in I$ funksiyalar fundamental sistema bo`lsa, $z = \sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i(x)$ yechim (2) tenglamaning umumiy yechimi bo`ladi. U holda (1) tenglamaning umumiy yechimini topish uchun (4) almashtirishda z o`rniga ifodasini qo`yish kifoya.

Haqiqatan, $y = \chi(x)$ (1) tenglamaning I da aniqlangan va ixtiyoriy boshlang`ich shartni (ya'ni $\chi(x_0) = y_0, \chi'(x_0) = y_0', \ldots, \chi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ munosabatlarni ) qanoatlantiradigan yechimi bo`lsin. (3) formulaning ikki tomonidan (n-1)- tartibgacha hosilalar olib, ushbuga ega bo`lamiz ($x = x_0$ da):

$$\begin{cases} y_0 = \sum_{i=1}^{n} C_I y_{i0} + \psi_0, \\ y_0' = \sum_{i=1}^{n} C_i y_{i0}' + \psi_0', \\ y_0^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_{i0}^{(n-1)} + \psi_0^{(n-1)}. \end{cases} \qquad (5)$$

Agar $y_0^{(i)} = \psi_0^{(i)}, i = 0,1,\ldots,n-1$ bo`lsa, (5) dan $W(x_0) \neq 0$ bo`lgani uchun $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$ kelib chiqadi. Bu bir jinsli teng lamaning trivial yechimiga to`g`ri keladi. Shuning uchun $\chi(x) \equiv \psi(x), x \in I$ bo`ladi. Bu hol qiziq emas. Endi $y_0^{(i)} \neq \psi_0^{(i)}$ $0 \leq i \leq n-1$ bo`lsin. Ravshanki, bir jinsli bo`lmagan tenglama trivial yechimga ega emas, shu sababdan $y_0^{(i)} \neq 0, i = 0,1,\ldots,n-1$. Demak, (5) tenglama $C_1, C_2, \ldots, C_n$ larga nisbatan $n$ ta birinchi tartibli algebraik tenglamalarning bir jinsli bo`lmagan sistemasidan iborat. Bu sistemaning determinanti $W(x_0) \neq 0$. Shuning uchun u yagona $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ yechimga ega. Demak, ushbu

$$\chi(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} C_i^0\psi_i(x) + \varphi(x), x \in I$$

ayniyatga ega bo`lamiz. Shunday qilib, $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ boshlang`ich qiymatlar ixtiyoriy bo`lganidan (3) formula umumiy yechimdan iborat bo`ladi. Teorema isbot bo`ldi.

1-natija. Agar chiziqli bir jinsli bo`lmagan tenglamaning bitta xususiy yechimi ma’lum bo`lsa, uni integrallash masalasi tegishli bir jinsli differensial tenglamani integrallashga keladi.

2-natija. Agar chiziqli bir jinsli bo`lmagan tenglamaning r ta xususiy yechimi $\psi_1(x), \psi_2(x), ..., \psi_r(x), x \in I$ ma’lum bo`lib,
$\psi_1(x) - \psi_k(x), \psi_2(x) - \psi_k(x), ..., \psi_{k-1}(x) - \psi_k(x), \psi_{k+1}(x) - \psi_k(x), ..., \psi_r(x) - \psi_k(x), 1 \le k \le r$
funksiyalar chiziqli erkli bo`lsa, bir jinsli bo`lmagan tenglamani integrallash $(n - r + 1)$-tartibli bir jinsli tenglamani integrallashga keladi.

Isbot. $y = \psi_k(x) + z$ desak, $z = y - \psi_k(x)$ bo`ladi. Bunda z bir jinsli tenglamaning yechimi. Shuning uchun $y = \psi_1(x), y = \psi_2(x), ..., y = \psi_{k-1}(x), y = \psi_{k+1}(x), ..., y = \psi_r(x)$ desak, bir jinsli tenglamaning $r - 1$ ta yechimini, ya’ni

$$z_1 = \psi_1(x) - \psi_k(x), z_2 = \psi_2(x) - \psi_k(x), ..., z_{k-1} = \psi_{k-1}(x) - \psi_k(x),$$

$$z_{k+1} = \psi_{k+1}(x) - \psi_k(x), ..., z_r = \psi_r(x) - \psi_k(x),$$

yechimlarni hosil qilamiz. Bu yechimlar chiziqli erkli bo`lganda tegishli bir jinsli tenglamaning tartibi $r - 1$ ga kamaytirilishi mumkin. Natija isbot etildi.

2. Mazkur bandda bir jinsli bo`lmagan tenglamaning xususiy yechimini topishda muhim rol o`ynaydigan Lagranjning o`zgarmasni variasiyalash usuli bilan tanishamiz.

Ma’lumki, bir jinsli tenglama uchun umumiy yechim uning chiziqli erkli yechimlari orqali ushbu

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + ... + C_n\varphi_n(x) \qquad (6)$$

formula bilan yozilar edi. J.Lagranj (6) formulada C_i lar o`rniga $\sigma_i(x)$ funksiyalarni qo`yib, bir jinsli bo`lmagan tenglamaning yechimini

$$y = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(x)\varphi_i(x) \qquad (7)$$

ko`rinishda izlash usulini bergan. Bir jinsli bo`lmagan tenglamaning yechimini (7) ko`rinishda izlash mumkinligi, ya’ni $\sigma_i(x)$ funksiyalarni bir qiymatli topish mumkinligi (unday funksiyalarning mavjudligi) quyidagi hisoblashlardan ko`rinadi.

(7) funksiya va uning $(n-1)$-tartibgacha hosilalari ma’lum shartlarni qanoatlantirishi $\sigma_i(x)$ funksiyalarning mavjud bo`lishi uchun yetarli bo`ladi. Haqiqatan (7) ning hosilasini hisoblaylik:

$$y' = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(x)\varphi_i'(x) + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i'(x)\varphi_i(x).$$

Bunda

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i'(x)\varphi_i(x) = 0 \qquad (8_1)$$

deymiz. Ikkinchi tartibli hosilani hisoblaymiz

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(x)\varphi_i''(x) + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i'(x)\varphi_i'(x).$$

Endi

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i'(x)\varphi_i'(x) = 0 \qquad (8_2)$$

deymiz. Shunga o`xshash, $(n-1)$-tartibgacha hosilalarni hisoblasak:

$$y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(x)\varphi_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i'(x)\varphi_i^{(n-2)}(x).$$

bunda

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_i'(x)\varphi_i^{(n-2)}(x)=0 \qquad (8_{n-1})$$

deb olamiz. Navbatdagi $y^{(n)}$ ni hisoblaymiz:

$$y^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(x)\varphi_i^{(n)}(x)+\sum_{i=1}^{n}\sigma_i'(x)\varphi_i^{(n-1)}(x).$$

Yuqoridagi $(8_1),\ldots,(8_{n-1})$ tenglamalarni hosil qilishda chiziqli bir jinsli bo`lmagan differensial tenglamadan foydalanmadik. $\sigma_i'(x)$ uchun oxirgi munosabatni topishda undan foydalanamiz. (1) tenglamaga yuqoridagi hisoblashlardan $y, y', y'',\ldots, y^{(n)}$ larning ifodalarini qo`yamiz:

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(x)\varphi_i^{(n)}(x)+\sum_{i=1}^{n}\sigma_i'(x)\varphi_i^{(n-1)}(x)\right]+p_1(x)\left[\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(x)\varphi_i^{(n-1)}(x)\right]+p_2(x)\left[\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(x)\varphi_i^{(n-2)}(x)\right]+\ldots+$$
$$+p_{n-1}(x)\left[\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(x)\varphi_i(x)\right]+p_n(x)\left[\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(x)\right]=g(x)$$

yoki

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_i'(x)\varphi_i^{(n-1)}(x)+\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(x)\left[\varphi_i^{(n)}(x)+p_1(x)\varphi_i^{(n-1)}(x)+\ldots+p_{n-1}(x)\varphi_i'(x)+p_n(x)\varphi_i(x)\right]=g(x).$$

Ammo bundan $\varphi_i(x), i=1,2,\ldots,n$ funksiyalar I da $L[y]=0$ tenglamaning yechimi bo`lgani sababli, ushbu

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_i'(x)\varphi_i^{(n-1)}(x)=g(x) \qquad (8_n)$$

munosabat hosil bo`ladi. Shunday qilib, (8_i), $i=1,2,\ldots,n$ sistemaga egamiz. $g(x)\neq 0$ dan bu sistema $\sigma_i'(x), i=1,2,\ldots,n$ larga nisbatan bir jinsli emas. Uning determinanti $W[\varphi_1,\ldots,\varphi_n]\neq 0, x\in I$. Shuning uchun $\sigma_1',\ldots,\sigma_n'$ larni bir qiymatli topamiz:
$\sigma_i'(x)=\delta_i(x), i=1,2,..,n, x\in I$.

Bundan:
$\sigma_i(x)=\int\delta_i(x)dx+\overline{C_i}$.

Topilgan ifodani (7) ga qo`yamiz:

$$y=\varphi_1(x)\int\delta_1(x)dx+\ldots+\varphi_n(x)\int\delta_n(x)dx+\sum_{i=1}^{n}\overline{C_i}\varphi_i(x) \qquad (9)$$

Bu (1) tenglamaning umumiy yechimidir, undan $\overline{C_1}=\overline{C_2}=\ldots=\overline{C_n}=0$ bo`lganda bir jinsli bo`lmagan tenglamaning ushbu

$$y=\varphi_1(x)\int_x\delta_1(x)dx+\ldots+\varphi_n(x)\int_x\delta_n(x)dx \qquad (10)$$

xususiy yechimini topish mumkin.

Shunday qilib, agar birjinsli differensial tenglamaning n ta chiziqli erkli yechimlari ma'lum bo'lsa, (8_i), $i=1,2,\ldots,n$ sistemani tuzib, undan $\delta_1(x),\ldots,\delta_n(x)$ larni, so`ngra (10) formula yordamida bir jinsli bo`lmagan tenglamaning xususiy yechimini topamiz.

17- mavzu.Xususiy yechimni topishning Koshi usuli.

(2 soat)

Reja:

1. Bir jinsli bo`lmagan $n-$tartibli chiziqli differentsial tenglamalar va ularning

umumiy va xususiy yechimlarini topish.
2. Xususiy yechimni topishning Koshi usuli.

.

3. Endi bir jinsli bo`lmagan tenglamaning xususiy yechimini topishning Koshi usuli bilan tanishamiz.

Chiziqli bir jinsli bo`lmagan differensial tenglama (1) ning koeffisentlari $p_i(x)\ (i=1,2,...n)$ va o`ng tomoni $g(x)$ biror $a \le x \le b$ oraliqda uzluksiz bo`lsin. Mos bir jinsli tenglamaning fundamental sistemasi ma'lum bo`lsin deb faraz etamiz. U holda bir jinsli tenglamaning ξ parametriga bog liq bo`lgan shunday $K(x,\xi)$ yechimini tuzish mumkinki, u yechim ushbu

$$K(\xi,\xi)=0, K_x(\xi,\xi)=0,..., K^{(n-2)}_{x^{n-2}}(\xi,\xi)=0, K^{(n-1)}_{x^{n-1}}(\xi,\xi)=1 \qquad (11)$$

boshlang`ich shartni qanoatlantiradi. Shu K(x,ξ) yechim orqali bir jinsli bo`lmagan tenglamaning xususiy yechimi

$$\psi(x)\int_a^x K(x,\xi)g(\xi)d\xi \qquad (12)$$

formula yordamida topilishi mumkin. Buni isbot etish uchun $L[\psi(x)]=g(x)$ ekanini ko`rsatish lozim. Haqiqatan, $\psi(x)$ funksiyadan ketma-ket hosilalar olib, (11) shartdan foydalanamiz.

$$\psi'(x)=K(x,x)g(x)+\int_a^x K'_x(x,\xi)g(\xi)d\xi=\int_a^x K'_x(x,\xi)g(\xi)d\xi,$$

$$\psi''(x)=K'_x(x,x)g(x)+\int_a^x K''_{x^2}(x,\xi)g(\xi)d\xi=\int_a^x K''_{x^2}(x,\xi)g(\xi)d\xi,$$

....

$$\psi^{(n-1)}(x)=K^{(n-1)}_{x^{(n-2)}}(x,x)g(x)+\int_a^x K^{(n-1)}_{x^{(n-1)}}(x,\xi)g(\xi)d\xi=\int_a^x K^{(n-1)}_{x^{(n-1)}}(x,\xi)g(\xi)d\xi$$

$$\psi^{(n)}(x)=K^{(n-1)}_{x^{(n-1)}}(x,x)g(x)+\int_a^x K^{(n)}_{x^n}(x,\xi)g(\xi)d\xi=g(x)+\int_a^x K^{(n)}_{x^n}(x,\xi)g(\xi)d\xi.$$

Topilgan ifodalarni (1) tenglamaning chap tomoniga qo`yamiz:

$$g(x)+\int_a^x K^{(n)}_{x^n}(x,\xi)g(\xi)d\xi+p_1(x)\int_a^x K^{(n-1)}_{x^{-1n}}(x,\xi)g(\xi)d\xi+...+$$

$$+P_n(x)\int_a^x K(x,\xi)g(\xi)d\xi=g(x)+\int_a^x [K^{(n)}_{x^n}(x,\xi)+P_1(x)K^{(n-1)}_{x^{n-1}}(x,\xi)+...+p_n(x)K(x,\xi)]g(\xi)d\xi.$$

Qavs ichidagi ifoda nolga teng, chunki $K(x,\xi)$ funksiya mos bir jinsli tenglamaning xususiy yechimi. Bundan $\psi(x)$ funksiyaning bir jinsli bo`lmagan tenglamaning xususiy yechimi ekani kelib chiqadi. Ravshanki, $\psi(x)$ va uning hosilalari uchun ushbu

$$\psi(a)=0, \psi^{(i)}(a)=0, i=1,2,...,n-1$$

shart bajariladi. Bu shart bir jinsli tenglama trivial yechimi uchun yoziladigan shartdan farq qilmasa-da, bir jinsli bo`lmagan tenglamada $\psi(x)\ne 0, a\le x\le b$ bo`ladi. Aks holda $g(x)\ne 0$ tengsizlik bilan ziddiyat hosil bo`ladi.

Endi (12) formulani boshqacha ko`rinishda yozamiz. Uning uchun ushbu

$$G(x,\xi)=\begin{cases}0, a\le x\le \xi,\\ K(x,\xi), \xi\le x\le b\end{cases} \qquad (13)$$

Funksiyani kiritamiz. Ravshanki, $G(\xi,\xi)=0, a\le\xi\le b$. Undan tashqari $x=\xi$ nuqtada (11) shartga ko`ra:

$$G_{x^n}^{(i)}(\xi+0,\xi)=G_{x^n}^{(i)}(\xi-0,\xi)=0, i=1,2,...,n-2,$$

$$G_{x^{n-1}}^{(n-1)}(\xi+0,\xi)+G_{x^{n-1}}^{(n-1)}(\xi-0,\xi)=1.$$

Oxirgi munosabatda (13), (11) ga asosan:

$$G_{x^{n-1}}^{(n-1)}(\xi+0,\xi)=1, G_{x^{n-1}}^{(n-1)}(\xi-0,\xi)=0$$

Chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar uchun keltiriladigan xossalarga ega bo`lgan $G(x,\xi)$ funksiya Koshi masalasi uchun Grin funksiyasi deyiladi. (13) formuladan foydalanib, (12) formulani aniq integral shaklida bunday

$$\psi(x)=\int_a^b G(x,\xi)g(\xi)d\xi \qquad (14)$$

yozish mumkin. Bu formula Koshi formulasi deyiladi.

4. Agar (1) tenglamada o`ng tomondagi $g(x)$ funksiya ushbu

$$g(x)=\sum_{i=1}^{s} f_i(x),\ f_i(x)\in C(I)$$

ko`rinishida bo`lsa, $L[y]=\sum_{i=1}^{s} f_i(x)$ tenglamaning xususiy yechimini topish uchun s ta $L[y]=f_1(x), L[y]=f_2(x),...,L[y]=f_s(x)$ tenglamaning har biri uchun alohida-alohida xususiy yechim topamiz. Ular mos ravishda $\psi_1(x),\psi_2(x),...,\psi_s(x)$ funksiyalardan iborat bo`lsin. U holda berilgan tenglamaning xususiy yechimini $\sum_{i=1}^{s}\psi_i(x)$ deb yozish mumkin. Haqiqatan, faraz bo`yicha $L[\psi_i]=f_i(x), i=1,2,...,s$. Shuning uchun $L\left[\sum_{i=1}^{s}\psi_i(x)\right]=\sum_{i=1}^{s}L[\psi_i]=\sum_{i=1}^{s}f_i(x)=g(x)$. Demak, $\sum_{i=1}^{s}f_i(x)$ –bir jinsli bo`lmagan tenglamaning xususiy yechimi.

18- mavzu.O`zgarmas koeffitsyientli chiziqli differentsial tenglamalar. (2 soat)

Reja:

1. O`zgarmas koeffitsyientli chiziqli differentsial tenglamalar.
2. Eyler tenglamasi.

O`zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y = 0 \qquad (1$$
ko`rinishdagi tenglamani yechish uchun uning xarakteristik tenglamasini
$$a_0 \lambda^{(n)} + a_1 \lambda^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \qquad (2$$
tuzib olish va uning $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ildizlarini topish kerak. (1) tenglamaning umumiy yechimi, (2) tenglamaning oddiy λ_i ildiziga mos keluvchi $C_i e^{\lambda_i x}$ va k_j karrali λ_j ildiziga mos keluvchi
$$\left(C_{m+1} + C_{m+2} x + C_{m+2} x^2 + \ldots + C_{m+k_j} x^{k_j - 1}\right) e^{\lambda_j x}$$
hadlar yig‘indisidan iborat bo`ladi, bu erda barcha $C$ lar ixtiyoriy o`zgarmaslardir.

(1) tenglamaning koeffitsientlari va λ xarakteristik ildizlari haqiqiy ham, kompleks ham bo`laverishi mumkin.

1-Misol. $y^{(5)} - 12y^{(4)} + 56y''' - 126y'' + 135y' - 54y = 0$ tenglamani yeching.

Yechimi. Xarakteristi tenglamasi
$$\lambda^5 - 12\lambda^4 + 56\lambda^3 - 126\lambda^2 + 135\lambda - 54\lambda = 0$$
yoki
$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)^3 = 0$$
ko`rinishda bo`ladi. Bu tenglamaning oddiy $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$ ildizlarga $C_1 e^x,\ C_2 e^{2x}$ hadlar, 3 karrali $\lambda = 3$ ildizga esa $\left(C_3 + C_4 x + C_5 x^2\right) e^{3x}$ had mos keladi. Demak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi bu hadlarning yig‘indisidan iborat:
$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \left(C_3 + C_4 x + C_5 x^2\right) e^{3x}.$$

Agar (1) tenglamaning barcha koeffitsientlari haqiqiy bo`lsa, uning yechimi $\lambda_1$ xarakteristik ildizlardan birortasi kompleks bo`lganda ham haqiqiy ko`rinishda yozish mumkin. (1) tenglamaning umumiy yechimi (2) tenglamaning $\lambda = \alpha + i\beta$ o`zaro qo`shma kompleks ildizlariga mos keluvchi
$$C_{m+1} e^{\alpha x} \cos \beta x + C_{m+2} e^{\alpha x} \sin \beta x$$
ko`rinishdagi va k karrali $\lambda = \alpha + i\beta$ kompleks ildizlarga mos keluvchi
$$P_{k-1}(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{k-1}(x) e^{\alpha x} \sin \beta x \qquad (3$$
ko`rinishdagi qo`shiluvchilarning yig‘indisidan iborat bo`ladi. Bu erda $C_1$ ixtiyoriy o`zgarmaslar, $P_{k-1}(x)$ va $Q_{k-1}(x)$ lar (3) ifodadagiga o`xshash $k-1$ tartibli ko`bhadlar bo`lib, ularning koeffitsientlari ixtiyriy o`zgarmaslardir.

2-Misol. $y'' - 2y' + 2y = 0$ tenglamani yeching.

Yechimi. Xarakteristik tenglamasi $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ bo`lib, $\lambda = 1 \pm 1$ oddiy ildizlarga ega, shuning uchun yechimning ko`rinishi quyidagicha bo`ladi:
$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x.$$

$$2\left[\left(a_1+b_1+b_0\right)+b_1x\right]\cos x+2\left[\left(b_0+b_1\right)+b_1x\right]\sin x-$$

$$-3\left\{\left[\left(a_0+b_0+a_1\right)+\left(a_1+b_1\right)x\right]\cos x+\right.$$

Ushbu

$$a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f\left(x\right)$$

yoki

$$a_0\left(ax+b\right)^ny^{(n)}+a_1\left(ax+b\right)^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f\left(x\right) \qquad (2$$

ko`rinishdagi tenglamalar Eyler tenglamasi deyiladi. (1) tenglama $x=\pm e^t$ almashtirish bilan, (2) tenglama esa $ax+b=\pm e^t$ almashtirish bilan chiziqli o`zgarmas koeffitsientli tenglamalarga keltirish mumkin. Bunday tenglamalarni yechish esa avvaliga punktlarda mufassal o`rganildi.

Misol. $x^2y''-xy'+y=8x^3$ eyler tenglamasini yeching.

Yechimi. $x=e^t$ almashtirish bajaramiz. Tushunarliki, $t=\ln x,$ bundan

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=y_t'\frac{1}{x}=y_t'e^{-t},$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(y_t'e^{-t}\right)=e^{-t}\frac{d}{dx}\left(y_t'\right)+y_t'\frac{d}{dx}\left(e^{-t}\right)=$$

$$=e^{-t}\frac{d}{dx}\left(y_t'\right)\frac{dt}{dx}+y_t'\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\right)\frac{dt}{dx}=e^{-2t}y_{tt}''-e^{-2t}y_{tt}'=e^{-2t}\left(y_{tt}''-y_t'\right).$$

Endi tenglamaga qo`yib

$$e^{2t}\cdot e^{-2t}\left(y_{tt}''-y_t'\right)-e^te^{-t}y'+y=8e^{3t}$$

ifodani olamiz, bundan esa

$$y_{tt}''-2y_t'+y=8e^{3t} \qquad (3$$

o`zgarmas koeffitsientli tenglamani olamiz.

Avvalo bir jinsli $y_{tt}''-2y_t'+y=0$ tenglamaning umumiy yechimini topib olamiz. Xarakteristik tenglamasi $\lambda^2-2\lambda+1=0$ ko`rinishda bo`lgani uchun $\lambda=1$ uning ikki karrali ildizi.

Demak, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $y=C_1e^t+C_2te^t$ ko`rinshda ekan.

(3) tenglamaning xususiy yechimini $y_1=a_0e^{3t}$ ko`rinishda qidiramiz (2-punktga qarang). U holda

$$y_1'=3a_0e^{3t},\ \ y_1''=9a_0e^{3t},\ \ 9a_0e^{3t}-6a_0e^{3t}+a_0e^{3t}=8e^{3t},\ \ 4a_0=8,\ \ a_0=2$$

kelib chiqadi. Bundan esa xususiy yechim $y_1=2e^{3t}$ ko`rinishda ekanligi kelib chiqadi. endi (15) tenglamaning umumiy yechimini yoza olamiz:

$$y=C_1e^t+C_2te^t+2e^{3t}.$$

Bundan esa $t=\ln x$ ekanligini hisobga olib, berilgan tenglamaning umumiy yechimini olamiz.

$$y=C_1x+C_2x\ln x+2x^3.$$

19- mavzu. Bir jinsli bo`lmagan o`zgarmas koeffitsyienti chiziqli differentsial tenglamalar va ularning xususiy yechimlarini topish usullari. (O`ng tamoni maxsus ko`rinishda bo`lgan tenglamalar). (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Bir jinsli bo`lmagan o`zgarmas koeffitsyienti chiziqli differentsial tenglamalar
2. Ularning xususiy yechimlarini topish usullari. (O`ng tamoni maxsus ko`rinishda bo`lgan tenglamalar).

Chiziqli bir jinsli bo`lmagan, o`zgarmas koeffitsientli differentsial tenglamaning o`ng tomoni $b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m,\ e^{\alpha x},\ \cos\beta x,\ \sin\beta x$ funksiyalarning yig‘indisi va ko`paytmasidan iborat bo`lsa, uning xususiy yechimini noma`lum koeffitsientlar metodi bilan qidirish mumkin.

Agar tenglamaning o`ng tomoni $P_m(x)e^{\gamma x}$ ko`rinishda bo`lsa, (bu erda $P_m(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m$) xususiy yechim

$$y_1 = x^S Q_m(x)e^{\gamma x} \tag{1}$$

ko`rinishda bo`ladi. Bunda $Q_m(x)$ – koeffitsientlar hozircha noma`lum bo`lgan *m* tartibli ko`phad, *S* esa quyidagicha aniqlanadi: agar γ

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y^{(1)}+a_ny=0 \quad (2$$

ko`rinishdagi tenglamaning xarakteristik

$$a_0\lambda^{(n)}+a_1\lambda^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \quad (3$$

tenglamasining ildizi bo`lmasa, $S=0$, agar $\gamma$ tenglamaning *p* karrali ildizi bo`lsa $S=p$.

$Q_m(x)$ ko`phadning koeffitsientlarini topish uchun (1) yechimni berilgan differentsial tenglamaga qo`yib, tenglikning o`ng va chap tomonidagi o`xshash hadlarning koeffitsientlarini tenglash kerak.

Agar o`ng tomonida *sin* va *cos* lar ishtirok etib qolsa, bizga ma`lumki, ular eylar formulasi yordamida ko`rsatkichli funksiyalar orqali ifodalash mumkin:

$$\cos\beta x=\frac{e^{1\beta x}+e^{-1\beta x}}{2},\quad \sin\beta x=\frac{e^{1\beta x}-e^{-1\beta x}}{21} \quad (4$$

U holda masala hozir ko`rilgan holga keladi.

Agar tenglama chap tomonining koeffitsientlari haqiqiy bo`lsa, (4) kompleks funksiyalarsiz masalani hal qilish mumkin.

O`ng tomoni

$$e^{\alpha x}\left(P_k(x)\cos\beta x+Q_i(x)\sin\beta x\right) \quad (5$$

ko`rinishda bo`lgan tenglamalarda xususiy yechimni

$$y_1=x^se^{\alpha x}\left(R_m(x)\cos\beta x+T_m(x)\sin\beta x\right) \quad (6$$

ko`rinishda qidirish mumkin. Bu erda, agar $\alpha+i\beta$ (2) xarakteristik tenglamaning ildizi bo`lmasa, $S=0,$ aks holda S $\alpha+i\beta$ ildizning karraligi, $R_m(x)$ va $T_m(x)$ – *m*-tartibli ko`phadlar, $m=\max\{k,1\},$ $R_m(x)$ va $T_m(x)$ ko`phadlarning koeffitsientlarini topib olish uchun (9) xususiy yechimi berilgan tenglamaga qo`yib, tenglikning o`ng va chap tomonidagi o`xshash hadlarning koeffitsientlarini tenglashtirish kerak.

Shuni ham ta`kidlab o`tish kerakki, bir jinsli bo`lmagan chiziqli tenglamaning umumiy yechimi, shu tenglamaning bitta xususiy yechimi bilan unga mos kelgan bir jinsli tenglamalari yig‘indisiga teng. Undan tashqari, agar tenglamaning o`ng tomoni bir nechta funksiyalar yig‘indisidan iborat bo`lsa, uning xususiy yechimi shu tenglama chap tomonidagi qo`shiluvchilarning har biriga tenglashtirib olingan tenglamalar xususiy yechimlari yig‘indisidan iborat deb qarash mumkin.

Misollar. ***a*)** $y''+y=4xe^x$ tenglamani yeching.

Yechimi. **I.** $y''+y=0$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz. Xarakteristik tenglamasi $\lambda^2+1=0,$ bundan $\lambda_{1,2}=\pm1.$ Demak, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ ko`rinishda bo`ladi.

II. Berilgan tenglamaning xususiy yechimi

$$y=x^sQ_m(x)e^{\gamma x}$$

ko`rinishda qidiramiz. Bizning misolimizda $S=0,$ chunki $\gamma=1$ xarakteristik tenglamaning ildizi emas, $Q_m(x)=b_0+b_1x,$ chunki $P_m(x)=4x,$ ya`ni $m=1,$ shuning uchun xususiy yechimi

$$y_1=(b_0+b_1x)e^x$$

ko`rinishda qidiramiz. Buni berilgan tenglamaga qo`yib,

$$y_1'=(b_0+b_1+b_1x)e^x;\quad y_1'=(b_0+2b_1+b_1x)e^x;$$

$$(b_0+b_1x)e^x+(b_0+2b_1+b_1x)e^x=4xe^x;$$

$$2b_0+2b_1+2b_1x=4x;\quad 2b_0+2b_1=0;$$

$$2b_1=4;\quad b_0=-2;\quad b_1=2$$

larni olamiz. Demak, xususiy yechim $y_1=(2x-2)e^x$ ko`rinishda ekan.

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi (I) bilan berilgan tenglamaning xususiy yechimi (II) ning yig‘indisiga teng:

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x+(2x-2)e^x.$$

b) $y''+2y'-3y=x^2e^x$ tenglamani yeching.

Yechimi. **I.** $y''+2y'-3y=0$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz. Xarakteristik tenglamasi $\lambda^2+2\lambda-3=0$ ko`rinishda bo`ladi, bundan $\lambda_1=1,$ $\lambda_2=-3$ ekanligini topamiz, demak, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$$

ko`rinishda bo`ladi.

II. Berilgan tenglamaning xususiy yechimini oldingi misoldagidek (6) ko`rinishda qidiramiz. Bizning misolimizda $S=1,$ chunki $\gamma=1$ xarakteristik tenglamaning bir karrali ildizi,

$$Q_m(x)=b_0+b_1x+b_2x^2,$$

chunki $P_m(x)=x^2$, ya`ni $m=2,$ shuning uchun xususiy yechim

$$y_1=x\left(b_0+b_1x+b_2x^2\right)e^x$$

ko`rinishda qidiriladi. Buni berilgan tenglamaga qo`yib,

$$y_1'=\left[b_0+(b_0+2b_1)x+(3b_2+b_1)x^2+b_2x^3\right]e^x,$$

$$y_2''=\left[2+(b_0+b_1)+(b_0+4b_1+6b_2)x+(6b_2+b_1)x^2+b_2x^3\right]e^x,$$

$$\left[2+(b_0+b_1)+(b_0+4b_1+6b_2)x+(6b_2+b_1)x^2+b_2x^3\right]e^x+$$

$$+2\left[b_0+(b_0+2b_1)x+(3b_2+b_1)x^2+b_2x^3\right]e^x-$$

$$-3x\left[b_0+b_1x+b_2x^3\right]e^x=x^2e^x,$$

$$4b_0+2b_1=0,\quad 8b_1+6b_2=0,\quad 12b_2=1,$$

$$b_2=1/12,\quad b_1=-1/16,\quad b_0=1/32$$

larni olamiz . Demak, xususiy yechim

$$y_1=x\left(1/32-1/16\cdot x+1/12\cdot x^2\right)e^x$$

ko`rinishda ekan.

Yuqoridagidek, berilgan tenglamaning umumiy yechimi bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi (I) bilan bir jinsli bo`lmagan (berilgan) tenglamaning xususiy yechimi yig‘indisiga teng

$$y_1=C_1e^x+C_2e^{-3x}+x\left(1/32-1/16\cdot x+1/12\cdot x^2\right)e^x.$$

c) $y''-3y'+2y=xe^x\cos x$ tenglamani yeching.

Yechimi. **I.** $y''-3y'+2y=0$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz. Bu tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$\lambda^2-3\lambda+2=0$$

bo`lib, uning ildizlari, $\lambda_1=1,$ $\lambda_2=2$ bo`ladi. Bundan esa bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}$$

ko`rinishda ekanligi kelib chiqadi.

II. Endi berilgan tenglamaning xususiy yechimini (9) ko`rinishda, ya`ni

$$y=x^se^{\alpha x}\left(R_m(x)\cos\beta x+T_m(x)\sin\beta x\right)$$

holda qidiramiz, chunki tenglamaning o`ng tomoni (8) ko`rinishda, Bizning misolda $\alpha=1,$ $\beta=1,$ $\alpha\pm\beta l=1+l,$ $S=0,$ chunki $\alpha+\beta l=1+l,$ $S=0,$ xarakteristik tenglamaning yechimi emas.

$$R_m(x)=a_0+a_1x,\ T_m(x)=b_0+b_1x,\quad \text{chunki}\quad P(x)=x\quad \text{va}\quad Q(x)=0,$$

bo`lib, $k=1$ va $l=0,$ shuning uchun $m=1.$ SHunday qilib, xususiy yechimni

$$y_1=e^x\left((a_0+a_1x)\cos x+(b_0+b_1x)\sin x\right)$$

ko`rinishda qidirishimiz kerak ekan. Buni tenglamaga qo`yib,

$$y_1' = \Big[\big(b_1 - a_0 - a_1 x\big)\sin x + \big(a_1 + b_0 + b_1 x\big)\cos x + \big(a_0 + a_1 x\big)\cos x +$$

$$+\big(b_0 + b_1 x\big)\sin x\Big]e^x = \Big[\big(a_0 + b_0 + a_1 + \big(a_1 + b_1\big)x\big)\cos x +$$

$$\big(b_0 - a_0 + b_1 + \big(b_1 - a_1\big)x\big)\sin x\Big]e^x,$$

$$y_1'' = \Big\{\Big[a_1 + b_1 + b_0 - a_0 + b_1 + \big(b_1 - a_1\big)x\Big]\cos x +$$

$$+\Big[b_1 - a_1 + a_0 + b_0 + a_1 + \big(a_1 + b_1\big)x\Big]\sin x +$$

$$+\Big[a_0 + b_0 + a_1 + \big(a_1 + b_1\big)x\Big]\cos x +$$

$$+\Big[b_0 - a_0 + b_1 + \big(b_1 - a_1\big)x\Big]\sin x\Big\}e^x =$$

$$\Big\{\Big[2\big(a_1 + b_1 + b_0\big) + 2b_1 x\Big]\cos x\Big[2\big(b_0 + b_1\big) + 2b_1 x\Big]\sin x\Big\}e^x,$$

$$+\Big[\big(b_0 - a_0 + b_1\big) + \big(b_1 - a_1\big)x\Big]\sin x\Big\} +$$

$$+2\Big[\big(a_0 + a_1 x\big)\cos x + \big(b_0 + b_1 x\big)\sin x\Big] = x\cos x,$$

$$2b_1 - a_1 - a_0 - b_0 = 0, \quad -a_1 - b_1 = 1, \quad 3a_0 + b_0 - b_1 = 0,$$

$$b_1 + 3a_1 = 0, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 1/2, \quad b_0 = -4\frac{1}{2}, \quad b_1 = -1\frac{1}{2}$$

larni olamiz. Bundan esa berilgan tenglamaning xususiy yechimi

$$y_1 = e^x\left(\big(1 + 1/2\cdot x\big)\cos x - \left(4\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}x\right)\sin x\right)$$

ko`rinishda ekanligi kelib chiqadi.

Demak, berilgan tenglamalarning umumiy yechimi bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi (1) bilan berilgan tenglamaning xususiy yechimi yig‘indisiga teng:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \left[\big(1 + 1/2\cdot x\big)\cos x - \left(4\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}x\right)\sin x\right]e^x.$$

d) $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechimi. **I.** Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topib olamiz: $y'' - 5y' = 0.$ Bu tenglamaning xarakteristik tenglamasi $\lambda^2 - 5\lambda = 0$ ko`rinishda bo`ladi, bundan $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 5$ larni olamiz. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{5x} = y = C_1 + C_2 e^{5x}$$

ko`rinishda bo`ladi.

Yuqorida eslatilgan qoidaga ko`ra, bu tenglamaning o`ng tomoni ikkita har xil funksiyalarning yig‘indisi bo`lgan uchun tenglamaning chap tomoni, uning o`ng tomonidagi qo`shiluvchilarning har biriga tenglashtirib, xususiy yechimlar topamiz va berilgan tenglamaning xususiy yechimi sifatida ularning yig‘indisini olamiz.

II. $y'' - 5y' = 3x^2$ tenglamaning xususiy yechimini (6) ko`rinishda ya`ni $y_1 = x^s Q_m(x) e^{\gamma x}$ holda qidiramiz. Bizning misolda $\gamma = 0$ va demak, $S = 0$ chunki

$\gamma=0$ xarakteristik tenglamaning bir karrali ildizi, $Q_m(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, chunki $P_m(x)=3x^2$, shunday qilib xususiy yechimni

$$y_1=x\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)=a_0x+a_1x^2+a_2x^3$$

ko`rishda qidirish kerak ekan. Buni tenglamaga qo`yib

$$y_1'=a_0+2a_1x+3a_2x^2,\quad y_1''=2a_1+6a_2x,$$

$$2a_1+6a_2x-5\left(a_0+2a_1x+3a_2x^2\right)=3x^2,\quad 2a_1-5a_0=0,$$

$$6a_2-10a_1=0,\quad -15a_2=3,\quad a_1=-3/25,\quad a_0=-6/125$$

larni olamiz. Demak, bu tenglamaning xususiy yechimi

$$y_1=-6/125\cdot x-3/25\cdot x^2-1/5x^3$$

ko`rinishda ekan.

III. $y''-5y'=\sin 5x$ tenglamaning xususiy yechimi (9) ko`rinishda, ya`ni $y_2=x^se^{\alpha x}\left(R_m(x)\cos\beta x+T_m(x)\sin\beta x\right)$ holda qidiramiz. Bizning misolimizda $S=0,$ chunki $\alpha=0,\ \beta=5,\ \alpha+\beta l=5l$ harakteristik tenglamaning ildizi emas, $R_m(x)=a_0$, $T_m(x)=b_0$, chunki

$$P(x)=0,\ Q(x)=1,\ k=0,\ l=0$$

bo`lib, shunday qilib, xususiy yechimni

$$y_2=a_0\cos 5x+b_0\sin 5x$$

ko`rinishda qidirish kerak ekan. Buni tenglamaga qo`yib,

$$y_2'=5b_0\cos 5x-5a_0\sin 5x,\quad y_2''=-25b_0\sin 5x-25a_0\cos 5x,$$

$$-25b_0\sin 5x-25a_0\cos 5x-25b_0\cos 5x+25a_0\sin 5x=\sin 5x,$$

$$25a_0-25b_0=1,\quad 25a_0+25b_0=0,\quad a_0=1/50,\quad b_0=-1/50$$

larni olamiz. Bundan esa o`z navbatida xususiy yechimning

$$y_2=1/50\cos 5x-1/50\sin 5x$$

ekanligi kelib chiqadi.

Yuqorida aytilganiga ko`ra, berilgan tenglamaning umumiy yechimini topilgan yechimlarning yig‘indisidan iborat:

$$y=C_1+C_2e^{5x}-\left(6x/125+3x^2/25+x^3/5\right)+1/50\cos 5x-1/50\sin 5x.$$

.

20- mavzu. O’zgarmas koeffitsientliga keltiriladigan tenglamalar (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. O’zgarmas koeffitsientliga keltiriladigan tenglamalar

21- mavzu. 2-tartibli chiziqli differensial tenglamalar (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. 2-tartibli chiziqli differensial tenglamalar

22- mavzu.Ikkinchi tartibli differentsial tenglamalarni darajali qatorlar yordamida integrallash. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. 2-tartibli chiziqli differensial tenglamalar
2. Ikkinchi tartibli differentsial tenglamalarni darajali qatorlar yordamida integrallash.

$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ (1) tenlamani qaraymiz yoki

$P_0(x)y''+P_1(x)y'+P_2(x)y=0$ (2)

Bu yerda P,q,P_0 , P_1, P_2 lar x dan bog'liq funksiyalar $\frac{d}{dx}\left(P\frac{dy}{dx}\right)+qy=0$ (3) tenglama o'z –oz'iga qo'shma tenglama deb aytiladi.

Har qanday (2) – tenglamani x dan bog'liq biror funksiyaga ko'paytirib (3) – ko'rinishga keltirish mumkin. (2)- tenglamani biror $\mu(x)$ da ko'paytiramiz.

$P_0(x)y''+P_1(x)\mu(x)y'+P_2(x)\mu(x)y=0$ (4)

$P\frac{d^2y}{dx^2}+P'\frac{dy}{dx}+qy=0$ (5)

(4) va (5) ni solishtirsak ,

$(\mu(x)P_0(x))'=P_1(x)\mu(x)$

$\mu'P_0+\mu P_0'=P_1\mu$

$\mu'P_0=\mu(P_1-P_0')$

$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{P_1}{P_0}-\frac{P_0^1}{P_0}$ $d\ln\mu=\frac{P_1}{P_0}dx-d\ln P_0$

$\ln\mu=\int\frac{P_1}{P_0}dx-\ln P_0$ $\mu=\frac{1}{P_0}e^{\int\frac{P_1}{P_0}dx}$

$e^{\int\frac{P_1}{P_0}dx}y''+\frac{P_1}{P_0}e^{\int\frac{P_1}{P_0}dx}y'+\frac{P_2}{P_0}e^{\int\frac{P_1}{P_0}dx}y=0$

$P=e^{\int\frac{P_1}{P_0}dx}$

$\frac{d}{dx}\left(e^{\int\frac{P_1}{P_0}dx}\frac{dy}{dx}\right)++\frac{P_2}{P_0}e^{\int\frac{P_1}{P_0}dx}y=0$

$q=\frac{P_2}{P_0}e^{\int\frac{P_1}{P_0}dx}$

$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$ tenglamani 3-ko'rinishga keltiramiz.

$$\mu(x)x^2 y'' + \mu(x)xy' + \mu(x)(x^2 - n^2)y = 0 \quad (1)$$

$$\left(P(x)y'\right) + q(x)y = 0$$

$$P(x)y'' + P'(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (2)$$

$$(\mu x^2) = \mu x$$

$$\mu' x^2 + 2x\mu = \mu x \qquad \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dx}{x}$$

$$\mu' x^2 = -x\mu \qquad \mu = -\frac{1}{x}$$

$$xy'' + y' + \left(x - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0 \qquad (xy') + \left(x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0$$

2-tartibli chiziqli differensial tenglamani $y'' + Q(x)y = 0$ (6) ko'rinishga keltirish mumkin .

Faraz qilamiz , $P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$ (2) tenglama (3)- ko'rinishga keltirilgan bo'lsin . (3)- tenglamada $d\xi = \dfrac{dx}{P(x)}$ almashtirish olamiz

$$\xi = \int \frac{dx}{P(x)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{P(x)}\frac{dy}{d\xi}$$

$$\left(P(x)y'\right)' = \frac{dx}{d\xi}(P(x)y')\frac{d\xi}{dx} = \left(\frac{1}{P(x)}\frac{d^2y}{d\xi^2}\right) = \frac{d}{d\xi}\left(P(x)\frac{1}{P(x)}\frac{dy}{d\xi}\right)\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{P(x)}\frac{d^2y}{d\xi^2}$$

$$\frac{1}{P(x)}\frac{d^2y}{d\xi^2} + q(x)y = 0, \qquad \frac{d^2y}{d\xi^2} + Q(\xi)y = 0. \qquad P(x)q(x) = Q(\xi)$$

$$\xi = \ln x, \qquad x = e^{\xi}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{d\xi}$$

$$\frac{1}{x}\frac{d^2y}{d\xi^2} + \left(x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0, \qquad \frac{d^2y}{d\xi^2} + \left(e^{2\xi} - n^2\right)y = 0$$

Misol: $xy'' + \dfrac{1}{2}y' - y = 0$

$$\mu' x + \mu = \frac{\mu}{2} \qquad \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dx}{2x}$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$x^{\frac{1}{2}} y'' + \frac{y}{2\sqrt{x}} - \frac{y}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\left(\sqrt{x} y'\right)' - \frac{y}{\sqrt{x}} = 0 \qquad d\xi = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$ almashtirish olamiz.

$$\Im = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}, \qquad x = \frac{\Im^2}{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{dy}{d\xi}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{d^2 y}{d\xi^2} - \frac{y}{\sqrt{x}} = 0, \qquad y'' - y = 0$$

$$y = C_1 e^{\xi} + C_2 e^{-\xi}$$

$$Y = C_1 e^{2\sqrt{x}} + C_2 e^{-2\sqrt{x}}$$

Noma'lum funksiyani chiziqli almashtirish yordamida I – tartibli hosila qatnashgan hadni yo'qotish mumkin.
ya`ni (1) tenglamani (6) ko'rinishiga keltirish mumkin.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1) \qquad y = u(x)z \qquad y' = u'z + zu'$$

Z dan bogliq funksiya noma`lum funksiya

$y'' = z''u + 2u'z + u''z$ ni keltirib tenglamaga qo'yamiz.

$$z''u + 2u'z' + u''z + P(x)(u'z + z'u) + Q(x)uz = 0$$

guruhlaymiz.

$$z''U + (2u' + P(x)U)z' + (u'' + P(x)u' + Q(x)u)z = 0$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{2}p(x)dx \qquad U = \ell^{-\frac{1}{2}spdx} \qquad 2U + P(x)U = 0 \qquad U' = -\frac{P}{2}\ell^{-\frac{1}{2}spdx}$$

$$y = z \cdot \ell^{-\frac{1}{2}\int Pdx} \qquad U''\left(\frac{P^2}{4} - \frac{P^1}{2}\right)\ell^{-\frac{1}{2}\int SPdx}$$

keltirib joyiga qo'yamiz

$$z''\ell^{-\frac{1}{2}\int Pdx} + \left(\frac{P^2}{4} - \frac{P^1}{2} + \frac{P^2}{2} + Q\right)\ell^{-\frac{1}{2}\int Sdx} \cdot z = 0$$

$$z''+\left(-\frac{P^2}{4}-\frac{P^1}{2}+Q\right)z=0 \ bundan \qquad (6)$$

$I(x)=Q-\frac{P^2}{4}-\frac{P^2}{2}$ ko’rinishiga keladi bu funksiyaga (1) –tenglamaning invarionetligi deyiladi.

Misol: $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$ $\quad y=Uz$ almashtirish olamiz n-biror x ga bog’liq funksiya z-yangi funksiya

$$2'U+2U'z'+U''z+\frac{2}{x}(U'z+z'U)+Uz=0$$

$$z''U+(2U'+\frac{2U}{x})z'+(U''+\frac{2}{x}U'+U)z=0$$

$$2U'+\frac{2U}{x}=0 \qquad \frac{du}{u}=-\frac{dx}{x} \qquad U=\frac{1}{x} \qquad U'=-\frac{1}{x^2} \qquad U''=\frac{2}{x^3}$$

$$\uparrow_1 2=\pm i \qquad z=C\cos x+c_2\sin x$$

$$y=\frac{1}{x}(C_1,\cos x+C_2\sin x)$$

$$P=\frac{2}{x} \qquad Q=1 \qquad I(x)=1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}=1$$

Invarianti 1 ga teng o’zgarmas koefisientiga keladi.

23- mavzu.Differentsial tenglamalar sistemasini normal ko`rinishga keltirish. (2 soat)

1. Differentsial tenglamalar sistemasini normal ko`rinishga keltirish.

24- mavzu. Differentsial tenglamalarning normal sistemasi uchun mavjudlik va yagonalik teoremasi. (2 soat)

Reja:

1. Differentsial tenglamalarning normal sistemasi uchun mavjudlik va yagonalik teoremasi.

25- mavzu. Chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi. (2 soat)

Reja:

1. Chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi.
2. Chiziqli differentsial tenglamalar sistemasini yechish usullari.

Ciziqli bir jinsli sistemalarni ko`rib o`taylik. Keyingi mulohazalarning qulayligi uchun L operatorni

$$L(y)=\frac{dy}{dx}-A(x)y \qquad \textbf{(1)}$$

tenglik yordamida kiritamiz. Agar $p=\frac{d}{dx}$ va E-birlik $n\times n$ natrissa bo`lsa, (1) ni yana ushbu

$$L(p)y=(pE-A(x))y$$ ko`rinishda yozish mumkin. Kiritilgan L operator yordamida

$$L(y)=0 \text{ yoki } L(p)y=0 \qquad \textbf{(2)}$$

ko`rinishda yozish mumkin.

Avval L(p) operatorning xossalarini o`rganamiz:

1-xossa. Agar C-*ixtiyoriy o`zgarmas son bo`lsa,*

$$L(Cy)=CL(y)$$

ayniyat o`rinli.

Haqiqattan,

$$L(Cy)=\frac{d(Cy)}{dx}-A(x)\quad (Cy)=C\frac{dy}{dx}-CA(x)\ \text{y=CL(y)}.$$

2-xossa. Agar $C_1,\ C_2,...,\ C_m$ - ixtoyoriy o`zgarmas sonlar bo`lsa,

$$L\left(\sum_{i=1}^{m}C_i y^{(i)}\right)=\sum_{i=1}^{m}C_i L(y^{(i)})$$

ayniyat o`rinli, bunda $y^{(1)},y^{(2)},...,y^{(m)}$ - biror vektor-funksiyalar.

Haqiqattan, soda mulohazalar yordamida topamiz:

$$L\left(\sum_{i=1}^{m}C_i y^{(i)}\right)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{m}C_i y^{(i)}\right)-A(x)\left(\sum_{i=1}^{m}C_i y^{(i)}\right)=\sum_{i=1}^{m}C_i\frac{d}{dx}y^{(i)}-\sum_{i=1}^{m}C_i(A(x)y^{(i)})=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}C_i\left(\frac{d}{dx}y^{(i)}-A(x)y^{(i)}\right)=\sum_{i=1}^{m}C_i L(y^{(i)})$$

Bu xossalardan foydalanib quyidagi teoremalarni isbotlaymiz.

1-teorema. Agar $\varphi^{(1)}(x),\varphi^{(2)}(x),...,\varphi^{(m)}(x)$ vektor-funksiyalarning har biri biror I intervalda

$$\frac{dy}{dx}A(x)y \qquad \textbf{(3)}$$

tenglamaning yechimi bo`lsa, u holda bu funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi ham yechim bo`ladi.

I s b o t. Teoremaning shartiga ko`ra $L()\ L(\varphi^{(i)}(x))=0,\ \text{x}\in\text{I, i=1,...,m}$. Shuning uchun 2-xossadan foydalansak:

$$L\left(\sum_{i=1}^{m}C_i\varphi^{(i)}(x)\right)=\sum_{i=1}^{m}C_i L(\varphi^{(i)}(x))\equiv 0$$

2-teorema. Agar $y=\varphi(x)$ vektor-funksiya (3) tenglamaning biror I intervalda aniqlangan va $\varphi(x_0),\ \text{x}_0\in I$ boshlang`ich shartni qanoatlantiradigan yechimi bo`lsa, u holda I intervalda $\varphi(x)$ funksiya aynan nolga teng bo`ladi, ya`ni $\varphi(x)=0,\ \text{x}\in\text{I}$.

I s b o t. (3)-tenglamaning trivial y=0 yechimi mavjud. Ammo teoremaning shartiga qayd qilingan $y=\varphi(x)$ yechim shu trivial yechim bilan bir xil boshlang`ich qiymatlarga ega. Shuning uchun chiziqli sistemalar uchun mavjudlik va yagonalik teoremasiga ko`ra $y=\varphi(x)$ yechim trivial yechim bilan butun I intervalda ustma-ust tushadi, ya`ni $\varphi(x)\equiv 0,\ \text{x}\in\text{I}$.

3-teorema. Agar (3)-tenglamada A(x) matritsa haqiqiy bo`lib, shu tenglama $y=\varphi(x)+ig(x),\ \text{x}\in\text{I}$ kompleks yechimga ega bo`lsa, u holda har bir $\varphi(x),\ \text{g(x)},\ \text{x}\in\text{I}$ haqiqiy vektor-funksiyalar ham (3)-tenglamaning yechimi bo`ladi.

I s b o t. Haqiqattan, shart bo`yicha $L(\varphi(x)+ig(x))\equiv 0,\ \text{x}\in\text{I}.$ Bundan 1- va 2-

xossalarga ko`ra $L(\varphi(x)+ig(x))=L(\varphi(x)+iLg(x))=0,\ \mathrm{x}\in \mathrm{I}.$
Ammo kompleks funksiya nolga teng bo`lishi uchun uning haqiqiy va mavhum qismi nolga teng bo`lishi zarur va yetarli. Shuning uchun $L(\varphi(x))\equiv 0,\ \ \mathrm{L(g(x))}\equiv 0,\ \mathrm{x}\in \mathrm{I}$

Vektor-funksiyalarning chiziqli bog`liqligi va erkliligi.
Keyingi mulohazalarda muhim rol o`ynaydigan vektor-funksiyalarning chiziqli bog`liqligi va erkliligi tushunchasini kiritamiz.

**1-ta`rif.** Agar bir vaqtda nolga teng bo`lmagan shunday $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ o`zgarmas sonlar mavjud bo`lsaki, ular uchun biror I intervalda ushbu $\alpha_1\varphi^{(1)}(x)+\alpha_2\varphi^{(2)}(x)+...+\alpha_k\varphi^{(k)}(x)\equiv 0$ ayniyat o`rinli bo`lsa, u holda

$$\varphi^{(1)}(x),\varphi^{(2)}(x),...,\varphi^{(k)}(x),\varphi^{(j)}(x)=\begin{bmatrix}\varphi_1^{(j)}(x)\\ \bullet\\ \bullet\\ \bullet\\ \varphi_n^{(j)}(x)\end{bmatrix},\ \ \mathrm{j=1,2,...,m} \qquad \textbf{(4)}$$

vektor-funksiyalar I intervalda chiziqli bog`liq deyiladi. Agar yuqoridagi ayniyat faqat $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_k=0$ bo`lgandagina o`rinli bo`lsa, u holda $\varphi^{(1)}(x),\varphi^{(2)}(x),...,\varphi^{(k)}(x)$ vektor- funksiyalar I intervalda chiziqli erkli deyiladi.

1-ta`rifdan ko`rinadiki, agar $\varphi^{(1)}(x),\varphi^{(2)}(x),...,\varphi^{(k)}(x)$ vektor-funksiyalardan birortasi, masalan $\varphi^{(i)}(x),\ 1\le i\le \mathrm{k}$ vektor-funksiya nol vektor-funksiya bo`lsa, u holda $\varphi^{(1)}(x),\varphi^{(2)}(x),...,\varphi^{(k)}(x)$ funksiyalar chiziqli bog`liq bo`ladi. Buni isbot etish uchun $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_{i-1}=\alpha_{i+1}=...=\alpha_k=0,\ \ \alpha_i\ne 0$ deb tanlash yetarli.

M i s o l. Ushbu $\varphi^{(1)}(x)=\begin{pmatrix}\cos(x)\\ \sin(x)\end{pmatrix},\ \ \varphi^{(2)}(x)=\begin{pmatrix}-\sin(x)\\ \cos(x)\end{pmatrix}$ vektorlar ixtiyoriy I intervalda chiziqli erkli. Haqiqattan, ular chiziqli bog`liq bo`lsin deylik. U holda $\alpha_1,\alpha_2,\ \alpha_1^2+\alpha_2^2\ne 0$ sonlar uchun I intervalda $\alpha_1\varphi^{(1)}(x)+\alpha_2\varphi^{(2)}(x)+...+\alpha_k\varphi^{(k)}(x)\equiv 0,\ \mathrm{x}\in \mathrm{I}$ yoki

$$\begin{cases}\alpha_1\cos x-\alpha_2\sin x=0, & \mathrm{x}\in \mathrm{I}\\ \alpha_1\sin x+\alpha_2\cos x=0, & \mathrm{x}\in \mathrm{I}\end{cases}$$

ayniyatlar o`rinli bo`lishi kerek.

Ammo I intervaldan olingan ixtiyoriy x uchun α_1 va α_2 larga nisbatan ushbu

$$\begin{cases}\alpha_1\cos x-\alpha_2\sin x=0,\\ \alpha_1\sin x+\alpha_2\cos x=0\end{cases}$$

sistema matritsaning determinanti 1 ga teng. Shuning uchun bu sistema ixtiyoriy $x\in I$ uchun faqat trivial yechimga ega bo`ladi, ya`ni $\alpha_1=\alpha_2=0.$ Bu tegishli vektor-funksiyalar chiziqli bog`liq bo`lsin degan farazdan kelib chiqqan ziddiyat. Demak, olingan vektor-funksiyalar chiziqli erkli.

Endi ushbu

$$\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), ..., \varphi^{(k)}(x), \varphi^{(j)}(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1^{(j)}(x) \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \varphi_n^{(j)}(x) \end{bmatrix}, \ \text{j=1,2,...,m}$$

vektor-funksiyalar biror I da aniqlangan bo`lib, 4-tenglamaning yechimlari bo`lsin. Quyidagi teorema o`rinli.

4-teorema. Agar x ning I intervaldan olingan kamida bitta x_0, $x_0 \in I$ qiymati uchun

$$\varphi^{(1)}(x_0), \varphi^{(2)}(x_0), ..., \varphi^{(m)}(x_0) \qquad \textbf{(5)}$$

vektor chiziqli bog`liq bo`lsa, u holda 4-yechimlar I intervalda chiziqli bog`liq bo`ladi. Boshqacha aytganda, agar 4- yechimlar I da erkli bo`lsa, u holda x ning I intervaldan olingan birorta ham qiymatida 4-yechimlar chiziqli bo`lmaydi.

I s b o t. (5)- vektorlar chiziqli bog`iq bo`lsin, ya`ni $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^2 \neq 0$ sonlar uchun

$$\alpha_1 \varphi^{(1)}(x) + \alpha_2 \varphi^{(2)}(x) + ... + \alpha_m \varphi^{(m)}(x) = 0$$

tenglik o`rinli. Endi

$$\varphi(x) = \alpha_1 \varphi^{(1)}(x) + \alpha_2 \varphi^{(2)}(x) + ... + \alpha_m \varphi^{(m)}(x)$$

deb belgilaylik. 1-teoremaga ko`ra shu $\varphi(x)$ funksiya teoremaning (3)-tenglamaning yechimi bo`ladi. Ammo $\varphi(x)$ funksiya teoremaning shartiga ko`ra $x = x_0$ nuqtada nolga teng. Shuning uchun 1-teoremaga ko`ra $\varphi(x) \equiv 0, \ x \in \mathrm{I}$ $\varphi(x) = \alpha_1 \varphi^{(1)}(x) + \alpha_2 \varphi^{(2)}(x) + ... + \alpha_m \varphi^{(m)}(x) \equiv 0, \ x \in \mathrm{I}$. Teorema isbot bo`ldi.

Yechimlarning fundamental sistemasi.

2-ta`rif. Agar biror I intervalda aniqlangan

$$\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), ..., \varphi^{(n)}(x), \varphi^{(i)}(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1^{(i)}(x) \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \varphi_n^{(i)}(x) \end{bmatrix}, \ \text{i=1,2,...,n} \qquad \textbf{(6)}$$

vektor-funksiyalar sistemasi (3)-tenglamaning chiziqli erkli yechimlar sistemasini tashkil etsa, u holda bu sistema yechimlarining fundamental sistemasi, yoki qisqacha, *fundamental sistema* deyiladi.

5-teorema. Differensial tenglamaning chiziqli bir jinsli sistemasi uchun fundamental sistema mavjud.

I s b o t. Chiziqli bir jinsli (3)-sistemani olamiz. Yana biror $a^{(1)}, a^{(2)}, ..., a^{(n)}$ o`zgarmas vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo`lsin. O`zgarmas vektorlarning bunday sistemasi mavjud. Buni ko`rsatish uchun $a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $a^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., a^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ deb tanlash yetarli, chunki bu vektorlardan tuzilgan matritsa determinanti noldan farqli (1 ga teng). Endi ushbu

$$\varphi^{(1)}(x_0)=a^{(1)},...,\varphi^{(n)}(x_0)=a^{(n)}$$

boshlang`ich shartlarni qanoatlantiradigan (6)-yechimlar sistemasini ko`ramiz. Tanlashga ko`ra $\varphi^{(1)}(x_0),...,\varphi^{(n)}(x_0)$ vektorlar chiziqli erkli. Demak, 4-teoremaga asosan (6)-yechimlar sistemasi chiziqli erkli, ya`ni shu yechimlar sistemani tashkil etadi.

26- mavzu.O`zgarmas koeffitsyientli chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi. (2 soat)

Reja:

3. O`zgarmaskoeffitsyientli chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi.

Noma`lumni yo`qotish usuli. Bu usul umuman olganda sistemani tartibi yuqoriroq bo`lgan bir noma`lumli tenglamaga keltiradi. Sistemani bu usul bilan yechish faqat sodda sistemalar uchungina yaraydi, xolos.

Misol. $\begin{cases}\dot{x}=x+y\\ \dot{y}=3y-2x\end{cases}$ sistemani yeching

Yechimi. Birinchi tenglikdan $y=\dot{x}-x$ ni olib, ikkinchi tenglamaga qo`yamiz va

$$\dot{y}=\ddot{x}-\dot{x};\quad \ddot{x}-\dot{x}=3(\dot{x}-x)-2x;\quad \ddot{x}-4\dot{x}+5x=0$$

bir noma`lumli ikkinchi tartibli chiziqli tenglamani olamiz. Xarakteristik tenglamasi $\lambda^2-4\lambda-5=0$ bo`lib, $\lambda_{1,2}=2\pm1$ bo`ladi. Bu tenglamaning yechimi

$$x=e^{2t}\left(C_1\cos t+C_2\sin t\right)$$

ko`rinishda bo`ladi. Bundan foydalanib, birinchi tenglikdan y ni topib olish mumkin:

$$y=\dot{x}-x=\left(-C_1\sin t+C_2\cos t+2C_1\cos t+2C_2\sin t\right)e^{2t}-$$

$$-\left(C_1\cos t+C_2\sin t\right)e^{2t}=\left[\left(C_1+C_2\right)\cos t-\left(C_1-C_2\right)\sin t\right]e^{2t}.$$

Shunday qilib, tenglamaning yechimi

$$x=e^{2t}\left(C_1\cos t+C_2\sin t\right),$$

$$y=e^{2t}\left[\left(C_1+C_2\right)\cos t-\left(C_1-C_2\right)\sin t\right]$$

bo`ladi.

2. Bizga

$$\begin{aligned}&\dot{x}=a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\dot{x}_n=a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n\end{aligned}\qquad (1$$

ko`rinishdagi, yoki vektor formada

$$\dot{X}=AX,\qquad (2$$

tenglamalar sistemasi berilgan bo`lsin. Bu erda $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ – vektor, $A=\begin{pmatrix}a_{11}\ldots a_{1n}\\ a_{n1}\ldots a_{nn}\end{pmatrix}$ –

matritsa. Bu sistemani yechish uchun uning xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0. \qquad (3$$

$\lambda_i,\ i=1,\dots,m$ – (3) tenglamaning k_i karrali ildizlari bo\`lsin $\left(k_1+\dots+k_m=n\right)$. Har bir λ_i ga

$$x^i\left(t\right)=Q^i\left(t\right)e^{\lambda_i t},\quad i=1,\dots,m \qquad (4$$

funksiyani mos qo\`yamiz. Bu erda $Q^i\left(t\right)$ vektor funksiya bo\`lib, har bir komponenti tartibi k_i-1 dan katta bo\`lmagan noma\`lum koeffitsientli ko\`phaddan iborat. (1) sistemaga $\lambda_i$ ga mos kelgan yechimini (4) ko\`rinishda qidiramiz. Uni (1) sistemaga qo\`yib, $e^{\lambda_i t}$ larga qisqartirilgandan keyin noma\`lum koeffitsientlarni topish uchun nk_i ga tenglamadan iborat chiziqli oddiy algebraik sistemani olamiz. Bu sistemani yechib, (4) ning koeffitsientlarini aniqlab olamiz. Umumiy yechim esa

$$x=\sum_{i=1}^{m}C_1x^i\left(t\right) \qquad (5$$

ko\`rinishda bo\`ladi. Bu bayon qilingan metod e***yler metodi*** deb ham yuritiladi.

Misol. Quyidagi sistemani yeching.

$$\dot{x}=2x+y+z,$$
$$\dot{y}=-2x-z,$$
$$\dot{z}=2x+y+2z.$$

Yechimi. Koeffitsientlardan tuzilgan matritsa

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ko\`rinishda bo\`lib, uning xos sonlari, ya\`ni xarakteristik tenglamaning ildizlari $\lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=1.$ eyler metodi bilan sistemani echamiz.

$\lambda_1=2$ oddiy xos songa mos kelgan (4) ko\`rinishdagi funksiya (yechim) quyidagicha bo\`ladi:

$$x=S_1e^{2t},\quad y=S_2e^{2t},\quad z=S_3e^{2t}.$$

Buni berilgan sistemaga qo\`yib,

$$2S_1=2S_1+S_2+S_3,$$
$$2S_2=-2S_1-S_3,$$
$$2S_3=2S_1+S_2+2S_3,$$

sistemani olamiz va bundan $S_2=-2S_1,\ S_3=2S_1,\ S_1$ – ixtiyotiy son ekanligini topamiz.

$\lambda_2=\lambda_3=1$ ikki karrali xos songa mos kelgan (4) ko\`rinishdagi yechim quyidagicha bo`ladi:

$$x=\left(a_1+a_2t\right)e^t,$$

$$y=\left(b_1+b_2t\right)e^t,$$

$$z=\left(c_1+c_2t\right)e^t.$$

Buni tenglamaga qo`yib e^t ga qisqartirib,

$$a_1+a_2=2a_1+b_1+c_1 \quad \text{(I)} \qquad a_2=2a_2+b_2+c_2 \quad \text{(II)}$$

$$b_1+b_2=-2a_1-c_1 \quad \text{(III)} \qquad b_2=-2a_1-c_2 \quad \text{(IV)}$$

$$c_1+c_2=2a_1+b_1+2c_1 \quad \text{(V)} \qquad c_2=2a_2+b_2+2c_2 \quad \text{(VI)}$$

sistemani olamiz. Ikkinchi va to`rtinchi tenglamalardan $a_2=0,\ b_2+c_2=0$ birinchi va uchinchidan esa $a_1+b_2=0$ va beshinchisidan $c_1=b_2-b_1$ ifodalarga ega bo`lamiz. SHunday qilib, $\lambda_2=\lambda_3=1$ ildiziga mos kelgan

$$x=-b_2e^t,$$

$$y=\left(b_1+b_2t\right)e^t,$$

$$z=\left(b_2-b_1-b_2t\right)e^t$$

yechimlarni olamiz.

Topilgan yechimlarning yig‘indisini olsak, sistemaning umumiy yechimi

$$x=C_1e^{2t}-C_2e^t,$$

$$y=-2C_1e^{2t}+\left(C_3+C_2t\right)e^t,$$

$$z=2C_1e^{2t}+\left(C_2-C_3-C_2t\right)e^t$$

ko`rinishda bo`ladi, bu erda $C_1,\ C_2,\ C_3$ ixtiyoriy o`zgarmaslar.

3. Agar λ xarakteristik tenglamaning kompleks ildizi bo`lsa, yuqorida berilgan eyler metodi orqali topilgan yechim ham kompleks funksiyalar orqali ifodalanadi. Agar (1) tenglamaning koeffitsientlari haqiqiy sonlardan iborat bo`lsa, yechimni ham haqiqiy funksiyalar orqali ifodalash mumkin. Buning uchun $\lambda=\alpha+\beta i$ kompleks ildizga mos kelgan kompleks yechimning haqiqiy va mavhum qismlari chiziqli erkli yechimlar bo`lishidan foydalanish kerak.

Misol. $\begin{cases}\dot{x}=4x-y\\ \dot{y}=5x+2y\end{cases}$ sistemani yeching.

Yechimi. $\begin{vmatrix}4-\lambda & -1\\ 5 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0,\ \lambda^2-6\lambda+13=0$ xarakteristik tenglamani tuzib, $\lambda_{1,2}=3\pm 2i$ ildizlarni olamiz. $\lambda_1=3+2i$ ildizga mos kelgan xos vektorni topaylik:

$(1-2i)a-b=0$, $5a-(1+2i)b=0$

$a=1$, $b=1-2i$ deb olib, quyidagi xususiy yechimni topamiz:

$$x=e^{(3+21)t},\quad y=\left(1-21\right)e^{(3+21)t}.$$

Berilgan sistemaning koeffitsientlari haqiqiy bo`lgani uchun $\lambda_2=3-2i$ ildizga mos kelgan yechimni qidirib o`tirishning hojati yo`q, chunki u topilgan yechim bilan o`zaro qo`shma kompleks funksiya bo`ladi. Ikkita haqiqiy yechim sifatida topilgan kompleks yechimning haqiqiy va mavhum qismlarini olish kerak.

$e^{(3+21)t} = e^{3t}\left(\cos 2t + i\sin 2t\right)$ bo`lgani uchun

$$x_1 = \operatorname{Re} e^{(3+21)t} = e^{3t}\cos 2t,$$

$$y_1 = \operatorname{Re} e\left(1-21\right)e^{(3+21)t} = e^{3t}\left(\cos 2t + 2\sin 2t\right),$$

$$x_2 = \operatorname{Im} e^{(3+21)t} = e^{3t}\sin 2t,$$

$$y_2 = \operatorname{Im}\left(1-21\right)e^{(3+21)t} = e^{3t}\left(\sin 2t - 2\cos 2t\right)$$

ifodalarni olamiz. Bulardan esa berilgan sistemaning umumiy yechimini hosil qilamiz:

$$x = C_1x_1 + C_2x_2 = C_1e^{3t}\cos 2t + C_2e^{3t}\sin 2t,$$

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{3t}\left(\cos 2t + 2\sin 2t\right) + C_2e^{3t}\left(\sin 2t - 2\cos 2t\right).$$

4. Ushbu

$$\begin{aligned} &a_{10}x^{(n)} + a_{11}x^{(n-1)} + \ldots + a_{1n}x + b_{10}y^{(n)} + b_{11}y^{(n-1)} + \ldots + b_{1n}y = 0, \\ &a_{20}x^{(n)} + a_{21}x^{(n-1)} + \ldots + a_{2n}x + b_{20}y^{(n)} + b_{21}y^{(n-1)} + \ldots + b_{2n}y = 0 \end{aligned} \qquad (6$$

ko`rinishdagi normal holga keltirilmagan tenglamani yechish uchun xarakteristik tenglamani tuzib, uni yechish kerak:

$$\begin{vmatrix} a_{10}\lambda^n + a_{11}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{1n} & b_{10}\lambda^n + b_{11}\lambda^{n-1} + \ldots + b_{1n} \\ a_{20}\lambda^n + a_{21}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{2n} & b_{20}\lambda^n + b_{21}\lambda^{n-1} + \ldots + b_{2n} \end{vmatrix} = 0. \qquad (7$$

Bu tenglamaning ildizlari topilgandan keyin, berilgan tenglamani yechimini xuddi 2-punktdagidek qidirilaveradi.

Misol. $\begin{cases} \dot{x} + x + \dot{y} = 0 \\ \ddot{x} - x + \ddot{y} + y = 0 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechimi. Xarakteristik tenglamasi quyidagi ko`rinishda bo`ladi:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 & \lambda \\ \lambda^2 - 1 & \lambda^2 + 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Bundan ikki karrali $\lambda = -1$ ildizni hosil qilamiz.

Endi berilgan tenglamaning yechimini 2-punktdagidek

$$x = \left(a + bt\right)e^{-t}$$

$$y = \left(c + dt\right)e^{-t}$$

ko`rinishda qidiramiz. Buni sistemaning birinchi tenglamasiga qo`yib

$$\left(b - a - bt\right)e^{-t} + \left(a + bt\right)e^{-t} + \left(d - c - dt\right)e^{-t} = 0$$

ifodani, undan esa $d = 0,\ b = c$ ni olamiz. Sistemaning ikkinchi tenglamasidan ham xuddi shunday munosabatlarni olamiz, buni hisoblab ko`rishni o`quvchilarning o`ziga qoldiramiz.

Shunday qilib, umumiy yechim

$$x = \left(C_1t + C_2\right)e^{-t},$$

$$y = C_1e^{-t}$$

ko`rinishda bo`lar ekan, bu yerda C_1 va C_2 ixtiyoriy o`zgarmaslar.

5. $\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + f_i(t), \quad i = 1,\ldots,n$ (8

chiziqli bir jinsli bo`lmagan tenglamaning xususiy yechimini ham $f_i(t)$ funksiyalar $b_0 + b_1 t + +b_m t^m,\ e^{\alpha t},\ \cos\beta t,\ \sin\beta t$ ko`rinishdagi funksiyalarning yiғindisi, ko`paytmasi va ularning yiғindisidan iborat bo`lsa, noma`lum koeffitsientlar usuli bilan qidirish mumkin. Albatta, bu erda ham (ayrim o`zgarishlar bilan) xuddi o`zgarmas koeffitsientli tenglamalardagidek ish qilinadi. Agar $f_i(t) = P_m(t)e^{\gamma t}$ bo`lib, $P_{m_i}(t)$ – m_i tartibli ko`phad bo`lsa, (8) tenglamaning xususiy yechimi $t^s Q_m(t)e^{\gamma t}$ ko`rinshda emas,

$$x_i = Q^i_{m+s}(t)e^{\gamma t}, \quad i = 1,\ldots,n$$

ko`rinishda qidiriladi, bu erda $Q^i_{m+s}(t) - m+s$ tartibli, noma`lum koeffitsientli ko`phad; $m = \max m_i;$ agar $\gamma$ xarakteristik tenglamaning ildizi bo`lmasa $s = 0,$ agar γ xarakteristik tenglamaning ildizi bo`lmasa, *s* sifatida bu ildizning karraligini olish kerak. (9) dagi noma`lum koeffitsientlar (9) ifodani (8) tenglamaga qo`yib, o`xshash hadlar koeffitsientlarini tenglashtirish yordamida topiladi.

$f_i(t)$ funksiya $e^{\alpha t}\cos\beta t$ va $e^{\alpha t}\sin\beta t$ funksiyalarni o`z ichiga olgan bo`lib, $\gamma = \alpha + i\beta$ xarakteristik tenglamaning ildizi bo`lganda ham (9) ifodadagi ko`phadning tartibi yuqoridagiga o`xshash aniqlanadi.

Misol. $\begin{cases} \dot{x} = y + \sin t \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ sitemani yeching.

Yechimi. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ bir jinsli sistemaning umumiy yechimini topib olamiz. Bu tenglamaning xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Uning ildizlari $\lambda_1 = i$ va $\lambda_2 = -i.$ Demak, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$x = C_1\cos t + C_2\sin t,$$

$$y = -C_1\sin t + C_2\cos t$$

ko`rinishda bo`lar ekan.

Bizning misolimizda $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = \alpha + i\beta = i$ xarakteristik tenglamaning bir karrali ildizi bo`lgani uchun, berilgan tenglamaning xususiy yechimini

$$x = (a_1 + a_2 t)\sin t + (a_3 + a_4 t)\cos t,$$

$$y = (b_1 + b_2 t)\sin t + (b_3 + b_4 t)\cos t$$

ko`rinishda qidiramiz. Buni tenglamalar sistemasiga qo`yib a_i va b_i larni topish uchun tenglamalarga ega bo`lamiz:

$$a_1 + a_4 = b_3,\ \ a_2 - a_3 = b_1 + 1,\ \ b_2 + a_4 = 0,\ \ a_2 - b_4 = 0,\ \ b_1 + b_4 + a_3 = 0.$$

Bu tenglamalardan

$$a_1 = a_3 = a_4 + b_2 = b_3 = 0, \;\; b_1 = -1/2, \;\; a_2 = b_4 = 1/2$$

ifodalarni olamiz, shunday qilib, xususiy yechim

$$x = t/2 \cdot \sin t,$$

$$y = -1/2 \cdot \sin t + t/2 \cdot \cos t$$

ko`rinishda, berilgan tenglamalar sistemasining umumiy yechimi esa

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t/2 \cdot \sin t,$$

$$y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t - 1/2 \cdot \sin t + t/2 \cdot \cos t$$

bo`lar ekan.

27- mavzu.Matritsa ko`rinishdagi chiziqli tenglamalar sistemasi. Koshi integral formulasi. Eksponentsial matritsa. Matritsali differentsial tenglamalarni integrallash. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Matritsa ko`rinishdagi chiziqli tenglamalar sistemasi.
2. Koshi integral formulasi.
3. Eksponentsial matritsa.
4. Matritsali differentsial tenglamalarni integrallash.

(3)-tenglamaning I intervalda aniqlangan n ta yechimi $\varphi^{(1)}(x),...,\varphi^{(n)}(x)$ berilgan bo`lsin. Bu vector-funksiyalardan ushbu

$$Z(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1^{(1)}(x)...\varphi_1^{(k)}(x)...\varphi_1^{(n)}(x) \\ \varphi_2^{1}(x)...\varphi_2^{(k)}(x)...\varphi_2^{(n)}(x) \\ . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \\ \varphi_n^{1}(x)...\varphi_n^{(k)}(x)...\varphi_n^{(n)}(x) \end{pmatrix} \qquad \textbf{(7)}$$

matritsani topamiz. Unda birinchi ustunda $\varphi^{(1)}(x)$ vektorning koordinatalari, k-ustunda $\varphi^{(k)}(x)$, k=2,...,n vektorning koordinatalari joylashgan. Shu matritsaning determinanti (3)-sistema uchun *Vronskiy determinanti* deyiladi va W(x) yoki $W\left[\varphi^{(1)}, \; ... \; , \varphi^{(n)}\right]$ deb belgilanadi, ya`ni det Z(x)=W(x).

Ravshanki, agar $\varphi^{(1)}(x),...,\varphi^{(n)}(x)$ yechimlar chiziqlar erkli bo`lsa, u holda Vronskiy determinanti x ning I dan olingan bironta ham qiymatida nolga aylanmaydi. Haqiqattan, $\varphi^{(1)}(x),...,\varphi^{(n)}(x)$ vektor-funksiyalar chiziqli erkli bo`lgani uchun ushbu $\alpha_1\varphi^{(1)}(x) + \alpha_2\varphi^{(2)}(x) + ... + \alpha_n\varphi^{(n)}(x) \equiv 0, \;\; x \in I$ ayniyat faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0,$ bo`lgandagina o`rinli. I intrvaldan olingan ixtiyoriy tayinlangan x uchun $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_j^i(x) = 0,$ j=1,...,n sistemani ($\alpha_1,...,\alpha_n$ larga nisbatan) ko`raylik. U bir jinsli bo`lib, faqat trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0,$ yechimga ega. Demak, bu sistemaning determinanti uchun $W(x) \neq 0, \;\; x \in I$ munosabat o`rinli. Bu mulohazalardan yuqoridagi yechimlar chiziqli bo`lsa, $W(x) \equiv 0, \;\; x \in I$ ayniyat o`rinli bo`lishi kelib chiqadi. Yechimlar fundamental sistemani tashkil etsa, tegishli (7)-matritsa *integral matritsa* yoki *fundamental matritsa* deb yuritiladi.

Endi Z(x) matritsaning ustunlari (3)-tenglamaning yechimlari bo`lgani uchun shu Z(x) matritsa ushbu

$$\frac{dZ}{dx} = A(x)Z \qquad \textbf{(8)}$$

matritsali tenglamaning yechimi bo`ladi. Agar (8)-matritsali tenglamaning determinanti noldan farqli matritsali yechimini topsak, bu bilan (3)-vektor-matritsali tenglamaning fundamental sistemasini topgan bo`lamiz. Avval (8)-matritsali tenglamaning bitta xossasini keltiramiz:

1-lemma. Agar $Z^*(x)$ matritsa (8)-tenglamaning I intervalda aniqlangan biror matritsali yechimi bo`lsa, u holda tartibi n bo`lgan ixtiyoriy o`zgarmas C matritsa uchun $Z^*(x)$C matritsa ham yechim bo`ladi.

Isboti juda sodda. Haqiqatan, (8)-tenglamaning ikki tomonini o`ngdan C matritsaga ko`paytiramiz:

$$\frac{dZ^*(x)}{dx}C \equiv A(x)Z^*(x)C$$

yoki C=const bo`gani uchun

$$\frac{d(Z^*(x)C)}{dx} \equiv A(x)(Z^*(x)C).$$

E s l a t m a. (8)-matritsali tenglamaning ixtiyoriy matritsali yechimi ZC (C-ixtiyoriy $n \times n$ matritsa) fundamental matritsa bo`lavermaydi.

5-teorema. Agar Z(x) matritsa I intervalda aniqlangan uzluksiz va uzluksiz differensiallanadigan ixtiyoriy $\varphi^{(j)}(x)$, j=1,...,n vektor yechimlardan tuzilgan bo`lib, determinanti I da noldan farqli bo`lsa, u holda bu Z(x) matritsa (3)-chiziqli tenglamaning I intervalda aniqlangan fundamental sistemasi bo`ladi.

I s b o t. Avvalo det $Z(x) \neq 0$, x $\in$ I. Shuning uchun Z(x) matritsa fundamental bo`ladi. Z(x) matritsa yechim bo`lgani uchun ushbu

$$\frac{dZ(x)}{dx} \equiv A(x)Z(x), \ x \in \mathrm{I} \qquad \textbf{(9)}$$

ayniyatga egamiz. Bunda Z(x) matritsaning determinanti shart bo`yicha noldan farqli. Shuning uchun bu matritsaga teskari $Z^{-1}(x)$ matritsa mavjud, ya`ni ushbu $Z(x)Z^{-1}(x) = Z^{-1}(x)Z(z) = E$ (E-birlik matritsa) tenglikni qanoatlantiradigan $Z^{-1}(x)$ matritsa mavjud. Bunda $Z^{-1}(x)$ matritsa, masalan,

$$Z^{-1}(x) = \frac{1}{\det Z(x)} \cdot \begin{pmatrix} Z_{11}(x) \ ... \ Z_{n1}(x) \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ Z_{1n}(x) \ ... \ Z_{nn}(x) \end{pmatrix} \qquad \textbf{(10)}$$

formula bilan topilishi mumkin, bunda $Z_{ij}(x) - Z(x)$ matritsaning $\varphi_i^j(x)$, i,j=1,....,n elementning *algebraik to`ldiruvchisi*. Endi (9)-ayniyatning ikki tomonini o`ngdan $Z^{-1}(x)$ ga ko`paytiramiz:

$$\frac{dZ(x)}{dx} \cdot Z^{-1} \equiv A(x)$$

Bu ayniyatda A(x) matritsaning $a_{ij}(x)$ elementlari yagona usul bilan aniqlanadi. $\frac{dZ(x)}{dx}$ va $Z^{-1}(x)$ matritsalarning elementlari I intervalda uzluksiz bo`lgani uchun A(x) matritsaning elementlari ham shu intervalda uzluksiz. Teorema isbot etildi.

Ostrogradskiy-Liuvill` formulasi.

6-teorema. Agar (8)-matritsali tenglamada A(x) matritsa I intervalda uxluksiz bo`lib, Z(x) matritsa (8)-tenglamaning shu intervalda aniqlangan matritsali yechimi bo`lsa, u holda I intervaldan olingan ixtiyoriy x va x_0 lar ushbu

$$\det Z(x) = \det Z(x_0) e^{\int_x^{x_0} SpA(\tau)d\tau} \qquad \textbf{(11)}$$

formula o`rinli. Bunda $SpA(\tau)$ belgi $A(\tau)$ matritsaning bosh diagonal elementlari yig`indisidan iborat bo`lib, $A(\tau)$ *matritsaning izi* deyiladi.

(11)-formulani Ostogradskiy-Liuvill` formulasi deb yuritiladi. Uni Vronskiy determinanti orqali ham yozish mumkin:

$$W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^{x} SpA(\tau)d\tau} \qquad \textbf{(12)}$$

I s b o t. (12)-formulani isbotlash uchun W(x) determinantdan x bo`yicha hosila olamiz. Analizdan ma`lumki, W(x) ning hosilasi

$$\frac{dW(x)}{dx} = W_1(x) + ... + W_n(x) \qquad \textbf{(13)}$$

formula bilan hisoblanadi. Bu formulada $W_i - n -$ tartibli determinant bo`lib, W(x) determinantdan i-yo`li bilan farq qiladi. Bu i-yo`l esa W(x) ning i-yo`l elementlarini differensiallash bilan hosil qilinadi. Albatta, i-yo`l o`rniga i-ustun to`g`risida gapirsak ham mulohazalar o`rinli bo`laveradi. Endi $W_i(x)$ ni yozaylik:

$$W_i(x) = \begin{vmatrix} z_{11}(x) & z_{12}(x) & ... & z_{1n}(x) \\ z_{21}(x) & z_{22}(x) & ... & z_{2n}(x) \\ . & . & . & . \\ z_{i1}^{`}(x) & z_{i2}^{`}(x) & ... & z_{in}^{`}(x) \\ . & . & . & . \\ z_{n1}(x) & z_{n2}(x) & ... & z_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Bunda i-yo`ldagi hosilalar o`rniga (8)-matritsali tenglamaning koordinatalar orqali yozilishini nazarda tutib, tegishli ifodalarni qo`yamiz:

$$W_i(x) = \begin{vmatrix} z_{11}(x) & z_{12}(x) & ... & z_{1n}(x) \\ z_{21}(x) & z_{22}(x) & ... & z_{2n}(x) \\ . & . & . & . \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_{j1}(x) & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_{j2}(x) & ... & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_{jn}(x) \\ . & . & . & . \\ z_{n1}(x) & z_{n2}(x) & ... & z_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Endi i-dan boshqa har bir k-yo`l, k=1,2…i-1,i+1,…,n elementlarini tegishli $a_{ik}$ ga ko`paytirib, i-yo`l elementlaridan ayirib tashlaymiz. Natijada quyidagiga ega bo`lamiz:

$$W_i(x) = \begin{vmatrix} z_{11}(x) & z_{12}(x) & ... & z_{1n}(x) \\ z_{21}(x) & z_{22}(x) & ... & z_{2n}(x) \\ . & . & . & . \\ a_{ii} z_{i1}(x) & a_{ii} z_{i2}(x) & ... & a_{ii} z_{in}(x) \\ . & . & . & . \\ z_{n1}(x) & z_{n2}(x) & ... & z_{nn}(x) \end{vmatrix} = a_{ii} W(x), \quad \text{i=1,2,...,n}$$

Shunday qilib, (13)-formulani bunday tozish mumkin:

$$\frac{dW(x)}{dx}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\right)W(x) \quad \text{yoki} \quad \frac{dW(x)}{dx}=(S_pA)W(x) \qquad \textbf{(14)}$$

Biz Vronskiy determinanti uchun birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamani hosil qildik. Bu o`zgaruvchilari ajraladigan tenglama. Shuning uchun (14)-tenglamaning $W(x_0)=W_0$ boshlang`ich shartni qanoatlantiradigan yagona yechimi (12)-formula bilan yoziladi. Demak, Ostogradskiy-Liuvill` formulasi isbot bo`ldi.

7-teorema. Biror $Z(x)$, $n\times n$ matritsa (8)-tenglamaning I intervalda aniqlangan yechimi bo`lsin. Bu Z(x) matritsa fundamental bo`lishi uchun

$$\det Z(x)=W(x)\neq 0,\quad x\in I$$

munosabatning o`rinli bo`lishi zarur va yetarli.

1-natija. Agar Z(x) matritsa (8)-tenglamaning I intervalda aniqlang fundamental matritsasi bo`lsa, u holda ixtiyoriy maxsusmas (ya`ni determinanti noldan farqli) C $n\times n$-matritsa uchun Z(x)C matritsa ham (8)-tenglamaning fundamental matritsasi bo`ladi.

I s b o t. $\det Z(x)C=\det Z(x)\ \det C\neq 0$, (1-lemmadan).

2-natija. Agar $C=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ C_n\end{pmatrix}$ ixtiyoriy ($n\times 1$)-vektor bo`lsa, fundamental matritsa orqali (9)-vektor-matritsali yenglamaning yechimi

$$y(x)=Z(x)C$$

ko`rinishda yoziladi.

Misollar. 1. Ushbu

$$y_1^`=-y_2,\ \ y_2^`=y_1$$

sistema uchun

$$y^{(1)}(x)=\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix} \quad \text{va} \quad y^{(2)}(x)=\begin{pmatrix}-\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}$$

vektor-funksiyalar $-\infty<x<+\infty$ intervalda yechim bo`ladi. Buni bevosita tekshirib ko`rish mumkin, $y^{(1)}(x)$ va $y^{(2)}(x)$ yechimlar fundamental sistemani tashkil etadi. Haqiqattan, bu yechimlardan Vronskiy determinantini tuzamiz:

$$W(x)=\begin{vmatrix}\cos x & \text{-sinx}\\ \sin x & \text{cosx}\end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1\neq 0$$

Demak, $W(x)\neq 0,\ -\infty<x<+\infty$. Shuning uchun $y^{(1)}(x)$ va $y^{(2)}(x)$ yechimlar fundamental sistemani tashkil etadi. Berilgan sistemada $A(x)=\begin{pmatrix}0 & \text{-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Shunday qilib, $\begin{pmatrix}\cos x & \text{-sinx}\\ \sin x & \text{cosx}\end{pmatrix}$ matritsa

$$\frac{dZ}{dx}=\begin{pmatrix}0 & \text{-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}Z` \qquad \textbf{(15)}$$

matritsali tenglamaning fundamental matritsasi bo`ladi. Endi fundamental matritsasi $Z(x)=\begin{pmatrix}\cos x & \text{-sinx}\\ \sin x & \text{cosx}\end{pmatrix}$

bo`lgan chiziqli bir jinsli sisteemani tuzaylik. Ravshanki,

$$\frac{dZ(x)}{dx}=\begin{pmatrix}-\sin x & \text{-cosx}\\ \cos x & \text{-sinx}\end{pmatrix}$$

Endi $Z^{-1}(x)$ matritsani topamiz: avvalo $\det Z(x)=\begin{vmatrix}\cos x & \text{-sinx}\\ \sin x & \text{cosx}\end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1$, algebraik to`ldiruvchilar $A_{11}=\cos x,\ A_{21}=\sin x,\ A_{12}=-\sin x,\ A_{22}=-\cos x.$ Shuning uchun $Z^{-1}(x)=\le\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos x & \text{sinx}\\ -\sin x & \text{cosx}\end{pmatrix}.$ Bundan

$$A(x)=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\frac{dZ(x)}{dx}Z^{-1}(x)=\begin{pmatrix}-\sin x & \text{-cosx}\\ \cos x & \text{-sinx}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos x & \text{sinx}\\ -\sin x & \text{cosx}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \text{-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Shunday qilib, berilgan fundamental matritsaga yagona matritsali differensial tenglama mos keladi va u (14)-tenglama bilan ustma-ust tushadi. (14)-matritsali tenglamaning umumiy yechimi $Z(x)=\begin{pmatrix}\cos x & \text{-sinx}\\ \sin x & \text{cosx}\end{pmatrix}$C ko`rinishda, berilgan normal sistemaning umumiy yechimi esa

$$\begin{pmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix}=y(x)=\begin{pmatrix}\cos x & \text{-sinx}\\ \sin x & \text{cosx}\end{pmatrix}C=\begin{pmatrix}\cos x & \text{-sinx}\\ \sin x & \text{cosx}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\cos x & \text{-}C_2\text{sinx}\\ C_1\sin x & C_2\text{cosx}\end{pmatrix}$$

ko`rinishda yoziladi.

2. Quyidagi $y_1^{`}=y_2,\ y_2^{`}=-y_1+2y_2$ sistema uchun

$$y^{(1)}(x)=\begin{pmatrix}e^x\\ e^x\end{pmatrix},\quad \text{y}^{(2)}(x)=\begin{pmatrix}xe^x\\ (x+1)e^x\end{pmatrix}$$

vektor-funksiyalar $-\infty<x<+\infty$ intervalda yechim bo`ladi. Shu bilan birga bu vektor-funksiyalar fundamental sistemani teshkil etadi, chunki ularan tuzilgan vronskian noldan farqli: $W(x)=\begin{vmatrix}e^x & \text{x}e^x\\ e^x(x+1) & e^x\end{vmatrix}=e^{2x}\neq 0.$

Shuning uchun umumiy yechim

$$y(x)=C_1\begin{pmatrix}e^x\\ e^x\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}xe^x\\ (x+1)e^x\end{pmatrix}$$

ko`rinishda yoziladi. Berilgan sistema o`rniga matritsali tenglamani, ya`ni

$$\frac{dZ}{dx}=\begin{pmatrix}0 & \text{-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}Z` \qquad \textbf{(16)}$$

tenglamani ko`ramiz. Endi fundamental matritsasi $Z(x)=\begin{pmatrix}e^x & \text{x}e^x\\ e^x(x+1) & e^x\end{pmatrix}$ bo`lgan matritsali tenglama tuzamiz. Ravshanki, $\det Z(x)=e^{2x}$, $\text{A}_{11}(x)=(x+1)e^x$, $\text{A}_{12}(x)=-e^x$, $\text{A}_{21}(x)=-xe^x$, $\text{A}_{22}(x)=e^x.$ Shuning uchun

$$A(x)=\frac{dZ(x)}{dx}Z^{-1}(x)=\begin{pmatrix}e^x & (\text{x}+1)e^x\\ e^x & (\text{x}+2)e^x\end{pmatrix}\frac{1}{e^{2x}}\begin{pmatrix}(x+1)e^x & \text{-x}e^x\\ \text{-}e^x & e^x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \text{x+1}\\ 1 & \text{x+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+1 & \text{-x}\\ \text{-1} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Demak, $A(x)=\begin{pmatrix}0 & \text{-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Shunday qilib, (16)-tenglama berilgan fundamental matritsani yagona differensial tenglamasidir.

Endi berilgan fundamental matritsa bo`yicha chiziqli sistemani tuzish yo`lini ko`ramiz.

Ushbu $y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), ..., y^{(n)}(x)$ funksiyalar I intervalda chiziqli erkli funksiyalar bo`lib, shu intervalda differensiallanuvchi bo`lsin. Yana y(x) ham intervalda aniqlangan, uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo`lsin. Agar $y^{(k)}(x)$, k=1,2,...,n va y(x) funksiyalar biror chiziqli sistemaning yechimi bo`lsa, u holda quyidagi ayniyatlarni yozish mumkin:

$$\left.\begin{array}{lr}\dfrac{dy_1}{dx}=a_{11}(x)y_1+a_{12}(x)y_2+...+a_{1n}(x)y_n & (0_1)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots\\ \dfrac{dy_n}{dx}=a_{n1}(x)y_1+a_{n2}(x)y_2+...+a_{nn}(x)y_n & (0_n)\end{array}\right\} \quad (0)$$

$$\left.\begin{array}{lr}\dfrac{dy_1^{(1)}}{dx}=a_{11}(x)y_1^{(1)}+a_{12}(x)y_2^{(1)}+...+a_{1n}(x)y_n^{(1)} & (1_1)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots\\ \dfrac{dy_n^{(1)}}{dx}=a_{n1}(x)y_1^{(1)}+a_{n2}(x)y_2^{(1)}+...+a_{nn}(x)y_n^{(1)} & (1_n)\end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{lr}\dfrac{dy_1^{(n)}}{dx}=a_{11}(x)y_1^{(n)}+a_{12}(x)y_2^{(n)}+...+a_{1n}(x)y_n^{(n)} & (n_1)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots\\ \dfrac{dy_n^{(n)}}{dx}=a_{n1}(x)y_1^{(n)}+a_{n2}(x)y_2^{(n)}+...+a_{nn}(x)y_n^{(n)} & (n_n)\end{array}\right\} \quad (n)$$

$(a_{ij}=a_{ij}(x))$. Yozilgan $(0),(1),...,(n)$ sistemalarning birnchi yenglamalarini olib sistema tuzamiz:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dy_1}{dx}=a_{11}y_1+a_{12}y_2+...+a_{1n}y_n,\\ \dfrac{dy_1^{(1)}}{dx}=a_{11}y_1^{(1)}+a_{12}y_2^{(1)}+...+a_{1n}y_n^{(1)},\\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ \dfrac{dy_1^{(n)}}{dx}=a_{11}y_1^{(n)}+a_{12}y_2^{(n)}+...+a_{1n}y_n^{(n)}.\end{array}\right\}$$

Bu sistemaning chap tomonini ham o`ng tomonga o`tkazib, tegishli hosilalar aldidagi koeffitsentlar (-1) gat eng bo`lgani uchun ularni $a_{10}(a_{10}=-1)$ deb belgilaymiz. Natijada $a_{10}, a_{11}, ..., a_{1n}$ larga nisbatan ushbu

$$\left.\begin{array}{l}a_{10}\dfrac{dy_1}{dx}=a_{11}y_1+a_{12}y_2+...+a_{1n}y_n,\\ a_{10}\dfrac{dy_1^{(1)}}{dx}=a_{11}y_1^{(1)}+a_{12}y_2^{(1)}+...+a_{1n}y_n^{(1)},\\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ a_{10}\dfrac{dy_1^{(n)}}{dx}=a_{11}y_1^{(n)}+a_{12}y_2^{(n)}+...+a_{1n}y_n^{(n)}.\end{array}\right\}$$

sistemaga ega bo`lamiz. Bu systema trivialmas yechimga ega, chunki $a_{10}=-1\neq 0.$ Shuning uchun uning determinanti nolga teng bo`lishi kerak, ya`ni

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} & y_1 \ y_n \ \cdots \ y_n \\ \dfrac{dy_1^{(1)}}{dx} & y_1^{(1)} y_2^{(1)} \cdots \ y_n^{(1)} \\ . \ . & . \ . \ . \ . \\ \dfrac{dy_1^{(n)}}{dx} & y_1^{(n)} y_n^{(n)} \cdots \ y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0, \ x \in I.$$

Shunga o`xshash, $(0),(1),...,(n)$ sistemalarning mos ravishda k-tenglamalarini olib, tegishli mulohaza yuritsak, quyidagi

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dy_k}{dx} & y_1 \ y_n \ \cdots \ y_n \\ \dfrac{dy_k^{(1)}}{dx} & y_1^{(1)} y_2^{(1)} \cdots \ y_n^{(1)} \\ . \ . & . \ . \ . \ . \\ \dfrac{dy_k^{(n)}}{dx} & y_1^{(n)} y_n^{(n)} \cdots \ y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0, \ x \in I, \ k=1,2,...,n \qquad \textbf{(17)}$$

munosabatlarga kelamiz. Biz k ning har bir $1 \le k \le n$ qiymatida bitta birinchi tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaga egamiz. Demak, k=1,2,…,n bo`lganda (17)-munosabatlar hosilasi oldidagi koeffitsenti Vronskiy determinantidan iborat birinchi tartibli chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasidir.

Yuqorida ko`rilgan 1- va 2- misollar uchun berilgan fundamental sistemaga mos chiziqli sistemani shu usul bilan chiqarish mumkin.

28- mavzu.Yechimning davomiyligi. Yechimning boshlangich qiymatlarga va parametrlarga uzluksiz bog'liqligi haqida teorema. (4 soat)

1-ma`ruza (4 soat)

Reja:

1. Yechimning davomiyligi.
2. Yechimning boshlangich qiymatlarga va parametrlarga uzluksiz bog'liqligi haqida teorema.

29- mavzu.Avtonom sistemalar. Avtonom yechimining xossalari. Avtonom sistemaning muvozanat holati. Xolatlar fazosi va traektoriyasi. Chiziqli bir jinsli ikkinchi tartibli o`zgarmas koeffitsientli avtonom sistemaning holatlar teksligi. (2 soat)

1-ma`ruza (4 soat)

Reja:

1. Avtonom sistemalar.
2. Avtonom yechimining xossalari.
3. Avtonom sistemaning muvozanat holati.

4. Xolatlar fazosi va traektoriyasi. C
5. hiziqli bir jinsli ikkinchi tartibli o`zgarmas koeffitsientli avtonom sistemaning holatlar teksligi.

Ta'rif. Agar oddiy differensial tenglamalar sistemasiga erkli o'zgaruvchi oshkor kirmasa, bunday sistema avtonom sistema deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$F_i(y_1, y_1', ..., y_1^{(m_1)}; y_n, y_n', ..., y_n^{(m_n)}) = 0 \quad (1.1)$$

bunda

$$y_j^{(k)} = \frac{d^k y_j}{dx^k}, \; j = 1,2,...,n, k = 1,2,...,m_j$$

Avtonom sistemalarning fizika va texnika masalalaridan kelib chiqish ma'nosiga qarab erkli o'zgaruvchi sifatida t vaqt olingan. Bundan keyin biz shu belgilashni qabul qilamiz. Ta'rifdan ko'rinadiki, avtonom sistemalar bilan tasvirlanadigan noma'lum funksiyalarning o'zgarish qonuni vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydi. Fizikaviy qonunlarda odatda shunday bo'ladi.

Normal avtonom sistema ushbu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \; ... \; , x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \; ... \; , x_n), \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \; ... \; , x_n), \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$$

ko'rinishda yoki

$$\dot{x}_i = f(x) \quad (1.3)$$

vektorli ko'rinishda yoziladi.

Agar bu (1.2) sistema erkli o'zgaruvchi t sifatida vaqtni tushinilsa, bu sistema dinamik sistema deb ataladi. Keyingi mulohazalarda biz asosan dinamik sistemalar bilan ish ko'ramiz.

Biz quyida bayon etadigan xossalar va tasdiqlar umuman (1.1) ko'rinishdagi avtonom sistemalar uchun o'rinli. Ammo biz ularni (1.2) ko'rinishdagi normal avtonom sistemalar uchun isbot etamiz.

Bundan keyingi mulohazalarimizda (1.3) vektor – tenglama $f(x)$ vektor – funksiya biror D_n sohada aniqlangan va birinchi tartibli xususiy hosilalari bilan uzluksiz deb faraz etamiz.

Teorema. Agar (1.3) normal avtonom vektor – tenglama berilgan bo'lib, $x = \varphi(t)$ vektor – funksiya uning biror yechimi bo'lsa, u holda ixtiyoriy o'zgarmas C lar uchun $x = \varphi(t) = \varphi(t + C)$ vektor – funksiya ham (1.3) tenglamaning yechimi bo'ladi.

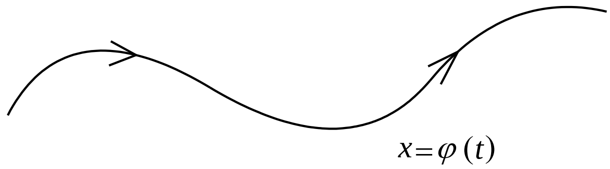
Isbot. Murakkab funksiyani differensiallash qoidasi bo'yicha soda hisoblashlar
yordamida quyidagini topamiz:

$$\dot{\varphi}_*(t) = \frac{d}{dt}\varphi_*(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t+C) = \frac{d}{d(t+C)}\varphi(t+C)\frac{d(t+C)}{dt} =$$
$$= \dot{\varphi}(t+C)\cdot 1 = \varphi(t+C)$$

Endi $\varphi_*(t)$ funksiya (1.3) tenglamaning yechimi ekanini isbotlaymiz. Teoremaning shartiga ko'ra $x = \varphi(t)$ funksiya (1.3) tenglamaning biror yechimi, demak, ushbu $\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t))$ ayniyat o'rinli. Bunda t ni $t + C$ ga almashtirsak, $\dot{\varphi}(t+C) = f(\varphi(t+C))$ ayniyatga ega bo'lamiz.

Topilgan munosabatdan

$$\dot{\varphi}_*(t) = \dot{\varphi}(t+C) = f(\varphi(t+C)) = f(\varphi_*(t)).$$

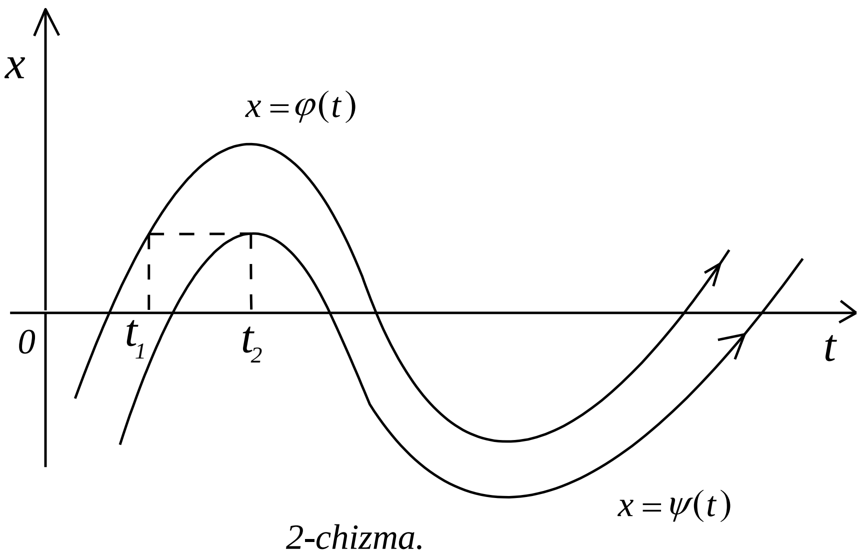


1-chizma.

Shu bilan teorema isbot bo'ldi.

Avtonom sistemalarning, jumladan, (1.2) sistemaning har bir $x = \varphi(t)$ vektor – yechimiga n – o'lchovli fazoda $(x_1,...,x_n) = x$ nuqtalarning harakatini mos keltiramiz. Harakat davomida x nuqta o'sha fazoda biror chiziq chizadi. Shu chiziqni x nuqtaning harakat traektoriyasi deb ataymiz. Avtonom sistemalarda nuqtaning harakati to'g'risida to'liq ma'lumotga ega bo'lish uchun nuqtaning faqat traektoriyasini berish yetarli emas, buning uchun traektoriyada, hech bo'lmasa, harakat yo'nalishini ham berish lozim (1 – chizma).

Teorema. Agar $x = \varphi(t)$ va $x = \psi(t)$ vektor – funksiyalar (1.3) tenglamaning ikki ixtiyoriy yechimi bo'lsa, u holda bu yechimlar yo birorta ham nuqtada kesishmaydi yoki butunlay kesishmaydi yoki butunlay ustma – ust tushadi. Boshqacha aytganda, agar $t_1 \neq t_2$ bo'lib, $\varphi(t_1) = \psi(t_2)$ bo'lsa, u holda $\psi(t) = \varphi(t+C), C = t_1 - t_2$ munosabat o'rinli bo'ladi (2 va 3 – chizmalar).



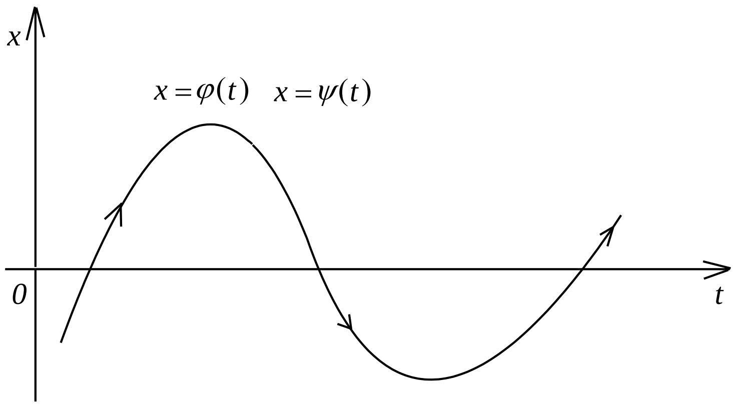
2-chizma.

Isbot. Teoremani isbot rtish uchun $\varphi(t)$ yechim bilan birga $\varphi_*(t) = \varphi(t + C),\ C = t_1 - t_2$ yechimni ham ko'ramiz. Bundan

$$\varphi_*(t_2) = \varphi(t_2 + C) = \varphi(t_2 + t_1 - t_2) = \varphi(t_1) = \psi(t_2)$$

ya'ni

$$\varphi_*(t_2) = \psi(t_2).$$

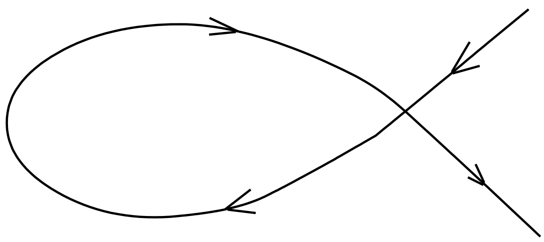


3-chizma.

shunday qilib, (1.3) tenglamaning ikkita $x = \varphi_*(t)$ va $x = \psi(t)$ yechimlari bir xil boshlang'ich qiymalarga ega. Demak, Koshi teoremasining shartlari bajariladi va yagonalik o'rinli, ya'ni $x = \varphi_*(t), x = \psi(t)$ yechimlari ustma – ust tushadi (aniqlanish intervallarining umumiy qismida). Bu esa teoremani isbot etadi. Agar $t_1 = t_2$ bo'lsa, teoremaning natijasi trivial bo'ladi.

1.2 - § Avtonom sistematraektoriyasining muhim xossalari.

Avtonom sistemasining alohida olingan bitta $x = \varphi(t)$ traektoriyasi o'z – o'zini kesa oladimi, ya'ni 4 – chizmada ko'rsatilgan hol yuz beradimi yoki yo'qmi, degan savolni qo'yaylik. Bu savolga javob avtonom sistemaning



4-chizma.

uchinchi muhim xossasini ochib beradi.

Teorema. $x=\varphi(t)$ funksiya (1.3) tenglamaning $r_1<t<r_2$ intervalda aniqlangan biror yechimi bo'lsin. Agar $\varphi(t_1)=\varphi(t_2),\ t_1\neq t_2$ va $r_1<t_1<r_2, r_1<t_2<r_2$ bo'lsa, u holda shu $x=\varphi(t)$ yechimni $-\infty<t<+\infty$ intervalda davom ettirish mumin.

Isbot. Yuqoridagi teoremaga ko'ra $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$ bo'lgani uchun $x=\varphi(t+C),\ C=t_1-t_2$ funksiya ham yechim bo'ladi va ushbu $x=\varphi(t+C), r_1<t<r_2$ ayniyat o'rinli. Bu ayniyatdan $\varphi(x)$ funksiya $r_1<t<r_2$ intervalda aniqlangani uchun $\varphi(t+C)$ funksiya $r_1-|C|_1<t<r_2+|C|$ intervalda aniqlangan bo'ladi. Haqiqatan, $r_1<t+C<r_2$ tengsizlikdan $C>0$ bo'lganda $r_1-C<t<r_2$ va demak, yechimni r_1 dan chapga C miqdorga davom ettirish mumkin; shunga o'xshash, $C<0$ bo'lganda $r_1<t<r_2-C$ ya'ni yechimni r_2 dan o'nga $-C=|C|$ miqdorga davom ettirish mumkin bo'ladi. Har ikki holni birlashtirib yechimni $r_1-|C|_1<t<r_2+|C|$ intervalga davon ettirish mumkinligini qayd qilamiz. Shu intervalda aniqlangan $\varphi^{(1)}(t)$ yechim uchun baribir $\varphi^{(1)}(t)=\varphi^{(1)}(t+C)$ ayniyat o'rinli. $\varphi^{(1)}(t+C)=\varphi_*^{(1)}(t)$ desak, $\varphi_*^{(1)}(t_1)=\varphi^{(1)}(t_1+C)=\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$, ya'ni $\varphi_*^{(1)}(t_1)=\varphi(t_2)$, bundan avvalgidek $\varphi_*^{(1)}(t+C)=\varphi_*^{(1)}(t)$ ekani kelib chiqadi. $\varphi_*^{(1)}(t)$ funksiya $r_1-|C|_1<t<r_2+|C|$ intervalda aniqlangan bo'lgani uchun oxirgi ayniyatdan foydalanib mavjudlik intervalini yanada kengaytirish mumkin. Boshqacha aytganda, $r_1-2|C|_1<t<r_2+2|C|$ intervalda

Aniqlangan yechimni qo'rish mumkin. Tegishli yechimni $\varphi^{(2)}(t)$ deb belgilaymiz. Shunga o'xshash, mavjudlik intervali $r_1-k|C|<t<r_2+k|C|$ dan iborat bo'lgan $\varphi^{(k)}(t)$ yechimni ko'rish mumkin. Yuqoridagi tengsizlikda $k\to\infty$ da limintga o'tsak, $-\infty<t<+\infty$ interval hosil bo'ladi (r_1 va r_2 lar qanday bo'lishidan qat'i nazar). Shu intervalda aniqlangan yechimni $\varphi^0(t)$ deymiz.

Shunday qilib, teorema isbot bo'ladi. Ammo isbot davomida avtonom sistemaning har qanday traektoriyasi chekli vaqtda cheksizga ketib qolmasligidan foydalanildi. Aslida ko'rilayotgan holda shunday. Shu munosabat bilan quyidagi yetarli shartni beradigan lemma keltiramiz.

Lemma. Agar D_n sohada $f_1(x_1,...,x_n),..., f_n(x_1,...,x_n)$ funksiyalar barchaargumentlari bo'yicha cheklangan xususiy hosilalarga ega bo'lsa, u holda (1.3) avtonom sistemaning hech qanday traektoriyasi chekli vaqtda cheksizga ketib qolmaydi, ya'ni ushbu

$$\lim_{t\to\tau}|\varphi(x)| = \infty, \ |\varphi(x)| = \sqrt{\varphi_1^2(t) + ... + \varphi_n^2(t)}$$

munosabat o'rinli bo'la olmaydi.

Isbot. Lemmaning shartiga ko'ra $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \le M, i, j = 1,2,...,n, 0 < M -$ chekli son.

Endi $f_i(x)$ funksiya uchun $x = 0$ nuqta atrofida Lagranj formulasini yozamiz:

$$f_i(x) = f_i(\theta) + \frac{\partial f_i(\theta_i \cdot x)}{\partial x_1}x_1 + ... + \frac{\partial f_i(\theta_i \cdot x)}{\partial x_n}x_n, i = 1,2,...,n,$$

bunda $0 < \theta_i < 1, \theta_i x = y \in D_n. |f(0)| = C$ deymiz $\left|\frac{\partial f(\theta_i \cdot x)}{\partial x_i}\right|$ modulni baholaylik:

$$\left|\frac{\partial f(\theta_i \cdot x)}{\partial x_i}\right| = +\sqrt{\left(\frac{\partial f_1(\theta_i \cdot x)}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_n(\theta_i \cdot x)}{\partial x_i}\right)^2} \le \sqrt{n}M.$$

Bundan fodalanib, $f(x)$ vektor – funksiyaning modulini baholash mumkin. Haqiqatan, ravshanki

$$|f_i(x)| \le C + \sqrt{n}M\sum_{i=1}^{n}|x_i| \le c\cdot\sqrt{n} + \sqrt{n}M\sum_{i=1}^{n}|x_i| =$$
$$= \sqrt{n}\left(C + M\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right) \le N\sqrt{n}\left(1 + \sum_{i=1}^{n}|x_i|\right),$$

bunda $N = \max(C, M)$. Bu tengsizlikdan foydalanib topamiz:

$$|f(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_j^2(x)} \le \sqrt{n^2 N^2 \left(1 + \sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2} = nN\left(1 + \sum_{i=1}^{n} |x_i|\right).$$

Faraz etaylik, $r_1 < x < r_2 + \sum_{m=1}^{k} |C_m|$ intervalda aniqlangan va $t \to \tau = r_2 + \sum_{m=1}^{k} |C_m|$da cheksizlikka intiluvchi $x = \varphi(t)$yechim mavjud, ya'ni $t \to \tau$ da $|\varphi(t)| \to \infty$ ($\tau = r_1 - \sum_{m=1}^{k} |C_m|$ bo'lgada ham isbot shunga o'xshash bo'ladi). U holda shunday $\tau_* < \tau$ topiladiki, $\tau_* \le t < \tau$ intervalda $|\varphi(t)| > 1$bo'ladi. Shuning uchun $\tau_* \le t < \tau$ intervalda quyidagiga egamiz:

$$|\dot{\varphi}(t)| \le |\dot{\varphi}_1(t)| + |\dot{\varphi}(t)| + ... + |\dot{\varphi}(t)| \le$$
$$\le Nn\sqrt{n}\left(1 + \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(t)|\right) \le n(n+1)N\sqrt{n}|\varphi(t)|.$$

Bundan

$$\frac{\frac{d}{dt}|\varphi(t)|}{|\varphi(t)|} \le \frac{|\dot{\varphi}(t)|}{|\varphi(t)|} \le n(n+1)N\sqrt{n}, \tau_* < t < \tau.$$

Bu tengsizlikning ikki tomonini τ_* dan $t$gacha integrallab topamiz:

$$|\varphi(x)| \le |\varphi(\tau_*)| e^{n(n+1)N\sqrt{n}(t-\tau_*)}, \tau_* < t < \tau.$$

Ammo

$$t \to \tau \text{ da } |\varphi(\tau)| \le |\varphi(\tau_*)| e^{n(n+1)N\sqrt{n}(\tau-\tau_*)}$$

tengsizli o'rinli bo'lib, uning o'ng tomonidagi ifoda musbat chekli sondir. Bu esa farazimizga zid. Demak, chekli vaqtda $x = \varphi(t)$traektoriyacheksizlikga keta olmaydi. Lemma isbot etildi.

Keyengi mulohazalarda shu lemmaning shartlari yoki boshqa yetarli shart bajarilgan deb qarab, $x = \varphi(t)$ yechim $-\infty < t < +\infty$intervalda aniqlangan deb hisoblanadi. Xususan, yuqoridagi teoremada

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2), \ t_1 \ne t_2$$

bo'lgani uchun

$$\varphi(t) \equiv \varphi(t+C_1) \equiv ... \equiv \varphi(t+\sum_{i=1}^{k} C_i)$$

ayniyat bajariladi va $\varphi(t)$ funksiya $t \to \tau$ (τ -chekli son) da cheksizga intilmaydi. Aslida $\varphi(t)$ yechim chekli vaqtda cheksizga intilmasligi uchun $\varphi(t_1) = \varphi(t_2), t_1 \neq t_2$ munosabatning bajarilishi ham yetarli shartlardan biridir.

Navbatdagi teoremada ham avtonom sistemaning yechimi $\varphi(t_1) = \varphi(t_2), t_1 \neq t_2$ bo'lganda $-\infty < x < +\infty$ intervalda aniqlangan deb hisoblanadi.

Teorema(muvozanat holat va yopiq traektoriyalar haqida). Agar (1.3) tenglamaning biror $\varphi(t)$ yechimi uchun $\varphi(t_1) = \varphi(t_2),\ t_1 \neq t_2$ tenglik bajarilsa, quyidagi biri ikkinchisini inkor etadigan ikki hol yuz berishi mumkin:

1) barcha t lar uchun

$$\varphi(t) = a, a = const, a \in D_n;$$

2) shunday musbat son T mavjudki, ixtoyoriy t uchun

$$\varphi(\mathrm{T}+\mathrm{t}) = \varphi(\mathrm{t})$$

tenlik bajarilib, $0 < |\tau_1 - \tau_2| < T$ bo'lganda $\varphi(\tau_1) \neq \varphi(\tau_2)$ tengsizlik o'rinli.

1) xolda vaqt o'tishi bilan $\varphi(t)$ nuqta harakat qilmaydi, u doim D_n to'plamnin a nuqtasida bo'ladi. Shu $\varphi(t)$ yechim va a nuqta (1.3) tenglamaning, ya'ni normal abtonom sistemaning muvozanat holati yoki muvozanat nuqtasi deyiladi. Ba'zida uni tinchlanish nuqtasi deb ham ataladi;

2) holda $x = \varphi(t)$ yechim davriy yechim, uning grafigi yopiq traektoriya yoki sikl (davra) deb ataladi.

Teoremaning isboti. Ushbu

$$\varphi(t) \equiv \varphi(t+C) \quad (1.4)$$

ayniyat o'rinli bo'ladigan har bir $C \neq 0$ son $x = \varphi(t)$ yechimning davri deyiladi. Shu $x = \varphi(t)$ yechimning barcha davrlaridan tuzilgan to'plam F bo'lsin. Hozir bu son to'plamning ba'zi xossalarini tekshiramiz.

1. Agar $C \in F$ bo'lsa, $-$ $F \in C$ bo'ladi. Haqiqat (1.4) da $t-C$ ga almashtiramiz: $\varphi(t-C) \equiv \varphi(t)$. Bundan $-$ $C \in F$ kelib chiqadi.

2. Agar $\varphi(t) \equiv \varphi(t+C_i), i=1,2,...,k, C_i \in F$ bo'lsa, u holda $\varphi(t)=\varphi(t+\sum_{i=1}^{k} C_i)$, ya'ni $\sum_{i=1}^{k} C_i \in F$ bo'ladi. Haqiqatan,

$$\varphi(t) \equiv \varphi(t+C_1),$$

$$\varphi(t) \equiv \varphi(t+C_2) = \varphi(t+C_1+C_2),$$

…………………………..

$$\varphi(t) \equiv \varphi(t+C_{k-1}) \equiv \varphi(t+C_{k-2}+C_{k-1}) \equiv ... \equiv \varphi(1+\sum_{i=1}^{k-1} C_i),$$

$$\varphi(t) \equiv \varphi(t+C_k) \equiv ... \equiv \varphi(1+\sum_{i=1}^{k-1} C_i).$$

3. F to'plam yopiq. Haqiqatdan, ushbu $C_1, C_2, ..., C_k, ...$ ketma – ketlik F to'plam elementlaridan tuzilgan bo'lib, biror C_0 ga yaqinlashuvchi bo'lsin. $C_0 \in F$ ekaniniko'rsatamiz. Ravshanki, $\varphi(t)=\varphi(t+C_k)$.

Shuninguchun $\varphi(t)$ funksiyaninguzluksizligigako'raargumentdalimitgao'tish mumkin , ya'niquyidagiamallaro'rinli:

$$\varphi(t) = \lim_{k\to\infty} \varphi(t) = \lim_{k\to\infty} \varphi(t+C_k) = \varphi(t+\lim_{k\to\infty} C_k) = \varphi(t+C_0)$$

Demak, $C_0 \in F$ va $F -$ yopiq.

4. F to'plam noldan farqli sonlarni o'z ichiga oladi, chunki (1.4) da

$$C \neq 0, t_1 \neq t_2.$$

Endi teoremaning isbotiga o'taylik. F to'plam uchun quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin:

1) F to'pam barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iboratdir;

2) F to'plamda shunday kichik musbat T son mavjudki, u to'plam shu T songa butunkarrali sonlardan iborat.

Boshqa hollar bo'la olmaydi. Buni isbot etamiz.

F to’plamdamusbatsonlarbor, chunki, $0 \in F$ bo’lib, $C, -C$ laruningelementi.

F to’plamdaengkichikmusbatsonbo’lmasin, ya’niixtiyoriymusbat $\varepsilon > 0$ uchun C davrtopiladiki, $C < \varepsilon$ bo’ladi. (2)

xossagako’ra m – butunbo’lsa, mC hamdavrbo’ladi. $C < \varepsilon$ bo’lganiuchunixtiyoriyhaqiqiy C_0 uchunshundaybutun m topiladiki, $|C_0 - mC| < \varepsilon$ tengsizlikbajariladi.

Bundanixtiyoriy C_0 son F to’plamninglimitnuqtasiekanikelibchiqadi. Shubilanbirga F to’plamyopiqbo’lganiuchunubarchahaqiqiysonlarto’plamibila nustms – usttushadi.

Endi F to’plambarchahaqiqiysonlarto’plamibilanustma – usttushmasin, deylik. Yuqoridaisbotlanganigako’rabuholda F to’plamdaengkichikmusbat T mavjud. C – ixtiyoriydavrbo’lsin. Uholdashundaybutunson m nitanlashmumkimki, ushbu $|C - mT| < T$ tengsizlikbajariladi. Bunda $C - mT \neq 0$ deylik. Ammo C va mT lardavrbo’lganiuchun $C - mT$ hamdavrbo’ladi. Demak, $|C - mT|$ hamdavrbo’ladi.

Shuninguchun $|C - mT| > 0$ va $|C - mT| < T$ tengsizliklardan F to’plamning T dankic hikbo’lganmusbatdavrmavjud. Bubo’lishimumkinemas, chunki T son F to’plamdaengkichikmusbatdavredi. Ziddiyat $C = mT$ bo’lishikerakliginiisbotlaydi. Demak, $C = mT$. Shundayqilib, ko’rilayotganholda F to’plam T gakarralisonlardaniborat. Natijaqilibaytganda, youndaengkichikmusbatson $T > 0$ mavjudva F to’plamshu T gakarralisonlardanta shkiltopgan.

Birinchiholda $\varphi(t)$ yechimuchunixtiyoriyhaqiqiysondavrbo’ladi; bufaqat $\varphi(t)$ vektor – funksiyao’zgarmasvektordaniboratbo’lgandaginamumkin, ya’niagar $\varphi(t) = a, a \in D_n$ bo’lsa, uholda C – ixtiyoriyhaqiqiysonbo’lsaham $\varphi(t + C) = a$ tenglikbajarilavermaydi. Bizmuvozanatholatigaegamiz.

Ikkinchiholda F to'planingengkichikmusbat T soni $\varphi(t)$ yechimningdavri (engkichikmusbatdavri) bo'ladi. Bizdavriyyechimgaegamiz. Shundayqilib, teoremato'liqisbotbo'ldi.

1.3 - § Avtonom sistemaning holatlar fazosiga doir misollar.

1. Holatlar fazosi. Avtonom sistema (1.2) ning o'ng tomonidagi fnksiyalar n – o'lchovli fazoning biror ochiq Δ to'plamida aniqlangan. Shu to'plamning har bir $(x_1^0,...,x_n^0) = x^0$ nuqtasiga ushbu

$$f_1(x^0), f_2(x^0),..., f_n(x^0)$$

n ta sonlar ketma – ketlikligini mos keltirish mumkin. Ularni n o'lchovli fazoning x^0 nuqtasidan chiqarilgan $f(x^0)$ vektorning koordinatalari deb qarash mumkin. Bundan ko'ranadiki, avtonom sistemaga Δ to'plamsa aniqlangan vektor maydon mos keladi.

x^0 nuqta Δ to'plamning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Avtonom sistemaning geometrik ma'nosi nuqai nazaridan shu x^0 nuqtaga undan chiqadigan $f(x^0)$ vektor mos keltirilgan. Mavjudlik va yagonalik teoremasiga ko'ra (1.2) sistemaning $\varphi(t_0) = x^0$ shartni qanoatlantiradigan $x = \varphi(t)$ yechim mavjud. Bu yechimga $t = t_0$ da traektoriyasi x^0 nuqtadan o'tadigan nuqtaning harakati mos keladi. Harakat davomida $x = \varphi(t)$ yechni belgilaydigan nuqtaning t_0 momentdagi tezligi $f(x^0)$ vektor bilan ifodalanadi, ya'ni

$$\left.\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)\right|_{t=t_0} = f(x_0)$$

Endi holatlar fazosi tushinchasini kiritamiz.

Ta'rif. (1.2) avtonom sistemaning holatlar fazosi deb shunday n o'lchovli fazoga aytiladiki, unda shu sistemaning yechimlari traektoriyalar bialn, sistemaning o'zi esa vektor maydon bilan tavsiflanadi. Traektoriyalar holat traektoriyalari deb, vektorlar holat tezliklari deb ataladi.

Teorema. Ushbu $a=(a_1,...,a_n)\in D_n (D_n=\Delta)$ nuqta (1.2) sistemaning muvozanat holati bo'lishi uchun, ya'ni shu sistemaning $\varphi(t)=a, a=const$ ayniyat o'rinli bo'ladigan $x=\varphi(t)$ yechimi mavjud bo'lishi uchun D_n sohaning a nuqtasida holat tezligi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zarurligi. $a\in D_n$ nuqta muvozanat holati deylik. U holda (1.2) sistemaning $\varphi(t)=a$ ayniyat o'rinli bo'ladigan $x=\varphi(t)$ yechimi mavjud. Shuning uchun $f(a)=\frac{d}{dt}\varphi(t)\equiv\frac{d}{dt}a=0.$ Demak, $f(x)$ holat tezligi $x=a$ nuqtada nolga aylanadi.

Yetarliligi. $a\in D_n$ nuqtada $f(a)=0$. Bu holda $\varphi(t)=a$ funksiya (1.2) sistemaning yechimi bo'ladi. Haqiqatan, $\varphi(t)\equiv a\in C^1, a\in D_n, \dot{\varphi}(t)=\frac{da}{dt}\equiv 0$ va $f(a)=0$. Teorema isbot bo'ldi.

Natija. (1.2) avtonom sistemaning mufozanat holatlari (nuqtalari) ushbu

$$\begin{aligned} &f_1(a_1,...,a_n)=0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &f_n(a_1,...,a_n)=0 \end{aligned} \qquad (1.5)$$

chekli tenglamalar sistemasining (unga hosilalar kirmaydi) yechimlaridan iborat. Xususan, $\frac{dx}{dt}=(x-1)^3$ tenglamaning muvozanat nuqtasi $x=1$ nuqtadan iborat, chunki $(x-1)^3=0$ tenglama shu yechimga ega, $\frac{dx}{dt}=(x-1)^3(x+2)$ tenglama ikkita $x=1, x=-2$ muvozanat nuqtasiga ega. Yana ushbu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1&=\lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2&=\lambda_2 x_2 \end{aligned}$$

($\lambda_1\neq\lambda_2, \lambda_1,\lambda_2-$haqiqiy, $\lambda_1\neq 0, \lambda_2\neq 0$) sistemaning muvozanat holati koordinata boshidan iborat bo'lib, D_2 sohada butun tekislikdir. Shunga o'xshash

$\dot{x}_1=ax_1-bx_2, \dot{x}_2=bx_1+ax_2$ ($b\neq 0, a-$haqiqiy sonlar) sistemaning muvozanat holati ham koordinata boshidan iborat, chunki

$$\begin{cases} ax_1 - bx_2 = 0 \\ bx_1 + ax_2 = 0 \end{cases}$$

sistema faqat trivial yechimga ega (sistemaning determinant $a^2 + b^2 \neq 0$). Muzozanat nuqtalari sanoqli yoki sanoqsiz bo'lishi mumkin. Xususan, $\dot{x} = \sin x$ uchun $x = k\pi$ (k – butun son) nuqtalar muvozanat nuqtalari bo'lib, sanoqli to'plamni tashkil qiladi. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$ sistemauchun $x_1 = 0$ chiziq (x_2 o'q) muvozanatholatiniberadi.

Bizsanoqsizto'plamgaegamiz.

Agar $\dot{x}_i = 0, \dot{x}_k = a_k \neq 0,\ i = 1,...,n,\ i \neq k\ 1 \leq k \leq n$ sistemaberilganbo'lsa, uningmuvozanatnuqtasimavjudemas, chunki $f \neq 0$

2. Skalyar avtonom tenglamaning holatlar to'g'ri chizig'i va muvozanat holati. Ushbu

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.6)$$

skalyar avtonom tenglamani ko'ramiz. Bunda $f(x)$ – butun R^1 to'g'ri chiziqda uzluksiz va uzluksiz differensiallanuvchi funksiya. Yana qo'shimcha faraz etamizki, $f(x)$ funksiyaning nollari (ular berilgan avtonom tenglamaning muvozanat nuqtalaridir) limit nuqtaga ega bo'lmasin. Bu farazga ko'ra $f(x)$ ning nollari butun to'g'ri chiziqni chekli yoki sanoqli sondagi intervallarga bo'ladi. Eng chap intervalning (agar u mavjud bo'lsa) chap oxiri $-\infty$, eng o'ng intervalning (agar u mavjud bo'lsa) o'ng ohiri $+\infty$ bo'ladi. Shu intevallar sistemasini $\sum$ bilan begilaymiz. Agar $f(x)$ funksiya R^1 to'g'ri chiziqda bitta ham nolga ega bo'lmasa, $\sum$ sistema bitta $(-\infty, +\infty)$ intervaldan iborat bo'lib, $f(x)$ – bitta x_0 nolga ega bo'lgan $\sum$ sistema ikkita $(-\infty, x_0), (x_0, +\infty)$ intervaldan iborat bo'ladi.

Teorema. $\sum$ sistemaning biror intervalini (a, b) deylik, ya'ni

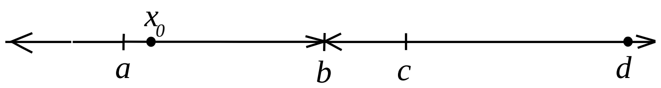
$(a,b) \in \sum$, yana $x_0 \in (a,b)$ bo'lsin. Agar $x = \varphi(t), r_1 < t < r_2$, berilgan tenglamaning (θ, x_0),

$r_1 < \theta < r_2$, boshlang'ich qiymatlarga ega bo'lgan davomsiz yechim bo'lsa, u holda $f(x_0) > 0$ bo'lganda ushbu

$$a < \varphi(t) < b, \quad r_1 < t < r_2; \quad (1.7)$$

$$\lim_{t \to r_1} \varphi(t) = a, \quad \lim_{t \to r_2} \varphi(t) = b \, (1.8)$$

Munosabatlar o'rinli shu bilan birga, agar a (yoki b) chekli bo'lsa, u holda r_1 (yoki r_2)cheksiz bo'ladi. Shunday qilib, har bir (a,b) interval bitta holat traektoriyasidan iborat.



5-chizma.

Isbot. $f(x_0) > 0$, $x_0 \in (a,b)$ bo'lgani uchun (teoremani $f(x_0) < 0$ bo'lganda ham tegishlicha bayon etib, isbotlash mumkin), (a,b) intervalda $f(x) > 0$ va $\dot{x} > 0$ bo'ladi. Bunda (a,b) da holat nuqtasi chap o'ngga harakat qilib, holat traektoriyasini chizishi kelib chiqadi (5 – chizma). Demak, t o'sishi bilan $\varphi(t)$ nuqta (a,b) intervaldan faqat o'ng oxiri orqali chiqib orqali chiqib ketishi mumkin (agar bu mumkin bo'lsa). Deylik, $t = t_1$ bo'lganda $\varphi(t_1) = b$ bo'lsin. Eslatib o'tamizki, $\varphi(b) = 0$ va b - muvozanat nuqtasi, bu b nuqta ham yuqoridagi teoremaga ko'ra mustaqil traektoriyadan iborat. Ammo yuqoridagi farazga ko'ra $x = b$ va $x = \varphi(t)$ traektoriyalari $t = t_1$ da kesishadi. $f(x)$ funksiya uzliksiz differensiallanuvchi bo'lgani uchun (1.6) tenglama ixtiyoriy tayinlangan boshlang'ich shartni qanoatlantiradigan yagona yechimga ega. Shuning uchun biz ziddiyatga keldik. Demak, t o'sishi bilan $\varphi(t)$ nuqta (a,b) intervaldan chiqib keta olmaydi. $\varphi(t)$ nuqtatkamayishibilan (a,b) intervaldanchapoxiriorqalichiqibketaolmasligih amxuddishundayko'rsatiladiki. Demak, usha $a < \varphi(t) < b$ tengsizliko'rinli. Shundayqilib, (1.7) mubosabatlarisbotlandi.

Endi (1.8) munosabatniisbotlaymiz. Buninguchun $\lim\limits_{t \to r_2} \varphi(t) = b$ niisbotlashyetarli.

Qolganmunosabatshungao'xshashisbotlanadi.

$$\lim_{t \to r_2} \varphi(t) \neq b, \text{ya'ni} \lim_{t \to r_2} \varphi(t) = c^* < b$$

debfarazetamiz. (a,b) intervalda $f(x) > 0$ bo'lganiuchun $f(c^*) > 0$ bo'ladi. (1.6) tenglamaning $(0, c^*)$ boshlang'ichqiymatlargaegabo'lganyechimini $\psi(x)$ deylik. Demak,

$\psi(0) = c^*, \dot{\psi}(t) \equiv f(\psi(t))$. Bundan $f(c^*) > 0$ bo'lganiuchunbiror $t = t_* < 0, t_* \in (r_1, r_2)$ bo'lganda $\psi(t_*) \equiv c$ kelibchiqadi. Ikkinchitomondan, $t \to r_2$ da $\varphi(t) \to c_*$ bo'lganiuchun $\varphi(t_*) < c^*, t_* < r_2$ bo'ladi. Butengsizliklargaasosan $\psi(t_*) = \varphi(t_*) = x_*, a < x_* < c^* < b$ debtanlashmumkin. Boshqachaaytganda, (1.6) tenglamaningikkita $\varphi(t)$ va $\psi(x)$ yechimlaribirxilboshlang'ichshartniqanoatlantirayapti. Buyechimningyagonaligigazid. Shundayqilib, (1.8) munosabatlarisbotlandidesabo'ladi.

Teoremaning oxirgi tasdig'ida isbotlash qoldi. Buning uchun b chekli bo'lsin deylik, ya'ni $b < +\infty; r_2 = +\infty$ ekanini isbotlaymiz. Faraz etaylik, $r_2 < +\infty$. Ushbu funksiyani kiritamiz:

$$\chi(t) = \begin{cases} \varphi(t), r_1 < t < r_2, \\ b, t \geq r_2. \end{cases}$$

Bu funksiya (1.6) tenglamaning yechimi, ammo buning bo'lishi mumkin emas. Aks holda ikki yechim $x = \chi(y)$ va $x = b$ lar $t = r_2$ bo'lganda bir xil qiymatlarga ega bo'ladi. Shunday qilib, $r_2 = \infty$. Xuddi shunga o'xshash $a > -\infty$ bo'lganda $r_1 = -\infty$ ekani isbotlanadi. Teorema to'liq isbot bo'ldi.

Keltirilgan teorema (1.6) tenglama yechimlarining muhim xossasini beradi.

Navbatdagi xossani bayon etishdan avval ba'zi tushunchalarni kiritamiz.

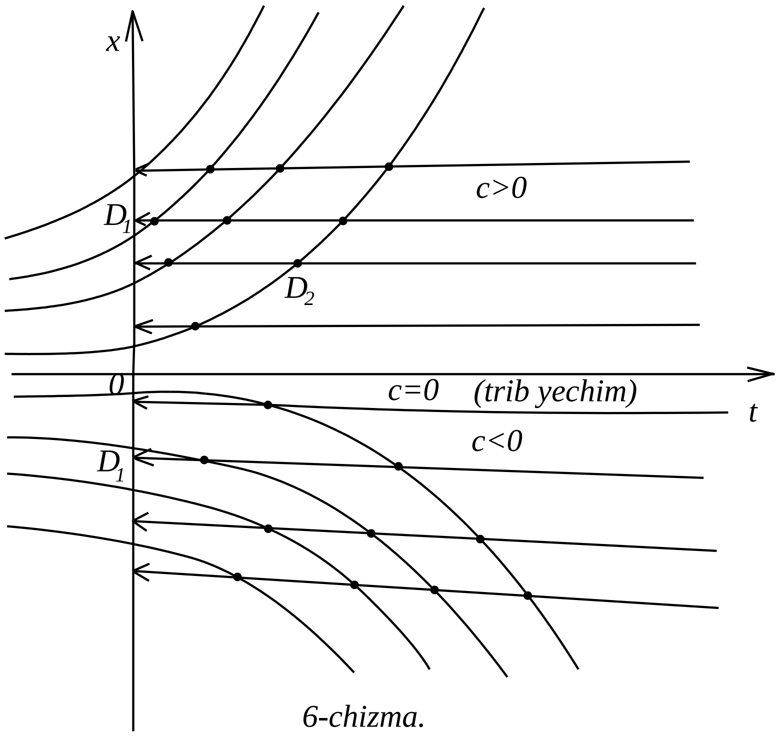
Berilgan (1.6) tenglamaning biror muvozanat nuqtasini b, undan chap va o'ng tomondagi eng yaqin muvozanat nuqtalarni a va c deylik. Agar (a,b) interval $\sum$ sistemaning eng chap, (b,c) esa uning eng o'ng intervali bo'lsa, u holda $a=-\infty, c=+\infty$ bo'ladi. Quyidagi mulohazalar shu hollarda ham o'rinli. Demak, $(a,b)\in\sum,(b,c)\in\sum$. Har bir (a,b) yoki (b,c) intervalda $f(x)\neq 0$. Shu $f(x)$ funksiyaning musbat yo manfiyligiga qarab (a,b) va (b,c) intervallarda holar nuqtasi t ortishi bilan yo b ga yaqinlashadi, yo undan uzoqlashadi.

Agar har ikki (a,b) va (b,c) intervallarda ha holat nuqtasi t ortishi bilan b ga aqinlashsa, u holda nuqta (muvozanat nuqtasi) turg'un deyiladi; agar t ortishi bilan har ikki intervalda ham holat nuqtasi b nuqtadan uzoqlashsa, u holda b nuqta noturg'un (turg'unmas) deyiladi; agar t ortishi bilan holat nuqta bir intervalda b ga yaqinlashib, ikkinchi intervalda undan uzoqlashsa, u holda b nuqta yarim turg'un deyiladi.

$\dot{x}=x$ tenglamaning bitta $x=0$ muvozanat nuqtasi bor. Demak, $b=0$ va $\sum$ sistema ikkita $(-\infty,0)$ hamda $(0,+\infty)$ intervallardan tashkil topgan. Ravshanki, $(-\infty,0)$ intervalda holat nuqtasi b dan uzoqlashadi, ya'ni $x<0$ bo'lgani uchun harakat o'ngdan chapga bo'ladi. $(0,+\infty)$ intervaldaesaharakatchapdano'nggabo'ladi, ya'niholatnuqtasivaqto'tishibilan b nuqtadanyanauzoqlashadi. Shundayqilib, $\dot{x}=x$ tenglamauchun $b=0$ nuqtanoturg'unmuvozanatnuqtadir. Shungao'xshash, agar $\dot{x}=-x$ tenglamako'rilsa, $x=0$ nuqtaturg'unmuvozanatnuqtaekaniniko'rsatishmumkin.

Mulohazalarni integral chiziqlar yordamida ham olib borish mumkn edi. Xususan $\dot{x}=x$ tenglama uchun $x=0$ muvozanat nuqtasiga (t,x) tekislikdagi trivial yechim, ya'ni t o'qi mos keladi. Bu gorizontal o'qning yuqori va pastki qismidagi integral chiziqlar t ortishi bilan borgan sari shu o'qdan uzoqlashib ketadi (6– rasm). $\dot{x}=-x$ tenglama esa buning aksi bo'ladi.

Shunday qilib, (1.6) tenglama uchun b muvozanat nuqtaning atrofida, aniqrog'i (a,b) va (b,c) intervallarda holat nuqtasining harakati to'g'risida quyidagi teorema o'rinli.



6-chizma.

Teorema. (1.6) tenglamaning muvozanat nuqtasi b turg'un bo'lishi uchun (a,b) intervalda $f(x)>0$ va (b,c) intervalda $f(x)<0$ bo'lishi zarur va yetarli; muvozanat nuqta b noturg'un bo'lishi uchun (a,b) da $f(x)<0$, (b,c) da $f(x)>0$ bo'lishi zarur va yetarli; nihoyat, b nuqta yarim turg'un bo'lishi uchun $f(x)$ funksiyaning ishorasi (a,b) va (b,c) intervallarda bir xil bo'lishi zarur va yetarli.

Bu teoremaning isboti yuqoridagi mulohazalar va ta'riflarga asosan ravshan.

Shuni eslatamizki, bu teoremada foydalanish uchun funksiyaning ishorasini u yoki bu intervallardan tekshirish lozim. Agar $f(x)$ funksiyaning hosilalaridan foydalansak, tekshirish osonlashadi. Shu munosabat bilan quyidagi teoremani keltiramiz.

Teorema. (1.6) tenglama uchun b muvozanat nuqta bo'lib $f(x)$ funksiya shu nuqtada $2s+1$ ($s-$ natural son) – tartibgacha uzluksiz hpsilalarga ega bo’lsin. Agar ushbu

$$f'(b)=...=f^{(2s-1)}(b)=0,\ f^{(2s)}(b)\neq 0 \quad (1.9)$$

munosabatlar bajarilsa, b nuqta yarim turg’un muvozanat nuqta bo’ladi; shunga o’xshash, agar ushbu

$$f'(b)=...=f^{(2s)}(b)=0,\ f^{(2s-1)}(b)\neq 0 \quad (1.10)$$

munosabatlar bajarilib

a) $f^{(2s+1)}(b)<0$ bo’lsa, $b-$ turg’un, (1.10')

b) $f^{(2s+1)}(b)>0$ bo’lsa, $b-$ noturg’un. (1.10'')

muvozanat nuqta bo’ladi.

Isbot. (1.6) tenglamada $f(x)$ funksiya biror $k-$tartibgacha uzluksiz hosilalarga ega bo’lsin. U holda $f(x)$ funksiya uchun $x=b$ nuqtaning atrofida Lagranj formulasini yozamiz:

$$f(x)=f(b)+\frac{f'(b)}{1!}(x-b)+\frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2+...+$$
$$+\frac{f^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k+0((x-b)^k),$$

bunda $\lim\limits_{y\to 0}\frac{0(y)}{y}=0$. Endi $k=2s$ bo’lsin. U holda (1.9) munosabatlardan foydalansak,

$$f(x)=\frac{f^{(2s)}(b)}{(2s)!}(x-b)^{2s}+0((x-b)^{2s})$$

formulaga ega bo’lamiz. $x\in(a,b)$ deylik. Bu holda $x-b<0;$ shuningdek, $x\in(b,c)$ bo’lsa, $x-b>0$. Ammo $(x-b)^{2s}>0$ bo’ladi. Shuning uchun formulaning o’ng tomonidagi $0((x-b)^{2s})$ ifoda $\frac{f^{2s}(b)}{(2s)!}(x-b)^{2s}$ hadning ishorasiga ta’sir eta olmaganidan

$$signf(x)=sign\frac{f^{(2s)}(b)}{(2s)!},\ x\in(a,b),x\in(b,c)$$

munosabat o’rinli. Lekin $f^{(2s)}(b)\neq 0$. Shuning uchun $f(x)$ funksiya (a,b) va

(b,c) intervallarda bir xil ishoraga ega. Demak, (1.9) munosabatlar bajarilganda b nuqta yarim turg'u bo'ladi.

Endi (1.10) munosabat o'rinli bo'lsin deylik. U holda Lagranj formulasida $k = 2s+1, s = 0,1,...$ deb topamiz:

$$f(x) = \frac{f^{(2s+1)}(b)}{(2s+1)!}(x-b)^{2s+1} + 0((x-b)^{2s+1}).$$

Bu formulada o'ng tomonning ishorasi birinchi had bilan aniqlanadi, ishoraga $0((x-b)^{2s+1})$ had ta'sir eta olmaydi. Avval (a,b) intervalni ko'raylik. Unda $x-b<0$, demak, $(x-b)^{(2s+1)}<0$ Bundan (a,b) va $f(x)$ ning ishorasi $f^{(2s+1)}(b)$ ning ishorasiga teskari bo'lib chiqadi, ya'ni (a,b) intervalda

$$signf(x) = -sign\frac{f^{(2s+1)}(b)}{(2s+1)!}, x \in (a,b). \quad (1.11)$$

(b,c) interval uchun $x-b>0$, $(x-b)^{2s+1}>0$ va (b,c) da

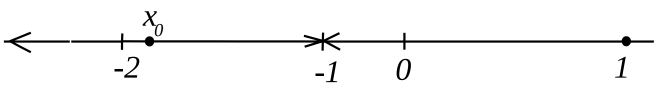
$$signf(x) = sign\frac{f^{(2s+1)}(b)}{(2s+1)!}, x \in (b,c). \quad (1.12)$$

Topilgan (1.11) va (1.12) munosabatlardan $(x-b)^{(2s+1)}<0$ bo'lsa, $f(x)>0,\ x\in(a,b),\ f(x)<0, x\in(b,c)$ tengsizliklar kelib chiqadi. Bu holda ta'rif bo'yicha b nuqta turg'un bo'ladi. Agar $(x-b)^{(2s+1)}>0$ bo'lsa, ushbu $f(x)<0,\ x\in(a,b);\ f(x)>0,\ x\in(b,c)$ tengsizliklarga egamiz. Bu holda esa b nuqta noturg'un bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

Hozir isbotlangan teoremada keltirilgan (1.9) va (1.10), (1.10'), (1.10'') shartlar muvozanat nuqtasining yarim turg'un, yurg'un va noturg'un bo'lishi uchun yetarli shart vazifasini bajaryapti. Aslida bu shartlar zarur va yetarlidir. Zarurligining isboti ham yuqoridagi kabi bo'ladi.

Misollar. 1. Avval $\dot{x} = x$ tenglamani olaylik. Unda $f(x) = x$ bo'lib, $f'(0) = 1 > 0$. Demak, yuqoridagi teoremaga ko'ra $x = 0$ nuqta notug'un. Agar $\dot{x} = -x$ tenglamani olsak, unda $f(x) = -x$ va $f'(0) = -1 < 0$. Bu holda $x = 0$ nuqta turg'un bo'ladi. Endi $\dot{x} = p(x-1)(x+1)(x+2), 0 \neq p = const$ tenglamani ko'raylik. Unda $f(x) = p(x-1)(x+1)(x+2)$ bo'lib, $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -2$ nuqtalar muvozanat nuqtalaridan iborat. Hosilalarni isbotlaymiz:

$$f'(x) = p[(x+1)(x+2) + (x-1)(x+2) + (x-1)(x+1)].$$



7-chizma.

Ko'rinib turibdiki, $f'(1) = 6p, f'(-1) = -2p, f'(-2) = 3p$ va $p \neq 0$ bo'lgani uchun bu hosilalar noldan farqli. Biz $2s+1=1$ bo'lgan holga egamiz. $p > 0$ bo'lsa, $6p > 0$ va $x_1 = 1$ nuqta noturg'un; $-2p > 0$ va $x_2 = -1$ nuqta turg'un; $3p < 0$ va $x_3 = -2$ nuqta noturg'un bo'ladi (7-chizma).

2. Ushbu $\dot{x} = \sin x$ tenglama uchun muvozanat nuqtalari $\sin x = 0$ tenglamaning ildizlaridan iborat. Ildizlar $x = n\pi$ ($n-$ butun son) ko'rinishda yoziladi. Bu holda $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$ bo'lib:

$$\cos x \begin{cases} > 0, & \text{agar} \quad x = 2k\pi, \quad k - \text{butun son}, \\ < 0, & \text{agar} \quad x = (2k+1)\pi, k - \text{butun son} \end{cases}$$

Yuqoridagi teoremaga ko'ra, $x = 2k\pi$ ko'rinishdagi nuqtalar noturg'un, $x = (2k+1)\pi$ ko'rinishdagi nuqtalar esa turg'un bo'ladi. Qayd qilib o'tamizki, berilgan tenglamaning muvozanat nuqtalari sanoqli bo'lib, limit nuqtaga ega emas.

3. Avtonommas sistemaning holatlar fazosiga misol.

Ushbu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a \\ \dot{x} = 3bt^2 \end{cases}, a > 0, b > 0 \quad (1.13)$$

Avtonommas sistemani olaylik. Uning umumiy yechimi

$$\begin{cases} x_1 = at + c_1 \\ x_2 = bt^3 + c_2 \end{cases} \quad (1.14)$$

ko'rinishda yoziladi. Berilgan sistemada $n = 2$ bo'lib,

$f_1 = a,\ f_2 = 3bt^2$ funksiyalar t, x_1 va x_2 lar bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchi. Koshi teoremasiga ko'ra, (t, x_1, x_2) o'zgaruvchilarning fazosida ixtiyoriy tayinlangan (t_0, x_1^0, x_2^0) nuqtadan berilgan sistemaning yagona integral chizig'i o'tadi. Bu bir tomondan. Endi sistemaning yechimini holatlar fazosida tasvirlashni ko'raylik. Uning uchun (1.14) da t parametrni chiqarib tashlaymiz:

$$x_2 = \frac{b}{a^3}(x - c_1)^3 + c_2 \quad (1.15)$$

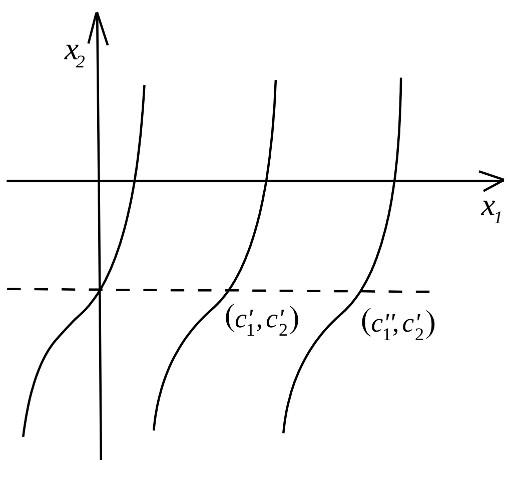
Bu kubik parabolalardan iborat bo'lib, (c_1, c_2) nuqtadan o'tadi va $x_2 = c_2$ chiziqdan pastda qavariqligi yuqoriga, shu chiziqdan yuqorida esa qavariqligi pastga qaragan bo'ladi. Shu bilan birga y chiziq $x = c_1$ chiziqqa urinadi ham. Agar yo $c_1' = c_1'', c_2' \neq c_2''$, yoki $c_1' \neq c_1'', c_2' = c_2''$ bo'lsa, tegishli kubik parabolalar o'zaro kesishmaydi. (8-rasm). Bu analitik usulda isbotlash qiyin emas. Parabolalar kesishadi deylik. U holda

$$y = \frac{b}{a^3}(x - c_1') + c_2', \quad y = \frac{b}{a^3}(x - c_1'') + c_2''$$

lardan

$$A(c_1'' - c_1') = c_2'' - c_2', \quad A = \frac{b}{a^3} > 0 \quad (1.16)$$

tenglikga egamiz. Agar $c_1' = c_1'', c_2' \neq c_2''$, yoki $c_1' \neq c_1'', c_2' = c_2''$ munosabatlarni ko'rsak, yuqorida ziddiyatga kelamiz. Demak, kubik parabolalar kesisha



8-chizma.

olmaydi.

Endi $c_1' = c_1'', c_2' \neq c_2'',$ bo'lsin. U holda tegishli kubik parabolalar (1.16) tenglik o'rinli bo'lganda o'zaro kesishadi. Demak, (x_1, x_2) tekislikning har bir nuqtasidan yagona kubik parabola o'tmaydi (chizma). Ammo (t, x_1, x_2) fazoda yagonalik o'rinli edi. Shunday qilib, bu misoldan ko'rinadiki, avtonommas sistemalarni ularning holatlar fazosida tekshirish maqsadga muvofiq emas.

II bob. Bir jinsli sistemaning holatlar tekisligi.

2.1-§. Sistemaning kanonik ko'rinishi.

Bizga ushbu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

chiziqli o'zgarmas koeffitsientli bir jinsli sistema berilgan bo'lsin. Bu sistemaning determinant:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

bo'lib, (1.17) sistema uchun koordinata boshi $(0,0)$ muvozanat nuqta bo'ladi. Ammo undan boshqa muvozanat holatlar ham bo'lishi mumkin. Agar $D \neq 0$ bo'lsa, ravshanki, $A = (a_{ij}), i, j = 1,2$ matrisaning har ikki xos sonlari noldan farqli bo'ladi.

Hozir biz A matrisa xos sonlariga qarab, (1.17) sistemaning ko'rinishini soddalashtirish bilan shug'ullanamiz.

A) A matrisaning xos sonlari haqiqiy, har xil va noldan farqli. Ularni λ_1 va λ_2 deylik. Bu holda (1.17) sistemani maxsusmas almashtirish yordamida

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

ko'rinishga keltirish mumkin.

Shu munosabat bilan quyidagi almashtirishni bajaraylik:

$$\begin{cases} y_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \\ y_2 = \gamma x_1 + \delta x_2, \end{cases} \quad (2.2)$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Hosilalarni hisoblab, (2.17) dan foydalanamiz:

$$\dot{y}_1 = \alpha\dot{x}_1 + \beta\dot{x}_2 = (a_{11}\alpha + a_{21}\beta)x_1 + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta)x_2,$$
$$\dot{y}_1 = \gamma\dot{x}_1 + \delta\dot{x}_2 = (a_{11}\gamma + a_{21}\delta)x_1 + (a_{12}\gamma + a_{22}\delta)x_2.$$

Bu ifodalarni mos ravishda $\lambda_1 y_1$ va $\lambda_2 y_2$ larga tebglashtiramiz:

$$\begin{cases} (a_{11}\alpha + a_{21}\beta)x_1 + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta)x_2 = \lambda_1(\alpha x_1 + \beta x_2), \\ (a_{11}\gamma + a_{21}\delta)x_1 + (a_{12}\gamma + a_{22}\delta)x_2 = \lambda_2(\gamma x_1 + \delta x_2). \end{cases}$$

Endi x_1 va x_2 lar oldidagi koeffisientlarni tenglashtirsak, ushbu

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)\alpha + a_{21}\beta = 0, \\ a_{12}\alpha + (a_{22} - \lambda_1)\beta = 0; \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_2)\gamma + a_{21}\delta = 0, \\ a_{12}\gamma + (a_{22}-\lambda_1)\delta = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

sistemalarni hosil qilamiz. Ravshanki λ_1 va λ_2 uchun

$$D(\lambda_i) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_i \end{vmatrix} = 0, \quad i = 1,2 \text{ bunda } D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Shuning uchun

$$D^*(\lambda_i) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_i \end{vmatrix} = 0, \quad i = 1,2$$

bo'ladi. bu tenglikka asosan (2.3) va (2.4) sistemalar α, β va γ, δ larga nisbatan trivial bo'lmagan yechimlarga ham ega. Xususan,

$$\alpha = a_{21},\ \beta = -(a_{11}-\lambda_1);\ \gamma = a_{21},\ \delta = -(a_{11}-\lambda_2) \qquad (2.5)$$

deb tanlasa bo'ladi. Agar (2.5) tengliklardan foydalansak, (2.2) almashtirish maxsusmas bo'la oladimi? Shuni tekshiraylik. Quyidagiga egamiz:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -a_{21}(a_{11}-\lambda_2) + (a_{11}-\lambda_1)a_{21} = a_{21}(\lambda_2-\lambda_1).$$

Bundan $a_{21} \neq 0$ bo'lganda $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ekani kelib chiqadi. Agar $a_{21} = 0$ bo'lsa $a_{12} = 0$ bo'lganda (1.17) sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{21}x_1, \\ \dot{x}_2 = a_{22}x_2 \end{cases}$$

ko'rinishda, ya'ni (2.1) ko'rinishida yozilgan bo'ladi. Endi agar $a_{21} = 0$ bo'lib, $a_{12} \neq 0$ bo'lsa, u holda (1.17) sistema ushbu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{22}x_2 \end{cases}$$

ko'rinishni oladi. Bunda x_1 va x_2 lar rolini almashtirsak,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{22}x_1, \\ \dot{x}_2 = a_{12}x_1 + a_{11}x_2 \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Endi bu sistemada a_{21} o'rnida a_{12} turibdi. Shuning uchun $a_{21} \neq 0$ bo'lgandagi mulohazalar $a_{12} \neq 0$ bo'lganda ham o'tadi. Shunday qilib, (2.17) sistemani uning matrisasi haqiqiy, har xil va noldan farqli xos sonlarga ega bo'lganda (2.1) ko'rinishda yozish mumkin. Bu (2.1) sistema ko'rilayotgan holda (1.17) sistemaning kanonik ko'rinishi deyiladi.

b) A matrisaning xos sonlari qo'shma kompleks. Ularni $\lambda_1 = \mu + i\nu, \lambda_2 = \mu - i\nu, \nu \neq 0$ deylik. Avvalo (2.5) qiymatlardan foydalansak, (2.2) almashtirishni bunday yozish mumkin:

$$\begin{cases} y_1 = a_{21}x_1 - (a_{11} - \lambda_1)x_2, \\ y_2 = a_{21}x_1 - (a_{11} - \lambda_2)x_2. \end{cases}$$

Shu almashtirish formulalari λ_1, λ_2 lar kompleks bo'lganda ham o'rinli. λ_1 va λ_2 lar o'rniga o'z ifodalarini qo'yamiz:

$$\begin{cases} y_1 = a_{21}x_1 - (a_{11} - \mu - i\nu)x_2, \\ y_2 = a_{21}x_1 - (a_{11} - \mu + i\nu)x_2. \end{cases} \quad (2.6)$$

Bundan, agar

$$\begin{cases} y_1 = \mu_1 + iu_2, \\ y_2 = \mu_1 - iu_2 \end{cases}$$

deb belgilasak,

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{21}x_1 - (a_{11} - \mu)x_2, \\ u_2 &= \nu x_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

kelib chiqadi. Sodda hisoblashlar yordamida (2.1), (2.6) va (2.7) larga ko'ra quyidagiga egamiz:

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{du_1}{dt} + i\frac{du_2}{dt} = (\mu + i\nu)y_1,$$

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} + i\frac{du_2}{dt} &= (\mu + i\nu)[a_{21}x_1 - (a_{11} - \mu - i\nu)x_2] = \\ &= (\mu u_1 - \nu u_2) + i(\nu u_1 + \mu u_2). \end{aligned}$$

Shunday qilib, ushbu

$$\frac{du_1}{dt}+i\frac{du_2}{dt}=(\mu u_1+\nu u_2)+i(\nu u_1+\mu u_2)$$

tenglikdan

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt}=\mu u_1-\nu u_2, \\ \dfrac{du_2}{dt}=\nu u_1+\mu u_2 \end{cases} \qquad (2.8)$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Shu (2.8) sistema berilgan sistemaning xos sonlar kompleks bo'lgan holda kanonik ko'rinishidan iborat.

Albatta, (2.8) sistemani integrallab, (2.7) formulalar orqali $x_1(t)$ va $x_2(t)$ yechim topiladi.

v) A matrisaning xos sonlari o'zaro teng va noldan farqli. Ko'rilayotgan holda $\lambda_1=\lambda_2\neq 0.$ $D(\lambda)=0$ tenglamadan $\lambda_{1,2}=\dfrac{a_{11}+a_{22}}{2}$ ekani kelib chiqadi. Bu holda ham a) holdagi kabi mulohazalar yuritib, berilgan sistemani uning koeffisientlariga qarab xususan ushbu

$$\begin{cases} \dot{y}_1=\lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2=\lambda_1(y_1+\lambda_2) \end{cases} \text{yoki} \begin{cases} \dot{y}_1=\lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2=\lambda_1 y_2 \end{cases} \qquad (2.9)$$

kanonik ko'rinishga keltirish mumkin.

g) A matrisaning xos sonlari teng va noldan iborat, ya'ni $\lambda_1=\lambda_2=0.$ Bu holda $D(\lambda_{1,2})=0$ munosabatdan $a_{11}=a_{22}=0,\ a_{12}a_{21}=0,\ a_{11}=a_{21}=-a_{12}=-a_{22}=0$ ekani kelib chiqadi. Bu holda kanonik ko'rinish quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1=a(x_1-x_2), \\ \dot{x}_2=a(x_1-x_2) \end{cases} \text{yoki} \begin{pmatrix} \dot{y}_1=0, \\ \dot{y}_2=0, \\ y_1=y_2=x_1-x_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1=a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2=0, \\ a_{21}=0, a_{12}\neq 0, \end{cases} \begin{cases} \dot{x}_1=0, \\ \dot{x}_2=a_{21}x_1, \\ a_{12}=0, a_{21}\neq 0, \end{cases} \begin{cases} \dot{x}_1=0, \\ \dot{x}_2=0, \\ a_{21}=a_{12}=0. \end{cases} \qquad (2.10)$$

Yuqorida biz chiziqli o'zgarmas koeffisientli bir jinsli sistemaning ko'rinishini uning xos sonlarigan qarab soddalashtirish bilan shug'ullandik.

Endi kanonik ko'rinishda yozilgan ikkinchi tartibli chiziqli sistemaning traektoriyalarini holatlar tekisligida o'rganamiz.

2.2-§. Bir jinsli sistemaning holatlar tekisligi.

Xos sonlar haqiqiy va kompleks bo'lgan hollarni alohida tekshiramiz.

A. A matrisaning xos sonlari haqiqiy, har xil va noldan farqli. Xos sonlari λ_1 va λ_2 desak, ularga mos kelgan chiziqli erkli xos vektorlarni topish mumkin. Shuning uchun (1.17) sistemaning umumiy yechimi

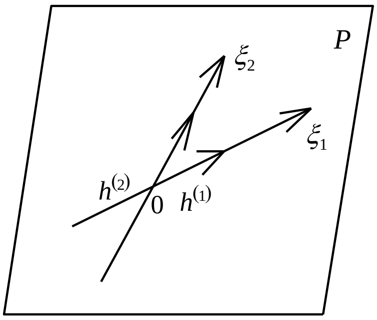
$$x = C_1 h^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 h^{(2)} e^{\lambda_2 t} \quad (2.11)$$

ko'rinishda yoziladi. Uni yana

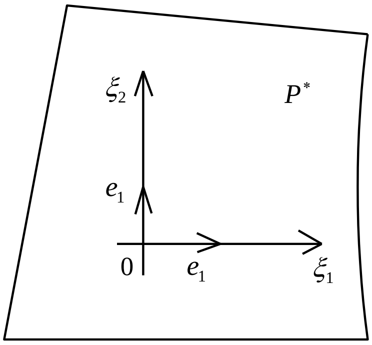
$$x = \xi_1 h^{(1)} + \xi_2 h^{(2)} \quad (2.12)$$

$$(\text{ bunda } \xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}) \quad (2.13)$$

ko'rinishda $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ vektorlar bo'yicha yoyib yozish mumkin. ξ_1 va ξ_2 sonlar holat tekisligida to'g'ri burchakli Dekart koordinatalaridan iborat bo'lishi shart emas, bu $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ vektorlar bo'yicha yo'nalgan o'qlarga bog'liq. Holatlar tekisligini P deylik. Uni ξ_1 va ξ_2 o'qlar $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ vektorlar bo'yicha yo'nalgan bo'ladi (9-chizma). Affin almashtirish yordamida P holat tekisligini shunday P^* tekislikka akslantirish mumkinki, unda $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar e_1 va e_2 birlik vektorlarga o'tamiz, P tekislikning (ξ_1, ξ_2) nuqtasi P^* tekislikning to'g'ri burchakli dekart koordinatalariga o'tadi, ya'ni P da $x = \xi_1 h^{(1)} + \xi_2 h^{(2)}$ bo'lsa, P^* da $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$, e_1 e_2 bo'ladi. Ko'rilayotgan holda (1.17) sistemani kanonik



a)



b)

9-chizma.

ko'rinishda yozish mumkin ((2.1) ga qarang). (2.1) sistemaning traektoriyalari P^* tekislikda chiziladi, chunki uning xos vektorlari $(1,0)$ va $(0,1)$ dan iborat.

Endi (2.1) sistemaning traektoriyalarini tasvirlashga o'tamiz. Avval $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ va $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ yoki $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ tengsizliklar o'rinli bo'lsin. (2.13) dan ko'rinib turibdiki, birinchi chorakda chizilgan traektoriyalar yordamida olgan chorakdagi traektoriyalarni ham yozish mumkin. Undan tashqari, $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ bo'lgan holda $C_1 \neq 0, C_2 = 0$ bo'lsa, $\xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $\xi_2 = 0$, ya'ni ξ_1 o'qga egamiz. Unda $C_1 > 0$ bo'lganda harakat o'ngdan chapga, $C_2 < 0$ bo'lganda esa chapdan o'ngga bo'ladi. Boshqacha aytganda, $t \to +\infty$da C ning ishoasidan qat'i nazar,

$\lim\limits_{t\to+\infty}\xi_1 = \lim\limits_{t\to+\infty}C_1e^{\lambda_1 t} = 0$ va koordinata boshidan ikki tomonda harakat shu nuqtaga yo'nalgan bo'ladi. Xuddi shu xususiyat ξ_2 o'qga ham tegishli (10-chizma). Endi $C_1 > 0,\ C_2 > 0$ bo'lganda, ya'ni I chorakda traektoriyalarning qavariqligini tekshiraylik. Ravshanki,

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \frac{C_1}{C_2}(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t},$$

$$\frac{d^2\xi_2}{d\xi_1^2} = \frac{C_1}{C_2}(\lambda_2 - \lambda_1)^2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} > 0.$$

Bundan I chorakda traektoriyalarning qavariqligi pastga qaraganligi kelib chiqadi. Ushbu

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \lim_{t\to+\infty}\frac{C_1}{C_2}(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} = 0$$

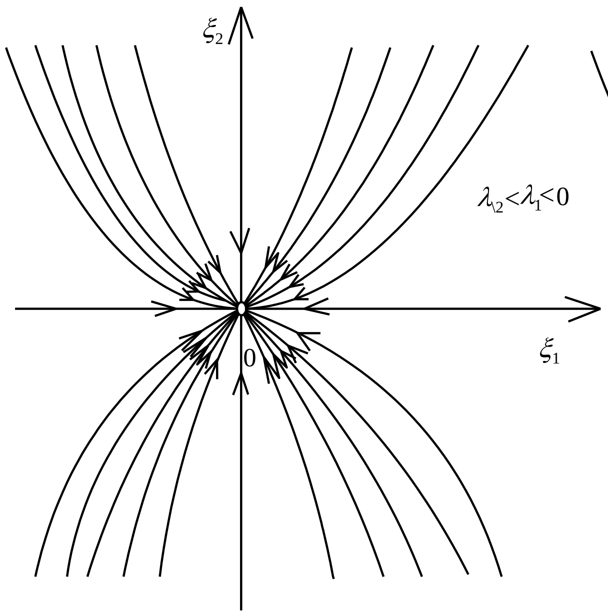
munosabatdan $t\to+\infty$ da traektoriyalar abscissa o'qiga urinishi chiqadi. I

chorakda $\frac{d\xi_1}{dt} = C_1\lambda_1e^{\lambda_1 t} < 0, \frac{d\xi_2}{dt} = C_2\lambda_2e^{\lambda_2 t} < 0$

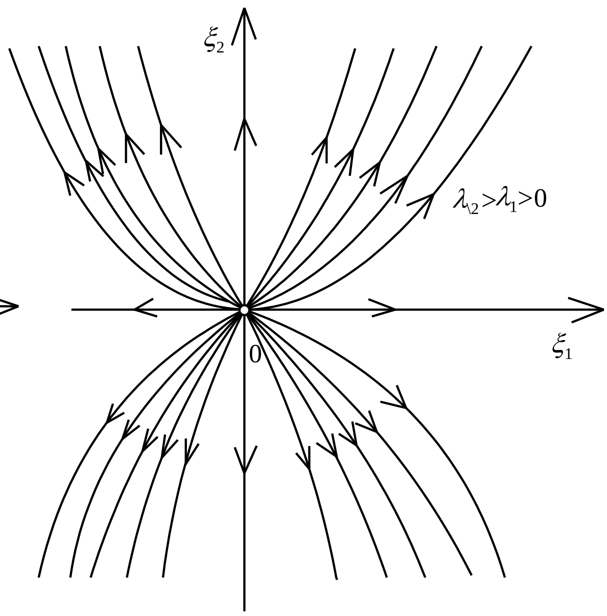
bo'lgani uchun ξ_1 va ξ_2 lar *t*ortishi bilan kamayadi va demak, harakat yuqoridan pastga hamda o'ngdan chapga yo'nalgan bo'ladi (10-chizma). traektoriyalar chekli vaqtda koordinata boshiga kela olmaydi. Koordinata boshi berilgan sistema uchun yagona muvozanat nuqtasidan iborat bo'lib, u mustaqil yechimdir. Qolgan choraklardagi traektoriyalarni shu chizilgan traektoriyalardan ularni ξ_1 va ξ_2 o'qlarga nisbatan simmetrik aylantirish yordamida hosil qilamiz. Shunday qilib, butun tekislikda traektoriyalar chizildi deyish mumkin (10-chizma). $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ bo'lganda ham huddi shu usul bilan traektoriyalar chiziladi. Traektoriyalar avvalgisidan farq qilmasada, ularda yo'nalish teskari bo'ladi (11-chizma). Xos sonlarning $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ qiymatiga mos manzara (10-chizma) turg'un tugun, $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ qiymatlariga mos manzara esa (11-chizma) noturg'un tugun deyiladi. Eslatib o'tamizki, traektoriyalar $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ bo'lganda esa $t\to+\infty$ da, $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ bo'lganda esa $t\to-\infty$ da P^* tekislikda ξ_1 o'qiga urinadi; P tekislikda bu λ_1 ga mos kelgan xos vektorning yo'nalishi bilan bog'liq bo'ladi. Aytilgan xossa misollar ko'rishda qulaylik tug'diradi.

Xos sonlar uchun $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ $(\lambda_2 < 0 < \lambda_1)$ tensizlik o'rinli bo'lsin deylik. Bu holda xos sonlar turli ishoralarga ega. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ bo'lganda ξ_1 o'qi bo'yicha harakat koordinata boshiga yo'nalgan bo'lib, ξ_2 o'qi bo'yicha harakat koordinata boshidan uzoqlashadi. Traektoriyalarni qurish uchun ularni I chorakda qurish yetarli. Avval qavariqlikni tekshiraylik. $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$ bo'lgani uchun $\frac{d^2\xi_2}{d\xi_1^2} > 0$ bo'ladi, demak, I chorakda qavariqlik pastga qaragan. Shunga o'xshash ushbu

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \lim_{t\to+\infty}\frac{C_2}{C_1}(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} = +\infty,$$



10-chizma.



11-chizma.

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{d\xi_2}{d\xi_1}=\lim_{t\to-\infty}\frac{C_2}{C_1}(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}=o,\quad \lim_{t\to+\infty}\xi_1(t)=0,$$

$$\lim_{t\to+\infty}\xi_2(t)=+\infty$$

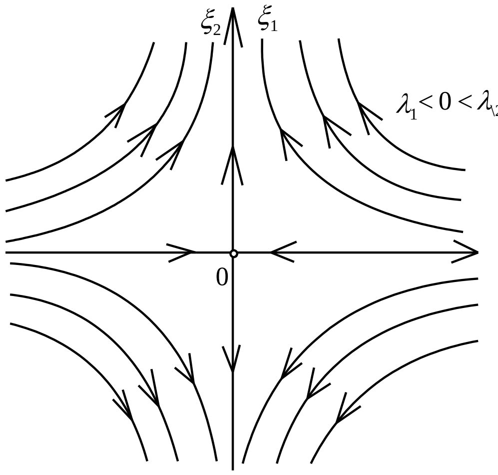
Munosabatlarga egamiz. Bundan I chorakdagi traektoriyalar parabolalarga o'xshashligi va ularda harakat o'ngdan chapga va pastdan yuqoriga yo'nalganligi kelib chiqadi (12-chizma). Akslantirish yordamida traektoriyalarni boshqa choraklarda ham chizamiz. Agar xos sonlar $\lambda_2<0<\lambda_1$ tengsizlikni qanoatlantirsa, yuqoridagi usul bilan yana traektoriyalarni qurish mumkin (13-chizma). Har ikki holda ham hosil bo'lgan manzara egar deyiladi.

Misollar. 1. Ushbu

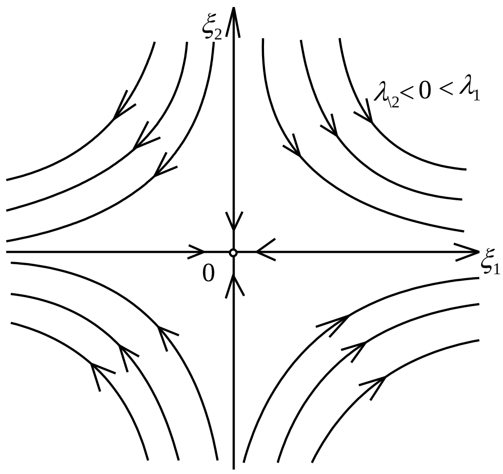
$$\begin{cases}\dot{x}_1=-3x_1+x_2\\ \dot{x}_2=4x_1-3x_2\end{cases}$$

sistemaning traektoriyalari chizilsin va muvozanat nuqtasi atrofidagi manzara aniqlansin. A matrisani yozamiz: $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 4 & -3\end{pmatrix}$. Bu matrisaning xos sonlarini topamiz: $\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1\\ 4 & -3-\lambda\end{vmatrix}=0$ yoki $(3+\lambda)^2-4=0.$ Bundan $3+\lambda=\pm2$ yoki $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-5.$ Ravshanki, $\lambda_2<\lambda_1, |\lambda_2|>|\lambda_1|.$ Xos sonlar har xil va manfiy bo'lgani uchun biz turg'un tugunga egamiz. Endi shu manzarani chizaylik. Uning uchun xos vektorlarni topish kerak. $\lambda_1=-1$ ga mos xos vektor $h^{(1)}=\begin{pmatrix}h_1^{(1)}\\ h_2^{(1)}\end{pmatrix}$ ushbu $Ah^{(1)}=(-1)h^{(1)}$ yoki $\begin{pmatrix}-3h_1^{(1)}+x_2\\ 4h_1^{(1)}-3h_2^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-h_1^{(1)}\\ -h_2^{(1)}\end{pmatrix}$ sistemadan topiladi. Ravshanki, biz $-2h_1^{(1)}+h_2^{(1)}=0$ tenglamaga egamiz va undan $h_1^{(1)}=1, h_2^{(1)}=2$ deb olish mumkin. Agar $h_1^{(1)}=-1,\ h_2^{(1)}=-2$ desak ham o'sha yo'nalish chiqariladi. Shunga o'xshash $\lambda_2=-5$ xos songa mos xos vektor topiladi:

$$h^{(2)} = \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

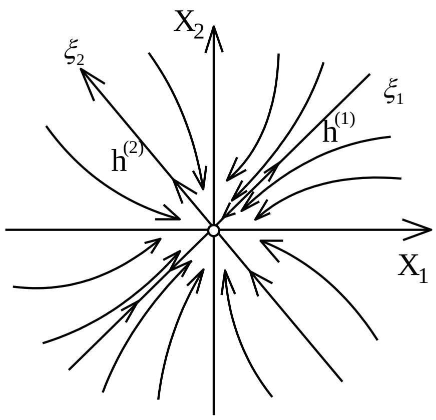


12-chizma.

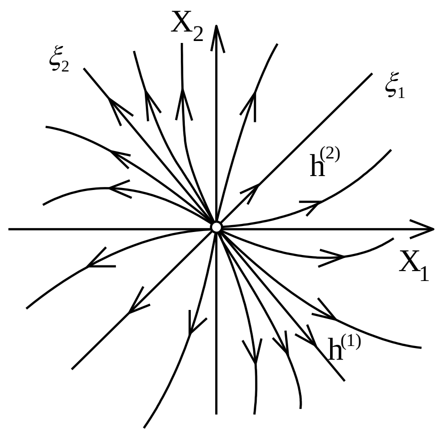


13-chizma.

Endi tekislikda koordinata boshidan shu vektorlar yo’nalishida to’g’ri chiziqlar o’tkazamiz. Absolyut qiymati bo’yicha kichik xos son $\lambda_1 = -1$ bo’lgani uchun traektoriyalar shu xos songa mos $h^{(1)}$ vektor yo’nalishiga $t \to +\infty$ da urinadi (14-chizma).



14-chizma.



15-chizma.

2. Ushbu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

sistema uchun $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ va xos sonlari $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ tenglamadan topiladi:

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$. $\lambda_1 = 1$ ga mos xos vektor $h^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ va $\lambda_2 = 5$ ga mos xos vektor esa $h^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan iborat. Xos sonlar turli va musbat bo'lgani uchun biz noturg'un tugunga egamiz. Traektoriyalar $t \to -\infty$ da $h^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ vektor yo'nalishiga koordinata boshida urinadi (15-chizma).

B) A matrisaning xos sonlari kompleks. Bu holda xos sonlar qo'shma kompleks bo'lib, ularni $\lambda = \mu + iv,\ \lambda = \mu - iv,\ v \neq 0$ deb belgilaymiz. v ni doim $v > 0$ deb qarash mumkin. Shu xos sonlarga mos xos vektorlar ham qo'shma kompleks bo'ladi. Agar $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ lar haqiqiy vektor bo'lsa, mos xos vektorlarni h va $\bar{h}$ deb belgilanadi va bunday aniqlanadi:

$$h = \frac{1}{2}\left(h^{(1)} - ih^{(2)}\right),$$

bunda $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ lar chiziqli erkli, aks holda h va $\bar{h}$ lar chiziqli bog'liq bo'lar edi. Shuning uchun $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ haqiqiy vektorlarni P tekislikda xos yo'nalishlar deb qarash mumkin.

Endi P^* tekislikda traektoriyalarni quramiz. Kurilayotgan holda berilgan sistemaning kanonik shakli ma'lum. Uni yozaylik ((2.8) ga qarang):

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \mu\xi_1 - v\xi_2, \\ \dot{\xi} \ = v\xi_1 + \mu\xi_2. \end{cases} \quad (2.8)$$

Bu sistemaning umumiy yechimi

$$\begin{cases} \xi_1(t) = Ce^{\mu t}\cos(vt + \gamma), \\ \xi_2(t) = Ce^{\mu t}\sin(vt + \gamma) \end{cases}$$

ko'rinishda yoziladi (C va γ – ixtiyoriy o'zgarmaslar). Unda *t*ni parametr deb qarasak, biz traektoriyalarning parametrik tenglamasiga egamiz. Ularni qurish uchun qutb koordinatalariga o'tish qulaylik tug'diradi. Shu maqsadda $\xi_1 = \rho\cos\varphi,\ \xi_2 = \rho\sin\varphi$ (ρ, φ – qutb kordinatalari) deyiladi. Shuning uchun yuqorida yozilgan umumiy yechim

$$\rho = Ce^{\mu t}(C>0),\ \varphi = \nu t + \gamma,\ (\nu > 0)\ (2.14)$$

ko'rinishni oladi. Bu munossabatga ko'ra to'sishi bilan φ burchak ham o'sadib (chunki $\nu > 0$deb qarayapmiz). Boshqacha aytganda, koordinata boshidan chiqarilgan nur $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ nuqtadan o'tib sekundiga γ darian tezlik bilan soat strelkasiga qarshi yonalishda buriladi. (2.14) dan $t$ni chiqaramiz:

$$\rho = Ke^{\frac{\mu}{\nu}\varphi},\quad (2.15)$$

bunda $K = Ce^{-\frac{\mu}{\nu}\gamma} = const.$ Traektoriyalarning ko'rinishi $\mu > 0,\ \mu < 0,\ \mu = 0$ qiymatlarga qarab har xil bo'ladi. $\mu < 0$ bo'lsin. $\nu > 0$ bo'lgani uchun $\lim\limits_{t\to+\infty}\rho = 0,$ chunki $\frac{\mu}{\nu} < 0$ va $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi = +\infty.$ Demak, $t \to +\infty$ da holay nuqtasi koordinata boshiga yaqinlashadi. Hosil bo'lgan manzara turg'un fokus deyiladi. Agar $\mu > 0$ bo'lsa, yuqoridagi kabi mulohazala yordamida noturg'un fokus manzarasini qurish mumkin.

Agar $\mu = 0$ bo'lsa, (2.15) formuladan $\rho = K\ (K = const)$ kelib chiqadi. Bu esa, markazi koordinata boshida bo'lgan konsentrik aylanalardan iborat. Hosil bo'lgan manzara markaz deb ataladi.

Misollar. 1. Ushbu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

sistema uchun $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ va $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ tenglamadan $\lambda = 3 \pm 2i.$

Demak, $\mu = 3, \nu = 2, \lambda = 3 \pm 2i$ xos son uchun xos vektorni izlaymiz.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (3+2i)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \text{ yoki } \begin{pmatrix} 3h_1 - h_2 \\ 4h_1 + 3h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3+2i)h_1 \\ (3+2i)h_2 \end{pmatrix}$$

Bundan

$$\begin{cases} 3h_1 - h_2 = 3h_1 + 2ih_2, \\ 4h_1 + 3h_2 = 3h_2 + 2ih_2 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} -h_2 = 2ih_1, \\ 4h_1 = 2ih_2. \end{cases}$$

Ohirgi ikki tenglikning biri ikkinchisidan hosil qilinishi mumkin. Shuning uchun $h_1 = 1, h_2 = -2i$ deb tanlasa bo'ladi. Endi $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ vektorni bunday tasvirlaymiz:

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right].$$

Ko'rinadiki, $h^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, h^2\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ vektorlar izlangan bo'lib, ular abscissa va ordinate o'qlari bo'yicha yo'nalgandir. Ko'rilayotgan misolda $\mu = 3 > 0$ bo'lgani uchun biz noturg'un fokus manzarasiga egamiz.

2. Ushbu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 10x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

sistema uchun

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ va } \lambda_{1,2} = -1 \pm 3i,\ \mu = -1 < 0, v = 3.$$

Avvalo biz $\mu < 0$ bo'lganidan turg'un fokus manzarasiga egamiz. Endi xos vektorlarni topaylil. Sodda hisoblashlar ko'rsatadiki,

$$\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (-1 \pm 3i)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

yoki

$$\begin{cases} -2h_1 + 10h_2 = -h_1 + 3ih_1, \\ -h_1 = -h_2 + 3ih_2 \end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases} (-1 - 3i)h_1 + 10h_2 = 0, \\ h_1(-1 + 3i)h_2 = 0. \end{cases}$$

Ohirgi ikki tenglik o'zaro ekvivalent. Shuning uchun $h_1 = 10,\ h_2 = 1 + 3i$ deb tanlanishi mumkin. Endi $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ vektor uchun quyidagiga egamiz:

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1+3i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right].$$

Bundan haqiqiy son vektor sifatida

$$h^{(1)} = \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix},\ h^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

vektorlarni, yoki bari bir

$$h^{(1)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}, h^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektorni olish mumkin.

V) A matrisaning xos sonlari teng va noldan farqli. A matrisaning xos sonini λ deylik. Unga mos xos vektorlar uchun ikki hol yuz berishi mumkin:

1-hol. P tekislikda shunday ikkita chiziqli erkli $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ vektorlar mavjudki, ular uchun ushbu

$$Ah^{(1)} = \lambda h^{(1)},\ \ Ah^{(2)} = \lambda h^{(2)} \quad (2.16)$$

tenglik o'rinli.

2-hol. P tekislikda shunday ikkita chiziqli erkli $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ vektorlar mavjudki, ular uchun ushbu

$$Ah^{(1)} = \lambda h^{(1)},\ Ah^{(2)} = \lambda h^{(2)} + h^{(1)} \quad (2.17)$$

tengliklar o'rinli.

Shu (2.16) yoki (2.17) tengliklarni qanoatlantiradigan $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ chiziqli erkli vektorlarning (bazisning) mavjudligini ko'rsatamiz.

$h^{(1)} - A$ matrisaning xos vektori bo'lib, $h^{(2)} -$ unga kollinear bo'lmagan ixtiyoriy vektor bo'lsin. U holda

$$Ah^{(1)} = \lambda h^{(1)} \text{ va } Ah^{(2)} = \alpha h^{(1)} + \beta h^{(2)}$$

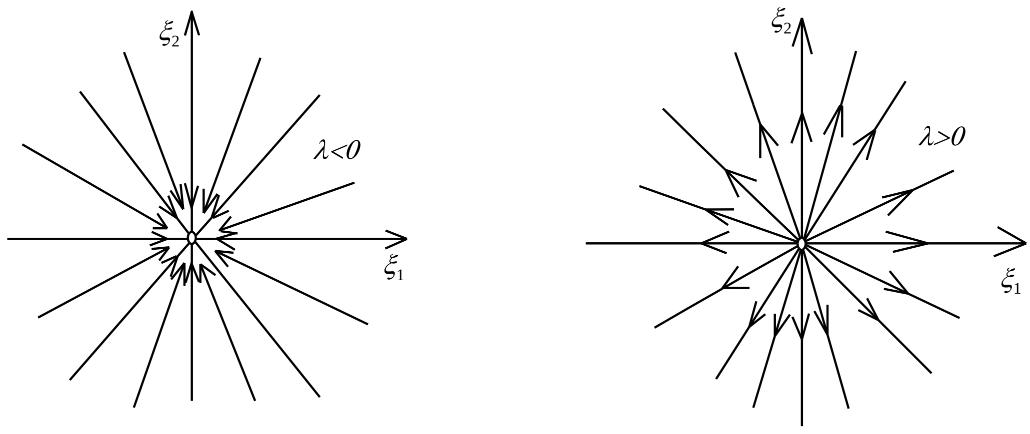
tengliklarga egamiz. Ulardan $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ larni topish uchun sistema sifatida foydalanish mumkin. Bu sistemaning matrisasi

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

bo'lib, xos sonlari λ va β dan iborat. Shuning uchun $\lambda = \beta.$ Agar $\alpha = 0$ bo'lsa, (2.16) tenglikga egamiz. $\alpha \neq 0$ bo'lganda esa (2.17) tengliklarda $h^{(1)}$ vektorni unga kollinear $\alpha h^{(1)}$ bilan almashtiramiz. Shu bilan (2.16) yoki (2.17) larni qanoatlantiradigan basis vektorlarning mavjudligi isbot etildi.

1-holda umumiy yechim

$$x = C_1 h^{(1)} e^{\lambda t} + C_2 h^{(2)} e^{\lambda t} = x^0 e^{\lambda t} \quad (2.18)$$



a) b)

16-chizma.

ko'rinishda yoziladi.

Bu yechim uchun $x(0) = x^0.$ Biz $\lambda \neq 0$ holni ko'rayotganimiz uchun (2.18) yechim koordinata boshidan chiqadigan yarim to'g'ri chiziqlarni ifodalaydi. Ularda harakat $\lambda < 0$ bo'lganda koordinata boshiga yo'nalgan bo'lib, $\lambda > 0$ bo'lganda esa yo'nalish buning aksi bo'ladi (16-chizma).

Yuqorida ko'rilgan hollarda $\lambda < 0$ bo'lganda turg'un tug'ilma tugun, $\lambda > 0$ bo'lganda esa noturg'un tug'ilma tugun manzaralariga egamiz.

2-holda umumiy yechim

$$x = C_1 h^{(1)} e^{\lambda t} + C_2 \left(h^{(1)} t + h^{(2)}\right) e^{\lambda t}$$

ko'rinishda yoziladi. Buni yana bazislar bo'yicha yoyib yozish ham mumkin:

$$x=(C_1+C_2t)h^{(1)}e^{\lambda t}+C_2h^{(2)}e^{\lambda t}.$$

Bundan P tekislikda traektoriyalar tenglamasini topamiz:

$$\xi_1=(C_1+C_2t)e^{\lambda t},\ \xi_2=C_2e^{\lambda t}. \quad (2.19)$$

Bu traektoriyalarni P^* tekislikni ko'ramiz.

Avval $\lambda<0$ bo'lsin. (2.19) formulalardan C_1 ni $-C_1$ ga, C_2 ni $-C_2$ ga almashtirsak, koordinata boshigaga nisbatan simmetriya hosil bo'ladi. Shuning uchun traektoriyalarni yuqori yarim tekislikda chizamiz. So'ngra undan pastki yarim tekislikdagi traektoriyalarni hosil qilish mumkin.

Dastlab $C_2=0, C_1\neq 0$ deylik. U holda (2.19) dan $\xi_1=C_1e^{\lambda t}, \xi_2=0.$ Bundan $\lambda<0$ bo'lgani uchun $C_1<0$ bo'lganda chap yarim abscissa o'qiga, $C_1>0$ bo'lganda esa o'ng yarim abscissa o'qiga traektoriya sifatiga egamiz. Chap yarim o'qda harakat chapdan o'ngga, o'ng yarim o'qda esa o'ngdan chapga yo'nalgan bo'ladi.

Endi $C_1=0, C_2<0$ bo'lsin. (2.19) dan ushbuga

$$\xi_1=C_2te^{\lambda t},\quad \xi_2=C_2e^{\lambda t},\ C_2>0 \quad (2.20)$$

egamiz. Agar $t=0$ bo'lsa, bundan $(0,C_2)$ nuqtani topamiz. Endi t o'zgaruvchi $t>0$ qiymatlarni qabul qila boshlasa, (ξ_1,ξ_2) nuqtaning harakatini va demak, traektoriyasini aniqlaymiz. Albatta, (2.20) dan ko'rinib turibdiki, t ning nolga yetarli yaqin qiymatlarida $\xi_1>0, \xi>0$ va (ξ_1,ξ_2) nuqta $(0,C_2)$ nuqtadan o'ngga harakat qilib, I chorakka kiradi. Quyidagi

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1}=\frac{\lambda}{1+\lambda t}$$

ifoda t ning nolga yetarli yaqin qiymatlarida manfiy (chunki $\lambda<0$). Shuning uchun $\xi_2(t)$ funksiya avval o'zini kamayuvchi funksiya kabi tutadi. Bu xossa $t=0$ dan $t_*=-\dfrac{1}{\lambda}$ gacha davom etadi. Ammo $\left(0,-\dfrac{1}{\lambda}\right)$ intervalda

$$\frac{d^2\xi_2}{d\xi_1^2}=\frac{d}{d\xi_1}\left(\frac{d\xi_2}{d\xi_1}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\xi_2}{d\xi_1}\right)\cdot\frac{1}{\frac{d\xi_1}{dt}}=-\frac{\lambda^2}{(1+\lambda t)^2}\cdot\frac{1}{C_2e^{\lambda t}(1+\lambda t)}=$$

$$=-\frac{\lambda^2}{C_2(1+\lambda t)^3e^{\lambda t}}<0$$

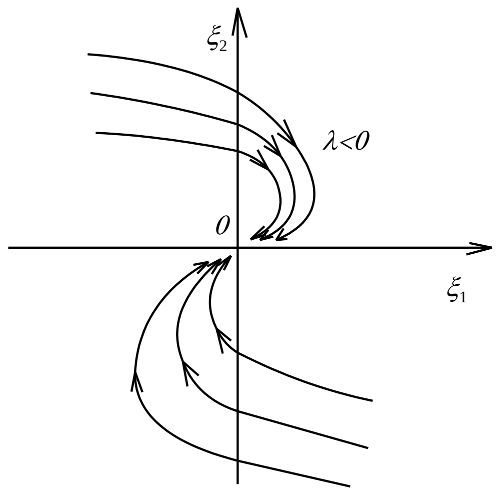
bo'lgani uchun shu intervalda qavariqlik yuqoriga qaragan bo'ladi. Rashanki, $t_*=-\frac{1}{\lambda}$ momentga mos nuqtada traektoriyaga o'tkazilgan urinma vertikal. Shunday qilib, $(0,C_2)$ nuqtadan $t=0$ da harakat boshlanib I chorakda chapdan o'nga va yuqoridan pastga yo'nalgan bo'ladi, bu harakat $\left(\xi_1(t^*),\xi_2(t^*)\right)==\left(-\frac{C_2}{\lambda}e^{-1},C_2e^{-1}\right)$ nuqtagacha davom etadi.

Nihoyat, $t>-\frac{1}{\lambda}$ bo'lganda nuqtaning harakatini o'rganamiz. (2.20) ga ko'ra $\lambda<0$ bo'lgani uchun ξ_2 funksiya kamayuvchi. Bu xossa t ning barcha $t>0$ qiymatlarida to'g'ri. Endi ξ_1 ning t bo'yicha hosilasini hisoblaymiz:

$$\frac{d\xi_1}{dt}=C_2e^{\lambda t}(1+lt).$$

Bundan

$$\frac{d\xi_1}{dt}\begin{cases}>0, & agar\ 0\le t<-\frac{1}{\lambda},\\ <0, & agar\ t>-\frac{1}{\lambda}.\end{cases}$$



17-chizma.

Demak, $t_*=-\frac{1}{\lambda}$ momentdan boshlab, (ξ_1,ξ_2) nuqta o'ngdan chapga va yuqoridan pastga harakat qiladi. Quyidagi limitlarni hisoblaymiz (Lopital qoidasini qo'llab):

$$\lim_{t\to+\infty}\xi_1(t)=\lim_{t\to+\infty}C_2te^{\lambda t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{C_2t}{e^{-\lambda t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{C_2}{-\lambda e^{-\lambda t}}=0;$$

$$\lim_{t\to+\infty}\xi_2(t)=\lim_{t\to+\infty}C_2e^{\lambda t}=0.$$

Bundan ko'rinadiki, (ξ_1,ξ_2) nuqta vaqt $t_*=-\frac{1}{\lambda}$ dan ortib borgan sari koordinata boshiga yaqinlab boradi va $t\to+\infty$ da ξ_1 o'qiga nuqtaning traektoriyasi urinadi (17-chizma). Traektoriyaning $\left(-\frac{1}{\lambda},+\infty\right)$ intervalga mos kelgan bo'lagining qavariqligi pastga qaragan. Buning to'g'riligi $\left(-\frac{1}{\lambda},+\infty\right)$ intervalda $\frac{d^2\xi_2}{d\xi_1^2}>0$ ekanidan kelib chiqadi.

Endi $t<0$ bo'lganda traektoriyani tekshiraylik. Ravshanki, bu holda t o'zgaruvchi 0 dan $-\infty$ gacha kamayib borsa, nuqta ham orqaga, ya'ni o'ngdan chapga va pastdan yuqoriga II chorakda harakat qiladi. (2.20) ga ko'ra o'ngdan chapga pastdan yuqoriga qaraganda tezroq harakat qiladi (17-chizma). Endi agar C_2ga barcha musbat qiymatlar bersak, tegishli traektoriyalar yuqori yarim tekislikni to'la qoplaydi(17-chizma).

Agar (2.19) formulalarda C_2 ixtiyoriy bo'lsa ham xuddi shu mulohazalar o'rinli bo'ladi, ya'ni $(C_1+C_2t)e^{\lambda t}$ va $C_2te^{\lambda t}$ funksiyalarning differensial xossalari bir xil. Xususan, bu holda harakat (C_1,C_2) nuqtadan boshlanadi. $\left(-\infty,\frac{C_2+\lambda C_1}{\lambda C_2}\right)$ intervalda qavariq yuqoriga, $\left(-\frac{C_2+\lambda C_1}{\lambda C_2},+\infty\right)$ intervalda esa pastga qaragan bo'ladi. C_1 va $C_2>0$ larga ixtiyoriy qiymatlar bersak, mos ravishda qurilgan traektoriyalar yuqori yarim tekislikni to'ldiradi.

Agar $C_2>0$ va C_1- ixtiyoriy o'zgarmaslar uchun yuqoridagidek mulohazalar yuritsak, pastki yarim tekislikda traektoriyalar quriladi. Shunday qilib, P^* tekislikni to'la qoplaydigan traektoriyalar chiziladi. Bu holda biz turg'un tug'ilma tugun manzarasiga egamiz. Agar $\lambda>0$ bo'lsa ham mulohazalar o'xshash. Bunda noturg'un tug'ilma tugun manzarasi quriladi.

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

sistema uchun $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ va $\lambda_1 = \lambda_2 = -1.$

Sodda hisoblashlar yordamida topamiz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

yoki

$$\begin{pmatrix} -h_1^{(1)} \\ h_1^{(1)} - h_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1^{(1)} \\ -h_2^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Bundan $h_1^{(1)} = 0,\ h_2^{(1)} = 1$ ($h_2^{(1)} -$ ixtiyoriyligidan). Demak,

$$h^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, h^{(2)} = \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

vektori ushbu

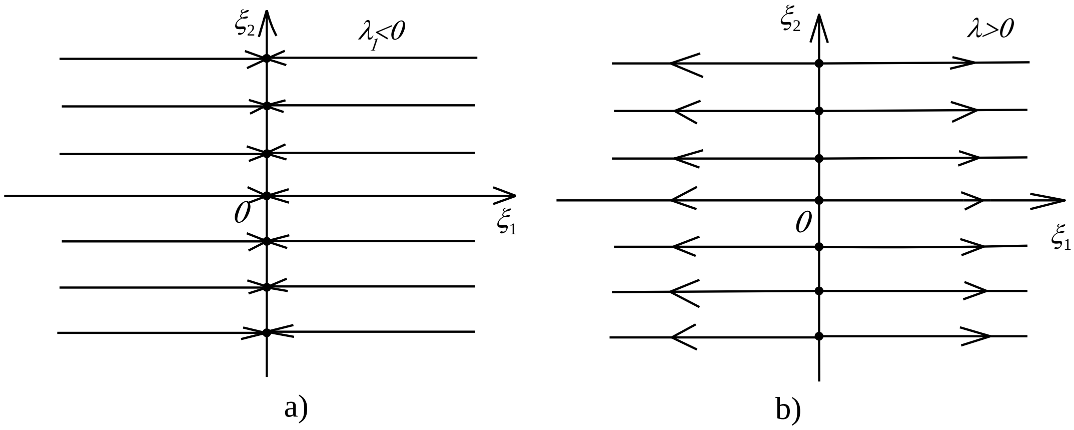
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

tenglikdan topiladi. Uni soddalashtirsak,

$$\begin{pmatrix} -h_2^{(2)} \\ h_1^{(2)} - h_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1^{(2)} \\ -h_2^{(2)} + 1 \end{pmatrix}$$

tenglikka keladi. Bundan $h_1^{(2)} = 1,\ h_2^{(2)} = 1$ ($h_2^{(2)} -$ ixtiyoriyligidan). Demak, $h^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Shunday qilib, basis sifatida $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorlarga egamiz. $\lambda_1 = -1$ bo'lgani uchun bu bazislar asosida turg'un tug'ilma tugun manzarasini chizamiz.

G) A matrisaning xos sonlaridan kamida bittasi nolga teng. Bunda ikki holni alohida ko'ramiz.



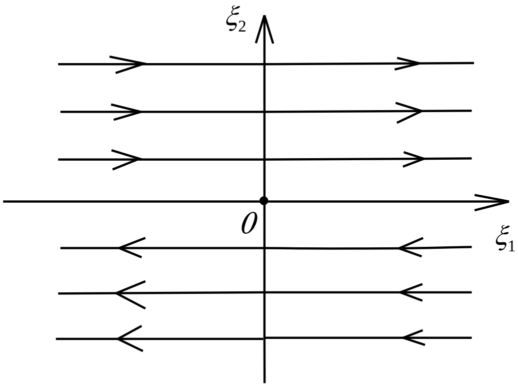
18-chizma.

1-hol. Faqat bitta xos son nolga teng, xususan, $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0$ bo'lsin. Bu holda yechimni

$$x = \xi_1 h^{(1)} + \xi_2 h^{(2)}$$

ko'rinishda yoziladi va $\xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t};\ \xi = C_2 = const.$ Agar $\lambda_1 < 0$ bo'lsa, harakat $\xi_2 = C_2$ gorizontal chizig'i bo'ylab har ikki tomondan ξ_2 o'qiga tomon yo'nalgan bo'ladi. ξ_2 o'qining, ya'ni $\xi_1 = 0$ to'g'ri chizig'ining hamma nuqtalari muvozanat holatidan iborat (18, a – chizma).

Agar $\lambda_1 > 0$ bo'lsa, harakat yuqoridagiga qaraganda teskari yo'nalgan bo'ladi



19-chizma.

(18, b – chizma). Bu holda ham $\xi_1 = 0$ to'g'ri chizig'I muvozanat holatida bo'ladi. Har ikki holda ham $\xi_1 = 0$ bo'lganda $x = C_2 h^{(2)} = const$ fikrimizning dalili ko'rinib turibdi.

2-hol. Ikki xos son ham nolga teng. Bu holda yechim 1) $x = C_1 h^{(1)} + C_2 h^{(2)} = const$ kabi yoziladi. Biz P tekislikning barcha nuqtalari muvozanat nuqtasi bo'lgan holga egamiz. Bu A matrisaning barcha elementlari nolga teng bo'lgandagina sodir bo'ladi. 2) $x = (C_1 + C_2)h^{(1)} + C_2 h^{(2)} = C_1 + C_2 t,\ \xi_2 = C_2$ kabi yoziladi. Agar $C_2 = 0$ bo'lsa ξ_1 o'qi muvozanat nuqtalaridan iborat bo'ladi. ξ_1 o'qdan yuqorida $C_2 > 0$ va harakat chapdan o’ngga, pastda esa $C_2 < 0$ va harakat o’ngdan chapga yo’nalgan bo’ladi (19-chizma).Yuqorida o’rganilgan nazariy ma’lumotlardan foydalanib amaliy misollar ko’rid chiqish mumkin .

30- mavzu. Differentsial tenglamalar yechimining turg‘unligi. (2 soat)

Reja:

1. Lyapunov ma`nosida yechimning turg‘unligi, asimptotikturg‘unligi.
2. Yechimning turg‘unligi, turg‘unmasligi, asimptotikturg‘unligi haqida teoremalar.
3. Turg‘unlik nazariyasining amaliy masalalari.

6.1. Birinchi yaqinlashish bo`yicha turg`unlik

1. Quydagi differentsial tenglamalar sistemasi berilgan bo`lsin:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (1$$

yoki vektor formada

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x\right), \quad x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right). \qquad (2$$

Faraz qilaylik, f_i va $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ funksiyalar barcha *i* va *k* larda $t_0 \le t < +\infty$ da uzuluksiz bo`lsin.

Agar $x = \varphi(t)$ (2) tenglamaning yechimi berilgan bo`lib, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $\delta > 0$ ko`rsatish mumkin bo`lsaki, barcha

$$\left| x(t_0) - \varphi(t_0) \right| < \delta, \qquad (3$$

boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi (2) tenglamaning $x(t)$ yechimlari uchun ixtiyoriy $t_0 \le t$ da

$$\left| x(t) - \varphi(t) \right| < \varepsilon \qquad (4$$

shart bajarilsa, berilgan $x = \varphi(t)$ yechim Lyapunov ma`nosida ***turg‘un*** deyiladi.

Agar qandaydir $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topilmasa, $\varphi(t)$ yechim ***turg‘un emas*** dyiladi.

Agar (2) sistemaning $\varphi(t)$ yechimi Lyapunov ma`nosida turg‘un bo`lib, etarlicha yaqin boshlang‘ich shartlarda (2) sistemaning yechimlari $t \to +\infty$ da $\varphi(t)$ ga cheksiz yaqinlashsa, boshqacha qilib aytganda, etarlicha kichik $\delta > 0$ uchun (3) shartda $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(x(t) - \varphi(t) \right) = 0$ kelib chiqsa, $\varphi(t)$ yechim ***asimptotik turg‘un*** deyiladi.

YUqoridagi (2) tenglamaning $x = \varphi(t)$ yechimining turg‘unligini tekshirish masalasi, (2) tenglamada $y = x - \varphi(t)$ almashtirish bajarilganda hosil bo`lgan tenglamaning $y(t) \equiv 0$ yechimini turg‘unlikka tekshirishga keltiriladi.

**2. Birinchi yaqinlashish bo`yicha turg‘unlikka tekshirish.** $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ (1) tenglamaning yechimi bo`lsin. Shu yechimni turg‘unlikka tekshirish uchun $x_1 = x_2 = \ldots = x_4 = 0$ nuqta atrofida f_i funksiyalarning chiziqli qismini ajratib olinadi, (masalan, f_i larni Telor formulasi yordamida yoyish bilan). Hosil bo`lgan sistemaning nol yechimini turg‘unligini quyidagi teorema orqali tekshirish mumkin.

Lyapunov teoremasi. Quyidagi sistema berilgan bo`lsin:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + \phi(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (5$$

bu erda a_{ik} – o`zgarmaslar ϕ_i – shunday funksiyalarki,

$$|x| < \varepsilon_0, \quad |x| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$$

shart bajarilganda

$$|\phi_i| \le \gamma(x)|x|, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \gamma(x) \to 0, \quad |x| \to 0$$

o`rinli bo`ladi.

Agar (5) tenglamada

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

matritsaning hamma xos sonlari manfiy haqiqiy qismga ega bo`lsa, uning nol yechimi asimptotik turg‘un bo`ladi; birorta xos sonning haqiqiy qismi musbat bo`lsa, nol yechim turg‘un bo`lmaydi.

Misollar. *a*)

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + 2x^4 - y^6 \\ \dot{y} = x - 3y + 11y^4 \end{cases},$$

sistemaning $x = 0,\ y = 0$ yechimni turg‘unlikka tekshiring.

Echimi. YUqoridagi teoremani qo`llab echamiz. Birinchi yaqinlashish bo`yicha quyidagi sistemaning $x = 0,\ y = 0$ yechimini turg‘unlikka tekshiramiz:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$$

Tushunarliki, xarakteristik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ko`rinishda bo`lib, $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}.$

Demak, Lyapunov teoremasiga ko`ra $x = 0,\ y = 0$ trivial yechim asimptotik turg‘un.

***b*)**

$$\dot{x} = \sqrt{4+4y} - 2e^{x+y},$$
$$\dot{y} = \sin ax + \ln(1-4y), \quad a = const,$$
sistemaning $x=0,\ y=0$ trivial yechimini turg'unlikka tekshiring.

Echimi. Teylor formulasi yordamida o`ng tomondagi funksiyalarning chiziqli qismini ajratib olamiz.
$$\dot{x} = -2x - y + \phi_1(x,y),$$
$$\dot{y} = ax - 4y + \phi_2(x,y),$$
bu erda ϕ_1 va ϕ_2 funksiyalar $C\left(x^2+y^2\right)$ ga teng, ya`ni cheksiz kichik. Koeffitsientdan tuzilgan matritsaning xos sonlarini aniqlasak,
$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ a & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 6\lambda + 8 + a = 0, \quad \lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{1-a}$$
bo`ladi.

Agar $a>1$ bo`lsa, ildizlar kompleks sonlar $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = -3 < 0,$ agar $-8 < a \le 1$ bo`lsa, ildizlar haqiqiy va manfiy, demak, bu hollarda $x=0,\ y=0$ yechim asimptotik turg'un bo`ladi.

Agar $a<-8$ bo`lsa, bitta ildiz musbat bo`ladi va demak, $x=0,\ \ y=0$ yechim asmptotik turg'un emas.

Agar $a=-8$ bo`lsa, $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -6$ teng bo`ladi va turg'unlik masalasini yuqorida aytilgan teorema orqali hal qilib bo`lmaydi.

3. Lyapunov funksiyasi yordamida turg'unlikka tekshirish.

Lyapunov teoremasi. Biror $\varepsilon_0 > 0$ son uchun $t_0 \le t < +\infty,\ |x| < \varepsilon_0$ shartni qanoatlantiruvchi (t,x) larda (2) sistemaning o`ng tomoni aniqlangan uzuluksiz bo`lib, $f(t,0) \equiv 0$ bo`lsin. Undan tashqari shu $x$ larda aniqlangan, faqat koordinata boshida nolga teng va uzluksiz differentsiallanuvchi $V(x) \ge 0$ Lyapunov funksiyasi mavjud bo`lib, u
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j \le 0 \tag{7}$$
shartni qanoatlantirsin. U holda $x(t) \equiv 0$ yechim turg'un bo`ladi.

Agar $0 < |x| < \varepsilon_0$ uchun
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j \le -w(x) < 0, \tag{8}$$
(bu erda $w(0)=0,\ \ x \ne 0$ da $w(x) > 0$ bo`lgan qandaydir uzluksiz funksiya) shart ham bajarilsa, nol yechim asimptotik turg'un bo`ladi.

(1) sistemaning yechimi ma`lum bo`lmasa, Lyapunov funksiyasi qurishning umumiy usuli yo`q, lekin ba`zi hollarda bu funksiyani kvadratik forma shaklida, ya`ni $V = \sum_{i,j} b_{i,j} x_i x_j$ ko`rinishiga keltirib olish mumkin bo`ladi.

Misollar. ***a*)**

$$\dot{x} = -(x-2y)\left(1-x^2-3y^2\right),$$

$$\dot{y} = -(y+x)\left(1-x^2-3y^2\right),$$

sistemaning trivial yechimini turg‘unlikka tekshiring.

Yechimi. Lyapunov funksiyasi $V(x)$ sifatida $V(x,y)=x^2+2y^2$ ni olamiz. Birinchidan, $V(0,0)=0,\ V(x,y)\ge 0,$ ikkinchidan, etarlicha kichik *x*, *y* lar uchun

$$\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial V}{\partial x_j}f_j = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x(2y-x)\left(1-x^2-3y^2\right)-$$

$$-4y(x+y)\left(1-x^2-3y^2\right) = -2\left(1-x^2-3y^2\right)\left(x^2+2y^2\right)\le 0.$$

Demak, yuqorida bayon etilgan Lyapunov teoremasining barcha shartlari bajariladi, $x\equiv 0,\ y\equiv 0$ yechim – turg‘un yechim ekan.

***b*)**

$$\dot{x} = -5y-2x^3$$

$$\dot{y} = 5x-3y^3$$

sistemaning trivial yechimini turg‘unlikka tekshiring.

Yechimi. $V(x,y)=x^2+y^2$ funksiya Lyapunov teoremasining ikkinchi qismini (asimptotik turg‘unlikni ta`minlaydigan shartni) qanoatlantiradi. Haqiqatdan ham,

1) $V(0,0)=0,\ V(x,y)>0;$

2)

$$\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x\left(-5y-2x^3\right)+2y\left(5x-2y^3\right) = -4\left(4x^4+6y^4\right)\le 0.$$

Demak, $\left.\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right|_{\substack{x=0\\ y=0}} = 0$ âà $\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}<0,\ x\ne 0,\ y\ne 0.$

Shunday qilib, $x\equiv 0,\ y\equiv 0$ asimptotik turg‘un ekan.

6.2. Raus-Gurvisning turg`unlik kiriteriysi va Mixaylov kriteriysi

$$a_0\lambda^n + a_n\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_0,\quad a_0>0 \qquad (1$$

haqiqiy koeffitsientli ko`phadning barcha ildizlari haqiqiy qismi manfiy bo`lishi uchun shartlar.

(1) ko`phad barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo`lishi uchun $a_i>0,\ i=0,1,\ldots,n$ bo`lishi zarurdir. $n\le 2$ bo`lganda bu shart etarlidir.

Raus-Gurvis sharti. (1) ko`phad barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo`lishi uchun ushbu ***Gurvis matritsasi*** deb ataluvchi matritsaning

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

asosiy diagonal minorlari musbat bo`lishi zarur va etarlidir. Bu matritsaning asosiy diagonalida $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ lar turibdi. Har bir satrda elementlarning indeksi oldingi element indeksidan 1 birlikka kichik. a_1 element $i > n$ yoki $i > 0$ larda nolga almashtiriladi. Gurvis matritsasining asosiy diagonal minorlari:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots. \qquad (2$$

Shu ham eslatib qo`yish kerakki, $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \dots,\ \Delta_n > 0$ shartlardagi oxirgi ifoda uchun $\Delta_n = \Delta_{n-1} a_n$ tenglik o`rinli bo`lgani uchun $\Delta_n > 0$ shartni $a_n > 0$ shart bilan almashtirish mumkin.

Misol. $y^{\text{v}} + y'^{\text{v}} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0$ tenglamaning trivial yechimini turg‘unlikka tekshiring.

Yechimi. Xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$f(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 7\lambda^3 + 4\lambda^2 + 10\lambda + 3 = 0.$$

Bu erda $a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 7,\ a_3 = 4,\ a_4 = 10,\ a_5 = 3.$

Gurvis matritsasining diagonal minorlarini yozamiz:

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 10\Delta_3 - 3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 7 \end{vmatrix} = 50 - 3(49 + 3 - 10 - 28) = 8 > 0,$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\Delta_4 = 3 \cdot 8 = 24 > 0.$$

Shunday qilib, $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 > 0,\ \Delta_4 > 0,\ \Delta_5 > 0$ va demak, $y \equiv 0$ trivial yechim asimptotik turg‘un yechim ekan.

L’enar-Shipar sharti. (1) ko`phad barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo`lishi uchun $a_i > 0,\ i = 1,\ldots,n$ va yuqorida aniqlangan $\Delta_i,\ i = 1,\ldots,n$ lar uchun $\Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_{n-3} > 0,\ \Delta_{n-5} > 0,\ \ldots$ shartlar bajarilishi zarur va etarlidir.

Misol. $y^{\prime\mathrm{v}} + 2y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ tenglamaning $y \equiv 0$ trivial yechimini turg‘unlikka tekshiring.

Yechimi. L’enar-Shipar shartini yozamiz, buning uchun avval xarakteristik tenglamani yozaylik:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0;$$

$$a_0 = 1 > 0,\ a_1 = 2 > 0,\ a_2 = 3 > 0,\ a_3 = 3 > 0,\ a_0 = 1 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\cdot 3 - 4\cdot 1 - 9 = 5 > 0,\ \Delta_1 = 2 > 0.$$

Bu erdan $y \equiv 0$ trivial yechim asimptotik turg‘un ekanligi kelib chiqadi.

Mixaylov kriteriysi. (9) ko`phad barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo`lishi uchun kompleks tekislikda $f(i\omega)$ nuqta (bu erda $f(\lambda)$ (1) ko`phad) $\omega$ $0$ dan $+\infty$ gacha o`zgarganda koordinata boshidan o`tmasdan musbat yo`nalishda $n\pi/2$ burchakka burilish zarur va etarlidir.

Bu kriteriyni quyidagicha ham ta`riflash mumkin edi: $a_n a_{n-1} > 0$ bo`lib,

$$p(\xi) = a_n - a_{n-2}\xi + a_{n-4}\xi^2 - \ldots$$

$$q(\eta) = a_{n-1} - a_{n-3}\eta + a_{n-5}\eta^2 - \ldots$$

ko`phadlarning barcha ildizlari musbat, har xil va $\xi_1$ dan boshlab almashib kelishi, ya`ni $0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \ldots$ bo`lishi zarur va etarli. Shu erda $f(i\omega) = p(\omega^2) + i\omega q(\omega^2)$ ekanligini o`quvchilarga eslatib qo`yishni lozim topdik.

Misol. $y^{\prime\mathrm{v}} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$ tenglamaning $y \equiv 0$ trivial yechimini turg‘unlikka tekshiring.

Yechimi. Xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$f(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Bu erda

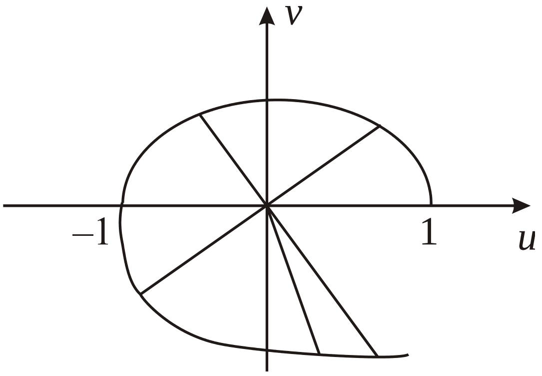
$$f(i\omega) = \omega^4 - 2i\omega^3 - 3\omega^3 + 2i\omega + 1,$$

$$u(\omega) = \omega^4 - 3\omega^3 + 1,$$

$$v(\omega) = -2i\omega^3 + 2\omega = 2\omega(1 - \omega^2) = 2\omega(1 - \omega)(1 + \omega).$$

ω ni 0 dan $+\infty$ gacha o`zgartiramiz va $(u,v)$ tekislikda hosil bo`lgan $u = u(\omega)$, $v = v(\omega)$ chiziqni o`rganaylik (1-rasmga qarang).

ω	0	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
u	1	0	–1	0
v	0	$3-\sqrt{5}$	0	$-\left(3-\sqrt{5}\right)$



1-rasm.

$\lim\limits_{\omega+\infty}\frac{v}{u}=0,$ burilish burchagi $\varphi=4\frac{\pi}{4}=\left(n-2m\right)\frac{\pi}{2}.$

Bu erda $n-2m=4;$ $n=4,$ demak, $m=0.$ Shunday qilib, xarakteristik tenglamaning hamma ildizlari chap yarim tekislikda joylashadi, ya`ni $y\equiv 0$ trivial yechim Mixaylov kriteriysiga asosan asimptotik turg‘un bo`ladi.

31- mavzu. Chegaraviy masalalar. Grin funktsiyasi. Grin funktsiyasining mavjudligi va yagonaligi haqida. (2 soat)

Reja:

1. Chegaraviy masalalar.
2. Grin funktsiyasi.
3. Grin funktsiyasining mavjudligi va yagonaligi haqida.

Bu sistemaning determinanti chiziqli erkli $y_1(x),...,y_n(x)$ $(x_0\le x\le x_1)$ funksiyalar vronskianining $x=\xi$ nuqtadagi qiymatidan iborat. Ma’lumki, bu holda $W(\xi)\ne 0$. Shuning uchun (17) sistema determinanti noldan farqli bir jinsli bo’lmagan sistema sifatida yagona yechimga ega. Shu yechimni $C_1^0(\xi),C_2^0(\xi),...,C_n^0(\xi)$ deb belgilaymiz. Demak (17) sistema $C_\upsilon(\xi)$ larni bir qiymatli aniqlaydi. Endi $C_\upsilon^0(x)=b_\upsilon^0(\xi)-a_\upsilon^0(\xi)$ bo’lgani uchun $b_\upsilon^0(\xi)$ va $a_\upsilon^0(\xi)$ larni aniqlash bilan shug’ullanamiz.Bu koeffitsiyentlarni chegaraviy shartlardan foydalanib topamiz. Uning uchun $g_i^0(y)$ ni bunday yozamiz:

$$g_i^0(y)=g_{i\alpha}^0(y)+g_{i\beta}^0(y), \qquad (16)$$

bu yerda

$$g_{i\alpha}^0(y)=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_j^{(i)}y^{(j)}(x_0),g_{i\beta}^0(y)=\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j^{(i)}(x_0),i=1,2,...,n.$$

Agar (16) da y o’rniga $G(x,\xi)$ funksiyani qo’ysak,

$$g_i^0(G(x,\xi))=a_1(\xi)g_{i\alpha}^0(y_1(x))+...+a_n(\xi)g_{i\alpha}^0(y_n(x))+b_1(\xi)g_{i\beta}^0(y_1(x))+...+b_n(\xi)g_{i\beta}^0(y_n(\xi))=0$$

tenglikka kelamiz. Bunda a_k lar o’rniga $b_k-C_k^0$ larni qo’yamiz:

$$b_1(\xi)g_{i\beta}^0(y_1(x))+...+b_n(\xi)g_{i\beta}^0(y_n(x))+(b_1(\xi)-C_1^0(\xi))g_{i\alpha}^0(y_1(x))+...$$
$$+(b_n(\xi)-C_n^0(\xi))g_{i\alpha}^0(y_n(x))=0.$$

Bundan (16) ga ko’ra

$$b_1(\xi)g_i^0(y_1(x))+..+b_n(\xi)g_i^0(y_n(x))=C_1^0(\xi)g_{i\alpha}^0(y_1(x))+...+C_n^0(\xi)g_{i\alpha}^0(y_n(x)) \qquad (17)$$

kelib chiqadi.Agar $i=1,2,...,n$ desak, (17) dan $b_1,b_2,...b_n$ larga nisbatan n ta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu bir jinsli bo'lmagan sistema, chunki $\sum_{i=1}^{n}(C_i^0(\xi)^2\neq 0$ va $g_{i\alpha}^0(y_j(x))\neq 0$ $(i=1,2,...,n)$. Agar $g_{i\alpha}^0(y_j(x))\equiv 0$ bo'lsa, (17) dan $b_\upsilon^0(\xi)=C_\upsilon^0(\xi), a_\upsilon^0(\xi)=0$ kelib chiqadi. Bu holda teoremaning isboti ravshan. Endi $g_{i\alpha}^0(y_j(x))\equiv 0$ holni ko'raylik. Bunda 1-troremaga ko'ra (17) sistemaning determinanti ($b_1,b_2,...b_n$ larga nisbatan) noldan farqli. Demak, $b_1(\xi),...,b_n(\xi)$ larning yagona qiymatini topa olamiz. O'sha qiymatlarni $b_1^0(\xi),b_2^0(\xi),...,b_n^0(\xi)$ desak, $a_1^0(\xi),a_2^0(\xi),...,a_n^0(\xi)$ lar $a_j^0(\xi)=b_j^0(\xi)-C_j^0(\xi)$ formulalar bilan topiladi. $a_j(\xi)$ va $b_j(\xi), i=1,2,...,n$ lar uchun topilgan qiymatlarni tegishli ifodaga qo'ysak, $G(x,\xi)$ uchun

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}a_j^0(\xi)y_j(x).x_0\leq x\prec\xi\\ \hline \sum_{i=1}^{n}b_j^o(\xi)y_j(x).\xi_0\leq x\prec x_1\end{cases} \qquad (18)$$

formulaga ega bo'lamiz. Shunday qilib, Grin funksiyasining mavjudligi va yagonaligi isbot etildi. Bu teoremaning isboti tegishli Grin funksiyasini qurish usulini ham o'z ichiga oladi.
Bir jinsli chegaraviy masala chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama uchun qo'yilgan bo'lsin, ya'ni ushbu

$$L(p)y=f(x),\ g_i^0(y)=0,\ i=1,2,...,n \qquad (19)$$

masala ko'rilayotgan bo'lsin. Bu masalaning yechimini quyidagi teorema beradi.

3-teorema. *Agar (13) masala faqat trivial yechimga ega bo'lsa, u holda $[x_0,x_1]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan ixtiyoriy $f(x)$ funksiya uchun (19) masalaning yechimi mavjud. Bu yechim ushbu*

$$y(x)=\int_{x_0}^{x_1}G(x,\xi)f(\xi)d\xi(G(x,))\ \ \textit{(Grin funksiyasi)} \qquad (20)$$

formula bilan ifodalanadi.

Isbot.(20)formula bilan aniqlangan biror $y(x)$ funksiyani olaylik. Bu funksiya (19) masalaning echimi ekanini, ya'ni ushbu

$$L(p)y(x)\equiv f(x) \qquad (21)$$

$$g_i^0(y(x))\equiv 0,\ i=1,2,...,n \qquad (22)$$

ayniyatlar o'rinli ekanini isbotlaymiz. Avval (22) ni ko'rsataylik. $G(x,\xi)$ funksiyaning ta'rifiga ko'ra olingan $y(x)$ funksiya $(n-2)-$ tartibgacha uzluksiz differensiallanuvchi. Shuning uchun hosilalarni

$$y^{(\upsilon)}(x)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^\upsilon G(x,\xi)}{\partial x^\upsilon}f(\xi)d\xi,\ \upsilon=1,2,...,n-2 \qquad (23)$$

kabi yozish mumkin. (23)formulani $\upsilon=n-2$ da quyidagicha yozamiz:

$$y^{n-2}(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}f(\xi)d\xi+\int_{x}^{x_1}\frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}f(\xi)d\xi.$$

Bundan yana x bo'yicha hosila olamiz:

$$y^{(n-1)}(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}f(\xi)d\xi+\left(\frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}\right)\Bigg|_{\xi=x-0}f(x)+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}f(\xi)d\xi-\left(\frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}-\right)\Bigg|_{\xi=x+0}f(x).$$

Ammo $\dfrac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}$ funksiya $x=\xi$ nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun oxirgi ifoda soddalashadi:

$$y^{(n-1)}(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}f(\xi)d\xi+\int_{x}^{x_1}\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}f(\xi)d\xi=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}f(\xi)d\xi.$$

(24)

Bu formuladan yana bir marta differensiallab, quyidagi ifodani topamiz:

$$y^{(n)}(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^{n}G(x,\xi)}{\partial x^{n}}f(\xi)d\xi+\left(\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right)\Bigg|_{\xi=x-0}f(x)+$$

$$+\int_{x}^{x_1}\frac{\partial^{n}G(x,\xi)}{\partial x^{n}}f(\xi)d\xi-\left(\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right)\Bigg|_{\xi=x+0}f(x)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^{n}G(x,\xi)}{\partial x^{n}}f(\xi)d\xi+\frac{1}{a_0(x)}f(x). \qquad (25)$$

Ma'lumki, $g_i^0(y)$ ifoda $y(x)$ va uning $(n-1)-$ tartibgacha hosilalarining $x=x_0$ va $x=x_1$ nuqtadagi qiymatlarini o'z ichiga oladi. Shunga ko'ra, (20), (23), (24) lardan soda o'zgartirishlar yordamida quyidagiga ega bo'lamiz:

$$g_i^0(y)=\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j^{(i)}y^j(x_0)+\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j^{(i)}y^j(x_1)=0+\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j^{(i)}y^j(x_1)=$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j^{(i)}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^j G(x,\xi)}{\partial x^j}f(\xi)d\xi=\int_{x_0}^{x_1}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j^{(i)}\frac{\partial^j G(x,\xi)}{\partial x^j}\right)f(\xi)d\xi=$$

$$\int_{x_0}^{x_1}g_i^0(G(x,\xi))f(\xi)d\xi.$$

$G(x,\xi)$ funksiyaning ta'rifiga bo'yicha $g_i^0(y)=0,\ (i=1,2,...,n)$ chegaraviy shartni qanoatlantiradi, ya'ni $g_i^0(G(x,\xi))\equiv 0$. Shuning uchun oxirgi integral nolga teng va $g_i^0(y(x,))\equiv 0,\ i=1,2,...,n$ munosabat largaegamiz. Bundan olingan $y(x)$ funksiya $[x_0,x_1]$ oraliqda chegaraviy shartlarni qanoatlantirishi kelib chiqadi. Demak, (22) isbat etildi. Endi (21) masala faqat trivial yechimga ega. 2-teoremadan $L(p)G(x,\xi)\equiv 0$ ekani chiqadi. Shuning uchun olingan $y(x)$ funksiya hosilalarining o'rniga (23), (24), (25) formulalardan foydalanib, o'z ifodasini $L(p)y$ differensial ifodaga qo'yamiz:

$$L(p)y(x) = a_0(x)\left[\int_{x_0}^{\xi}\frac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^n}f(\xi)d\xi + \frac{1}{a_0(x)}f(x)\right] +$$
$$+a_1(x)\int_{x_0}^{\xi}\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}f(\xi)d\xi + ... + a_{n-1}(x)\int_{x_0}^{\xi}\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}f(\xi)d\xi +$$
$$+a_n(x)\int_{x_0}^{\xi}G(x,\xi)f(\xi)d\xi = \int_{x_0}^{\xi}\left[a_0(x)\frac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^n} + a_1(x)\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} + ... +\right.$$
$$\left.+a_{n-1}(x)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} + a_n(x)G(x,\xi)\right]f(\xi)d\xi + f(x) = \int_{x_0}^{\xi}\underbrace{(L(p)G(x,\xi))}_{0}f(\xi)d\xi + f(x) = f(x)$$

Demak, (x_0,ξ) intervalda $L(p)y(x,)\equiv f(x)$ ayniyat o'rinli. Shunga ko'ra (ξ,x_1) intervalda ham shu ayniyat o'rinli ekani ko'rsatiladi. Shunday qilib, $[x_0,x_1]$ intervalda uzluksiz $f(x)$ funksiya uchun olingan $y(x)$ funksiya (19) chegaraviy masalaning yechimi bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

4. Bir jinsli bo'lmagan chegaraviy masala. (8) formulada $\sum_{i=0}^{n}A_i^2\neq 0$ bo'lsin. Biz bir jinsli bo'lmagan chegaraviy masalani ko'raylik. Bu holda asosiy xulosani quyidagi teoprema ifoda etadi.

4-teorema. *Ushbu $L(p)y=0$ tenglama bir jinsli bo'lmagan shartni qanoatlantiradigan yagona yechimga ega bo'lishi uchun mos bir jinsli chegaraviy masala faqat tirivial yechimga ega bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot zarurligi. Bir jinsli bo'lmagan chegaraviy masalaning yechimi $y(x)$ funksiya bo'lsin, Unda $L(p)y(x)=0,\ x\in[x_0,x_1]\ g_i\,(y(x))-A_i\equiv 0$ ayniyatlar o'rinli bo'ladi. Bir jinsli differensial tenglamaning fundamental sistemasi $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)$ funksiyalarda iborat bo'lsin. U holda ixtiyoriy yechim $C_1,C_2,...,C_n$ larning biror qiymatida $y(x)$ yechim hosil bo'lsin deylik, ya'ni $y(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i^0y_i(x)$. Bu funksiyaning bir jinsli bo'lmagan chegaraviy shartga qo'yamiz. Soda o'zgartirishlar natijasida quyidagini hosil qilamiz:

$$0=\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j^{(i)}\left(\sum_{\upsilon=1}^{n}C_\upsilon^0y_\upsilon(x_0)\right)^{(j)}+\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j^{(i)}\left(\sum_{\upsilon=1}^{n}C_\upsilon^0y_\upsilon(x_1)\right)^{(j)}-A_i=$$
$$=\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j^{(i)}\left(\sum_{\upsilon=1}^{n}C_\upsilon^0y_\upsilon^{(j)}(x_0)\right)+\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j^{(i)}\left(\sum_{\upsilon=1}^{n}C_\upsilon^0y_\upsilon^{(j)}(x_1)\right)-A_i=$$
$$=\sum_{\upsilon=1}^{n}C_\upsilon^0\left[\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j^{(i)}y_\upsilon^{(i)}(x_0)+\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j^{(i)}y_\upsilon^{(j)}(x_1)\right]-A_i=$$
$$=\sum_{\upsilon=1}^{n}C_\upsilon^0g_i^0(y_\upsilon)-A_i$$

Demak, ushbu

$$\sum_{\upsilon=1}^{n}C_\upsilon^0g_i^0(y_\upsilon)=A_i,\ \ i=1,2,...,n \tag{26}$$

sistemaga egamiz. Bu sistemaning determinanti $D\neq 0$ ((9) ga qarang), chunki $\sum_{i=1}^{n}(C_\upsilon^0)^2\neq 0,\ \sum_{i=1}^{n}A_i^2\neq 0.$ Ammo $D\neq 0$ bo'lganda mos bir jinsli chegaraviy masala 1-teoremaga ko'ra faqat trivial yechimga ega bo'ladi.

Yetarliligi. Bir jinsli chegaraviy masala faqat tirivial yechimga ega bo'lsin. U holda $D \neq 0$ bo'ladi. Demak, (26) ga ko'ra bir jinsli bo'lmagan chegaraviy masala yagona trivialmas yechimga ega, chunki (26) dan $\sum_{\upsilon=1}^{n} C_{\upsilon}^{2} \neq 0$ tengsizlikni qanoatlantiradigan $C_1, C_2, ..., C_n$ o'zgarmaslar bir qiymatli topiladi. Teorema to'la isbotlandi.

3-natija.Agar bir jinsli bo'lmagan chegaraviy masala ikkita $y = \varphi_1(x)$ va $y = \varphi_2(x),\ \varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$ yechimga ega bo'lsa, u holda $y = \varphi_i(x) - \varphi_2(x)$ funksiya mos bir jinsli chegaraviy masalaning trivialmas yechimi bo'ladi; aksincha, agar bir jinsli chegaraviy masala trivialmas yechimlarga ega bo'lsa, u holda bir jinsli bo'lmagan chegaraviy masala yo birorta ham yechimga ega bo'lmaydi yoki cheksiz ko'p ychimlarga ega bo'ladi.

Isbot. Avval natijaning birinchi qismini isbotlaymiz.

Ravshanki, $L(p)\varphi_1(x) \equiv 0,\ L(p)\varphi_2(x) \equiv 0$ va demak, $L(p)(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) \equiv 0$, yana shunga o'xshash $g_i^0(\varphi_1(x)) = A_i,\ g_i^0(\varphi_2(x)) = A_i\ (i = 1,2,...,n)$ munosabatlardan $g_i^0(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) \equiv 0$ kelib chiqadi.. Shuning uchun $y = \varphi_i(x) - \varphi_2(x)$ funksiya bir jinsli chegaraviy masala $L(p)y = 0,\ g_i^0(y) = 0$ uchun trivialmas yechim bo'ladi.

Endi, agar bir jinsli chegaraviy masala trivialmas $y = y(x) \equiv 0,\ x \in [x_0, x_1]$ yechimga ega bo'lsa, $D = 0$ bo'ladi ((9)ga qarang). U holda (26) sistema yo yechimga ega bo'lmaydi yoki cheksiz ko'p echimga ega bo'ladi. Natija isbot etildi.

Endi chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamani olaylik, ya'ni $L(p)y = f(x),$ shu bilan birga bir jinsli bo'lmagan chegaraviy shart ham berilgan bo'lsin. Boshqacha aytganda, ushbu

$$\begin{cases} L(p)y = f(x), \\ g_i^0(y) = A_i,\ \sum_{i=1}^{n} A_i^2 \neq 0,\ i = 1,2,...,n \end{cases} \tag{27}$$

bir jinsli bo'lmagan chegaraviy masalani ko'raylik. Bu masalaning yehcimi haqida fikr yuritish uchun avval $g_i^0(\eta(x)) = A_i$ shartni qanoatlantiradigan ixtiyoriy $\eta(x) \in C^n[x_0, x_1]$ funksiyani olamiz. So'ngra $z(x) = y(x) - \eta(x)$ almashtirishni bajaramiz.Bu $\varphi(x)$ funksiya uchun

$$g_i^0(z(x)) = g_i^0(y(x) - g_i^0(\eta(x)) \equiv 0,$$

ya'ni

$$g_i^0(z(x)) = 0 \tag{28}$$

bir jinsli chegaraviy shartga ega bo'lamiz. Berilgan differensial tenglama ($z(x)$ funksiyaga nisbatan)

$$L(p)(\eta(x) + z(x)) = f(x)$$

yoki

$$L(p)z(x) = f(x) - L(p)\eta(x) = F(x) \tag{29}$$

ko'rinishga keladi. Endi (29), (28) bir jinsli chegaraviy masalani ko'rish mumkin. 3-teoremaga ko'ra, agar $L(p)z(x) = 0,\ g_i^0(z(x)) = 0$ masala faqat trivial yechimga ega bo'lsa, u holda $[x_0, x_1]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan ixtiyoriy $F(x) = f(x) - L(p)\eta(x)$ funksiya uchun (29), (28) masalaning yechimi mavjud va

$$Z(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, \xi) F(\xi) d\xi \tag{30}$$

ko'rinishida yoziladi. Agar $\eta(x)$ funksiya mos bir jinsli tenglamaning yechimi bo'lsa, u holda

$L(p)z(x)=0$, $F(x)=f(x)$ bo'ladi va (3i) formula $z(x)=\int_{x_0}^{x_1} G(x,\xi)f(\xi)d\xi$ ko'rinishida yozilishi mumkin.

Shunday qilib quyidagi teorema isbot etildi.

5-teorema. *Bizga (27) bir jinsli bo'lmagan chegaraviy masala berilgan bo'lsin. $[x_0,x_1]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan va $g_i^0(y)=A_i$ bir jinsli bo'lmagan chegaraviy shartni qanoatlantiradigan ixtiyoriy funksiyani $\eta(x)$ deylik. U holda, agar $L(p)(y(x)-\eta(x))=0$, $g_i^0(y(x)-\eta(x))=0$ masala faqat trivial yechimga ega bo'lsa, u holda (27) masala yechimga ega va bu yechim ushbu*

$$y(x)=\eta(x)+\int_{x_0}^{x_1} G(x,\xi)F(\xi)d\xi \qquad (31)$$

(bunda $F(x)=f(x)-L(p)\eta(x)$) formula bilan beriladi. Agar $L(p)\eta(x)\equiv 0$, $g_i^0(\eta(x))=A_i$ $(i=1,2,...,n)$ munosabatlar o'rinli bo'lsa, u holda $F(x)=f(x)$ va (27) masalaning yechimi

$$y(x)=\eta(x)+\int_{x_0}^{x_1} G(x,\xi)f(\xi)d\xi \qquad (32)$$

ko'rinishda yoziladi.

32- mavzu.Xususiy hosilali differentsial tenglamalar haqida tushuncha. Xususiy hosilali birinchi tartibli kvazichiziqli differentsial tenglamalarning xarakteristikalari. (2 soat)

1-ma`ruza (2 soat)

Reja:

1. Xususiy hosilali differentsial tenglamalar haqida tushuncha.
2. Xususiy hosilali birinchi tartibli kvazichiziqli differentsial tenglamalarning xarakteristikalari.

.

Biz oldingi barcha mavzularda bir argumentli funktsiyaning hosilasi qatnashgan birinchi va yuqori tartibli tenglamalar bilan tanishdik. endi ko`p o`zgaruvchili funktsiyalarda birinchi tartibli xususiy hosila qatnashgan tenglamani ko`rib chiqamiz.

$$\Phi\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0 \qquad (1)$$

ko`rinishdagi tenglama **xususiy hosilali birinchi tartibli** tenglama deyiladi. Agar *F* funktsiya xususiy hosilalarga chiziqli bo'liq bo`lsa, u holda

$$X_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+X_n(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1,x_2,\ldots,x_n,u) \qquad (2)$$

ko`rinishdagi tenglama chiziqli tenglama deyiladi.

Avvalo

$$X_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+X_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \qquad (3)$$

ko`rinishdagi xususiy hosilali chiziqli bir jinsli tenglama bilan tanishamiz.

SHuni aytish lozimki *u=const* xar doim echim. Biz trivial bo`lmagan echimni qidiramiz.

(3) ga mos oddiy differentsial tenglamalar sistemasining simmetrik formasi

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)} \tag{4}$$

ko`rinishda yoziladi.

Ushbu teoremani keltiramiz:

TEOREMA. (4) sistemaning integrali (3)ning echimi bo`ladi.

Isbot: $\psi_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ (4) integrali bo`lsin. U holda undan olingan to`la differentsial nolga teng, yaoni

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}dx_n=0 \tag{5}$$

Bu erda (4) dan foydalanib dx_i larni o`rniga

$$dx_i=\frac{X_i}{X_n}dx_n \qquad \left(i=\overline{1,n}\right)$$

tengliklarni qo`yamiz va

$$\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\frac{X_1}{X_n}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\frac{X_2}{X_n}+\ldots+\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\frac{X_{n-1}}{X_n}+\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}\right)dx_n=0$$

ifodani hosil qilamiz. dx_n ga qisqartirib va X_n ga ko`paytirsak,

$$X_1\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}=0$$

tenglikka kelamiz. So`nggi tenglik esa $u=\psi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funktsiya (3) ning echimi ekanligini ko`rsatadi.

TEOREMA2. (3) ning echimi (4)ning integrali bo`ladi.

Bu teorema ham sodda isbotlanadi.

Agar (4)ni *n*-1 ta integrali maolum bo`lsa, u holda (3) ning umumiy echimi

$$u=F(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{n-1})$$

ko`rinishda yoziladi.

Bir jinsli bo`lmagan tenglama.

Quyidagi ko`rinishdagi

$$X_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+X_n(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=$$
$$=R(x_1,x_2,\ldots,x_n,u) \tag{1}$$

tenglama xususiy hosilali bir jinsli bo`lmagan chiziqli tenglama deyiladi.

Bunda $X_1,X_2,\ldots,X_n$ va R funktsiya $\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0\right)$ nuqtani atrofida uzluksiz differentsiallanuvchi deb faraz qilamiz.

(1) tenglamaning echimini

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)=0$$

oshkormas ko`rinishda qidiramiz .*V* funktsiya barcha argument bo`yicha uzluksiz xususiy hosilalarga ega va

$$\frac{\partial V\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u^0\right)}{\partial u} \neq 0$$

$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ekanligidan

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1,2,\ldots,n)$$

hosilaga egamiz. Bundan

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}}$$

tenglikni olib , ularni (1) tenglamaga qo`yib soddalashtirsak,

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} +$$
$$+ R(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0$$

tenglama hosil bo`ladi.

Bu bir jinsli tenglama ko`rinishiga ega bo`lib, uning simmetrik formasini quyidagicha

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{R} \tag{2}$$

yozish mumkin. Bu sistemani n ta erkli integralini

$$\left.\begin{array}{l} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \\ -------- \\ \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \end{array}\right\}$$

topamiz. U holda (1) ning umumiy echimi

V=F($\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$)ko`rinishda bo`ladi. Bu funktsiyani 0 ga tenglab, (1) tenglamaning umumiy echimini olamiz

$$\mathrm{F}\left(\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\right) = 0 \tag{3}$$

<u>KOSHI MASALASI.</u> Xususiy hosilali tenglama uchun quyidagicha qo`yiladi. (1) tenglamaning echimlari ichidan shunday

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

echimni topingki , u $x_n = x_n^0$ da

$$u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \tag{4}$$

funktsiyaga teng bo`lsin , bunda φ - berilgan funktsiya.

Koshi masalasini echish ushbu tartibda amalga oshiriladi:

1.Tenglamaning simmetrik (2) formasini tuzib, n ta integral topiladi.

$$\begin{aligned}
&\psi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)\\
&\psi_2(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)\\
&-----------\\
&\psi_n(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)
\end{aligned} \tag{5}$$

2.(5) dagi x o`rniga $x_n^0$ ni qo`yamiz

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_1\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n^0,u\right)=\overline{\psi}_1\\
&\psi_2\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n^0,u\right)=\overline{\psi}_2\\
&-----------------\\
&\psi_n\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n^0,u\right)=\overline{\psi}_n
\end{aligned}\right\}$$

va bu sistemani $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},u$ ga nisbatan echiladi.

$$\left.\begin{aligned}
&x_1=\omega_1(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,\ldots,\overline{\psi}_n)\\
&-----------------\\
&x_{n-1}=\omega_{n-1}(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,\ldots,\overline{\psi}_n)\\
&u=\omega(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,\ldots,\overline{\psi}_n)
\end{aligned}\right\}$$

3.Bu funktsiyalardan

$$\omega(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n)=\varphi(\omega_1(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n),\omega_2(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n),\ldots,\omega_{n-1}(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n)), \tag{6}$$

munosabatni tuzamiz. (6)ga Koshi masalasining oshkormas ko`rinishdagi echimi deyiladi. Agar (6)ni u ga nisbatan echsak, oshkor ko`rinishida Koshi masalasining echimini olamiz.

<u>MISOL.</u> Tenglamani eching.

$$\left(1+\sqrt{z-x-y}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2$$

$$z=2x;\ \ y=0\,\text{да}$$

bu tenglamaning simmetrik formasi

$$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}.$$

sistemani echib,

$$\psi_1=z-2y, \qquad \psi_2=2\sqrt{z-x-y}+y,$$

bunda y=0 qo`yib,

$$\begin{aligned}
&z=\overline{\psi}_1\\
&2\sqrt{z-x}=\overline{\psi}_2
\end{aligned}$$

bu sistemadan x va z ni topamiz.

$$\begin{aligned}
&x=\overline{\psi}_1-\frac{\overline{\psi}_2^{\,2}}{4}\\
&z=\overline{\psi}_1
\end{aligned}$$

(6) formulaga ko`ra

$$\psi_1 - 2\left(\overline{\psi}_1 - \frac{\overline{\psi}_2^2}{4}\right) = 0, \qquad 2\psi_1 - \psi_2^2 = 0\,,$$

bunda ψ_1 va ψ_2 ni ko`rinishidan foydalansak,

$$2z - 4y - \left(2\sqrt{z - x - y} + y^2\right) = 0$$

Koshi masalasining echimi bo`ladi.

Adabiyotlar.

1. Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенние дифферциальные уравнения. М.:Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление. М.: Наука.. 1965.
5. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1991. 314 с.
6. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, “Высшая школа”, 1977.
7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: изд-во Моск. Ун-та. 1984.
8. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука.1980.

Differensial tenglamalar fanidan oraliq nazorat topshiriqlari.

Varifnt №1

Oddiy differensial tenglamalarni yeching:

1. $2xy' + y^2 = 1$
2. $2\left(x - y^2\right)dy = ydx$
3. $y' + y = xy^3$
4. $\left(xy^4 - x\right)dx + \left(y + xy\right)dy = 0$
5. $y' = \dfrac{1}{x - y^2}$

Variant №2

Oddiy differensial tenglamalarni yeching:

1. $x^2 y' - 2xy = 3y$
2. $\left(1 - x^2\right)dy + xydx = 0$
3. $\left(2xy^2 - y\right)dx + xdy = 0$
4. $y + y'\ln^2 y = \left(x + 2\ln y\right)y'$
5. $xy' = e^y + 2y'$

Variant №3

Oddiy differensial tenglamalarni yeching:

1. $xy' + x^2 + xy - y = 0$
2. $dy + \left(xy - xy^3\right)dx = 0$
3. $2x^2 y' = y^2\left(2xy' - y\right)$
4. $\left(y' - x\sqrt{y}\right)\left(x^2 - 1\right) = xy$
5. $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}dy = 0$

Variant №4

Oddiy differensial tenglamalarni yeching:

1. $y' = \sqrt[3]{2x - y} + 2$
2. $xdy - ydx = x\sqrt{x^2 + y^2}dx$
3. $yy' = 4x + 3y - 2$
4. $xy'\left(\ln y - \ln x\right) = y$
5. $\left(2xe^y + y^4\right)y' = ye^y$

Variant №5

Oddiy differensial tenglamalarni yeching:

1. $\dfrac{xy'}{y} + 2xy\ln x + 1 = 0$

2. $y^2(y-xy')=x^3y'$

3. $y'=\frac{x}{y}e^{2x}+y$

4. $y'+x\sqrt[3]{y}=3y$

5. $(x\cos y+\sin 2y)y'=1$

Variant №6

Oddiy differensial tenglamalarni yeching:

1. $2xy'+y^2=1$

2. $x^2y'-2xy=3y$

3. $xy'+x^2+xy-y=0$

4. $y'=\sqrt[3]{2x-y}+2$

5. $\frac{xy'}{y}+2xy\ln x+1=0$

Variant №7

Oddiy differensial tenglamalarni yeching:

1. $2(x-y^2)dy=ydx$

2. $(1-x^2)dy+xydx=0$

3. $dy+(xy-xy^3)dx=0$

4. $xdy-ydx=x\sqrt{x^2+y^2}dx$

5. $y^2(y-xy')=x^3y'$

Variant №8

Oddiy differensial tenglamalarni yeching:

1. $y'+y=xy^3$

2. $(2xy^2-y)dx+xdy=0$

3. $2x^2y'=y^2(2xy'-y)$

4. $yy'=4x+3y-2$

5. $y'=\frac{x}{y}e^{2x}+y$

Variant №9

Oddiy differensial tenglamalarni yeching:

1. $(xy^4-x)dx+(y+xy)dy=0$

2. $y+y'\ln^2 y=(x+2\ln y)y'$

3. $(y'-x\sqrt{y})(x^2-1)=xy$

4. $xy'(\ln y-\ln x)=y$

5. $y'+x\sqrt[3]{y}=3y$

Variant №10

Oddiy differensial tenglamalarni yeching:

1. $y'=\frac{1}{x-y^2}$

2. $xy' = e^y + 2y'$

3. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$

4. $\left(2xe^y + y^4\right)y' = ye^y$

5. $(x\cos y + \sin 2y)y' = 1$

Variant №11

Oddiy differensial tenglamalarni yeching:

1. $2xy' + y^2 = 1$

2. $\left(1 - x^2\right)dy + xydx = 0$

3. $2x^2y' = y^2(2xy' - y)$

4. $xy'(\ln y - \ln x) = y$

5. $(x\cos y + \sin 2y)y' = 1$

Variant №12

Oddiy differensial tenglamalarni yeching:

1. $\frac{xy'}{y} + 2xy\ln x + 1 = 0$

2. $2\left(x - y^2\right)dy = ydx$

3. $\left(2xy^2 - y\right)dx + xdy = 0$

4. $\left(y' - x\sqrt{y}\right)\left(x^2 - 1\right) = xy$

5. $\left(2xe^y + y^4\right)y' = ye^y$

Variant №13

Oddiy differensial tenglamalarni yeching:

1. $y' = \sqrt[3]{2x - y} + 2$

2. $y^2(y - xy') = x^3y'$

3. $y' + y = xy^3$

4. $y + y'\ln^2 y = (x + 2\ln y)y'$

5. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$

Variant №14

Oddiy differensial tenglamalarni yeching:

1. $xy' + x^2 + xy - y = 0$

2. $xdy - ydx = x\sqrt{x^2 + y^2}dx$

3. $y' = \frac{x}{y}e^{2x} + y$

4. $\left(xy^4 - x\right)dx + (y + xy)dy = 0$

5. $y' = \frac{1}{x - y^2}$

Variant №15

Oddiy differensial tenglamalarni yeching:

1. $x^2y' - 2xy = 3y$
2. $dy + \left(xy - xy^3\right)dx = 0$
3. $yy' = 4x + 3y - 2$
4. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$
5. $y' = \dfrac{1}{x - y^2}$

Variant №16
 Oddiy differensial tenglamalarni yeching:
1. $y' = \dfrac{1}{x - y^2}$
2. $xy' = e^y + 2y'$
3. $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}dy = 0$
4. $\left(2xe^y + y^4\right)y' = ye^y$
5. $(x\cos y + \sin 2y)y' = 1$

Variant №17
 Oddiy differensial tenglamalarni yeching:
1. $\left(xy^4 - x\right)dx + (y + xy)dy = 0$
2. $y + y'\ln^2 y = (x + 2\ln y)y'$
3. $\left(y' - x\sqrt{y}\right)\left(x^2 - 1\right) = xy$
4. $xy'(\ln y - \ln x) = y$
5. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$

Variant №18
 Oddiy differensial tenglamalarni yeching:
1. $y' + y = xy^3$
2. $\left(2xy^2 - y\right)dx + xdy = 0$
3. $2x^2y' = y^2(2xy' - y)$
4. $yy' = 4x + 3y - 2$
5. $y' = \dfrac{x}{y}e^{2x} + y$

Variant №19
 Oddiy differensial tenglamalarni yeching:
1. $2\left(x - y^2\right)dy = ydx$
2. $\left(1 - x^2\right)dy + xydx = 0$
3. $dy + \left(xy - xy^3\right)dx = 0$
4. $xdy - ydx = x\sqrt{x^2 + y^2}dx$
5. $y^2(y - xy') = x^3y'$

Variant №20
 Oddiy differensial tenglamalarni yeching:
1. $2\left(x - y^2\right)dy = ydx$

2. $(1-x^2)dy + xydx = 0$
3. $dy + (xy - xy^3)dx = 0$
4. $xdy - ydx = x\sqrt{x^2 + y^2}dx$
5. $y^2(y - xy') = x^3y'$

Variant №21
Oddiy differensial tenglamalarni yeching:
1. $2xy' + y^2 = 1$
2. $x^2y' - 2xy = 3y$
3. $xy' + x^2 + xy - y = 0$
4. $y' = \sqrt[3]{2x - y} + 2$
5. $\frac{xy'}{y} + 2xy\ln x + 1 = 0$

Variant №22
Oddiy differensial tenglamalarni yeching:
1. $x^2y' - 2xy = 3y$
2. $dy + (xy - xy^3)dx = 0$
3. $yy' = 4x + 3y - 2$
4. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$
5. $y' = \frac{1}{x - y^2}$

Variant №23
Oddiy differensial tenglamalarni yeching:
1. $xy' + x^2 + xy - y = 0$
2. $xdy - ydx = x\sqrt{x^2 + y^2}dx$
3. $y' = \frac{x}{y}e^{2x} + y$
4. $(xy^4 - x)dx + (y + xy)dy = 0$
5. $y' = \frac{1}{x - y^2}$

Variant №24
Oddiy differensial tenglamalarni yeching:
1. $y' = \sqrt[3]{2x - y} + 2$
2. $y^2(y - xy') = x^3y'$
3. $y' + y = xy^3$
4. $y + y'\ln^2 y = (x + 2\ln y)y'$
5. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$

Variant №25
Oddiy differensial tenglamalarni yeching:
1. $\frac{xy'}{y} + 2xy\ln x + 1 = 0$
2. $y^2(y - xy') = x^3y'$

3. $y' = \frac{x}{y}e^{2x} + y$

4. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$

5. $(x\cos y + \sin 2y)y' = 1$

Variant №26

Oddiy differensial tenglamalarni yeching:

1. $y' = \sqrt[3]{2x - y} + 2$

2. $xdy - ydx = x\sqrt{x^2 + y^2}dx$

3. $yy' = 4x + 3y - 2$

4. $xy'(\ln y - \ln x) = y$

5. $(2xe^y + y^4)y' = ye^y$

“