O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI

"Matematika"

fanidan

5310600–Yer usti transport tizimlari va ularning eksplautatsiyasi ta'lim yo'nalishi 2-kurs talabalari

MA'RUZALAR MATNI

Tuzuvchi:Tursunova Barno

Annotatsiya

Ushbu ma’ruzalar matni oliy o’quv yurtlarining texnika yo’nalishi talabalariga mo’ljallangan bo’lib,unda keltirilgan mavzular oliy o’quv yurtining transport va er usti transport tizimlari va ularning ekspluatatsiyasi mutaxassisliklari uchun matematik fanlarning amaldagi dasturiga to’la mos keladi.Ma’ruzalar matni 17 ta ma’ruzadan iborat bo’lib, asosan oliy matematikaning qatorlar,ko’p o’zgaruvchili funksiyalar,differensial tenglamalar,transport masalalari va ularning matematik modeli,matematik fizika tenglamalari,ehtimollar nazariyasi elementlari haqidagi mavzularni o’z ichiga oladi.Har bir ma’ruzada mavzuga oid tayanch so’z va iboralar,mavzuni mustahkamlash uchun savollar berilgan.

M U N D A R I J A.

MAVZU:SONLI QATORLAR

Tayanch so'zlar: Qator, xususiy yig'indi, qator yig'indisi, qatorning yaqinlashishi, qatorning uzoqlashishi, geometrik progressiya, qatorlar ustida amallar, musbat hadli qator, Koshi alomati, Dalamber alomati, Koshining integral alomati, absolyut yaqinlashuvchi qator, shartli yaqinlashuvchi qator, Leybnis teoremasi.

1. Asosiy tushunchalar

Matematik analizning ko'p masalalarini echishda qo'shiluvchilar soni chekli yoki cheksiz bo'lgan yig'indilar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi.

Bu cheksiz qo'shiluvchilar haqiqiy sonlardan tashqari funksiyalardan yoki vektorlardan yoki matrisalardan (yoki ma'lum bir chekli yoki cheksiz ob'ektlardan) iborat bo'lgan hollarda ularning yig'indisini topish ancha murakkab bo'ladi. Bu hollarda qo'yilgan masalalarni echishda quyida biz o'rganadigan qatorlar nazariyasi katta ahamiyatga ega.

1-Ta'rif. Agar $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ cheksiz haqiqiy sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsa, ulardan tuzilgan ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

ifodaga cheksiz qator (qisqacha-qator) deyiladi.

Qator qisqacha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ko'rinishda ham yoziladi.

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$-larga qatorning hadlari deyiladi. a_n ga qatorning umumiy hadi yoki $n-$hadi deyiladi. Umumiy had yordamida qatorning ixtiyoriy hadini yozish mumkin.

Masalan, agar $a_n = \frac{1}{2^n}$ bo'lsa, u holda qator

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$$

ko'rinishda bo'ladi.

Endi quyidagi yig'indilarni tuzaylik:

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3, ...,\ s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n, ... \qquad (2)$$

(2) yig'indilarga qatorning xususiy (yoki qismiy) yig'indilari deyiladi.

2-Ta'rif. Agar (1) qatorning $n-$xususiy yig'indisi s_n , $n\to\infty$ da $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ chekli limitga ega bo'lsa, u holda (1) qatorga yaqinlashuvchi qator deyilib s ga esa uning yig'indisi deyiladi va s= $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ko'rinishda yoziladi.

3-Ta'rif. Agar $n\to\infty$ da (1) qatorning $n-$xususiy yig'indisi s_n ning limiti cheksiz bo'lsa yoki mavjud bo'lmasa, u holda (1) qator uzoqlashuvchi deyiladi.

Cheksiz qatorga misol sifatida kelajakda ko'p foydalaniladigan va o'rta maktab dasturidan ma'lum bo'lgan geometrik progressiyani ko'rib o'taylik.

$$\boldsymbol{a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...} \qquad (3)$$

$\boldsymbol{a}$ geometrik progressiyaning (geometrik qatorning) birinchi hadi, $\boldsymbol{a\cdot q^{n-1}}$ $\boldsymbol{n}$-hadi, $\boldsymbol{q}$ esa mahraji bo'lib, birinchi $\boldsymbol{n}$ ta hadining yig'indisi $(|\boldsymbol{q}| \neq \boldsymbol{1})$ bo'lganda

$$\boldsymbol{s_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}} \text{ bo'ladi.}$$

1. $|q| < 1$ bo'lsa $n\to\infty$ da $q^n \to 0$ bo'lib

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q} \text{ bo'ladi.}$$

Demak (3) qator yaqinlashuvchi bo'lib yig'indisi $s = \dfrac{a}{1-q}$ bo'ladi.

2. $|q| > 1$ bo'lsa $n\to\infty$ da $q^n \to\infty$ bo'lib, (3) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

3. $q = 1$ bo'lsa, (3) qator $a + a + a + ... + a + ...$ ko'rinishda bo'lib $s_n = a + a + a + ... + a = na$ bo'ladi.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(an) = a\lim_{n\to\infty} n = \infty \quad (a \neq 0).$$

Demak, qator uzoqlashuvchi.

4. $q = -1, a \neq 0$ bo'lsa, (3) qator $a - a + a - a + ...$ ko'rinishda bo'lib, n juft son bo'lganda s_n=0 va n toq son bo'lganda $s_n = a$ bo'ladi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ mavjud emas va qator uzoqlashadi.

Shunday qilib geometrik progressiya ya'ni (3) qator faqat $|\boldsymbol{q}| < \boldsymbol{1}$ bo'lganda yaqinlashuvchi bo'lib, $|q| \geq 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'lar ekan.

2. Sonli qatorlarning ba'zi xossalari

$$a_1+a_2+a_3+...+a_m+a_{m+1}+...+a_n+... \qquad (1)$$

Qatorning birinchi chekli m ta hadini tashlab yuborsak, natijada

$$a_{m+1}+a_{m+2}+...+a_n+... \qquad (4)$$

qator hosil bo'ladi.

1-teorema. Agar (1) qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'lsa, uning istalgan chekli m sondagi hadlarini tashlab yuborishdan hosil bo'lgan (4) qator ham yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'ladi va aksincha (4) qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'lsa, u holda (1) qator ham yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'ladi.

Isbot. (1) qatorning xususiy yig'indisi

$$s_n=(a_1+a_2+a_3+...+a_m)+(a_{m+1}+a_{m+2}...+a_n)=s_m+s_{n-m}$$

(4) qatorning xususiy yig'indisi

$$s_{n-m}=a_{m+1}+a_{m+2}...+a_n$$

bo'lgani uchun $s_n=s_m+s_{n-m}$ dan ko'rinadiki:

a) Agar $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ mavjud bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n-m}$ ham mavjud bo'ladi, bu esa (1) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (4) qatorning ham yaqinlashuvchi ekanini ko'rsatadi s_m-chekli son n ga bog'liq emas).

b) Agar $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ mavjud bo'lmasa yoki cheksiz bo'lsa $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n-m}$ ham mavjud emas yoki cheksiz bo'ladi. Bu esa (1) qator uzoqlashuvchi bo'lsa, (4) qator ham uzoqlashuvchi ekanini ko'rsatadi.

Teoremaning ikkinchi qismi ham xuddi shuningdek isbotlanadi.

1-teorema. Qator hadlariga chekli sondagi hadlar qo'shganda ham o'rinli bo'ladi.

2-Teorema. Agar

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+... \qquad (1)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi s bo'lsa, u holda

$$\lambda a_1+\lambda a_2+\lambda a_3+...+\lambda a_n+... \qquad (5)$$

qator ham yaqinlashuvchi bo'lib yig'indisi λs bo'ladi (λ -ixtiyoriy o'zgarmas).

Isboti. (1) Qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) = \lim_{n\to\infty} s_n = s$$

bo'ladi. (5) Qatorning n – xususiy yig'indisi

$$\lambda a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3 + ... + \lambda a_n$$

bo'lib, limiti esa

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3 + ... + \lambda a_n) = \lambda \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} s_n = \lambda s$$

bundan (5) qatorning yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

3-teorema. Agar $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ va $b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ...$ qatorlar yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indilari mos ravishda s' ва s'' bo'lsa

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + ... + (a_n + b_n) + ... \qquad (6)$$

qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi va uning yig'indisi $s = s' + s''$ bo'ladi.

Isbot. Shartga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) = \lim_{n\to\infty} s'_n = s'$$

va

$$\lim_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n) = \lim_{n\to\infty} s''_n = s''$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

(6) Qatorning n – xususiy yig'indisini s_n desak

$$s_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + ... + (a_n + b_n)$$

bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + ... + a_n + b_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n) = s' + s'' = s$$

Bu esa bundan (6) qatorning yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatadi.

3. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti.

Qatorlar nazariyasining asosiy masalasi ularning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini ko'rsatish.

Teorema. Agar

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$$

Qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning n-hadi n cheksizlikka intilganda nolga intiladi ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Isboti. Teoremaning shartiga ko'ra

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+a_3+...+a_n) = s$$

bo'ladi. Bu holda

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+a_3+...+a_{n-1}) = s$$

ekanligi qatorning birinchi xossasiga ko'ra ravshan.

$$\lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

Ikkinchi tomondan $s_n - s_{n-1} = a_n$ bo'lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = 0$$

Eslatma. Agar qator yaqinlashuvchi bo'lsa, albatta $n\to\infty$ da uning n-hadi nolga intiladi ya'ni $a_n \to 0$ bo'ladi. Agar $n\to\infty$ da qatorning n-hadi nolga intilmasa qator albatta uzoqlashuvchi bo'ladi. Agar $n\to\infty$ da qatorning n-hadi nolga intilsa ya'ni $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ bo'lsa, bu qatorning yaqinlashishining muqarrarligi kelib chiqmaydi. Boshqacha aytganda $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dan qatorning albatta yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqmaydi u qator uzoqlashuvchi bo'lishi ham mumkin.

Masalan.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+...$$

garmonik qator deb ataluvchi qatorning $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ bo'lgani bilan bu qator uzoqlashuvchi. Buning uzoqlashuvchi ekanligini keyinroq Koshining integral alomati yordamida isbotlanadi.

4 . Musbat hadli qatorlar.

Agar

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

qatorning hamma hadlari manfiy bo'lmagan sonlardan iborat bo'lsa, bunday qatorga musbat hadli qator deyiladi.

$a_n > 0$ $(n = 1,2,\ldots)$ bo'lgani uchun qatorning barcha xususiy yig'indilari monoton o'suvchi bo'lib

$$s_1 < s_2 < \ldots < s_n < \ldots$$

bo'ladi.

Biz bilamizki monoton o'suvchi ketma-ketliklar yuqoridan chegaralangan bo'lsa uning limiti mavjud bo'lib ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, bu holda qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar monoton o'suvchi $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ xususiy yig'indilar yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, u chekli limitga ega bo'lmaydi. Demak, bu holda qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Teorema. Musbat hadli qatorlarning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun ularning barcha xususiy yig'indilari yuqoridan chegaralangan bo'lishi zarur va kifoya.

Musbat hadli qatorlarning yaqinlashishining etarli shartlarini ko'rib o'taylik.

1-teorema. (Birinchi taqqoslash alomati).

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + \ {}_n + \ldots a \qquad (1)$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (7)$$

musbat hadli qatorlar berilgan bo'lib biror $n > N$ nomerdan boshlab

$$a_n \le b_n \qquad (*)$$

tengsizlik bajariladigan bo'lsa , (7) qatorning yaqinlashuvchi bo'lishligidan (1) qatorning yaqinlashuvchiligi yoki (1) qatorning uzoqlashuvchi bo'lishligidan (7) qatorning ham uzoqlashuvchi bo'lishligi kelib chiqadi.

Isbot. $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $s_n' = \sum_{k=1}^{n} b_k$ bo'lsin. Ikkinchi qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun $\lim_{n\to\infty} s_n' = s$ bo'ladi. Teoremaning shartiga ko'ra (1) va (7) musbat hadli qatorlar bo'lgani uchun $s_n \le s_n' \le s$. Bundan (7) qatorning xususiy yig'indilari chegaralanganligi va uning yaqinlashuvchiligi keliib chiqadi.

Endi (1) qator uzoqlashuvchi bo'lsin, ya'ni $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$. $(*)$ tengsizlikka ko'ra $s_n \le s_n{}'$. Demak, $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ va qator uzoqlashuvchi.

1- *misol.* $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\dots+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\dots$

va

$\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\dots+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\dots$ qatorlar berilgan bo'lsin.

Ravshanki

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n = b_n$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ qator yaqinlashuvchi, demak 1-teoremaga ko'ra birinchi qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

2- *misol.* $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\dots$ qator uzoqlashuvchi, chunki uning hadlari, ikkinchi hadidan boshlab $1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$ garmonik qatorning mos hadlaridan katta, garmonik qator esa uzoqlashuvchidir.

3- *teorema* (Ikkinchi taqqoslash alomati)

Agar $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k < \infty$ limit mavjud bo'lsa, u holda (1) va (7) qatorlar bir vaqtda yaqinlashadi yoki uzoqlashadi.

3-*misol.* $\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\dots+\sin\frac{1}{n}+\dots$ qatorni $1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$ qator bilan taqqoslaymiz.

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$ nisbatni ko'ramiz. Ma'lumki, $\lim_{n\to\infty} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$ Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi.

4-*misol.* $\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{2^2}+\dots+\sin\frac{1}{2^n}+\dots$ qator $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\dots+\sin\frac{1}{2^n}+\dots$ qator bilan taqqoslaymiz. Berilgan ikkinchi qator yaqinlashuvchi, chunki $q=\frac{1}{2}$ bo'lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyadir.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}$$ va $$\lim_{n\to\infty} = \frac{\sin\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = 1.$$ Shunday qilib qator yaqinlashuvchi.

3-Teorema. (Dalamber alomati). Agar

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \quad (1)$$

qatorning $(n+1)$-hadining n-hadiga nisbatan $n \to \infty$ da chekli limitga ega bo'lsa, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \qquad (8)$$

bo'lsa, u holda

1) $l < 1$ da qator yaqinlashadi;

2) $l > 1$ da qator uzoqlashadi.

Isbot. 1) $l < 1$. U holda l bilan 1 orasidan biror q sonni olaylik $l < q < 1$ bo'lsin, (8) munosabatidan ko'rinadiki n ning biror $n = N$ nomeridan boshlab $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{a_{N+1}}{a_N} < q$ bo'ladi.

Oxirgi tezlikdan

$$\left.\begin{array}{l} a_{N+1} < a_N q \\ a_{N+2} < a_{N+1} q < a_N q^2 \\ a_{N+3} < a_{N+2} q < a_N q^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (9)$$

(9) dan ko'rinadiki

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{N+1} \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

qatorning a_{N+1} dan boshlab har bir hadi $q < 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi bo'lgan

$$a_N q + a_N q^2 \ldots + a_N q^n \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_N q^n \qquad (10)$$

qatorning tegishli hadlaridan kichik bo'ladi. Demak, taqqoslash teoremasiga ko'ra (1) qator yaqinlashuvichi bo'ladi.

2) $l > 1$ bo'lsin, u holda n ning biror $n \ge N$ nomeridan boshlab

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1 \Rightarrow a_{n+1} > qa_n > a_n$$

bundan ko'rinadiki, qator yaqinlashishining zaruriy sharti

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

bajarilmaydi. Demak, (1) qator uzoqlashuvchi bo'ladi

4-Teorema. (Koshi alomati). Agar musbat hadli

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

qator uchun

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

chekli limit mavjud bo'lib

1) $l < 1$ bo'lsa qator yaqinlashadi;
2) $l > 1$ bo'lsa qator uzoqlashadi.

Teorema Dalamber alomati kabi isbotlanadi.

1-Misol. Qatorni yaqinlashuvchiligini tekshiring:

$$\frac{2}{1^2} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{2^3}{3^2} + \ldots + \frac{2^n}{n^2} + \ldots$$

Echish. Ma'lumki , $a_n = \dfrac{2^n}{n^2}$, $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\dfrac{2^n}{n^2}} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 2 > 1$$

Demak , qator uzoqlashuvchi.

2-Misol. Berilgan qatorni yaqinlashuvchiligini tekshiring:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\left(\sqrt{2}\right)^2} + \frac{5}{\left(\sqrt{2}\right)^3} + \ldots + \frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n} + \ldots$$

Echish. $a_n = \dfrac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$, $a_{n+1} = \dfrac{2n+1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2n+1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}}{\dfrac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

Demak , qator yaqinlashuvchi.

3-*Misol.* Qatorni yaqinlashuvchiligini ko'rsating:

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ldots$$

Echish. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty n} \frac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \lim_{n\to\infty n} \sqrt[3]{\frac{n}{n+1}} = 1$$

Qatorning yaqinlashishi to'g'risida Dalamber alomati asosida xulosa chiqarish mumkin emas. Taqqoslash alomatiga ko'ra, qatorning uzoqlashuvchanligini ko'rish mumkin.

4-*Misol.* Berilgan qatorni yaqinlashuvchiligini tekshiring:

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \ldots + \frac{1}{\ln^n (n+1)} + \ldots$$

Echish. $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n (n+1)}} = \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1$$

Demak, qator yaqinlashuvchi.

5-Misol. $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{2}\right)^4+\left(\frac{4}{3}\right)^9+\ldots+\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}+\ldots$ qatorni yaqinlashuvchiligini tekshiring.

Echish. $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e>1$$

qator uzoqlashuvchi.

Teorema. (Koshining integral alomati). Bizga hadlari o'smaydigan

$(a_n \geq a_{n+1})$

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \qquad (1)$$

musbat hadli qator va uzluksiz o'smaydigan ($x\to\infty$ да $f(x)\to 0$) monoton kamayuvchi $f(x)$ funksiya berilgan bo'lib

$$f(1)=a_1, f(2)=a_2,\ldots, f(n)=a_n,\ldots$$

bo'lsa, u holda (1) qatorning yoki

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \qquad (11)$$

qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

xosmas integralning yaqinlashuvchi bo'lishi zarur va kifoya.

Isbot. $\int_1^{\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi degan so'z $n\to\infty$ da

$$\int_1^{n} f(x)dx \qquad (12)$$

integralning limiti mavjud degan so'z.

$n\to\infty$ da (12) integralning limiti mavjud degan so'z, o'z navbatida

$$\int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \ldots + \int_n^{n+1} f(x)dx + \ldots \qquad (13)$$

Qatorning yaqinlashishini bildiradi, chunki (12) integral (13) qator uchun n-hususiy yig'indi ekanligini ko'rish qiyin emas ((13) ning birinchi n-1 ta o'adlarini qo'shib chiqsak (12) kelib chiqadi). SHunday qilib (1) (yoki (11)) va (13) qatorlarning bir paytda yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini ko'rsatishimiz kerak.

$f(x)$ funksiya o'smaydigan monoton kamayuvchi bo'lgani uchun har qanday $[n, n+1]$ kesmada

$f(n+1) \le f(x) \le f(n) \quad (n = \overline{1,\infty})$ tengsizlik o'rinli.

Bu tengsizlikni $[n, n+1]$ da integrallasak

$$\int_n^{n+1} f(n+1)dx \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le \int_n^{n+1} f(n)dx \quad \Rightarrow \boldsymbol{f(n+1)} \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le f(n) \quad (14)$$

Agar (11) qator yaqinlashuvchi bo'lsa

$$\int_n^{n+1} f(x)dx \le f(n)$$

dan ko'rinadiki taqqoslash teoremasiga ko'ra (13) qator yaqinlashadi.

Agar (13) qator yaqinlashuvchi bo'lsa

$$f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x)dx$$

dan ko'rinadiki taqqoslash teoremasiga ko'ra (11) yaqinlashuvchi bo'ladi.

Misol. Umumlashgan garmonik qator deb ataluvchi

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

qatorni yaqinlashuvchanlikka tekshiring.

Echish. $a_1 = f(1) = 1, a_2 = f(2) = \frac{1}{2^p}, \ldots, a_n = f(n) = \frac{1}{n^p}, \ldots$ va $f(x) = \frac{1}{x^p}$ ekanligi ravshan, bu erda r-haqiqiy son.

Ushbu

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^\infty = \frac{1}{1-p}\lim_{n\to\infty} x^{-p+1}\Big|_1^\infty = \frac{1}{1-p}\lim_{n\to\infty}(n^{1-p} - 1) \quad (\text{p} \ne 1)$$

xosmas integralni hisoblaymiz.

Agar r>1 bo'lsa, u holda $\lim_{n\to\infty} n^{1-p} = 0$ va $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{1-p}$ yaqinlashuvchi;

Agar r<1 bo'lsa, u holda $\lim_{n\to\infty} n^{1-p} = \infty$ va $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ uzoqlashuvchi;

Agar r=1 bo'lsa, u holda $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_1^\infty = \infty$ uzoqlashuvchi.

Shu sababli umumlashgan garmonik qator

r>1 bo'lsa yaqinlashuvchi,

r<1 bo'lsa uzoqlashuvchi va

r=1 bo'lsa uzoqlashuvchi bo'ladi.

5. Ishoralari navbat bilan almashib keladigan qatorlar

$$\boldsymbol{u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n} \qquad (15)$$

ko'rinishdagi qatorga ishoralari navbat bilan almashib keladigan qatorlar deyiladi. Bu erda $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ musbat sonlar.

Teorema (Leybnis teoremasi). Agar ishorasi almashinib keluvchi

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots$$

qatorda

1) Qator hadlarining absolyut qiymatlari kamayuvchi, ya'ni

$$u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \ldots > u_n > \ldots \qquad (16)$$

bo'lsa,

2) Qator umumiy hadi $\boldsymbol{u_n}$ $\boldsymbol{n \to \infty}$ da nolga intilsa:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \qquad (17)$$

u holda (15) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isbot. $n = 2m$, ya'ni juft bo'lsin

$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m})$, demak $S_{2m} > 0$ va xususiy yig'indilar ketma-ketligi S_{2m} o'suvchi. (15) shartga ko'ra har bir qavs ichidagi ifoda musbat ekanligi kelib chiqadi.

Endi S_{2m} xususiy yig'indilarni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}$$

Bu ifodaning har bir qavs ichidagi ishoralari musbat. SHu sababli $u_1 > S_{2m}$.

Shunday qilib, S_{2m} xususiy yig'indilar ketma-ketligi o'suvchi va yuqoridan chegaralangan. Demak $\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$ shu bilan birgalikda $u_1 > S > 0$.

Endi toq indeksli S_{2m+1} xususiy yig'indilar ham S limitga intiladi.

Haqiqatan, ham

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$$

bo'lgani uchun $m \to \infty$ da

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$$

ga ega bo'lamiz, bunda (17) shartga ko'ra

$$\lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$$

Demak, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, qator yaqinlashuvchi.

Misol. $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2} + \ldots$ qatorning yaqinlashuvchanligini tekshiring.

Echish. $\frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^2} > \frac{1}{4^2} > \ldots > \frac{1}{(n+1)^2} > \ldots$ va $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$.

Demak, qator yaqinlashuvchi.

Endi ixtiyoriy ishorali qatorlarni ko'raylik. O'zgaruvchan ishorali qatorning absolyut va shartli yaqinlashishikabi muhim tushunchalarni ko'raylik.

6. O'zgaruvchan ishorali qatorlar. Absolyut va shartli yaqinlashish.

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_n + ... \qquad (18)$$

Qatorning cheksiz ko'p musbat va cheksiz ko'p manfiy hadlari bo'lsa, u holda bu qatorga o'zgaruvchan ishorali qator yoki ixtiyoriy hadli qator deyiladi.

(1) qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4| + ... + |u_n| + ... \qquad (19)$$

qatorni tuzaylik.

Teorema. Agar (19) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (18) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isbot. S_n va S_n' mos ravishda (18) va (19) qatorlarning n-xususiy yig'indilari bo'lsin. S_n^+ bilan barcha musbat va S_n^- bilan S_n xususiy yig'indidagi barcha manfiy ishorali hadlar qiymatlari yig'indisini belgilaymiz. U holda

$$S_n = S_n^+ - S_n^- \;, \; S_n' = S_n^+ + S_n^-$$

Shartga ko'ra, (19) qator yaqinlashuvchi, shu sababli S_n' yig'indi S yig'indiga ega.

S_n^+ va S_n^- lar esa musbat va o'suvchi, shu bilan birgalikda $S_n^+ \le S_n' < S$ va $S_n^- \le S_n' < S$ (chegaralangan), demak, ular ham limitga ega:

$$\lim_{n\to\infty} S_n^+ = S^+ \;, \; \lim_{n\to\infty} S_n^- = S^-$$

$S_n = S_n^+ - S_n^-$ munosabatdan S_n ham limitga egaligi kelib chiqadi:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n^+ - \lim_{n\to\infty} S_n^- = S^+ - S^-$$

1-ta'rif. (18) va (19) qatorlar bir paytda yaqinlashuvchi bo'lsa, (18) qatorga absolyut yaqinlashuvchi qator deyiladi.

2-ta'rif. Agar (18) qator yaqinlashuvchi bo'lib (19) qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda berilgan (18) qatorga shartli yaqinlashuvchi deyiladi.

1-Misol. Quyidagi qatorni ko'raylik:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^n \frac{1}{n} + ...$$

Leybnis alomatiga ko'ra bu qator yaqinlashuvchi, lekin qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+...$ qator esa uzoqlashuvchi. Demak, qator shartli yaqinlashuvchi.

2-Misol. Quyidagi qatorni ko'ramiz:

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+...$$

Echish. Bu qator absolyut yaqinlashuvchidir, chunki u yaqinlashuvchidir va uning hadlari absolyut qiymatlaridan tuzilgan qator yaqinlashuvchidir (r=2>1).

3-Misol. O'zgaruvchan ishorali

$$\frac{\sin\alpha}{1^2}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+...+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+...$$

Qatorning yaqinlashishini tekshiring, buerda α -ixtiyoriy haqiqiy son.

Echish. Berilgan qator bilan birga

$$\left|\frac{\sin\alpha}{1^2}\right|+\left|\frac{\sin 2\alpha}{2^2}\right|+...+\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|+...$$

qatorni qaraymiz. Bu yaqinlashuvchi

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$$

qator bilan taqqoslaymiz. Ravshanki, $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$ n=1,2,...

Shu sababli taqqoslash alomatiga ko'ra absolyut hadli qatorlar yaqinlashuvchi. U holda yuqorida isbotlangan teoremaga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi.

Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlarning quyidagi xossalarini qayd qilamiz:

a) agar qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu qator hadlarining o'rni har qancha almashtirilganda ham u absolyut yaqinlashuvchi bo'lib qolaveradi, bunda qatorning yig'indisi uning hadlari tartibiga bog'liq bo'lmaydi (bu xossa shartli yaqinlashuvchi qatorlar uchun o'rinli bo'lmasligi mumkin);

b) agar qator shartli yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu qator hadlarining o'rinlarini shunday almashtirish mumkinki, natijada uning yig'indisi o'zgaradi va almashtirishdan keyin hosil bo'lgan qator uzoqlashuvchi qator bo'lib qolishi ham mumkin.

Misol uchun shartli yaqinlashuvchi

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+...$$

qatorni olamiz. Uning yig'indisini S bilan belgilaymiz. Qator hadlarini har bir musbat haddan keyin ikkita manfiy had turadigan qilib almashtiramiz:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+...$$

Har bir musbat hadni undan keyin keladigan manfiy had bilan qo'shamiz:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+...$$

Natijada hadlari berilgan qator hadlarini $\frac{1}{2}$ ga ko'paytirishdan hosil bo'lgan qatorga ega bo'lamiz. U holda bu qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $\frac{1}{2}S$ ga teng. Shunday qilib, qator hadlarining joylashish tartibini o'zgartirish bilangina uning yig'indisini ikki marta kamaytirdik.

Mustahkamlash uchun savollar.

1. Sonli qatorning ta'rifi.
2. Hususiy yig'indi nima?
3. Sonli qatorning yaqinlashishi va uzoqlashishining ta'rifi.
4. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti nimadan iborat?
5. Gormonik qator nima?
6. Qator yaqinlashishining etarli shartlari nimadan iborat?
7. Yaqinlashish alomatlarining qaysi biri qachon qo'llanilishini bilasizmi?
8. Koshining integral alomati geometrik talqinini bilasizmi?
9. Solishtirish teoremalari haqida nima bilasiz?
10. Leybnis teoremasi haqida nimalar aytolamiz?

MAVZU.FUNKSIONAL QATORLAR.

Tayanch so'zlar: **Yaqinlashish sohasi, tekis yaqinlashish, Veyershtrass teoremasi**

1.Asosiy tushunchalar

1-Ta'rif. Hadlari x o'zgaruvchining funksiyalardan iborat bo'lgan

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \qquad (1)$$

ko'rinishdagi qatorga funksional qator deyiladi.

Agar o'zgaruvchi x ning aniq bir qiymatini olsak ya'ni $x = x_0$ deb uni (1) ga qo'ysak

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots$$

sonli qattor hosil bo'ladi.

Demak o'zgaruvchi x ga aniq konkret har xil son qiymatlar berish bilan har xil yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lgan sonli qatorlar hosil qilish mumkin ekan.

2-Ta'rif. Agar (1) qator x ning $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ aniq son qiymatlarida yaqinlashuvchi bo'lsa u holda x ning bu $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ son qiymatlar to'plamiga (1) ning yaqinlashish sohasi deyiladi.

Misol. $1+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots$ funksional qatorning hadlari mahraji $q=x$ ga teng bo'lgan geometrik progressiya tashkil qiladi.

Demak, uning yaqinlashishi uchun $|x|<1$ bo'lishi kerak va $(-1,1)$ intervalda qatorning yig'indisi $\frac{1}{1-x}$ ga teng. Shunday qilib, $(-1,1)$ intervalda berilgan qator

$$S(x)=\frac{1}{1-x}$$

funksiyani aniqlaydi, bu esa qatorning yig'indisidir, ya'ni

$$\frac{1}{1-x}=1+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots$$

(1) Qatorning dastlabki n ta hadi yig'indisini $S_n(x)$ bilan belgilaylik:

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x) \qquad (2)$$

Agar $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ chekli limit mavjud bo'lsa (1) funksional qatorga yaqinlashuvchi qator deyilib $S(x)$ ga esa uning yig'indisi deyiladi.

Agar $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ mavjud bo'lmasa (1) funksional qatorgauzoqlashuvi deyiladi.

Agar bu qator x ning biror qiymatida yaqinlashsa, u holda

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x)$$

bo'ladi, bu erda

$S(x)$ - qatorning yig'indisi $r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ...$ - qatorning qoldig'i deyiladi.

x ning barcha qiymatlari uchun qatorning yaqinlashish sohasida

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$$

munosabat o'rinli, shu sababli $\lim_{n\to\infty}$ [$S(x) - S_n(x)$]=0 yoki $\lim_{n\to\infty} r_n(x)$=0, ya'ni yaqinlashuvchi qatorning qoldig'i $n \to \infty$ da nolga intiladi.

2. Tekis yaqinlashish. Veyershtrass alomati.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy ε musbat son uchun ε ga bog'liq, shunday $N(\varepsilon) > 0$ son topilib, barcha $n \geq N$ da ko'rsatilgan sohaga tegishli x lar uchun

$$r_n(x) = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa , (1) qator ko'rsatilgan sohada tekis yaqinlashuvchi qator deyiladi.

Veyershtrass alomati.

Agar $u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$

funksional qatorning hadlari biror $[a,b]$ sohada absolyut qiymati bo'yicha biror yaqinlashuvchi musbat ishorali

$$c_1 + c_2 + ... + c_n + ... \qquad (2)$$

qatorning mos hadlaridan katta bo'lmasa , ya'ni

$$|u_n(x)| \leq c_n \ \ (n = 1,2,3,...) \qquad (3)$$

bo'lsa, u holda berilgan funksional qator ko'rsatilgan $[a,b]$ sohada tekis yaqinlashadi.

Isbot. (2) Qator yig'indisini σ bilan belgilaymiz: $\sigma = c_1 + c_2 + ... + c_n + ...$

U holda

$$\sigma = \sigma_n + \varepsilon_n$$

bu erda σ_n - n-xususiy yig'indi , ε_n esa bu qatorning n-qoldig'i, ya'ni

$$\varepsilon_n = c_{n+1} + c_{n+2} + ... \qquad (4)$$

(2) qator yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, demak $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Endi (1) funksional qator yig'indisini

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x)$$

ko'rinishda yozamiz, bu erda

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...,$$

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ...$$

(3) shartdan

$$|u_{n+1}(x)| \le c_{n+1},\ |u_{n+2}(x)| \le c_{n+2},...$$

va shu sababli (4) dan qaralayotgan sohaning barcha x lari uchun $|r_n(x)| < \varepsilon_n$ tengsizlik bajariladi. Demak , (1) qator $[a,b]$ da tekis yaqinlashuvchidir.

1-Misol. Ushbu

$$\frac{\sin^2 x}{1^3} + \frac{\sin^2 2x}{2^3} + ... + \frac{\sin^2 nx}{n^3} + ...$$

funksional qator x ning barcha haqiqiy qiymatlari uchun tekis yaqinlashadi, chunki barcha x va n-larda

$$\left|\frac{\sin^2 nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$$

$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{n^3} + ...$ qator esa yaqinlashuvchidir.

2-Misol. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$ qatorni tekshiring.

Veyershtrass alomati bu qator uchun bajarilmaydi, chunki berilgan qator shartli yaqinlashuvchi va $x \geq 0$ lar uchun $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x}$ qator uzoqlashuvchi. Berilgan qatorni tekis yaqinlashuvchiligini ko'rsatish uchun Leybnis teoremasidan foydalanamiz. Berilgan qator o'zgaruvchi ishorali va $x \geq 0$ da absolyut qiymatlari bo'yicha monoton kamayuvchi va n-hadi $n \to \infty$ da nolga intiladi. SHu sababli, qator $[0, \infty)$ yarim o'qda yaqinlashuvchi va qator qoldig'i uchun $|r_n(x)| < \frac{1}{n+1+x}$ $x \geq 0$ da $|r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$ ga ega bo'lamiz va $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

bo'lgani uchun, qator tekis yaqinlashuvchi.

Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorlar uchun funksiyalar chekli yig'indisi xossalarini tatbiq qilish mumkin.

1-teorema. Agar

$$u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$$

funksional qatorning har bir hadi $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, bu funksional qator $[a,b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda qatorning yig'indisi $S(x)$ ham shu kesmada uzluksiz bo'ladi.

3-Misol. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x^2 + \frac{1}{n} \right)^n$ funksiyani aniqlanish sohasini toping va uzluksizligini tekshiring.

Echish. Berilgan funksional qatorni Koshi alomatiga ko'ra aniqlanish sohasini topamiz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(x^2 + \frac{1}{n} \right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(x^2 + \frac{1}{n} \right) = x^2$$

Shu sababli $x^2 < 1$ da qator yaqinlashuvchi va $x^2 > 1$ da uzoqlashuvchi, ya'ni qator (-1,1) oraliqda qator yaqinlashuvchi. $x = \pm 1$ nuqtalarda uzoqlashuvchi, chunki

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \neq 0$$

qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaydi.

Funksiyani uzluksizligini tekshiramiz. Buning uchun qatorni $0 < a < 1$ bo'lgan ixtiyoriy $[-a, a]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatamiz.

$0 < a < b < 1$ son olamiz va shunday N topiladiki, $n \geq N$ da $a + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq b$. U holda $|x| \leq a$ lar uchun

$$\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(|x| + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n} \leq \left(a + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n} \leq b^{2n}$$

tengsizlik bajariladi.

Ravshanki, $b^2 + b^4 + b^6 + ... + b^{2m} + ...$ qator $[-a, a]$ da yaqinlashuvchi (chunki bu qator mahraji $b^2 < 1$ bo'lgan geometrik progressiya), shu sababli berilgan qator tekis yaqinlashuvchi. Demak, $f(x)$ funksiya $[-a, a]$ kesmada uzluksiz. a ($0 < a < 1$) ning ixtiyoriyligidan $f(x)$ funksiya (-1,1) oraliqda uzluksiz.

2-teorema. (Qatorlarni hadlab integrallash)

Agar

$$u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$$

funksional qatorning har bir hadi $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, bu funksional qator $[a, b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + ... + \int_a^b u_n(x)dx + ... +$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. $\boldsymbol{S(x) = S_n(x) + r_n(x) = \underbrace{u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x)}_{S_n(x)} + r_n(x) = S(x) - S_n(x)}$

(1) qator tekis yaqinlashuvchi qator bo'lgani uchun Veyershtrass teoremasidagi kabi

$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b r_n(x)dx = 0}$ ekanligi ravshan.

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} \int_a^b r_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[\int_a^b S(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx\right] \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{\int_a^b S(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + ... + \int_a^b u_n(x)dx + ... +}$$

Teorema isbot bo'ldi.

4-Misol. $1-x^2+x^4-...+(-1)^n x^{2n}+...$ funksional qator $|x|<1$da tekis yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $S(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ga teng. Berilgan qatorni 0 dan $x<1$gacha hadlab integrallaymiz va quyidagi qatorga ega bo'lamiz :

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...$$

Bu qator qator $|x|<1$da tekis yaqinlashadi va uning yig'indisi quyidagiga teng:

$$\int_0^x S(x)dx=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=arctg\Big|_0^x=arctgx$$

Shunday qilib $|x|<1$da tekis yaqinlashuvchi

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...$$

qatorga ega bo'ldik.

3-teorema. (Qatorlarni hadlab differensiallash)

Agar $[a,b]$ kesmada hosilalari uzluksiz bo'lgan funksiyalardan tuzilgan.

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$$

funksional qator shu kesmada yaqinlashuvchi va yig'indisi $S(x)$ bo'lsa, u holda uning hadlarining hosilalaridan tuzilgan.

$$u_1'(x)+u_2'(x)+...+u_n'(x)+...$$

qator ham tekis yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi $S'(x)$ bo'ladi.

5-Misol. 4- misolni qaraymiz:

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...$$

Bundan

$$x\,arctgx=x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{5}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1}+...$$

ekani kelib chiqadi. Bunda o'ng tomonda biror qator turibdi. SHu qatorni hadlab differensiallab quyidagini topamiz:

$$2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{6x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{(2n+2)x^{2n+1}}{2n+1} + ...$$

Dalamber alomatiga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2n+2}{2n+1} x^{2n+1}}{\frac{2n}{2n-1} x^{2n-1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)(2n-1)}{(2n+1)^2} x^2 = x^2$$

Shunday qilib, qator absolyut yaqinlashuvchi va barcha $|x| < 1$lar uchun tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Demak, berilgan qatorning hosilalaridan tuzilgan qator berilgan qator yig'indisidan olingan hosilaga yaqinlashadi:

$$arctgx + \frac{x}{1+x^2} = 2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{6x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{(2n+2)x^{2n+1}}{2n+1} + ...$$

$|x| < 1$ da tekis yaqinlashuvchidir.

Mustahkamlash uchun savollar.

1. Funksional qator tushunchasi.
2. Funksional qatorni yaqinlashishini qanday tasavvur qilasiz?
3. Qatorning yaqinlashish sohasini qanday tushunasiz?
4. Yaqinlashish sohasi bitta nuqtadan iborat qatorga misol keltiring.
5. Yaqinlashish sohasi R dan iborat qatorga misol keltiring.
6. Funksional qator uzoqlashuvchiligini qanday izoxlaysiz?
7. Yaqinlashish alomatlari funksional qatorlarda qanday ishlatiladi?

MAVZU:DARAJALI QATORLAR

Tayanch so'zlar: Yaqinlashish intervali va radiusi, darajali qatorlarni integrallash va differensiallash, Teylor qatori, taqribiy hisoblashlar.

1.Asosiy tushunchalar.

Ta'rif. $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ...$ (1)

ko'rinishdagi funksional qatorga darajali qator deyiladi, bu erda $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ o'zgarmas sonlar darajali qatorning koeffisientlaridir.

Xususiy holda, agar $x_0 = 0$ bo'lsa, u holda quyidagi

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \qquad (2)$$

darajali qatorga ega bo'lamiz. Biz bundan keyin (2) ko'rinishdagi darajali qatorlarni o'rganamiz, chunki bunday qator $x' = x - x_0$ ko'rinishdagi almashtirish yordamida (2) ko'rinishga keltiriladi.

Darajali qatorning yaqinlashish sohasi doim biror intervaldan iborat, bu interval xususiy holda nuqtaga aylanadi.

Abel teoremasi. Agar

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \qquad (2)$$

darajali qator $x_0 \neq 0$ nuqtada yaqinlashsa, u holda bu qator x ning $|x| < |x_0|$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha qiymatlarida absolyut yaqinlashadi, ya'ni $(-|x_0|, |x|)$ da yaqinlashadi.

Isbot. Teoremaning shartiga ko'ra

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0{}^2 + ... + a_n x_0{}^n + ...$$

sonli qator yaqinlashuvchi, shu sababli uning umumiy hadi nolga intiladi:

$$\lim_{n \to \infty} a_n x_0{}^n = 0$$

Shunga ko'ra bu qatorning hamma hadlari chegaralangan, ya'ni shunday $M > 0$ o'zgarmas son mavjudki, barcha n larda

$$\left| a_n x_0{}^n \right| < M \qquad (3)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. (2) Qatorni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0} \right) + a_2 x_0{}^2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 + ... + a_n x_0{}^n \left(\frac{x}{x_0} \right)^n + ... \qquad (4)$$

Endi bu qator hadlarining absolyut qiymatlaridan

$$|a_0| + |a_1 x_0|\left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2 x_0{}^2|\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + |a_n x_0{}^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \quad (5)$$

qatorni ko’raylik. (5) qatoring hadlari mos ravishda birinchi hadi M va mahraji $\boldsymbol{q = \left|\frac{x}{a}\right| < 1}$ bo’lgan yaqinlashuvchi

$$\boldsymbol{M + M\left|\frac{x}{a}\right| + M\left|\frac{x}{a}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{a}\right|^n + \ldots} \qquad (6)$$

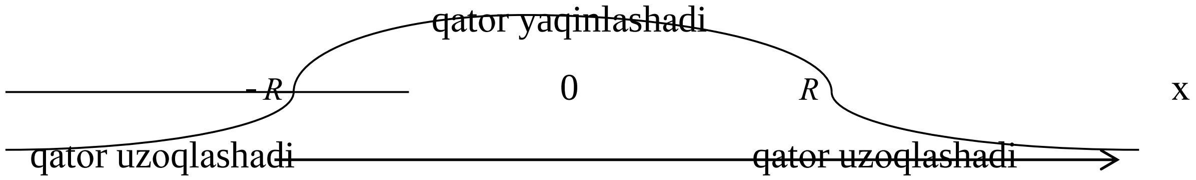
geometrik progressiya hadlaridan kichik. U holda taqqoslash teoremasiga ko’ra (5) yaqinlashuvchi, demak (2) absolyut yaqinlashuvchi bo’ladi.

Teoremaning ikkinchi qismi ham xuddi shunday isbotlanadi.

2**. Darajali qatorlar uchun yaqinlashish intervali va radiusi.**

Ta’rif. $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ darajali qatorning yaqinlashish sohasi deb shunday $(-R, R)$ intervalga aytiladiki, bu intervalning ichidagi har bir x nuqtada qator yaqinlashadi, undan tashqarida yotuvchi x nuqtalarda qator uzoqlashadi. R- darajali qatorning yaqinlashish radiusi deyiladi.

Intervalning chetki nuqtalarida ya’ni x=R va x=-R nuqtalarda berilgan qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi masalasi qator uchun alohida hal qilinadi.



Ba’zi qatorlar uchun yaqinlashish intervali nuqtaga aylanib holadi, u holda R=0;

ba’zilari uchun butun OX o’qini qamrab oladi, ya’ni $R = \infty$ bo’ladi.

(2) Qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan quyidagi qatorni qaraymiz:

$$\boldsymbol{|a_0 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots} \qquad (*)$$

(*) qatorni yaqinlashishini aniqlash uchun Dalamber alomatini qo’llaymiz:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = l\cdot|x|$$

limit mavjud bo'lsin. U holda Dalamber alomatiga ko'ra (*) qator

agar $l\cdot|x|<1$, ya'ni $|x|<\frac{1}{l}$ bo'lsa, yaqinlashuvchi,

agar $l\cdot|x|>1$, ya'ni $|x|>\frac{1}{l}$ bo'lsa uzoqlashuvchi bo'ladi. Demak, (2) qator $|x|<\frac{1}{l}$ da absolyut yaqinlashadi va $|x|>\frac{1}{l}$ da uzoqlashadi.

Yuqoridagilardan $\left(-\frac{1}{l},\frac{1}{l}\right)$ interval berilgan qatorning yaqinlashish intervali bo'lib yaqinlashish radiusi esa quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (7)$$

Xuddi shuningdek, yaqinlashish intervalini aniqlash uchun Koshi alomatidan ham foydalanish mumkin, u holda yaqinlashish radiusi:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (8)$$

Eslatma. $a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n + ...$

ko'rinishdagi darajali qatorlar uchun yuqorida aytilganlarning hammasi, o'z kuchida qoladi, bunda farq shundan iboratki, endi yaqinlashish markazi x=0 nuqta emas, balki $x=x_0$ nuqtada yotadi. Demak, yaqinlashish intervali $(x_0 - R, x_0 + R)$ intervaldan iborat bo'ladi, bu erda R (7) yoki (8) formulalar yordamida aniqlanadi.

1-Misol. Darajali qatorning yaqinlashish intervalini toping:

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + \frac{x^n}{n} + ...$$

Echish. $u_n = (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, $u_{n+1} = (-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{n+1}$, $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, $a_n = (-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}$

Bu erdan

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$$

Demak, (-1,1) interval yaqinlashish intervali bo'ladi.

x=1 da $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{(-1)^n}{n}+...$qatorga ega bo'lamiz, bu qator Leybnis alomatiga ko'ra yaqinlashuvchi.

x=-1 da esa $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-...$ qatorga ega bo'lamiz, bu qator Leybnis alomatiga ko'ra uzoqlashuvchi.

2-Misol. $\frac{x-1}{1\cdot 2}+\frac{(x-1)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(x-1)^3}{3\cdot 2^3}+...+\frac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n}+...$ qatorning yaqinlashish intervalini toping.

Echish. Ma'lumki, $a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{n\cdot 2^n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=2$$

Yaqinlashish intervalining markazi x=1 nuqtada, shu sababli (-1,3) interval qatorning yaqinlashish intervali bo'ladi. x=-1 da $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-...$ qator Leybnis alomatiga ko'ra yaqinlashuvchi va x=3 da $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...$ qator uzoqlashuvchi.

3. Teylor qatori.

Biz birinchi kurs materiallaridan bilamizki, agar $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtani o'z ichiga olgan biror intervalda $n+1$ -tartibli hamma hosilalarga ega bo'lsa, bu funksiya uchun $x=a$ nuqta atrofida quyidagi Teylor formulasi o'rinli bo'lar edi:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)... \quad (1)$$

Qoldiq had $R_n(x)$ esa (Lagranj ko'rinishidagi)

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[a+0(x-a)] \qquad 0<0<1$$

formula bilan hisoblanar edi.

Faraz qilaylik $n\to\infty$ da $R_n(x)\to 0$ bo'lsin, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[a+0(x-a)]\right]=0$$

bo'lsin.

$f(x)$ funksiya $x=a$ nuqta atrofida hamma hosilalari mavjud bo'lgani uchun $n$ni etarli darajada katta qilib olishimiz mumkin, ya'ni $n\to\infty$desak

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)\ldots \quad (2)$$

hosil bo'ladi. (2) ga Teylor qatori deyiladi.

(2) formula faqat $n\to\infty$ da $R_n(x)=0$ bo'lgandagina o'rinli bo'lib, bu holda (2) qatorga yaqinlashuvchi qator deyilib $f(x)$ga esa uning yig'indisi deyiladi.

Haqiqatdan

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)\ldots+R_n(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}P_n(x)+\lim_{n\to\infty}R_n(x) \quad \Rightarrow f(x)=\lim_{n\to\infty}P_n(x)$$

Agar Teylor qatorida $a=0$ desak

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)\ldots \quad (3)$$

Makloren qatori kelib chiqadi.

Endi shunday savolning tug'ilishi tabiiy: Qanday funksiyalar Teylor qatoriga yoyiladi?

Bu savola quyidagi teorema javob beradi:

Teorema. $f(x)$ funksiya $(-r,r)$ intervalda aniqlangan bo'lib, unda noldan farqli istalgan tartibli hosilalari mavjud bo'lsin.

Agar shunday bir M soni mavjud bo'lsaki, $(-r,r)$ intervalning barcha nuqtalarida $\left|f^{(n)}(x)\right|<M,\ (n=0,1,2,..)$

Tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda intervalda

$$f(x)=f'(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f^{(n)}(0)}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \quad (3)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Shunday qilib bu teoremaga asosan $f(x)$ funksiyaning istalgan tartibli hosilalari mavjud bo'lib ularning hammasi yuqoridan chegaralangan bo'lsa $f(x)$ funksiya uchun (3) yoyilma o'rinli bo'lar ekan.

4.Ayrim funksiyalarni Makloren qatoriga yoyish.

1. $f(x)=\sin x$ funksiyani Makloren qatoriga yoyaylik.

$f(x)=\sin x$ funksiya yuqoridagi teorema shartlarini har qanday r uchun ya'ni ixtiyoriy $(-r,r)$ intervalda qanoatlantiradi.

Haqiqatan, $\sin x$ funksiyaning istalgan tartibli hosilasi yoki $\pm\sin x$ ga yoki

$\pm\cos x$ ga teng; ikkinchidan $\left|(\sin x)^n\right|\le 1,\ \left|(\cos x)^n\right|\le 1\ \ (n=0,1,2,..)$

$f(x)=\sin x,\ f'(x)=(\sin x)'=\cos x,\ \ f''(x)=(\sin x)''=-\sin x,\ \ f'''(x)=(\sin x)'''=-\cos x,$

$f^{IV}(x)=(\sin x)^{IV}=\sin x,...$

Bundan ko'rinadiki $\left\{(\sin x)^{(n)}\right\}$ ketma-ketlik davriy bo'lib davri 4 ga teng ekan.

Agar $x=0$ desak

$\sin 0=0,\ \ \sin'(0)=1,\ \ \sin''(0)=0,\ \ \sin'''(0)=-1,...,\sin^{(2n+1)}(0)=(-1)^n\ \ \ (n=0,1,2,..)$

Endi buni (3) ga qo'ysak

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+... \quad (4)$$

2. Xuddi shuningdek $f(x)=\cos x$ funksiyani Makloren qatoriga yoyishimiz mumkin.

$f(x)=\cos x$ funksiyaning istalgan tartibli hosilasi yoki $\pm\sin x$ ga yoki $\pm\cos x$ ga teng; ikkinchidan $\left|(\sin x)^n\right|\le 1,\ \left|(\cos x)^n\right|\le 1\ \ (n=0,1,2,..)$

$f(x)=\cos x,\ f'(x)=(\cos x)'=-\sin x,\ \ f''(x)=(\cos x)''=-\cos x,\ f'''(x)=(\cos x)'''=-\sin x,$

$f^{IV}(x)=(\cos x)^{IV}=\cos x.$

Bundan ko'rinadiki $\left\{(\cos x)^{(n)}\right\}$ ketma-ketlik davriy bo'lib davri 4 ga teng ekan.

Agar $x=0$ desak

$\cos 0=1, \cos'(0)=0, \cos''(0)=-1, \cos'''(0)=0,...,\cos^{(2n)}(0)=(-1)^n, \cos^{(2n+1)}(0)=0\ \ (n=0,1,2,...)$

Endi buni (3) ga qo'ysak

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (5)$$

3) $f(x)=e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (6)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (7)$$

Bu (4)-(7) formulalarni $\sin x,\ \cos x,\ e^x$ funksiyalarni Teylor formulasiga yoyilmalaridan bevosita $n \to \infty$ da $R_n(x) \to 0$ deb to'g'ridan-to'g'ri yozib qo'yish ham mumkin:

1) $f(x)=\sin x$ bo'lsin.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n(x),\ (n=0,1,2,\ldots)$$

$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ desak (4) kelib chiqadi.

2) $f(x)=\cos x$ bo'lsin.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x),\ (n=0,1,2,\ldots)$$

Bu erda ham $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ desak (5) kelib chiqadi.

Misol. $\sin x$ ning $x=10^0$ dagi qiymatini hisoblang.

$x = 10^0 = \frac{\pi}{18} \approx 0,174533$ radianda

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 - \ldots \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 \approx 0,173647$$

5. Binomial qator.

$$f(x)=(1+x)^m \qquad (8)$$

funksiyani Makloren qatoriga yoyaylik. m noldan va barcha natural sonlardan farqli ixtiyoriy o'zgarmas haqiqiy son.

Agar m natural son bo'lsa, bizga ma'lum bo'lgan Nqyuton formulasi ya'ni chekli yoyilma hosil bo'ladi.

Bu erda (8) funksiyaning qoldiq hadini baholash ancha qiyinchilik tug'diradi.

SHuning uchun biz quyidagicha ish ko'ramiz.

(8) funksiya

$$(1+x)f'(x)=mf(x) \qquad (9)$$

differnsial tenglamani va

$$f(0)=1 \qquad (10)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiradi. Endi shunday bir darajali qator olaylikki u (9) va (10) ni qanotlantirib, yaqinlashuvchi bo'lsin va yig'indisi $S(x)$ bo'lsin, ya'ni

$$S(x)=1+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+... \qquad (11)$$

(10) ni (8) ga qo'ysak

$$(1+x)(a_1+2a_2x+...+na_nx^{n-1}+...)=m(1+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...)$$

$$a_1+(a_1+2a_2)x+(2a_2+3a_3)x^2+...+(na_n+(n+1)a_{n+1})x^n+...=$$

$$=m(1+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...)$$

Endi bir xil darajali x larning oldidagi koeffisientlarni tenglashtirsak:

$$\left.\begin{array}{l} a_1=m \\ a_1+2a_2=ma_1 \\ 2a_2+3a_3=ma_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ na_n+(n+1)a_{n+1}=ma_n \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a_1=m, a_2=\dfrac{m(m-1)}{2!}, a_3=\dfrac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n=\dfrac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Hosil qilingan (12) koeffisientlar binomial koeffisentlar deyiladi. (12) ni (11) ga qo'ysak.

$$S(x)=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}x^n+... \quad (13)$$

Biz bilamizki biror differensial tenglamaning echimi mavjud bo'lsa va u berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantirsa, bunday echim yagona bo'ladi. SHuning uchun (10) va (11) ni ham $(1+x)^m$ va $S(x)$ lar qanoatlantirgani uchun ular aynan teng bo'lishi kerak va

$$S(x)=(1+x)^m \Rightarrow (1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}x^n+... \quad (13)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. (13) ga binomial qator deyiladi.

Endi (13) ning yaqinlashish radiusini topaylik.

$$u_n=\frac{m(m-1)...(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1};\ u_{n+1}=\frac{m(m-1)...(m-b+1)}{n!}x^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n}{\frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n+1}{n}\right||x| < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow (-1,1)$$

Shunday qilib (13) faqat (-1,1) da o'rinli.

(13) dagi $\boldsymbol{m}$ ga har xil manfiy va kasr qiymatlar berib har xil funksiyalarning darajali qatorga yoyilmalarini hosil qilamiz.

$$\boldsymbol{m = -1} \text{ da } \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \qquad (14)$$

$$\boldsymbol{m = \frac{1}{2}} \text{ da } \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \ldots$$

Mustahkamlash uchun savollar.

1. Darajali qatorga misollar?
2. Darajali qator-funksional qatorning maxsus ko'rinishi.
3. Yaqinlashish radiusi.
4. Binomial qator.
5. Darajali qatorning taqribiy hisoblashlardagi tadbiqilari.
6. Darajali qatorlarning xadma-xad differensiallash, integrallash.

MAVZU: Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar haqida umumiy tushunchalar.ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi va uzilishi. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilasi va to'la differensiali

Tayanch ibora va tushunchalar

Ko'p o'zgaruvchili funksiya, ikki o'zgaruvchili funksiya, ikki o'zgaruvchili funksiya aniqlanish va o'zgarish sohalari, aniqlanish sohasi, o'zgarish sohasi, berilish usullari, geometrik tasviri, limiti, uzluksizligi va uzilishi. Xususiy orttirma, xususiy hosila, to'la differentsial, ikkinchi tartibli xususiy hosila, ikkinchi tartibli to'la differentsial, taqribiy hisoblash. Ekstremumga ega bo'lishining zaruriy va etarli shartlari, eng kichik va katta qiymatlar

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar haqida umumiy tushunchalar

Tabiat va jamiyatda juda ko'p masalalar borki o'zgaruvchi miqdorlar bog'lanishlarida bittasining sonli qiymati boshqa bir nechasining qiymati bilan aniqlanadi. Masalan, tomonlarining uzunliklari $x \; va \; y$ dan iborat bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuzi, uning tomonlarining uzunliklari o'zgarishi bilan o'zgarib boradi; parallelepipedning hajmi uning uchala o'lchovining o'zgarishi bilan o'zgaradi; biror yer maydonidan olinayotgan hosildorlik yerning tuzilishiga, unga o'g'it berishga, sug'orishga, dehqonning malakasiga va boshqa juda ko'p faktorlarga; sigirdan sog'ib olinayotgan sut miqdori, sigir zotiga, uning qanday em-xashak bilan bohilishiga va hakozolarga bog'liq. Bunday misollarni istalgancha keltirish mumkin.

Bunday bog'lanishlarni tekishirish uchun **ko'p o'zgaruvchili (argumentli) funksiyalar** tushunchasini kiritamiz va ularni tekshirish qurulma amallarini o'rganamiz.

1-ta'rif. R^2 fazoda biror D to'plamning bir-biriga bog'liq bo'lmagan $x \; va \; y$ o'zgaruvchilari har bir $x \; va \quad y$ haqiqiy sonlari juftligiga biror qoidaga ko'ra E to'plamdagi bitta z haqiqiy son mos bo'lgan bo'lsa, D to'plamda ***ikki*** $x \; va \; y$ ***o'zgaruvchilarning funksiyasi*** z ***aniqlangan*** deyiladi. Ikki o'zgaruvchining funksiyasi simvolik tarzda quyidagicha belgilanadi: $z = f(x,y)$, $z = F(x,y)$ (funksiya $x \;\; yoki \;\; y$ bilan o'zgaruvchilar mos ravishda $x,t \;\; yoki \;\; x_1, x_2$ lar bilan belgilangan bo'lsa $z = f(x,t) \; yoki \; z = F(x_1, x_2)$ tarzda ifodalanishi ham mumkin va h.k.). Bunda $x, \; y$ o'zgaruvchilarga erkli o'zgaruvchilar yoki argumentlar, z ga erksiz o'zgaruvchi yoki funksiya deb ataladi.

D to'plamga ***funksiyaning aniqlanish*** **sohasi**, E to'plamga o'zgarish yoki qiymatlar sohasi deyiladi. Har bir juft haqiqiy songa biror tayin koordinat sistemasida bitta M nuqta va bitta nuqtaga bir juft haqiqiy son mos kelganligi uchun ikki argumentli funksiyani M nuqtaning funksiyasi ham diyiladi, hamda $y = f(x_1, x_2)$ o'rniga $y = f(M)$ deb yozish mumkin.

<u>Ikki o'zgaruvchili funksiya berilish usullari:</u> bir o'zgaruvchili funksiyaga o'xshash har xil bo'lishi mumkin. Ko'proq funksiyaning ***<u>analitik usulda</u>*** berilishini qaraymiz.

Masalan. 1) $z = x_1^2 + x_2^2$ bu funksiya analitik usulda bo'lib, OX_1X_2 tekislikning hamma nuqtalari uchun aniqlangan. O'zgarish sohasi $[0,+\infty)$ dan iborat bo'ladi. 2) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ funksiya aniqlangan bo'lishi uchun

$4-x^2-y^2 \ge 0 \quad yoki \quad x^2+y^2 \le 4$ bo'lishi kerak, bunday nuqtalar to'plami markazi koordinatlar boshida radiusi2 ga teng bo'lgan doiradan iborat. Qiymatlar to'plami $[0,2)$ bo'ladi. 3) $u = 1\Big/\sqrt{x^2+y^2-9}$ funksiya $x^2+y^2-9>0$, ya'ni markazi koordinatlar boshida radiusi 3 ga teng bo'lgan doiradan tashqarida aniqlangan. Qiymatlar to'plami $(0,+\infty)$.

<u>Ikki argumentli funksiyaning geometrik tasviri</u> fazoda tenglamasi $z=f(x,y)$ bo'lgan sirtni ifodalaydi.

Masalan: 1) $z=2x+3y-12$ ikki argumentli funksiya fazoda $2x+3y-z-12=0$ tekislikni tasvirlaydi. 2) $x^2+y^2+z^2=R^2$ sfera tenglamasi bo'lib, $z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ ikki argumentli funksiyalar grafiklari sferani ifodalaydi.

2-ta'rif . D to'plamning har bir (x_1,x_2,x_3) haqiqiy sonlar uchligiga biror hoida bo'yicha E to'plamdagi bitta y haqiqiy son mos bo'lgan bo'lsa, D to'plamda uch o'zgaruvchining funksiyasi aniqlangan deyiladi.

Bunda x_1,x_2,x_3 erkli o'zgaruvchilar yoki argumentlar, y esa erksiz o'zgaruvchi yoki funksiya deb ataladi. Uch o'zgaruvchining funksiyasi $y=f(x_1,x_2,x_3),\quad u=f(x,y,z),\quad u=A(x,y,z)$ va h.k. belgilanadi.

Geometrik nuqtai nazardan to'g'ri burchakli koordinatlar sistemasida hahihiy sonlarning har bir (x,y,z) uchligiga fazoning yagona $P(x,y,z)$ nuqtasi mos keladi va aksincha. Shuning uchun uch o'zgaruvchining fuktsiyasini $P(x,y,z)$ nuqtaning funksiyasi sifatida harash mumkin. Shunday hilib, $u=f(x,y,z)$ o'rniga, $u=f(P)$ deb yozish ham mumkin. Uch o'zgaruvchili funksiya aniqlanish sohasi R^3 fazoning biror nuqtalar to'plami yoki butun fazo bo'lishi mumkin.

Masalan: $z=\sqrt{25-x^2-y^2-z^2}$ funksiya aniqlanish sohasi: $25-x^2-y^2-z^2 \ge 0$ yoki $x^2+y^2+z^2 \le 25$ shartda aniqlanganligi uchun $x^2+y^2+z^2=25$ sfera va uning ichida aniqlangan.

To’rt o’zgaruvchili va umuman n o’zgaruvchili funksiyaga ham yuhoridagidek ta'rif berish mumkin. Bunday funksiyalar mos ravishda

$y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ *yoki* $u = f(x, y, z, t)$, $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ bilan belgilanadi.

To’rt va undan ortih o’zgaruvchiga bog’liq funksiyalarning aniqlanish sohasini chizmalarda ko’rgazmali namoyish etish mumkin emas. Ammo, uni tasvirlash mumkin bo’lmasa y yo’h deyish mumkin emas. Masalan, to’rtinchi o’zgaruvchi fazodagi temperatura, beshinchisi zichlik va h.k bo’lishi mumkin. Lekin, geometrik atamalarni davom ettirib n o’zgaruvchining funksiyasini biror n o’lchovli fazo $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ nuqtasining funksiyasi sifatida harash mumkin.

2. Ikki va ko’p argumentli funksiya limiti. $y = f(x)$ funksiya uchun nuqtaning atrofi shu nuqtani o’z ichiga olgan oraliq bo’lar edi. Ikki argumentli $z = f(x, y)$ funksiya qaralganda nuqtaning δ atrofi deyilganda markazi $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada δ radiusli doiraning ichida yotuvchi barcha $P(x, y)$ nuqtalar tushuniladi.

Fazodagi nuqtaning δ atrofi ham shunga o’xshash aniqlanib markazi $P_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtada radiusi δ bo’lgan sharning ichki nuqtalari bo’ladi.

n o’lchovli $(n > 3)$ fazoda $P_0(x_1, x_2, ..., x_n)$ nuqtaning δ atrofi shunga o’xshash aniqlanadi.

1-ta'rif. Ikki o’zgaruvchili $z = f(x, y) = f(P)$ funksiya P_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo’lsa (P_0 nuqtada aniqlanmagan bo’lishi mumkin) va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topilsaki $\rho(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $P(x, y)$ nuqtalar uchun $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ *yoki* $|f(P) - A < \varepsilon|$ tengsizlik bajarilsa, A o’zgarmas son $z = f(x, y)$ funksiyaning $P \to P_0$ dagi limiti deyiladi, va

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \ yoki \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$ bilan belgilanadi.

Limitning ta'rifidan kelib chiqadiki, A son $z = f(x, y))$ funksiyaning limiti bo’lsa, $|f(x, y) - A|$ ayirma $x \to x_0$, $y \to y_0$ da cheksiz kichik miqdor bo’ladi. Uch va undan ortiq o’zgaruvchi funksiyasining limiti ham yuqoridagiga o’xshash aniqlanadi.

Bir necha o’zgaruvchili funksiyaning limiti 0 ga teng bo’lsa, bunday funksiyaga cheksiz kichik funksiya yoki cheksiz kichik miqdor deyiladi.

$y = f(x)$ funksiya uchun limitlar haqidagi barcha asosiy teoremalar bir necha o’zgaruvchining funksiyasi uchun ham o’rinli ekanligini ta'kidlab o’tamiz.

1-misol. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{y}$ limitni hisoblang.

Yechish. $P_0(2;0)$ nuqtada $\frac{\sin xy}{y}$ funksiya aniqlanmagan. Limitning xossalaridan

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} x\frac{\sin xy}{xy} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} x \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{xy} = 2\cdot 1 = 2 \text{ chunki } \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

3. Ikki va ko'p argumentli funksiyaning uzluksizligi va uzilishi.

1-ta'rif. $z = f(x,y) = f(P)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ no'qtada hamda uning biror atrofida aniqlangan va $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$ *yoki* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

bo'lsa, ya'ni funksiyaning $P_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi limiti funksiyaning shu nuqtadagi qiymatiga teng bo'lsa, ***funksiya*** $P_0(x_0, y_0)$ ***nuqtada uzluksiz*** deyiladi.

Bu ta'rifga teng kuchli 2-tarifni ham keltiramiz.

$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ funksiyaning $P_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi to'liq orttirmasi bo'lsin.

2-ta'rif. $z = f(x,y) = f(P)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada va uning atrofida aniqlangan bo'lsa, argumentlarning Δx *va* Δy cheksiz kichik orttirmalariga funksiyaning ham Δz cheksiz kichik orttirmasi mos kelsa, ya'ni

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$ bo'lsa, ***funksiya R0 (x0,y0) nuqtada uzluksiz*** deyiladi.

3-ta'rif. Uzluksizlik shartlari bajarilmagan nuqtalar ***uzilish nuqtalari*** deyiladi. Ikki o'zgaruvchili funksiya uzilish nuqtalari butun chiziqni hosil ?ilishi mumkin.

1-misol. $z = x^2 + y^2$ funksiyaning $P_0(2;3)$ nuqtada uzluksizligini ko'rsating.

Yechish: Bu nuqtada funksiyaning to'liq orttirmasini topamiz:

$$\Delta z = (2+\Delta x)^2 + (3+\Delta y)^2 - (2^2 + 3^2) = 2^2 + 2\Delta x + \Delta x^2 +$$
$$+ 3^2 + 6\Delta y + \Delta y^2 - 2^2 - 3^2 = 2\Delta x + \Delta x^2 + 6\Delta y + \Delta y^2$$

2-ta'rifga asosan $\lim \Delta z = \lim\left[2\Delta x + (\Delta x)^2 + 6\Delta y + \Delta y\right] = 2\cdot 0 + 0 + 6\cdot 0 = 0$. Shunday qilib,

$\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0\ \ da\quad \Delta z \to 0.$ Demak, $P_0\,(2;3)$ nuqtada berilgan funksiya uzluksizdir. Bu holatni istalgan $P_0\,(x_0\,;y_0)$ uchun ko'rsatish mumkin. (Bu o'quvchiga havola etiladi). $z = f(x,y)$ funksiya biror to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, unga bu to'plamda uzluksiz deyiladi.

2-misol. $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini toping.

Yechish. Funksiya koordinatalari $z^2 - y^2 = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarda uzilishga ega. Bu $y = x$ va $y = -x$ to'g'richiziqlar bo'lib, bu to'g'richiziqlarga tegishli har bir nuqtada funksiya uzilishga ega bo'ladi.

Ikki o'zgaruvchining uzluksiz funksiyasi ham bir o'zgaruvchining uzluksiz funksiyasi ega bo'lgan asosiy xossalarga ega bo'ladi. (Bu xossalarni Mustahkamlash o'quvchiga tavsiya etiladi).

4. 2-o'zgaruvchili funksiya xususiy va to'la orttirmalari.

1-ta'rif. $z = f(x,y)$ funksiyada x o'zgaruvchiga biror Δx orttirma berib, y ni o'zgarishsiz qoldirsak, funksiya $\Delta_x z$ orttirma olib, bu orttirmaga z funksiyaning x ***<u>o'zgaruvchi bo'yicha xususiy orttirmasi</u>*** deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x,y)\ .$$

Xuddi shunday, y o'zgaruvchiga Δy orttirma berib x o'zgarishsiz qolsa, unga z funksiyaning y o'zgaruvchi bo'yicha xususiy orttirmasi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x,y).$$

2-ta'rif. $x\ va\ y$ o'zgaruvchilar mos ravishda $\Delta x\ va\ \Delta y$ orttirmalar olsa, $z = f(x,y)$ funksiya $\Delta z = f(x - \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$ to'liq orttirma oladi.

5. 2-o'zgaruvchili funksiya xususiy hosilalari.

1-ta'rif. $a)$ $\lim \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ chekli limit mavjud bo'lsa, unga $z = f(x,y)$ funksiyaning <u>x</u> ***<u>o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi</u>*** deyiladi va $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ yoki $z'_x = f'_x(x,y)$ bilan belgilanadi.

b) $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$ chekli limit mavjud bo'lsa, unga $z = f(x, y)$ funksiyaning y o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi va $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ yoki $z'_y = f'_y(x, y)$ bilan belgilanadi.

Xususiy hosilalar ta'riflaridan ko'rinadiki bir argumentli funksiyani differentsiallashning hamma qoida va formulalari o'z kuchida qoladi.

Istalgan chekli sondagi o'zgaruvchilar funksiyasining xususiy hosilalari ham yuqoridagidek aniqlanadi.

1-misol. $z = x^2 + 2xy + 3y^2$ xususiy hosilalarni toping.

Yechish: Oldin y ni o'zgarmas deb z'_x ni topamiz:

$z'_x = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_x = (x^2)'_x + (2xy)'_x + (3y^2)'_x = 2x + 2y$, endi x ni o'zgarmas deb $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ni topamiz:

$$z'_y = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_y = (x^2)'_y + (2xy)'_y + (3y^2)'_y = 2x + 6y.$$

2-misol. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ funksiyaning xususiy hosilalarini toping.

Yechish: Hosila olish qoidalari va formulalaridan foydalanib quyidagilarni topamiz:

$$u'_x = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_x = \frac{x'_x(x^2 + y^2 + z^2) - x(x^2 + y^2 + z^2)'_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

(u'_y, u'_z larni mustaqil toping).

<u>6. To'la differensial</u>. Ma'lumki, x *va* y o'zgaruvchilar mos ravishda Δx *va* Δy orttirmalar olsa, $z = f(x, y)$ funksiya $\Delta z = f(x - \Delta x, y - \Delta y) - f(x, y)$ to'la orttirma oladi. Bu to'la orttirmaning Δx *va* Δy larga nisbatan chiziqli bo'lgan bosh qismi funksiyaning ***<u>to'la differensiali</u>*** deyiladi va dz bilan belgilanadi. $z = f(x, y)$ funksiyaning to'la differensiali

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \qquad (1)$$

formula bilan hisoblanadi, bu erda $dx = \Delta x,\ \ dy = \Delta y.$ To'la differentsialdan funksiyaning taqribiy qiymatlarini hisoblashda foydalanish mumkin, ya'ni $\Delta z \approx dz$ yoki $f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + z'_x dx + z'_y dy.$ bundan

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + z'_x dx + z'_y dy. \quad (2)$$

Uch argumentli $u = F(x, y, z)$ funksiyaning to'la differensiali

$$du = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz \quad (3)$$

formula bilan hisoblanadi.

1-misol. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ funksiyaning to'la differensialini toping.

Yechish: Xususiy hosilalarni topamiz;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(x^2yz^2\right)'_x = yz^2(x^2)'_x = 2xyz^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^2yz^2\right)'_y = x^2z^2(y)'_y = x^2z^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(x^2yz^2\right)'_z = yx^2(z^2)'_z = 2x^2yz.$$

(1)

formulaga asosan, $du = 2xyz^2dx + x^2z^2dy + 2x^2yzdz$ bo'ladi.

2-misol. $u = x^2yz^2$ funksiyaning to'la differensialini toping.

Yechish: Xususiy hosilalarni topamiz;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(x^2yz^2\right)'_x = yz^2(x^2)'_x = 2xyz^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^2yz^2\right)'_y = x^2z^2(y)'_y = x^2z^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(x^2yz^2\right)'_z = yx^2(z^2)'_z = 2x^2yz. \quad (3)$$

formulaga asosan, $du = 2xyz^2dx + x^2z^2dy + 2x^2yzdz$ bo'ladi.

3-misol. O'lchovlari $a = 8m,\ \ b = 6m,\ \ c = 3m$ bo'lgan parallelepipedning uzunligi va eni mos ravishda 10 sm va 5 sm ga ko'paytirilsa, balandligi esa 15 sm kamaysa uning hajmii qanday o'zgaradi.

Yechish. Parallelepipedning hajmii $v = xyz;\ \ x, y, z$ uning o'lchamlari. hajmi orttirmasini taqriban $\Delta V \approx dV$ formuladan hisoblash mumkin. $dV = yxdx + xzdy + xydz$ bo'lib, shartga ko'ra $x = 8,\ \ y = 6,\ \ z = 3,\ \ dx = 0.1,\ \ dy = 0.05,\ \ dz = -0.15$ bo'lganligi uchun $\Delta V \approx dV = 66 \cdot 3 \cdot 0.1 + 8 \cdot 3 \cdot 0.05 + 8 \cdot 6(-0.15) = -4{,}2.$

Shunday qilib, hajmi taxminan $4.2m^3$ ga kamayadi.

4-misol. To'la differentsial formulasidan foydalanib:

1) $arcctg\left(\frac{1,97}{1,02}-1\right)$, 2) $\sqrt{1,04^{1,99}+\ln 1,02}$ larni taqribiy hisoblang.

Yechish: To'la differentsial formulasidan taqribiy hisoblashda foydalanish uchun, oldin qiymati taqribiy hisoblanadigan funksiyaning analitik ifodasini tanlash zarur, keyin boshlang'ich nuqtani shunday tanlash kerakki funksiyaning va xususiy hosilalarning bu nuqtadagi qiymatlarini jadvalsiz hisoblash mumkin bo'lsin. Shundan keyin (2) formuladan foydalanish kerak.

1) $arcctg\left(\frac{1.97}{1.02}-1\right)$ ifoda $f(x,y)=arcctg(\frac{x}{y}-1)$ funksiyaning $P_1(1.97;1.02)$ nuqtadagi kiymati deyish mumkin. Boshlang'ich nuqta uchun $P_0=(2;1)$ ni olsak, $\Delta x=1.97-2=-0.03,\quad \Delta y=1.02-1=0.02$ bo'ladi. Endi xususiy hosilalarni topib, ularning P_0 nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f'_x(x,y)=\left[arcctg\left(\frac{x}{y}-1\right)'_x\right]=-\frac{\left(\frac{x}{y}-1\right)'_x}{1+\left(\frac{x}{y}-1\right)^2}=-\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{(x^2-y^2)}{y^2}}=-\frac{y}{y^2+(x-y)^2};$$

$$f'_y(x,y)=\left[arcctg\left(\frac{x}{y}-1\right)'_y\right]=-\frac{\left(\frac{x}{y}-1\right)'_y}{1+\left(\frac{x}{y}-1\right)^2}=-\frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{\left(y^2+(x^2-y^2)\right)}{y^2}}=\frac{x}{y^2+(x-y)^2};$$

(2)

$$f'_x(2;1)=-\frac{1}{1+(2-1)^2}=-0.5;\qquad f'_y(2;1)=\frac{2}{1+(2-1)^2}=1.$$

dan foydalansak, $arcctg\left(\frac{1.97}{1.02}-1\right)\approx arcctg\left(\frac{2}{1}-1\right)+(-0.5)(-0.03)+1\cdot 0.02=\frac{\pi}{4}+0.015+0.02=0.82$ bo'ladi.

2) $\sqrt{1,04^{1,99}+\ln 1,02}$ ni $f(x,y,z)=\sqrt{x^y+\ln z}$ funksiyaning $P_1(1.04;\,1.99;\,1.02)$

nuqtadagi qiymati deb qaraymiz: boshlang'ich nuqta uchun $P_0(1;\,2;\,1)$ ni tanlaymiz. Bu holda

$$\Delta x=1.04-1=0.04,\quad \Delta y=1.99-2=-0.01,\quad \Delta z=1.02-1=0.02.$$

Xususiy hosilalarni topamiz va ularning $P_0(1;\,2;\,1)$ nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz:

$$f_x'(x,y,z)=\frac{\left(x^y+\ln z\right)_x'}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{yx^{y-1}}{2\sqrt{x^y+\ln z}},\ f_x'(1;2;1)=\frac{2\cdot 1^{2-1}}{2\sqrt{1^2+\ln 1}}=1;$$

$$f_y'(x,y,z)=\frac{\left(x^y+\ln z\right)_y'}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{x^y.\ln x}{2\sqrt{x^y+\ln z}},\ f_y'(1;2;1)=\frac{1^2\cdot 0}{2\sqrt{1^2+\ln 1}}=0;$$

$$f_z'(x,y,z)=\frac{\left(x^y+\ln z\right)_z'}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y+\ln z}},\ \boldsymbol{f_z'(1;2;1)=\frac{1}{2}}.$$

(2) formulaning uch argumentli funksiya uchun umumlashganidan foydalanib,

$$\sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}\approx\sqrt{1^2+\ln 1}+1\cdot 0{,}04+0\cdot(-0{,}01)+\frac{1}{2}\cdot 0{,}02=1{,}05$$

natijani olamiz.

7. Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar.

1. $z=f(x,y)$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari deb birinchi tartibli xususiy hosilalardan olingan xususiy hosilalarga aytiladi. Ikkinchi tartibli xususiy hosilalar qo'yidagicha belgilanadi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z_{xx}''=f_{xx}''(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z_{xy}''=f_{xy}''(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z_{yx}''=f_{yx}''(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z_{yy}''=f_{yy}''(x,y);$$

$f_{xy}''(x,y)$ va $f_{yx}''(x,y)$ xususiy hosilalar aralash xususiy hosilalar deyiladi. Aralash xususiy hosilalar uzluksiz bo'lgan nuqtalarda ular o'zaro teng bo'ladi.

Uchinchi va undan yuqori tartibli xususiy hosilalar ham yuqoridagidek aniqlanadi.

Ushbu $\frac{\partial^n z}{\partial x^m\partial y^{n-m}}$ yozuv z funksiyani m marta x o'zgaruvchi bo'yicha va $(n-m)$ marta $z=x^4+4x^2y^3+7xy+1$ o'zgaruvchi bo'yicha differentsiallashni bildiradi.

1-misol. $z=x^4+4x^2y^3+7xy+1$ ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping.

Yechish. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^4+4x^2y^3+7xy+1\right)_x'=4x^3+8xy^3+7y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^4+4x^2y^3+7xy+1\right)_y'=4x^2.3y^2+7x=12x^2y^2+7x.$$

Topilgan hosilalardan yana xususiy hosilalar olamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{dx^2}=\left(4x^3+8xy^3+7y\right)_x'=12x^2+8y^3,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{dx\partial y}=\left(4x^3+8xy^3+7y\right)_y'=24xy^2+7,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{dy\partial x}=\left(12x^2y^2+7x\right)_x'=24xy^2+7,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{dy^2}=\left(12x^2y^2+7x\right)_y'=24x^2y$$

8. Ikki argumentli funksiya ekstremumi.

1-ta'rif. $z=f(x,y)$ funksiyaning $P_0(x_0;y_0)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofi istalgan $P(x,y)$ nuqtasidagi qiymatlaridan katta, ya'ni $f(x_0;y_0)>f(x,y)$ bo'lsa, $z=f(x,y)$ funksiya $P_0(x_0;y_0)$ nuqtada maksimumga ega deyiladi.

2-ta'rif. $z=f(x,y)$ funksiyaning $P_1(x_1;y_1)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofi istalgan $P(x,y)$ nuqtasidagi qiymatlaridan kichik bo'lsa, ya'ni $f(x_1;y_1)<f(x,y)$ bo'lsa, $z=f(x,y)$ funksiya $P_1(x_1;y_1)$ nuqtada minimumga ega deyiladi.

Funksiyaning maksimum yoki minimumi uning ekstremumi deyiladi. Funksiya ekstremumga ega bo'lgan nuqta uning ekstremum nuqtasi deyiladi. Funksiya ekstremumini xususiy hosilalar yordamida tekshiriladi.

Ekstremumning zaruriy shartlari: $P_0(x_0;y_0)$ nuqtada uzluksiz $z=f(x,y)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lsa, $\left.\begin{array}{l} f_x'(x_0,y_0)=0 \\ f_y'(x_0,y_0)=0 \end{array}\right\}$ bo'ladi, yoki bu nuqtada hosilalarning ?ech bo'lmaganda bittasi mavjud bo'lmaydi.

Bunday nuqtalarga ekstremum uchun kritik (statsionar) nuqtalar deyiladi. Shuni takidlaymizki hamma kritik nuqtalar ham ekstremum nuqtalar bo'lavermaydi. Kritik nuqtada ekstremum bo'lmasligi ham mumkin.

Ekstremumning etarli shartlari:

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarning kritik nuqtadagi qiymatlarini

$$A = f''_{xy}(x_0, y_0); B = f''_{xy}(x_0, y_0); C = f''_{yy}(x_0, y_0);$$ bilan

belgilaymiz va $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$ ni tuzamiz.

1. $\Delta = AC - B^2 > 0$ bo'lsa, $z = f(x, y)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada ekstremumga ega bo'lib: 1) A<0 bo'lganda $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada maksimumga,

2) A>0 bo'lganda minimumga ega bo'ladi.

2. $\Delta = AC - B^2 < 0$ bo'lsa, $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada ekstremum yo'q:

$\Delta = AC - B^2 = 0$ bo'lsa, ekstremum bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin.

1-misol. $z = f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ funksiya ekstremumini tekshiring.

Yechish. Bu funksiya butun $x0y$ tekislikda aniqlagan. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$f'_x = 4x^3 - 4x + 4y; \; f'_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

ekstremumga ega bo'lishning zaruriy shartidan:

$$\left.\begin{array}{l} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y = x - x^3 = x(1 - x^2) \\ y^3 + x - y = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} [x(1 - x^2)]^3 + x - x^{+x^3} = 0, \\ (1 - x^2)^3 = -1, 1 - x^2 = -1, x^2 = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x_1 = 0; x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = \sqrt{2} \\ y_1 = 0; y_2 = \sqrt{2}, y_3 = -\sqrt{2} \end{array}\right\}.$$

Demak, uchta O(0,0), $P_1\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ ва $P_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ va $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ kritik nuqtalarga ega bo'lamiz, boshqa kritik nuqtalar yo'q, chunki $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ xususiy hosilalar XOU tekislikning hamma nuqtalarida mavjud.

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$f''_{xx}(x,y)=12x^2-4;\ f''_{xy}(x,y)=4;\ f''_{yy}(x,y)=12y^2-4;$$

O(0,0) nuqtada ekstremumning etarli shartini tekshiramiz: $A=-4,\quad B=4,\quad C=-4$; $\Delta=AC-B^2$ =-4·(-4)-4²=0; bo'lib, yuqoridagi etarli shart javob bermaydi. Bu nuqta atrofida berilgan funksiya musbat ham, manfiy ham bo'lishini ko'ramiz, masalan Ox o'qi bo'yicha ($y=0$)

$f(x,y)_{y=0} = f(x,0)=x^4-2x^2=-x^2\left(2-x^2\right)<0.\quad y=x,,$ bissektrisa bo'yicha

$f(x,y)\big|_{y=x}= f(x,x)=2x^4$ >0 bo'ladi. Shunday qilib, O(0,0) biror atrofida $\Delta f(x,y)$ orttirma ishorasini bir xil saqlamaydi, demak ekstremum yo'q.

$P_1(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ nuqtada etarli shartni tekshiramiz:

$AC-B^2=$400-16>0 va A=20>0 demak $P_1(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ nuqtada funksiya minimumga ega. $f_{\min}$ =-8;

$P_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ nuqtada etarli shartni tekshiramiz: bu nuqta uchun A=20, B=4,C =20 bo'lib $\Delta=AC-B^2=$400-16>0 va A=20>0 bo'lganligi uchun $P_2(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ nuqtada ham berilgan funksiya minimumga ega bo'ladi, $f_{\min}$ =-8

2-misol. $z=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$ funksiyaning ekstremumini tekshiring.

Yechish.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x-1}{2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$$ $P_0(1;1)$ nuqtada xususiy hosilalar mavjud emas. Demak, $P_0(1;1)$ nuqta kritik nuqta bo'ladi. Bu nuqtada ekstremumni tekshirish uchun Δz orttirmaning P_0 nuqta atrofida ishorasini tekshiramiz:

$$\Delta z=\sqrt{(1+\Delta x-1)^2+(1+\Delta y-1)^2}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}>0,$$

bu ishora $P_0(1;1)$ nuqtaning istalgan atrofida saqlanadi ya'ni $P_0(1;1)$ nuqtada funksiya minimumga ega $z_{\min} = f(1;1)=0$;

9. Ikki o’zgaruvchili funksiyaning yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish.

Chegaralangan yopiq sohada differentsiallanuvchi funksiya o’zining ***eng katta va eng kichik qiymatiga*** yo sohada yotuvchi kritik nuqtada, yo bu sohachegarasida erishadi.

1-misol. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ funksiyaning $x \le 0, y \le 0, x + y \ge -3$ sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish. Soha AOB uchburchakdan iborat. Soha ichidagi kritik nuqtalarni topamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$ bundan $x = -1,\ y = -1$ bo’lib, P_0 (-1,-1) kritik nuqtaga ega bo’lamiz. Funksiyani soxa chegarasida tekshiramiz: A0 chegarada $y = 0$ bo’lib, $f(x)$ funksiya xosil bo’ladi. Bu funksiyaning ekstremumi:

$z'_x = 2x + 1 = 0$, $x = -\frac{1}{2} = -0{,}5$ bo’ladi.

Demak, P_1(-0,5, 0) AO chegaradagi kritik nuqta. Tenglamasi $x = 0$, BO chegarada $z = y^2 + y$ funksiya xosil bo’lib, $z'_y = 2y + 1 = 0$ y=-1/2.

Demak, $P_2\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ BO chegaradagi kritik nuqta bo’ladi. Tenglamasi $y = -3 - x$ bo’lgan AB chegarada $z = 3x^2 + 9x + 6$ funksiya hosil bo’lib $z'_x = 6x + 9 = 0$ $x = -\frac{3}{2}$. AB ning tenglamasidan $y = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$, demak, AB chegaradagi kritik nuqta $P_3\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ bo’ladi.

Berilgan funksiyaning P_0, P_1, P_2, P_3 kritik nuqtalardagi, hamda A, B, O nuqtalardagi qiymatlarni hisoblaymiz:

$$z_0 = f(P_0) = f(-1,-1) = -1\ ;$$

$$z_1 = f(P_1) = f\left(-\frac{1}{2},-0\right) = -\frac{1}{4} \ ;$$

$$z_2 = f(P_2) = f\left(0,-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \ ;$$

$$z_3 = f(P_3) = f\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} \ ;$$

$$z_4 = f(0) = f(0,0) = 0 \ ;$$

$$z_5 = f(A) = f(-3,0) = 6 \ ;$$

$$z_6 = f(B) = f(0,-3) = 6 .$$

Funksiyaning topilgan barcha qiymatlarini taqqoslab $z_{eng\,kat.} = f(A) = f(B) = 6 \quad va \quad z_{eng\,kich.} = f(P_0) = -1$ degan xulosaga kelamiz

Mustahkamlash uchun savollar

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ko’p argumentli funksiyalar nazariyasiga nimalar olib keladi?
2. Qanday funksiyalarga ikki argumentli funksiyalar deyiladi?
3. Uch argumentli funksiya deb nimaga aytiladi?
4. 2 va 3 argumentli funksiyalarning aniqlanish sohalari nima?
5. Ikki va undan ko’p o’zgaruvchili funksiyalar limiti deb nimaga aytiladi?
6. Nuqtaning atrofi tushunchasi nima?
7. Ikki va undan ko’p o’zgaruvchili funksiyalar limiti qanday xossalarga ega?
8. Ikki va ko’p argumentli funksiyalrning nuqtada uzluksizligini ta'riflang?
9. Ikki argumentli funksiya qanday nuqtalarda uzilishga ega deyiladi?
10. Qanday funksiyalar kesmada uzluksiz deyiladi?
11. Ikki argumentli funksiyaning ekstremumga ega bo’lishining zaruriy sharti nima?

12. Ikki argumentli funksiyaning ekstremumga ega bo'lishining etarli sharti nima?

13. Kritik nuqtalar qanday nuqtalar?

14. Ikki argumentli funksiyaning biror yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlari qanday topiladi?

15. Funksiyaning xususiy orttirmasi deb nimaga aytiladi?

16. Ikki argumentli funksiyaning xususiy hosilasi deb nimaga aytiladi?

17. Uch argumentli funksiyaning xususiy hosilalari nechta bo'ladi?

18. Ikki argumentli funksiyaning to'la differensiali deb nimaga aytiladi?

MAVZU:Ikki karrali integrallar

Tayanch ibora va tushunchalar

Ikki karrali integral, integral yig'indi, ichki integral, tashqi integral, silindrik jismning hajmii, statik momentlar, og'irlik markazi, inertsiya momentlari.

1. Ikki karrali integralning ta'rifi.

$f(x,y)$ funksiya biror D sohada aniqlangan bo'lsin. D sohani n ta D_i qismlarga bo'lamiz. har bir D_i qismda $P_i(x_i, y_i)$ bittadan nuqta tanlaymiz hamda

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \qquad (1)$$

yig'indini to'zamiz. (1) yig'indiga $f(x,y)$ funksiya uchun D sohadagi ***integral yig'indi*** deyiladi. λ qism sohalar diametrlarining eng kattasi bo'lsin. ΔS_i, D_i sohaning yuzi.

Ta'rif. (1) integral yig'indining, qismlarga bo'linish usuliga, P_i nuqtalarning tanlanishiga bog'liqbo'lmagan $\lambda \to 0$ dagi limiti mavjud bo'lsa, bu limitga $f(x,y)$ funksiyaning D sohadagi ***ikki karrali integrali*** deyiladi va

$\iint\limits_D f(x,y)ds$ simvol bilan belgilanadi.

Ikki karrali integral aniq integralning ikki o'zgaruvchili (argumentli) funksiya uchun umumlashgan holidir.

Ikki karrali integral ham aniq integralning asosiy xossalariga ega. Aniq integralning xossalarini Mustahkamlashni tavsiya etamiz.

2. Ikki karrali integralni hisoblash. Ikki karrali integralni hisoblash ikkita aniq integralni ketma-ket hisoblashga keltiriladi. D soha $y = y_1(x),\ y = y_2(x)$ funksiyalar grafklari hamda $x = a \quad va \quad x = b$ to'g'richiziqlar bilan chegaralangan bo'lsin, ya'ni

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$$

tengsizliklar bilan aniqlangan bo'lsa, ikki karrali integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right] dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

(1)

Oxirgi aniq integral ***ichki integral*** deb ataladi va uni hisoblashda x ni o'zgarmas deb, integrallash y bo'yicha olib boriladi. Ichki integralni hisoblash natijasi ***tashqi integral*** uchun integral osti funksiyasi bo'ladi.

D soha

$$\begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}$$

tengsizliklar bilan aniqlangan bo'lsa , ikki karrali integral

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_s^d \left[\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right] dy = \int\limits_s^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

formula yordamida ikkita aniq integralni hisoblashga keltiriladi.

1-misol. $\iint\limits_D x \ln y dxdy$ integralni D soha: $0 \le x \le 4$, $1 \le y \le e$ to'g'ri to'rtburchak bo'lganda hisoblang.

Yechish. (1) formulaga asosan,

$$\iint\limits_D x \ln y dxdy = \int\limits_0^4 xdx \int\limits_0^e \ln y dy = \int\limits_0^4 xdx [y \ln y - y]_1^e = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^4 = 8.$$

2-misol. $\iint\limits_D (x-y)dxdy$ integralni $D: y=2-x^2,\ \ y=2x-1,$ chiziqlar bilan chegaralangan soha bo’lganda hisoblang.

Yechish. Birinchi chiziq uchi (0,2) nuqtada OY o’qiga simmetrik bo’lgan parabola. Ikkinchisi chiziq to’g’richiziq. Bu chiziqlarning kesishish nuqtalarini topamiz:

$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

tenlamalar sistemasini echib, $A(-3;-7),\ B(1,1)$ nuqtalarni topamiz. (1) formulaga asosan,

$$\iint\limits_D (x,y)dxdy = \int\limits_{-3}^{1} dx \int\limits_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)dy =$$

$$= \int\limits_{-3}^{1} \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_{2x-1}^{2-x^2} dx = \int\limits_{-3}^{1} \left[x\cdot(2-x^2) - \frac{(2-x^2)^2}{2} - \left[x\cdot(2x-1) - \frac{(2x-1)^2}{2} \right] \right] dx =$$

$$= \int\limits_{-3}^{1} \left(2x - x^3 - \frac{4-4x^2+x^4}{2} - 2x^2 + x + \frac{4x^2-4x+1}{2} \right) dx =$$

$$\int\limits_{-3}^{1}$$

$$= \int\limits_{-3}^{1} \left(-\frac{1}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 + x - \frac{3}{2} \right) dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x \right]_{-3}^{1} = 4\frac{4}{15}$$ bo’ladi.

3. Ikki karrali integralning tadbiqlari.

1. $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ integralda $f(x,y)=1$ bo’lsa, $\iint\limits_D dxdy$ integral D figuraning yuzini ifodalaydi, ya'ni $S = \iint\limits_D dxdy$

1-misol. $x = 4y - y^2,\ \ x + y = 6$ chiziqlar bilan chegaralangan sohaning yuzini toping.

Yechish. Berilgan chiziqlarning kesisihsh nuqtalarini topamiz. $x = 4y - y^2,\ x = 6 - y \quad dan \quad 4y - y^2 = 6 - y, \quad y^2 - 5y + 6 = 0,$ $y_1 = 2,\ y_2 = 3;\ \ x_1 = 4,\ x = 3;\ A(4;2)\ va\ B(3;3)$

kesishish nuqtalari bo'ladi. Shunday qilib, yuza

$$S = \iint_D dxdy = \int_2^3 dy \int_{6-y}^{4y-y^2} dx = \int_2^3 x\Big|_{6-y}^{4y-y^2} dy = \int_2^3 \left(4y - y^2 - 6 + y\right)dy = \int_2^3 \left(5y - y^2 - 6\right)dy =$$

$$= \left(\frac{5}{2}y^2 - \frac{y^3}{3} - 6y\right)\Bigg|_2^3 = \frac{1}{6}\ \text{(kv. birlik)}$$

2. Yuqoridan $z = f(x,y)$ sirt, quyidan $z = 0$ tekislik, yon tomondan to'g'risilindrik sirt bilan hamda $x0y$ tekislikda D sohani hosil qiladigan ***<u>silindrik jismning xajmi</u>***

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy$$ integral bilan xisoblanadi.

2-misol. $y = 1 + x^2,\ \ z = 3x, y = 5, z = 0$ sirtlar bilan chegaralangan I oktantadagi jismning hajmiini hisoblang.

Yechish. hajmii hisoblanishi kerak bo'lgan jism yuqoridan $z = 3x$ tekislik, yondan $y = 1 + x^2$ parabolik silindr, $y = 5$ tekislik bilan chegaralangan. Shunday kilib

$$V = \iint_D 3xdxdy = 3\int_0^2 xdx \int_{1+x^2}^{5} dy = 3\int_0^2 x\left[5 - (1 + x^2)\right]dx = 3\int_0^2 \left(4x - x^3\right)dx = 3\left(4\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2$$

$$= 3\left(2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4}\right) = 24 - 12 = 12\ \textit{куб.бир.}$$

3. Plastinka har bir nuqtasidagi zichlik funksiyasi $\gamma(x,y)$ bo'lsa, uning massasi

$$m = \iint_D \gamma(x,y)dxdy$$ integral bilan hisoblanadi.

Plastinkaning $0x$ va oy o’qlarga nisbatan statik momentlari.

$M_x = \iint\limits_D y\gamma(x,y)dxdy$, $M_y = \iint\limits_D x\gamma(x,y)dxdy$ formulalar bilan hisoblanadi.

Plastinka birjinsli, ya'ni $\gamma = \cos nt$ bo’lganda uning og’irlik markazining koordinatalari

$\bar{x}_c = \frac{M_x}{S} = \frac{\iint xdxdy}{S}$ $\bar{y}_c = \frac{M_x}{S} = \frac{\iint\limits_D ydxdy}{S}$ formulalar yordamida topiladi, bu erda S , D sohaning yuzi.

Plastinkaning Ox va Ou o’qlariga nisbatan ***inertsiya momentlari***

$$J_x = \iint\limits_D y^2\gamma(x,y)dxdy\ ,\ J_y = \iint\limits_D x^2\gamma(x,y)dxdy$$

formulalar bilan, koordinatlar boshiga nisbatan inertsiya momenti

$$J_0 = \iint\limits_D (x^2+y^2)\gamma(x,y)dxdy = J_x + J_y$$

formula bilan aniqlanadi. Yuqoridagi formulalarda $\gamma(x,y)=1$ deb tekis figuralarning geometrik inertsiya momentlarini topish formulalarini olamiz.

3-misol. $y^2 = 4x+4,\ \ y^2 = -2x+4$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning og’irlik markazining koordinatlarini toping.

Yechish. Chiziqlar $0x$ o’qiga nisbatan simmetrik bo’lganligi uchun $\bar{y}_c = 0$ $\bar{x}_c$ ni topamiz:

$$S = \iint\limits_D dxdy = 2\int_0^2 dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} dy = 2\int_0^2 \left(\frac{4-y^2}{2} - \frac{y^2-4}{4}\right)dy = 2\int_0^2 \left(3 - \frac{3y^2}{4}\right)dy =$$

$$\bar{x}_c = \frac{1}{8}\iint\limits_L xdxdy = \frac{1}{8}2\int_0^2 dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} xdxdy = \frac{1}{8}\int_0^2 \left[\frac{(4-y^2)^2}{4} - \frac{(y^2-4)^2}{16}\right]dy =$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^2\left(\ 3-\frac{3}{2}y^2+\frac{3}{16}y^4\ \right)dy==\frac{1}{8}\left(3y-\frac{y^3}{2}+\frac{3y^5}{80}\right)_0^2=\frac{2}{5}\text{Demak}\,C(\frac{2}{5};0)\ \text{.Demak}$$

$C(\frac{2}{5};0)$.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikki karrali integralni hisoblashga qanday masalalar keltiriladi?
2. Integral yig'indi deb nimaga aytiladi?
3. Ikki karrali integralning ta'rifi nimadan iborat?
4. Ichki va tashqi integrallar qanday integrallar?
5. Ikki karrali integral qanday hisoblanadi?
6. Ikki karrali yordamida nimalarni hisoblash mumkin?

MAVZU:Differensial tenglamalar haqidagi asosiy tushunchalar.

Tayanch iboralar va tushunchalar

Oddiy **Differensial tenglama,** umumiy yechim, xususiy yechim, boshlang'ich shartlar, Koshi masalasi, o'zgaruvchilariga ajraladigan va bir jinsli tenglamalar.

1. Umumiy tushunchalar.

1-ta'rif. **Differensial tenglama** deb, erkli o'zgaruvchi x, izlanayotgan funksiya y va uning hosilalari (yoki differensiyalari)ni bog'lovchi tenglamaga aytiladi.

Differensial tenglamani simvolik ravishda quyidagicha yozish mumkin: **F(x,y,** y' **)=0** (1.1) bu yerda, F – o'z argumentlarining biror tayinlangan sohasida uzluksiz, x–erkli o'zgaruvchi, y–bog'liq o'zgaruvchi, ya'ni x o'zgaruvchining berilishi kerak bo'lgan funksiyasi, $y', y'', \ldots, y^n$ - uning hosilalari.

Agar izlanayotgan funksiya $y = y(x)$ bitta erkli o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsa, u holda differensial tenglama **oddiy differensial tenglama** deyiladi.

2-ta'rif. **Differensial tenglamaning tartibi** deb, tenglamaga kirgan hosila (yoki differensial) ning eng yuqori tartibiga aytiladi.

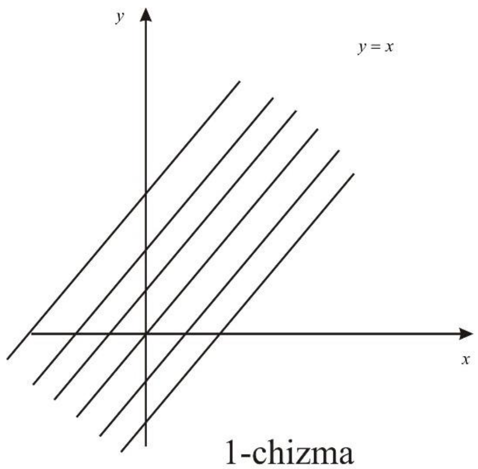
Masalan. $xdy - ydx = 0$ va $yy' = x$ tenglamalar birinchi tartibli, $y'' - 3y' = 0$ - ikkinchi tartibli, $3xy' - y''' = 0$ - uchinchi tartibli differensial tenglamadir.

3-ta'rif. Differensial tenglamaning yechimi (yoki integrali) deb, differensial tenglamaga qo'yganda uni ayniyatga aylantiradigan har qanday $y = f(x)$ funksiyaga aytiladi. Tenglamaning grafigi tenglamaning integral egri chizig'i deyiladi.

1-misol. $y' = 1$ (1.2) tenglamani yeching.

Yechish. (2) tenglamani $\frac{dy}{dx} = 1$ yoki dy=dx (1.3) ko'rinishda yozish mumkin.

(1.3) tenglamaning ikkala tomonini integrallasak, natijada $y = x + C$ (1.4) funksiyani hosil qilamiz, bu funksiya (1.2) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.



1-chizma

(1.4) tenglamaning geometrik ma'nosi, koordinata o'qiga nisbatan 450 burchak hosil qilib o'tuvchi to'g'ri chiziqlar oilasini tashkil etadi.

Bu misollardan ko'rinadiki, birinchi tartibli differensial tenglamalarda bitta o'zgarmas miqdor C ishtirok etayapdi.

C o'zgarmas miqdorga turli qiymatlar berib, differensial tenglamaning aniq yechimlarini hosil qilamiz. Masalan, $y - x = 1$, $y - x = 4$. Bularni xususiy yechimlar deyiladi. Umumiy holda $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ differensial tenglamani umumiy yechimi $y = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ (1.5) ko'rinishda bo'ladi.

Differensial tenglamaning tartibi qanday bo'lsa, shuncha ixtiyoriy o'zgarmasga ega bo'lgan yechimi bu tenglamaning umumiy yechimi deyiladi.

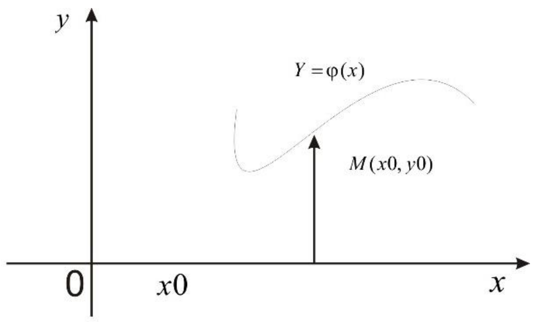
Umumiy yechimdagi o'zgarmaslarning turli son qiymatlarida hosil qilinadigan yechimlar, bu tenglamaning xususiy yechimi deyiladi.

Umumiy yechim geometrik nuqtai nazardan bitta C parametrga bog'liq bo'lgan integral egri chiziqlar oilasidan iborat. Xususiy yechim esa, bu oilaning egri chiziqlaridan biri bo'lib, u $M_0(x_0; y_0)$ nuqtadan o'tadi.

Differensial tenglamaning xususiy yechimini topish uchun boshlang’ich shartlar beriladi. Birinchi tartibli tenglama uchun ular $y(x_0)=y_0$ ko’rinishga, ikkinchi tartibli tenglama uchun $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y'_0$ ko’rinishga ega.

2-misol. (1.4) to’g’ri chiziqlar oilasida A(2;3) nuqta orqali o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasini toping.

Yechish: $y(2)=3$ (1.6)ga boshlang’ich shart deyilib, xususiy yechimni topamiz.



2-chizma

Bizga ma’lumki, (1.2) tenglamaning umumiy yechimi $y=x+C$ (1.4). Endi (1.6) shartdan foydalanib C ni topamiz. $3=2+C \Rightarrow C=1$

(1.6) shart (1.2) differensial tenglamaning boshlang’ich shartlari, (1.2) va (1.6) shartlarni topish masalasi, boshlang’ich masala yoki **Koshi** masalasi deyiladi. (1.2) va (1.6) Koshi masalalarini yechib, $y=x+1$ (1.7) ni, ya’ni A(2.3) nuqta orqali o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasini topdik. (1.7) yechim (1.2) tenglamaning xususiy yechimi deyiladi.

Umuman olganda quyidagi teorema o’rinli.

Teorema. Agar $y'=f(x,y)$ (1.8) birinchi tartibli tenglamada $f(x,y)$ funksiya va undan y bo’yicha olingan $\frac{\partial f}{\partial y}$ xususiy hosila xOy tekisligidagi (x_0, y_0) nuqtani o’z ichiga oluvchi biror sohada uzluksiz funksiyalar bo’lsa, u holda berilgan tenglamaning $x=x_0$ bo’lganda $y=y_0$ shartni qanoatlantiruvchi birgina $y=\varphi(x)$ yechimi mavjud.

Teoremaning geometrik ma’nosi $M_0(x_0, y_0)$ nuqta orqali o’tuvchi integral egri chiziqni topishdan iborat.

2. O’zgaruvchilari ajraladigan tenglama

Ushbu $f_1(x)\cdot\varphi_1(y)dx+f_2(x)\cdot\varphi_2(y)dy=0$ (2.1) ko’rinishdagi tenglama **o’zgaruv-chilari ajraladigan tenglama** deyiladi.

(1.1) tenglamaning ikkala hadini $\varphi_1(y)\cdot f_2(x)(\varphi_1(y)\cdot f_2(x)\neq 0)$ ko'paytmaga bo'lib, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=0$ tenglamani hosil qilamiz.

(1.1) tenglamaning umumiy integrali $\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=C$ dan iborat bo'ladi.

3-misol. $tgx\sin^2 ydx+ctgy\cdot\cos^2 xdy=0$ tenglamaning umumiy integrali topilsin.

Yechish. Berilgan tenglamaning har ikkala tomonini $\sin^2 y\cos^2 x(\sin^2 y\cos^2 x\neq 0)$ ko'paytmaga bo'lib, $\frac{tgx}{\cos^2 x}dx+\frac{ctgy}{\sin^2 y}dy=0$ ni topamiz. Bu ifodani integrallab, $\int\frac{tgx}{\cos^2 x}dx+\int\frac{ctgy}{\sin^2 y}dy=C$ yoki $tg^2x-ctg^2y=C$ izlanayotgan umumiy intagralni topamiz.

3. Bir jinsli tenglama

1-ta'rif. Agar λ ning har qanday qiymatida $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$ ayniyat to'g'ri bo'lsa, $f(x,y)$ funksiya x va y o'zgaruvchilarga nisbatan n-o'lchovli **bir jinsli funksiya** deb ataladi.

4-misol. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ funksiya bir o'lchovli bir jinsli funksiya, chunki $f(\lambda x,\lambda y)=\sqrt{\lambda^2x^2+\lambda^2y^2}=\lambda\sqrt{x^2+y^2}=\lambda f(x,y)$

5-misol. $f(x,y)=xy-x^2$ funksiya ikki o'lchovli bir jinsli funksiya, chunki $f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)(\lambda y)-(\lambda x)^2=\lambda^2(xy-x^2)=\lambda^2 f(x,y)$

2-ta'rif. Agar birinchi tartibli $y'=f(x,y)$ (1.1) tenglamada $f(x,y)$ funksiya x va y nisbatan nol o'lchovli bir jinsli funksiya bo'lsa, (3.1) tenglama x va y o'zgaruvchilarga nisbatan bir jinsli tenglama deyiladi.

***Bir jinsli tenglamani yechish*.** Funksiya bir jinsli bo'lishining shartiga ko'ra $f(\lambda x,\lambda y)-f(x,y)$. Bu ayniyatda $\lambda=\frac{1}{x}$ deb olsak, $f(x,y)=f(1,\frac{y}{x})$

Bu holda (3.1) tenglama $y' = f(1, \frac{y}{x})$ (3.2) ko’rinishni oladi. (3.2) tenglama $U = \frac{y}{x}$ yoki $y = \mu x$ almashtirish yordamida $\mu(x)$ noma’lum funksiyaga nisbatan o’zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keladi.

6-misol. Ushbu $xy' = y \ln \frac{y}{x}$ tenglamaning umumiy integrali topilsin.

Yechish. Tenglamani $\frac{dy}{dx}$ hosilaga nisbatan yechamiz: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$

Shunday qilib (3.2) ko’rinishdagi tenglamani, ya’ni bir jinsli tenglamani hosil qildik.

Endi $y = Ux$ deb o’zgaruvchini almashtiramiz. U holda $\frac{dy}{dx} = U + x\frac{dU}{dx}$ va tenglama $U + x\frac{dU}{dx} = U \ln U$ yoki $x\frac{dU}{dx} = U(\ln U - 1)$ ko’rinishga keladi. Bu o’zgaruvchilari ajraladigan tenglama, shuning uchun $\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$. Integrallab $\ln|u| = Cx + 1$ ni yoki $u = e^{Cx+1}$ ni hosil qilamiz. u ning o’rniga $\frac{y}{x}$ ni qo’yib, $y = x * e^{Cx+1}$ izlangan umumiy integralni topamiz.

Mustahkamlash uchun savollar.

1. Differensial tenglama deb nimaga aytiladi?

2. Differensial tenglamaning umumiy va xususiy yechimining farqini tushuntiring?

3. Boshlang’ich shartlar deganda nimani tushunasiz?

3. Bir jinsli tenglama tarifini va uni yechish usullarini ayting.

MAVZU: Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama.

Bernulli tenglamasi. To'liq differensial tenglama

Tayanch ibora va tushunchalar

Birinchi tartibli chiziqli teglama, Bernulli teglamasi, to'liq differensial teglama, integrallovchi ko'paytuvchi.

1. Birinchi tartibli chiziqli tenglama

Agar differensial tenglama izlanayotgan y funksiya va uning hosilasi $\frac{dy}{dx}$ ga nisbatan chiziqli (ya`ni birinchi darajali) bo`lsa bunday tenglama **chiziqli tenglama** deyiladi. Birinchi tartibli chiziqli tenglama $y^1 + P(x)y = Q(x)$ (4.1) ko`rinishga ega.

Birinchi tartibli chiziqli tenglamani quyidagi usullarning biri bilan yechishimiz mumkin:

1-usul. O`zgarmasni variatsiyalash usuli.

Bunda (1.1) tenglamaning yechimini $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ (1.2) ko`rinishda izlaymiz. U vaqtda (1.1) tenglama C(x) noma`lum funksiyaga nisbatan o`zgaruvchilarga ajraladigan tenglamani hosil qilamiz: $C^1(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$

Uning umumiy yechimi: $C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$ bunda C – ixtiyoriy o`zgarmas.

Topilgan C(x) ifodaga (1.2) ni qo`ysak, (1.1) ning umumiy yechimini topamiz: $y = e^{-\int P(x)dx}(C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx)$ (1.3)

2-usul. O`rniga qo`yish usuli.

(1.1) chiziqli differensial tenglamaning yechimi $y = u(x)\cdot v(x)$ (1.4) Bernulli almashtirilishi bilan o`zgaruvchilari ajraladigan ikkita tenglamaga keltiriladi. U holda $\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dx} + u\frac{dv}{dx}$ va (1.1) tenglama ushbu ko`rinishga keladi. $v\frac{dv}{dx} + u\left[\frac{dv}{dx} + P(x)\cdot v\right] = Q(x)$ (4.5)

Yordamchi o`zgaruvchilardan biri, masalan, v ixtiyoriy tanlab olinganidan foydalanib, uni shunday tanlaymizki, natijada qavs ichidagi ifoda nolga teng bo`lsin, ya`ni v sifatida o`zgaruvchilari ajraladigan $\frac{dv}{dx} + P(x)\cdot v = 0$ tenglamaning xususiy yechimlaridan biri $v = v(x)dx$ ni olamiz. $v = v(x)$ ifodani (1.5) tenglamaga qo`yib, u funksiyaga nisbatan tenglama hosil qilamiz: $v\frac{dv}{dx} = Q(x)$ Bu tenglama ham o`zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo`lib, uning umumiy yechimi $u = u(x,c)$ni topib, (1.1) tenglamaning umumiy yechimi $y = u(x,c)\cdot v(x)$ ni hosil qilamiz.

1-misol. $(1+x^2)y^1 - 2xy = (1+x^2)^2$ differensial tenglamaning umumiy integrali topilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani $y^1 - \frac{2x}{1+x^2}y = 1+x^2$ ko`rinishga keltiramiz.

1-usul. O`zgarmasni variatsiyalash usuli.

Bizning misolda $P(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$; $Q(x) = 1+x^2$

Shu sababli $y = l^{2\int\frac{xdx}{1+x^2}}(C + \int(1+x^2)e^{-2\int\frac{xdx}{1+x^2}}dx) = (1+x^2)(C+x)$ Demak, umumiy yechim $y = (1+x^2)(C+x)$

2-usul. O`rniga qo`yish usuli. $y = u\cdot v$ deylik, u holda $\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dx} + u\frac{dv}{dx}$ va berilgan tenglama

$v(\frac{dv}{dx} - \frac{2ux}{1+x^2}) + (u\frac{dv}{dx} - (1+x^2)) = 0$ (1.6) ko`rinishga ega bo`ladi. $\frac{du}{dx} - \frac{2ux}{1+x^2} = 0$ tenglamani yechib, uning eng sodda xususiy yechimini hosil qilamiz: $u = C(1+x^2)$ (1.6) tenglamaga u ni qiymatini qo`yib, ushbu tenglamani hosil qilamiz: $C(1+x^2)\frac{dv}{dx} = 1+x^2$; Bu tenglamadan v ni topamiz. $v = \frac{x}{C} + C_1$

Shunday qilib, izlanayotgan umumiy yechim quyidagicha bo`ladi: $y=(C+x)(1+x^2)$

2. Bernulli tenglamasi.

$y^1+P(x)y=Q(x)y^n$ (2.1) , bunda P(x) va Q(x) –x ning uzluksiz funksiyalari (yoki o`zgarmas miqdorlar) hamda n≠0 va n≠1 (aks holda chiziqli tenglama hosil bo'lar edi).

(2.1) tenglamaga Bernulli tenglamasi deyiladi va quydagi almashtirish yordamida chiziqli tenglamaga keltiriladi.

Tenglamaning barcha hadlarini y^n ga bo'lamiz. $y^{-n}\frac{dy}{dx}+P \quad y^{-n+1}=Q$ (2.2)

Endi, $z=y^{-n+1}$ (2.3) almashtirishni bajaramiz.U holda $\frac{dz}{dx}=(-n+1)y^{-n} \quad \frac{dy}{dx}$

Bu qiymatlarni (2.2) tenglamaga qo`ysak, chiziqli tenglama hosil bo'ladi: $\frac{dz}{dx}+(-n+1)Pz=(-n+1)Q$

Buning umumiy integralini topib hamda (2.3) almashtirishni e`tiborga olib, Bernulli tenglamasining umumiy integrali (yechimini) topamiz.

8-misol. Differensial tenglamani yeching.

$y^1+4xy=2xe^{-x^2}\sqrt{y}$

Yechish. Bu misolda $n=\frac{1}{2}$ Berilgan differensial tenglamaning ikkala qismini $\sqrt{y}$ ga bo`lsak: $\frac{y^1}{\sqrt{y}}+4xy^{-\frac{1}{2}}=2xe^{-x^2}$ Endi $\sqrt{y}=z$ almashtirish olib, $z^1=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y^1$ ekanligini topamiz.Bu topilgan qiymatlarni e`tiborga olib $z^1+2xz=xe^{-x^2}$ chiziqli tenglama hosil qilamiz.Bu tenglamaning yechimi $z=e^{-x^2}(C+\frac{x^2}{2})$

Bundan berilgan Bernulli tenglamaning umumiy yechimi $y=e^{-x^2}(C+\frac{x^2}{2})^2$ ni topamiz.

3. To`liq differensial tenglama

Ta’rif. Agar M(x;y)dx+N(x;y)dy=0 (3.1) tenglama uchun $\frac{\partial м}{\partial y}=\frac{\partial n}{\partial x}$ (3.2) shart bajarilsa, uni to`liq differensial tenglama deb ataymiz.

Agar (3.2) shart bajarilsa, (3.1) ning chap tomoni qandaydir U(x;y) funksiyaning dU(x;y) to`liq differensialidan iborat bo`ladi, ya’ni (3.1) tenglama dU(x;y)=0 ko`rinishni oladi. Buni integrallab, uning umumiy yechimi U(x;y)=C ni topamiz.

Agar (3.1) ning chap tomoni U(x;y) funksiyaning to`liq differensiali bo`lsa, u holda $\frac{\partial u}{dx}=M(x;y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x;y)$ bo`lishi kerak. Birinchi tenglamadan $U=\int_{x_0}^{x}M(x;y)dx+\varphi(y)$ ni topamiz. $\varphi(y)$ ni topish uchun oxirgi tenglamani y bo`yicha differensiallaymiz: $\frac{\partial u}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial м}{\partial y}dx+\varphi^1(y)=N(x;y)$ (3.2) shartni inobatga olsak, u holda $\int_{x_0}^{x}\frac{\partial n}{\partial x}dx+\varphi^1(y)=N$, $N(x;y)\int_{x_0}^{x}+\varphi^1(y)=N(x;y)$ Bundan $\varphi^1(y)=N(x_0;y)$ yoki $\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}N(x_0;y)dy+C_1$ Demak, U(x;y) funksiya quyidagi ko`rinishda bo`lar ekan: $U=\int_{x_0}^{x}M(x;y)dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0;y)dy+C_1$

9-misol. $(2x+y)dx+(x+2y)dy=0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $M(x;y)=2x+y$ **,** $N(x;;y)=x+2y$

$\frac{\partial м}{\partial y}=1$ **,** $\frac{\partial n}{\partial x}=1$**.** Demak, (3.2) shart bajarilyapti,shuning uchun bu to`liq differensial tenglamadir.

1-usul. $\frac{\partial u}{\partial x}=M(x;y)=2x+y\Rightarrow U(x;y)=\int(2x+y)dx+\varphi(y)=x^2+yx+\varphi(y)(*)$;

$\frac{\partial u}{\partial y}=x+\varphi^1(y)$ (A); $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x;y)=x+2y$ 3(B).

(A) va (B) tengliklardan : $x+\varphi^1(y)=x+2y\Rightarrow\varphi(y)=y^2+C(**)$ $C_1=0$ deb,(*) va (**) tengliklardan: $x^2+yx+y^2=C$.

2-usul. Umumiy yechimi U(x;y)=C ni topish uchun quyidagi formuladan foydalanamiz : $U(x;y)=\int Mdx+\int\left\{N-\frac{\partial}{\partial y}\int Mdx\right\}dy=C$; Bunda

$$\varphi(y)=\int\left\{N-\frac{\partial}{\partial y}\int Mdx\right\}dy .$$

$$U(x;y)=\int(2x+y)dx+\int\left\{x+2y-\frac{\partial}{\partial y}\int(2x+y)dx\right\}dy=x^2+yx+\int\left\{x+2y-\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+yx\right)\right\}dy=$$

$$=x^2+yx+\int(x+2y-x)dy=x^2+yx+y^2=C \quad \text{yoki} \quad x^2+yx+y^2=C .$$

4. Integrallovchi ko`paytuvchi

(3.1) tenglamaning chap tomoni biror funksiyaning to`la differensiali ya`ni (3.2) shart bajarilmasin. Biroq bu tenglamani tegishli $\mu(x,y)$ funksiyaga ko`paytirish bilan uni to`liq differensiallardagi tenglamaga keltirish mumkin. Bunday funksiya berilgan differensial tenglama uchun integrallovchi ko`paytuvchi nomi bilan yuritiladi. Har qanday differensial tenglama uchun ham integrallovchi ko`paytuvchi mavjud, biroq bu uni topish oson degan so`z emas.

Ushbu $\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy=0$ tenglama to`liq differensial tenglama bo`lishi uchun $\frac{\partial(\mu M)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$ yoki $N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial X}\right)$ (1.1) shart bajarilishi kerak. (1.1) tenglik (3.1) tenglamaning integrallovchi ko`paytuvchilarining differensial tenglamasidir, chunki uning har bir yechimi tenglamaning ikkala tomoniga ko’paytirilganidan so’ng uni to’liq differensiallardagi tenglamaga keltiriladi. $\mu(x,y)$ ni topish uchun xususiy hosilali differensial tenglamani integrallash kerak. Agar μ faqat birgina x yoki y o’zgaruvchiga bog’liq bo’lsa, masala ancha soddalashadi. Biz faqat ana shu ikki xususiy holni qaraymiz.

Masalan, tenglamaning integrallovchi ko’paytuvchisi faqat x ga bog’liq bo’lsin, ya’ni $\mu=\mu(x)$ bo’lsin. U holda (7.1) tenglama ushbu ko’rinishni egallaydi:

$N\frac{d\mu(x)}{dx}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ yoki $\frac{d\mu(x)}{\mu(x)}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx,$ bu yerdan $\ln\mu(x)=\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx+C$, ya’ni $\mu(x)=e^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx}$ (ixtiyori y C o’zgarmas nolga teng deb olingan, chunki qandaydir bitta integrallovchi ko’paytuvchiga ega bo’lsak kifoya).

Shunga o’xshash μ faqat y ga bo’g’liq bo’lsa integrallovchi ko’paytuvchi $\mu(y)=e^{-\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}dy}$ bu yerda C=0.

10-misol. Differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

$\left(x^2 - y^2\right)y' = 2xy.$

Yechish. $2xydx + \left(y^2 - x^2\right)dy = 0$ (*)

$$M(x,y) = 2xy, \quad N(x,y) = y^2 - x^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x$$

Demak, $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$

(*) differensial tenglamani to'liq differensial tenglamaga keltirish uchun integral ko'paytuvchini aniqlaymiz. shart bajarilishi uchun integral ko'paytuvchi faqat y o'zgaruvchiga bog'liq bo'ladi. $\varphi(y) = \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \dfrac{4x}{-2xy} = -\dfrac{2}{y}$

Shuning uchun $\mu(y) = e^{\int \varphi(y)dy} = e^{-2\int \frac{dy}{y}} = \dfrac{1}{y^2}$ (*) differensial tenglamani integral ko'paytuvchi $\mu(y) = \dfrac{1}{y^2}$ ga ko'paytirib to'liq differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{2x}{y}dx + \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{2x}{y}$; $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 1 - \dfrac{x^2}{y^2}$ (A) $\quad U(x,y) = \int \dfrac{2x}{y}dx = \dfrac{x^2}{y} + \varphi(y).$ Bundan:

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{x^2}{y^2} + \varphi'(y)$ (B)

(A) va (B) tengliklardan: $-\dfrac{x^2}{y^2} + \varphi'(y) = 1 - \dfrac{x^2}{y^2} \Rightarrow \varphi'(y) = 1$ yoki $\varphi(y) = y$.

Demak, $U(x,y) = \dfrac{x^2}{y} + y$, $U(x,y) = C$ bo'lgani uchun $\dfrac{x^2}{y} + y = C$. Bu berilgan(*) tenglamaning umumiy yechimi .

Mustahkamlash uchun savollar.

1. Birinchi tartibli chiziqli tenglama ta`rifini ayting?

2. Birinchi tartibli chiziqli tenglamani qanday aniqlaymiz?

3. Bernylli tenglamasining umumiy yechimi qanday topiladi?

4.To’liq differensial tenglamani qanday aniqlaymiz?

MAVZU: Yuqori tartibli differensial tenglamalar

Tayanch ibora va tushunchalar

Oshkor va oshkormas shakilda berilgan differensial teglamalar differensial tenglamaning umumiy va xususiy yechimlari, boshlang’ich shartlar, tartibini pasaytirish mumkin bo’lgan tenglamalar.

1. Umumiy tushunchalar.

Birinchi tartibdan yuqori tartibga ega bo’lgan barcha differensial tenglamalar yuqori tartibli differensial tenglamalar deyiladi.

n – tartibli tenglama $y^{(n)}$ hosiladan tashqari quyi tartibli hosilalarga ham ega bo’lishi mumkin, shuning uchun bunday tenglamaning umumiy ko’rinishi simvolik ravishda $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$ (1.1) ko’rinishda, yoki, agar mumkin bo’lsa, yuqori hosilaga nisbatan yechilgan ko’rinishda: $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ...y^{(n-1)}\right)$ (1.2) bo’ladi.

Birinchi tartibli tenglamalar uchun bo’lgani kabi, bu yerda ham umumiy yechim ixtiyoriy o’zgarmaslarga bog’liq bo’ladi.Shu sababli umumiy yechimdan xususiy yechimni ajratib olish uchun ixtiyoriy o’zgarmaslarni aniqlashga imkon beradigan ba’zi qo’shimcha shartlar ham berilgan bo’lishi kerak. Birinchi tartibli tenglama uchun bunday qo’shimcha shart $y(x_0) = y_0$ qiymatning, ya’ni inregral egri chiziq o’tadigan nuqta koordinatalarining berilishi edi. Yuqori tartibli tenglamalar uchun bu shartlarni turli usullar bilan berish mumukin. Masalan, quyida ko’rsatilishicha, ikkinchi tartibli tenglama uchun umumiy yechim ikkita ixtiyoriy o’zgarmasga bog’liq bo’ladi. Ularni topish uchun ikkita shartga ega bo’lish kerak. Bu shartlarni izlanayotgan funksiyaning ikkita nuqtadagi qiymatini yoki izlanayotgan funksiyaning va uning birinchi hosilasining bitta nuqtadagi qiymatlarini berish bilan hosil qilish mumkin.

Ikkinchi usul mexanika masalalarini hal etishda keltirilib chiqariladigan differensial tenglamalarni yechishda keng qo’llaniladi. Haqiqatan ham, agar mexanika terminlaridan foydalanadigan bo’lsak,so’z harakat qonuni to’g’risida ketayotgan bo'ladi, shu bilan birga nuqtaning boshlang'ich holati (funksiya qiymati) va uning boshlang'ich tezligi (birinchi hosila) berilgan bo'ladi. Shuning uchun xususiy yechimini umumiy yechimdan funksiyaning biror nuqtadagi berilgan qiymati va uning birinchi hosilasi bo'yicha topish boshlang'ich shartlari berilgan masala deyiladi.

Tartibi n bo'lgan tenglamalar uchun boshlang'ich shartlar sifatida izlanayotgan funksiyaning va uning (n-1) - tartibgacha barcha hosilalarining birorta nuqtada qiymatlari, ya'ni $x = x_0$ da $y = y_0, y' = y_0', y'' = y''_0, \ldots\ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ (1.3) sonlar sistemasi bo'shlang'ich shartlar sistemasi deyiladi.

Berilgan (1.2) differensial tenglamaning (1.3) boshlang'ich shartlar sistemasini qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topish **Koshi** masalasi deyiladi.Koshi birinchi bo'lib yechimning mavjudligi va yagonaligi to'g'risida teoremani isbotladi, uni quyidagicha ta'riflash mumkin.

Teorema. (1.2) differensial tenglama va (1.3) boshlang'ich shartlar sistemasi berilgan bo'lsin. Agar $f\left(x, y, y', \ldots . y^{(n-1)}\right)$ funksiya boshlang'ich shartlar atrofida uzluksiz va $y, y^1, \ldots . . y^{(n-1)}$ argumentlar bo'yicha uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsa, u holda x_0 ni o'z ichiga olgan intervalda aniqlangan va uzluksiz hamda berilgan boshlang'ich shartlar sistemasini qanoatlantiruvchi yechim mavjud bo'lib, u yagona bo'ladi.

Bu teoremaning isbotiga to'xtalib o'tirmaymiz.

Materiallar qarshiligi kursida ko'pincha izlanayotgan funksiyaning bir nechta nuqtadagi qiymatlari ma'lum bo'lganda xususiy yechimni topish zarurati tug'iladi. Ana shunday va yanada umumiyroq masalalar differensial tenglamalar qo'llanishini talab etiladigan boshqa sohalarda ham uchraydi. Bu masalalarning ko'pchiligida xususiy yechimlarni chegaraviy shartlar deb ataladigan boshqa turdagi shartlardan izlashga to'g'ri keladi. Bunday masalalar, boshlang'ich shartlari berilgan masalaga nisbatan ancha murakkabdir. Biz boshlang'ich shartli masalalar bilangina chegaralanamiz.

Ta'rif. (1.2) differensial tenglamaning umumiy yechimi deb, ixtiyoriy o'zgarmaslarga ega bo'lgan yechimga aytiladi, bu o'zgarmaslarni boshlang'ich shartlarning istalgan yo'l qo'yiladigan (Koshi teoremasining shartlarini qanoatlantiruvchi sistema) sistemasini qanoatlantiradigan qilib tanlab olish mumkin.

Agar yechimning boshlang'ich shartlarga ham bog'liqligini e'tiborga olsak, uni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin: $y = \varphi\left(x, y_0, y'_0, \ldots . y_0^{(n-1)}\right)$ (1.4)

Boshlang'ich shartlar sistemasi ixtiyoriy tanlab olinishi mumkin bo'lgani uchun (1.4) ifodadan n-tartibli tenglamaning umumiy yechimi n ta ixtiyoriy o'zgarmasga bog'liq ekanligi ko'rinadi.

2. Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan differensial tenglamalar

1. $y^{(n)} = f(x)$ ko'rinishdagi tenglama

Tartibini pasaytirishga imkon beradigan n-tartibli tenglamalarning eng sodda turi $y^{(n)} = f(x)$ (2.1) ko'rinishdagi tenglamadir. Bu tenglamaning umumiy integralini topish uchun uning o'ng va chap tomonidan x bo'yicha n marta integrallaymiz: $y = \int dx \int dx.....\int f(x)dx + P_{n-1}(x)$ (2.2), $P_{n-1}(x) = C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + ... + C_{n-1}x + C_n$ bo'lib, $C_1, C_2,....., C_n$ o'zgarmas sonlar.

1-misol. $y'' = \cos 2x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y' = \int \cos 2x dx + C_1 = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1$

$$y = \int\left(\frac{1}{2}\sin 2x + C_1\right)dx + C_{.2} = \frac{-1}{4}\cos 2x + C_1x + C_2$$

Bu (2.1) turdagi tenglamalarning soddaligiga qaramay, u muhim rol o'ynaydi, chunki boshqa ko'rinishdagi tenglamalar, shuningdek, materiallar qarshiligiga doir bir qator masalalarni yechishda hosil bo'ladigan ba'zi tenglamalar bu turdagi tenglamalarga keltiriladi.

2. $F\left(x, y^{(k)},.....y^{(n)}\right) = 0$ ko'rinishdagi tenglama

Izlanayotgan funksiya oshkor holda ishtirok etmagan va (k-1)-tartibgacha (y ham kiradi) quyi tartibdagi hosilalar ishtirok etmagan $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)},....y^{(n)}\right) = 0$ (2.3) differensial tenglamaning tartibini k birlikga pasaytirish mumkin.

Haqiqatan ham, yangi izlanayotgan funksiya uchun $P = y^{(k)}$ (2.4) deb almashtirish olsak, (2.3) differensial tenglama $F\left(x, p, p',....., p^{(n-k)}\right) = 0$ (2.5) ko'rinishga keladi.

Bu tenglamani integrallab va yangi izlanayotgan P funksiyani aniqlab, y funksiyani topish mumkin.

Bunda (2.4) tenglikni P funksiyasi ma'lum bo'lgan k- tartibli yangi $P(x) = \varphi(X, C_1, C_2,....., C_{n-k})$ (2.6) differensial tenglama sifatida qaraladi.

2-misol. $x^2y''' = y''^2$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y''=P, y'''=\frac{dp}{dx}$ almashtirish olsak, berilgan tenglama $x\frac{2dp}{dx}=P^2{}_x$ ko'rinishga keladi. Bu tenglama o'zgaruvchilarga ajraladigan tenglama: $P=\frac{C_1x}{x+C_1}=C_1-\frac{C_1{}^2}{x+C_1}\Rightarrow y''=C_1-\frac{C_1{}^2}{x+C_1}\Rightarrow y'=C_1x-C_1{}^2\ln\left|x+C_1\right|+C_2\Rightarrow$

$$y=C_1\cdot\frac{x^2}{2}-C^2{}_1\left(x\ln(x+C_1)-\int\frac{xdx}{x+C_1}\right)+C_2x+C_3=C_1\cdot\frac{x^2}{2}-C^2{}_1(x+C_1)\cdot\ln(x+C_1)+C_2x+C_3$$

Javob: $2y=C_1x^2-2C^2{}_1(x+C_1)\ln\left|x+C_1\right|+C_2x+C_3$

Bu turdagi tenglamalarning xususiy holi izlanayotgan funksiya oshkor ishtirok etmagan 2- tartibli $F(x,y^1,y'')=0$ (2.7) ko'rinishdagi tenglamadir.

(2.7) tenglamani yechish uchun $y^1=P, y''=\frac{dp}{dx}$ (2.5) almashtirish bajariladi.

3-misol. $(1+x)y''=y'$ tenglamaning $y(0)=1, y'(0)=2$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechish. (2.8) almashtirishlarni bajarsak, berilgan tenglama: $(1+x)\frac{dp}{dx}=P$ yoki $\frac{dp}{P}=\frac{dx}{x+1}$ o'zgaruvchilarga ajralgan 1- tartibli differensial tenglamaga keladi. Buning yechimi $\ln|P|=\ln|x+1|+\ln C_1$ yoki $P=C_1(x+1)$, bundan $y'=C_1(x+1)$ yoki $y=C_1x+C_1\cdot\frac{x^2}{2}+C_2$ berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

Berilgan boshlang'ich shartlarga asosan $C_1=2, C_2=1$ ni o'rniga qo'ysak, $y=x^2+2x+1$ xususiy yechim hosil bo'ladi.

3. $F(y,y',y'',.....,y^{(n)})=0$ ko'rinishdagi tenglama

Tartibini pasaytirishga imkon beradigan tenglamalarning yana bir turi-erkli o'zgaruvchi oshkor ishtirok etmagan $F(y,y',y'',......,y^{(n)})=0$ (2.9) ko'rinishdagi tenglamadir. Bu yerda ikkala o'zgaruvchini almashtirish orqali tenglama tartibi bir birlikga pasaytiriladi.Yangi izlanayotgan funksiya sifatida $y'=P, y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=P\frac{dp}{dy},\ \ y'''=P^2\frac{d^2p}{dy^2}+P\cdot\left(\frac{dp}{dy}\right)^2,.....,y^{(n)}=\frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}$ (2.10) lar orqali ifodalashni to'liq induksiya usuli yordamida ko'rsatish mumkin, demak, (2.9) tenglama (2.10) almashtirishlar orqali $F_1\left(y,p,\frac{dp}{dy},......,\frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right)=0$ (2.11) ko'rinishga, ya'ni (n-1)-tartibli tenglamaga keltiriladi.

4-misol. $y'\cdot y'''-3y''^2=0$ tenglamaning umumiy integralini toping.

Yechish. (2.10) almashtirishlardan foydalansak, berilgan tenglamamizning ko’rinishi

$$P\left(P\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\cdot\frac{d^2p}{dy^2} - 3p^2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = 0 \Rightarrow (p=0, y=c\right) \quad \text{yoki} \quad \Rightarrow P\frac{d^2p}{dy^2} - 2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = 0.$$

Bunda $\frac{dp}{dy} = z, \frac{d^2p}{dy^2} = z\frac{dz}{dp}$ almashtirishni olsak: $Pz\frac{dz}{dp} - 2z^2 = 0 \Rightarrow (z = \frac{dp}{dy} = 0$, ya’ni $P = C_1$ va $y = C_1x + C_2) \Rightarrow \frac{dz}{z} - \frac{2dp}{p} = 0 \Rightarrow \ln|z| - \ln p^2 = \ln|C_1|$ yoki $z = \frac{dp}{dy} = C_1p^2 \Rightarrow -\frac{1}{p} = C_1y + C_2$ yoki $-\frac{dx}{dy} = C_1y + C_2 \Rightarrow x = C_1y^2 + C_2y + C_2$, bunda $C_1 = -\frac{C_1}{2}$, $C_2 = -C_2$.

(2.9) tenglamaning xususiy holi erkli o’zgaruvchi oshkor ishtirok etmagan $F(y, y', y'',) = 0$ (2.12) ko’rinishdagi tenglamadir.

(2.12) tenglamaning umumiy yechimini ham (2.10) almashtirish yordamida topiladi.

5-misol. $5y\cdot y'' - (y')^2 = 0$ tenglamaning umumiy integrali topilsin.

Yechish. (2.10) almashtirishdan foydalansak, berilgan tenglama $5y\cdot P\cdot\frac{dp}{dy} - P^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{5}\cdot\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p}$ o’zgaruvchiga ajralgan tenglamani hosil qildik. Bu tenglikning ikkala tomonini integrallab, $P = C_1y^{\frac{1}{5}} \Rightarrow y' = C_1y^{\frac{1}{5}} \Rightarrow y = (C_1x + C_2)^{5/4}$ umumiy yechimini topamiz.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Yuqori tartibli differensial teglamaning ta`rifini va tenglamalarni ayting?
2. Differensial teglamaning umumiy yechimi bilan xususiy yechimi orasidagi farq?
3. Tartibini pasaytirish deganda nimani tushunasiz?
4. Tartibini pasaytirish mumkin bo’lgan tenglama turlarini ayting?

MAVZU: O'zgarmas koeffitsientli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar.

Tayanch ibora va tushunchalar

Ikkinchi tartibli bir jinsli o'zgarmas koeffitsientli chiziqli tenglama, Vronskiy determenanti, xarakteristik tenglama.

1. 2-tartibli chiziqli tenglamalarga doir asosiy tushunchalar

1-ta'rif. Agar 2-tartibli differensial tenglama noma'lum funksiya y va uning hosilasi y', y'' ga nisbatan birinchi daralali bo'lsa, bunday tenglama chiziqli differensial tenglama deyiladi va u $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y = f(x)$ (3.1) ko'rinishda yoziladi. Bunda $a_1(x)$ va $a_2(x)$ lar x ning funksiyalari yoki o'zgarmas sonlar.

Agar (3.1) da $f(x)\neq 0$ bo'lsa, bir jinsli bo'lmagan yoki o'ng tomonli chiziqli tenglama, $f(x)=0$ bo'lsa, bir jinsli yoki o'ng tomoni bo'lmagan chiziqli tenglama deyiladi.

Ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglamalarning ba'zi xossalarini isbotsiz eslatib o'tamiz.

1- teorema. Agar y_1 va y_2 ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli $y''+a_1y'+a_2y=0$ (3.2) tenglamaning ikkita xususiy yechimi bo'lsa, u holda y_1+y_2 ham shu tenglamaning yechimi bo'ladi.

2- teorema. Agar y (3.2) tenglamaning yechimi bo'lsa, u holda Cy ham shu tenglamaning yechimi bo'ladi.

2- ta'rif. Agar $[a,b]$ kesmada (3.2) tenglamaning ikkita y_1 va y_2 yechimlarining nisbati o'zgarmas miqdorga teng bo'lmasa, ya'ni $\frac{y_1}{y_2}\neq const$ bo'lsa, y_1 va y_2 yechimlar $[a,b]$ kesmada chiziqli bog'liq bo'lmagan erkli yechimlar deyiladi.

Agar $[a,b]$ kesmada shunday o'zgarmas λ son mavjud bo'lib, $\frac{y_1}{y_2}=\lambda$ bo'lsa, y_1 va y_2 yechim chiziqli bog'liq yechim deyiladi.

Masalan, $y''+y=0$ tenglama uchun $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $y=2e^x$, $y=4e^{-x}$ funksiyalar yechimlari bo'ladi. Bunda e^x va e^{-x} funksiyalar har qanday kesmada ham chiziqli bog'liq emas, chunki $\frac{e^x}{e^{-x}}=e^{2x}\neq const$ bo'lib, o'zgaruvchi miqdordir.

Lekin, e^x va $2e^x$ funksiyalar chiziqli bog'liq, chunki $\frac{2e^x}{e^x}=2=const$.

3-ta'rif. Agar y_1 va y_2 lar x argumentning funksiyasi bo'lsa, u holda $W(y_1,y_2)=|y_1 y_2|=y_1 y'_2-y_1' y_2$ (3.3) determinant Vronskiy determinanti yoki berilgan funksiyaning Vronskiysi deyiladi.

3- teorema. Agar y_1 va y_2 funksiyalar $[a,b]$ kesmada chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda bu kesmada Vronskiy determinanti aynan nolga teng bo'ladi.

4- teorema. Agar (3.2) tenglamaning y_1 va y_2 yechimlari $[a,b]$ kesmada chiziqli erkli bo'lsa, bu yechimlardan tuzilgan Vronskiy determinanti kesmaning hech bir nuqtasida nolga aylanmaydi.

5-teorema. Agar y_1 va y_2 (3.2) tenglamaning ikkita chiziqli erkli yechimi bo'lsa, u holda $y=C_1y_1+C_2y_2$ (3.4) tenglik (3.2) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi. Bunda C_1 va C_2 o'zgarmas sonlar.

2. O'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar

Ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli $y''+Py'+qy=0$ (2.1) tenglama berilgan bo'lsin, bu yerda P va q o'zgarmas haqiqiy sonlar.

(2.1) tenglamaning umumiy yechimini topish uchun, ikkita xususiy yechimini topish kifoya.

Xususiy yechimlarni $y=e^{kx}$, $(k=const)$ (2.2) ko'rinishda izlaymiz, u holda $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$ (2.3).

(2.2) va (2.3) larni (2.1) tenglamaga qo'ysak, $e^{kx}\left(k^2+kp+q\right)=0$ yoki $e^{kx}\neq 0$, $k^2+kp+q=0$ (2.4) xarakteristik tenglamani hosil qilamiz.

Uning ildizlari $k_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ va $k_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ bo'lib, ular quyidagicha bo'ladi

T/n	Xarakteristik tenglama-ning ildizi	Xususiy yechim	Umumiy yechim (integral)
1	k_1 va k_2 haqiqiy va teng bo'lmagan ($k_1 \neq k_2$) hol	$y_1=e^{k_1x}$, $y_2=e^{k_2x}$ bo'lib, $\frac{y_2}{y_1}=e^{(k_2-k_1)x}\neq const$	$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$
2	k_1 va k_2 haqiqiy va teng $(k_1=k_2)$ bo'lgan hol	$y_1=e^{kx}$, $y_2=xe^{kx}$ bo'lib, $\frac{y_2}{y_1}=x\neq const$	$y=(C_1+XC_2)e^{kx}$
3	k_1 va k_2 kompleks sonlar $k_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ bo'lgan hol	$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ bo'lib, $\frac{y_1}{y_2}=ctg\beta x\neq const$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

6-misol. $y''-3y'+2y=0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$k^2-3k+2=0$ bo'lib, uning ildizlari $k_1=1$, $k_2=2$. U holda xususiy yechimlar $y_1=e^x$, $y_2=e^{2x}$ bo'lib, $\frac{y_2}{y_1}=e^{-x}\neq const$ bo'lgani uchun, umumiy integral (yechim): $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$.

7-misol. $y''-4y'+3y=0$ tenglamaning $y(0)=6$, $y'(0)=10$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi topilsin.

Yechish. Tenglamaning xarakteristik tenglamasi $k^2-4k+3=0$ bo'lib, uning ildizlari $k_1=3$, $k_2=1$. Shuning uchun xususiy yechimlar $y_1=e^{3x}$, $y_2=e^x$ va $\frac{y_2}{y_1}e^{-2x}\neq const$ bo'lgani uchun umumiy yechim $y=c_1e^{3x}+c_2e^x$ (*).

Tenglamaning berilgan boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topish uchun (*) dan birinchi tartibli hosila olamiz. $y'=3C_1e^{3x}+C_2e^x$ (**).

(*) va (**) larga boshlang'ich shartlarni qo'yib, C_1 va C_2 o'zgarmaslarga nisbatan $\begin{cases} C_1 + C_2 = 6 \\ 3C_1 + C_2 = 10 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemani yechib, $C_1 = 2$, $C_2 = 4$ ni topamiz.

U holda berilgan differensial tenglamaning izlanayotgan yechimi: $y = 2e^{2x} + 4e^x$.

8-misol. $y''+2y'+5y = 0$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish. Xarakteristik tenglama $k^2 + 2k + 5 = 0$ bo'lib, ildizlari $k_1 = -1 + 2i$, $k_2 = -1 - 2i$.

Shuning uchun $y_1 = e^{-x}\cos 2x$, $y_2 = e^{-x}\sin 2x$ va $i\,\dfrac{y_2}{y_1} = tg\,2x \neq const$ bo'lgani uchun $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x)$ berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

9-misol. $y''+2y'+2y = 0$ tenglamaning $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi topilsin.

Yechish. Berilgan o'zgarmas koeffitsientli 2-tartibli differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi $k^2 + 2k + 2 = 0$ bo'lib, $k_{1,2} = -1 \pm i$ ildizlarga ega. Shuning uchun $y_1 = e^{-x}\cos x$ va $y_2 = e^{-x}\sin x$. U holda tenglamaning umumiy yechimi $y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$. Tenglamaning xususiy yechimlarini topish uchun y dan birinchi tartibli hosila olamiz va boshlang'ich shartlardan foydalanib C_1, C_2 o'zgarmaslarga nisbatan $\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 - C_1 = 1 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Sistemani yechib $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ ni aniqlaymiz.

Topilgan C_1 va C_2 larning qiymatlarini tenglamaning umumiy yechimiga qo'yib, uning berilgan boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi $y = e^{-x}(\cos x + 2\sin x)$ xususiy yechimini hosil qilamiz.

10-misol. $y''+4y'+4y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $k^2 + 4k + 4 = 0$ xarakteristik tenglamaning ildizlari $k_1 = k_2 = 2$ bo'lib, haqiqiy va karrali bo'lgani uchun umumiy yechim $y = (C_1 + xC_2)e^{2x}$.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Chiziqli teglama deb nimaga aytiladi?
2. O'zgarmas koeffitsientli 2-tartibli bir jinsli chiziqli tenglamaning ko'rinishini yozing?

3. O’zgarmas koeffitsientli 2-tartibli bir jinsli chiziqli tenglamaning xususiy yechimi qanday ko’rinishda izlanadi?

4. Xarakteristik tenglama ildizlari necha xil bulanadi va qanday topiladi?

MAVZU:O’zgarmas koeffitsientli 2-tartibli bir jinsli bo’lmagan chiziqli differensial tenglamalar

Tayanch ibora va tushunchalar

O’zgarmas koeffitsientli 2-tartibli bir jinsli bo’lmagan tenglama, xarakteristik tenglama yechimlari, xususiy yechimlari, xarakteristik teglamaning yechimi bo’lgan va bo’lmagan hollar.

Agar p va q haqiqiy sonlar, $f(x)\neq 0$ bo’lsa, u holda $y''+py'+qy=f(x)$ (5.1) tenglama o’zgarmas koeffitsientli 2-tartibli bir jinsli bo’lmagan chiziqli tenglama deyiladi.

(5.1) ko’rinishdagi tenglamani yechishda quyidagi teorema asosiy o’rin tutadi.

Teorema. Bir jinsli bo’lmagan (5.1) tenglamaning umumiy yechimi y, bu tenglamaning xususiy yechimi y^* bilan mos bir jinsli $y''+py'+qy=0$ (4.1) tenglamaning ŷ umumiy yechimi yig’indisiga teng, ya’ni $y=y^*+\hat{y}$ (5.2).

Biz (4.1) tenglamaning umumiy yechimini topish bilan 4-§. da tanishdik, shuning uchun (5.1) tenglamaning xususiy yechimini topish usullari 2-jadvalda bayon etilgan:

№	Differensial tenglamaning o’ng tomonining ko’rinishi	Xarakteristik tenglamaning ildizlari	Xusnusiy yechimning ko’rinishi
1	$f(x)=P_m(x)$, bunda $P_m(x)$ - darajasi m bo’lgan ko’p had	a) α soni xarakteristik tenglamaning ildizi bo’lmagan hol	$Q_m(x)_1$ bunda, $Q_m(x)$ - darajasi m dan katta bo’lmagan ko’phad
		b) α soni xarakteristik tenglamaning l karrali ildizi	$x^e Q_m(x)$

2	$f(x)=e^{\alpha x}\,.\,P_m(x)$, bunda $\alpha-$ haqiqiy son	a) α soni xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lmagan hol	$Q_m(x)e^{\alpha x}$
		b) α soni xarakteristik tenglamaning e karrali ildizi	$x^e Q_m(x)e^{\alpha x}$
3	$f(x)=P_m(x)\cos\beta x+Q_m(x)\cdot\sin\beta x$, bunda $P_m(x)$ va $Q_m(x)$ darajasi m dan katta bo'lmagan ko'phadlar	a) β i son xarakteristik tenglamaning ildizi emas	$U_m(x)\cos\beta x+V_m(x)\cdot\sin\beta x$ bunda $U_m(x)$ va $V_m(x)-$ darajasi m dan katta bo'lmagan ko'phad
		b) β i son xarakteristik tenglamaning e karrali ildizi	$x^e[U_m(x)\cos\beta x+V_m(x)\sin\beta x$
4	$f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$	a) $\alpha+i\beta$ son xarakteristik tenglama- ning ildizi bo'lmasin	$e^{\alpha x}[U_m(x)\cos\beta x+V_m(x)\sin\beta x$
		b) $\alpha+i\beta$ son xarakteristik tenglamaning e karrali ildizi	$x^e e^{\alpha x}[U_m(x)\cos\beta x+V_m(x)\sin$
5	$f(x)=M\cos\beta x+N\sin\beta x$	a) iβ son xarakteristik tenglamaning ildizi emas	$A\cos\beta x+B\sin\beta x$
		b)iβ son xarakteristik tenglamaning ildizi	$x(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$

25-misol. $y''+4y'+3y=x$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Avval $y''+4y'+3y=0$ tenglamaning umumiy yechimini topamiz.Uning xarakteristik tenglamasi $k^2+4k+3=0$ bo'lib, uning ildizlari $k_1=-1, k_2=-3$ va umumiy yechimi $\tilde{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$ bo'ladi.

Berilgan bir jinsli bo'lmagan tenglamaning o'ng tomoni 2-jadvaldagi 1-holning a) ko'rinishida ya'ni A_0x+A_1 ko'rinishda izlaymiz. Bu ifodaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini olib, berilgan tenglamaga qo'ysak: $4A_0+3(A_0x+A_1)=x$ hosil bo'ladi. Bir xil darajali x lar oldidagi koeffitsientlarni tenglab, $\begin{cases}3A_0=1\\4A_0+3A_1=0\end{cases}$ tenglamalar sistemasidan, noma'lum bo'lgan $A_0=\frac{1}{3}$, $A_1=-\frac{4}{9}$ koeffitsientlarni topamiz. U holda berilgan tenglamaning xususiy yechimi: $y^*=\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}$ bo'lib, umumiy yechimi: $y=\tilde{y}+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+\frac{x}{3}-\frac{4}{9}$.

26-misol. $y''+4y'+3y=(8x^2+84x)e^x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y''+4y'+3y=0$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz.Xarakteristik tenglamasi $k^2+4k+3=0$ ning ildizlari $k_1=-3, k_2=-1$ bo'lib, umumiy yechimi $\tilde{y}=C_1e^{-3x}+C_2e^{-x}$.

Berilgan bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimini topish uchun uning xususiy yechimini topish lozim.

Bizning misolda $f(x)=(8x^2+84x)e^x$ bo'lgani uchun 2-jadvaldagi 2-holning a) ko'rinishida bo'lgani uchun xususiy yechim $y^*=(Ax^2+Bx+C)\cdot e^x$ shaklda izlanadi, bu yerda A,B,C noma'lum koeffitsientlarni aniqlash kerak.Ularni topish uchun y^* berilgan tenglamaning ildizi bo'lishi kerakligidan foydalanib, $y^{*'}$, $y^{*''}$ larni topamiz.Topilgan bu qiymatlarni berilgan tenglamaga qo'yib: $(Ax^2+4Ax+Bx+2A+2B+C)e^x+4(Ax^2+2Ax+Bx+B+C)e^x+(3Ax^2+3Bx+3C)e^x=(8x^2+84x)e^x$ tenglikni hosil qilamiz.

Hosil qilingan tenglikning har ikkala tomonini e^x ga qishartirib va x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarini o'zaro tenglashtirish natijasida A,B,C koeffitsientlarni topish uchun quyidagi sistemani hosil qilamiz: $\begin{cases}8A=8\\12A+8B=84\\2A+6B+8C=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=9\\C=-7\end{cases}$ larni topib, quyidagi $y^*=(x^2+9x-7)e^x$ xususiy yechimga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, berilgan tenglamaning umumiy yechimi: $y=\tilde{y}+y^*=C_1e^{-3x}+C_2e^{*}+(x^2+9x-7)e^x$.

27-misol. $y''+2y^1+5y=2\cos x$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish. Avval $y''+2y'+5y=0$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz. Uning xarakteristik tenglamasi $k^2+2k+5y=0$ ko'rinishda bo'lib, $k_1=-1+2i$, $k_2=-1-2i$ ildizlarga ega. Shuning uchun uning umumiy yechimi ỹ $=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^{-x}$.

Berilgan tenglamaning xususiy yechimini topishda 2-jadvaldagi 5-holning

a) ko'rinishidan foydalansak, bunda $\beta=1$ ekanligini e'tiborga olsak $y^*=A\cos x+B\sin x$ ko'rinishda bo'ladi. Bunda A va B noma'lum bo'lgan o'zgarmas koeffitsientlar. Bu noma'lum koeffitsientlarni topish uchun $y^*, y^{*^1}, y^{*''}$ larning qiymatlarini berilgan tenglamaga qo'ysak:

$-A\cos x-B\sin x-2A\sin x+2B\cos x+5A\cos x+5B\sin x=2\cos x$ tenglikni hosil qilamiz. Bir xil trigonometrik funksiyalar oldidagi koeffitsientlarni tenglab, A va B larni aniqlash uchun quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases}-A+2B+5A=2\\-B-2A+5B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{2}{5}\\B=\frac{1}{5}\end{cases}$$

U holda berilgan tenglamaning xususiy yechimi

$y^*=\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x$, umumiy yechim:

$$y=y+y^*=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^{-x}+\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x.$$

2. O'zgarmas koeffitsientli bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglama xususiy yechimini topishning ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlarni variatsiyalash usuli

Bir jinslimas tenglama xususiy yechimini topishning umumiy usuli ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlarni variatsiyalash usulini ko'rsatamiz.

Agar berilgan tenglama 2-tartibli: $y''+py'+qy=f(x)$ (2.1) ko'rinishda bo'lsa, bir jinsli $y''+py'+qy=0$ (2.1) tenglamaning umumiy yechimi $y=C_1y_1+C_2y_2$ (2.1) ko'rinishda bo'ladi.

(2.1) dagi C_1 va C_2 ni x ning hozircha noma'lum funksiyalari deb hisoblab, (2.1) tenglamaning xususiy yechimini (2.1) ko'rinishda izlaymiz.

(2.1) ni differensiallab: $y'=C_1y'_1+C_2y'_2+C'_1y_1+C'_2y_2$ ni hosil qilamiz.

C_1 va C_2 funksiyalarni $C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0$ (2.2) tenglik bajariladigan qilib tanlab olamiz.

Agar bu qo'shimcha shartni e'tiborga olsak, u holda y' hosila: $y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2$ ko'rinishda bo'ladi. Endi bu ifodadan y'' ni topamiz: $y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_2' y_2' + C_2' y_2''$.

y, y', y'' larni(2.1)tenglamaga qo'yib,
$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' + P(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) = f(x)$ yoki
$C_1(y_1'' + p y_1' + q y_1) + C_2(y_2'' + p y_2' + q y_2) + C_1' y_2' + C_2' y_2' = f(x)$ tenglikni hosil qilamiz.

Birinchi ikkita qavs ichida turgan ifodalar nolga aylanadi, chunki y_1 va y_2 bir jinsli tenglamalarning yechimlari.

Demak, keyingi tenglik $C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x)$ (2.3) ko'rinishga keladi.

Shunday qilib, C_1 va C_2 funksiyalar (2.2) va (2.3) tenglamalar sistemasini qanoatlantirsa, ya'ni $\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$ (2.4) bo'lsa, (2.1) funksiya (2.1) tenglamaning yechimi bo'ladi. Ammo bu sistemaning determinanti chiziqli erkli y_1 va y_2 funksiyalarning Vronskiy determinanti bo'lgani uchun nolga teng bo'lmaydi. Demak, sistemani yechib, C_1' va C_2' ni x ning ma'lum funksiyalari sifatida aniqlaymiz: $C_1' = \varphi_1(x), C_2' = \varphi_2(x)$.

Integrallab, $C_1 = \int \varphi_1(x)dx + \overline{C_1}$, $C_2 = \int \varphi_2(x)dx + \overline{C_2}$ tengliklarni hosil qilamiz, bunda $\overline{C_1}$ va $\overline{C_2}$ integral o'zgarmaslaridir.

C_1 va C_2 ning hosil qilingan ifodalarini (2.1) ga qo'yib,ikkita ixtiyoriy o'zgarmas $\overline{C_1}$ va $\overline{C_2}$ miqdorlarga bog'liq bo'lgan integralni, ya'ni bir jinslimas tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

Agar berilgan tenglama n-tartibli: $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_n y = f(x)$ (2.5) ko'rinishda berilgan bo'lib, xususiy yechim $y^*(x) = C_1(x) y_1(x) + ... + C_n(x) y_n(x)$ (2.6) ko'rinishda bo'lib, $\begin{cases} y_1 \dfrac{dC_1}{dx} + ... + y_n \dfrac{dC_n}{dx} = 0 \\ y_1' \dfrac{dC_1}{dx} + ... + y_n' \dfrac{dC_n}{dx} = 0 \\ y_1^{(n-1)} \dfrac{dC_1}{dx} + ... + y_n^{(n-1)} \dfrac{dC_n}{dx} = f(x) \end{cases}$ (2.7) almashtirishlarni e'tiborga olinib, berilgan (2.5) tenglama yechimi topiladi.

28-misol. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$ tenglamaning umumiy yechimini toping .

Yechish. $y''-4y'+5y=0$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz. Xarakteristik tenglamasi $k^2-4k+5=0$ ning ildizlari $k_{1,2}=2\pm i$ bo'lib, umumiy yechimi $y=C_1e^{2x}\cos x+C_2e^{2x}\sin x=e^{2x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$ (*)

Berilgan bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimini topish uchun uning xususiy yechimini ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlarni variatsiyalash usuli (2.4) yordamida izlaymiz.

$$\begin{cases} C_1'y_1+C_2'y_2=0 \\ C_1'y_1'+C_2'y_2'=\dfrac{e^{2x}}{\cos x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'\cos x+C_2'\sin x=0 \\ C_1'(2\cos x-\sin x)+C_2'(2\sin x+\cos x)=\dfrac{1}{\cos x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'=-tgx \\ C_2'=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1=\int -tgxdx=\ln|\cos x|+\overline{C}_1 \\ C_2=\int dx=x+\overline{C}_2 \end{cases}$$

C_1 va C_2 larning topilgan qiymatlarini (*) tenglikka qo'ysak:

$y=\left[\ln|\cos x|+\overline{C}_1\right]e^{2x}\cos x+\left(x+\overline{C}_2\right)e^{2x}\sin x$, bunda $\overline{C}_1$ va $\overline{C}_2$ lar ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlar.

Mustahkamlash uchun savollar

1. O'zgarmas koeffitsientli 2-tartibli bir jinsli chiziqli bo'lmagan tenglama deb nimaga aytiladi?
2. $y''+py'+qy=f(x)$ tenglamaning umumiy yechimi qanday topiladi?
3. $f(x)$ funksiyaning ko'rinishlari turlarini ayting?
4. Xususiy yechimlar qanday izlanadi?

Mavzu: Matematik fizika tenglamalari turlari

Tayanch ibora va tushunchalar:

1. Xususiy hosilali differensial tenglamalar haqida tushuncha.
2. Chiziqli, kvazichiziqli, bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan tenglamalar.
3. Matematik fizika fanining paydo bo'lish tarixi va matematik fizika bilan boshqa fanlar orasidagi bog'lanish
4. Ikkinchi tartibli chiziqli tenglamalarning klassifikatsiyasi

Differensial tenglamalar deb, noma'lumi bir yoki bir necha o'zgaruvchili funksiya va uning hosilalari bo'lgan tenglamalarga aytiladi.

Agar tenglamada noma’lum funksiya ko‘p o‘zgaruvchining (o‘zgaruvchi 2 tadan kam bo‘lmasligi kerak) funksiyasi bo‘lsa, bunday tenglama xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

Matematik fizikaning ko‘pchilik masalalari ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarga keltiriladi. Bu tenglamalar, bizning asosiy o‘rganadigan mavzumiz bo‘lgani uchun, bo‘larni sinflarga ajratish, turlarini aniqlash, kanonik ko‘rinishga keltirish bizning asosiy maqsadimiz hisoblanadi.

Ta’rif: x,y erkli o‘zgaruvchining $u(x,y)$ noma’lum funksyasi va funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari orasidagi bog‘lanishga, ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar deyiladi.

Ta’rif: E^2 fazoda ikkinchi tartibli xususiy hosilalari mavjud qandaydir $u(x,y)$ funksiya berilgan bo‘lsin ($u_{xy} = u_{yx}$). U holda

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \qquad (1.1)$$

tenglama umumiy holda berilgan xususiy hosilali tenglama deyiladi.

Bu yerda F - qandaydir funksiya.

Xuddi shunga o‘xshash ko‘p erkli o‘zgaruvchili ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, ..., u_{x_n}, ..., u_{x_i x_j}, ...) = 0 \qquad (1.2)$$

Ta’rif: Xususiy hosilali differensial tenglama yuqori tartibli hosilalarga nisbatan chiziqli deyiladi, agarda u yuqori tartibli hosilalarga nisbatan ushbu ko‘rinishga ega bo‘lsa:

$$a_{11}(x,y)\cdot u_{xx} + 2a_{12}(x,y)\cdot u_{xy} + a_{11}(x,y)\cdot u_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0 \qquad (1.3)$$

Ta’rif: Quyidagi ko‘rinishdagi tenglamalarga kvazichiziqli tenglamalar deyiladi:

$$a_{11}(x,y,u,u_x,u_y)\cdot u_{xx} + 2a_{12}(x,y,u,u_x,u_y)\cdot u_{xy} + a_{11}(x,y,u,u_x,u_y)\cdot u_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0$$
(1.4)

Ta’rif: Tenglama chiziqli deyiladi, agarda u barcha xususiy hosilalarga va noma’lum funksiyaning o‘ziga nisbatan ham chiziqli bo‘lsa, ya’ni quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lsa,

$$a_{11}(x,y)\cdot u_{xx} + 2a_{12}(x,y)\cdot u_{xy} + a_{11}(x,y)\cdot u_{yy} + b_1(x,y)\cdot u_x + b_2(x,y)\cdot u_y + c(x,y)\cdot u + f(x,y) = 0$$
(1.5)

Ushbu tenglamada $a_{11}(x,y), a_{12}(x,y), a_{11}(x,y), b_1(x,y), b_2(x,y), c(x,y)$ - (1.5) tenglamaning koeffitsientlari, $f(x,y)$ - (1.5) tenglamaning ozod hadi deyiladi.

Ta'rif: Agar (1.5) tenglamada $f(x,y)\equiv 0$ bo'lsa, u holda (1.5) tenglama bir jinsli tenglama deyiladi. Aks holda, agar $f(x,y)\neq 0$ bo'lsa, (1.5) tenglama bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama deyiladi.

Matematik fizika tenglamalari, oddiy differensial tenglamalari kabi barcha $\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial t},...,\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2}$ va h.k. belgilar qatnashgan tenglamalar o'rganilmaydi. Biz faqatgina konkret tenglamalar va tenglamalar sistemasi bilan kifoyalanamiz.

Biz o'rganadigan tenglamalar matematik fizika masalalarida uchraydi.

Xususiy hosilali differensial tenglamalar bir oz keyinroq o'rganila boshlandi. Shuni ta'kidlash joizki, xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasi aniq fizikaviy masalalar asosida paydo bo'ldi, va ular asosiy matematik fizika tenglamalari nomini oldi. Fizikaviy masalalarning matematik modelini o'rganish XVIII asrning o'rtalarida analizning yangi yo'nalishi – matematik fizika tenglamalar, ya'ni fizikaviy hodisalarning matematik modeli fanining paydo bo'lishiga olib keldi. Bu fanning asosi D'Alamber (1717 - 1783), Eyler (1707 - 1783), Bernulli (1700 - 1782), Lagranj (1736 - 1813), Laplas (1749 - 1827), Puasson (1781 - 1840), Furye (1768 - 1830) va boshqa olimlar ishlari bilan qo'yilgan.

Matematik fizikaning klassik tenglamalari: Laplas tenglamasi, issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi, to'lqin tarqalish tenglamasidir.

Shunisi qiziqki, ko'rinishi jihatdan oddiy bo'lgan Laplas tenglamasi, keng qo'llaniladi, u haqida ko'p kitoblar yozilgan, unga yuzlab maqolalar bag'ishlangan, ammo shunga qaramay hali u bilan bog'liq yechilmagan muammolar ko'p. Laplas tenglamasi elliptik tenglamalar sinfiga kiruvchi eng oddiy tenglamadir.

Laplas tenglamasi kabi issiqlik o'tkazish tenglamasi ham keng qo'llanish sohasiga ega bo'lib, u birinchi marta 1822 yilda J.Furyening «Issiqlikning analitik nazariyasi» ishida taklif etib, o'rganilgan. Bu matematik fizika metodlarining va trigonometrik qatorlar nazariyasining rivojlanishida katta rol o'ynadi. Issiqlik o'tkazish tenglamasi parabolik turdagi tenglamalar sinfiga tegishli.

To'lqin tarqalish tenglamasi akustikada muhim o'rin egallaydi va u giperbolik turdagi tenglamalar sinfining vakilidir.

Matematik fizikaning asosiy tenglamalarini o'rganish, xususiy hosilali differensial tenglamalar va tenglamalar sistemasining klassifikatsiyasini o'tkazish imkonini berdi. 30-yillarda I.G.Petrovskiy tomonidan birinchi marta elliptik, parabolik, giperbolik tenglamalar sinfi o'rganilgan. Va hozirgi kunda bu sinflar yetarlicha o'rganilgan tenglamalar sinfidir. O'rganilmagan sinfi sifatida aralash turdagi tenglamalar sinfini qarash mumkin.

Differensial tenglamalar nazariyasining matematikaning boshqa: funksional analiz, algebra va extimollar nazariyasi kabi bo‘limlari bilan aloqasi mavjud. Differensial tenglamalar nazariyasi, asosan xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasi matematikaning turli sohalaridagi asosiy tushunchalar, g‘oyalar va usullardan keng foydalanadi va undan tashqari ularning muammolariga va tadqiqotlar xarakteriga ta’sir etadi. Masalan 1747 yilda tor tebranish tenglamasini Dalamber aniqladi va yechimini ham $u(t,x)=F_1(x+t)+F_2(x-t)$ ko‘rinishida oldi, bu yerda F_1 va F_2 ixtiyoriy funksiyalar. Eyler u uchun qo‘yilgan Koshi masalasining yechimini beradigan formulani aniqladi. (Bu formula hozirgi kunda Dalamber formulasi deyiladi). Qanday funksiyalarni yechim deb qarash mumkin degan savol tug‘ildi. Eyler ixtiyoriy chizilgan egri chiziq yechim bo‘ladi, deb o‘ylagan, Dalamber esa yechim faqat analitik ko‘rinishda ifodalanishi kerak deb hisoblardi, D.Bernulli esa yechim trigonometrik qatorlar ko‘rinishda ifodalanadi, deb hisoblardi. Uning fikriga Dalamber va Eyler qo‘shilmadilar, natijada o‘rtada vujudga kelgan tortishuv sababli matematik analizning asosiy tushunchalaridan bo‘lgan funksiyalarni aniqlashtirish tushunchasi kelib chikdi va funksiyalarni trigonometrik qator ko‘rinishida ifodalash savollari yuzaga keldi. Keyinchalik bu qatorlarni Furye, Dirixle va boshqa katta olimlar o‘rganib chiqib, natijada trigonometrik qatorlar nazariyasi vujudga keldi. Va bu qatorlar nazariyasining rivoji zamonaviy o‘lcham nazariyasining, to‘plam nazariyasining, funksiyalar nazariyasining paydo bo‘lishiga olib keldi. Bunga o‘xshash misollarni ko‘p keltirish mumkin.

Differensial tenglamalar nazariyasining ko‘pgina bo‘limlari shunday rivojlandilarki, natijada ular alohida yo‘nalishlar bo‘lib shakllandilar. Shunday yo‘nalishlardan biri aralash turdagi tenglamalar.

Ikkinchi tartibli chiziqli tenglamalarning klassifikatsiyasi

Biz x va y erkli o‘zgaruvchilarni teskari almashtirish natijasida, ya’ni

$$\xi=\varphi(x,y),\ \eta=\psi(x,y) \qquad (1)$$

berilgan chiziqli tenglamaga ekvivalent bo‘lgan va soddaroq ko‘rinishga ega bo‘lgan tenglamaga ega bo‘lishimiz mumkin. Haqiqatan ξ va η o‘zgaruvchilarni qanday tanlasak (1.3) tenglama soddaroq ko‘rinishga keladi degan savol tug‘iladi?

Buning uchun (1.3) tenglamada x va y erkli o‘zgaruvchilardan yangi ξ va η o‘zgaruvchilarga o‘tamiz:

$$\left.\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\
u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \\
u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} \\
u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(2) ifodalarni (1.3) tenglamaga keltirib qo‘yib, ξ va η o‘zgaruvchilarga nisbatan (1.3) tenglamaga ekvivalent bo‘lgan quyidagi tenglamani olamiz:

$$\overline{a_{11}}(\xi,\eta)\cdot u_{\xi\xi} + 2\overline{a_{12}}(\xi,\eta)\cdot u_{\xi\eta} + \overline{a_{11}}(\xi,\eta)\cdot u_{\eta\eta} + \overline{F}\left(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta\right) = 0 \qquad (3)$$

bu yerda

$$\overline{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2$$

$$\overline{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}\left(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y\right) + a_{22}\xi_y\eta_y$$

$$\overline{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2$$

$\overline{F}$ - funksiya ikkinchi tartibli xususiy hosilalarga bog‘liq emas. Agar (1.3) tenglama chiziqli bo‘lganda, ya’ni $F(x,y) = b_1(x,y)\cdot u_x + b_2(x,y)\cdot u_y + c(x,y)\cdot u + f(x,y)$ ko‘rinishda bo‘lganda, $\overline{F}$ funksiya quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$\overline{F}(\xi,\eta) = \overline{b_1}(\xi,\eta)\cdot u_\xi + \overline{b_2}(\xi,\eta)\cdot u_\eta + \overline{c}(\xi,\eta)\cdot u + \overline{f}(\xi,\eta)$ (isbotlang).

(3) tenglama sodda ko‘rinishga ega bo‘lishi uchun ξ va η o‘zgaruvchilarni shunday tanlaymizki, $\overline{a}_{11}$ koeffitsient nolga teng bo‘lsin. Buning uchun ushbu birinchi tartibli

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0 \qquad (4)$$

xususiy hosilali tenglamani qaraymiz. Faraz qilamiz, $z = \varphi(x,y)$- funksiya bu tenglamaning qandaydir xususiy yechimi bo‘lsin. Agar $\xi = \varphi(x,y)$ deb qabul qilsak, u holda $\overline{a}_{11} = 0$ bo‘ladi.

Demak, yuqorida bayon qilingan masalaning yechimi yangi erkli o‘zgaruvchilarga o‘tish masalasi (4) tenglamani yechishga bog‘liq ekan.

Quyidagi lemmalarini isbotlaymiz.

1-Lemma. Agar $z = \varphi(x,y)$ funksiya ushbu

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0 \qquad (4)$$

tenglamaning yechimi bo‘lsa, u holda $\varphi(x,y) = C$ munosabat, quyidagi oddiy

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0 \qquad (5)$$

differensial tenglamaning umumiy yechimini ifodalaydi.

Isbot. $z=\varphi(x,y)$ funksiya (2.4) tenglamaning yechimi bo‘lgani uchun, shu tenglamani qanoatlantirishi kerak va

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}=0 \qquad (6)$$

tenglik ayniyatni ifodalaydi. Bu tenglik x va y o‘zgaradigan sohaning barcha qiymatlarida o‘rinli. $\varphi(x,y)=C$ munosabat (5) tenglamaning umumiy yechimi bo‘la oladi. y - $\varphi(x,y)=C$ oshkormas munosabatdan aniqlansin, ya’ni faraz qilaylik $y=f(x,C)$ bo‘lsin, u holda

oshkormas funksiyadan olingan to‘la differensial quyidagicha bo‘ladi:

$$\varphi_x dx+\varphi_y dy=0$$

bundan quyidagi tenglikni olamiz.

$$\frac{dy}{dx}=-\left[\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right]_{y=f(x,C)} \qquad (7)$$

Bu tenglikda y - erkli o‘zgaruvchi bo‘lmasdan x va C ga bog‘liq funksiyani ifodalaydi va uning qiymati $f(x,C)$ ga teng bo‘ladi. Bundan esa $y=f(x,C)$ funksiya (5) tenglamani qanoatlantirishi kelib chiqadi, chunki

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=\left[a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}\right]_{y=f(x,C)}=0$$

kvadrat qavs ichidagi ifoda barcha x va y o‘zgaruvchilarning qiymatlarida nolga teng bo‘ladi. Shu bilan 1-lemma isbot bo‘ldi.

2-Lemma. Agar $\varphi(x,y)=C$ munosabat $a_{11}dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0$ oddiy differensial tenglamaning umumiy yechimi bo‘lsa, u holda $z=\varphi(x,y)$ funksiya (4) tenglamani qanoatlantiradi.

Isbot. Faraz qilamiz, $\varphi(x,y)=C$ munosabat (5) tenglamaning umumiy yechimini ifodalasin.

$$a_{11}\varphi_x^{\ 2}+2a_{12}\varphi_x\varphi_y+a_{22}\varphi_y^{\ 2}=0 \qquad (6`)$$

(6`) tenglama $x$ va $y$ ning barcha qiymatlarida o‘rinli ekanligini isbotlaymiz. Faraz qilamiz, $(x_0,y_0)$ nuqta sohaning qandaydir nuqtasi bo‘lsin. Agar biz bu ixtiyoriy nuqtada (6`) tenglama o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatsak, u holda (x_0, y_0) nuqta ixtiyoriy bo‘lganligi sababli, bu tenglama ayniyatga aylanishi kelib chiqadi va $\varphi(x,y)$ funksiya (6`) tenglamaning yechimi bo‘ladi. (x_0, y_0) nuqtadan (5) tenglamaning integral egri chizigini o‘tkazamiz va faraz qilamiz, $\varphi(x_0, y_0) = C_0$ va $y = f(x, C_0)$, u holda $y_0 = f(x_0, C_0)$ bo‘ladi. Bu egri chiziqning barcha nuqtalari uchun esa,

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = \left[a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22}\right]_{y=f(x,C_0)} = 0$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu tenglikda $x = x_0$ deb olsak,

$$a_{11}\varphi_x{}^2(x_0, y_0) + 2a_{12}\varphi_x(x_0, y_0)\varphi_y(x_0, y_0) + a_{22}\varphi_y{}^2(x_0, y_0) = 0$$

ayniyatga ega bo‘lamiz. Shu bilan ikkinchi lemma isbotlandi.

Ta’rif: (5) tenglama (1.3) tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

Ta’rif: (5) tenglamaning integrallari esa (1.3) tenglamaning xarakteristikalari deyiladi.

Faraz qilamiz, $\xi = \varphi(x,y)$, bu yerda $\varphi(x,y) = const$ (5) tenglamaning umumiy integrali. Biz $u_{\xi\xi}$ oldidagi koeffitsientni nolga aylantiramiz. Agar $\psi(x,y) = const$ (5) tenglamaning boshqa umumiy integralini ifodalasa va $\varphi(x,y)$ga bog‘liq bo‘lmasa, biz $\eta = \psi(x,y)$ deb olsak, $u_{\eta\eta}$ oldidagi koeffitsientni nolga aylantiramiz.

(5) tenglama quyidagi ikkita tenglamaga ajraladi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}}}{a_{11}} \qquad (8)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}}}{a_{11}} \qquad (9)$$

Ildiz ostidagi ifodaning ishorasi

$$a_{11}(x,y)\cdot u_{xx} + 2a_{12}(x,y)\cdot u_{xy} + a_{11}(x,y)\cdot u_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0 \qquad (1.3)$$

tenglamaning tipini aniqlaydi.

Agar M nuqtada $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} > 0$ bo‘lsa, (1.3) tenglama giperbolik tipga qarashli, agar M nuqtada $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} < 0$ bo‘lsa, berilgan (1.3) tenglama elliptik tipga qarashli, agar M nuqtada $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0$ bo‘lsa, parabolik tipga qarashli deyiladi.

Quyidagi tenglik sohaning barcha nuqtalarida o‘rinli bo‘ladi, ya’ni

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11} \cdot \bar{a}_{22} = \left(a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}\right) \cdot D^2, \; D = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y$$

Bundan o‘zgaruvchilar almashtirilganda ham tenglama tipining invariantligi saqlanishi ko‘rinib turibti, chunki D - yakobian noldan farqli.

Barcha nuqtalarida tenglama bir xil tipga tegishli bo‘lgan G sohani qaraymiz. G sohaning har bir nuqtasidan ikkita xarakteristika o‘tadi, aynan, giperbolik tipdagi tenglamalar uchun ikkita haqiqiy va o‘zaro farqli xarakteristikalar elliptik tenglamalar uchun esa ikkita kompleks va o‘zaro farqli xarakteristikalar, parabolik turdagi tenglamar uchun esa, ikkita haqiqiy va o‘zaro ustma-ust tushadigan xarakteristikalar o‘tadi.

Bu hollarning har birini alohida-alohida qaraymiz.

1) Giperbolik turdagi tenglamalar uchun $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} > 0$ va (8) va (9) tenglamalarning o‘ng tomoni haqiqiy va o‘zaro farqli. Bu tenglamalarning umumiy yechimlari $\varphi(x,y) = const$ va $\psi(x,y) = const$ bo‘lib, haqiqiy xarakteristikalar oilasiga ega bo‘ladi. Faraz qilamiz, $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$. U vaqtda (3) tenglamani $u_{\xi\eta}$ oldidagi koeffitsientga bo‘lib, ushbu ko‘rinishga keltiramiz:

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \qquad (10)$$

bu yerda $\Phi = -\dfrac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}}$.

(5) tenglamaning (10) ko‘rinishi giperbolik turdagi tenglamaning kanonik ko‘rinishi deyiladi.

Ko‘pincha giperbolik turdagi tenglamalarning ikkinchi kanonik ko‘rinishidan foydalaniladi.

Ikkinchi kanonik ko‘rinishga keltirish uchun quyidagicha yangi almashtirish kiritishga to‘g‘ri keladi:

$$\xi = \alpha + \beta, \; \eta = \alpha - \beta \text{ yoki } \alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \; \beta = \frac{\xi - \eta}{2} \qquad (11)$$

bunda α va β lar yangi o‘zgaruvchilar. Natijada biz ushbu tengliklarga ega bo‘lamiz:

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \; u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \; u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}) \qquad (12)$$

Bundan (2.10) tenglama quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1 \qquad (13)$$

bu yerda $\Phi_1 = 4\Phi$.

2) Parabolik tenglamalar uchun $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0$ bo‘lib, (8) va (9) tenglamalar ustma-ust tushadi va biz bitta umumiy integralga: $\varphi(x,y) = const$ ga ega bo‘lamiz. Bu holda $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$deb qabul qilamiz. Bu yerda $\eta = \eta(x,y)$ funksiya $\xi = \varphi(x,y)$ funksiyaga bog‘liq bo‘lmagan ixtiyoriy funksiya. O‘zgaruvchilarni bunday qabul qilish natijasida

$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2 = 0$, chunki $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$ tenglik $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0$ tenglikdan olinadi. Bundan esa quyidagi kelib chiqadi

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}\left(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y\right) + a_{22}\xi_y\eta_y = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y\right) = 0$$

(5) tenglamani $u_{\eta\eta}$ oldidagi koeffitsientga bo‘lish natijasida, parabolik turdagi tenglamlarning kanonik ko‘rinishini keltirib chikaramiz:

$$u_{\eta\eta} = \Phi\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right) \qquad (14)$$

bu yerda $\Phi = -\dfrac{\bar{F}}{\bar{\bar{a}}_{22}}$.

Agar (14) tenglamaning ung tomonida u_ξ qatnashmasa, u holda bu tenglama ξ parametrga bog‘liq oddiy differensial tenglama bo‘lib koladi.

3) Elliptik turdagi tenglamalar uchun $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} < 0$ bo‘lib, (8) va (9) tenglamalarning ung tomoni kompleks bo‘ladi. Faraz qilamiz $\varphi(x,y) = const$ (8) tenglamaning kompleks integrali bo‘lsin. U holda $\varphi(x,y)$funksiyaga kushma $\varphi^*(x,y)$ funksiya (9) kushma tenglamaning umumiy integralini ifodalaydi. Kompleks o‘zgaruvchilarga o‘tamiz,bu uchun faraz qilamiz, $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \varphi^*(x,y)$.

Bu holda elliptik turdagi tenglama giperbolik turdagi tenglama kaysi ko‘rinishga kelgan bo‘lsa usha ko‘rinishga keladi.

Kompleks o‘zgaruvchilar bilan ish kurmaslik uchun, quyidagi yangi α va β o‘zgaruvchilarni kiritamiz:

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \ \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}, \text{ chunki } \xi = \alpha + i\beta, \ \eta = \alpha - i\beta .$$

Bu holda

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \left(a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2\right) - \left(a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2\right) +$$
$$+ 2i\left(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}\left(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x\right) + a_{22}\alpha_y\beta_y\right)$$

($\xi_x = \alpha_x + i\beta_x$ va x.k. ekanligidan foydalanamiz)

ya’ni $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22}$ va $\bar{a}_{12} = 0$.

(3) tenglamani $u_{\alpha\alpha}$ oldidagi koeffitsientga bo‘lib quyidagi tenglamani olamiz:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}) \qquad (15)$$

bu yerda $\Phi = -\dfrac{\overline{F}}{\overline{a}_{22}}$

Shunday qilib, $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}$ ifodaning ishorasiga qarab (1.3) tenglama quyidagi kanonik ko‘rinishlarga keltirilishi mumkin ekan.

$a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} > 0$ (giperbolik turda), $u_{xx} - u_{yy} = \Phi$ yoki $u_{xy} = \Phi$.

$a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} < 0$ (elliptik turda), $u_{xx} + u_{yy} = \Phi$.

$a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0$ (parabolik turda) $u_{xx} = \Phi$.

MAVZU: Chiziqli dasturlash masalasi va uning matematik modeli.

Reja:

1. Chiziqli dasturlash(programmalashtirish**)** masalalarini turli ko'rinishlarda ifodalash.
2. Tengsizlikni tenglamaga aylantirish.
3. Chiziqli dasturlash masalasi yechimlarining xususiyatlari.

Matematik programmalashtirish.

Bugungi ishlab chiqarish jarayonining tobora murakkablashib, bozor munosabatlarining kengayib borish jarayonida har bir ishni tahlil qilib, ulardan to'g'ri xulosa chiqarishga asos beruvchi ilmiy nazariyalar juda zarur bo'lmoqda. Bunday nazariyaning asosini matematik programmalashtirish tashkil etadi.

«Programmalashtirish» deganda masalaning yechimlarini ketma-ket hosil qilish jarayonini tushunish kerak. Bu shunday jarayonki, unda eng avval boshlang'ich yechim topiladi, so'ngra bu yechim qadam-baqadam yaxshilanib boriladi. Bu jarayon eng yaxshi programma topilguncha davom ettiriladi. Har bir bosqichda maxsus ko'rsatkichlar yordamida qanday ish tutish kerakligi, optimal yechimga qanday yaqinlashish kerakligi ko'rsatib boriladi.

Matematik programmalashtirish matematikaning asosan ko‘p varoiantali yechimga ega bo‘lgan iqtisodiy masalalarning eng yaxshi, maqsadga muvofiq (optimal) yechimini topishga yordam beruvchi bir tarmog‘idir.

Matematik programmalashtirish chiziqli programmalashtirish bo‘lmagan programmalashtirish va dinamik programmalashtirish deb ataluvchi qismlarni o‘z ichiga oladi. Shuni aytib o‘tish kerakki, chiziqli bo‘lmagan programmalashtirish masalani yechish uchun umumiy universal usul yo‘q. Shu paytgacha yaratilgan usullar asosan chiziqli bo‘lmagan programmalashtirish masalalarining ayrim xususiy hollari uchun moslashtirilgan. Ayrim chiziqli bo‘lmagan programmalashtirish masalalari uchun chiziqli approksimatsiya topilib, ularni chiziqli programmalashtirish usullarini qo‘llab yechish mumkin.

Chiziqli programmalashtirish.

Agar maqsad funksiyasi va cheklanishlar tizimi noma’lumlarga nisbatan chiziqli bo‘lsa, u holda programmalashtirish *chiziqli programmalashtirish* deyiladi. Agar ular chiziqli bo‘lmagan ifodalardan tashkil topgan bo‘lsa, u holda programmalashtirish chiziqli bo‘lmagan programmalashtirish deyiladi.

Umumiy holda chiziqli programmalashtirish masalasi bunday ta’riflanadi. Ushbu

$$\begin{cases} f_1(x_1\ \ x_2,\ldots,\ x_n)=0 \\ f_2(x_1\ \ x_2,\ldots,\ x_n)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1\ \ x_2,\ldots,\ x_n)=0 \end{cases} \tag{9.1}$$

chiziqli cheklanishlar tizimida

chiziqli cheklanishlar tizimida

$$y=\varphi\ (x_1,\ \ x_2,\ldots,\ x_n) \tag{9.2}$$

chiziqli funksiyaning ekstremum qiymatlari topilsin. Bu yerda *u* funksiya chiziqli bo‘lganligi sababli, umumiy holda $\frac{dy}{dx}\neq 0$ bo‘ladi. Unda (9.1) shartlami qanoatlantiruvchi sohaning ichki nuqtalarida funksiya ekstremum qiymatga erishmaydi. Funksiyaga ekstremum qiymat beruvchi nuqta bu sohaning chetlarida yotadi. Shu sababli funksiyaning (9.1) shartli cheklanishlardagi ekstremum qiymatini topish uchun oliy matematika kursidagi funksiyaning shartsiz ekstremum qiymatini topish usullaridan farq qiiuvchi maxsus usullar ishlatilishini talab qilinadi. Chiziqli programmalashtirish shunday usullarni o'rganadi.

Masalalarning matematik modellarini tuzish.

Biz yuqorida matematik programmalashtirish ko'p variantali yechimga ega bo'lgan masalalarning optimal yechimini aniqlash uchun qo'llanishini aytgan edik. Bunday masalalarga chiziqli programmalashtirish usullarini qo'llashdan oldin ularning matematik modelini tuzish kerak. Boshqacha aytganda berilgan iqtisodiy masalaning chegaralovchi shartlarini, maqsadini matematik formulalar orqali ifodalab olish kerak. Har qanday iqtisodiy masalaning matematik modelini tuzish uchun:

1) Masalaning iqtisodiy ma'nosini o'rganib, undagi asosiy shartlar va maqsadini aniqlash;
2) Masaladagi noma'lumlarni (topish kerak bo'lgan o'zgaruvchilarni) belgilash;
3) Masalaning shartlarini algebraik tenglamalar yoki tengsizliklar orqali ifodalash;
4) Masalaning maqsadini chiziqli funksiya orqali ifodalash kerak bo'ladi.

Misol tariqasida eng sodda iqtisodiy masalaning matematik modelini tuzish jarayoni bilan tanishamiz.

Parhez masalasi

Sanoatda optimal aralashmalar tayyorlash, qishloq xo'jaligida mollar uchun optimal rasion tayyorlash va ma'lum bir fiziologik xususiyatli kishilar uchun optimal parhez taomlar tayyorlash masalalari umumiy nom bilan «parhez masalasi» deb ataladi.

Faraz qilaylik, kishi organizmi uchun bir sutkada p xil A_1, $A_2,...,A_p$ ozuqa moddalari kerak bo'lsin. Shu jumladan A_1 ozuqa moddasidan bir sutkada b_1 miqdorda, A_2 ozuqa moddasidan b_2 miqdorda va hokazo, A_p dan b_p miqdorda zarur bo'lib, ularni t ta V_1, $B_2,...,V_n$ mahsulotlarning tarkibidan olish mumkin bo'lsin. har bir V_i birlik mahsulotning tannarxi S_i pul birligiga teng bo'lsin. Shu bilan birga har bir B_i mahsulotning tarkibidagi A_i ozuqa moddasining miqdori a_{ij} birlikni tashkil qilsin. Masalaning berilgan o'lchamlari quyidagi jadvalda berilgan bo'lsin.

Ozuqa modda / Mahsulot	A_1	A_2	...	A_n	Mahsulot bahosi
V_1	a_{11}	a_{12}		A_{1n}	c_1
V_2	a_{21}	a_{22}	...	A_{2n}	c_2
...	...	...	...	...	...
V_l	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	c_m
Ozuqa modda normasi	b_1	b_2	...	B_n	

Masalaning iqtisodiy ma'nosi: bir kunlik ovqatlanish rejasini shunday tuzish kerakki, natijada kishi organizmi kerakli ozuqa moddalarini to'la qabul qilsin va sarf qilingan xarajatlar minimal bo'lsin.

Bir sutkada ishlatiladigan B_i mahsulotning miqdorini X_i bilan belgilaymiz. Bu holda organizmning A_1 ozuqa moddasiga bo'lgan talabi to'la qondirilsin degan shart quyidagi tenglama orqali ifodalanadi:

$$a_{11}x_{11}+a_{21}x_2+\ldots+a_{m1}x_m=b_1.$$

Xuddi shuningdek, organizmning boshqa ozuqa moddalariga bo'lgan talabi to'la qondiriladigan shart quyidagi tenglamalar tizimi orqali ifodalanadi:

$$a_{11}x_{11}+a_{21}x_2+...+a_{m1}x_m=b_1.$$

Xuddi shuningdek, organizmning boshqa ozuqa moddalariga bo'lgan talabi to'la qondiriladigan shart quyidagi tenglamalar tizimi orqali ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{12}x_1+a_{22}x_2+...+a_{m2}x_m=b; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_m=b_n. \end{cases}$$

Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra, noma'lumlar manfiy bo'lmasligi, ya'ni $x_1\geq0$, $x_2\geq0,...,$ $x_m\geq0$ bo'lish kerak. Masalaning maqsadi bir sutkalik ovqatlanish uchun sarf qilinadigan xarajatlarni minimallashtirishdan iborat. Bu shart quyidagi chiziqli funksiya orqali ifodalanadi:

$$z_{min}=c_1x_1+c_2x_2+...+c_mx_m$$

Shunday qilib, parhez masalasining matematik modelini bunday ifodalash mumkin ekan:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+...+a_{m1}x_m=b_1; \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+...+a_{m2}x_m=b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+...+a_{mn}x_m=b_m. \end{cases} \quad (9.3)$$

$$x_1\geq0,\ x_2\geq0,...,\ x_m\geq0, \quad (9.4)$$

$$z_{min}=c_1x_1+...+c_mx_m\ . \quad (9.5)$$

Chiziqli programmalashtirish masalalarini turli ko'rinishlarda ifodalash.

Chiziqli programmalashtirish masalasi umumiy holda quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases} \tag{9.6}$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0; \tag{9.7}$$

$$z_{(max)\min} = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n . \tag{9.8}$$

(9.6) va (9.7) shartlarni qanoatlantiruvchi noma'lumlarning shunday qiymatlarini topish kerakki, ular (9.8) chiziqli funksiyaga minimal (maksimal) qiymat bersin. Masalaning (9.6) va (9.7) shartlari uning chegaralovchi shartlari deb, (9.8) chiziqli funksiyani esa masalaning m a q s a d i yoki maqsad funksiyasi deb ataladi. Masaladagi (9.6) shartning chap tomoni va maqsad funksiyasi noma'lumlarga nisbatan chiziqli ekani ko'rinib turibdi. Shuning uchun ham (9.6) — (9.8) masala chiziqli programmalashtirish masalasi deb ataladi.

Aniq masalalarda (9.6) shart tenglamalar tizimidan iborat bo'lishi mumkin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{9.9}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_m \geq 0, \tag{9.10}$$

$$z_{\min} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m \tag{9.11}$$

(9.9) — (9.11) ko'rinish chiziqli programmalashtirish masalasining kanonik ko'rinishi deb ataladi.

Berilgan (9.9) — (9.14.) masala vektorlar yordamida quyidagicha ifodalanadi:

$$A_1X_1+A_2X_2+...+A_nA_n=A_0; \qquad (9.12)$$

$$x\geq 0; \qquad (9.13)$$

$$z_{\min}=CX. \qquad (9.14)$$

Bu yerda

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, A_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{pmatrix}, A_0=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ B_m \end{pmatrix}$$

$C=(c1, c2,...,c_n)$ — vektor qator

$X=(x1, x2,...,x_n)$ — vektor ustun.

Masalaning matritsa yordamidagi ifodasi bunday:

$$AX=A_0; \qquad (9.15)$$

$$X\geq 0; \qquad (9.16)$$

$$z_{\min}=CX, \qquad (9.17)$$

bu yerda $S=(s_1, s_2, ..., s_p)$ — matritsa qator, $A=a_{ij}$ koeffitsientlardan tashkil topgan matritsa:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{– ustun matritsa}$$

Berilgan masalani yig'indilar yordamida ifodalash ham mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b \quad (i = 1, m); \tag{9.18}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, n); \tag{9.19}$$

$$Z_{\min} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{9.20}$$

Chiziqii programmalashtirish masalalarini quyida keltirilgan ta'rif ko'rinishlarida ham ifodalash mumkin.

1-ta'rif. Berilgan (9.9) — (9.11) masalaning *mumkin bo'lgan yechimi* yoki *rejasi* deb, uning (9.6) — (9.7) shartlarini qanoatlantiruvchi $X=(x_1, \ldots x_p)$ vektorlarga aytiladi.

2-ta'rif. Agar (9.12) yoyilmadagi musbat x_i, koeffitsientli $A_i(i=1, t)$ vektorlar o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmasa, $X=(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ reja *tayanch reja* deyiladi.

3-ta'rif. $X=(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ tayanch rejadagi musbat komponentlar soni t ga teng bo'lsa, bu reja *aynimagan tayanch reja,* aks holda *aynigan tayanch reja* deyiladi.

4-ta'rif. Chiziqli funksiya (9. 11) ga eng kichik yoki eng katta qiymat beruvchi $X=(x_1, \ldots, x_p)$ kanonik reja masalaning optimal rejasi yoki optimal yechimi deyiladi.

Tengsizlikni tenglamaga aylantirish.

p ta noma'lumli

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n \le b \qquad (9.21)$$

chiziqli tengsizlik berilgan bo'lsin. Bu tengsizlikni tenglamaga aylantirish uchun uning kichik tomoniga manfiy bo'lmagan noma'lum

$$x_{n+1} \ge 0 \qquad (9.22)$$

ni qo'shamiz. Natijada n+1 ta noma'lumli chiziqli tenglama hosil bo'ladi:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_p x_p + x_{p+1} = b. \qquad (9.23)$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_p x_p + x_{p+1} = b. \qquad (9.23)$$

Berilgan (9.21) tengsizlikni tenglamaga aylantirish uchun qo'shilgan $x_{p+1} \ge 0$ noma'lum qo'shimcha o'z g a r u v ch i deb ataladi.

Shunday yo'l bilan chiziqli programmalashtirish masalasining chegaralovchi shartlaridagi tengsizliklarni tenglamaga aylantirish mumkin. Bunda shunga e'tibor berish kerakki, tizimdagi turli tengsizliklarni tenglamaga aylantirish uchun qo'shiladigan qo'shimcha o'zgaruvchilar bir-biridan farqli bo'lishi kerak.

Masalan, chiziqli programmalashtirish masalasining matematik modeli

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{1n} x_n \le b_1; \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n \le b_2; \\ ....; \\ A_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n \le b_m, \end{cases} \qquad (9.24)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, n); \qquad (9.25)$$

$$Z_{\min} = c_1 x_1 + ... + c_n x_n \qquad (9.26)$$

ko'rinishda bo'lsa, bu masaladagi tengsizliklarni kichik tomoniga $x_{p+1} \ge 0$, $x_{n+2} \ge 0$, ..., $x_{p+l} \ge 0$ qo'shimcha o'zgaruvchilar qo'shish yordamida tenglamaga aylantirish mumkin. Bu o'zgaruvchilar $2_{\min}$

ga 0 koeffitsient bilan kiritiladi. Natijada berilgan (9.24) — (9.26) masala quyidagi ko‘rinishga keltiriladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_{n+1} = b_1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{m+n} = b_m, \end{cases} \tag{9,27}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0,\ x_{n+1} \geq 0,\ \ldots,\ x_{m+1} \geq 0, \tag{9.28}$$

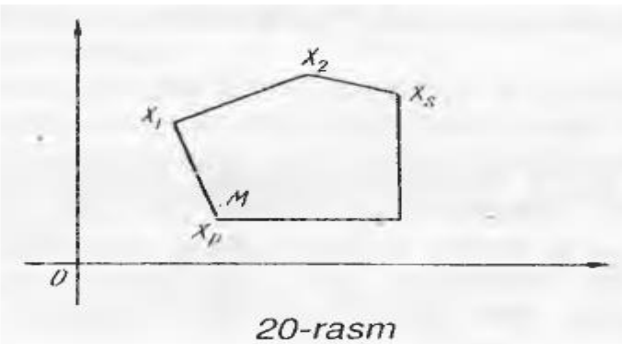
$$z_{min}\ c_1x_2 + \ldots + c_nx_n + 0(x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}). \tag{9.29}$$

Chiziqli programmalashtirish masalasi yechimlarining xususiyatlari.

Chiziqli programmalashtirish masalasining rejalari va chiziqli funksiyaning bir qancha xususiyatlari bor. Quyida bularning xususiyatlariga doir bo‘lgan teoremalarni (isbotsiz) va ulardan kelib chiqadigan ba’zi xulosalarni keltiramiz.

1-teorema. Chiziqli programmalashtirish masalasining rejalari qavariq to‘plamni tashkil etadi.

2-teorema. Chiziqli programmalashtirish masalasining chiziqli funksiyasi o‘zining optimal qiymatiga shu masalaning rejalaridan tashkil topgan qavariq to‘plamning chetki nuqtasida erishadi. Agar chiziqli funksiya *M* qavariq to‘plamning birdan ortiq, chetki nuqtasida optimal qiymatga erishsa, u shu nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo‘lgan ixtiyoriy nuqtada ham o‘zining optimal qiymatiga erishadi (20-rasm).



20-rasm

3-teorema. Agar K ta o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan A_1, A_2 ..., A_k vektorlar berilgan bo'lib, ular uchun

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_k x_K = A_0$$

tenglik barcha $x_1 \geq 0$ larda o'rinli bo'lsa, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_K, 0, \ldots, 0)$ vektor M qavariq to'plamning chetki nuqtasi bo'ladi.

Yuqorida tanishgan teoremalardan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

1-xulosa. Chiziqli programmalashtirish masalasi tayanch rejalaridan tashkil topgan to'plam M qavariq, to'plamning chetki nuqtalar to'plamiga mos keladi va aksincha, har bir tayanch reja K to'plamining biror chetki nuqtasiga mos keladi.

2-xulosa. Chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimini M to'plamning chetki nuqtalari orasidan qidirish kerak.

MAVZU: Transport masalasi va uning matematik modeli.

Tayanch so'z va iboralar:

Transport masalasini mohiyati, ishlab chiqarish korxonalar, mahsulot zahiralari, iste'molchilarning talablari hajmi, transport harajatlari, optimal xo'jalik aloqalari, transport masalasining turlari: bir mahsulotli va ko'p mahsulotli transport modellari, o'zaro almashinuvchi tovarlar, shartli mahsulot, ko'p bosqichli transport masalasi, statik va dinamik transport masalalari, transport masalasini matritsaviy modeli, transport masalalarida o'zgaruvchilar, chegaraviy shartlar tizimi, korxonaning quvvatlari, qo'shimcha o'zgaruvchilar, yopiqlik va ochiqlik shartlari, optimal baholar, ustun va qatorlar potensiallari.

1.Umumiy tushunchalar

Faraz qilaylik, bir necha ishlab chiqarish korxonalarda bir xil mahsulot zahiralari mavjud. Ularni iste'molchilarga etkazib berish zarur. Har bir ishlab chiqarish korxonasi taklif qiladigan mahsulotlarni hajmi, iste'molchilarning talablari hajmi, har bir ishlab chiqaruvchidan har bir iste'molchiga bir birlik mahsulot tashish uchun sarflanadigan transport harajatlari ma'lum.

Ta'minotchilar (ishlab chiqaruvchilar) va iste'molchilar orasida shunday optimal xo'jalik aloqalarni aniqlash kerakki, natijada iste'molchilarning mahsulotlarga bo'lgan talabi ishlab chiqaruvchilarning imkoniyatiga qarab qondirilsin va mahsulotlarni tashishga sarflanadigan transport harajatlari eng kam bo'lsin.

Yuqoridagi masalani echilishida transport modelidan foydalaniladi. Transport modeli mahsulot turiga ko'ra bir mahsulotli va ko'p mahsulotli transport modellariga bo'linadi.

Ko'p mahsulotli transport modeli o'z o'rnida o'zaro almashinuvchi va o'zaro almashishi mumkin bo'lmagan mahsulotlar uchun alohida tuziladi. Agar tovarlar o'zaro almashinuvchi bo'lsa, bu holda ularni shartli mahsulotga keltirib, oddiy, bir mahsulotli transport masalasi usullari bilan echish mumkin. Masalan sut, sut mahsulotlarni tashish bo'yicha.

Mahsulotlarni iste'molchilarga etkazib berishdan avval, qayta ishlash jarayonidan o'tishi zarur bo'lsa, bu holda ko'p bosqichli transport masalasi hosil bo'ladi va xususiy usullar bilan echiladi.

O'rganilayotgan davrga ko'ra statik va dinamik transport masalalari mavjud. Dinamik transport masalasini matritsaviy modeli blok shaklida tuzilib, vaqt omilini e'tiborga oladi.

Ba'zi bir masalalarda transport harajatlaridan tashqari ishlab chiqarish harajatlari ham e'tiborga olinadi. Bu holda ishlab chiqarish transport masalasi hosil bo'ladi.

Transport masalasini matematik modelini tuzish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

i - ishlab chiqarish korxonalari nomeri, $\left(i=\overline{1,m}\right)$;

j - iste'molchi nomeri, $\left(j=\overline{1,n}\right)$;

A_i - i-ishlab chiqarish punktdagi mahsulot zahirasi;

B_j - j-iste'mol punktdagi talab hajmi;

C_{ij} - i-ishlab chiqarish korxonasidan j-iste'mol punktiga bir birlik mahsulot tashish uchun ketgan transport harajatlar;

X_{ij} - i-ishlab chiqarish korxonasidan j-iste'mol punktiga tashilishi kerak bo'lgan yukning izlanayotgan hajmi.

2.Transport masalasining matritsaviy va matematik modelning tuzilishi.

Transport masalasining matritsaviy modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

J / i	B_1	B_2	...	B_j	...	B_n
A_1	t_{11} X_{11}	t_{12} X_{12}	...	t_{1j} X_{1j}	...	t_{1n} X_{1n}
A_2	t_{21} X_{21}	t_{22} X_{22}	...	t_{2j} X_{2j}	...	t_{2n} X_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
A_i	t_{i1} X_{i1}	t_{i2} X_{i2}	...	t_{ij} X_{ij}	...	t_{in} X_{in}
...	...	...	...	...	...	...
A_m	t_{m1} X_{m1}	t_{m2} X_{m2}	...	t_{mj} X_{mj}	...	t_{mn} X_{mn}

Masalani matematik modeli. Umumiy transport harajatlari minimal bo'lsin:

$$F = \sum_i \sum_j t_{ij} \cdot X_{ij} \rightarrow \min$$

Chegaraviy shartlar tizimi:

1. Ishlab chiqarish korxonalardan tashilishi kerak bo'lgan mahsulotlar (yuklar) hajmi korxonaning quvvatlaridan oshib ketmasin:

$$\sum_j X_{ij} \leq A_i, \qquad \left(i = \overline{1, m}\right)$$

2. Iste'molchilarning mahsulotlarga (yuklarga) bo'lgan talablari to'liq qondirilsin:

$$\sum_i X_{ij} = B_j, \qquad \left(j = \overline{1, n}\right)$$

3. Agar ta'minotchilarni umumiy quvvati iste'molchilarni umumiy talabiga teng bo'lsa 1) va 2) shartlar qat'iy tenglik ko'rinishida beriladi va yopiq transport masalasi hosil bo'ladi.

Ayrim hollarda bunday muvozanat hosil bo'lmasligi mumkin, bu holda transport masalasining ochiq modeli tuziladi.

b) $\sum_i A_i < \sum_j B_j$

v) $\sum_i A_i > \sum_j B_j$

Ochiq turdagi transport masalasi modelini yopiq holga keltirish uchun fiktiv ta’minotchi yoki fiktiv iste’molchi kiritiladi.

Agar $\sum_i A_i > \sum_j B_j \quad \sum_i A_i = \sum_j B_j + B^{\text{™Џђ}}$

$$\sum_i A_i < \sum_j B_j \quad \sum_i A_i + A^{\text{™Џђ}} = \sum_j B_j$$

YOpiq holga keltirilgan transport masalasi modelini ma’lum usullar bilan echish mumkin (potensiallar usuli, Brudno usuli va boshqalar).

Transport masalasida optimal baholarning qo’llanishi.

Transport masalasida 3 xil ikkilamchi baholar mavjud.

1) U_i - potensiali ishlab chiqarish korxonalarini baholaydi.

2) V_j - potensiali iste’mol talabini baholaydi.

3) V_j - potensiali xo’jalik aloqalarni baholaydi. Agar optimal echimga kirmagan aloqalar qo’llansa, umumiy harajatlar har bir mahsulot birligining miqdoriga oshadi.

$\Delta_{ij} = U_i + V_j - t_{ij}$ - potensiali ishlab chiqarish korxonani quvvati bir birlikka o’zgarsa, umumiy transport harajatlari qanchaga o’zgarishini ko’rsatadi. U_i - manfiy bo’lsa kamayadi, U_i - musbat bo’lsa ko’payadi.

V_j - potensiali talab hajmi bir birlikga o’zgarsa, umumiy harajat qanchaga o’zgarishini ko’rsatadi. Manfiy bo’lsa kamayadi, musbat bo’lsa oshadi.

Qisqacha xulosalar

Transport masalasi yordamida ishlab chiqaruvchilar va iste’molchilar o’rtasida optimal xo’jalik aloqalari aniqlanadi. Transport masalasida ishlab chiqarish korxonalarda bir xil mahsulot zahiralari mavjud bo’lib, ularni iste’molchilarga etkazib berish zarur bo’ladi. Har bir ishlab chiqarish korxonasi taklif qiladigan mahsulotlarni hajmi, iste’molchilarning talablari hajmi, har bir ishlab chiqaruvchidan har bir iste’molchiga bir birlik mahsulot tashish uchun sarflanadigan transport harajatlari ma’lum.

Transport modeli mahsulot turiga ko’ra bir mahsulotli va ko’p mahsulotli transport modellariga bo’linadi.

Ko’p mahsulotli transport modeli o’z o’rnida o’zaro almashinuvchi va o’zaro almashishi mumkin bo’lmagan mahsulotlar uchun alohida tuziladi.

Transport masalasining matematik modeli ochiq yoki yopiq ko’rinishda bo’ladi.

3.Transport masalasiga oid misollar

Masalaning quyilishi. matematik modelini tuzish. transport masalasining boshlang’ich tayanch rejasini topish yullari

🗁 Trasport masalasini sonli iqtisodiy-matematik modelini va iterasiya jadvallarini tuzish yullari o’rganish.

1-vazifa. Masalaning berilishi. Boshlang’ich ma’lumotlar. CHorvachilik majmuida 3 ta silos o’rasi bo’lib, birinchisida 650 *t*, ikkinchisida 750 *t*, uchinchisida 700 *t* silos bor . Siloslar jami- 2100 *t* tashkil qiladi. Bu siloslarnni 4 ta fermaga tarqatish talab etiladi, jumladan 1 - fermaga- 450 *t*, 2 - ga 600 *t*, 3 - ga 550 *t* va 4 - fermaga esa 500 *t*. Silos o’ralaridan fermalargacha bo’lgan masofalar 1-jadvalda berilgan:

1-jadval.

O’ralar / Fermalar	1-o’ra	2-o’ra	3-o’ra
1-ferma	4	6	3
2-ferma	2	7	6
3-ferma	5	3	4
4-ferma	8	5	7

1 *tonna* - *km* yukni tashish transport xarajati 300 so’mga teng.

🗁Masalaning maqsadi. Siloslarni o’ralaridan fermalarga shunday taqsimlash kerakki, natijada transport xarajatlari minimal bo’lsin.

🗁Masalaning echilishi

Berilgan.

⊙Ta’minotchilar:

1-o’radagi silos miqdori a_1=650 *t*;

2-o’radagi silos miqdori a_2=750 *t*;

3-o’radagi silos miqdori a_3=700 *t*.

⊙Iste’molchilar:fermani siloslarga bo’lgan talabi: b_1= 450 *t*;

2-fermani siloslarga bo’lgan talabi: b_2= 600 *t*;

3-fermani siloslarga bo’lgan talabi: b_3= 550 *t*;

4-fermani siloslarga bo’lgan talabi: b_4= 500 *t*.

2-jadval.

	1-o’ra	2-o’ra	3-o’ra	V_j	U_j
1-ferma	s_{11} x_{11}	s_{21} x_{21}	s_{31} x_{31}	b_1	
2-ferma	s_{12} x_{12}	s_{22} x_{22}	s_{32} x_{32}	b_2	
3-ferma	s_{13} x_{13}	s_{23} x_{23}	s_{33} x_{33}	b_3	
4-ferma	s_{14} x_{14}	s_{24} x_{24}	s_{34} x_{34}	b_4	
a_i	a_1	a_2	a_{32}		
U_i					

⊙O’zgaruvchilarning belgilanishi:

x_{11} - 1-o’radan 1-fermaga tashiladigan silos miqdori;

x_{12} - 1-o’radan 2-fermaga tashiladigan silos miqdori;

x_{13} - 1-o’radan 3-fermaga tashiladigan silos miqdori;

x_{14} - 1-o’radan 4-fermaga tashiladigan silos miqdori;

x_{21} - 2-o’radan 1-fermaga tashiladigan silos miqdori;

x_{22} - 2-o’radan 2-fermaga tashiladigan silos miqdori;

x_{23} - 2-o’radan 3-fermaga tashiladigan silos miqdori;

x_{24} - 2-o’radan 4-fermaga tashiladigan silos miqdori;

x_{31} - 3-o’radan 1-fermaga tashiladigan silos miqdori;

x_{32} - 3-o’radan 2-fermaga tashiladigan silos miqdori;

x_{33} - 3-o'radan 3-fermaga tashiladigan silos miqdori;

x_{34} - 3-o'radan 4-fermaga tashiladigan silos miqdori.

3-jadval

	1-o'ra	2-o'ra	3-o'ra	V_j	U_j
1-ferma	4 x_{11}	6 x_{21}	3 x_{31}	450	
2-ferma	2 x_{12}	7 x_{22}	6 x_{32}	600	
3-ferma	5 x_{13}	3 x_{23}	4 x_{33}	550	
4-ferma	8 x_{14}	5 x_{24}	7 x_{34}	500	
a_i	650	750	700	2100	
U_i					

Bu masalada ta'minotchilarda (o'ralardagi) mavjud silos miqdori iste'molchilar (fermalar) talabi miqdoriga teng, shuning uchun qo'yilgan masala yopiq transport masalasi ekan, ya'ni:

$$Z_{min} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} C_{ij} X_{ij}$$

ya'ni $Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} C_{ij} X_{ij} = s_{11}x_{11} + s_{12}x_{12} + s_{13}x_{13} + s_{13}x_{14} +$

$+s_{21}x_{21} + s_{22}x_{22} + s_{23}x_{23} + s_{24}x_{24} + s_{31}x_{31} + s_{32}x_{32} + s_{33}x_{33} + s_{34}x_{34} =$

$= 4x_{11} + 2x_{12} + 5x_{13} + 8x_{14} + 6x_{21} + 7x_{22} + 3x_{23} + 5x_{24} + 3x_{31} + 6x_{32} + 4x_{33} + 7x_{34}$

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 650,$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 750,$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 700,$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 450,$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 600,$

$x_{13}+x_{23}+x_{33}=550$,

$x_{14}+x_{24}+x_{34}=500$.

x_{ij} ? 0.

Masalani echish uchun transport jadvalini tuzamiz va dastlabki tayanch rejani tuzish uchun «SHimoliy-g'arbiy burchak» qoidasini qo'llaymiz. Unga asosan eng yuqorigi chap katakka 450 yozamiz va birinchi satrni boshqa qaramaymiz. Ikkinchi satrning 1- ustuniga 200 yozamiz va birinchi ustunni boshqa qaramaymiz, chunki 1 - o'radagi silos 450+200=650 to'liq tarqatib bo'ldik. Keyin ikkinchi satr ikkinchi ustunga 400 yozamiz va ikkinchi satrni xam boshqa qaramaymiz va hakozo shu tariqa birinchi rejani hosil qilamiz:

Iterasiya 1

	1-o'ra	2-o'ra	3-o'ra	b_j	U_j
1-ferma	4 450	6	3	450	4
2-ferma	2 200	7 400	6	600	2
3-ferma	5	3 350	4 200	550	-2
4-ferma	8	5	7 500	500	1
a_i	650	750	700	2100	
U_i	0	5	6		

Bu reja bo'yicha tashish uchun ketgan umumiy xarajat:

$Z = 4\cdot450+2\cdot200+7\cdot400+3\cdot350+4\cdot200+7\cdot500=10350$ *t. km* dan iborat.

Tuzilgan rejaning optimal eki optimal emasligini potensiallar usuli yordamida tekshiramiz: U_i va U_j potensiallarni hisoblaymiz.

$U_1=0$ deb olib, to'ldirilgan kataklar uchun $U_i+U_j = C_{ij}$ shartning bajarilish shartidan qolgan potensiallarni topamiz $U_1=C_{11}-U_1=4-0=4$; $U_2=2-0=2$; $U_2=7-2=5$; $U_3=3-5=-2$; $U_3=4-(-2)=6$; $U_4=7-6=1$.

Endi to'ldirilmagan kataklar uchun $U_j + U_i < C_{ij}$ shartni tekshirib ko'ramiz :

[1:2] katak uchun 4+5 = 9 < 6 bajarilmaydi;

[1:3] katak uchun 4+6 = 10 < 6 bajarilmaydi;

[2:3] katak uchun 2+6 = 8 < 6 bajarilmaydi;

[3:1] katak uchun -2+0 = 2 < 5 bajariladi;

[4:1] katak uchun 1+0 = 1 < 8 bajariladi;

[4:2] katak uchun 1+5 = 6 < 6 bajarilmaydi.

Ravshanki 4 ta katakda qo'yilgan optimallik sharti bajarilmayapti. Demak tuzilgan reja optimal emas. YAngi reja tuzish uchun bu kataklar uchun yaxshilanish bahosini aniqlaymiz:

$$\Delta_{12} = 9\text{-}6=3; \quad \Delta_{13}= 10\text{-}3=7; \quad \Delta_{23}= 8\text{-}6=2; \quad \Delta_{42=}\ 6\text{-}5=1.$$

Bulardan eng kattasi Δ_{13}=7, demak shu [1:3] katak asosida yangi reja tuzamiz. Shu katak va boshqa ba'zi to'ldirilgan kataklar yordamida yopiq zanjir (sikl) tuzamiz.

Sikl [1:3] katakdan boshlanib, vertikal va gorizontal yo'nalishida to'ldirilgan kataklarni tutashtirish natijasida hosil qilinadi :

[1:3]→ [1:1]→ [2:1]→ [2:2]→ [3:2]→ [3:3].

+ - + - + -

bu kataklarga «+» yoki «-» ishoralar ketma-ket navbat bilan ko'rib chiqildi. [1:3] katakka albatta «+» ishora mos ko'yiladi. «-»lik ishorali kataklardagi sonlarning eng kichigi min{450, 400, 200}=200 ga teng. Bu holda «-» lik ishorali kataklardan 200 soni ayrib va «+» lik kataklarga 200 qo'shib yangi reja hosil qilamiz :

Iterasiya 2

	1-o'ra	2-o'ra	3-o'ra	b_j	U_j
1-ferma	4 250	6	3 200	450	4
2-ferma	2 400	7 200	6	600	2
3-ferma	5	3 550	4	550	-2
4-ferma	3	5	7	500	8

			500		
a_i	650	750	700	2100	
U_i	0	5	-1		

Bu holda $Z = 4{\cdot}250+3{\cdot}200+2{\cdot}400+7{\cdot}200+3{\cdot}550+7{\cdot}500 = 8950$ *t.km.*

Bu rejani ham potensiallar usuli yordamida optimalligini tekshiramiz va xokazo bu jarayonni optimal reja topilgancha, ya'ni tuldirilmagan kataklarning barchasi uchun $U_j + U_i < C_{ij}$ shart bajarilgancha davom ettiramiz. qaralayotgan misolimizda 4 ta iterasiyadan keyin optimal reja hosil qilindi.

Endi har bir iterasiya natijalarining jadvallarini keltiramiz (natijalar kompyuterda prog3.dasturida hisoblangan):

Iterasiya 3

	1-o'ra	2-o'ra	3-o'ra	b_j	U_j
1-ferma	4 50	6	3 400	450	4
2-ferma	2 600	7	6	600	2
3-ferma	5	3 550	4	550	6
4-ferma	3	5 200	7 300	500	8
a_i	650	750	700	2100	
U_i	0	-3	-1		

Iterasiya 4

	1-o'ra	2-o'ra	3-o'ra	b_j	U_j
1-ferma	4	6	3 450	450	3
2-ferma	2	7	6		

	600			600	2
3-ferma	5 50	3 500	4 *	550	5
4-ferma	3	5 250	7 250	500	7
a_i	650	750	700	2100	
U_i	0	-2	0		

YAkuniy optimal reja

	1-o'ra	2-o'ra	3-o'ra	b_j	U_j
1-ferma	4	6	3 450	450	4
2-ferma	2 600	7	6	600	2
3-ferma	5 50	3 250	4 250	550	5
4-ferma	3	5 500	7	500	7
a_i	650	750	700	2100	
U_i	0	-2	-1		

Bu optimal rejaga ko'ra umumiy xarajat:

$Z_{min} = 4x_{11}+2x_{12}+5x_{13}+8x_{14}+6x_{21}+ 7x_{22}+ 3x_{23}+ 5x_{24}+ 3x_{31}+ 6x_{32}+ 4x_{33}+ 7x_{34}$ $=3\cdot450+2\cdot600+5\cdot50+ 3\cdot250+4\cdot250+5\cdot500 =7050$ *t. km.* ga yoki 7050x300=2115 ming so'mga teng ekan.

Shunday qilib, yakuniy rejaga asosan: Birinchi o'radan ikkinchi fermaga 600 tonna va uchinchi fermaga - 50; Ikkinchi o'radan 3- fermaga- 250 va 4-ga 500 tonna; Uchinchi o'radan 1-chi fermaga 450 va 3-fermaga 250 tonna silosni tashilishi optimal ekan.

2- vazifa. Xo'jalikda uchta sut - tovar fermasi bo'lib, birinchi fermada - 500, ikkinchi fermada - 600 va uchinchi fermada - 400 bosh sigirlar boqiladi. Yillik o’rtacha sog’im har bir sigirdan 3000*kg* ni tashkil etib, sutning yog’lilik darajasi -3,8-4 % dir.

Sigirlarning vazni va mahsuldorligi hisobga olingan holda makkajuxori silosining yillik talabi aniqlangan. 75% namli makkajo’xori silosining oziqa sifatida ishlatilishi yiliga 300 kunni tashkil etadi. Bu talab har bir bosh sigirga 75 *s*, makkajuxori silosi demakdir. Xo’jalikda silos massasi to’rtta silos o’ralarda saqlangan bo’lib, 1-silos o’rada 25000 *s*, 2-silos o’rada 32500 s, 3 -silos o’rada 25000 *s* va 4-silos o’rada 30000 *s* mavjud. Silos saqlangan o’ralar va fermalar orasidagi masofalar (km) quyidagi 2.1- jadvalda berilgan.

2.1-jadval

Sut -tovar fermalari	*Silos o’ralari*			
	1	2	3	4
1-ferma	4	3	2	5
2-ferma	3	6	1	4
3-ferma	5	2	7	6

1 tonna- kilometr silos massasining tashish tannarxi - 450 so’m.

Quyidagilarni bajarish talab qilinadi: 1) Silos o’ralaridan sut tovar fermalarigacha bo’lgan yuk tashish umumiy xarajatlarini minimal ko’rsatkichini;

2) Olingan natijalarni tahlil qilish.

3-vazifa. Qo’ychilik xo’jaligida otarlar - 600 bosh qo’ydan iborat. Xo’jalikda uchta qo’ychilik fermasi bo’lib, 1- fermada bir otar qo’y, 2 - fermada ikki otar qo’y va 3 - fermada uch otar qo’y boqiladi.Qish oylarida 5 oy mobaynida har bosh qo’y uchun 4*s* oziqa makkajo’xori silosi belgilangan. Siloslar to’rtta silos o’ralarida saqlanadi: 1-o’rada 3000 *s*, 2-o’rada 5000, 3-o’rada 2400 va 4-o’rada 4000 *s*.

1 tonna silos massasini 1 kilometr masofaga tashish xarajati 820 so’mni tashkil etadi.

Quyidagilarni topish talab qilinadi:

1) Silos o’ralardan fermalargacha bo’lgan yuk tashish uchun ketgan jami xarajatni kamaytirish rejasini tuzing.

2) Olingan optimal echimlarni iqtisodiy tahlil qilish.

Fermalardan silos o’ralargacha bo’lgan masofa (*km*) 3.1-jadvalda berilgan.

3.1-jadval.

Fermalar	Silos o'ralari			
	1	2	3	4
1-ferma	3	4	2	5
2-ferma	1	3	6	9
3-ferma	8	6	5	2

4-vazifa. Xo'jalik ekin maydonlariga uch xil sortli kuzgi bug'doy ekiladi:1) Mironov 808 sorti - 1000 *ga*; 2) Bezostaya-1 sorti - 600 *ga*; 3)YAngi ukraina sorti - 400 ga maydonga. Xo'jalikda yangi haydalgan maydon - 800, silos uchun makkajuxori oraliq ekini-400 , pichan uchun ko'p yillik o't - 600 va dukkakli oraliq ekin 200 *ga* ni tashkil qiladi. Topish talab qilinadi: kuzgi bug'doyni oraliq ekinlar bilan ekish uchun shunday joylanish rejasini tuzingki olingan yalpi mahsulot eng ko'p bo'lsin. 4.1-jadvalda kuzgi bug'doy va oraliq ekinlarni o'rtacha hosildorligi berilgan.

4.1-jadval

Oraliq ekinlar	Kuzgi bug'doy navlari		
	Mironov -808	Bezostaya-1	YAngi ukraina-83
YAngi haydalgan maydon	30	28	25
Silos uchun makkauxori	28	26	24
Pichan uch. ko'p yillik o't	26	24	23
Dukkakli o'simliklar	28	30	22

Nazorat uchun savollar.

1. Transport masalalari qanday hollarda qo'yiladi?
2. Transport masalarining iqtisodiy ma'nosini tushuntirib bering.
3. Transport masalalarini echishda qo'llaniladigan optimallik mezonlari nimalardan iborat?
4. Transport masalalarini qanday turlari mavjud?
5. Statik va dinamik transport masalalarini tushuntirib bering.
6. Ochiq va yopiq transport masalalarining farqlari nimalardan iborat?

7. Ishlab chiqarish transport masalasini qanday tushunasiz?

Mavzu: Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalari

Reja:

1 Ehtimollar nazariyasining tarixi

2 Ehtimollar nazariyasining predmeti.

3 Tasodifiy hodislarni turlari.

4 Birlashmalar.

5 Ehtimolni klassik ta'rifi.

6 Ehtimolni xisoblashga doir misollar

7 Nisbiy sanoq (statistik ehtimol).

8 Geometrik ehtimol.

Tayanch iboralar: Ehtimollar nazariyasi, tasodifiy hodisa, statistik, geometric, birlashmalar

1. Ehtimollar nazariyasining tarixi

Bu ma'ruza matnlaridan ko'zda tutilgan maqsad talabalarga ehtimollar nazariyasi - tasodifiy hodislarni umumiy qonuniyatlarini o'rganuvchi fanni asosiy tushunchalarini bayon etishdan iborat.

Ehtimollar nazariyasini rivojlanishi XVII asrdan boshlanib frantsuz matematiklari Gyugens (1629-1695), Paskal (1623-1662), Ferma (1601-1665) va Yakob Bernulli (1654-1705) nomlari bilan bog'liq.

Paskal va Fermalarning yozib qoldirishicha o'sha davrninig buyuk matematik olimlari qimor o'yinlarini qonuniyatlarini matematik ifodalash maqsadida qilgan ishlari ehtimollar nazariyasini rivojlanishiga olib kelgan. Ular tasodifiy hodislar yuzasidan tajribalarni ko'paytirish natijasida ularning qonuniyatlari namoyon bo'lishini va bu qonuniyatlar fundamental filosofik qonuniyat bo'lib qolishini oldindan bilgan edilar.

Keyinchalik amaliy fanlar (kuzatishda qo'yilgan hayolar nazariyasi, otishlar nazariyasi, statistika muammolari, ayniqsa aholi statistikasi) ehtimollar nazariyasi oldiga katta vazifalar qo'ydi va bu vazifalarni hal qilish jarayonida ehtimollar nazariyasi katta analitik apparatga ega bo'ldi. Ana shu analitik metodlarni rivojlantirishda Muavr (1667-1754), Laplas (1749-1827), Gauss (1777-1855), Puasson (1781-1840) larning xizmatlari katta.

XIX asrning ikkinchi yarmidan boshlab ehtimollar nazariyasini buyuk olimlar V.Ya. Bunyakovskiy (1804-1889), P.L.Chebeshev (1821-1984), A.A. Markov (1856-1922), A.M. Lyapunov (1857-1918) rivojlantirish bilan birga statistika, sug'rta ishlariga, demografiya va boshqa sohalarga keng qo'lladilar.

Hozirgi zamonaviy ehtimollar nazariyasiga qiziqish ortishi bilan bu sohani rivojlantirishda S.N. Bernshteyn (1880-1968), A.N. Kolmogorov (1903-1987), A.Ya.Xinchin (1894-1959), Romanovskiylar katta hissa qo'shganlar. O'zbekistonda ehtimollar nazariyasi maktabini asoslagan va rivojlantirgan buyuk olimlar akademiklar T.A. Sarimsoqov va S. Sirojiddinovlardir. Keyingi paytlarda ularning shogirdlari akademiklar T.A. Azlarov, Sh. Farmonov va professorlar M.M. Mamatov, T.L. Malevich, M. Gafurovlar Ehtimollar nazariyasini rivojlanishiga katta xissa qo'shish bilan birga juda ko'p mutaxassislar tayyorlashda hissa qo'shganlar.

2. Ehtimollar nazariyasining predmeti

Tabiat va jamiyatni kuzatish natijasida xar xil hodislarga duch kelishimiz mumkin. Biz bu hodislarni o'rganib ularning qonunlarini aniqlab kundalik turmushimizda foydalanamiz.

Tajriba natijasida hodislarning ba'zilarini ro'y berishi anik; ba'zilarini "ro'y bermasligi aniq", ba'zilari esa "ro'y berishi ham, ro'y bermasligi ham mumkin".

Buni kuyidagi misollarda ko'ramiz:

1. Havoga og'ir jismni osmonga otsak, uni erga qaytib tushishi aniq.

2. Normal atmosfera bosimida harorati 0^0 dan 100^0 gacha bo'lgan suvni suyuq, 100^0 dan yuqori haroratda gaz holatida bo'lishi va 0^0 dan past haroratda qattiq bo'lishi aniq.

3. Yashikda hammasi oliy sifatli mahsulotlar bo'lsin. Yashikdan tasodifiy olingan maxsulotning oliy sifatli bo'lishi aniq.

4. №3 misol shartlarida tasodifiy olingan maxsulotning yaroqsiz bo'lishi mumkin emas.

5. Normal atmosfera bosimida suvni 20^0 haroratda qattiq bo'lishi mumkin emas.

6. Simmetrik, bir jinsli tangani tashlaganimizda gerb (g) tomoni yoki raqam (r) tomoni tushishi mumkin.

7. Tomonlari birdan oltigacha nomerlangan o'yin kubini tashlaganimizda juft raqam yozilgan tomoni yoki tog' raqam yozilgan tomoni tushishi mumkin.

8. Ixtiyoriy ravishda olingan zayomga yutuq chiqishi yoki yutuq chiqmasligi.

9. Har bir ishlab chiqarilgan maxsulotni sifatli yoki sifatsiz bo'lishi.

10. Yashikda 1-nav xamda 2-nav mahsulotlar bo'lsa, tasodifiy olingan mahsulot 1-nav bo'lishi .

Ta'rif. Tajribaning xar bir natijasiga hodis deyiladi.

Ta'rif. Tajribani amalga oshirishdagi zarur bo'lgan shartlarga kompleks shartlar deyiladi.

1-misolda jismning tezligi hamda erning tortishish kuchi, 2-5-misollarda normal atmosfera bosimi hamda suvning harorati, 6-misolda tangani simmetrikligi hamda bir jinsliligi va hokazolar kompleks shartlarni tashkil etadi. hodislarni tekshirishda kompleks shartlar asosiy o'rinni egallaydi. Bir turdagi hodislarni tekshirishda agar kompleks shartlarni o'zgartirsak, hodislar ham o'zgaradi. 2-

misolda normal atmosfera bosimini o’zgartirmasdan, haroratni 100^o dan orttirsak, suv gaz holatga, 0^odan pasaytirsak, suv qattiq holatga aylanadi. Yoki haroratni o’zgartirmasdan atmosfera bosimini ma'lum darajada orttirsak, suv qattiq holatga, ma'lum darajada kamaytirsak, suv gaz holatga o’tadi.

Shuning uchun ham hodislarni tekshirishda kompleks shartlarni o’zgarmas deb qaraymiz, ya'ni hodislarni bir xil sharoitda kuzatamiz. Ana shunday bir xil sharoitda kuzatilayotgan xodisalarni uch turga bo’lamiz: ishonchli, ishonchsiz xamda tasodifiy.

Ta'rif. Ishonchli hodislar deb ma'lum S kompleks shartlar bajarilganda ro’y berishi oldindan aniq bo’lgan hodislarga aytiladi. Yuqoridagi 1-3 misollardagi hodislar ishonchlidir.

Ta'rif. Ishonchsiz hodislar deb ma'lum S kompleks shartlar bajarilganda, ro’y bermasligi oldindan aniq bo’lgan hodislarga aytiladi. 4-5 misollardagi hodislar ishonchsizdir.

Ta'rif Tasodifiy hodislar deb ma'lum S kompleks shartlar bajarilganda ro’y berishi yoki ro’y bermasligi oldindan aniq bo’lmagan hodislarga aytiladi. 6-10 misollardagi hodislar tasodifiy.

Har bir tasodifiy hodis juda ko’p tasodifiy sabablar (masalan, otilgan o’qni nishonga tegishidagi sabablar - o’qni yo’nalishi, merganning mahorati va hokazolar) oqibatidir. Bu tasodifiy sabablarning hammasini hisobga olish xamda ularning xodisani ro’y berishiga qay darajada ta'sir etishini aniqlash mumkin emas. Chunki ularning soni juda ko’p hamda qonuniyatlari ham xar xil. Shuning uchun ehtimollar nazariyasi alohida olingan hodisni tekshirmasdan, balki bir jinsli ommaviy hodislarni tekshiradi. Ma'lum bo’lishicha, hodislar yuzasidan qancha ko’p tajribalar o’tkazilsa, ularning konuniyatlari shuncha aniq namoyon bo’ladi.

Ehtimollar nazariyasi bir jinsli, ommaviy, tasodifiy hodislarni umumiy qonuniyatlarini o’rganadi.

Ehtimollar nazariyasi metodlari juda ko’p fanlarda qo’llaniladi: ommaviy xizmat kursatish nazariyasida, fizikada, astronomiyada, geodeziyada, avtomatik boshqarish nazariyasida, matematik va amaliy statistikada va hokazolarda qo’llaniladi.

3 Tasodifiy hodislarning turlari

Ma'lumki tasodifiy hodislarga ta'rif berilganda “Ma'lum S kompleks shartlarning bajarilishi“ ni shart qilib qo’yiladi. Bundan keyin “Ma'lum S kompleks shartlarning bajarilishi“ deyish o’rniga qisqacha “tajribada“ yoki “sinashda“ so’zlarini ishlatamiz hamda tasodifiy hodisalarini lotin alfavitining bosh xarflari A, V, S... bilan belgilaymiz.

Ta'rif. Har bir sinashda hodisni ro’y berishi boshqalarining ro’y berishini inkor etsa, bunday hodislarga birga ro’y bermas hodislar deyiladi.

Misol: O’yin kubini tashlaganimizda 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamlar yozilgan tomonlardan birortasi tushsa qolgan raqamlar tushmaydi ya'ni tomonlardan birining tushishi qolganlarining tushishini inkor qiladi.

Ta'rif. Ikkita A va V hodislardan birining ro’y berishi boshqasining ro’y berishini inkor etmasa bunday hodislarga birga ro’y beruvchi hodislar deyiladi.

Misol: Mo’ljalga ikki marta o’q otilganda A hodissi birinchi o’qni mo’ljalga tegishi, V hodissi ikkinchi o’qni mo’ljalga tegishi bo’lsin. Birinchi o’qni nishonga tegishi ikkinchi o’qning nishonga tegishini inkor etmaydi. Shuning uchun bu hodislar birga ro’y beruvchi hodislardir.

Ta'rif. Sinashlarda qatnashayotgan hodislar bir nechta bo’lib, har bir sinashda ulardan faqat bittasi ro’y bersa, bunday xodisalarga birdan-bir imkoniyatli hodislar deyiladi.

Misol: O’yin kubini bir marta tashlaganda yoqlaridan faqat bittasi tushadi.

Ta'rif. A_1, A_2...An hodislariga to'la hodislar gruppasi deyiladi, agarda bulardan hech bo'lmasa bittasining ro'y berishi ishonchli bo'lsa.

Misol: Ikkita lotoreya xarid qilingan bo'lsa:

a) 1chi lotoreyaga o'yin chiqishi va 2-siga chiqmasligi;

b) 1chi lotoreyaga o'yin chiqmasdan 2-siga chiqishi;

v) ikkala lotoreyaga ham o'yin chiqishi;

g) ikkalasiga ham o'yin chiqmasligi.

Bu hodislar to'la hodislar gruppasini tashkil etadi, chunki bu hodislardan bittasi albatta ro'y beradi.

Ta'rif. Agar hodislardan birining ro'y berish darajasi boshqasining ro'y berish darajasidan ortmasa, bunday hodislarga teng imkoniyatli hodislar deyiladi.

Misol: Tangani tashlaganda "gerb" va "raqam" tomonlari tushishi teng imkoniyatli hodislardir. O'yin kubini tashlaganda har bir tomonini tushishi teng imkoniyatlardir.

Ta'rif. Birga ro'y bermas, birdan-bir imkoniyatli hamda to'la hodislar gruppasini tashkil etuvchi hodislarga elementar hodislar deyiladi. Tangani tashlaganda gerb tushishi, o'yin kubini tashlaganda biror tomoni tushishi, lotoreyaga yutuq chikishi va hokazolar elementar hodislar deyiladi.

4. Birlashmalar.

Hodisning ehtimolini hisoblash uchun zarur bo'lgan birlashmalarni qaraymiz.

1. O'rin almashtirishlar. n ta har xil elementlardan tuzilgan o'rin almashtirishlar deb biri biridan faqat elementlarining o'rinlari bilan farq qiladigan birlashmalarga aytiladi. Ularning soni quyidagicha aniqlanadi:

$P_n = n!$ bu erda $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

Keyinchalik harama-harshilikka duch kelmaslik uchun 0!=1 deb qabul qilamiz.

Misol: Uchta A, B, C elementlardan tuzilgan o’rin almashtirishlar soni topilsin.

Yechish. Ta'rifga asosan A, B, C elementlardan faqat o’rinlari bilan farq qiladigan birlashmalar tuzamiz, ya'ni

ABC BAC CAB

ACB BCA CBA

Demak, uchta elementdan tuzilgan o’rin almashtirishlar soni 6 ta ekan. Buni formula orqali hisoblasak ham bo’ladi.

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

2. O’rinlashtirishlar. **n** ta xar hil elementlardan **k** tadan tuzilgan o’rinlashtirishlar deb bir-biridan elementlari bilan hamda elementlarining o’rinlari bilan farq qiladigan birlashmalarga aytiladi. Ularning soni qo’yidagicha aniqlanadi:

$$A_k^n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))$$

Misol: Uchta A, B, C elementlardan ikkitadan tuzilgan o’rinlashtirishlar soni topilsin.

Yechish. Ta'rifga asosan bir-biridan elementlari hamda

elementlarining o’rinlari bilan farq qiladigan birlashmalar tuzamiz, ya'ni

AB, AC, BC

BA, CA, CB

Demak, ularning soni 6 ta ekan. Agar buni formulada hisoblasak:

Xulosa. Agar **n** ta elementdan **k** tadan tuzilgan o’rinlashtirishlarda bir xil elementlar takrorlansa, u holda **n** ta elementdan **k** tadan tuzilgan o’rinlashtirishlar soni qo’yidagi formula bilan hisoblanadi.

Masalan, 0, 1, 2, ... 9 raqamlardan tuzilgan besh xonali sonlar soni ga teng bo’ladi (bu erda 00000 xam besh xonali son).

3. **Gruppalashlar. n** ta har xil elementlardan **k** tadan tuzilgan gruppalashlar deb bir-biridan faqat elementlari bilan farq qiladigan birlashmalarga aytiladi. Ularning soni qo'yidagicha topiladi:

$$C^k = \frac{n!}{k(n-k)!}$$

Gruppalashlarda agar $k > \frac{n}{2}$ bo'lsa, $C_n^k = C_n^{n-k}$ tenglikdan foydalaniladi.

Misol. To'rtta A, B, C, D elementlardan ikkitadan tuzilgan gruppalashlar soni topilsin.

Yechish. Ta'rifga asosan 4 ta elementdan 2 tadan bir-biridan hech bo'lmasa bitta elementi bilan farq qiladigan birlashmalar tuzamiz:

AB, AC, BC, AD, BD, CD

Buni formula bilan hisoblasak: $C_4^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$

Agar birlashmalarda elementlar soni ko'p bo'lsa, uni oddiy yo'l bilan hisoblash qiyin, lekin formula bilan xisoblash oson. Biz ko'rgan birlashmalar o'zaro qo'yidagicha bog'lanishga ega:

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k$$

5. Ehtimolning klassik ta'rifi

Mulohazani misoldan boshlaylik. Skladda 7 ta rangli televizorlar bo'lib, shulardan 5 tasi yaroqli va 2 tasi yaroqsiz bo'lsin. Hamma televizorlar yaxshilab o'ralgan bo'lib, qaysilari yaroqsizligi ma'lum emas. Ma'lumki, tasodifiy olingan televizorni yaroqli chiqish imkoniyati yaroqsiz chiqish imkoniyatidan kattaroq. Bizning maqsadimiz shu imkoniyatni soniy baholashdan iborat. A - hodis, tasodifiy olingan televizorni yaroqli chiqishini bildirsin. Har bir tajribaning natijasi elementar hodisni tashkil etadi. Elementar hodislarni e_1, e_2, e_3,... xarflar bilan belgilaylik. Bizning misolimizda elementar hodislar soni 7 ta, ya'ni e_1, e_2, e_3 e_4, e_5, - yaroqli televizorlar chiqishi va e_6, e_7 - yaroqsiz televizorlar chiqishi. Bizni qiziqtirayotgan hodislarga sharoit yaratuvchi hodislar deyiladi. Yuqoridagi misolda ularning soni 5 ta (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5). Agar sharoit yaratuvchi hodislar soni 5 ni, hamma elementar hodislar soni 7 ga nisbatini olsak, 5/7 nisbat tasodifiy olingan bitta televizorni yaroqli chiqish ehtimolini beradi.

Ta'rif. A xodisaning ehtimoli deb shu hodisning ro'y berishiga sharoit yaratuvchi hodislar sonini hamma mumkin bo'lgan elementar hodislar soniga nisbatiga aytiladi va qo'yidagicha belgilanadi:

$$P(A)=\frac{k}{n}$$

bu erda k - A hodisning ro'y berishiga sharoit yaratuvchi hodislar soni, n- hamma mumkin bo'lgan elementar hodislar soni. Bu ta'rifdan quyidagi xossalar kelib chiqadi:

1-xossa. Ishonchli xodisaning ehtimoli birga teng.

$$P(U)=1$$

Haqiqatan ham, agar hodis ishonchli bo'lsa, u har bir sinashda albatta ro'y beradi, ya'ni sinashlar soni bilan ro'y berishlar soni teng (n=k) bo'ladi. hamma ishonchli hodislarni U bilan belgilaymiz. U holda

$$P(U)=\frac{k}{n}=\frac{n}{n}=1$$

2-xossa. Ishonchsiz hodisning ehtimoli nolga teng.

$$P(\mathrm{V})=0$$

Haqiqatdan, agar hodis ishonchsiz bo'lsa, u hech bir sinashda ro'y bermaydi, ya'ni sharoit yaratuvchi hodislar soni k q 0 bo'ladi. Agar ishonchsiz hodislarni V bilan belgilasak, u holda

$$P(V)=\frac{k}{n}=\frac{0}{n}=0$$

3-xossa. Tasodifiy hodisning ehtimoli nol va bir oraliqidagi songa teng.

$$0<P(A)<1$$

Haqiqatdan, agar hodis tasodifiy bo'lsa, uning ro'y berishiga hamma elementar hodislardan faqat bir qismi sharoit yaratadi, ya'ni

0 < k < n bo'ladi. Bu ikkilangan tengsizlikni n ga bo'lsak,

$$\frac{0}{n}<\frac{k}{n}<\frac{n}{n} \quad \text{yoki} \quad 0<\frac{k}{n}<1$$

Ta'rifga asosan k/n hodisni ro'y berish ehtimoli, demak

$$0<P(A)<1$$

Shunday qilib, hodisning ehtimoli quyidagi ikkilangan tengsizlikni qanoatlantiradi.

$$0\le P(A)\le 1$$

Demak, agar hodisning Ehtimoli nolga teng bo'lsa, hodis ishonchsiz, agar birga teng bo'lsa hodis ishonchli, agar nol bilan bir oralig'ida bo'lsa tasodifiy bo'ladi. Agar tasodifiy hodisning Ehtimoli nolga yaqin bo'lsa, hodis juda ham kam ro'y beradi, agar birga yaqin bo'lsa hodis tez-tez ro'y beradi. Shunday qilib, hodisning ehtimoli uning ro'y berish darajasini ko'rsatadi.

6. Ehtimolni xisoblashga doir misollar

1. O'yin kubi tashlanganda juft raqam yozilgan tomoni tushish Ehtimoli topilsin.

Yechish. O'yin kubida 6 ta tomoni bo'lib, har bir tomoniga 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamlardan biri yozilgan. Demak hamma yuz berishi mumkin bo'lgan hodislar soni n = 6. Juft raqam yozilgan tomoni tushishiga sharoit yaratuvchi hodislar esa 2, 4, 6 ya'ni ularning soni k = 3. Agar o'yin kubi tashlanganda juft tomoni tushishini A bilan belgilasak, uning ehtimoli ta'rifga asosan quyidagicha bo'ladi:

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

2. Besh tomlik kitob aralashtirib qo'yilgan. Shu kitoblarni tasodifiy ravishda olib bir hayorga tersak, kitoblar o'sish tartibida joylashish ehtimoli topilsin.

Yechish. 5 ta kitobni bir-biridan o'rinlari bilan farq qiladigan $P_5=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$ xil usul bilan olib terish mumkin. Bu esa hamma mumkin bo'lgan hodislar soni. Sharoit yaratuvchi hodislar soni faqat bitta, u ham bo'lsa kitoblar tomining o'sib borishi tartibida joylashishi. Shunday qilib, izlanayotgan hodisning ehtimoli

$$P(A)=\frac{1}{120}$$

. 3. Xaltachada 1 dan 10 gacha nomerlangan kublar bor. Tasodifiy ravishda uchta kub olindi. Olingan kublarda juft nomerlar yozilgan bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish: Tasodifan olingan kublarni uchchalasini ham juft nomerli bo'lish hodissini A bilan belgilaymiz. Hamma mumkin bo'lgan elementar hodislar soni 10 ta kubdan 3 tadan olingan o'rinlashtirishlar soniga teng bo'ladi, ya'ni

$$n=A_{10}^{3}=10\cdot 9\cdot 8=720$$

Nomerlari juft bo'lgan kublar soni 5 ta va bu 5 ta kubdan 3 tadan olingan, bir-biridan nomerlari hamda nomerlarining o'rni bilan farq qiladigan birlashmalar soni A hodisning ro'y berishiga sharoit yaratuvchi hodislar soniga teng, ya'ni

k = A 3/5 = 5 · 4 · 3 = 60

Demak, tasodifiy olingan kublarni uchalasi ham juft nomerli bo'lish ehtimoli quyidagicha bo'ladi:

$$P(A)=\frac{A_5^3}{A_{10}^3}=\frac{60}{720}=\frac{1}{12}$$

4. Magazinda 12 ta magnitofon bo'lib ikkitasi yaroqsiz. Tasodifiy ravishda 3 ta magnitafon olindi. Olingan magnitafonlarning hammasi yaroqli bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish: Tasodifiy olingan magnitafon yaroqli bo'lishi hodissini A bilan belgilaymiz. hamma elementar hodislar soni 12 ta magnitafondan 3 tadan olingan gruppalashlar soniga teng, sharoit yaratuvchilar soni esa 10 ta yaroqli magnitafonlardan 3 tadan olingan gruppalashlar soniga teng. Demak, ta'rifga asosan A hodisni ehtimoli quyidagicha bo'ladi;

$$P(A)=\frac{C_{10}^{3}}{C_{12}^{3}}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{12\cdot 11\cdot 10}=\frac{6}{11}$$

5. Magazinda 15 ta televizor bo'lib, shulardan 12 tasi yaroqli. Tasodifiy ravishda 5 ta televizor ajratildi. Ajratilgan televizorlar orasida 4 ta yaroqli televizor bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish: Masalani shartiga ko'ra, 15 ta televizordan 12 tasi yaroqli va 3 tasi yaroqsiz. Demak, 15 = 12 + 3. Tasodifiy ravishda 5 tasini olsak, shulardan 4 tasi yaroqli, bittasi yaroqsiz chiqishi (5= 4 + 1) ehtimolini topamiz. Bu erda hamma mumkin bo'lgan elementar hodislar soni C_{15}^{5}- 15 ta televizordan 5 tadan olingan gruppalashlar soniga, sharoit yaratuvchi hodislar soni $C_{12}^{4}C_{3}^{1}$ - ya'ni, 12 ta yaroqli televizordan 4 tadan, 3 yaroqsiz televizordan bittadan tuzilgan gruppalashlar ko'paytmasiga teng. Demak, ta'rifga asosan

$$P(A)=\frac{C_{12}^{4}\cdot C_{3}^{1}}{C_{15}^{5}}=\frac{\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{3}{1}}{\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}}=\frac{45}{91}$$

7. Nisbiy sanoq (statistik ehtimol)

Faraz qilaylik, biror A hodis yuzasidan bir xil sharoitda n marta sinashlar o'tkazilsin. Har bir sinashda hodis ro'y berishi yoki ro'y bermasligi mumkin. Agar sinashlarda hodis ro’y bersa 1, bermasa 0 bilan belgilaylik, ya'ni 1 hodisning ro’y berganligini, 0 esa ro’y bermaganligini bildirsin. U holda n marta sinashlarda quyidagi hayorga ega bo’lamiz:

1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, ...

Ma'lumki, sinashlar soni (hodisning ro’y berishlari hamda ro’y bermasliklari soni) n ta, shundan 1 lar soni м tasi ro’y berishlar soni bo’lsin, ya'ni

1+0+1+0+0+0+1+0+1+1+1+0+0+... = м

Ta'rif. Hodisning nisbiy sanog’i deb, uning ro’y berishlar sonini hamma sinashlar soniga nisbatiga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$W(A) = \frac{\mu}{n}$ bu erda м - hodisning ro’y berishlar soni, n - hamma sinashlar soni.

Nisbiy sanog’ni hisoblashda albatta tajriba o’tkaziladi. Eramizdan XXII asr oldin Xitoyda o’g’il bolalar tug’ilish sonini hamma tuqilgan bolalar soniga nisbati 1/2 ga yaqinligi aniqlangan. Laplas juda ko’p statistik ma'lumotlarga asoslanib, tug’ilgan o’g’il bolalar sonining jami tug’ilgan bolalar soniga nisbati taxminan 22/43 ga tengligini ko’rsatgan.

Xuddi shunday Byuffon tangani 4040 marta tashlaganda 2048 marta gerb tushgan, ya'ni gerb tushish nisbiy sanog’i W(Г)= 0,5080 ga teng bo’lgan. Pirson tangani 24000 marta tashlaganda 12012 marta gerb tushgan, ya'ni gerb tushish nisbiy sanog’i W(Г) = 0,505 bo’lgan.

Demak, tajribalar soni ortishi bilan nisbiy sanog’ biror o’zgarmas songa yaqinlashadi. Ana shunday o’zgarmas sonni hodisning ehtimoli deb olish mumkin. Bunday usulda aniqlangan ehtimolga hodisning statistik ehtimoli deyiladi.

Mizis hodisning ehtimolini quyidagi munosabat yordamida ko’rsatgan:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mu}{n} = P$$

Demak, sinashlar soni yetarlicha ortganda, hodisning nisbiy sanog’i uning ehtimoliga teng bo’lar ekan. Ba'zida shunday hodislar uchraydiki, ularning Ehtimollarini hisoblash mumkin emas. Bunday hollarda hodisning nisbiy sanog’ini ehtimol o’rnida ishlatiladi. Masalan, jamiyatda ishlab chiqarish uzluksiz davom etadi. hamma ishlab chiqarilgan mahsulotlarning soni noma'lum bo’lganligi uchun ishlab chiqarilgan mahsulot yaroqsiz bo’lish ehtimolini hisoblay olmaymiz. Shuning uchun ishlab chiqarilgan mahsulotlardan 100 ta, 1000 ta va hokazo mahsulotlarni tasodifiy olib yaroqsiz mahsulot ishlab chiqarilish nisbiy sanog’ini aniqlaymiz.

Misol: Ishlab chiqarilayotgan mahsulotlardan 100 ta olib tekshirish natijasida 5 ta yaroqsiz chiqdi. Ishlab chiqarilgan mahsulotlarni yaroqsiz bo’lish nisbiy sanog’i topilsin.

Yechish. Shartga ko’ra, $\mu = 5$, $n = 100$, demak,

$$W(A) = 5/100 = 0{,}05$$

Agar tekshirish uchun qancha ko’p mahsulot olinsa, natija shuncha aniq bo’ladi.

8. Geometrik ehtimol.

Ehtimoldni klassik tarif asosida xisoblashda sinashlar soni cheksiz bo’lsa klassik tarifning manosi yuqoladi. Bunday xollarda geometrik ehtimoldan foydalanamiz

To’g’ri chiziqda L kesmaga nuqtani tushushi ishonchli bo’lsa uni ichida joylashgan l kesmaga nuqtani tushish ehtimol quyidagicha bo’ladi

$$P = l \text{ uzun} / L \text{ uzun}$$

MAVZU: Ehtimollarni qo’shish va ko’paytirish teoremalari

Reja.

1. Birga ro'y bermas hodislarni ehtimollarini qo'shish teoremasi.

2. Hodislarni ko'paytirish. Shartli ehtimol.

3. Ehtimollarni ko'paytirish teoremalari .

4. Hech bo'lmasa bitta hodisni ro'y berish ehtimoli.

5. Birga ro'y beruvchi hodislarni ehtimollarini qo'shish teoremasi.

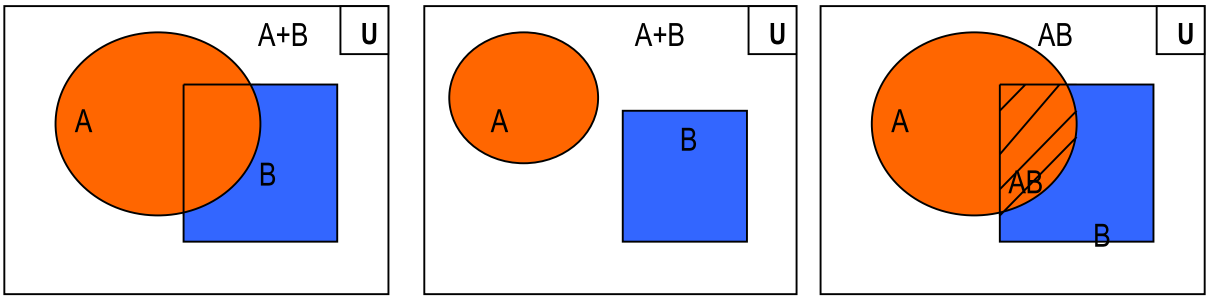
6. To'la ehtimol va Beyes formulalari

7. Gipotezalar ehtimoli. Beyes formulasi

Tayanch iboralar: Erkli , erksiz hodislar, hodislar yig'indisi, ko'paytmasi, shartli ehtimol, to'la ehtimol, bir-biriga teskari hodislar.

1. Birga ro'y bermas hodislarni ehtimollarini qo'shish teoremasi.

A va V hodislarning yig'indisi A + B deb, A ning ro'y berishi yoki B ning ro'y berishi yoki ikkalasini ham birgalikda ro'y berishiga aytiladi (17-chizma, a) Agar A hodissi 1-otilgan o'qni nishonga tegishini, B - 2-otilgan o'qni nishonga tegishini bildirsa, A + B - hodissi 1-o'qni yoki 2-o'qni yoki ikkala o'qning ham nishonga tegish hodissini bildiradi.



a) b) c)

17-chizma

Xususiy holda agar hodislar birga ro'y bermas bo'lsalar, u holda A+B hodissi A ning ro'y berishi yoki B ning ro'y berishini bildiradi (17-chizma b). Agar tashlangan nuqta katta to'rtburchakka tushishi aniq bo'lsa, hamda A hodis nuqtani

A sohaga tushishini, B hodis nuqtani V sohaga tushishini bildirsa, A+B hodissi nuqtani A sohaga yoki B sohaga tushishini bildiradi.

Faraz qilaylik A va B hodislari birga ro'y bermas hodislar bo'lsin xamda ularning ro'y berish ehtimollari ma'lum bo'lsin.

Teorema. Ikkita birga ro'y bermas hodislar yig'indisining ehtimoli shu hodislar ehtimollari yig'indisiga teng: R (A+ B) = R(A) + R(B)

Isbot: Faraz qilaylik n hamma mumkin bo'lgan elementar hodislar soni bo'lsin. k_1 - A hodisning ro'y berishiga sharoit yaratuvchi hodislar soni, k_2 – B hodisning ro'y berishiga sharoit yaratuvchi hodislar soni bo'lsin. U holda A+B hodisning ro'y berishiga $k_1 + k_2$ ta hodis sharoit yaratadi. Demak, ehtimolni klassik ta'rifiga asosan A+B ning ehtimoli

$$P(A+B)=\frac{k_1+k_2}{n}=\frac{k_1}{n}+\frac{k_2}{n}$$

Bu erda $P(A)=k_1/n,\qquad P(B)=k_2/n$

Demak, $P(A+B)=P(A)+P(B)$

Xulosa. $A_1, A_2, ..., A_n$ birga ro'y bermas hodislar yig'indisining ehtimoli shu hodislar ehtimollari yig'indisiga teng.

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$$

Misol. Magazinda 10 ta korobkada ko'ylaklar bo'lib, shulardan 5 tasi ko'k, 3 tasi zangori va 2 tasida oq. Haridor rangli ko'ylak talab qilayapti. Tasodifiy ravishda ochilgan korobkadan rangli ko'ylak chiqish ehtimoli topilsin.

Yechish. Ochilgan korobkada ko'k ko'ylak bo'lish hodissini A, zangori ko'ylak bo'lish hodissini B bilan belgilaymiz. U holda ta'rifga asosan:

R(A) = 5/10 , R(B) =3/10

A+B - hodissi ko'k yoki zangori ko'ylak chiqishini bildiradi va uning ehtimoli

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{5}$$

Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ birga ro'y bermas hodislar to'la hodislar gruppasidan iborat bo'lsa, ularning ehtimollari yig'indisi birga teng bo'ladi, ya'ni

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1$$

Haqiqatdan, to'la hodislar gruppasini tashkil etuvchi hodislardan birortasining ro'y berishi ishonchlidir. Ishonchli hodisning ehtimoli esa birga teng.

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1$$

Bu hodislar birga ro'y bermas bo'lganligi uchun:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

Bu keyingi tengliklarni solishtirsak yuqoridagi tenglik kelib chiqadi.

Agar to'la hodislar gruppasi 2 ta hodisdan iborat bo'lsa, ulardan birini A, ikkinchisini $\overline{A}$ bilan belgilasak,

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Ta'rif. Ikkita birdan bir imkoniyatli hodislar to'la hodislar gruppasini tashkil etsa, bunday hodislarga bir-biriga teskari hodislar deyiladi. Demak, A hodis $\overline{A}$ ga teskari hodis. Agar R(A)=r, R(_)= q bilan belgilasak,

r + q= 1 bundan r = 1- q, q = 1 - p

Bundan keyin har doim p - xodisaning ro'y berishi, q - hodisning ro'y bermasligi ehtimolini bildiradi.

Masalan: Nishonga o’q otilganda R(A)=p - o’qning nishonga tegish ehtimoli, R($\bar{A}$)= q - tegmaslik ehtimolini bildiradi.

2. Hodislarni ko’paytirish. Shartli ehtimol.

A va B hodislarning ko’paytmasi AB deb, shu hodislarning ikkalasini ham birgalikda ro’y berishiga aytiladi. Masalan, agar A hodissi talabani darsga qatnashmaganini bildirsa, uni ikki baho olganini esa B hodis bildirsa, u holda A B - darsga qatnashmagan talabaning 2 baho olganini bildiradi. v) shakldagi bo’yalgan soha A va B hodislarni ko’paytmasini ifodalaydi.

Bir nechta $A_1, A_2, ..., A_n$ hodislarning ko’paytmasi deb shu hodislarning hammasini birgalikda ro’y berishiga aytiladi.

Tasodifiy hodisga ta'rif berilganda ma'lum S kompleks shartlar bajarilishi talab etilgan edi. Agar ehtimolni hisoblashda tasodifiy hodisga S kompleks shartlardan tashqari yana qo’shimcha shartlar qo’yilmasa, bunday ehtimol shartsiz ehtimol deyiladi. Agar qo’shimcha shartlar ham qo’yilsa, bunday ehtimol shartli deyiladi.

Ta'rif. B hodisning shartli ehtimoli R_A(B) - deb, A hodis ro’y bergandan keyin V hodisning ro’y berish ehtimoliga aytiladi va qo’yidagicha aniqlanadi:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \qquad (P(A) > 0)$$

Misol. 28 ta domino toshidan ketma-ket ikkita tosh olinadi. 1- olingan tosh (5;5) bo’lsa, 2-olingan tosh bilan o’yinni davom ettirish ehtimoli topilsin.

Yechish. A hodissi 1-olingan toshni (5;5) chiqishini, V hodissi 1-olingan tosh (5;5) chiqqandan keyin 5 ligi bor tosh chiqishini bildirsin. 28 ta toshdan (5;5) tosh olingandan keyin (28-1) 27 ta tosh qoladi. (0;5), (1;5), (2;5), (3;5), (4;5), (5;5), (6;5) toshlardan ham (5;5) olindi va bularning soni 7 ta xodisadan bittaga kamaydi, ya'ni 7-1=6 ta qoladi. Demak, 1-olingan tosh (5;5) bo’lsa, qolgan mumkin bo’lgan hamma hodislar soni 27 ta va V hodissi ro’y berishiga sharoit yaratuvchi hodislar soni 6 ta. Shunday qilib 1 - olingan tosh (5;5) bo'lsa, 2-olingan tosh bilan o'yinni davom etilishi ehtimoli

$$R_A(B) = 6/27 = 2/9$$

3. Erksiz va erkli hodislarni ko'paytirish teoremalari

Ta'rif. Agar A va B hodislardan birining ro'y berishi boshqasini ro'y berish ehtimolini o'zgartirsa, bunday hodislarga erksiz (bir-biriga bog'liq) hodislar deyiladi.

Faraz: A va B erksiz hodislar berilgan bo'lsin.

Teorema. Ikkita A va B erksiz hodislar ko'paytmasining ehtimoli shu hodislardan birining ehtimoli bilan boshqasini oldingi hodis ro'y bergandan keyingi shartli ehtimoli ko'paytmasiga teng:

$$R\ (A(B)=R(A)\ (\ R_A(B)$$

Isbot. Shartli ehtimolning ta'rifiga asosan

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \qquad (P(A) > 0)$$

bundan $\qquad R\ (AB) = R(A)\ RA\ (B)$

Xulosa. Bir nechta erksiz hodislarning birga ro'y berish ehtimoli, shu hodislardan 1-chisining ehtimoli bilan qolganlarini, o'zidan avvalgilarining ro'y berish sharti bilan ro'y berish ehtimollari ko'paytmalariga teng

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cdot A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n)$$

Misol. Yashikda 10 ta mahsulot bo'lib, shulardan 8 tasi oliy sifatli. Tasodifiy ravishda 3 ta mahsulot olindi. Olingan mahsulotlarni hammasini oliy sifatli bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish: A_1 - 1- olingan mahsulotni, A_2 - 2-sini, A_3 - 3-sini oliy sifatli bo'lishini bildirsin. Demak, A_1 hodisning ehtimoli

$$P(A_1) = 8/10$$

A_1 ro'y bergandan keyin yashikda hammasi 9 ta mahsulot va bulardan 7 tasi oliy sifatli qoladi, shuning uchun

$$P_{A_1}(A_2) = 7/9$$

Endi A_1 va A_2 ro'y bergandan keyin yashikda 8 ta mahsulot qolib, shundan 6 tasi oliy sifatli, demak

$$P_{A_1,A_2}(A_3) = 6/8$$

Yuqoridagi teoremaga asosan

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1A_2}(A_3) = 8/10 \cdot 7/9 \cdot 6/8 = 7/15$$

Ta'rif. A va B hodislardan birining ro'y berishi boshqasining ro'y berish ehtimoliga ta'sir etmasa, bunday hodislarga erkli (o'zaro bog'liqsiz) hodislar deyiladi, ya'ni B hodisning A hodis ro'y bergandan keyingi ehtimoli B hodisning ehtimoliga teng bo'ladi

PA(B) =P(B)

Teorema. Ikkita A va B erkli hodislarni birgalikda ro'y berish ehtimoli shu hodislar ehtimollari ko'paytmasiga teng:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Isbot: Erksiz hodislarining ko'paytmasiga asosan

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

A va B hodislari erkli bo'lganligi uchun PA(B) =P(B) bo'ladi, buni yuqoridagi tenglikka qo'ysak

P(A·B) = P(A) · R(B)

kelib chiqadi.

Misol. Nishonga otilgan 1-o'qning tegish ehtimoli 0,7, 2-o'qning tegish ehtimoli 0,9 ga teng bo'lsa, ikkala o'qni ham nishonga tegish ehtimoli topilsin.

Yechish. Birinchi o'qni nishonga tegish hodissini A_1 bilan, ikkinchi o'qni nishonga tegish hodissini A_2 bilan belgilasak, shartga ko'ra ularning ehtimollari qo'yidagicha bo'ladi:

$$P(A_1) = 0{,}7, \quad P(A_2) = 0{,}9$$

Demak ikkala o'qni ham nishonga tegish ehtimoli

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63$$

Tasodifiy hodislarni birgalikda ro'y berish ehtimoli alohida olingan ehtimollarning ikkalasidan ham kichik bo'ladi.

$P(AB) < P(A)$, $P(AB) < P(B)$.

Xulosa. Bir nechta $A_1, A_2, \ldots, An$ erkli hodislarni birga ro'y berish ehtimoli shu hodislar ehtimollari ko'paytmasiga teng.

$$P(A_1, A_2, \ldots, An)\ q\ P(A_1) \cdot P(A_2)\ (\ldots\ldots(\ P(An)$$

Erkli hodislarni ko'paytirish va qo'shish teoremalaridan foydalanib, quyidagi ehtimollarni aniqlaymiz.

Faraz qilaylik, A_1, A_2, A_3 o'zaro erkli hodislar bo'lib, ularning ro'y berish hamda ro'y bermaslik ehtimollari ma'lum bo'lsin.

$p_1 = P(A_1)$, $p_2 = P(A_2)$, $p_3 = P(A_3)$

$q_1 = P(\_)$, $q_2 = P(\_)$, $q_3 = P(\_)$.

U holda A_1, A_2, A_3 hodislardan faqat bittasining ro'y berishini B_1, faqat ikkitasining ro'y berishini B_2 va uchchalasining birgalikda ro'y berishini B_3 bilan belgilasak, B_1 ni ehtimoli

$$P(B_1) = P(A_1 \overline{A_2}\, \overline{A_3}) + P(\overline{A_1}\, A_2 \overline{A_3}) + P(\overline{A_1}\, \overline{A_2}\, A_3)$$

A_1, A_2, A_3 hodislari erkli bo'lgani uchun

$$P(B_1) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3)$$

yuqoridagi belgilashlarga asosan

$$P(B_1) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3$$

Bu A_1, A_2, A_3 hodislaridan faqat bittasining ro'y berish ehtimoli.

Xuddi shunday A_1, A_2, A_3 erkli hodislardan faqat ikkitasini ro'y berish ehtimoli qo'yidagicha bo'ladi:

$$P(B_2) = p_1 p_2 q_3 + q_1 p_2 p_3 + p_1 q_2 p_3$$

Uchchala hodislarni birgalikda ro'y berish ehtimoli esa

$$P(B_3) = p_1 p_2 p_3$$

B_1, B_2, B_3 hodislar yig'indisining ehtimoli

$$P(A) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$$

hech bo'lmasa bitta hodisning ro'y berish ehtimolini bildiradi.

Agar B_1, B_2, B_3 hodislari hamda B_0 – A_1, A_2, A_3 hodislardan birortasini ham ro'y bermasligi birgalikda to'la hodislar gruppasini tashkil etadi. To'la hodislar gruppasi ehtimollarining yig'indisi birga tengligi bizga ma'lum.

$$P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 1$$

yoki

$$P(B_0) + P(A) = 1$$

bundan

$$P(A) = 1 - P(B_0)$$

ya'ni birdan hodislarning hammasini ro'y bermaslik ehtimolini ayirsak, hech bo'lmasa bitta hodisning ro'y berish ehtimoli kelib chiqadi.

Misol: Axtarilayotgan tovarni 3 ta magazinda bo'lish ehtimollari mos holda 0,9; 0,8 va 0,85 ga teng. a) faqat bitta magazinda, b) faqat ikkita magazinda, v) hamma magazinda, g) hech bo'lmasa bitta magazinda axtarilgan tovar bo'lish ehtimollari topilsin.

Yechish. A_1 - tovar 1-magazinda, A_2 - 2-magazinda, A_3 - 3-magazinda bo'lishini bildirsin. Shartga ko'ra bu hodislarning ro'y berish ehtimollari mos holda

$p_1 = 0,9, \quad p_2 = 0,8, \quad p_3 = 0,85$

ro'y bermaslik ehtimollari esa

$$q_1 = 0,1 \quad q_2 = 0,2, \quad q_3 = 0,15$$

a) axtarilayotgan tovarni faqat bitta magazinda bo'lish hodissini B_1 bilan belgilasak, B_1 ning ehtimolini yuqoridagi formulaga asosan hisoblaymiz.

$$P(B_1) = p_1q_1q_2 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3 = 0,9\cdot 0,2\cdot 0,15 + 0,1\cdot 0,8\cdot 0,15 + 0,1\cdot 0,2\cdot 0,15 =$$
$$= 0,027 + 0,012 + 0,017 = 0,056$$

b) Faqat ikkita magazinda bo'lish hodissini V2 bilan belgilasak u holda

$$P(B_2) = p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3 = 0,9\cdot 0,8\cdot 0,15 + 0,9\cdot 0,2\cdot 0,85 + 0,1\cdot 0,8\cdot 0,85 =$$
$$= 0,108 + 0,153 + 0,068 = 0,329$$

v) Uchchala magazinda ham axtarilayotgan tovarni bo'lish ehtimoli

$$P(B_3) = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,85 = 0,612$$

g) Hech bo'lmasa bitta magazinda axtarilayotgan tovarni bo'lishi ehtimoli

$$P(A) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 0,056+0,329+0,612 = 0,997$$

yoki $P(A) = 1 - P(B_0) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 1- 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,15= 0,997$

Demak, faqat bitta magazinda axtarilayotgan tovarni bo'lishi kam imkoniyatli bo'lsa ham, hech bo'lmasa bitta magazinda bo'lishi katta imkoniyatga ega ekan.

4. Hech bo'lmasa bitta hodisning ro'y berish ehtimoli

Biz yuqorida hech bo'lmasa bitta hodisning ro'y berish ehtimolini, xususiy holda aniqladik. Endi umumiy holda qaraymiz.

Faraz qilaylik $A_1, A_2, ..., A_n$ tasodifiy hodislar erkli bo'lib,

ularning ro'y berish Ehtimollari

$P(A_1), P(A_2), ..., P(A_n)$ ma'lum bo'lsin.

Teorema. $A_1, A_2, ..., A_n$ bir-biriga bog'liq bo'lmagan hodislardan hech bo'lmasa bittasining ro'y berish ehtimoli birdan shu hodislarga teskari $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$ hodislar ehtimollarining ko'paytmasini ayirmasiga teng.

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n$$

Isbot. A hodissi $A_1, A_2, ..., A_n$ hodislardan hech bo'lmasa bittasining ro'y berishini ifodalasin. U holda A hodissi bilan. $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot ... \cdot \overline{A}_n$ hodis bir-biriga teskari hodislar bo'ladi. Demak, A va $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot ... \cdot \overline{A}_n$ hodislarning ehtimollari yig'indisi birga teng.

$P(A) + P(\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n) = 1$ yoki $P(A) = 1 - P(\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n)$

Bu erda erkli hodislarni ko'paytirish teoremasidan foydalanib qo'yidagiga ega bo'lamiz.

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot ... \cdot P(\overline{A}_n)$$

Agar

$P(\overline{A}_1)=q_1,\quad P(\overline{A}_2)=q_2,\quad ....,\qquad P(\overline{A}_{n1})=q_n$

belgilashlar kiritsak

$P(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot ...\cdot q_n$

teoremaning isboti kelib chiqadi.

Misol. Ishchi 4 ta stanokni boshqarayapti. Bir soat davomida stanoklarning ishlamay qolishi ehtimollari mos holda 0,4; 0,5; 0,45; 0,6.

Shu vaqt davomida hech bo'lmasa bitta stanokni ishdan chiqish ehtimoli topilsin.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra bir soat davomida stanoklarning ishlamay qolish ehtimollari mos holda

$p_1=0{,}4\ ,\quad p_2=0{,}5\ ,\quad p_3=0{,}45\ ,\qquad p_4=0{,}6$

Demak, stanoklarning bir soat davomida ishlab turish ehtimollari mos holda quyidagicha

$q_1=1-p_1=0{,}6\ ,\quad q_2=1-p_2=0{,}5\ ,\quad q_3=1-p_3=0{,}55\ ,\qquad q_4=1-p_4=0{,}4$

Endi teoremaga asosan hech bo'lmasa bitta stanokni ishdan chiqish ehtimolini topamiz.

$$P(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot q_3\cdot q_4=1-0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}55\cdot 0{,}4=0{,}934$$

Demak, alohida olingan stanoklarning ishdan chiqish ehtimoli katta bo'lmasa ham, hech bo'lmasa bitta stanokni ishdan chiqishi katta ehtimolga ega bo'lar ekan. Xususiy holda $A_1, A_2,..., A_n$ hodislarning ro'y berish ehtimollari bir xil bo'lsa, ya'ni $P(A_1)=P(A_2)=...=P(A_n)=P$. U holda bu hodislardan hech bo'lmasa bittasining ro'y berish ehtimoli qo'yidagicha bo'ladi.

$$P(A)=1-q^n$$

Misol. Bir xil sharoitda ishlayotgan 250 ta bir xil priborlarni kuzatamiz. har bir proborni bir soat davomida ishdan chiqish ehtimoli 0,004 bo'lsa, biror soat davomida hech bo'lmasa bitta priborning ishdan chiqish ehtimoli topilsin.

Yechish. Shartga ko'ra, bir soat davomida har bir priborning ishdan chiqish ehtimoli 0,004, ishdan chiqmaslik ehtimoli esa

$$q = 1 - 0{,}004 = 0{,}996$$

Yuqoridagi formulaga asosan, bir soat davomida hech bo'lmasa bitta priborning ishdan chiqish ehtimoli quyidagicha hisoblanadi:

$$P(A) = 1 - (0{,}996)^{250} = 5/8$$

Demak, priborlarning har birini ishdan chiqish ehtimoli juda kichik bo'lishiga qaramasdan, agar priborlar soni ko'p bo'lsa ulardan hech bo'lmasa bittasini ishdan chiqish ehtimoli katta bo'lar ekan.

5. Birga ro'y beruvchi hodislar ehtimollarini qo'shish teoremasi.

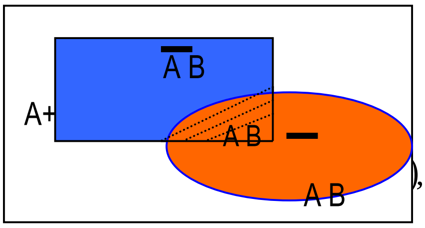
Ikkita A va B hodislardan birining ro'y berishi boshqasining ro'y berishini inkor etmasa, bunday hodislarga birga ro'y beruvchi hodislar deyiladi.

Faraz qilaylik A va B hodislari birga ro'y beruvchi hodislar bo'lib, ularning ro'y berish ehtimollari ma'lum bo'lsin.

Teorema. Ikkita A va B hodislardan hech bo'lmasa bittasining ro'y berish ehtimoli shu hodislar ehtimollari yig'indisidan ularni birgalikda ro'y berish ehtimolini ayirmasiga teng.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Isbot. A va B hodislari birga ro'y beruvchi bo'lganligi uchun A+B ning ro'y berishi (18-chizmaga qarang) $A\overline{B}, \overline{A}B, AB$ birga ro'y bermas hodislardan birini, ya'ni AB ni yoki AB ni yoki AB ning ro'y berishidan iborat bo'ladi.



$$P(A+B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) + P(AB) \quad (1)$$

Shakldan

),

$$P(B) = P(B\overline{A}) + P(AB)$$

Bulardan

18-chizma

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB), \qquad P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB)$$

Keyingi tengliklarni (1) ga qo'ysak

$$P(A+B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB);$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Misol: Ikkita mergan nishonga o'q otayapti. 1-merganning nishonni urish ehtimoli 0,7 , 2-siniki 0,6 ga teng. hech bo'lmasa bitta o'qni nishonga tegish ehtimoli topilsin.

Yechish: A hodissi 1-o'qni nishonga tegishini, B-hodissi 2-o'qni nishonga tegishini bildirsin. Masalaning shartiga ko'ra, bu hodislarning ehtimollari mos ravishda P(A) =0,7, P(B) = 0,6 bo'ladi.

Teoremaga asosan: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,7+0,6-0,7 \cdot 0,6 = 1,3-0,42=0,88$

6. To'la ehtimol formulasi.

Faraz qilaylik $B_1, B_2, ..., B_n$ birga ro'y bermas va to'la hodislar gruppasini tashkil etuvchi hodislardan birining ro'y berishi bilan A hodissi ham ro'y berishi mumkin bo'lsin hamda A hodisning shartli ehtimollari $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), ..., P_{B_n}(A)$ ma'lum bo'lsin.

Teorema. Birga ro'y bermas va to'la hodislar gruppasini tashkil etuvchi $B_1, B_2, ..., B_n$ hodislardan birining ro'y berishi bilan A hodissining ro'y berish ehtimoli, shu hodislar ehtimollari bilan A hodissining shartli ehtimollarini mos holda ko'paytmalarining yig'indisiga teng.

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A)$$

Isbot: $B_1, B_2, ..., B_n$ hodislar birga ro'y bermas hamda to'la hodislar gruppasini tashkil etadi, ($P(B_1)$ + +$P(B_2)$+........+$P(B_n)$=1). Demak, $B_1 \cdot B_2 \cdot ... \cdot B_n$ hodislardan birining ro'y berishi bilan A hodisning ro'y berishi $B_1A, B_2A, ..., B_nA$ birga ro'y bermas hodislardan birining ro'y berishi bilan ro'y beradi. Shuning uchun

$$P(A) = P(B_1A) + P(B_2A) + \ldots + P(B_nA) \quad (1)$$

A hodissi $B_1, B_2, \ldots, B_n$ hodislarni ro'y berishiga bog'liq bo'lganligi uchun, erksiz hodislarni ko'paytirish teoremasiga asosan

$$P(B_1A) = P(B_1)P_{B_1}(A), \; P(B_2A) = P(B_2)P_{B_2}(A), \; \ldots, \; P(B_nA) = P(B_n)P_{B_n}(A)$$

Bu tengliklarni (1) ga qo'ysak

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)$$

Bu formula to'la ehtimol formulasi deyiladi.

Misol: Ikkita ishchi bir xildagi mahsulotlar ishlab chiqarayapti. 60 protsent mahsulotni birinchi ishchi, 40 protsent mahsulotni ikkinchi ishchi ishlab chiqarayapti. 1-ishchi ishlab chiqargan mahsulot oliy sifatli bo'lish ehtimoli 0,7 ga, 2-ishchi ishlab chiqargan mahsulotning oliy sifatli bo'lish ehtimoli 0,8 ga teng. Ishlab chiqarilgan mahsulotlardan tasodifiy olingan mahsulot oliy sifatli bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish: A-ishlab chiqarilgan mahsulotni oliy sifatli ekanini bildirsin. Mahsulotni birinchi ishchi ishlab chiqarganligi hodissini V1, ikkinchi ishchi ishlab chiqarganligi hodissini V2 bilan belgilaymiz. 60 protsent mahsulotni birinchi ishchi, 40 protsent mahsulotni ikkinchi ishchi ishlab chiqargan, shuning uchun

$$P(B_1) = \frac{60\%}{100\%} = 0{,}6 \qquad P(B_2) = \frac{40\%}{100\%} = 0{,}4$$

Shartga ko'ra, agar mahsulotni birinchi ishchi ishlab chiqargan bo'lsa, uni oliy sifatli bo'lish ehtimolini $P_{B_1}(A) = 0{,}7$, ikkinchi ishchi ishlab chiqargan mahsulotlarni oliy sifatli bo'lishi ehtimoli $P_{B_2}(A) = 0{,}8$. Tasodifiy olingan mahsulotni oliy sifatli bo'lishi ehtimoli to'la ehtimol formulasiga asosan quyidagicha bo'ladi:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}74$$

Demak tasodifiy olingan mahsulotni sifatli ekanligi ehtimoli 0,74 ekan.

7. Gipotezalar ehtimoli. Beyes formulasi

Faraz qilaylik $B_1, B_2, ..., B_n$ to'la hodislar gruppasini tashkil etuvchi va birga ro'y bermas hodislardan birortasining ro'y berishi bilan A hodissi ro'y berishi mumkin bo'lsin. Biz to'la ehtimol formulasi bilan $B_1, B_2, ..., B_n$ hodislardan birining ro'y berishi bilan A hodisning ro'y berish ehtimolini hisobladik. Endi A hodissi ro'y bergandan keyin $B_1, B_2, ..., B_n$ hodislarining ro'y berish ehtimolini hisoblaymiz. $B_1, B_2, ..., B_n$ hodislardan qaysi biri oldindan ro'y berishi ma'lum bo'lmagani uchun bularga gipotezalar deyiladi.

A hodis ro'y bergandan keyingi $B_1, B_2, ..., B_n$ hodislarning ro'y berish ehtimollari $P_A(B_1), P_A(B_2), ..., P_A(B_n)$ larni hisoblaymiz. Buning uchun erksiz hodislarni ko'paytirish teoremasidan foydalanamiz:

$P(AB_1) = P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_{B_1}(A)$ bundan $P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_{B_1}(A)$

Bu tenglikda $P_A(B_1)$ ni topamiz:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}, \qquad P(A) > 0$$

$P_A(B_1)$ - A hodis ro'y bergandan keyin B1 hodisning ro'y berish ehtimoli. Xuddi shunday $P_A(B_1)$ - A hodis ro'y bergandan keyin V2 ni ro'y berish ehtimoli.

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(A)}, \qquad P(A) > 0$$

va hokazo. Umumiy holda esa A hodis ro'y bergandan keyingi Bi hodisni ro'y berish ehtimoli

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(A)}, \qquad P(A) > 0$$

Bunga Beyes formulasi deyiladi. Bu erda P(A) - to'la ehtimol formulasi.

Misol: Zavodni ikkita sexi bir xil mahsulot ishlab chiqarayapti. Ishlab chiqarilgan mahsulotning 3/5 qismini 1-sex, 2/5 qismini 2-sex ishlab chiqaradi, 1-sexda ishlab chiqarilgan mahsulotni yaroqsiz bo'lish ehtimoli 0,1,2-sexda ishlab chiqarilgan mahsulotning yaroqsiz bo'lish ehtimoli 0,05. Texnik kontrol bo'limi tasodifiy olingan mahsulotni yaroqsiz deb topdi. Shu mahsulot 1-sexda ishlab chiqarilgan bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish: B1 - mahsulotni 1-sexda ishlab chiqarilganligini, B2-mahsulotni 2-sexda ishlab chiqarilganligini bildirsin. U holda

P(B)= 3/5 = 0,6, P(B) = 2/5 = 0,4

A - hodissi ishlab chikarilgan maxsulotlarni yaroqsiz ekanini bildirsa, shartga ko'ra 1-sexda ishlab chiqarilgan mahsulotni yaroqsiz bo'lish ehtimolini $P_B(A) = 0{,}1$, 2-sexda ishlab chiqarilgan mahsulotni yaroqsiz bo'lish ehtimoli $P_{B_2}(A) = 0{,}05$. Beyes formulasiga asosan ishlab chiqarilgan yaroqsiz mahsulotni 1-sexga tegishli bo'lish ehtimolini topamiz.

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}1}{0{,}6 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}05} = \frac{0{,}06}{0{,}08} = \frac{3}{4}$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Hodislar yig'indisi, ko'paytmasi tushunchalari

2. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish tushunchalari

3. Shartli ehtimol ta'rifi.

4. Hech bo'lmasa bitta hodisni ro'y berish ehtimolini turlicha talqin qilish.

5. To'la ehtimol formulasi

6. Gipotezalar ehtimoli

MAVZU:TASODIFIY MIQDORLAR.DISKRET TASODIFIY MIQDORLAR.

REJA.

1 Tasodifiy miqdorlar. Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar.

2. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni.

3. Disktret tasodifiy miqdorning matematik kutishi va uning xossalari.

4. Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi va uning xossalari.

Tayanch iboralar: Tasodifiy miqdor, diskret tasodifiy miqdor, matematik kutish, chetlanish, dispersiya, o'rtacha kvadratik chetlanish.

1. Tasodifiy miqdorlar. Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar

Ishlab chiqarish jarayonida sifatli mahsulotlar soni eng asosiy faktor bo'lib hisoblanadi. har bir ishlab chiqarilgan mahsulotni sifatli bo'lishi esa juda ko'p tasodifiy omillarga bog'liq. Mahsulotni sifatli bo'lishi stanokni yaxshi ishlashiga, ishchini mahoratiga, kayfiyatiga, sharoitiga va hokazolarga bog'liqki, bu faktorlarni hammasini hisobga olib bo'lmaydi. Agar bu omillardan ijobiylari ko'p bo'lsa sifatli mahsulotlari soni xam ko'p bo'ladi.

Boshqa misol. O'yin kubini tashlaganda 1,2,3,4,5,6 ochkalardan bittasi tushadi, lekin ko'p marta tashlaganimizda shu ochkalardan 6 ni necha marta tushishi aniq emas. Chunki bu ko'p xisobga olib bo'lmaydigan tasodifiy sabablarga bog'liq.

Ta'rif. Tasodifiy miqdor deb tajriba natijasida qabul qilinishi mumkin bo'lgan qiymatlardan bitta va faqat bittasini qabul qiladigan va bu qiymatlarni qabul qilishi juda ko'p xisobga olib bo'lmaydigan darajadagi tasodifiy sabablarga bog'liq bo'lgan miqdorlarga aytiladi.

1-misol. 100 ta ishlab chiqarilgan mahsulotlardan sifatlilari soni tasodifiy miqdor bo'lib $0, 1, 2, ..., 100$ qiymatlardan faqat bittasini qabul qiladi.

2-misol. Miltiqlardan otilgan o'qni borib tushish masofasi tasodifiy miqdor bo'lib, oraliqdagi qiymatlardan albatta bittasini qabul qiladi.

1-misolda tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari diskret (natural sonlardan iborat)

2-misolda tasodifiy mikdor oraliqdagi ixtiyoriy sonlarni qabul qilishi mumkin. Shunga ko'ra tasodifiy miqdorlarni shartli ravishda diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlarga ajratamiz.

Ta'rif. Ma'lum Ehtimol bilan ayrim aniq qiymatlarni qabul qiluvchi miqdorlarga diskret tasodifiy miqdorlar deyiladi. Masalan: tangani 1000 marta tashlanganda gerb tushishlar soni, o'yin kubini 100 marta tashlaganda 5 ochko tushishlar soni, n marta erkli sinashda hodisning ro'y berish soni K diskret tasodifiy miqdorlardir. Diskret tasodifiy miqdorlarning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari to'plami chekli yoki cheksiz (sanog'li).

Ta'rif. Chekli yoki cheksiz oraliqdagi qiymatlarni qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlarga uzluksiz tasodifiy miqdorlar deyiladi.

Masalan: kesilgan materialni uzunligi, balandligi, enini uzunligi, ajratilgan mahsulotni og'irligi, Hajmi va hokazolar uzluksiz tasodifiy miqdorlardir. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari soni faqat cheksizdir. Tasodifiy miqdorlarni X,Y,Z....., katta xarflar bilan va ularga mos qiymatlarni x,u,z -kichik xarflar bilan belgilaymiz.

2. Diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni

Faraz qilaylik bizga X tasodifiy miqdor va uning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari $x_1, x_2, ..., x_n$ berilgan bo'lsin. Biz bu qiymatlarga mos ehtimollarni topamiz.

Ta'rif. Diskret taqsimlangan tasodifiy miqdor X ning taqsimot qonuni deb uning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari bilan ularga mos ehtimollar orasidagi moslikka aytiladi. Bu moslik qo'yidagi jadvalda ifodalanadi.

X	x_1	x_2	....	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Bu yerda $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$

Analitik $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ $P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np$ ko'rinishi esa

Misol. Tangani 5 marta tashlaganda gerb tushishlar soni tasodifiy miqdorni taqsimot qonuni topilsin.

Yechish. Tangani bir marta tashlaganda gerb tushish ehtimoli $p = \frac{1}{2}$ ga teng tushmaslik ehtimoli $q = 1 - p = \frac{1}{2}$ ga teng.

Bernulli formulasi $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ dan foydalanamiz. 5 marta tangani tashlaganda gerb tushushlar soni tasodifiy miqdor quyidagi qiymatlarni qadul qiladi K: 0,1,2,3,4,5 . Endi shu qiymatlarga mos ehtimollarni xisoblaymiz.

$$P_5(0) = C_5^0 (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$$

$$P_5(1) = C_5^1 (\frac{1}{2})^1 (\frac{1}{2})^4 = \frac{5}{32}$$

$$P_5(2) = C_5^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^3 = \frac{10}{32}$$

$$P_5(3) = C_5^3 (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^2 = \frac{10}{32}$$

$$P_5(4) = C_5^4 (\frac{1}{2})^4 (\frac{1}{2})^1 = \frac{5}{32}$$

$$P_5(5) = C_5^5 (\frac{1}{2})^5 (\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{32}$$

Endi K ni taqsimotini tuzamiz.

K	0	1	2	3	4	5
P_n	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

Tekshirish: $\frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = 1$

Binomial taqsimot. Faraz qilaylik n marta erkli sinashlar utkazilgan bo’lib xar bir sinashda xodisaning ro’y berish ehtimoli p va ro’y bermaslik ehtimoli q=1-p bo’lsin.

Bu erda tasodifiy miqdor K ning qiymatlari K: 0,1,2,...,n bo’ladi. Uning taqsimoti $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ Bernulli formulasi bilan aniqlanib qo’yidagi jadval ko’rinishda bo’ladi:

X=k	0	1	2	…	k	…	n-1	N
$P_n(k)$	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	$C_n^{n-1} p^{n-1} q$	$C_n^n p^n q^0$

Nyuton binomini qaraymiz.

$$(q+p)^n = C_n^0 q^n p^0 + C_n^1 q^{n-1} p^1 + ...+ C_n^k q^{n-k} p^k + ...+ C_n^n q^0 p^n = 1$$

Yuqoridagi taqsimotning mos ehtimollari binomni koeffitsentlari bilan mos tushganligi uchun bu taqsimotga binomial taqsimot deyiladi. Yuqoridagi misoldagi taqsimot xam binomial .

Puasson taqsimoti. Puasson taqsimoti analitik ko'rinishi

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np$$

Buni jadval ko'rinishi.

X=k	0	1	2	3	......
$P_n(k)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} t^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{3!} t^{-\lambda}$	.....

Bu Puasson taqsimoti deyiladi.

Geometrik taqsimot. Faraz qilaylik erkli sinashlar o'tkazilgan bo'lib xar bir sinashda A hodisning ro'y berish Ehtimoli p ($0<p<1$) va ro'y bermaslik Ehtimoli $q=1-p$ ga teng bo'lsin. Tajribani A xodisa ro'y bergangacha davom ettiramiz. Agar A xodisa k - sinashda ro'y bersa demak oldingi k-1 ta sinashda ro'y bermagan bo'ladi.

Bu erda tasodifiy miqdor X xodisani 1- marta ro'y berishi uchun o'tkazilgan sinashlar soni uning qabul kilishi mumkin bo'lgan qiymatlari $x_1=1$, $x_2=2$,..., .

Demak erkli hodislarni ko'paytirish teoremasiga asosan hodisni K -marta sinashda ro'y berishi

$$P(X=k) = pq^{к-1} \quad (*)$$

k ning 1,2,3,...., qiymatlarini formulaga qo'yib qo'yidagi hayorga ega bo'lamiz.

$$p,\ pq,\ pq^2,\ ....,\ pq^{k-1},\ ...$$

Bu hayor geometrik progressiyani tashkil etadi.Shuning uchun qo’yidagi taqsimot geometrik taqsimot deyiladi.

X=k	1	2	3	....	k	...
P(X=k)	P	pq	pq^2	.....	pq^{k-1}	....

Bu erda $\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)=1$

3. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutishi va uning xossalari

Tasodifiy miqdorni taqsimot qonuni uni ko’p tomonlama ifodalaydi. Lekin tasodifiy miqdorlarni o’rganishda bundan tashqari ba'zi asosiy tushunchalarni, ya'ni o’rta qiymat, chetlanish, dispersiya kabi tushunchalarni kiritishga to’qri keladi. Faraz qilaylik diskret tasodifiy miqdor berilgan bo’lsin.

X	x_1	x_2	.....	x_n
P	p_1	p_2	.....	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Ta'rif. Diskret taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutishi deb uning qabul qilishi mumkin bo’lgan qiymatlari bilan ularga mos ehtimollari ko’paytmalarining yig’indisiga aytiladi

$$M(X) = x_1p_1+x_2p_2+....+x_np_n$$

yoki

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Misol. O'yin kubini 3 marta tashlaganda 6 ochko tushish soni tasodifiy miqdorni matematik kutishi topilsin. Oldin taqsimotini topamiz.

X	**0**	**1**	**2**	**3**
P	125/216	75/216	15/216	1/216

Endi M(X) ni xisoblaymiz.

$$M(X) = 0\cdot 125/216 + 1\cdot 75/216 + 2\cdot 15/216 + 3\cdot 1/216 = \frac{75+30+3}{216} = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}$$

1- xossa. O'zgarmas sonni matematik kutishi o'ziga teng

$$M(C)=C$$

2-xossa. O'zgarmas sonni matematik kutishi ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin

$$M(CX)=CM(X)$$

3-xossa. Ikkita o'zaro erkli tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining (yigindisining) matematik kutishi shu tasodifiy miqdorlar matematik kutishlari ko'paytmasiga (yig'indisiga) teng

$$M(X\cdot У) = M(X)\cdot M(У)$$

$$M(X+У)=M(X)+M(У)$$

Umumiy xolda

$$M(x_1+x_2+....+x_n) = M(x_1) + M(x_2) +....+ M(x_n)$$

Matematik kutishning ehtimolli ma'nosi uning o'rta qiymatga taxminan tengligi

$$M(X) \approx \tilde{x}$$

Takror erkli sinashda xodisaning ro'y berish sonini matematik kutishi qo'yidagiga teng

$M(X) = np$

4. Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi va uning xossalari

Faraz qilaylik X tasodifiy miqdor, M(X) uning matematik kutishi bo'lsin.

1- Ta'rif. X tasodifiy miqdor bilan uning matematik kutishi orasidagi farqqa X-M(X) chetlanish deyiladi.

Teorema. Chetlanishning matematik kutishi nolga teng.

Xaqiqatdan

$$M[X - M(X)] = M[X] - M[M(X)] = M[X] - M(X) = 0$$

Misol. Diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni bilan berilgan.

X	2,5	3,2	5,0
P	0,4	0,5	0,1

Chetlanishni matematik kutishni toping.

M(X) =2,5 $\cdot$ 0,4 +3,2 $\cdot$ 0,5 +5,0 $\cdot$ 0,1 =1+1,6+0,5 =3,1

X-M(x)	-0,6	0,1	1,9
P	0,4	0,5	0,1

M[X-M(X)]=-0,6 $\cdot$ 0,4+0,1 $\cdot$ 0,05+1,9.0,1 =-0,4+0,05+0,19=-0,24+0,24 =0

O'rtacha chetlanish ya'ni chetlanishning matematik kutishi xar doim nolga teng bo'lganligi uchun chetlanishni kvadratga ko'tarib undan matematik kutish olamiz va chiqqan natijalardan kvadrat ildiz chiqarib o'rtacha chetlanishni o'rniga ishlatamiz.

2-ta'rif. Chetlanishning kvadratdan olingan matematik kutishga dispersiya deyiladi.

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

3-ta'rif. Dispersiyadan olingan kvadratik ildizga o'rtacha kvadratik chetlanish deyiladi.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Ta'rifga ko'ra dispersiya qo'yidagicha xisoblanadi.

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = [x_1 - M(X)]^2 p_1 +$$
$$+[x_2 - M(X)]^2 p_2 + ... + [x_n - M(X)]^2 p_n$$

Misol. Quyidagicha taqsimlangan diskret tasodifiy miqdorni dispersiyasi topilsin.

X	1	2	5
P	0,3	0,5	0,2

Yechish. Matematik kutishni topamiz:

$$M(X) = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot .0,2 = 2,3$$

Chetlanishlarini kvadratini topamiz:

$$[x_1 - M(X)]^2 = (1,3)^2 = 1,69$$

$$[x_2 - M(X)]^2 = (2-2,3)^2 = 0,09$$

$$[x_3 - M(X)]^2 = (5-2,3)^2 = 7,29$$

Dispersiyani ta'rifiga ko'ra

$$D(X) = 1{,}69 \cdot 0{,}3 + 0{,}09 \cdot 0{,}5 + 7{,}29 \cdot 0{,}2 = 2{,}01.$$

Teorema. Tasodifiy miqdor X ni dispersiyasi tasodifiy miqdorni kvadratini matematik kutishi bilan matematik kutish kvadrati ayirmasiga teng.

$$D(X) = M[X^2] - [M(X)]^2$$

Isbot.

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)] = M[X^2] -$$
$$-2M(X)M(X) + M^2(X) = M[X^2] - 2M^2(X) + M^2(X) = M[X^2] - [M(X)]^2$$

Bunga dispersiyani hisoblash formulasi deyiladi.

Misol. Quyidagi **x** tasodifiy miqdorni dispersiyasini toping.

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Yechish. Matematik kutishni topamiz.

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}3 = 3{,}5$$

X^2 ni taqsimotini topamiz.

X^2	4	9	25
p	0,1	0,6	0,3

$$M(X^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}6 + 25 \cdot 0{,}3 = 13{,}3$$

$$D(X) = M[X^2] - [M(X)]^2 = 13{,}3 - (3{,}5)^2 = 1{,}05.$$

Endi dispersiyani xossalarini ko’ramiz.

1- xossa. O’zgarmas sonni dispersiyasi nolga teng

$$D(C) = 0$$

Xaqiqatdan

$$D(C) = M[C - M(C)]^2 = M[C - C] = M(0) = 0$$

2-xossa. O’zgarmas sonni dispersiya ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin.

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

xaqiqatdan

$$D(CX)=M[CX-M(CX)]^2=M(C^2[X-M(X)]^2)=C^2M[X-M(X)]^2=C^2D(X)$$

3-xossa. Ikkita erkli tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi shu tasodifiy miqdorlar dispersiyalari yig'indisiga teng.

$$D(X + У) = D(X) + D(У)$$

Umumiy holda

$$D(x_1+x_2+....+x_n) = D(x_1)+ D(x_2)+....+ D (x_n)$$

Bundan tashqari

$$D(X+C) = D(X)$$

Xulosa. Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ayirmasining dispersiyasi dispersiyalar yig'indisiga teng:

$$D(X-У) = D(X) + D(У)$$

Isbot. $D(X-У) = D(X) + D(-У) = D(X)+(-1)^2 D(У) = D(X)+D(У)$.

4-xossa. O'zaro bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining dispersiyasi shu tasodifiy miqdorlar dispersiyalari ko'paytmasiga teng:

$$D(X \cdot У) = D(X) \cdot D(У)$$

Takror erkli sinashlarda xodisa ro'y berish sonining dispersiyasi

$$D(X) = npq.$$

Mustahkamlash uchun savollar

Tasodifiy miqdor deb nimaga aytiladi.

Diskret tasodifiy miqdor deb nimaga aytiladi.

Diskret tasodifiy miqdor dispersiyasi ta'rifini bering.

O’rtacha kvadratik chetlanish tushunchasini kiritilish sababi.

MAVZU: UZLUKSIZ TASODIFIY MIQDORLAR.

REJA:

1. Taqsimot funksiyasi va uning xossalari.

2. Taqsimot zichligi funksiyasi va uning xossalari.

3. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari.

1. Taqsimot funksiyasi va uning xossalari.

Agar tasodifiy miqdorni qiymatlari soni chekli bo’lsa ularni qiymatlari hamda mos ehtimollarini aniqlab taqsimot qonuni topilar edi.

Agar tasodifiy miqdorlar qiymatlari soni cheksiz bo’lsa ularni ehtimollarning hisoblab bo’lmaydi.Hatto qiymatlarini ham topishni iloji yo’q.

Bunday hollarda boshqacha yo’l tutiladi ya'ni taqsimot funksiyasi tushunchasi kiritiladi.

Faraz qilaylik X -tasodifiy miqdor, x - xaqiqiy son bo’lsin.

Ta'rif X tasodifiy miqdorni x- xaqiqiy sondan kichik qiymat qabul qilish ehtimoliga taqsimot funksiyasi deyiladi.

$$F(x) = P(X < x)$$

1- xossa. Taqsimot funksiyasi qiymatlari [0;1] segmentda yotadi.

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

Isboti Ehtimolni xossasidan kelib chiqadi.

2- xossa. Taqsimot funksiyasi kamaymovchi funksiya, ya'ni

$F(x_1) \leq F(x_2)$ agar $x_1 < x_2$ bo'lsa.

Isbot. Faraz qilaylik $x_1 < x_2$ bo'lsin. U holda $X < x_2$ hodissi

$X < x_1$ va $x_1 < X < x_2$ hodislarni yig'indisidan iborat bo'ladi va bularning ehtimolini

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

Bundan $\quad P(X < x_2) - P(X < x_1) = P(x_1 < X < x_2)$

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X < x_2). \quad (*)$$

Ehtimol noldan katta bo'lganligi uchun $F(x_2) - F(x_1) \geq 0$ demak

$F(x_2) > F(x_1)$ shuni isbotlash kerak edi.

1-xulosa. Agar (*) tenglikda $a = x_1$ $b = x_2$ desak

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

hosil bo'ladi. Bu tasodifiy miqdor X ni berilgan oraliqqa tushish ehtimoli.

2-xulosa. Agar oxirgi tenglikda $a = x_1$, $b = x_1 + \Delta x$ bo'lsa

$$P(x_1 \leq X \leq x_1 + \Delta x) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)$$

$F(x)$ uzluksiz bo'lsa $\Delta x \to 0$ da limitga o'tsak $\quad P(X = x_1) = 0.$

Demak, uzluksiz tasodifiy miqdorni aniq bir qiymatni qabul qilish ehtimoli nolga teng shuning uchun.

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b)$$

tengliklar o’rinli.

3 -xossa. Agar tasodifiy miqdorni qiymatlari (a; b) oraliqda bo’lsa

F (x) =0 bo’ladi, agar x < a bo’lsa

F (x) =1 bo’ladi, agar x > b bo’lsa.

Xulosa.

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

2.Taqsimot zichligi funksiyasi va uning xossalari

Faraz qilaylik F (x) taqsimot funksiyasi bo’lsin.

Ta’rif. X tasodifiy miqdor uzluksiz deyiladi agar uning taqsimot funksiyasi uzluksiz bo’lsa.

F(x) uzluksiz bo’lib 1 tartibli uzluksiz hosilaga ega bo’lsin.

Ta'rif. Taqsimot funksiyasidan olingan 1-tartibli hosilaga taqsimot zichligi funksiyasi deyiladi.

$$f(x) = F'(x)$$

1 -xossa. Taqsimot zichligi funksiyasi manfiy emas.

$$f(x) \ge 0$$

Xaqiqatdan, taqsimot zichligi funksiyasi kamaymovchi funksiyaning hosilasi, shuning uchun uning qiymatlari manfiy bo’lmaydi.

2-xossa. Taqsimot zichligi funksiyasidan olingan xosmas integral 1 ga teng:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Bu integral tasodifiy miqdorni son o'qiga tushish Ehtimolini bildiradi. Bu hodis ishonchli shuning uchun uni Ehtimoli 1 ga teng.

Teorema. Uzluksiz tasodifiy miqdorni berilgan (_) oraliqdagi qiymatlarni qabul qilish Ehtimoli zichlik funksiyadan shu oraliqda olingan aniq integralga teng.

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Misol. X tasodifiy miqdor taqsimot zichligi funksiyasi bilan berilgan.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Tajriba natijasida tasodifiy miqdorni (0,5;1) intervaldagi qiymatlarni qabul qilish Ehtimoli topilsin.

$$P(0{,}5 < x < 1) = 2\int_{0,5}^{1} xdx = 2\frac{x^2}{2} /_{0,5}^{1} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

Agar taqsimot zichligi funksiyasi aniq bo'lsa taqsimot funksiyasi qo'yidagi formula bilan topiladi.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

3. Uzluksiz tasodifiy miqdorning son xarakteristikalari

Faraz qilaylik X tasodifiy miqdor bo'lib, f(x) uning taqsimot zichligi funksiyasi bo'lsin. X tasodifiy miqdorning qiymatlari $[a,b]$ segmentda bo'lsin.

Ta'rif. qiymatlari (a;b) oraliqda bo’lgan tasodifiy miqdor X ning matematik kutishi deb qo’yidagi aniq integralga aytiladi:

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx \qquad (1)$$

Ta'rif. qiymatlari (a;b) oraliqda bo’lgan X tasodifiy miqdorni dispersiyasi deb chetlanishni kvadratidan olingan matematik kutishga aytiladi.

$$D(X)=\int_a^b [X-M(X)]^2 f(x)dx$$

yoki

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2$$

O’rtacha kvadratik chetlanish

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

Misol. Uzluksiz tasodifiy miqdor X taqsimot funksiyasi bilan berilgan.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{x^2}{9} & 0<x<3 \\ 1 & x>3 \end{cases}$$

X ni matematik kutishi, dispersiyasi va o’rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

Oldin zichlik funksiyasini topamiz:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{2x}{9} & 0<x<3 \\ 0 & x>3 \end{cases}$$

endi M(x) ni topamiz.

$$M(X)=\int_0^3 x\frac{2x}{9}dx=\frac{2}{9}\int_0^3 x^2dx=\frac{2}{9}\frac{x^3}{3}\Big|_0^3=\frac{2}{9}\cdot\frac{3^3}{3}-\frac{2}{9}\cdot\frac{0^3}{3}=2$$

Demak x=2 chiziq yuzani teng ikkiga bo'ladi.

Endi dispersiyani hisoblaymiz.

$$D(X)=\int_0^3 x^2 f(x)dx-[M(X)]^2=\int_0^3 x^2\cdot\frac{2x}{9}dx-2^2=\frac{2}{9}\int_0^3 x^3dx-4=$$

$$=\frac{2}{9}\frac{x^4}{4}\Big|_0^3-4=\frac{3^4}{9\cdot 2}-\frac{0^4}{9\cdot 4}-4=\frac{9}{2}-4=4{,}5-4=0{,}5$$

O'rta kvadratik chetlanishi

$$\sigma(X)=\sqrt{0{,}5}\approx 0{,}7$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi.

2. Uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi.

3. Normal taqsimot qonuni.

4. Ko'rsatkichli taqsimot qonuni.

MAVZU:Matematik statistikaning asosiy masalalari.

Tayanch tushuncha va iboralar:

Bosh va tanlanma to‘plamlar. Guruhlangan va interval variatsion qatorlar. Tanlanmani dastlabki qayta ishlash. Empirik taqsimot funksiya. Empirik ko‘rsatkichlar va ularni hisoblash. Statistik baho tushunchasi. Nuqtaviy baholar va baholarni tuzish usullari.

1.Matematik statistika predmeti

Oldingi bo`limlardan ma`lumki, ehtimollar nazariyasi tasodifiy hodisalar bilan bog`liq jarayonlarning matemetik modellarini o`rganish bilan shug`ullanadi. Ixtiyoriy tasodifiy jarayonlarga mos matematik modellar yordamida bizni qiziqtirayotgan u yoki bu hodisalarning ro`y berish ehtimolligini topishimiz mumkin.

Matematik statistika tasodifiy hodisalar yoki jarayonlar haqida shu hodisalarni kuzatish yoki tajribalar natijasida olingan ma’lumotlar asosida umumiy xulosalar chiqaradigan matematik fandir. Bu xulosalar umumiylik xususiyatlariga ega bo‘lib, kuzatilayotgan tasodifiy holatlarning barchasiga taaluqlidir. Matematik statistika ehtimollar nazariyasiga tayangan holda, uning usullari va nazariy hulosalari asosida o‘rganilayotgan obyekt haqida xulosalar chiqaradi. Agarda ehtimollar nazariyasida biz o‘rganayotgan matematik model to‘la-to‘kis berilgan deb hisoblab, bu model bizni qiziqtirayotgan holatlarni o‘rgansak, matematik statistikada biz qandaydir tasodifiy hodisalar natijalaridan kelib chiqqan holda(bular ko‘pchilik hollarda sonlardan iborat bo‘ladi), tasodifiy jarayonlarning matematik modelini tuzishga harakat qilamiz. Matematik statistika o‘zining xulosa chiqarish usullari yordamida o‘rganilayotgan obyektning nazariy ehtimoliy modelini tuzishga qaratilgan. Masalan, Bernulli sxemasida biz kuzatayotgan A hodisaning bitta tajribada ro‘y berish ehtimolligi p bo‘lsin. Bizni n ta bog‘liqsiz tajribalar natijasida A hodisasining $k(k \le n)$ marta ro‘y berish ehtimolligi qiziqtirsin. Bu masala ehtimollar nazariyasining usullari bilan to‘liq hal etiladi. Endi shunday masala qo‘yilsin: n ta bog‘liqsiz tajribalarda bizni qiziqtiradigan A hodisa k marta ro‘y bersin. U holda shu hodisaning bitta tajribada ro‘y berish ehtimolligi p deb qanday miqdorni olish kerak? Bu hol matematik statistikaning namunaviy masalasidir. Ko‘rinib turibdiki, matematik statistika masalalari ehtimollar nazariyasi masalalariga teskari masalalar ekan.

Matematik statistika o‘z hulosalarida biz qiziqayotgan tasodifiy hodisalarni tavsiflaydigan, odatda sonlardan iborat bo‘lgan statistic ma’lumotlar asosida o‘rganilayotgan tasodifiy jarayonning nazariy-ehtimoliy qonuniyatlarini tuzish uchun turli usullarni ishlab chiqishga qaratilgandir.

Endi Bernulli sxemasi misolida matematik statistika shug‘ullanadigan va hal qilinadigan asosiy masalalarni ko‘rib chiqaylik.

I. Noma’lum parametrni statistik baholash. n ta tajriba natijasida biz kuzatayotgan A hodisa m marta ro‘y bersin. U holda, shu ma’lumotlar asosida biz shunday $\hat{p}$ miqdorni aniqlaylikki, uni $p = P(A)$ sifatida qabul qilish mumkin bo‘lsin. Bizning holimizda A hodisaning chastotasini $\hat{p} = \frac{m}{n}$ deb qabul qilishimiz tabiiy. Albatta, biz statistik baho deb taklif etayotgan $\hat{p}$ miqdor ma'lum ma'noda noma'lum parametr p ga yaqin bo'lishi kerak.

II.Ishonchlilik oralig'i. Ba'zi hollarda noma'lum parametr p ning aniq qiymati emas, balki 1 ga yetarlicha yaqin ehtimollik bilan uning qiymatini statistik ma'lumotlar asosida aniqlanadigan biror $[\hat{p}_1;\hat{p}_2]$ oraliqqa tegishli bo'lishi qiziqtiradi. Bunda oraliq chegaralari $\hat{p}_1$ va $\hat{p}_2$ - t.m.lar faqat m ga bog'liq bo'ladi. Tajriba natijasida to'liq aniqlanadigan $[\hat{p}_1;\hat{p}_2]$ oraliq - ishonchlilik oralig'i deyiladi.

III. Statistik gipotezalarni tekshirish. Faraz qilatlik, qandaydir (aprior) mulohazalar asosida $p = p_0$ degan xulosaga keldik. Bu yerda p_0 - aniq miqdor. Nisbiy chastota $\frac{m}{n}$ asosida biz statistik gipoteza $p = p_0$ ning to'g'ri yoki noto'g'riligini tekshirishimiz kerak. Yetarli katta n lar uchun $\frac{m}{n}$ nisbiy chastota p ehtimollikka yaqin bo'lgani uchun, statistik gipoteza $p = p_0$ ni tekshiruvchi alomat $\left|\frac{m}{n} - p_0\right|$ ayirma asosida quriladi. Agarda bu ayirma katta bo'lsa, asosiy gipoteza $p = p_0$ rad etiladi, agarda bu ayirma yetarlicha kichik bo'lsa, statistik gipotezani rad etishga asos bo'lmaydi.

Yuqorida ko'rsatilgan va boshqa statistik ma'lumotlarni hal etish matematik statistikaning vazifasidir. Matematik statistika bu masalalarni o'zining tushunchalari va statistik usullari bilan hal etadi.

2. Bosh va tanlanma to'plam

Aytaylik, ishlab chiqarilgan mahsulotlarning katta to'piga tegishli biron-bir xususiyat (masalan, mahsulotning o'lchami, og'irligi, narxi va hokazo) o'rganilayotgan bo'lsin. To'pga tegishli barcha mahsulotlar *bosh to'plamni* tashkil qiladi deyiladi. Ko'p hollarda , bosh to'plamga mahsulotlar juda ko'p miqdorda bo'lib, ularning barchasini uzluksiz o'lchash amaliyotda mumkin bo'lmaydi. Ba'zi hollarda bu umuman mumkin bo'lmasa, ayrim hollarda juda katta xarajatlarni talab qiladi. Bunday hollarda bosh to'plamdan tasodifiy ravishda chekli sondagi mahsulot ajratib olinadi va ularning xususiyatlari o'rganiladi. Bu jarayon tanlanmalarga olib keladi. Demak, *tanlanma* bosh to'plamdan tasodifiy ravishda olingan elementlar. Tanlanmalar usuli deganda biz bosh to'plamdan tasodifiy ravishda olingan elementlarga xos bo'lgan qaralayotgan xususiyatlarni statistik tahlil qilib, shular asosida bosh to'plam elementlariga xos bo'lgan xususiyatlar haqida umumiy xulosalar chiqarishni tushunamiz.

Matematik statistikada har qanday mulohaza va xulosalar statistik ma’lumotlarga yoki boshqacha qilib aytganda tajriba natijalariga tayanadi. Odatda tajriba natijalari taqsimoti $F(x)$ bo‘lgan X t.m.ning $X_1, X_2, ..., X_n$ kuzatilmalaridan iborat bo‘ladi. Demak, kuzatilmalar bog‘liqsiz va X t.m. bilan bir xil taqsimlangan t.m.lar ekan.

✓ Kuzatilmalardan tuzilgan ($X_1, X_2, ..., X_n$) vektor hajmi n ga teng bo‘lgan t*anlanma* deyiladi.

Endi X bilan X t.m. qabul qiladigan qiymatlar to‘plami bo‘lsin. X to‘plam bosh to‘plamdan iborat bo‘ladi. X to‘plam chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin. Mavzu boshida ko’rilgan misoldagi barcha mahsulotlarning xususiyatlaridan iborat to‘plam-bosh to‘plam va shu xususiyatlarning sonli ifodasi esa X t.m. qiymatlaridan iborat bo‘ladi. Bosh to‘plam X dan qiymatlar qabul qiluvchi X t.m.ning taqsimot funksiyasini va sonli xarakteristikalarini (masalan, matematik kutilma, dispersiya, yuqori tartibli momentlar va hokazo) mos ravishda nazariy taqsimot va nazariy sonli xarakteristikalar deyiladi. Kuzatishlar asosida aniqlangan taqsimot funksiya va unga mos sonli xarakteristikalar empirik yoki tanlanma taqsimot funksiyasi va sonli xarakteristikalari deyiladi.

3 Empirik taqsimot funksiya

Faraz qilaylik, taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo‘lgan X t.m. kuzatilayotgan bo‘lsin. ($X_1, X_2, ..., X_n$) – vektor esa unga mos hajmi n ga teng bo‘lgan tanlanma bo‘lsin. Shu vektorning biron-bir aniq qiymati:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \tag{3.1}$$

X t.m.ning amalga oshgan qiymati deyiladi. Har qanday tajriba natijalari (3.1) qatordan iborat bo‘lgan sonlar to‘plami bo‘ladi.

✓ Birinchi satri tajriba nomerlari, ikkinchisi esa X ning mos amaldagi qiymatlaridan iborat bo‘lgan quyidagi jadvalga

1	2	3	…	n
x_1	x_2	x_3	…	x_n

statistik qator deb ataladi. Statistik qator turli maqsadlarda va turli usullar bilan tahlil qilinishi mumkin. Mana shunday tahlilning maqsadi X t.m.ning empirik(yoki statistik) taqsimot funksiyasini tuzishdan iborat bo‘lishi mumkin.

(3.1) qatorni kamaymasligi bo‘yicha tartiblaymiz:

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)} \qquad (3.2)$$

hosil bo‘lgan (3.2) qator *variatsion qator* deyiladi.

Ixtiyoriy statistik qator (3.1) yordamida empirik yoki tanlanma taqsimot funksiyasi aniqlanishi mumkin.

✓ Quyidagicha

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \le x) \qquad (3.3)$$

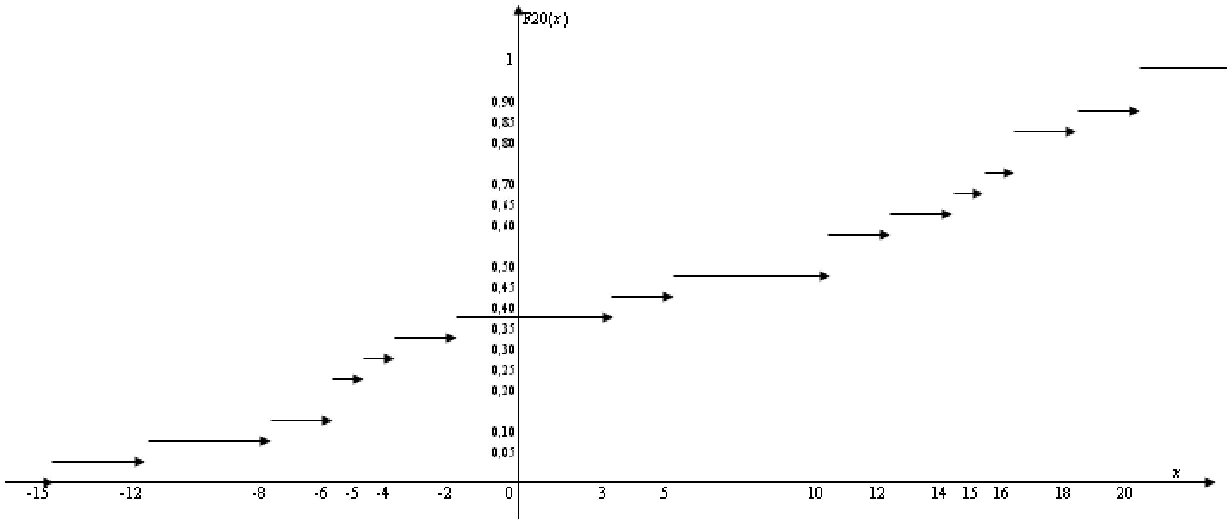
aniqlangan funksiya *empirik*(yoki tanlanma) *taqsimot funksiyasi* deyiladi. Bu yerda $I(A)$ orqali A hodisa indikatori belgilangan. Statistik qator (3.1) t.m.lardan iborat bo‘lgani uchun, empirik taqsimot funksiya ham har bir tayinlangan x da t.m. bo‘ladi.

1-misol. Uzoqlikni o‘lchovchi asbob bilan ma’lum masofa o‘lchanganda tasodifiy xatolikka yo‘l qo‘yildi. Tajriba 20 marta takrorlanganda yo‘l qo‘yilgan xatoliklar statistik taqsimot funksiyasini tuzing. Statistik qator quyidagicha bo‘lsin:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	5	-8	10	15	3	-6	-15	20	12	15

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	-4	-2	20	14	-8	-12	16	10	-5	18

Eng kichik kuzatilma -15. Demak, $\hat{F}_{20}(-15) = 0$. -15 bir marta kuzatildi, demak, uning chastotasi $\frac{1}{20}$. Shuning uchiun, -15 nuqtada empirik taqsimot funksiya $\frac{1}{20}$ ga teng bo‘lgan sakrashga ega, -15 nuqtadan -12 nuqtagacha bo‘lgan oraliqda $\hat{F}_n(x)$ funksiya $\frac{1}{20}$ ga teng. -12 niqtada empirik taqsimot funksiya $\frac{1}{20}$ ga teng bo‘lgan sakrashga ega, -12 nuqtadan -8 nuqtagacha bo‘lgan oraliqda $\hat{F}_n(x)$ funksiya $\frac{2}{20}$ ga teng. -8 niqtada empirik taqsimot funksiya $\frac{2}{20}$ ga teng bo‘lgan sakrashga ega, chunki -8 qiymat ikki marta uchraydi va hokazo. Empirik taqsimot funksiya grafigini chizamiz.



1-rasm.

Har qanday t.m.ning empirik taqsimot funksiyasi kuzatilgan nuqtalarda shu kuzatilmaning chastotasiga teng va sakrashga ega bo‘lgan pog‘onali, uzlukli funksiyadan iborat bo‘ladi.

Bernulli teoremasiga asosan tajribalar soni n cheksiz o‘sganda $\{X < x\}$ hodisaning chastotasi shu hodisaning ehtimolligiga intiladi. Bu esa empirik taqsimot funksiyaning n cheksizlikka intilganda haqiqiy taqsimot funksiya $F(x) = P\{X < x\}$ ga istalgancha yaqin bo‘lishini anglatadi.

Empirik taqsimot haqida quyidagi tasdiqni keltirish mumkin.

Teorema(Glivenko-Kantelli). Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun quyidagi munosabat o‘rinli

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\sup_x \left|\hat{F}_n(x) - F(x)\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Demak n ortgani sari $\hat{F}_n(x)$ funksiya $F(x)$ ga barcha x larda 1 ehtimollik bilan tekis yaqinlashar ekan.

4. Gistogramma va poligon

Tajribalar soni katta bo‘lsa, tajriba natijalari statistik qatori ham katta bo‘ladi. Shuning uchun, ko‘p hollarda intervallik statistik qatordan foydalanish maqsadga muvofiq bo‘ladi.

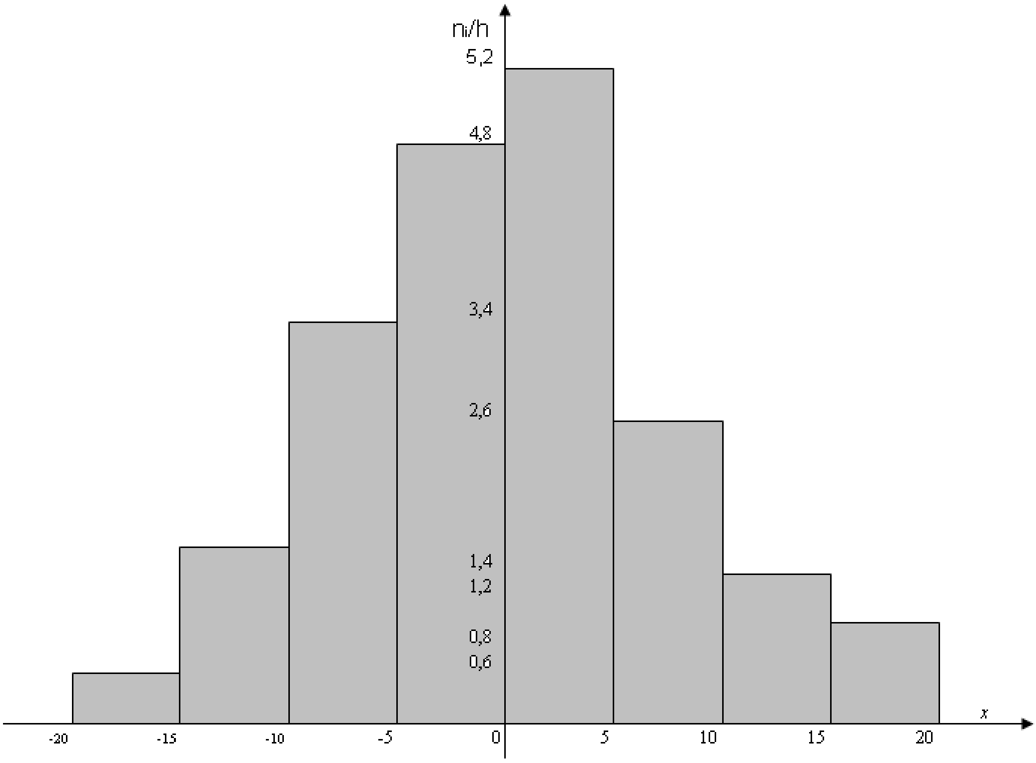
Faraz qilaylik, biron-bir usul bilan tajriba natijalari intervallarga ajratilgan bo‘lsin. Har bir intervaldagi kuzatilmalarning chastotasini hisoblaymiz. Olingan ma’lumotlar asosida jadval tuzamiz. Hosil bo‘lgan jadval tanlanma majmua deyiladi.

2-misol. Ma’lum masofa 100 marta o‘lchanganda yo‘l qo‘yilgan xatolar quyidagilardan iborat:

Guruhlar	[-20;-15)	[-15;-10)	[-10;-5)	[-5;0)	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20]
Guruhlardagi xatolar soni	2	8	17	24	26	13	6	4
Chastotalar	0.02	0.08	0.17	0.24	0.26	0.13	0.06	0.04

✓ Statistik majmuaning grafik tasviri *gistogramma* deyiladi. Uni qurish uchun t.m.ning qiymatlar sohasini uzunligi *h* ga teng bo‘lgan *k* ta oraliqlarga bo‘linadi va kuzatilmalarning har bir oraliqqa tushgan sonlari aniqlanadi. Masalan, n_i - soni *i*-oraliqqa tushgan kuzatilmalar soni bo‘lsin, u holda $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Chastotalar gistogrammasi deb asoslari oraliq uzunligi h ga teng bo‘lgan va balandliklari $\frac{n_i}{h}$ bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan tuzilgan shaklga aytiladi. Chastotalar gistogrammasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:



2-rasm.

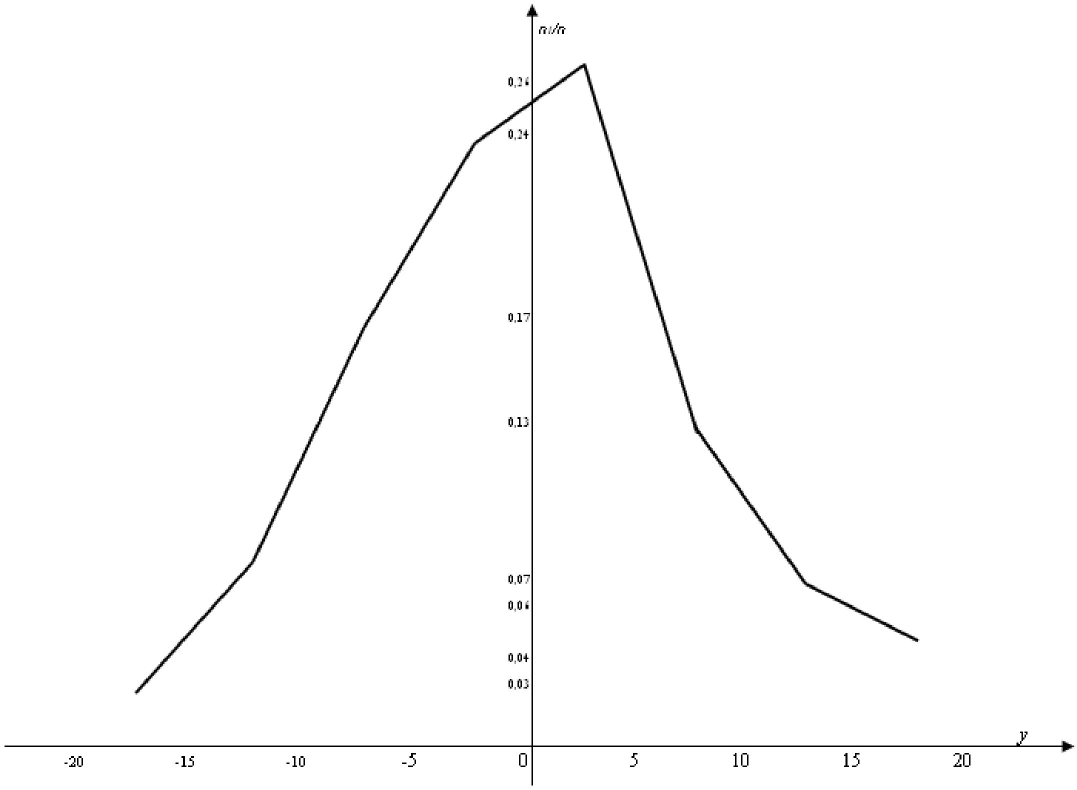
Hosil bo'lgan fuguraning yuzasi n ga teng, chunki $\frac{n_i}{h}\cdot h = n_i$, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb asoslari h bo`lgan, balandliklari $\frac{n_i}{h}$ bo`lgan to`rtburchaklardan tuzilgan pog`onali figuraga aytiladi. Bu holda hosil bo`lgan figura yuzasi 1 ga teng.

Misol. Masofa 100 marta o`lchanganda hosil bo`lgan xatolarning nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang. Buning uchun 1-jadvaldan foydalanamiz.

2-rasmdan ko`rinib turibdiki, nisbiy chastotalar gistogrammasi xatolar taqsimotining zichlik funksiyasiga yaqin bo`ladi. Bu yaqinlik yanada aniqroq bo`lishi talab qilinsa, nisbiy chastotalar poligonidan foydalangan ma`qul.

✓ Tekislikda $\left(y_2, \frac{n_1}{n}\right), \left(y_2, \frac{n_2}{n}\right), ..., \left(y_k, \frac{n_k}{n}\right)$ nuqtalarni siniq chiziqlar bilan birlashtirishdan hosil bo`lgan figura *nisbiy chastotalar poligoni* deyiladi.



3-rasm.

5.Tanlanma xarakteristikalari

Ma`lumki, ehtimollar nazariyasida taqsimot funksiyani bilish shu taqsimot funksiyasiga ega bo`lgan t.m. haqida to`liq ma`lumotga ega bo`lishni anglatadi. Ammo juda ko`p amaliy masalalarni hal qilishda t.m.ni to`liq bilish shart bo`lmay, balki uning ayrim sonli xarakteristikalarini bilish kifoya bo`ladi. T.m.ning asosiy sonli xarakteristikalari bu-matematik kutilma va dispersiyalardir. Matematik kutilma t.m.ning qiymatlari zich joylashadigan o`rta qiymatni anglatsa, dispersiya esa t.m. qiymatlarini shu o`rta qiymat atrofida qanchalik tarqoqligini bildiradi. Shunga o`xshash sonli xarakteristikalarni statistik taqsimot funksiyasiga nisbatan ham kiritish mumkin. Matematik kutilmaning statistik o`xshashi empirik o`rta qiymat yoki tanlanma o`rta qiymatidan iborat bo`ladi va u (3.1) amaliy qiymat yordamida quyidagicha aniqlanadi

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ . \qquad (5.1)$$

O‘rta qiymatni quyidagi ko‘rinishda ham yozish mumkin:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i \ , \qquad (5.2)$$

bu yerda n_i har bir x_i variantaning mos chastotasidir.

Empirik dispersiya yoki tanlanma dispersiyasi esa quyidagicha aniqlanadi:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right), \text{ (yoki } \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \bar{x}\right)n_i \text{)} \qquad (5.3)$$

r-ichi tartibli tanlanma momentlar va markaziy momentlar ham shunga o`xshash aniqlanadi:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r , \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_k - \bar{x}\right)^r \qquad (5.4)$$

Agar tajribalar soni cheksiz katta bo`lsa barcha statistik taqsimot xarakteristikalari nazariy sonli xarakteristikalarga yaqin bo`ladi. Endi shu yaqinlikni o`rganishga kirishamiz.

3 – misol. Test natijalariga ko‘ra talabalar quyidagi ballarni yig‘dilar: {5,3,0,1,4,2,5,4,1,5}. Ushbu tanlanmaning sonli xarakteristikalarini hisoblang.

Avval ushbu tanlanmaga mos chastotali taqsimot tuzamiz:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	1	2	1	1	2	3

(5.2) va (5.3) formulalarga asosan:

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\left(0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 4\cdot 2 + 5\cdot 3\right) = 3,$$

$$S^2 = \frac{1}{10}\left((0-3)^2\cdot 1 + (1-3)^2\cdot 2 + (2-3)^2\cdot 1 + (3-3)^2\cdot 1 + (4-3)^2\cdot 2 + (5-3)^2\cdot 3\right) = 3.2 \ .$$

6.Statistik baholar va ularning xossalari

Statistik baho tushunchasi.

Faraz qilaylik, taqsimot funksiyasi noma`lum parametr $\theta$ ga bog`liq bo`lgan t.m. $X$ berilgan bo`lsin. Boshqacha qilib aytganda, kuzatilayotgan t.m. X ning taqsimot funksiyasi $f(x,\theta)$ bitta parametrli parametrik taqsimot funksiyalar oilasiga tegishli bo`lsin. Endi tajriba natijasida olingan ma`lumotlar yordamida noma`lum parametr $\theta$ ni "tiklash", ya`ni ma`lum ma`noda unga yaqin bo`lgan va tajribalar asosida to`liq tiklanadigan biron-bir miqdorni tuzish masalasini ko`raylik. Θ orqali θ ning qiymatlari to'plamini belgilaymiz.

Faraz qilaylik, $(X_1,\ldots,X_n)$ X t.m.ning xajmi n ga teng bo`lgan tanlanmasi bo`lsin.

✓ $X_1,\ldots,X_n$ kuzatilmalarning ixtiyoriy $T_n = T\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ funksiyasi *statistika* deyiladi.

Ta`rifdan kelib chiqadiki, statistika faqat kuzatilmalarga bog`liq bo`lgan tasodifiy miqdor bo`lib, u tajriba natijasida to`liq aniqlanadi.

✓ Agar $T_n \in \Theta$ bo'lsa, u holda T_n statistika noma'lun parametr θ uchun *baho* deb ataladi.

Ta`rifdan kelib chiqadiki, bitta parametr uchun bir necha statistik baho taklif qilinishi mumkin. Shuning uchun, statistik baholardan ma`lum ma`noda "yaxshi" xossalarga ega bo`lishlari talab etiladi. Odatda har qanday statistik baholarning quyidagi xossalarga ega bo`lishligi maqsadga muvofiqdir.

Siljimagan baho

✓ Agarda statistik bahoning matematik kutilmasi noma`lum parametrga teng, ya`ni

$$MT_n = MT\left(X_1,\ldots,X_n\right) = \theta \qquad (6.1)$$

bo`lsa, statistik baho *siljimagan baho* deyiladi.

Agar statistik baho $T_n = T\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ uchun $b = MT\left(X_1,\ldots,X_n\right) - \theta \neq 0$ bo`lsa, u *siljigan baho* deyiladi va $b$-siljish kattaligi bo`ladi.

Noma`lum parametr $\theta$ $X$ t.m.ning matematik kutilmasi va $X_1,\dots,X_n$ lar unga mos kuzatilmalar bo`lsin. Quyidagi statistikani kiritamiz

$$T\left(X_1,\dots,X_n\right)=a_1X_1+...+a_nX_n\,. \tag{6.2}$$

Bu yerda $a_1,...,a_n$ -lar $a_1+...+a_n=1$ tenglikni qanoatlantiruvchi o`zgarmas sonlar. $MX=\theta$ va demak, $MX_1=...MX_n=\theta$ matematik kutilmani hisoblash qoidasidan

$$MT\left(X_1,\dots,X_n\right)=M\left(a_1X_1+...+a_nX_n\right)=a_1\theta+...+a_n\theta=\left(a_1+...+a_n\right)\theta=\theta \tag{6.3}$$

ega bo`lamiz. Bu tenglikdan (6.2) statistikaning noma`lum θ parametr uchun siljimagan baho ekanligi kelib chiqadi. Xususan, $a_1=1, a_2=...=a_n=0$ bo`lsa (6.2) dan $T\left(X_1,\dots,X_n\right)=X_1$ statistikaga, agarda $a_1=...=a_n=\frac{1}{n}$ bo`lsa $T\left(X_1,\dots,X_n\right)=\overline{x}$ statistikaga ega bo`lamiz. (6.3) munosabat $a_1+...+a_n=1$ tenglik bajariladigan ixtiyoriy $a_1,...,a_n$ lar uchun to`g`ri bo`lganligidan x_1 va $\overline{x}$ statistikalar ham noma`lum θ parametr uchun siljimagan baho ekanligi kelib chiqadi. Demak, bitta parametr uchun bir nechta siljimagan baho tuzish mumkin ekan. Bu xulosadan, tabiiy, siljimagan baholarni taqqoslash zaruriyati kelib chiqadi.

Optimal baho

Noma`lum parametr $\theta$ uchun siljimagan baholar to`plamini U bilan belgilaylik. Oldingi boblardan ma`lumki, t.m. dispersiyasi shu t.m.ning qiymatlari uning matematik kutilmasi atrofida qanchalik zich yoki tarqoq joylashganligining mezoni bo`ladi. Shuning uchun, tabiiy, siljimagan baholarni ularning dispersiyasiga ko`ra taqqoslaymiz.

Faraz qilaylik, $T_1(X_1,\dots,X_n)$ va $T_2(X_1,\dots,X_n)$ lar noma`lum $\theta$ parametr uchun siljimagan baholar bo`lsin, $T_1(X_1,\dots,X_n)\in U$ va $T_2(X_1,\dots,X_n)\in U$. Agarda shu statistikalar uchun

$$D\,T_1(X_1,\ldots,X_n) < D\,T_2(X_1,\ldots,X_n)$$

munosabat bajarilsa, $T_1(X_1,\ldots,X_n)$ baho $T_2(X_1,\ldots,X_n)$ bahodan aniqroq baho deyiladi.

Demak, bitta parametr uchun bir necha siljimagan baholar mavjud bo`lsa, uning statistik bahosi sifatida aniqroq bahoni qabul qilish maqsadga muvofiq bo`ladi. Yuqorida biz noma`lum matematik kutilma $\theta$ uchun ikkita siljimagan $X_1$ va $\bar{x}$-lardan iborat bo`lgan baholarni ko`rdik. Endi ularni taqqoslaylik. Dispersiyani hisoblash qoidasiga asosan:

$$D\bar{x} = D\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Dx_i = \frac{1}{n}DX \qquad (6.4)$$

va $DX_1 = DX$ bo`ladi. yuqorida keltirilgan taqqoslash qoidasiga muvofiq, ko`rinib turibdiki $\bar{x}$ baho X_1 bahoga nisbatan aniqroq bo`ladi.

- ✓ Agar $\inf DT(X_1,\ldots,X_n) = DT^*(X_1,\ldots,X_n)$ $T(X_1,\ldots,X_n) \in U$ bo`lsa, $T^*(X_1,\ldots,X_n)$ - statistik baho *optimal baho* deyiladi.

Ko`rsatish mumkinki $\bar{x}$ statistika noma`lum matematik kutilma θ uchun barcha siljimagan chiziqli baholar ichida eng aniq (optimal) bahodir.

Asosli baho

- ✓ Agarda n cheksizlikka intilganda $T(X_1,\ldots,X_n)$ statistika ehtimol bo`yicha noma`lum parametr θ ga yaqinlashsa, ya`ni ixtiyoriy kichik ε >0 son uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\{|T(X_1,\ldots,X_n) - \theta| < \varepsilon\} = 1$$

munosabat o‘rinli bo`lsa, u holda $T(X_1,\ldots,X_n)$ statistik baho *asosli baho* deyiladi.

Demak, asosli baho $T_n(X_1,\ldots,X_n)$ tajribalar soni ortib borganida noma`lum $\theta$ parametrga ehtimol bo`yicha yaqinlashar ekan. Odatda har qanday statistik bahodan asosli bo`lish talab etiladi. Matematik ststistikada asosli bo`lmagan baholar o`rganilmaydi.

1 – misol. Tanlanma o`rta qiymat $\bar{x}$ noma`lum matematik qurilma $MX=\theta$ ga asosli baho ekanligini ko`rsating.

Chebishev tengsizligiga va (7.1.3) munosabatga ixtiyoriy kichik ε >0 son uchun

$$P\{\left|\bar{x}-\theta\right|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D\bar{x}}{\varepsilon^2}=\frac{DX}{n\varepsilon^2}.$$

Oxirgi tengsizlikda dispersiya chekli bo`lsa, $n\to\infty$ da limitga o`tsak, haqiqatan ham $\bar{x}$ statistikaning asosli baholigi kelib chiqadi.

Umuman, ixtiyoriy siljimagan baho $T(X_1,\ldots,X_n)$ ning noma`lum $\theta$ parametrga asosli baho bo`lishlik shartini keltiramiz.

Teorema. Agar $T_n=T(X_1,\ldots,X_n)$ statistika θ parametr uchun siljimagan baho bo`lib, $n\to\infty$ uning dispersiyasi $DT_n\to 0$ bo`lsa, u holda u asosli baho bo`ladi.

Isbot. $T(X_1,\ldots,X_n)$ statistika siljimagan baho bo`lgani uchun $MT(X_1,\ldots,X_n)=\theta$. U holda ixtiyoriy ε >0 uchun Chebishev tengsizligidan quyidagi tengsizlikni yoza olamiz:

$$P\{|T_n-\theta|<\varepsilon\}\leq 1-\frac{DT_n}{\varepsilon^2}. \tag{6.5}$$

Ammo, shartga ko`ra, ixtiyoriy tayinlangan ε >0 uchun $n\to\infty$ da $\frac{DT_n}{\varepsilon^2}\to 0.$

Demak, (6.5) tengsizlikdan $T(X_1,...,X_n)$ statistikaning asosli baho ekanligi kelib chiqadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1.	Soatov YA.U.	Oliy matematika. I,II,III,IV -jild. “O‘qituvchi”, Toshkent 1992-98 y.
2.	Tojiev SH.	Oliy matematikadan masalalarni echish. Toshkent 2002 y
3.	SHneyder V. E. va boshqalar	Matematikaqisqa kursi I,II-jild, “O‘qituvchi”, Toshkent 1987 y.
4.	Gmurman V.E.	Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari, “O‘qituvchi”, Toshkent 1977 y.
5.	Ventsel E.S. Ovcharov E.A.	Teoriya veroyatnostey i eyo injenernыe prilojeniya. M. «Nauka», Moskva 1980 g.
6.	A. Sa’dullaev., A. Vorisov va boshqalar	Matematik analiz kursidan misol va masalalar to‘plami, Toshkent 2002 y.
7.	Azlarov T.A. Mansurov X	Matematik analiz. 1,2-jild, Toshkent, 1989 y.
8.	N.M.Jabborov, E.O.Aikulov, K.S.Axmedova	Oliy matematika, “ Qarshi ” 2010 y.
9.	Gafurov M. va boshqalar	Iqtisodiy-matematik usullar va modellar, Toshkent, 2001 y.

10. Piskunov. N. S. Differensial va integral hisob, I- tom. T: O’qituvchi, 1972.-504 bet