Известия вузов. Математика
2018, №5, с. 52–63

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

М. МИРСАБУРОВ

ЗАДАЧА С НЕДОСТАЮЩИМ УСЛОВИЕМ СМЕЩЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Аннотация. Для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом доказаны теоремы единственности и существования решения задачи с недостающим условием смещения на граничных характеристиках и условием типа условия Франкля на отрезке вырождения уравнения.

Ключевые слова: недостающее условие смещения, условие типа условия Франкля, нестандартное сингулярное интегральное уравнение Трикоми, уравнение Винера–Хопфа, индекс.

УДК: 517.956

Введение. Пусть Ω — конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой σ_0 $(y = \sigma_0(x)) : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$ с концами в точках $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, а при $y < 0$ — характеристиками AC и BC уравнения

$$(\operatorname{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0. \tag{1}$$

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1 соответственно точки пересечения характеристик AC и BC с характеристикой, исходящей из точки $E(c, 0)$, где $c \in I = (-1, 1)$ — интервал оси $y = 0$.

Пусть $p(x) = ax - b$ и $q(x) = a - bx$ — линейные диффеоморфизмы из множества точек отрезка $[-1, 1]$ в множества точек отрезков $[-1, c]$ и $[c, 1]$ соответственно, где $a = (1+c)/2, b = (1-c)/2$, причем $p(-1) = -1, p(1) = c, q(-1) = 1, q(1) = c$.

В задачах со смещением [1], [2] в отличие от задачи Трикоми ([3], с. 29) характеристики AC и BC были равноправны в смысле носителей краевых данных, т. е. все точки характеристик AC и BC были охвачены краевым условием. В данной работе исследуется корректность задачи, где части C_0C и C_1C соответственно характеристик AC и BC освобождены от краевых условий, и это недостающее условие смещения заменено аналогом условия Франкля [4]–[7] на отрезке вырождения AB.

Задача с недостающим условием смещения на граничной характеристике и Франкля на отрезке вырождения (FS).

В области Ω *требуется найти функцию* $u(x, y) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, *удовлетворяющую следующим условиям*:

1) *функция* $u(x, y)$ *принадлежит классу* $C^2(\Omega^+)$ *и удовлетворяет уравнению* (1) *в этой области*;

2) *функция* $u(x, y)$ *является обобщенным решением класса* R_1 ([8]; [9], с. 35) *в области* Ω^-;

Поступила 07.03.2017

3) *на интервале вырождения выполняется условие сопряжения*

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to +0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\quad x\in I, \tag{2}$$

причем эти пределы при $x=\pm 1$ *могут иметь особенности порядка ниже* $1-2\beta$, *где* $\beta=(m+2\beta_0)/2(m+2)\in(0,1/2)$;

4) *выполнены условия*

$$u(x,y)|_{\sigma_0}=\varphi(x),\quad x\in\overline{I}, \tag{3}$$

$$\mu_0 u[\theta_0(p(x))]+\mu_1 u[\theta_1(q(x))]=\psi(x),\quad x\in\overline{I}, \tag{4}$$

$$u(p(x),0)-u(q(x),0)=f(x),\quad x\in\overline{I}, \tag{5}$$

где

$$\theta_0(p(x_0))=\frac{p(x_0)-1}{2}-i\left[\frac{(m+2)(1+p(x_0))}{4}\right]^{2/(m+2)},$$

$$\theta_1(q(x_0))=\frac{q(x_0)+1}{2}-i\left[\frac{(m+2)(1-q(x_0))}{4}\right]^{2/(m+2)},$$

— *аффиксы точек пересечения характеристик* AC_0 *и* BC_1 *с характеристиками, исходящими из точек* $M(p(x_0),0)$, $M(q(x_0),0)$ *соответственно, где* $x_0\in\overline{I}$, $p(x_0)\in[-1,c]$, $q(x_0)\in[c,1]$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$ — *заданные достаточно гладкие функции,* μ_0 *и* μ_1 — *некоторые постоянные, причем* $\varphi(\pm 1)=0$, $\psi(-1)=0$, $f(\pm 1)=0$, $\mu_0^2+\mu_1^2\neq 0$.

Заметим, что условие (3) является условием Дирихле на σ_0, (4) — условием смещения на граничных характеристиках AC_0 и BC_1, а (5) — условием локального смещения на отрезке [-1,1] оси $y=0$.

Используя обозначение $u(x,0)=\tau(x)$, условия (5) запишем в виде

$$\tau(p(x))-\tau(q(x))=f(x),\quad x\in\overline{I}. \tag{5*}$$

1. Единственность решения задачи FS. Формула Дарбу, определяющая в области Ω^- решение для уравнения (1) видоизмененной задачи Коши с начальными данными

$$u(x,0)=\tau(x),\quad x\in\overline{I};\quad \lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x),\quad x\in I,$$

имеет вид ([9], с. 34):

$$u(x,y)=\gamma_1\int_{-1}^{1}\tau\left[x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right](1-t)^{\beta-1}(1+t)^{\beta-1}\,dt+$$
$$+\gamma_2(-y)^{1-\beta_0}\int_{-1}^{1}\nu\left[x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right](1-t)^{-\beta}(1+t)^{-\beta}\,dt.$$

С помощью формулы Дарбу нетрудно вычислить производные дробного порядка

$$D_{-1,x}^{1-\beta}u[\theta_0(p(x))]=\gamma_2\left(\frac{m+2}{2}\right)^{1-2\beta}a^{1-\beta}\Gamma(1-\beta)(1+p(x))^{-\beta}\nu(p(x))+$$
$$+\frac{\gamma_1\Gamma(\beta)}{2\Gamma(2\beta)}\left(\frac{2}{a}\right)^{2\beta}(1+x)^{-\beta}\frac{d}{dx}\int_{-1}^{p(x)}\frac{\tau(s)ds}{(p(x)-s)^{1-2\beta}},\quad x\in I, \tag{6}$$

$$D_{-1,x}^{1-\beta}u[\theta_1(q(x))]=\gamma_2\left(\frac{m+2}{2}\right)^{1-2\beta}b^{1-\beta}\Gamma(1-\beta)(1-q(x))^{-\beta}\nu(q(x))+$$

$$+\frac{\gamma_1\Gamma(\beta)}{2\Gamma(2\beta)}\left(\frac{2}{b}\right)^{2\beta}(1+x)^{-\beta}\frac{d}{dx}\int_{q(x)}^{1}\frac{\tau(s)ds}{(s-q(x))^{1-2\beta}},\quad x\in I,\quad (7)$$

где $D^{l}_{-1,x}$ — операторы интегро-дифференцирования дробного порядка ([2]; [10], с. 18). Применив оператор $D^{1-\beta}_{-1,x}$ к краевому условию (4), с учетом (6) и (7) получим

$$\mu_0 a^{1-2\beta}\nu(p(x))+\mu_1 b^{1-2\beta}\nu(q(x))=\gamma\left(\mu_0 a^{1-2\beta}D^{1-2\beta}_{-1,p(x)}\tau(x)+\mu_1 b^{1-2\beta}D^{1-2\beta}_{q(x),1}\tau(x)\right)+\Psi_1(x),\quad x\in I,\quad (8)$$

где

$$\Psi_1(x)=\frac{(1+x)^{\beta}D^{1-\beta}_{-1,x}\psi(x)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)((m+2)/2)^{1-2\beta}},\quad \gamma=\frac{2\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{2\beta}.$$

Соотношение (8) является первым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенным на интервал $I=(-1,1)$ оси $y=0$ из области Ω^-.

Аналогом принципа экстремума А.В. Бицадзе является

Теорема 1. *Решение $u(x,y)$ задачи FS при выполнении условий $\psi(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv 0$*

$$\mu_0>0,\quad \mu_1>0 \qquad (9)$$

своего наибольшего положительного значения (НПЗ) или наименьшего отрицательного значения (НОЗ) в замкнутой области $\overline{\Omega}^+$ может принимать только в точках нормальной кривой $\overline{\sigma_0}$.

Доказательство. Пусть функция $u(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. В силу принципа Хопфа ([11], с. 25) решение $u(x,y)$ уравнения (1) своего НПЗ во внутренних точках области Ω^+ не достигает.

Пусть решение $u(x,y)$ своего НПЗ достигает во внутренней точке интервала AB: $M_0(p(x_0),0)\in(-1,c]$ или $M_0(q(x_0),0)\in[c,1)$. В силу соответствующего однородного условия (5*) (с $f(x)\equiv 0$) решение $u(x,y)$ своего НПЗ достигает в двух точках: $(p(x_0),0)$ и $(q(x_0),0)$, следовательно, в этих точках $\nu(p(x_0))<0$, $\nu(q(x_0))<0$ ([9], с. 74). Отсюда в силу неравенств (9) из (8) вытекает

$$\mu_0 a^{1-2\beta}\nu(p(x_0))+\mu_1 b^{1-2\beta}\nu(q(x_0))<0. \qquad (10)$$

С другой стороны, известно, что в точке положительного максимума функции $\tau(x)$ значения операторов дробного порядка строго положительны, т. е. $D^{1-2\beta}_{-1,p(x)}\tau(x)|_{p(x)=p(x_0)}>0$, $D^{1-2\beta}_{q(x),1}\tau(x)|_{q(x)=q(x_0)}>0$. Отсюда в силу соответствующего однородного условия (8) при $\Psi_1(x)\equiv 0$ имеем

$$\mu_0 a^{1-2\beta}\nu(p(x_0))+\mu_1 b^{1-2\beta}\nu(q(x_0))=$$
$$=\gamma\left(\mu_0 a^{1-2\beta}D^{1-2\beta}_{-1,p(x)}\tau(x)+\mu_1 b^{1-2\beta}D^{1-2\beta}_{q(x),1}\tau(x)\right)\Big|_{\substack{p(x)=p(x_0)\\ q(x)=q(x_0)}}>0,$$

что противоречит неравенству (10).

Следовательно, решение $u(x,y)$, удовлетворяющее условиям теоремы 1, своего НПЗ в области $\overline{\Omega}^+$ не достигает в точках интервала AB. Таким образом, решение $u(x,y)$, удовлетворяющее условиям теоремы 1, своего НПЗ в области $\overline{\Omega}^+$ достигает в точках кривой $\overline{\sigma_0}$.

Как и выше, можно показать, что решение $u(x,y)$ согласно теореме 1 своего НОЗ в области $\overline{\Omega}^+$ достигает в точках кривой $\overline{\sigma_0}$. $\square$

Следствие. Задача FS может иметь не более одного решения.

Действительно, в силу теоремы 1 решение однородной задачи FS в замкнутой области $\overline{\Omega}^+$ своего НПЗ и НОЗ достигает в точках нормальной кривой $\overline{\sigma_0}$, где $u(x,y)|_{\sigma_0}\equiv 0$. Отсюда получем $u(x,y)\equiv 0$ во всей области $\overline{\Omega}^+$, следовательно, и во всей смешанной области $\overline{\Omega}$.

3. Существование решения задачи FS.

Теорема 2. *Задача FS при выполнении условий* (9) *однозначно разрешима.*

Доказательство. Решение уравнения (1) в области Ω^+, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,0)=\tau(x),\quad x\in\overline{I};\quad u(x,y)|_{\sigma_0}=\varphi(x),\quad x\in I,$$

имеет вид

$$u(x,y)=k_2(1-\beta_0)y^{1-\beta_0}\int_{-1}^{1}\tau(t)\Bigg\{\left[(x-t)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{\beta-1}-$$
$$-\left[(1-xt)^2+\frac{4t^2}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{\beta-1}\Bigg\}dt-k_2(1-\beta)(m+2)(1-R^2)y^{1-\beta_0}\times$$
$$\times\int_0^l\varphi(\xi(s))(r_1^2)^{\beta-2}F(1-\beta,2-\beta,2-2\beta;1-\sigma)d\xi(s),\quad (x,y)\in\Omega^+,\quad (11)$$

где s — длина кривой σ_0, отсчитываемой от точки B, l — длина дуги кривой σ_0,

$$\sigma=\frac{r^2}{r_1^2},\qquad \left.\begin{matrix} r^2\\ r_1^2\end{matrix}\right\}=(x-\xi(s))^2+\frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{\frac{m+2}{2}}\mp\eta(s)^{\frac{m+2}{2}}\right)^2,$$

$$(\xi(s),\eta(s))\in\sigma_0,\quad k_2=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)},\quad R^2=x^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}.$$

Из (11) нетрудно получить следующее хорошо известное ([9], с. 152) соотношение между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенное на I из области Ω^+:

$$\nu(x)=-k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}\Bigg[\int_{-1}^{1}\frac{(x-t)\tau'(t)dt}{|x-t|^{2-2\beta}}-$$
$$-(2\beta-1)\int_{-1}^{1}\frac{\tau(t)dt}{(1-xt)^{2-2\beta}}\Bigg]+\Phi(x),\quad x\in I,\quad (12)$$

где

$$\Phi(x)=k_2(1-\beta_0)(1-\beta)(m+2)(1-x^2)\int_{-1}^{1}(x^2-2xt+1)^{\beta-2}\varphi(t)dt.$$

Заметим, что соотношение (12) справедливо для всего промежутка I.

В силу (11) из соотношения (8), исключая $\nu(x)$, получим

$$\mu_0a^{1-2\beta}D^{1-2\beta}_{-1,p(x)}\tau(x)+\mu_1b^{1-2\beta}D^{1-2\beta}_{q(x),1}\tau(x)=$$
$$=-\mu_0a^{1-2\beta}\frac{\cos(\beta\pi)\Gamma(1-2\beta)}{\pi}\left[\int_{-1}^{1}\frac{(p(x)-t)\tau'(t)dt}{|p(x)-t|^{2-2\beta}}-(2\beta-1)\int_{-1}^{1}\frac{\tau(t)dt}{(1-p(x)t)^{2-2\beta}}\right]-$$
$$-\mu_1b^{1-2\beta}\frac{\cos(\beta\pi)\Gamma(1-2\beta)}{\pi}\left[\int_{-1}^{1}\frac{(q(x)-t)\tau'(t)dt}{|q(x)-t|^{2-2\beta}}-(2\beta-1)\int_{-1}^{1}\frac{\tau(t)dt}{(1-q(x)t)^{2-2\beta}}\right]+$$
$$+\frac{1}{\gamma}\left(\mu_0a^{1-2\beta}\Phi(p(x))+\mu_1b^{1-2\beta}\Phi(q(x))\right),\quad x\in I.\quad (13)$$

Применяя к соотношению (13) оператор дробного интегрирования $D_{-1,x}^{2\beta-1}$ с учетом тождеств

$$D_{-1,x}^{2\beta-1}D_{-1,p(x)}^{1-2\beta}\tau(x)=a^{1-2\beta}\tau(p(x)),$$
$$D_{-1,x}^{2\beta-1}D_{q(x),1}^{1-2\beta}\tau(x)=b^{1-2\beta}\tau(q(x)),$$

$$D_{-1,x}^{2\beta-1}\left(\int_{-1}^{1}\frac{(p(x)-t)\tau'(t)dt}{|p(x)-t|^{2-2\beta}}\right)=\frac{\Gamma(2\beta)}{a^{1-2\beta}}(1-\cos(2\beta\pi))\tau(p(x))-$$
$$-\frac{1}{a^{1-2\beta}\Gamma(1-2\beta)}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(p(t))dt}{t-x}-\frac{b}{\Gamma(1-2\beta)}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+q(t)}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(q(t))dt}{1-ax-bt},$$

$$D_{-1,x}^{1-\beta}\left(\int_{-1}^{1}\frac{\tau(t)dt}{(1-p(x)t)^{2-2\beta}}\right)=\frac{a^{2\beta}}{\Gamma(2-2\beta)}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(p(t))dt}{1-p(x)p(t)}+$$
$$+\frac{b}{\Gamma(2-2\beta)}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+q(t)}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(q(t))dt}{1-p(x)q(t)},$$

$$D_{-1,x}^{2\beta-1}\left(\int_{-1}^{1}\frac{(q(x)-t)\tau'(t)dt}{|q(x)-t|^{2-2\beta}}\right)=\frac{\Gamma(2\beta)}{b^{1-2\beta}}(1-\cos(2\beta\pi))\tau(q(x))-$$
$$-\frac{1}{b^{1-2\beta}\Gamma(1-2\beta)}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(q(t))dt}{t-x}-\frac{a}{\Gamma(1-2\beta)}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+q(t)}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(q(t))dt}{1-bx-at},$$

$$D_{-1,x}^{1-\beta}\left(\int_{-1}^{1}\frac{\tau(t)dt}{(1-q(x)t)^{2-2\beta}}\right)=\frac{a}{\Gamma(2-2\beta)}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-p(t)}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(p(t))dt}{1-q(x)p(t)}+$$
$$+\frac{b^{2\beta}}{\Gamma(2-2\beta)}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(q(t))dt}{1-q(x)q(t)},$$

и условия (5*), уравнение (13) запишем в виде

$$(1+\sin(2\beta\pi))(\mu_0+\mu_1)\tau(q(x))=$$
$$=\frac{\cos(\beta\pi)}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{\mu_0+\mu_1}{t-x}-\frac{\mu_0 a}{1-p(x)p(t)}-\frac{\mu_1 b}{1-q(x)q(t)}\right)\tau(q(t))dt+$$
$$+\frac{\mu_0 a^{1-2\beta}b\cos(\beta\pi)}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+q(t)}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(q(t))dt}{1-ax-bt}+$$
$$+\frac{\mu_1 b^{1-2\beta}a\cos(\beta\pi)}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-p(t)}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(q(t))dt}{1-bx-at}-$$
$$-\frac{\mu_0 a^{1-2\beta}b\cos(\beta\pi)}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+q(t)}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(q(t))dt}{1-p(x)q(t)}-$$
$$-\frac{\mu_1 b^{1-2\beta}a\cos(\beta\pi)}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-p(t)}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(q(t))dt}{1-q(x)p(t)}+F(x),\quad x\in I,\qquad(14)$$

где

$$F(x)=\frac{1}{\gamma}(\mu_0 a^{1-2\beta}\Phi(p(x)+\mu_1 b^{1-2\beta}\Phi(q(x))))-$$

$$-\mu_0(1+\sin(\beta\pi))f(x)-\frac{\mu_0\cos(\beta\pi)}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-p(x)p(t)}\right)f(t)dt-$$
$$-\frac{\mu_1 b^{1-2\beta}a\cos(\beta\pi)}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-p(t)}\right)^{1-2\beta}\frac{f(t)dt}{1-bx-at}-$$
$$-\frac{\mu_1 b^{1-2\beta}a\cos(\beta\pi)}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-p(t)}\right)^{1-2\beta}\frac{f(t)dt}{1-q(x)p(t)}.$$

В (14) выделим характеристическую часть уравнения и с учетом тождества

$$\frac{a}{1-p(x)p(t)}-\frac{b}{1-q(x)q(t)}=\frac{abc(1+x)(1+t)}{(1-p(x)p(t))(1-q(x)q(t))}=C(x,t),$$

$C(x,t)$ — непрерывная функция в квадрате $[-1,1]\times[-1,1]$ за исключением вершины $(-1,-1)$, где она ограничена, в этом можно убедиться переходя к полярным координатам $x=-1+\rho\cos\varphi$, $t=-1+\rho\sin\varphi$, где $0\le\varphi\le\pi/2$. Приведем (14) к виду

$$\tau_0(x)-\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{b}{1-q(x)q(t)}\right)\tau_0(t)dt=$$
$$=\frac{\mu_0 b\lambda}{\mu_0+\mu_1}\int_{-1}^{1}\frac{\tau_0(t)dt}{1-ax-bt}+\frac{\mu_1 a\lambda}{\mu_0+\mu_1}\int_{-1}^{1}\frac{\tau_0(t)dt}{1-bx-at}+$$
$$+R[\tau_0]+\frac{F(x)}{(1+\sin(\beta\pi))(\mu_0+\mu_1)},\quad x\in\overline{I},\quad (15)$$

где

$$\tau_0(x)=\tau(q(x)),\ \lambda=\cos(\beta\pi)/\pi(1+\sin(\beta\pi)),$$

$$R[\tau_1]=-\frac{\mu_0\lambda}{\mu_0+\mu_1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}C(x,t)\tau_0(t)dt+$$
$$+\frac{\mu_0 b\lambda}{\mu_0+\mu_1}\int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{1+x}{1+q(t)}\right)^{1-2\beta}-\left(\frac{1}{a}\right)^{1-2\beta}\right]\frac{\tau_0(t)dt}{1-ax-bt}+$$
$$+\frac{\mu_1 a\lambda}{\mu_0+\mu_1}\int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{1+x}{1-p(t)}\right)^{1-2\beta}-\left(\frac{1}{b}\right)^{1-2\beta}\right]\frac{\tau_0(t)dt}{1-bx-at}-$$
$$-\frac{\mu_0 a^{1-2\beta}b\lambda}{\mu_0+\mu_1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+q(t)}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau_0(t)dt}{1-p(x)q(t)}-$$
$$-\frac{\mu_1 b^{1-2\beta}a\lambda}{\mu_0+\mu_1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-p(t)}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau_0(t)dt}{1-q(x)p(t)}$$

— регулярный оператор.

Отметим, что уравнение (15) является нестандартным сингулярным интегральным уравнением Трикоми, так как “несингулярная” часть ядра имеет сдвиги $q(x)$, $q(t)$ и, кроме этого, ядро первых двух интегральных операторов правой части (15) имеет единственную изолированную особенность первого порядка при $x=1$, $t=1$, т. е. они не являются фредгольмовыми операторами и поэтому они выделены отдельно [12]–[14]. Уравнения типа (15) изучались в работах [15], [16]. Временно считая правую часть интегрального уравнения (21) известной функцией, перепишем его в виде

$$\tau_0(x) - \lambda \int_{-1}^{1} \left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-q(x)q(t)}\right) \tau_0(t)dt = g_0(x), \tag{16}$$

где

$$g_0(x) = \frac{\mu_0 b\lambda}{\mu_0+\mu_1} \int_{-1}^{1} \frac{\tau_0(t)dt}{1-ax-bt} + \frac{\mu_1 a\lambda}{\mu_0+\mu_1} \int_{-1}^{1} \frac{\tau_0(t)dt}{1-bx-at} + R[\tau_0] + \frac{F(x)}{(1+\sin(\beta\pi))(\mu_0+\mu_1)}. \tag{17}$$

Решение уравнения (16) будем искать в классе функций Гёльдера $H(-1,1)$, в котором функция $(1+x)^{2\beta-1}\tau_0(x)$ может быть неограниченной в точке $x=-1$ и ограничена на правом конце отрезка $[-1,1]$, т. е. в классе $h(1)$ ([10], с. 43).

Применяя к уравнению (16) метод регуляризации Карлемана, развитого С.Г. Михлиным [17], получим решение

$$\tau_0(x) = \frac{1+\sin(\beta\pi)}{2} g_0(x) + \frac{\cos(\beta\pi)}{2\pi} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{\alpha} \left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{2\alpha} \left(\frac{1+c(bx-a)}{1+c(bt-a)}\right)^{\alpha} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-q(x)q(t)}\right) g_0(t)dt, \quad x \in I. \tag{18}$$

Метод вывода формулы (18) идентичен методу работы [17], однако имеет ряд своих особенностей, связанных со сдвигами $q(x)$ и $q(t)$, поэтому коротко приведем схему вывода формулы (18). В обозначениях

$$\rho(x) = (1+x)^{2\beta-1}\tau_1(x), \quad g(x) = (1+x)^{2\beta-1}g_0(x)$$

уравнение (18) запишем в виде

$$\rho(x) - \lambda \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-q(x)q(t)}\right) \rho(t)dt = g(x), \quad x \in I.$$

Пусть z — произвольная точка комплексной плоскости. Следуя идее Карлемана положим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{b}{1-(bz-a)(bt-a)}\right) \rho(t)dt. \tag{19}$$

Очевидно, $\Phi(z)$ голоморфна как в верхней, так и в нижней полуплоскостях и исчезает на бесконечности. Обозначим через $\Phi^+(x)$ и $\Phi^-(x)$ предельные значения $\Phi(z)$, когда z стремится к точке x действительной оси соответственно из верхней или из нижней полуплоскости.

Из (19) нетрудно проверить, что

$$\Phi\left(\frac{1+a+az}{bz-a}\right) = (bz-a)\Phi(z).$$

Дробно-линейное преобразование $W = \frac{1+a+az}{bz-a}$ переводит верхную полуплоскость в нижную и наоборот. При этом промежуток $(-1,1)$ переходит в промежуток

$$\triangle = \begin{cases} (-\infty,\ -1) \cup \left(-\frac{2+c}{c},\ +\infty\right), & \text{если } \ c<0; \\ (-\infty,\ -1), & \text{если } \ c=0; \\ \left(-\frac{2+c}{c},\ -1\right), & \text{если } \ c>0. \end{cases}$$

В силу формул Сохоцкого–Племеля ([11], с. 145) решение интегрального уравнения (18) приводится к следующей задаче теории функции комплексного переменного: *найти исчезающую на бесконечности функцию $\Phi(z)$, голоморфную как в верхней, так и в нижней* *полуплоскостях*, удовлетворяющую граничному условию

$$\Phi^+(x) - G(x)\Phi^-(x) = h(x), \quad x \in (-\infty, +\infty), \tag{20}$$

где

$$G(x) = \begin{cases} e^{2\alpha\pi i} & \text{при } \ x \in I; \\ e^{-2\alpha\pi i} & \text{при } \ x \in \triangle; \\ 1 & \text{при } \ x \notin I \cup \triangle, \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{1-\lambda\pi i} & \text{при } \ x \in I; \\ -\frac{1}{(bx-a)(1+\lambda\pi i)} g\left(\frac{1+a+ax}{bx-a}\right) & \text{при } \ x \in \triangle; \\ 0 & \text{при } \ x \notin I \cup \triangle. \end{cases}$$

Сначала решим однородную задачу соответствующую (20):

$$X^+(x) - G(x)X^-(x) = 0, \quad x \in I. \tag{21}$$

Одно из частных решений задачи с условием (21) имеет вид

$$X(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-z} - \frac{b(bz-a)}{1-(bz-a)(bt-a)}\right)\ln G(t)dt\right\} =$$
$$= \exp\left\{\alpha\left[\ln(1-z) + \ln(1+c(bz-a)) - \ln(-1-z) - \ln(b(1+z))\right]\right\}. \tag{22}$$

Заметим, что $X((1+a+az)/(bz-a)) = X(z)$.

Из (22) легко вычислить граничное значение

$$X^+(x) = \frac{(1-x)^\alpha(1+c(bx-a))^\alpha}{b^\alpha(1+x)^{2\alpha}}e^{\alpha\pi i}, \quad X^-(x) = \frac{(1-x)^\alpha(1+c(bx-a))^\alpha}{b^\alpha(1+x)^{2\alpha}}e^{-\alpha\pi i}.$$

Таким образом, в силу (21) граничное условие (20) запишем в виде

$$\frac{\Phi^+(x)}{X^+(x)} - \frac{\Phi^-(x)}{X^-(x)} = \frac{h(x)}{X^+(x)}, \quad x \in I \cup \triangle.$$

Здесь, используя вторую обобщенную теорему ([18], с. 29) Лиувилля об аналитическом продолжении, находим общее решение

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(t)}{X^+(t)}\frac{dt}{t-z} + \frac{c_0}{1-z} + \frac{c_1}{1+z}.$$

Далее, выполнив стандартные вычисления ([11]; [7], с. 121), приходим к формуле (18).

Теперь подставляя $g_0(x)$ из (17) в выражение (18), получим уравнение

$$\tau_0(x) = \frac{\lambda(1+\sin(\beta\pi))}{2(\mu_0+\mu_1)}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\mu_0 b}{1-ax-bt} + \frac{\mu_1 a}{1-bx-at}\right)\tau_0(t)dt +$$
$$+ \frac{\lambda\cos(\beta\pi)}{2\pi(\mu_0+\mu_1)}\int_{-1}^{1}\tau_0(s)ds\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^\alpha\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{2\alpha}\left(\frac{\mu_0 b}{1-at-bs} + \frac{\mu_1 a}{1-bt-as}\right)\frac{dt}{t-x} +$$
$$+ R_1[\tau_0] + F_1(x), \tag{23}$$

где

$$R_1[\tau_0] = \frac{1+\sin(\beta\pi)}{2}R[\tau_0] +$$
$$+ \frac{\cos(\beta\pi)}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^\alpha\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{2\alpha}\left(\frac{1+c(bt-a)}{1+c(bx-a)}\right)^\alpha\left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-q(x)q(t)}\right)R[\tau_0]dt -$$

$$-\frac{\lambda\cos(\beta\pi)}{2\pi(\mu_0+\mu_1)}\int_{-1}^{1}\tau_0(s)ds\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{\alpha}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{2\alpha}\left(\frac{\mu_0 b}{1-at-bs}+\frac{\mu_1 a}{1-bt-as}\right)\frac{bdt}{1-q(x)q(t)}+$$
$$+\frac{\lambda\cos(\beta\pi)}{2\pi(\mu_0+\mu_1)}\int_{-1}^{1}\tau_0(s)ds\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{\alpha}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{2\alpha}\left[\left(\frac{1+c(bx-a)}{1+c(bt-a)}\right)^{\alpha}-1\right]\times$$
$$\times\left(\frac{1}{t-x}-\frac{b}{1-q(x)q(t)}\right)\left(\frac{\mu_0 b}{1-at-bs}+\frac{\mu_1 a}{1-bt-as}\right)dt$$

— регулярный оператор,

$$F_1(x)=\frac{F(x)}{2(\mu_0+\mu_1)}+\frac{\cos(\beta\pi)}{2\pi(1+\sin(\beta\pi))(\mu_0+\mu_1)}\times$$
$$\times\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{\alpha}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{2\alpha}\left(\frac{1+c(bx-a)}{1+c(bt-a)}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{b}{1-q(x)q(t)}\right)F(t)dt$$

— известная функция.

В (23) вычислим внутренний интеграл. В силу формул из ([9], с. 125) имеем

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{t-x}dt=\frac{\pi\operatorname{ctg}(\beta\pi)}{(1+x)^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}-\frac{2^{\beta-1}B(\alpha,\beta-1)}{(1+x)^{1-\alpha}}F\left(\alpha,1-\beta,2-\beta;\frac{1-x}{2}\right),$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{1-at-bx}dt=\frac{\pi}{\sin(\beta\pi)}\frac{b^{\beta-1}a^{1-\alpha-\beta}}{(1+a+bx)^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}+$$
$$+\frac{B(\alpha,\beta-1)}{2^{2-\alpha-\beta}a}F\left(2-\alpha-\beta,1,2-\beta;-\frac{b(1-x)}{2a}\right).$$

Легко убедиться, что внутренний интеграл в уравнении (23) имеет вид

$$A(x,s)=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{\alpha}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{2\alpha}\left(\frac{\mu_0 b}{1-at-bs}+\frac{\mu_1 a}{1-bt-as}\right)\frac{dt}{t-x}=$$
$$=\frac{\mu_0 b}{(1-ax-bs)}\left[-\pi\operatorname{ctg}(\alpha\pi)-\frac{B(1-2\alpha,-\alpha)(1-x)^{\alpha}}{2^{\alpha}}F\left(1-2\alpha,\alpha,1+\alpha;\frac{1-x}{2}\right)+\right.$$
$$+\frac{\pi a^{1+3\alpha}}{\sin(\alpha\pi)b^{\alpha}}\frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{2\alpha}}{(1+a+bs)^{2\alpha}(1-s)^{\alpha}}+\frac{B(1-2\alpha,-\alpha)}{2^{3\alpha}}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{2\alpha}F\left(3\alpha,1,1+\alpha;-\frac{b(1-s)}{2}\right)\left.\right]+$$
$$+\frac{\mu_1 a}{1-bx-as}\left[-\pi\operatorname{ctg}(\alpha\pi)-\frac{B(1-2\alpha,-\alpha)(1-x)^{\alpha}}{2^{\alpha}}F\left(1-2\alpha,\alpha,1+\alpha;\frac{1-x}{2}\right)+\right.$$
$$+\frac{\pi b^{1+3\alpha}}{\sin(\alpha\pi)a^{\alpha}}\frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{2\alpha}}{(1+b+as)^{2\alpha}(1-s)^{\alpha}}+\frac{B(1-2\alpha,-\alpha)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{2\alpha}}{2^{3\alpha}}F\left(3\alpha,1,1+\alpha;-\frac{a(1-s)}{2}\right)\left.\right]. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (23), с учетом тождеств $1+\sin(\beta\pi)=\cos(\beta\pi)\operatorname{ctg}(\alpha\pi)$, $\cos(\beta\pi)/\sin(\alpha\pi)=2\cos(\alpha\pi)$, где $\alpha=(1-2\beta)/4$, имеем

$$\tau_0(x)=\frac{\lambda\cos(\alpha\pi)}{\mu_0+\mu_1}(ab)^{1+\alpha}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\mu_0(a/b)^{2\alpha}}{1-ax-bs}+\frac{\mu_1(b/a)^{2\alpha}}{1-bx-as}\right)\left(\frac{1-x}{1-s}\right)^{\alpha}\tau_0(s)ds+$$
$$+R_2[\tau_0]+F_1(x),$$

где

$$R_2[\tau_0]=R_1[\tau_0]+$$

$$+\frac{\lambda\cos(\alpha\pi)}{2\pi(\mu_0+\mu_1)}\frac{B(1-2\alpha,-\alpha)}{2^\alpha}\int_{-1}^{1}\Bigg\{\frac{\mu_0 b}{1-ax-bs}\Bigg[-(1-x)^\alpha F\left(1-2\alpha,\alpha,1+\alpha;\frac{1-x}{2}\right)+$$
$$+\frac{(1-x)^\alpha(1+x)^{2\alpha}}{2^{2\alpha}}F\left(3\alpha,\alpha,1+\alpha;-\frac{b(1-s)}{2}\right)\Bigg]+$$
$$+\frac{\mu_1 a}{1-bx-as}\Bigg[-(1-x)^\alpha F\left(1-2\alpha,\alpha,1+\alpha;\frac{1-x}{2}\right)+$$
$$+\frac{(1-x)^\alpha(1+x)^{2\alpha}}{2^{2\alpha}}F\left(3\alpha,1,1-\alpha;-\frac{a(1-s)}{2}\right)\Bigg]\Bigg\}\tau_0(s)ds+$$
$$+\frac{\lambda\cos(\alpha\pi)}{\mu_0+\mu_1}(ab)^{1+\alpha}\int_{-1}^{1}\Bigg\{\Bigg[\mu_0\left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha}\Bigg[\left(\frac{1+x}{1+a+bs}\right)^\alpha-1\Bigg]\frac{1}{1-ax-bs}+$$
$$+\mu_1\left(\frac{b}{a}\right)^{2\alpha}\Bigg[\left(\frac{1+x}{1+a+bs}\right)^\alpha-1\Bigg]\frac{1}{1-bx-as}\Bigg]\Bigg\}\tau_0(s)ds$$

— регулярный оператор.

В уравнении (23) с учетом тождеств $1-ax-bs=a(1-x)+b(1-s)$, $1-bx-as=b(1-x)+a(1-s)$, сделав замену переменных $x=1-2e^{-y}$, $s=1-2e^{-t}$ и введя обозначения $\rho(y)=e^{y\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\tau_0(1-2e^{-y})$, $k=a/b$,

$$K_0(x)=\frac{\lambda\sqrt{2\pi}\cos(\alpha\pi)}{\mu_0+\mu_1}\frac{(ab)^{1+\alpha}}{b}\left(\frac{\mu_0k^{2\alpha}}{e^{x/2}+ke^{-x/2}}+\frac{\mu_1k^{-2\alpha}}{e^{-x/2}+ke^{x/2}}\right),$$

получим уравнение Винера–Хопфа

$$\rho(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty K(y-t)\rho(t)dt+R_3[\rho]+F_2(y),\tag{25}$$

где $R_3[\rho]=e^{y\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)y}R_2[\tau_0]$ — регулярный оператор, $F_2(y)=e^{y\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}F_1[1-2e^{-y}]$ — известная функция.

Ядро $K(x)$ уравнения (25) непрерывно дифференцируемо и имеет показательный порядок убывания на бесконечности, $\alpha-\frac{1}{2}<0$, следовательно, оператор $R_3[\rho]$ и $F_2(y)$ также имеют показательный порядок убывания на бесконечности.

Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений типа свертки справедливы лишь в одном частном случае, когда индекс этих уравнений равен нулю.

Индексом уравнения (25) будет индекс выражения $1-K^\wedge(x)$ ([18], с. 56) с обратным знаком

$$K^\wedge(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}K(t)dt=$$
$$=\frac{\lambda\cos(\alpha\pi)(ab)^{1+\alpha}}{b(\mu_0+\mu_1)}\left[\mu_0k^{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ixt}dt}{e^{t/2}+ke^{-t/2}}+\mu_1k^{-2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ixt}dt}{e^{-t/2}+ke^{t/2}}\right].$$

Используя равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ixt}dt}{ke^{t/2}+e^{-t/2}}=\frac{\pi e^{ix\ln k}}{\sqrt{k}\,\mathrm{ch}(\pi x)},$$

имеем

$$K^\wedge(x)=\frac{\lambda\pi\cos(\alpha\pi)(ab)^{1+\alpha}(\mu_0k^{2\alpha}e^{ix\ln k}+\mu_1k^{-2\alpha}e^{-ix\ln k})}{b(\mu_0+\mu_1)\sqrt{k}\,\mathrm{ch}(\pi x)}.\tag{26}$$

Отсюда вытекает

$$|\operatorname{Re} K^{\wedge}(x)| = \left| \frac{\lambda\pi\cos(\alpha\pi)(ab)^{1+\alpha}\cos(x\ln k)(\mu_0 k^{2\alpha} + \mu_1 k^{-2\alpha})}{b\sqrt{k}(\mu_0+\mu_1)\operatorname{ch}(\pi x)} \right| <$$
$$< \frac{\mu_0 k^{2\alpha} + \mu_1 k^{-2\alpha}}{2(\mu_0+\mu_1)}(ab)^{1/2+\alpha} < 1/2.$$

Следовательно, $\operatorname{Re}(1 - K^{\wedge}(x)) > 0$.

Заметим, что если $z = x + iy$ — комплексная переменная, то $\arg z = \operatorname{arctg}(y/x)$ при $\operatorname{Re} z = x > 0$.

Из (26) очевидно, что $\operatorname{Re} K^{\wedge}(x) = O(1/\operatorname{ch}(\pi x))$, $\operatorname{Im} K^{\wedge}(x) = O(1/\operatorname{ch}(\pi x))$ для достаточно больших $|x|$. Отсюда следует

$$\operatorname{Ind}(1 - K^{\wedge}(x)) = \frac{1}{2\pi}\left[\arg(1 - K^{\wedge}(x))\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}(1 - K^{\wedge}(x))}{\operatorname{Re}(1 - K^{\wedge}(x))}\right]_{-\infty}^{\infty} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\operatorname{arctg}(0) - \operatorname{arctg}(0)\right] = 0,$$

т. е. изменение аргумента выражения $1 - K^{\wedge}(x)$ на действительной оси, представленного в полных оборотах, равно нулю ([18], с. 28). Поэтому из единственности решения задачи FS следует однозначная разрешимость уравнения (25), а значит, и задачи FS.

Литература

[1] Жегалов В.И. *Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на переходной линии*, Учен. зап. Казанск. ун-та **122** (3), 3–16 (1962).

[2] Нахушев А.М. *О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа*, Дифференц. уравнения **5** (1), 44–59 (1969).

[3] Трикоми Ф. *О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа* (Гостехиздат, М.–Л., 1947).

[4] Франкль Ф.И. *Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения*, ПММ **20** (2), 196–202 (1956).

[5] Девингталь Ю.В. *О существовании и единственности решения одной задачи Ф.И. Франкля*, Изв. вузов. Матем., № 2, 39-51 (1958).

[6] Линь Цзянь-бин. *О некоторых задачах Франкля*, Вестн. ЛГУ. Матем., механ. и астрономия **3** (13), 28–39 (1961).

[7] Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. *Задача с нелокальным граничным условием на характеристике для одного класса уравнений смешанного типа*, Матем. заметки **86** (5), 748–760 (2009).

[8] Бабенко К.И. *К теории уравнений смешанного типа*, Дисс. ... докт. физ-матем. наук (библиотека матем. ин-та им. В.А. Стеклова РАН, 1952).

[9] Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами* (“Univ.”, “Yangiyo’l poligraf servis”, Ташкент, 2005).

[10] Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа* (Высш. школа, М., 1985).

[11] Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных* (Наука, М., 1981).

[12] Полосин А.А. *Об однозначной разрешимости задачи Трикоми для специальной области*, Дифференц. уравнения **32** (3), 394–401 (1996).

[13] Мирсабуров М. *Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках*, Дифференц. уравнения **37** (9), 1281–1284 (2001).

[14] Мирсабуров М., Чориева С.Т. *Об одной задаче со смещением для вырождающегося уравнения смешанного типа*, Изв. вузов. Матем., № 4, 46–54 (2015).

[15] Солдатов А.П. *К нётеровской теории операторов. Одномерные сингулярные интегральные операторы общего вида*, Дифференц. уравнения **14** (4), 706–718 (1978).

[16] Дудучава Р.В. *Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики*, Тр. Тбилисск. матем. ин-та (Тбилиси, 1979).

[17] Михлин С.Г. *Об интегральном уравнении F. Tricomi*, ДАН СССР **59** (6), 1053–1056 (1948).

[18] Гахов Ф.Д., Черский Ю.Н. *Уравнения типа свертки* (Наука, М., 1978).

Мирахмат Мирсабуров

Термезский государственный университет,
ул. Ф. Ходжаева, д. 43, г. Термез, 190111, Республика Узбекистан,

e-mail: mirsaburov@mail.ru

M. Mirsaburov

The problem with missing condition of shift for singular coefficiensy Gellerstedt equation

Abstract. For Gellerstedt equation with singular coefficient we prove theorems of uniqueness and existence of solution to the problem with the missing condition of shift on the boundary characteristics and Frankl type condition on degeneration segment of the equation.

Keywords: missing condition of shift, Frankl type condition, Tricomi non-standard singular integral equation, Wiener–Hopf equation, index.

Mirakhmat Mirsaburov

Termez State University,
43 F. Khodzhaev str., Termez, 190111 Republic of Uzbekistan,

e-mail: mirsaburov@mail.ru