O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O`RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI

MAGISTRATURA BO'LIMI MAGISTRI

ABDULLAEV BUNYODNING

Qo`lyozma hududida

"TRANSTOVUSHLI OQIMLARNI SONLI MODELLASHTIRISH"

Mutaxassislik: 5A130202 - ''Amaliy matematika va axborot texnologiyalari"

DISSERTATSIYA

Amaliy matematika va axborot texnologiyalari magistri

akademik darajasini olish uchun

Ish ko`rildi va himoya qilishga ruxsat berildi

Amaliy matematika va ibformatika kafedra mudiri

_____

f.m.f.d. Normuradov Ch. B.

«___» _____2017-yil

Ilmiy rahbar

f.m.f.d.Normuradov Ch.B.

_____

Termiz-2017-y.

MUNDARIJA

Kirish……3

I-BOB.“YIRIK ZARRACHALAR METODI” ……14

1.1. Hisoblashlar o’tkazish bosqichlari……14

1.2. Yopishqoqlik effektlari…….18

1.3. Ayirmali sxemalar turg’unligi……...21

II-BOB. QISILMAYDIGAN YOPISHQOQ OQIMLAR …….23

2.1. Masalaning qo’yilishi……23

2.2. Ayirmali sxema……..24

2.3. Chegaraviy shartlar…….44

III-BOB. QISILUVCHAN YOPISHQOQ OQIMLAR ……..47

3.1. Oqimlar metodi……47

3.2. Metodning tahlili……54

3.3. Yechish algoritimi……..63

3.4. Kompyuter dasturi…….77

3.5. Hisoblash natijalari……..87

XULOSA ……89

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR …….90

Kirish

Hozirgi kunda amaliyot amaliy matematika sohasidagi mutaxasislar oldiga bir qator vazifalarni qo'ymoqda, ushbu masalaning yetarlicha aniqlik va muvaffaqiyat bilan yechilishi ko'pincha zamonaviy kompyuterlar hamda sonli metodlarning qo'llanilishi bilan bog'liq. Albatta bu "yopiq" formada topishga imkon beradigan analitik metodlar kelgusida rivojlanmasligiga lozim deb tushunmaslik lozim. Ammo, ravshanki, analitik metodlar yordamida yechiladigan masalalar sinfi yetarlicha tor, shu sababli, matematik fizika masalalarni o'rganishga bag'ishlangan umumiy sonli algoritmlar ishlab chiqish o'ta muhim. Ayniqsa ushbu holat muttasil muhit mexanikasi masalalari masalalari –gazlar dinamikasi, elastik nazaryasi, gidrodinamik turg'unlik va boshqa masalalarni yechishda yaqqol seziladi.

Bu borada bir qator qiyinchilik va murakkabliklar mavjud, ularning ayrimlarini keltirib o'tamiz.

1. Eksperement o'tkazishning qiyinchiligi. Ayrim hodisalarni tadqiq etishda, masalan, parvoz tovushidan tez tezlik bilan amalga oshirayotganda, yuqori temperatura paydo buladi, u oqimda ionlashish effektlariga olib keladi, bazi holatlarda gazning "alangalanish" vaziyati ham paydo bo'ladi. Bunday holatlarni laboratoriya sharoitlarida modellashtirish o'ta murakkab, chunki, asl model va taqribiy model o'rtasidagi ayniylikni, ayniylikning klassik mezonlari bo'yicha yetarlicha qanoatlantirib bo'lmaydi –yani, asl nusxa va model orasidagi Max va Reynolds sonlarnining tengligini o'rnatib bo'lmaydi. Bunda xuddi shuningdek, absolyut bosim va absolyut temperaturaning tengligi ham talab qilinadi, bu esa o'rganilayotgan ob'ektning asl nusxasi va uning model o'lchamlari o'zaro teng bo'lgandagina o'rinli bo'ladi. Bularning barchasi eksperiment o'tkazishning qimmatligi va katta texnik qiyinchiliklarga taqalishini ko'rsatadi.

Ammo eksperiment o'tkazishning o'ta muhim ekanligi hech qachon yoddan chiqarmaslik lozim. Tajriba har doim tadqiqotning asosini tashkil etadi, u tadbiq

etilayotgan sxemani tasdiqlovchi yoki rad etuvchi va u yoki bu nazariy yondashuvga yechimni topishga imkon beradi.

2. Qaralayotgan tenglamalarning murakkabligi muttasil muhit mexanikasi masalalarini yechishga sonli metodlarning kirib borishi shu bilan izohlanadiki, aerodinamika, gazlar dinamikasi, elastiklik nazaryasining tenglamalari (matematik fizikaning boshqa sohalardagi tenglamalariga nisbatan) o'ta murakkab xususiy hosilali differentsial tenglamalar sestemasini tashkil etadi. Umumiy holda ular aralash turdagi chiziqli bo'lmagan tenglamalar sestemasidan iborat bo'lib tenglamaning bir muhit ikkinchi bir muhitga o'tish sathi nomalum formada bo'ladi (ushbu sathdan o'tishda tenglamalar o'z tipini o'zgartiradi) va "siljuvchi chegaraga" ega bo'ladi, yani, bu holda chegaraviy shartlar sathlarda (sirtlarda) yoki chiziqlarda qo'yiladi va ularning o'zi ham hisoblashlar jarayonida aniqlanadi. Bunda dastlabki funksiyalarning o'zgarishi sohasi shunchalik kengki, analitik tadqiqotning an'anaviy metodlari (tenglamalarni chiziqiylashtirish qatorlarga yoyish, kichik parametr ajratish va boshqalar) bu yerda umuman olganda masalaning to'liq yechimini olish uchun yaroqli bo'lmasdan qoladi.

Muttasil muhit mexanikasining aniq masalalarini yechishda foydalaniladigan algoritmlarning ayrim jihatlariga to'xtalamiz. Hozirgi vaqtda sonli metodlarning konstruktorlik byurolari va ilmiy-tadqiqot institutlarining qat'iy kirib borayotganligi o'z-o'zidan ma'lum. Koinotni (kosmosni) o'rganish, optimal boshqarish amalyoti, uchish apparatlari va boshqalarning ratsional formalarini tanlashdagi ko'pgina yutuqlar bir qator (seriyali) hisoblanishlar o'tkazish va shu orqali olingan malumotlardan foydalanish darajasiga bog'liq bo'ladi. Masala to'g'ri qo'yilgan yaxshi modellashtirilgan va samarali algoritmlashtirilgan masalalardan hisoblanishlar natijasida olinadigan malumot hajmi ularga mos eksprimental tadqiqotlarni o'tkazishga nisbatan o'ta to'liq va o'ta arzon bo'ladi. Ammo, sonli metodlarning amaliy maqsadlarda keng qo'llanilishi ularning yetarlicha sodda va ishonchli bo'lishini talab qiladi.

Shunday qilib bu yerda bir tarafdan juda murakkab masalalar bilan ish ko'rishga, boshqa tarafdan yetarlicha sodda va ishonchli sonli metodlarni ishlab chiqish zarurati paydo bo'lishi bilan bog'liq vazifalarni amalga oshirishga to'g'ri keladi. Ushbu metodlar loyihalash insititutlari va konstruktorlik byurolari sharoitlarida seriyali hisoblashlar o'tkazishga imkon beradi.

Xuddi yuqorida ta'kidlangan vaziyat gazlar dinamikasi tenglamalarini yechish metodlari uchun ham o'rinli bo'ladi. Ularning algoritmlarini amalga oshirish, izlanayotgan yechimga yaqinlashish turg'inligi bilan bog'liq tadqiqotlar hozirgacha faqat chiziqli sxemalar uchun tadqiq etilgan, bazi hollarda faqatgina o'zgarmas koeffitsentli tenglamalar uchun o'rganib chiqilgan

Muammoni yechish zaruriyati ko'ndalang turg'unligi sababli, amaliy matematik hozirgi ma'lum algoritmlarini qo'llashga majbur va bundanda yuqoriroq darajada yaxshi hisoblash metodlarini ishlab chiqish zarurati paydo bo'lganligini his etadi, hattoki, ushbu metodlarning qat'iy matematik asoslanishi mavjud bo'lmagan taqdirda ham.

Shu sababli, mexanika yoki fizika masalalarini kompyuterda sonli yechishdagi asosiy bosqichlarini bayon etish maqsadga muvofiq:

1. Fizikaviy modelni shakllantirish va masalani matematik nuqtai-nazardan qo'yish.

2. Hisoblash algoritmlarini ishlab chiqish va uni nazariy tadqiq etish.

3. Programmalashtirish va programmani taxlash.

4. Programmani metodik nuqtai-nazardan taxlash uning aniq masalalarda to'g'ri ishlashini tekshirish; aniqlangan kamchiliklarni bartaraf etish va algoritmni eksperimental tadqiq etish.

5. Seriyali hisoblashlar o'tkazish, tajriba to'plash, algoritmning samaradorligini baholash va uning qo'llanilish chegaralarini aniqlash.

Bunda barcha jarayonlarda matematik nazariya, fizikaviy va sonli eksperiment kompyuterda birgalikda va muvofiqlashtirilgan holda qo'llaniladi.

Gazlar dinamikasi masalalarini yechishdagi asosiy matematik apparat sonli metodlar bo'lib hisoblanadi. Aniq fanlarda ko'pincha muhim muammolar paydo bo'ldi, ularni o'rganish chiziqli bo'lmagan xususiy hosilali differentsial tenglamalar sestemasini yechish bilan bog'liq bo'ladi. Gazlar dinamikasi aynan shunday hodisalarni, yani yuqorida takidlangan ko'rinishdagi tenglamalar sestemasi bilan tavsiflanadigan hodisalarni tadqiq etadi. Bunda ko'pincha gazodinamik masalalarda uzlikli yechimlar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi.

Umumiy ko'rinishdagi gazlar dinamikasi tenglamalarining yetarlicha aniq yechimlarini tuzish tezkor kompyuterdan foydalanishga asoslangan hisoblash metodlarini qo'llashga bog'liq. Amaliyot talabi hisoblash matematikasi metodlarining jadal rivojlanishi va ularning turli gazodinamik masalalarini yechishga keng miqyosda qo'llanilishini taqazo etmoqda.

Gazodinamika sohasida faoliyat olib borayotgan olimlar chiziqli bulmagan xususiy hosilali differintsial tenglamalar sestemasini yechishga muljallangan zamonaviy sonli metodlarning taraqqiy etishiga ulkan hissa qo'shdilar.

Chiziqli bulmagan hususiy hosilali differentsial tenglamalarni yechishga tatbiq etiladigan to'rtta universal sonli metodlar mavjud.

1. Chekli ayirmali metodlar [1-3]

Ushbu metodlar hozirgi kungacha rivojlanib bormoqda chiziqli hamda chiziqli bo'lmagan geperbolik, elliptik va parobolik tipdagi tenglamalarni yechishga keng miqyosda qo'llanilmoqda. Bunda integrallash sohasi chekli sondagi nuqtalar to'plami to'r bilan almashtiriladi. Xususiy hosilalar barcha to'rga yo'nalishlar bo'yicha u yoki bu chekli ayirmali munosabatlar orqali almashtiriladi, bunda ko'pincha oshkormas ayirmali sxemalardan foydalaniladi. Bunday holda har bir qadamda yuzlab no'malumlarni o'z ichiga olgan chiziqli algebraik tenglamalar sestemasini yechishga to'g'ri keladi.

2. Integral munosabatlar metodi [4-7]

Ushbu metodda, u ma’lum to’g’ri chiziqlar sonli metodning umumlashgan ko’rinishi bo’lib, integrallash sohasi egri chiziqlar yordamida kichik sohachalarga bo’linadi, ularning formasi umumiy soha chegarasining ko’rinishi bilan aniqlanadi. Divergent formada yozilgan xususiy hosilali tenglamalar sestemasi sohalariga ko’ndalang yo’nalishda integrallanadi, so’ngra integral tagidagi funktsiyalar ma’lum interpolatsiyalash ifodalari ko’rinishda tasvirlanadi. Natijada hosil qilingan oddiy differentsial tenglamalarning approksimatsiyalovchi sestemasi sonli integrallanadi. Integral munosabatlar metodi ham, xuddi chekli ayirmali metodlar singari, turli tipdagi tenglamalarni yechishga qo’llaniladi.

3. Harakteristik metod [8-9]

Ushbu yondashuv faqat giperbolik tipdagi tenglamalarni yechishga qo’llaniladi. Bunda masala yechimi harakteristik to’r yordamida hisoblanadi, ushbu to’r hisoblash jarayonida tuziladi. Amalda harakteristik metod gepirbolik tipdagi tipdagi tenglamalar sestemasini integrallashga mo’ljallangan ayirmali metoddan iborat bo’lib, u harakteristik hisoblash to’rida ifodalanadi va oqimni batafsil tavsiflash maqsadida foydalaniladi. Bu metodning boshqa ayirmali metodlarga nisbatan farqi interpolatsiyalash operatorlarining minimal darajada qullanishidir va bu bilan bog’liq ravishda ayirmali sxemaning ta’sir doirasini maksimal aniqlikda hisobga olish, xuddi shuningdek, differentsial tenglamalar sestemasining ta’sir doirasini ham aniqlashdan iborat. Oqim profilini (sathini) silliqlashtirish, bu holat fiksirlangan to’rdagi ayirmali sxemalarga mansub bo’lib, bu yerda minimal buladi, chunki harakteristik metoddagi hisoblash to’ri berilgan differentsial sestemaning ta’sir doirasini aniq hisobga olgan holda buladi.

4. “Yacheykalardagi zarrachalar” metodi [10-24]

Mazkur metod o’zida Lagranj va Eyler yondashuvlarining ma’lum ma’nodagi afzalliklarini mujassamlashtirgan. Yechim sohasi bu yerda o’zlarida o’zgarmas(Eyler) to’riga ajratiladi, ammo, muttasil muhit diskret model orqali tavsiflanadi-fiksirlangan massaga ega bulgan “zarrachalar” to’plami qaraladi (zarrachalarning Lagranj to’ri), u Eyler to’ri yacheykalari bo’ylab harakatlanadi. Bunda zarrachalar suyuqlikning parametrlarini (massa, energiya, tezlik) aniqlash uchun xizmat qiladi, ayni paytda Eyler to’ri maydon parametrlarini (bosim, zichlik, temperatura) aniqlash uchun foydalaniladi.

“Yacheykalardagi zarrachalar” metodi ko’pkomponentali muhitlar dinamikasidagi murakkab hodisalarni tadqiq etishda foydalaniladi. Bunda zarrachalar muhitning ajralishi, uzilishlarining ta’sirlashuvi bilan bog’liq erkin sirtlar va chiziqlarni yaxshi “kuzatish”ga imkon beradi. Ammo zarrachalar metodining diskret varianti bir qator kamchiliklarga ham ega. Ulardan eng asosiysi, metodning o’z tabiatiga mansub bo’lib, u muttasil muhitning diskret tasvirlanishi (yacheykada chekli zarrachalar soni) bilan bog’liq bo’lib, metodda hisoblash nuqtai-nazardan to’rg’inmaslik(flyuktuatsiya) mavjud. Bundan tashqari zarrachalar o’ta tarqoq bo’lgan sohalardan malumot olish mushkul, bu sohalardan amalda barcha zarrachalar ketib qolgan buladi. Zarachalar sonini oshirib yuborish, zamonaviy kompyuterlarning texnik imkoniyatlariga to’g’ri kelmay qoldi.

Magistirlik desertatsiyasining mavzusining asoslanishi.

Mavzuda uning dolzarbligi. Gazlar dinamikasi murakkab oqimlarini sonli modellashtirish masalalari yoritiladi. Gazlar dinamikasi chiziqli bulmagan differinsial tenglamalar sestemasidan iborat bo’lganligi uchun bunday tenglamalarni yechishning umumiy metodlari mavjud emas, shu sababli ushbu sinfga mansub tenglamalarni sonli modellashtirish , algoritmlash , dasturlash zamonaviy kompyuterlar imkoniyatlaridan foydalangan holda hisoblash eksperimenti o’tkazish orqali sonli yechish muhim ahamiyatga ega.

Mavzuning dolzarbligi.

Chiziqli bo'lmagan gazlar dinamikasi tenglamalari sestemasini zamonaviy hisoblash va axborot texnologiyalari imkoniyatlaridan foydalangan holda sonli modellashtirish, keng qamrovli hisoblash eksperimentini o'tkazish hamda kelgusida ilmiy tadqiqot faoliyatini izchil olib borishdan iborat.

Tadqiqot obekti va predmeti.

Tadqiqot obekti sifatida chiziqli bo'lmagan gazlar dinamikasi tenglamalar sestemasi qaraladi . Tadqiqot predmeti sifatida ushbu tenglamalarni sonli modellashtirish maqsadida bir jinsli konservativ ayirmali sxemalarni hamda to'liq konservativ sxemalarni qo'llash algoritmlarini ishlab chiqish, korrekt chegaraviy va boshlang'ich shartlarni qo'yish, qismiy algoritmlar uchun kompyuter dasturlari tuzishni o'z ichiga oladi.

Tadqiqot maqsadi va vazifalari.

Tadqiqotning asosiy maqsadi gazlar dinamikasi tenglamalari sistemsini sonli modellashtirishdan iborat bo'lib, bunda quydagi vazifalarni bajarish ko'zda tutiladi:

– gazlar dinamikasi tenglamalari sistemasi uchun korrekt boshlang'ich va chegaraviy shartlar qo'yish;

– gazlar dinamikasi tenglamalarini bir xil jinsli konservativ sxemalar bilan approksimatsiyalash;

– bir jinsli konservativ sxemalar bilan yechish algoritmlarini ishlab chiqish;

– ayirmali sxemalarning turg'unligi masalalarni tadqiq etish;

– qisilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini sonli modellashtirish algoritmlarini ishlab chiqish;

– qisiluvchan yopishqoq suyuqlik harakatini sonli modellashtirish algoritmlarini ishlab chiqish;

– to’liq konservativ sxemalarni qo’llash algoritmlari;

– qismiy algoritmlar uchun kompyuter dasturlari tuzish;

– keng qamrovli hisoblash eksperimenti o’tkazish;

– natijalarni tahlil etish;

– ishni hulosalash.

Ilmiy yangiligi.

Gazlar dinamikasi chiziqli bo’lmagan tenglamalar sestemasini model algoritmli – programma usuli asosida tadqiq etish algoritrmlarini ishlab chiqish, komyuterda keng qamrovli hisoblash eksperementini o’tkazish.

Tadqiqotning asosiy masalalari va farazlari.

Tadqiqotda quydagi asosiy masalalarni hal etish ko’zda tutiladi:

– gazlar dinamikasi tenglamalarini tahlil etish;

– gazlar dinamikasida qisilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini tadqiq etish;

– shu maqsadda differinsial masalani qo’yish;

– masalani yechish algoritmlarini ishlab chiqish;

– chegaraviy shartlarni aniqlashtirish;

– qisiluvchan yopishqoq suyuqliklar harakatini matematik modellarini o’rganish;

– oqimlar metodi nazariyasini tahlil etish

– bir jinsli konservativ sxemalar va to’liq konservativ sxemalar bilan yechish algoritmlarini ishlab chiqish;

– qismiy kompyuter dasturlarini tuzish;

– hisoblash eksperimentini o’tkazish;

– ishni xulosalashdan iborat bo’lib, quydagi farazga asoslanadi.

Fizik jarayonning asosiy saqlanish qonunlari integralli ko’rinishda o’rinli deb hisoblanadi.

Tadqiqot mavzusi bo’yicha adabiyotlar tahlili.

1. Дородницын А.А.Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики. – Труды III. Всесоюзн. матем. съезда, т. III, Изд-во АН СССР, 1958, 447-453.

2. Белоцерковский О.М.Обтекание кругового цилиндра с отошедшей ударной волной.-Докл. АН СССР, 1957, 113, №3, 509-512.

3. Белоцерковский О.М.Обтекание симметричного профиля с отошедшей ударной волной.-Прикл. матем. и механ., 1958, 22, №2, 206-219.

4. Белоцерковский О.М., Булекбаев А, Грудницкий В.Г. Алгоритмы численный метод интегральных соотношений.- Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, №5, 731-759.

5. Белоцерковский О.М., Булекбаев А, Грудницкий В.Г. Алгоритмы численных схем метода интегральных соотношений для расчета смешанных течений газа. –Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, 6, №6, 1064-1082.

6. Белоцерковский О.М., Булекбаев А, Голомазов М.М. и др. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. –М.: ВЦ АН СССР, 1966 (I изд.), 1967 (II изд.).

7. Чушкин П.И.Затупленные тела простой формы в сверхзвуковом потоке газа. – Прикл. матем. и механ., 1960, 24, №5, 927-930.

8. Чушкин П.И.Метод характеристик для пространственных сверхзвуковых течений. – М.: ВЦ АН СССР, 1968.

9. Магомедов К.М., Холодов А.С.О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, 9, №2, 373-386.

10. Численное исследование современных задач газовой динамики (под ред. О.М.Белоцерковского). – М.: Наука, 1974.

Tadqiqotda qo'llaniladigan metodikaning tavsifi.

Tadqiqotda gazlar dinamikasi tenglamalari sestemasi uzliksiz matematik modellarini diskretlashtirish maqsadida ayirmali sxemalar metodidan foydalaniladi. Shu maqsadda quydagi bosqichlar amalga oshiriladi:

1) Argumentning uzliksiz o'zgarish sohasi uning diskret o'zgarish sohasi (to'r) bilan almashtiriladi;

2) Asosiy differensial tenglama va uning qo'shinga shartlari (boshlang'ich va chegaraviy) chekli ayirmali tenglamalar ko'rinishida yoziladi;

3) Chekli ayirmali tenglamalarni yechish algoritmlari ishlab chiqiladi;

4) Diskret algoritmi uchun kompyuter dasturi tuziladi va hisoblashlar o'tkaziladi.

Tadqiqot natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati.

Tadqiqotda gazlar dinamikasi uchun ularning matematik modellarini tahlil etish diffirensial masalasini korrekt qo'yish ishning nazariy ahamiyatini bildiradi, tanlangan matematik modellarni diskret matematik modellar bilan almashtirish, diskret matematik modellarni ishlab chiqish, hisoblash eksprementi o'tkazish tadqiqotning amaliy ahamiyatini ko'rsatadi. Tadqiqot matematik model algoritm programma yechimini tadbiq etish uning amaliy matematika va axborot texnologiyalari mutaxasisligi talablariga to'liq javob berishini ko'rsatadi.

Tadqiqot ishi tuzilmasining tavsifi magistrlik dessertatsiyasida kirish, uchta bob, o'n bitta paragragraf, xulosa va adabiyotlar ro'yxati keltirilgan.

Ishning kirish qismida tanlangan mavzuga oid adabiyotlar tahlili, mavzuning asoslanishi va dolzarbligi, tadqiqot ob'ekti va predmeti, tadqiqot maqsadi va vazifalari, ilmiy yangiligi, tadqiqotning asosiy masalalari va farazlari, tadqiqot mavzusi bo'yicha adabiyotlar sharhi(tahlili), tadqiqotda qo'llanilgan metodikaning tavsifi, ish tuzilmasining tavsifi tadqiqot natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati keltirilgan.

Ishning birinchi bobida "Yirik zarrachalar metodi" haqida va masalaning qo'yilishi haqida bayon qilingan.

Ikkinchi bobda "Qisilmaydigan yopishqoq oqimlar" tenglamalarni yechish haqidagi ma'lumotlar berilgan.

Ishning uchinchi bobida "Qisiluvchan yopishqoq oqimlar" uchun aniq tenglamalarni yechim uslubiyati bayon qilingan.

I-BOB “Yirik zarrachalar metodi”

1.1. Hisoblashlar o’tkazish bosqichlari

Ushbu bobda yirik zarrachalar metodi to’g’risidagi malumotlar keltiriladi. Ilmiy ishlar [14,15] da Eyler tenglamalari asosida tuzilgan sonli modellar uchun yacheykalardagi zarrachalar majmuasi o’rniga, butun suyuq (Eylerga) yacheykalar massasi qaraladi- “yirik zarracha” (ana shundan shundan metodning nomi kelib chiqadi. So’ngra saqlanish qonunlari (massa, energiya, impuls va boshqalar) ning chekli ayirmali yoki integrallash ko’rinishlariga asoslangan holda ushbu “yirik zarrachalar” ning Eyler to’ri orqali o’tuvchi nostotsionar oqimlari o’rganiladi.

Bu yerda mohiyatdan chekli o’lchamli yacheykalar uchun saqlanish qonunlarining balans tenglamalari formasidan foydalaniladi. Natijada biz divergent –konservativ va dissivpativ-turg’un ayirmali sxemalarga ega bo’lamiz, ular murakkab gazlar dinamikasi masalalarining sinfini tadqiq etishga imkon beradi.

1. Hisoblashlar o’tkazish bosqichlari ideal qisiluvchan gaz harakatini qaraylik. Boshlang’ich tenglamalar sifatida yoki divergent ko’rinishida yozilgan Eyler differensial tenglamalaridan (uzliksizlik tenglamasi, impuls va energiya tenglamalari)

$$\frac{\partial p}{\partial t} + div(\rho\, V) = 0,$$

$$\frac{\partial p\mho}{\partial t} + div(\rho\mho\, V) + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial pv}{\partial t} + div(\rho v\, V) + \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial pE}{\partial t} + div(\rho\, E\, V) + div(PV) = 0,$$

yoki harakat tenglamalarining saqlanish qonunlari formasidagi integrallash ko’rinishlaridan foydalanish mumkin

Maqola [14] ko'rsatilganki, "yirik zarrachalar" metodida tenglamalar sestemasining integralli formada yozilgan saqlanish qonunlari ko'rinishidan foydalanish mumkin. Bunda dastlabki tenglamalar sestemasini approksimatliyalovchi ayirmali sxema birjinsli bo'lishi mumkin bir jinsli bo'lishi juda muhim, chunki bunday sxemalarida hisoblashlar masalasidagi o'ziga xos jihatlarni (maxsusliklarni) inobatga olgan holda yagona algoritm asosida olib boriladi. Yuqoridagi tenglamalar sestemasini to'ldirish uchun holat tenglamaridan foydalaniladi

$$P = P(p, E, V) = 0 \tag{2}$$

Endi "yirik zarrachalar" metodining asosiy jihatlariga to'xtalamiz. Bu yerda differensial masalani integrallash sohasi tomonlari $\Delta x, \Delta y$ ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan tashkil topgan va fazo bo'yicha fiksirlangan Eyler to'ri bilan qoplanadi.

Birinchi "Eyler" bosqichi hisoblashlarida yacheykaga batamom aloqador bo'lgan miqdorlargina o'zgartiriladi , suyuqlik esa darhol tormozlangan deb faraz qilinadi. Shu sababli $(\varphi\ \rho\ W)$ ko'rinishdagi konventiv hadlar, ular siljishi effektlariga mos keladi, tenglamalar (1) dan olib tashlanadi, bu yerda

$\varphi = (I, \mathrm{v}, V, E)$. Bu holda uzliksizlik tenglamasidan xususuy holda zichlik maydoni "muzlatilgan" bo'ladi va dastlabki tenlamalar sestemasi quydagicha ko'rinishni oladi.

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + div(P\ \mathrm{v}) + \frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Bu yerda ham soda chekli ayirmali approksimatsiyalardan, ham (hisoblashlar turg'unligini yaxshilash uchun integral munosabatlar metodi [5] dan foydalangan,

bu yerda integral tagidagi funksiyani nurlar (N=3,4,5) bo'yicha approksimatsiyalashdan foydalanilgan.

Hisoblashlar o'tkazishning ikkinchi (Lagranj) yacheykalar chegarasi bo'ylab bosqichida zarrachalarning massasi oqimi ΔM^n vaqt momenti $t^n + \Delta t$ da modellashtiriladi. Bunda massa faqat chegaraga normal bo'lgan tezlik komponentalari evaziga ko'chadi deb faraz qilinadi.

Masalan ,

$$\Delta M^n_{i+\frac{1}{2},j} = \langle P^n_{i+\frac{1}{2},j} \rangle \langle V^n_{i+\frac{1}{2},j} \rangle \, \Delta y \cdot \Delta.t$$

Bu yerda < > belgi P va V miqdorlarning yacheyka zarralaridagi qiymatlarini bildiradi. Ushbu miqdorlarni tantanali muhim ahamiyatga ega chunki bu hisoblashlarning turg'unligi va aniqligi kuchli ta'sir ko'rsatadi. Barcha ΔM^n yozuvlar uchun berilganlarda oqim yo'nalishini hisobga olish harakterli ekanini bildiradi.

Nihoyat hisoblashlarning uchinchi bosqichida (yakuniy bosqich) to'rni regulyarlashtirish amalga oshiriladi. (siljitish to'rni dastlabki holatga o'tkazishni qayta hisoblash) va oqimning Eyler parametrlarining so'ngi maydoni vaqtning $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ (tenglamalaridagi barcha mos turmasliklar "tanlab" olinadi. Yuqorida takidlanganidek ushbu bosqichning tenglamalari sifatida massaning saqlanish qonuni M, impulisning saqlanish qonuni P va to'liq enirgiyaning saqlanish qonuni E ning berilgan yacheyka uchun yozilgan ayirmali formalridan foydalaniladi

$$F^{n+1} = F^n + \in \Delta F^n_{chegara}$$

Bu yerda F=(M,P,E).

Ushbu tenglamalar oqim maydoni ichiga oqib chiquvchi manbalar M, P va E yo'q ekanligini tasdiqlaydi, ularning Δt vaqt oralig'idagi faqat oqim sohasi tashqi chegarasi bo'ylab tasirlashish evaziga amalga oshirishni ko'rsatadi.

Endi chegaraviy shartlar xususida to’xtalib o’tamiz. Hisoblash apparatlarining bir xildaligini taminlash maxsus qoshimcha formulalardan foydalanmaslik maqsadida chegaraviy yacheykalar uchun barcha chegaralar bo’ylab yordamchi yacheykalar to’plami kiritiladi. Bunday qatlamlar soni ayirmali sxema tartibi bilan aniqlanadi (birinchi tartibli sxema uchun –bitta qatlam va hokozo). Bunda hisoblash sohasidagi chegaralarning ikkita turini farqlash lozim: qattiq chegara (yoki simmitriya o’qi) va “ochiq” chegara .

Qattiq chegara uchun tezlik komponentasining chegaraga normal bo’lgani ishorasini o’zgartiradi oqimning qolgan parametrlari o’zgarishsiz olinadi. Shunday qilib, qattiiq chegarada tezlikning normal komponentasi nolga aylanadi va bu bilan chegaradan o’tib ketmaslik sharti amalga oshiriladi. Ba’zan shunday holat ham bo’lishi mumkinki, chegaraviy shartlarning batamom boshqa tipi uchraydi –o’ta yopishqoq chegara. Bunday holda tezlikning har ikkala komponentasi ishorasini o’zgartiradi va chegarada tezlik vektori to’liq nolga aylanadi(yopishqoqlik sharti).

“Ochiq” chegara orqali suyuqlik oqib kirishi va oqib chiqishi mumkin va bu yerda harakatning uzliksizligini ta'minlaydigan ba’zi shartlar ta’minlashi lozim. Suyuqlik to’g’ri to’rtburchakli to’rga chap tomondan oqib kirayotgan

Oqim parametrlari beriladi. Boshqa chegaralar uchun oqim parametrlari “ichkari’’dan ekstropolyatsiya qilinadi, parametrlarning qiymatlari fiktiv (yordamchi) qatlamga o’tkaziladi, masalan,chegaraga yaqin bo’lgan qatlamga (bu nolinchi tartibli ekstropolyatsiya) . Chegaraviy shartlarning yanada murakkab qo’yilishi yoki yanada aniq ekstropolyatsiyalash (chiziqli kvadratik va boshqalar) bo’lishi mumkin .

1.2.Yopishqoqlik effektlari.

Yuqorida ta'kidlangandek, qaralayotgan yondashuvda bir jinsli ayirmali sxemalar qo'llaniladi, ular yordamida ham silliq oqimlarni ham uzilishiga ega bo'lgan oqimlarni yagona algoritmli asosida "bir xil'' amalga oshiriladi. Bunga approksimatsiyalovchi yopishqoqlikka ega bo'lgan chekli ayirmali sxemalardan foydalanish orqali erishiladi. Shu masalalarga qisqacha to'xtalib o'tamiz.

Dastlabki tenglamalar sifatida yopishqoq bo'lmagan gaz uchun gazlar dinamikasi tenglamalari olindi, ammo, biz qarayotgan ayirmali sxemaga yopishqoqlik effektlari mansub. Ular birinchidan sxemaga sun'iy yopishqoqlikka ega bo'lgan aniq hadni qo'shish (kiritish) (bu "yopishqoqlik bosimi'' deyiladi) va ikkinchidan, chekli ayirmasi tenglamalar strukturasiga bog'liq bo'lgan sxema xususiy yopishqoqligi mavjudligi bilan shartlangan.

Differensial yaqinlashish metodi orqali ayirmali sxemalarning turg'unligi masalalari o'rganilishi mumkin. Giperbolik tipdagi bir o'lchamli kvazi chiziqli tenglamalar uchun ushbu soxadagi tadqiqotlar N.N.Yanemko va Y.I.Isonin [24] tamonidan olib borilgan. Chiziqli bo'lmagan tenglamalarga ham differensial yaqinlashish metodi qo'llanilib kelinayotgan bo'lsa ham, ammo, hozircha ular uchun qat'iy matematik asoslash mavjud emas.

Soddalik uchun bir o'lchamli holda qaralayotgan ayirmali sxema uchun birinchi defferentsial yaqinlashishni yozamiz. So'ngra $\mho_{v+1}^{n}$ ni $\mho(x+\Delta x,t)$ funksiya ko'rinishida ifodalaymiz va chekli ayirmali tenglamaning har bir hadini (x,t) nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyamiz. Bu holda ΔM^n ni ikkinchi tartibli aniqlikka ega bo'lgan formula (4) bo'yicha hisoblash natijasiga ko'ra quyidaga ega bo'lamiz, masalan, bir o'lchamli hol uchun

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho\mho}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial\rho\mho}{\partial t}+\frac{\partial(P+\rho\mho^2)}{\partial x}=-\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\varepsilon\frac{\partial\mho}{\partial x}\right), \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[\mho(\rho+\rho\mho^2)]=-\frac{\partial q\mho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\varepsilon\frac{\partial E}{\partial x}\right);$$

Endi birinchi tartibli aniqlikka ega bo'lgan formula (4) dan foydalansak ushbuga ega bo'lamiz

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho\mho}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial x}\right), \tag{7}$$

$$\frac{\partial \rho\mho}{\partial t}+\frac{\partial(P+\rho\mho^2)}{\partial x}=-\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)+\rho\varepsilon\frac{\partial^2\mho}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \rho\mho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[\mho(P+\rho E)]=-\frac{\partial q\mho}{\partial x}+\mathcal{E}\frac{\partial^2(\rho E)}{\partial x^2}+\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}\quad\frac{\partial \rho E}{\partial x}$$

Bu yerda $\varepsilon=|\mho|\Delta x/2$.

Ikki o'lchamli masalalar uchun ham differensial yaqinlashish huddi shu tariqa amalga oshiriladi.

Sestemalar (6) va (7) ning chap tarafida datlabki differensial tenglamalarning aniq ifodasiga ega bo'ldik, ularning o'ng tarafiga ayirmali sxemalarning "yopishqoqlik" effektlari evaziga olingan hadlar yozilgan funksiya q bilan bog'liq hadlar sun'iy yopishqoqlik kiritilishi evaziga ε bilan bog'liq hadlar esa ayirmali sxemalarning o'zining " yopishqoqlik " effektlari evaziga paydo bo'ladi, ular aniq differensial tenglamalarni chekli ayirmali tenglamalar bilan almashtirilganda (qatorni yoyish xatolari) paydo bo'ladi.

Ko'rish mumkinki to'rning qadami kichraytirilganda ($\Delta x\to 0$) miqdor $\varepsilon\to 0$ qiymati va differensial yaqinlashish tenglamalari dastlabki aniq tenglamalar sestemasiga o'tadi. Aniq hisoblashlar olib borilganda ($\Delta x,\ \Delta t,\ldots$ larning chekli ekanligi evaziga) ayirmali sxemalarda hatto, $q=0$ bo'lganda ham ega bog'liq bo'lgan hadlar oshkormas ko'rinishda ishtirok etadi, ular Nov'e-Stoks tenglamalardagi dissipativ hadlarga o'xshash bo'ladi. Bunda real yopishqoqlik

koeffisenti $\boldsymbol{\nu}$ rolini ayirmali sxema yopishqoqligi ε bajaradi, u oqimning lokal tezligi va ayirmali to’rning o’lchamiga bog’liq bo’ladi.

1.3.Ayirmali sxemalarning turg'unligi

Tabiiyki, hisoblashlarda ayirmali tenglamalarning turli ko'rinishlaridan foydalanish mumkin, ammo, ko'pgina hollarda hisoblashlarda kuchli turg'unmaslik paydo bo'ladi, tez o'suvchi va ostsillaasiyalovchi yechimlar paydo bo'ladi, ular dastlabki differensial tenglama yechimining tablatipini o'zida akslantirmaydi.

Endi uzliksizlik tenglamasining turli formulalarida yozilishi turg'unmaslikka qanday ta'sir etishini (hisoblashlarning ikkinchi bosqichi) ko'rib chiqamiz bunda impuls va energiya tenglamalari turg'un deb hisoblaymiz, bunda impuls va energiya tenglamalari turg'un deb hisoblaymiz.

Agar ΔM^n larda ikkinchi tartibli ochiqlikka ega bo'lgan formula (4) yordamida aniqlansa u holda, keltirilgan ayirmali sxemalarni Teylor qatoriga yoysak va yoyilmada $\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$ bilan bog'liq hadlarni saqlab qolsak quydagiga ega bo'lamiz

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho v}{\partial x}=\Delta_1-\frac{\Delta t}{2}\,(v^2+c^2)\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}. \qquad (8)$$

Agar ΔM^n birinchi tartibli aniqlikka ega bo'lgan formula (4) orqali hisoblasak, ushbuni hosil qilamiz

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho v}{\partial x}=\Delta_1^*+[\frac{\Delta x}{2}|v|-\frac{M}{2}(v^2+c^2)-\frac{\Delta h^2}{4}\frac{\partial v}{\partial x}]\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} \qquad (9)$$

bu yerda Δ_1 , Δ_1^* – birinchi differensial yaqinlashish hadlari bo'lib ular Δx ga proporsianal va birinchi xosilalarni o'z ichiga oladi.

Bizda

$$\Delta x\approx 0.071\,,\quad \Delta t\approx 0.0071\,,\quad P_{-\infty}=1\,,\ v_{-\infty}=1 \qquad (10)$$

deb olinganda, amaliy hisoblashlarda zarbali to'lqinlar, kontaktli uzilishlar va tarqoq to'lqinlar paydo bo'ladi

$$\rho|v| = 1 \ , \qquad \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| \Delta x < 0.3, \qquad \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| \Delta x < 2 \ .$$

Bundan ko'rinadiki, ifoda (9) dagi $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$ koeffitsent musbat, ifoda (8) da esa manfiy, ya'ni ayirmali sxema (8) tez o'suvchi yechimga ega va hisoblashlarda turg'unlik bo'ladi.

II-bob. Qisilmaydigan yopishqoq suyuqliklar

Ushbu bobda qisilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakati tadqiq etiladi, differinsial masala quyiladi , unga mos ayirmali sxema yoziladi.

2.1. Masalaning qo'yilishi

Hozirda qisilmaydigan yopishqoq suyuqlik harakatini tavsiflovchi Nav'e-Stoks tenglamalarni yechishga mo'ljallangan ko'pgina sonli metodlar mavjud. Ushbu metodlarning aksariyat toq funksiyasi ψ va uyurma ω ga nisbatan tenglamalar sestemasini yechishga bag'ishlangan.

Ushbu metodlar xos bo'lgan umumiy kamchillik shundan iboratki, qattiq chegarada uyurma uchun u yoki bu manoda chegaraviy shartlardan foydalanishga asoslangan, bu esa masalaning fizik quyilishida mavjud emas.

Uyurma uchun chegaraviy shartlar bilan bog'liq qo'shimcha iteratsiya jarayonining mavjudligi sonli algoritmlarning yaqinlashish tezligini chegaralab qo'yadi. Bundan tashqari, (ψ, ω) −sestemani yechish metodlarining chegaralanganligi yana shundan iboratki, tavsiflovchi Nav'e-Stoks tenglamalarning tabiiy o'zgaruvchilar orqali yozilgan ko'rinishini sonli yechish qiziqish uyg'otmoqda:

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + (\upsilon \cdot \nabla)\upsilon = -\nabla p + \nu \Delta \upsilon, \qquad (2,1)$$

$$\nabla \upsilon = 0,$$

Bu yerda $p-$ bosim , $\upsilon-$ tezlik vektori, ν −kinematik yopishqoqlik koeffisenti.

2.2.Ayirmali sxema

Qisilmaydigan yopishqoqlik suyuqlik oqimini tavsiflaydigan (2.1) tenglamalar uchun tekislikda, silindirik sestemada va fazoda aynan bir xil algoritm asosida hisoblashga imkon beradigan yuqori aniqlikka ega bo'lgan ayirmali sxemalarni tuzish masalasini hal etish o'ta muhim ahamiyatga ega.

Vaqt siklini tarmoqlantiruvchi quydagi ayirmali sxemani qaraylik:

I-bosqich – tezliklarning oraliq qiymatlari $\bar{\upsilon}(\bar{\upsilon}\ ,\bar{v})$ ni aniqlash;

$$\frac{\bar{\upsilon}-\upsilon^n}{\tau} = -(\upsilon^n\nabla)\upsilon^n + v\Delta\upsilon^n\ , \qquad (2.2a)$$

II-bosqich-bosim maydonini hisoblash;

$$\Delta p = \frac{\Delta\upsilon}{\tau}\ , \qquad \nabla\upsilon^n\ = D^{n+1} = 0 \qquad (2.2b)$$

III-bosqich– tezliklarning so'ngi qiymatlarini aniqlash:

$$\nabla\upsilon^n\ = \bar{\upsilon}\tau\nabla p\ . \qquad (2.2c)$$

Bosqichlar I va II Nave-Stoks tenglamalarining bajarilishni ta'kidlaydi, II-III-bosqichlar selenoidlik sharti (II dagi ikkinchi tenglama). Bundan ko'rinadiki, I-bosqichda ko'chish faqat konvensiya va diffezuya evaziga sodir bo'ladi. Shu yo'sinda olingan tezliklar maydoni $\bar{\upsilon}$ uzliksizlik tenglamasini qanoatlantirmaydi $(D \neq 0)$. Shu sababli, maydon υ o'zgarishi ("tugatishi") lozim, bu esa bosim p gradenti evaziga amalga oshadiki, $D^{n+1} = 0$ bo'lsin (III-bosqich), bunda p bosim Puasson tenglamisi echimidan topiladi (II-bosqich).

Teng oraliqli to'rlar uchun fazoviy kordinatalar uchun fazoviy kordinatalar bo'yicha ikki o'lchamli ayirmani tuzish maqola [17] keltirilgan. Ayirmani sxema (2.2) ni sonli amalga oshirishdagi asosiy qiyinchilik bosim maydoniki hisoblash va chegaraviy shartning qo'yilishi bog'liq.

Ta’kidlash lozimki, bir qator ishlarda qattiq chegaradagi chegaraviy shartlar sifatida harakat tenglamalarining chegaraviy nuqtalar sirtiga o’tkazilgan normalga proeksiyasidan foydalaniladi. So’ngi shart sonli metodlarning samaradorligini pasaytiradi, chunki bu shartlar masalaning fizik qo’yilishida mavjud emas.

Biror bir differensial tenglamani taqribiy tavsiflovchi ayirmali sxemani yozish uchun quyidagi ikkita qoidani amalga oshirish lozim.

1. Argumentning uzlukli o’zgarish sohasini uning diskret o’zgarishli sohasi bilan almashtirish.
2. Differensial operatorni biror bir ayirmali operator bilan almashtirish, xuddi shuningdek masalaning chegaraviy shartlari va boshlang’ich shartlarining ayirmali analoglarini yozish.

Ushbu bosqichlarni amalga oshirgandan keyin biz algebraik tenglamalar sistemasiga kelamiz. Shunday qilib, dastlabki differensial tenglamani sonli yechish masalasi hosil qilingan algebraik sxema yechimini topish masalasiga keltiriladi.

Ushbu masalalarga biroz batafsilroq to’xtalamiz.

U yoki bu matemetik fizik masalalarni sonli yechishda ayirmali yechishni Evklid fizikasining biror chegaralangan sohasida o’zgaradigan argumentning barcha qiymatlarida ahiqlash imkoni bo’lmaydi. Shu sababli, tabiiyki, uzluksiz Evklid fizikasi sohasida chekli sondan nuqtalar to’plamini tanlab olish va taqribiy yechimni faqat shu nuqtalardan izlash lozim. Ushbu nuqtalar to’plami to’r deb ataladi. Alohida olingan nuqtalar to’rning tugunlari deyiladi. To’rning tugunlarida aniqlangan funksiya to’r funksiyasi deyiladi. Shunday qilib biz argumentning uzluksiz o’zgarish sohasini to’r bilan almashtirdik, ya’ni uning diskret o’zgarish sohasi bilan almashtirish, boshqacha qilib aytganda, differensial tenglama echimlari sohasini to’r funksialari farazi bilan approksimatsiyaladik.

Endi sodda differensial operatorlarni ayirmali apiroksimatsiyalash masalasiga to'xtalamiz. Ushbu masalani aniq misollarda ko'rib o'tamiz.

1-misol $Lv = \frac{\partial v}{\partial x}$ differensial operatotni qaraylik. OX o'qida biror-bir x nuqtani fiksirlaymiz va $x - h$ hamda $x + h$ nuqtalarni olamiz bu, yerda $h > 0$. Differensial operator Lv ni apiroksimatsiyalash uchun quyidagi ifodaning ixtiyoriy bittasidan foydalaniladi;

$$L_h^+ \equiv \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \equiv v_x \qquad (1)$$

$$L_h^- \equiv \frac{v(x)-v(x-h)}{h} \equiv v_x \qquad (2)$$

Ifoda (1) ga o'ng ayirmamali xosila (uni biz kelgusida v_x orqali bog'laymiz) ifoda (2) esa chap ayirmali hosila (uni $v_{\bar{x}}$ orqali belgilaymiz) dan iborat. Ayirmali ifodalar $L_h v$ va L_h^- ikkita nuqtada aniqlangan (ikki nuqtali shablonlar $x, x + h$ va $x - h$, x ga mos ravishda ega).

Bundan tashqari differensial operator $Lv = \frac{\partial v}{\partial x}$ ni ayirmali approksimatsiyalash uchun ifodalar (1) va (2) ning chiziqli kombinatsiyasini olish mumkin.

$$L_h^\delta v = \delta v_x + (1 - \delta) v_{\bar{x}} \qquad (3)$$

Bu yerda δ ixtiyoriy haqiqiy son. Xususiy bu yerda $\delta = 0.5$ ga markaziy (ikki tomonlama) ayirmali hosilaga ega bo'lamiz.

$$v_x^0 = \frac{1}{2}(v_x + v_{\bar{x}}) = \frac{v(x+h)-v(x-h)}{2h} \qquad (4)$$

Shunday qilib aynan bir differensial operator $Lv = \frac{\partial v}{\partial x} = v^1(x)$ ga cheksiz ko'p ayirmali operatorlarni mos qo'yish mumkin. Chunki parametr δ ixtiyoriy son. Shunday savol paydo bo'lish tabiiy, bu differensial operatorni u yoki bu sxema bilan approksimatsiyalanganda qanday xotoga yo'l qo'yamiz va ushbu farq

$$\psi(x) = L_h v_{(x)} - L v_{(x)}$$

x nuqtada $h \to 0$ ga qanday miqdorda

$$\psi(x) = L_h v_{(x)} - Lv_{(x)}$$

Differensial operator Lv ning x nuqtadagi apiroksimatsiyasi deyiladi. Endi $v_{(x)}$ funksiyani Teylor qatoriga yoyamiz

$$v(x \pm h) = v(x) \pm vh'(x) + \frac{h^2}{2} v^n(x) + 0(h^3)$$

bunda $v_{(x)}$ funksiyasi h nuqtaning atrofi $(x - h_o, x + h_o)$ ga yetarlicha silliq deb hisoblaymiz va $h<h_o$, h_o −differensiallangan son. Ushbu yoyilmani ayirmali ifodalar (1) , (2) va (4) ga qo'yib ushbuga ega bo'lamiz

$$v_x = \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x) + \frac{h}{2} v^n(x) + 0(h^2)$$

$$v_x^- = \frac{v(x) - v(x-h)}{h} = v'(x) - \frac{h}{2} v^n(x) + 0(h^2) \qquad (5)$$

$$v_x^0 = \frac{v(x+h) - v(x-h)}{2h} = v'(x) + 0(h^2)$$

bundan ko'rinadiki

$$\psi = v_x - v'(x) + 0(h)$$

$$\psi = v_x^- - v'(x) + 0(h)$$

$$\psi = v_x^0 - v'(x) + 0(h^2)$$

bo'ladi.

Shunday qilib chap va o'ng ayirmali hosilali differensial operator $Lv = v$ ni h bo'yicha tartibli, markaziy ayirmali hosila esa h boyicha ikkinchi tartibli approksimatsiyalar ekan.

2-misol. Quyidagi ikkinchi tartibli differensial operatorni qaraylik

$$Lv = v'' = \frac{d^2v}{dx^2}$$

Ikkinchi tartibli hosilani approksimatsiyalash uchun uchta nuqtadan $(x-h,\ x, x+h\ )$ foydalanish yani uch nuqtali shablon olish lozim.

Bu holda

$$L_h v = \frac{v(x+h)-2v(x)+v(x-h)}{h^2} \qquad (6)$$

Takidlash lozimki , o'ng ayirmali hosilaning x nuqtadagi qiymati chap ayirmali hosilaning

$x+h$ qiymati bilan mos tushadi, yani

$$(x) = v_{\bar{x}}(x+h)$$

Chunki ifodalar (1), (2) ga asoslangan

$$v_x(x) = \frac{v(x+h)-v(x)}{h},$$

$$v_{\bar{x}}(x+h) = \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

Ularning o'zaro teng ekanligini ko'rishimiz mumkin. Ushbu tenglikka asoslangan holda ifoda ifoda (6) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$L_h v = \frac{v_x(x)-v_{\bar{x}}(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[v_{\bar{x}}(x+h) - v_{\bar{x}}(x)\right] = v_{\overline{xx}}(x) \qquad (7)$$

Endi $v_{\bar{x}}$ funksiyaning yuqorida keltirilgan Teylor qatoriga yoyilmasidan foydalansak ko'rsatish mumkinki bu hilda ayirmali operatorning opiroksinatsiya tartibi h bo'yicha ikkinchi tartibli bo'ladi, yani, chunki

$$v_{\bar{x}x} - v^n(x) = 0(h^2)$$

$$v_{\bar{x}x} - v^n + \frac{h^2}{12}v^4 + 0(h^2) \qquad (8)$$

3-misol. To'rtinchi tartibli differensial operatorni qaraylik $Lv = d^4v/dx^4$

Ushbu operatorni ayirmali operator bilan approksimatsiyalash uchun besh nuqtali shablon olamiz bu shablon quyidagi nuqtalardan iborat bo'ladi.

$$(x-2h, x-h, x, x+h, x+2h\ )$$

Bu ayirmali operator $L_h v = v_{\overline{xxxx}}$ ni aniqlaymiz. Ikkinchi tartibli ayirmali hosila $v_{\overline{xx}}$ uchun formula (6) dan foydalansak $v_{\overline{xxxx}}$ uchun quyidagi ifodani yozish mumkin.

$$L_h v = v_{\overline{xxxx}} = \frac{1}{h^2}[v_{\overline{xx}}(x+h) - 2v_{\overline{xx}}(x) + v_{\overline{xx}}(x-h)] =$$

$$= \frac{1}{h^4}\lfloor v(x+2h) - 4v(x+h) + 6v(x) - 4v(x-h) + v(x-2h)\rfloor.$$

Ayirmali L_h ning differensial operator L ni ikkinchi tartibli approksimatsiyalashni ko'rsatish mumkin

$$v_{\bar{x}xxx} - v^{(4)} = \frac{h^2}{6}v^{(6)} + 0(h^4)$$

haqiqatdan ham, Teylor formulasiga yoyilmadan foydalansak

$$v(x \pm kh) = v(x) + \sum_{s=1}^{7} \frac{(-1)^s k^s h^s d^s v(x)}{s! \quad dx^s} + 0(h^8)$$

va ushbu formulada k=1,2 deb olib quyidagi yig'indi $v(x+kh) + v(x-kh)$ faqat juft darajali hadlarni saqlashini etiborga olsak $v_{\bar{x}xxx}$ uchun yuqorida yozilgan formulaga ega bo'lamiz.

Approksimatsiya xatoligi

$$\psi(x) = L_h v - Lv$$

ni h ning darajalari bo'yicha yozishdan approksimatsiya tartibini oshirishda foydalanish mumkin. Xaqiqatdan ham , ushbuga ega bo'lamiz

$$v_{\bar{x}x} - v^{(n)} = \frac{h^2}{12} v^{(4)} + 0(h^4) = \frac{h^2}{12} \quad v_{\bar{x}xxx} + 0(h^4)$$

Bundan ko'rinadiki quyidagi ayirmali operator

$$L_h v = v_{\overline{xx}} = \frac{h^2}{12} v_{\overline{xxxx}}$$

U $(x-2h, x-h, x, x+h, x+2h\ )$ shablonda aniqlangan bo'lib, differensial operator $Lv = v^4$ ni to'rtinchi tartibli approksimatsiyalaydi.

Amalda ayirmali sxemaning approksimatsiya tartibini bunday oshirishdan yana ham foydalanish mumkin va yetarlicha silliq funksiyalar sinfi $v \in V$ ga ixtiyoriy tartibli approksimatsiyani olish mumkin. Bunda ayirmali shablon, yani foydalanilgan tugunlar soni ortmaydi. Ammo ayirmasi approksimatsiyaning bunday oshirish usulidan xar doim ham amalyot nuqtai-nazardan foydalanishni tavfsiya etib bo'lmaydi, chunki, hosil qilinadigan ayirmali operatorlarning sifati yomonlashadi (hisoblashlari hajmi, teskari operatorning mavjudlik sharti, turg'unlik va boshqalar ma'nosida.)

Bizga quyidali lammadan foydalanishimizga to'g'ri keladi.

Lamma. Ushbu formulalar o'rinli;

1) $$v_{\overline{xx}} = \frac{v(x+h)-2v(x)+v(x-h)}{h^2} = v^n(\xi), \ \ \xi = x + \theta h, \ \ |\theta| \le 1, \qquad (9)$$

Agar $$v \in C^{(2)}[x-h, \ x+h],$$

2) $$v_{\bar{x}x} - v^{(n)} = \frac{h^2}{12} v^{(4)}(\xi), \ \ \xi = x + \theta_1 h, \ \ |\theta_1| \le 1, \qquad (10)$$

Agar $$v \in C^{(4)}[x-h, \ x+h],$$

Bu yerda $C^{(k)}[a,b] - a \le x \le b$ uzluksiz k hosilalarga ega bo'lgan funksiyalar sinfidan iborat.

Isbot. Qoldiq hadli integralli formada bo'lgan Teylor formulasidan foydalanamiz

$$v(x) = v(a) + (x-a)v'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^r}{rl} v^{(r)} R_{r+1}(x) \qquad (11)$$

Bu yerda

$$R_{r+1}(x) = \frac{1}{l!} \int_a^x (x-\xi)^r \quad v^{(r+1)}(\xi) d\xi =$$

$$= \frac{(x-a)^{r+1}}{r!} \int_0^1 (1-s)^r \quad v^{(r+1)}\big(a + s(x-a)\big) ds. \qquad (12)$$

Integral uchun o'rta qiymat teoremasidan foydalanib, $R_{r+1}(x)\, ni$ ushbu ko'rinishda ifodalaymiz.

$$R_{r+1}(x) = \frac{(x-a)^{r+1}}{(r+1)!} \quad v^{(r+1)}(\xi)$$

Bu yerda $\xi - x\ ning\ [a,x]$ kesmasida o'rta qiymati

$$\xi = a + \theta(x-a,)\ \ 0 \le \theta \le 1, \int_0^1 (1-s)^r\, ds = \frac{1}{r+1}$$

Endi formula (11) ga x ni $x+h$ ga a ni x ga almashtirsak, r=1 va r=3 bo'lganda mos ravishda ushbuga ega bo'lamiz.

$$v(x+h) = v(x) + hv'(x) + h^2 \int_0^1 (1-s) v''(x+sh)\, ds \qquad (13)$$

$$v(x+h) = v(x) + hv'(x) + \frac{h^2}{2} v''(x) + \frac{h^3}{6} v'''(x) +$$

$$+\frac{h^4}{6}\int_0^1(1-s)^3\, v^{(4)}(x+sh)ds \qquad (14)$$

Ushbu formulaga h ni $-h$ ga so'ngra s ni $-s$ ga almashtirsak quyidagi formulaga ega bo'lamiz.

$$v(x-h) = v(x) + hv'(x)$$

$$+ h^2 \int_0^1 (1+s)^3\, v''(x+sh)ds \qquad (15)$$

$$v(x-h) = v(x) - h^4 v'(x) + \frac{h^2}{2} v''(x) + \frac{h^3}{6} v'''(x) +$$

$$+\frac{h^4}{6}\int_{-1}^0(1-s)^3\, v^{(4)}(x+sh)ds \qquad (16)$$

Formulalar (13) va (15) ni qo'shamiz $2v(x)$ ifodani tenglikning chap tomoniga o'tkazamiz va h^2 ga bo'lamiz

$$v_{\overline{xx}} = \frac{v(x+h) - v(x-h) + 2v(x)}{h^2} = \int_{-1}^{1} g_2(s)\, v''(x+sh)ds$$

Bu yerda

$$g_2(s) = \begin{cases} 1+s & agar \quad -1 \le s < 0 \\ 1-s & agar \quad 0 \le s \le 1 \end{cases}$$

Endi $g_2(1) \ge 0$ bo'lganligi uchun o'rta qiymat haqidagi teoremadan foydalanib ushbuga ega bo'lamiz.

$$v_{\overline{xx}} = v''(x+\theta h) \int_{-1}^{1} g_2(s)\, v''(x+sh)ds = v''(x+\theta h) = v''(\xi),$$

$$-1 \le \theta \le 1,$$

Bu yerda $\xi - kesma\ (x+h,\ x-h)$ dagi o'rta nuqta xuddi shu tariqa ikkinchi formula (10) ham hosil qilinadi.

Bunda formula (14) va (16) ni qo'shamiz va h^2 ga bo'lamiz

$$v_{\overline{xx}} = v''(x) + \frac{h^2}{6}\int_{-1}^{1} g_1(s)\, v^{(4)}(x+sh)ds$$

Bu yerda

$$g_1(s) = \begin{cases} (1+s)^3 & agar \quad -1 \le s \le 0, \\ (1-s)^3 & agar \quad 0 \le s \le 1, \end{cases} \qquad \int_{-1}^{1} g_4(s)\, ds = \frac{1}{2}$$

Chunki $g_1(s) \ge 0\ va\ v^4(x)$ funksiya uzluksiz bo'lgani uchun o'rta qiymat haqidagi teoremadan foydalanib quyidagiga ega bo'lamiz

$$v_{\bar{x}x} - v^{(n)}(x) = \frac{h^2}{12} v^{(4)}(x+\theta h,) \qquad |\theta| \le 1,$$

Lamma isbotlandi.

Izohlar

1) Ma'lumki , xuddi shu tariqa ushbu formulani hosil qilish mumkin.

$$v_{\bar{x}x} - v^{(\prime\prime)}(x) = \frac{h^2}{12} v^{(4)} + \frac{h^4}{360} v^{(6)}\,(\xi), \quad \xi = x + \theta h, \qquad -1 \le \theta \le 1$$

Aga $\quad$ r$v \in C^{(6)}[x-h,\ x+h]$, (17)

Xuddi shu yo'sinda ko'rsatish mumkinki

$$v_{\overline{xxxx}} = \frac{1}{h^4}[v(x+2h) - 2v(x+h) + 6v(x) -$$

$$-4v(x-h) + v(x-2h)] = v^4(\xi) \quad (18)$$

Bu yerda $\quad \xi = x + \theta h,\ |\theta| \le 2$ – kesishadigan o'rta qiymat $[x-2h,\ x+2h]$, va $v \in C^{(4)}[x-2h,\ x+2h]$

Buning uchun quyidagi formulani hosil qilish yetarli

$$v_{\overline{xxxx}} = \frac{1}{6}\int_{-2}^{2} g_1(s)\, v^{(4)}(x+sh)ds$$

Bu yerda

$$g(s) = \begin{cases} 8\left(1+\frac{s}{2}\right)^3 & agar \quad -2 \le s \le -1 \\ 8\left(1+\frac{s}{2}\right)^3 - 4(1+s)^3 & agar \quad -1 \le s \le 0 \\ 8\left(1-\frac{s}{2}\right)^3 - 4(1-s)^3 & agar \quad o \le s \le 1 \\ 8(1-s/2)^3 & agar \quad 1 \le s \le 2 \end{cases}$$

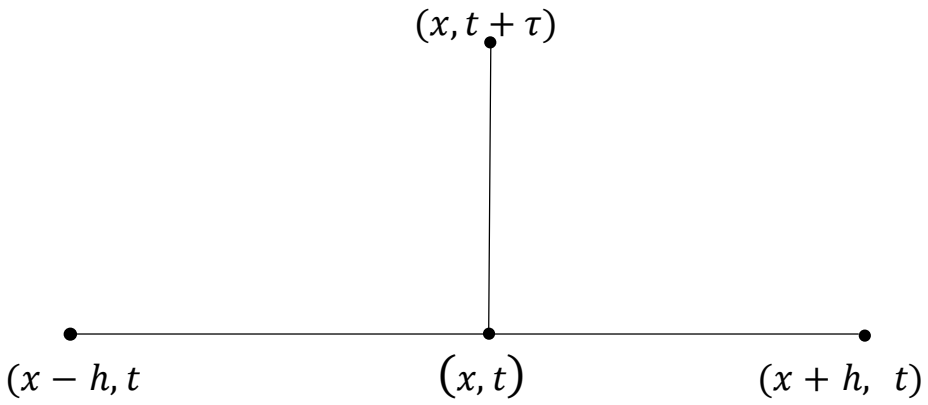
Endi xususiy hosilali differensial tenglamalarni approksimatsiyalash masalalariga to'xtalamiz.

4-misol. Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun quydagi tenglamani qaraylik

$$Lv = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad v = v(x,t).$$

So'ngra (x,t) nuqta tekislik (x,t) dagi fiksirlangan nuqta bo'lgan,

$h > 0 \;\; va\; \tau > 0 -$ ikkita son(to'r qadamlari). Differensial operator $Lh\tau$ ni yozishda dastlab ayirmali shablonni aniqlaymiz. Dastlab eng sodda ko'rinishdagi approksimatsiyalashni qaraymiz (1a-rasm)



$1a - rasm$ To'rt nuqtali oshkor shablon

Ushbu shablonda ayirmali operator $Lh\tau$ ni quydagi ko'rinishda aniqlaymiz

$$L^{0}_{(h\tau)} = \frac{\upsilon(x,t+\tau)-\upsilon(x,t)}{\tau} - \frac{\upsilon(x+h,t)-2\upsilon(x,t)+\upsilon(x-h,t)}{h^2}. \qquad (19)$$

Ayirmali ifodalar yozilishini soddalashtirish maqsadida ayrim belgilashlar kiritiladi. Quydagi shartli belgilashlarni kiritamiz.

$$\upsilon = \upsilon(x,t). \;\; \upsilon = \upsilon(x,t+\tau), \;\; \upsilon = \upsilon(x,t-\tau).$$

Ushbu belgilashlarga asosan, t o'zgaruvchi bo'yicha ayirmali hosila quydagicha yozish mumkin

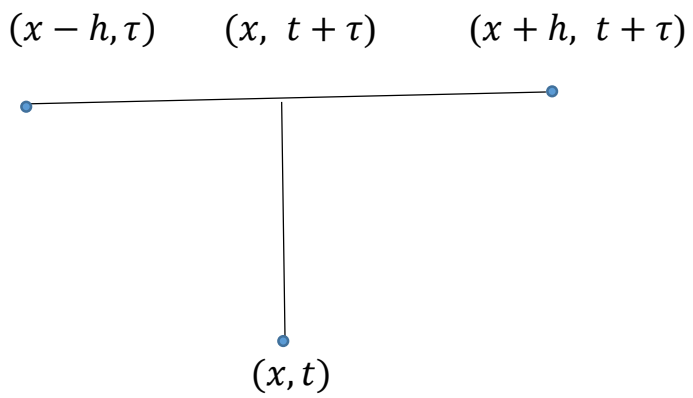
$$\upsilon_t = \frac{.\;\upsilon(x,t+\tau),-\upsilon(x,t)}{\tau} \qquad (20)$$

Munosabatda (7) va (20) ni etiborga olgan holda (19)ni quydagi ko'rinishda yozamiz

$$L^{(0)}_{(h\tau)}\upsilon = \upsilon_t - \upsilon_{\bar{x}x}\,. \qquad (19')$$

Ayirmali operator $Lh\tau$ ni tuzishda bu $\upsilon_{\bar{x}x}$ qiymatni vaqtini t momentiga qaradik (quyi qatlamda).

Endi 1b-rasmda tasvirlangan shablondan foydalangan holda $\upsilon_{\bar{x}x}$ qiymatini vaqtning $(t+\tau)$ momentida (yuqori qatlamda) olishimiz mumkin.



1b-rasm. To'rt qatlamli ayirmali shablon

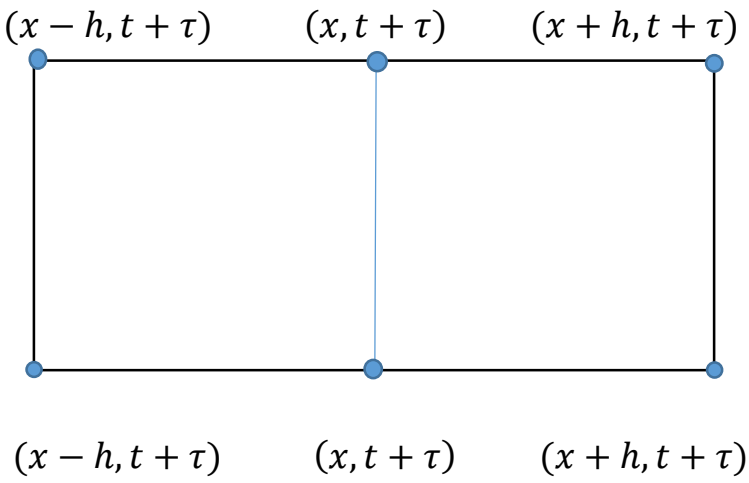
Ushbu shablonda differensial operator Lv ning ayirmali opproksimatsiyasi quydagicha bo'ladi.

$$L_{(h\tau)}^{(1)}v = v_t - \hat{v}_{\bar{x}x}. \qquad (21)$$

So'ngra ayirmali operator (19') va (21) ning chiziqli qobilyatini olish orqali ushbu bir parametrli ayirmali sxemalar oilasini hosil qilamiz

$$L_{(h\tau)}^{(\sigma)}v = v_t - (\sigma\hat{v}_{\bar{x}x} + (1-\sigma)v_{\bar{x}x}), \qquad (22)$$

Bu ayirmali sxema $\delta \neq 0$ va $\delta \neq 1$ da 4b-rasmdagi olti nuqtali shablonda aniqlangan



4b-rasm. Olti nuqtali shablon

Ayirmali sxemalarni approksimatsiya xatoligi tartibini hisoblash uchun ushbu formulalardan foydalanamiz

$$v_t = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + O(\tau^2) = \frac{\partial v(x,t+\tau/2)}{\partial t} + O(\tau^2),$$

$$v_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + O(h^4) =$$

$$= \frac{\partial^2 v\left(x, t+\frac{\tau}{2}\right)}{\partial x^2} - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^3 v(x,t+\tau/2)}{\partial x^2 \partial t} + O(h^2+\tau^2),$$

$$\hat{\upsilon}_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 \upsilon(x, t+\tau/2)}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^3 \upsilon(x, t+\tau/2)}{\partial x^2 \partial t} + O(h^2+\tau^2).$$

Ushbu ifodalarni ayirmali operator $L_{h\tau}^{(0)}\upsilon$, $L_{h\tau}^{(1)}\upsilon$, $L_{h\tau}^{(\delta)}\upsilon$ larga qo‘yib, quydagilarga ega bo’lamiz

$$L_{h\tau}^{(0)}\upsilon = \frac{\partial \upsilon(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \upsilon(x,t)}{\partial x^2} + O(h^2+\tau) = L\upsilon(x,t) + O(h^2+\tau),$$

ya’ni

$$\psi^{(0)} = L_{h\tau}^{(0)}\upsilon - L\upsilon(x,t) = O(h^2+\tau)$$

$$1)\quad L_{h\tau}^{(1)}\upsilon = \frac{\partial \upsilon(x,t+\tau)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \upsilon(x,t+\tau)}{\partial x^2} + O(h^2+\tau) =$$
$$= L\upsilon(x,t) + O(h^2+\tau),$$

$$2)\quad L_{h\tau}^{(1)}\upsilon = \frac{\partial \upsilon(x,t+\tau)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \upsilon(x,t+\tau)}{\partial x^2} + O(h^2+\tau)$$
$$= L\upsilon(x,t+\tau) + O(h^2+\tau),$$

ya‘ni

$$\psi^{(1)} = L_{h\tau}^{(1)}\upsilon - L\upsilon(x,t+\tau) = O(h^2+\tau)$$

$$L_{h\tau}^{(0.5)}\upsilon = \frac{\partial \upsilon\left(x, t+\frac{\tau}{2}\right)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \upsilon\left(x, t+\frac{\tau}{2}\right)}{\partial x^2} + O(h^2+\tau) =$$
$$= L\upsilon(x,t+\tau/2) + O(h^2+\tau^2),$$

$$\psi^{(0.5)} = L_{h\tau}^{(0.5)}\upsilon - L\upsilon\left(x, t+\frac{\tau}{2}\right) = O(h^2+\tau^2).$$

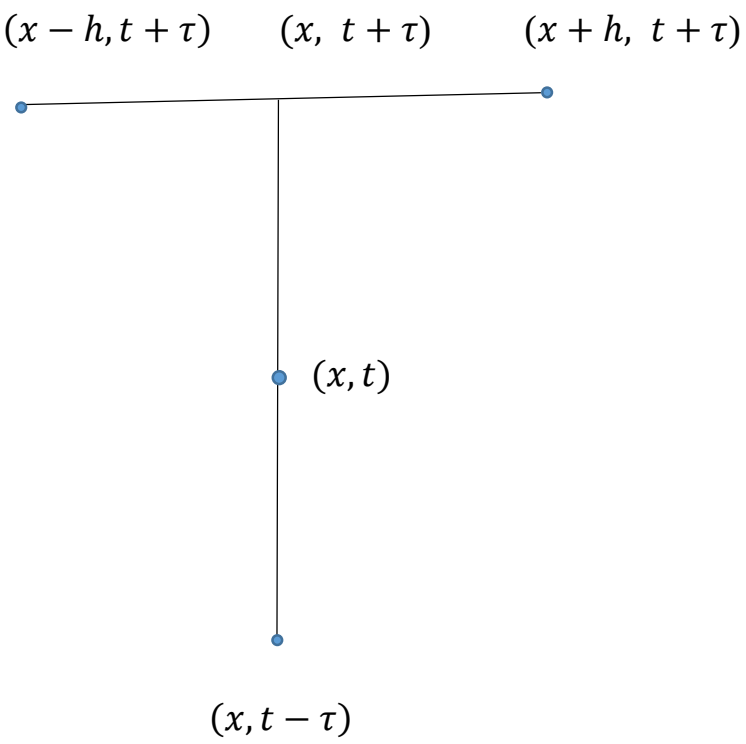
Shunday qilib, ayirmali operator $L_{h\tau}^{(\delta)}\upsilon$ differensial operator L ni δ ning ixtiyoriy qiymatlarida h bo'yicha ikkinchi tartibli, $\delta = 0,\ \delta = 1$ bo'lganda τ bo'yicha birinchi tartibli va $\delta = 0,\ 5$ da τ bo'yicha ikkinchi tartibli approksimatsiyaga ega bo'lar ekan.

5-misol. Endi torning tebranish masalalari uchun ayirmali approksimatsiyalarni qaraymiz. Quydagi differensial operator qaralayotgan bo'lsin

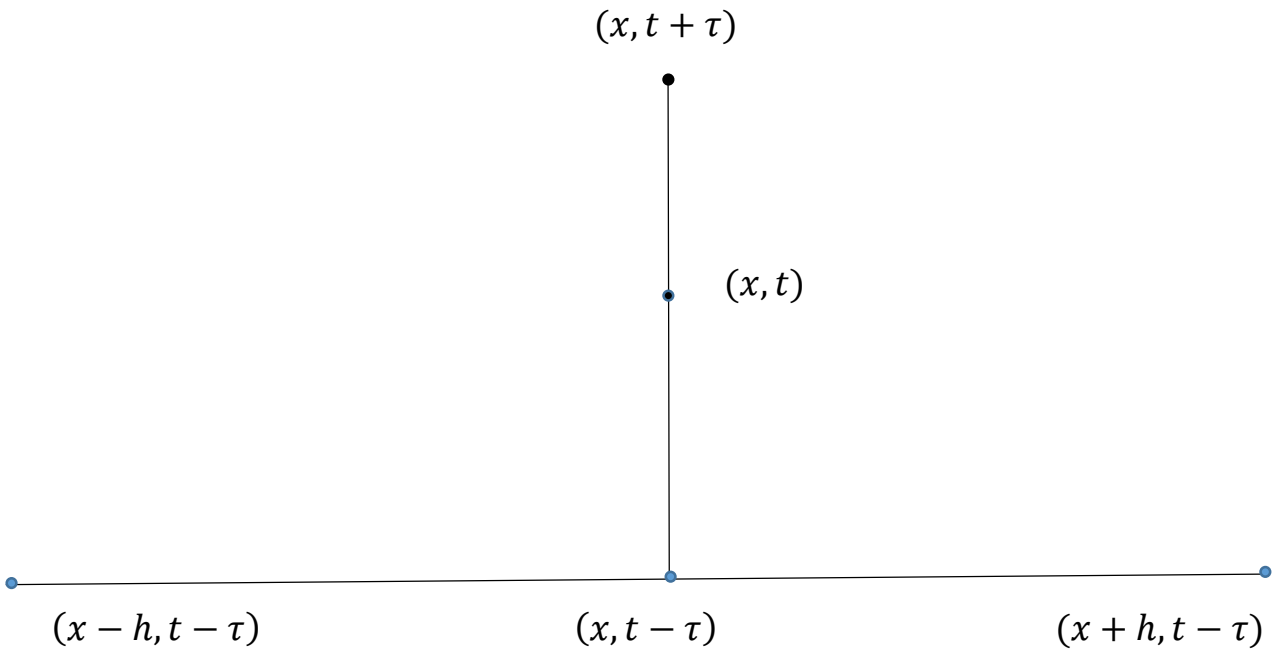
$$L\upsilon = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}.$$

Bunday holda, ya'ni vaqt bo'yicha ikkinchi hosila mavjudligi sababli, to'r funksiyasini vaqtning uchta momentining $(t-\tau,\ t,\ t+\tau)$ da qarashga to'g'ri keladi.

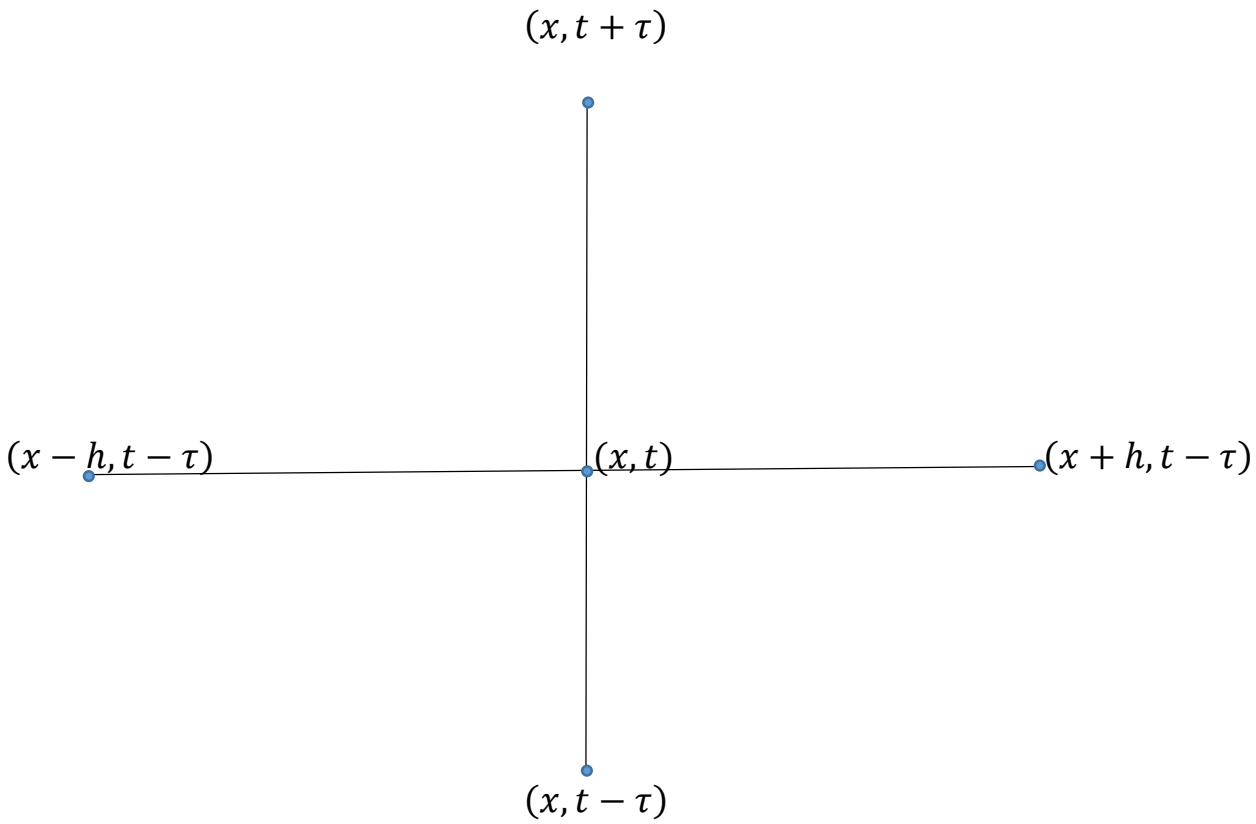
Bunda minimal nuqtalardan tashkil topgan shablon bitta nuqtani o'z tarkibiga olgan bo'lib, ular mos ravishda 2a, 2b, 2v rasmlarda keltirilgan.



2a-rasm. Besh nuqtali oshkormas shablon



2b-rasm. Besh nuqtali oshkor shablon



2v-rasm. Besh nuqtali “krest” shablon

Ayirmali operator $\upsilon_{\bar{x}x}$ ni o'rtadagi t qatlamda approksimatsiyalashdan iborat bo'lgan shablon 2b-rasmda keltirilgan bo'lib ushbu shablonda differensial operator $L\upsilon$ quydagicha approksimatsiyalanadi

bu yerda

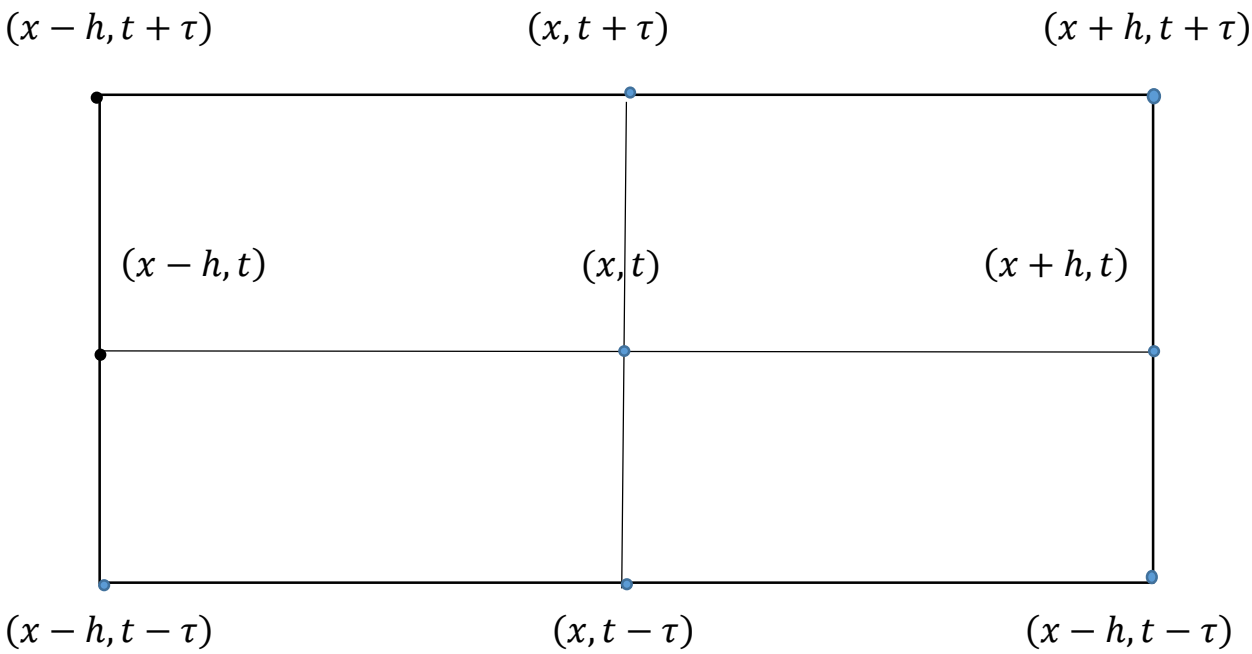
$$L_{h\tau}\upsilon = \upsilon_{\bar{t}t} - \upsilon_{\bar{x}x} \ ,$$

$$\upsilon_{\bar{t}t}(x, t+\tau) - 2\upsilon(x,t) + \upsilon(x, t-\tau))/\tau^2 \qquad (23)$$

Xuddi shu tariqa 2a-shablonda keltirilgan nuqtalar bo'yicha quydagi ayirmali operatorni yozish mumkin

$$L_{h\tau}\upsilon = \upsilon_{\bar{t}t} - \upsilon_{\bar{x}x} \ , \qquad (24)$$

To'qqiz nuqtali shablonda (2g-rasm) ikki parametrli sxemalar oilasini yozish mumkin



2g-rasm. To'qqiz nuqtali shablon

Mazkur ayirmali sxemalar oilasini quydagi ko'rinishga ega

$$1)\quad L_{h\tau}^{(\delta_1,\delta_2)}\, v = v_{\bar{t}t} - (1-\delta_1-\delta_2)v_{\bar{x}x} + \delta_2 \check{v}_{\bar{x}x} \qquad (25)$$

Ushbu sxemadan $\delta_1 = \delta_2 = 0$ da sxema (23), $\delta_2 = 0$ $\delta_1 = 1$ da ayirmali sxema (24) kelib chiqadi. Quydagilarni etiborga olgan holda

$$v_{\bar{t}t} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + O(\tau^2), \qquad v_{xx} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + O(h^2),$$

ko'rish mumkinki, ayirmali sxema (23) $O(h^2+\tau^2)$, approksimatsiya xatoligiga ega.

Xuddi shu tartibli approksimatsiyaga ayirmali operator (25) agar $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ bo'lganda ega bo'ladi, bunda δ- ixtiyoriy son.

Takidlash lozimki, parametrlar δ_1 va δ_2 nafaqat ayirmali sxemalarning approksimatsiya tartibini boshqaradi, balki mos ayirmali sxemalarning turg'unligini ham boshqaradi.

6-misol. Differensial operatorning shablonidagi (tengmas oraliqli to'rdagi) Approksimatsiyasini qaraymiz. Quydagi differensial operatorni qaraylik

$$Lv = v''.$$

Endi $h_- > 0$ va $h_+ > 0$ ixtiyoriy ikkita son bo'lsin. Uch nuqtali shablon olamiz

$$(x-h_-,\ \ x,\ \ x+h).$$

Agar $h_- \neq h_+$ bo'lsa, ayirmali shablonni tengmas oraliqli deb ataymiz

(shunday shablon aosida tuzilgan ayirmali to'r tengmas oraliqli to'r deb ataladi). Ushbu belgilashlarni kiritamiz

$$v_{\bar{x}} = \frac{v(x) - v(x - h_-)}{h_-}, \qquad v_x = \frac{v(x + h_+) - v(x)}{h_-}, \qquad h = 0{,}5(h_- + h_+)$$

va ayirmali operator $L_{h\tau}v$ ni ushbu formula bo'yicha aniqlaymiz

$$L_{h\tau}v = \frac{1}{h}\left[\frac{v(x + h_+) - v(x)}{h_-} - \frac{v(x) - v(x - h_-)}{h_-}\right] = \frac{v_x - v_{\bar{x}}}{h} \qquad (26)$$

Agar $h_- = h_+ = h$ bo'lsa, u holda $L_h v$ operator (26) ning lokal approksimatsiya xatoligini tekshiramiz (tanlangan x nuqtada):

$$\psi(x) = L_h v(x) - Lv(x).$$

Yetarlicha silliq $v(x)$ funksiyani x tugun atrofida Teylor qatoriga yoyish formulasidan foydalanamiz.

$$v(x + h_+) = v(x) + h_+ v'(x) + \frac{h_+^2}{2} v''(x) + \frac{h_+^3}{6} v'''(x) + O(h_+^4),$$

$$v(x - h_-) = v(x) - h_- v'(x) + \frac{h_-^2}{2} v''(x) - \frac{h_-^3}{6} v'''(x) + O(h_-^4),$$

$$v_x = v'(x) + \frac{h_+^2}{2} v''(x) + \frac{h_+^3}{6} v'''(x) + O(h_+^3),$$

$$v_{\bar{x}} = v'(x) - \frac{h_-^2}{2} v''(x) - \frac{h_-^3}{6} v'''(x) + O(h_-^3),$$

$$L_h v = \frac{v_x - v_{\bar{x}}}{h} = v''(x) + \frac{h_+ - h_-}{6h} v'''(x) + O(h^2)$$

Bunda biz $h_\pm < 2\hbar$ ekanligidan foydalanamiz. Endi $\psi(x)$ uchun ifoda quydagi ko'rinishni oladi.

$$\psi = L_h v - Lv = \frac{h_+ - h_-}{3} v'''(x) + O(h^2) = O(h)$$

Shunday qilib, ayirmali operator (26) noregulyar shablonda ($h_- \neq h_+$) Birinchi tartibli lokal approksimatsiyaga ega bo'lar ekan.

2.3. Chegaraviy shartlar

Maqola [28] da M.A.S metodi uchun chegaraviy shartlarning ajoyib modifikatsiyasi tavsiya etilgan, bu metod bosim uchun bir jinsli chegaraviy shartlarini olishga imkon beradi. Ushbu tavsiya etilayotgan metodning muhim jihatlaridan biri chegaraviy shartlarni tenglashdan iborat. Qisilmaydigan yopishqoq suyuqliklar uchun chegaraviy shartlarning ikkita asosiy tipi mavjud: qattiq chegaradagi chegaraviy shartlar. Ushbu shartlarning har biriga to'xtalib o'tamiz.

Qattiq chegaradagi chegaraviy shartlar:

$$v^n_{i,\ -\frac{1}{2}} = 0 \quad \text{(o'tib ketmaslik sharti)},$$

$$v^n_{i+\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}} = 0 \quad \text{(yopishqoqlik sharti)}; \tag{2.3}$$

Oxirgi tenglamadan

$$\tilde{v}_{i+\frac{1}{2},0} = \frac{v^n_{i+\frac{1}{2},\ 0}}{2} + \frac{v^n_{i+\frac{1}{2},\ 1}}{6} + O(h^2) \tag{2.4}$$

ekanligi kelib chiqadi. Shart (2.4) funksiya $\tilde{v}$ uchun chegaraviy qiymatlarni maydonning ichki nuqtalarida ikkinchi tartibli aniqlik bilan topishga imkon beradi. Bu qattiq jism ichkarisida yordamchi yacheykalar qatlamini kiritish zaruriyatidan xalos etadi.

Takidlash lozimki, tavsiya etilayotgan yondashuvga qattiq sirtda uyurmaning qiymatini hisoblashga talab etmaydi. Oxirgi qiymatlar tezlik maydonlarining hisoblash qiymatlari bo'yicha uyurmalarning biror-bir ayirmali foydalangan holda toppish mumkin.

Uyurma uchun chegarada

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Oqib o'tilayotgan jismdan yetarlicha uzoqlashgan chiziqlardagi chegaraviy shartlar bu qo'zg'atilmaganoqimdagi shartlardan iborat bo'lib, ular ushbu ko'rinishga ega

$$v^{n}_{i,\ N+\frac{1}{2}} = 0\,, \qquad v^{n}_{i+\frac{1}{2},\ N} = v_{\infty}\,.$$

Bosim maydonini hisoblashda bir jinsli chegaraviy shartlarni olish uchun maqola [28] dagi yondashuvdan foydalanish mumkin, u quydagidan iborat. $v^{n+1}_{i-\frac{1}{2}} = 0$ deb hisoblab (qattiq sirt uchun) va $v^{n+1}_{i,\ N+\frac{1}{2}} = 0$ (jismdan uzoqlashgan chiziq holida), so'ngra (2.2c) dan ushbuga ega bo'lamiz.

$$\tilde{v}_{i,-\frac{1}{2}} = \frac{\tau}{h}\left(p_{i,0} - p_{i,-1}\right),$$

$$\tilde{v}_{i,N+\frac{1}{2}} = \frac{\tau}{h}\left(p_{i,N+1} - p_{i,N}\right) \tag{25}$$

Endi (2.5) ni etiborga olgan holda bosim uchun chegaraga yaqin yacheykalar [17] uchun ayirmali tenglamalarni yozish unchalik murakkab emas.

Tenglamalar sestemasi (2.2) ning statsionar yechimi ko'rsatilgan bosqichlarni barqarorlashishi sharti

$$max\left|v^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j} - v^{n}_{i,+\frac{1}{2},j}\right| \leq \varepsilon$$

bajarilguncha takrorlash natijasida olinadi.

Ayirmali sxemaning turg'unligini etishni bosqichma-bosqich amalga oshirish mumkin (α −paraboliklik sharti). Tenglama (2.2a) ga nisbatan birinchi differensial yaqinlashish quydagi ko'rinishga ega

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial t} = \left(\nu - \frac{\tau}{2}v^2\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\nu - \frac{\tau}{2}v^2 - \frac{h^2}{4}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial vv}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \left(\nu - \frac{\tau}{2}v^2 - \frac{h^2}{4}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\nu - \frac{\tau}{2}v^2\right)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,.$$

Tenglama (2.6) dan qaralayotgan ayirmali sxema turg'unligi mezoni

$$\tau \leq \frac{4\nu}{v^2 + \upsilon^2}$$

kelib chiqadi.

Tenglamalar (2.2b) va (2.2c) dan Fur'e metodi yordamida bosim P ni yo'qotib ikkinchi va uchinchi bosqichlarning shartsiz turg'un ekanligini ko'rsatish mumkin.

Ko'rish mumkinki, to'rning qadami kichraytirilganda $(\Delta x \to 0)$ miqdor $\varepsilon \to 0$ ning qiymatini va differensal yaqinlashish tenglamalari dastlabki ochiq sestemasiga o'tadi. Aniq hisoblashlar olib borilganda $(\Delta x, \Delta t, ...$ larning chekli ekanligi evaziga) ayirmali sxemalarda hatto $q = 0$ bo'lganda ham ega bog'liq bo'lgan hadlar oshkormas oshkormas ko'rinishda ishtirok etadi, ular Nove-Stoks tenglamasidagi dissipativ hadlarga o'xshash bo'ladi. Bunda real yopishqoqlik koeffitsenti ν rolini ayirmali sxema yopishqoqligi ε bajaradi, u oqimning lokal tezligi va ayirmali to'rning o'lchamiga bog'liq bo'ladi.

III-bob Qisiluvchan yopishqoq oqimlar.

Mexanika fizika sohasidagi ko'pgina muomolar gazlar dinamikasi tenglamalariga olib keladi. Bu uchish apparatlari aerodinamikasi, reaktiv dvigatellar astrofizika, boshqariladigan termayadroviy sentiz muomosi bilan bog'liq masalalar va boshqa ko'pgina masalalar.

Gazlar dinamikasi masalalarini chiziqli bo'lmagan masalalardir va ularni yechish universal metodlar bo'lib, ayirmali metodlar hisoblanadi. Gazlar dinamikasi masalalari uzoq vaqtdan buyon va ko'p joylarda yechilayotganiga qaramasdan ular uchun eng soda hollarda ham bari-bir ayirmali sxemaning yaqinlashish to'g'risida qat'iy matematik natijalar mavjud emas. Ayirmali sxemalar sifati akustik yaqinlashishlarga ega bo'lgan chiziqli modellarda testlar o'tkazish orqali, ya'ni yechimini oshkor ko'rinishda yozish mumkin bo'lgan xususiy masalani yechish bilan tekshiriladi.

Odatda, gazlar dinamikasi masalalari yechish uzilishga ega bo'ladi. –bu yoki kuchsiz uzilishlar (masalan, "tarqoqlanish to'lqini") yoki kuchli uzilishlar (zarbali to'lqinlar). Shu sababli, sonli metodning aniqligini ayirmali to'r qadamini kichraytirish orqali tekshirishni juda katta ehtiyotkorlik bilan qo'llash lozim.

3.1 Oqimlar metodi

Ushbu paragrfda gazlar dinamikasinig ungachalik murakkab bo'lmagan masalalarini ayirmali metodlar bilan yechishni qaraymiz. Bir o'lchamli barqarorlashgan (nastotsionar) tekis gaz oqimini oqimini qaraymiz. Faraz qilaylik, $\upsilon -$ tezlik, $\rho -$zichlik, $T -$tempratura, $P -$bosim, $\varepsilon -$gazning ichki inergiyasi(birlik massadagi) bo'lsin.

Gazning harakat tenglamasini yozamiz, (gazlar dinamikasi tenglamalari), ular impuls, massa inergiyani saqlanish qonunlari ifodalaydi. Ushbu tenglamalarni Eyler o'zgaruvchilari (x, t) va Lagranj o'zgaruvchilari (s, t)

orqali yozish mumkin, bu yerda x −zarrachaning kordinatasi, s −esa zarrachaning boshlang'ich (dastlabki) kordinatasi yoki ushbu miqdor

$$s = \int_0^x \rho(\xi, 0) d\xi,$$

yani, $0 \leq \xi \leq x$ hajmda saqlanayotgan massa miqdori. Gazlar dinamikasi tenglamalari Lagranj o'zgaruvchilari (s, t) orqali quydagicha yoziladi.

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial s} \quad \text{impulsning saqlanish qonununi} \tag{1}$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \upsilon \tag{2}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial x}{\partial s} \quad \text{massani saqlanish qonuni} \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon + \frac{\upsilon^2}{2}\right) = -\frac{\partial}{\partial s}(p\, s) - \frac{\partial w}{\partial s}, \tag{4}$$

$$p = p(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T) \quad \text{holat tenglamasi} \tag{5}$$

bu yerda w −shilliq oqim

Tenglamalar (2) va (3) dan ushbu tenglama kelib chiqadi

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial \upsilon}{\partial s}. \tag{6}$$

Bu bilan tenglama (2) ni sxemadan chiqarish mumkin, chunki, uni alohida integrallab olish mumkin, chunki, uni alohida integrallab olish mumkin.

Yuqorida tenglamalar sestemasini yopish uchun (to'liq holga keltirish uchun), issiqlik oqimi uchun ushbu ifodani yozish mumkin

$$w = -\kappa(\rho, T)\rho\frac{\partial T}{\partial s} \qquad (7)$$

bu yerda $\kappa = \kappa(\rho, T)$ −issiqlik o'tkazuvchanlik koeffisenti.

Odatda κ miqdor T va ρ ning darajali funksiyasi bo'ladi.

Funksiyalar $p(\rho, T)$, $\varepsilon(\rho, T)$, va $\kappa = \kappa(\rho, T)$ bo'lishi lozim.

Idial gaz uchun holat tenglamasi ushbu ko'rinishda bo'ladi. $p(\rho, T)$, $\varepsilon(\rho, T)$, masalan, $\varepsilon = c_v T$, bu yerda R va c_v −o'zgarmaslar bo'ladi.

$$p = R\rho T, \quad \varepsilon = \varepsilon(T)$$

masalan, $\varepsilon = c_v T$, bu yerda R va c_v −o'zgarmaslar, $\frac{R}{c_v} = J - 1$, J −o'zgarmas bo'lib,

$$\varepsilon = \frac{p}{(J-1)\rho}, \qquad (8)$$

bo'ladi.

Bunda ikkita matematik holatni qayd etish lozim.

a) Adiabatik oqim, bunda $w = 0$

ya'ni, issiqlik o'tkazuvchanlikni $\kappa = 0$ deb olib inobatga olmaslik mumkin.

Gazlar dinamikasi tenglamalari (1), (6), (4) ni gazning adiabatik oqimi uchun yozamiz

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial s}, \ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial v}{\partial s}, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon+\frac{\upsilon^2}{2}\right)=-\frac{\partial}{\partial s}(p\,\upsilon), \tag{10}$$

bunga tenglama (8) ni qo'shamiz

$$\varepsilon=\frac{p}{(\gamma-1)\rho}, \tag{11}$$

shunday qilib, to'rtta nomalumlar $\upsilon, p,\ \rho, \varepsilon$ ni toppish uchun to'rtta tenglamaga ega bo'lamiz. Biz zichlik ρ o'rniga nisbiy hajm η dan foydalanamiz.

$$\eta=\frac{1}{\rho}$$

Bu holda quydagiga ega bo'lamiz

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\partial\upsilon}{\partial s}, \tag{12}$$

$$\rho\eta=(\gamma-1)\varepsilon. \tag{13}$$

To'liq energiya tenglamasi (10) ni ushbu tenglamasidan biri bilan almashtirish mumkin

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=-\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial t}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=-\rho\frac{\partial\eta}{\partial s}. \tag{15}$$

Haqiqatan ham, tenglama (9) ning birinchi tenglamasi va tenglama (12) dan quydagiga ega bo'lamiz.

$$O=\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon+\frac{\upsilon^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial s}(p\,\upsilon)=\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\left(\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\rho\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)+\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial s}=$$

$$=\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\ \rho\frac{\partial\upsilon}{\partial s}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial\eta}{\partial t}.$$

b) Endi gazning izotermik oqimiga qaraymiz, bu holda gazning temperaturasi o'zgarmas, ya'ni T=const va energiya tenglamasi mavjud emas deb qaraladi. T=const shartni $\kappa\to\infty$ xolatiga mos keladi. Gazlar dinamikasi tenglamalari sestemasi ideal gazning izotermik holati uchun quydagi ko'rinishni oladi.

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=-\frac{\partial\rho}{\partial s},\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{\partial\upsilon}{\partial s}\ ,\qquad p=c^2\rho, \tag{16}$$

Bu yerda $c=const\ \ t>0$ – tovush tezligi, yoki

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=-\frac{\partial\rho}{\partial s},\ \frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\partial\upsilon}{\partial s}\ ,\qquad p\eta=c^2 \tag{17}$$

Biz idial gazning adiabatik holati (9), (10), va (11) ni qaraymiz. Tenglamalar (9), (10) dagi barcha izlanayotgan funksiyalar uchun boshlang'ich shartlarni berish lozim

$$\upsilon(x,0),\quad \rho(x,0),\quad p(x,0) \tag{18}$$

va chegaraviy shartlarni, masalan ushbu ko'rinishda berish mumkin

$$p(0,t)=p_0(t)\ \ agar\ \ s=0,\qquad p(M,t)=p_1(t)\quad agar\ \ s=M \tag{19}$$

Agar

$$\upsilon(0,t)=\upsilon_0(t)\ \ agar\ \ s=0,\qquad p(M,t)=p_1(t)\quad agar\ \ s=M \tag{19'}$$

Endi gazlar dinamikasi tenglamalari (9), (10) uchun $0\le s\le M,\ \ t\ge 0$ sohada ayirmali sxemalarni tuzamiz.

Gazlar dinamikasi tenglamalari uchun yozilgan ayirmali sxemalarga avvalambor bir jinslik shartlari quydagi konservativlik shartlarini qo'yiladi.

Ayirmali sxemalarning bir jinsliligi ayirmali sxemalar barcha tugunlarida, ayirmali yechim uzliksizligi yoki uzlishga egaligi qat'iy nazar bir xil ko'rinishda yoziladi hamda hisoblashlar to'rning hamma joyida va har doim aynan bir

xil formulalar asosida olib borishni anglatadi. Gazodinamikaning sxemalari bira to'la hisoblash sxemalari psevdoyopishqoqlikka (sun'iy yopishqoqlikka ega bo'lgan) qo'shimcha hadlarni ham o'z ichiga oladi, ushbu hadlar ayirmali to'rning bir nechta intervallari bo'ylab zarbali to'lqin frontini "silliqlashtirish" uchun kiritilaadi.

Formal ravishda psevdoyopishqoqlik w −bosim p ga qo'shimcha qo'shiluvchi sifatida kiritiladi, bunda tenglamalar (9), (10) da bosim p o'rniga

$$g = p + w$$

yig'indi kiritiladi, bu yerda "yopishqoq" bosim $w = w(\rho, v_s', h)$ funksiyasi ρ, va v_s' va to'r qadami h dan bog'liq bo'ladi.

Odatda yopishqoqlikning ikkita tipi qaraladi:

a) Chiziqli yopishqoqlik

$$\omega = -\frac{v_0 h\rho}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial s} - \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|\right), \tag{20}$$

b) Kvadratik yopishqoqlik yoki Neyman yopishqoqligi

$$\omega = -\frac{v_0}{2}h^2\rho\frac{\partial v}{\partial s}\left(\frac{\partial v}{\partial s} - \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|\right), \tag{21}$$

Bu yerda v_0 −yopishqoqlik koeffitsenti.

Bundan ko'rinadiki, ushbu funksiya $\omega = 0$, agar $\frac{\partial v}{\partial s} > 0$ bo'lsa va $\omega \neq 0$ bo'ladi, agar $\frac{\partial v}{\partial s} < 0$ bo'lsa, yani zarbali to'lqin zonasida ta'sir ko'rsataadi.

Kelgusida biz sun'iy yopishqoqlikni quydagicha yozamiz

$$\omega = -\frac{v}{\eta}\frac{\partial v}{\partial s}$$

yoki

$$\omega = \frac{v}{\eta}(\frac{\partial v}{\partial s})^2,$$

Bunda yopishqoqlik koeffitsenti $\frac{\partial v}{\partial s}$ ning shirasiga bog'liq deb hisoblanadi, bunda $\nu \equiv 0$ bo'ladi, agar $\frac{\partial v}{\partial s} > 0$ bo'lsa.

3.2. Metodning tahlili.

Suniy yopishqoqlikning kiritilishi gazlar dinamikasi tenglamalari uchun zarbali to'lqinlar mavjud bo'lgan holda bir jinsli ayirmali sxemalarni tuzishga imkon beradi. Chunki , gazlar dinamikasi tenglamalari impuls, massa va energiyaning saqlanish qonunlarini ifodalaganligi sababli, ayirmali sxemalardan ham ularga mos saqlanish qonunlarini ayirmali to'rda ifodalash lozimligini talab qilamiz tabiiy, yani ayirmali sxemalar konservativ bo'lishi lozim.

Konservativ ayirmali sxemalarni hosil qilish uchun gazlar dinamikasi tenglamalarining integral formada yozishidan foydalanamiz, integro-interpolatsiyalash metodi (I.I.M.) dan foydalanamiz:

$$\oint (\upsilon ds - pdt) = 0, \tag{22}$$

$$\oint (\eta ds + \upsilon dt) = 0, \tag{23}$$

$$\oint ((\varepsilon + 0{,}5\upsilon^2)ds - pdt) = 0, \tag{24}$$

bunda integrallash (s, t) tenglamadagi ixtiyoriy yopiq to'g'ri chiziq bo'yicha olib boriladi.

Ushbu ayirmali to'rni tanlaymiz

$$\overline{\omega}_h = \{s_i = ih,\ \ i = 0,1, \dots \dots .., N,\ \ hN = M\ \},$$

$$\overline{\omega}_h = \{t_j = j\tau,\ \ i = 0,1, \dots \dots .., j_0,\ \ j_{0\tau} = t_0\ \},$$

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau.$$

Bayon qilinganni yengillashtirish maqsadida ayirmali tenglamalarga o'tishda ham $\upsilon, \xi, p, \varepsilon$ belgilarni saqlab olamiz.

So'ngra υ funksiyani ω_h to'rning butun tugunlari $x = x_i$ ga ξ, p, ε ni esa esa ω_h to'rning yarim butun tugunlari $s = s_{i+0,5}$ ga nisbatan yozamiz.

Tenglama (22) ni to'g'ri to'rtburchakli soha $s_{i-0,5} \leq s \leq s_{i+0,5}$, $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ uchun yozamiz:

$$\int_{s_{i-1/2}}^{s_{i+1/2}} \left(v^{j+1} - v^j\right) ds + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(p_{i+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}\right) dt = 0\,,$$

Tenglamalar (23) va (24) esa to'g'ri to'rtburchakli soha $s_{i-0,5} \leq s \leq s_{i+0,5}$, $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ uchun yoziladi.

$$\int_{s_{i-1/2}}^{s_{i+1/2}} \left(\eta^{j+1} - \eta^j\right) ds + \int_{t_j}^{t_{j+1}} (v_{i+1} - v_i) dt = 0\,,$$

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} \left[(\varepsilon + 0.5v^2)^{j+1} - (\varepsilon + 0.5v^2)^j\right] ds + \int_{t_j}^{t_{j+1}} [(pv)_{i+1} - (pv)_i] dt = 0.$$

Ushbu ushbu ayniyatlardan integrallarni ushbu ifodalar bilan almashtiramiz

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} p dt \approx p^{(\sigma_1)\tau}, \qquad \int_{t_j}^{t_{j+1}} v dt \approx v^{(\sigma_2)\tau}, \qquad \int_{t_j}^{t_{j+1}} (pv)_i dt \approx p_i^{(\sigma_3)} v_i^{(\sigma_4)} \tau,$$

Bu yerda

$$f^{\sigma_\alpha} = \sigma_\alpha f^{j+1} + (1-\sigma_\alpha) f^j\ ,\ \ \sigma_\alpha \text{ –ixtiyoriy parameter,}$$

$$p_{*i} = 0.5\left(p_{i-\frac{1}{2}} + p_{i+\frac{1}{2}}\right), \quad \alpha = 1,2,3,4, \quad \text{va so'ngra}$$

$$\int_{s_{i-1/2}}^{s_{i+1/2}} \upsilon ds \approx \upsilon_i h, \qquad \int_{s_i}^{s_{i+1}} \eta ds \approx \upsilon_{i+1/2} h,$$

va hokozo.

Natijada quydagi ayermali tenglamalar sestemasiga ega bo'lamiz

$$\frac{\upsilon_i^{j+1} - \upsilon_i^j}{\tau} + \left(\frac{p_{i+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}}{h}\right)^{(\sigma_1)} = 0, \tag{25}$$

$$\frac{\eta_{i+1/2}^{j+1} - \eta_i^j}{\tau} = \left(\frac{\upsilon_{i+1} - \upsilon_i}{h}\right)^{(\sigma_2)}, \tag{26}$$

$$\frac{1}{\tau}\left[\left(\varepsilon_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\upsilon_i^2 + \upsilon_{i+1}^2}{h}\right)^{j+1} - \left(\varepsilon_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\upsilon_i^2 + \upsilon_{i+1}^2}{h}\right)^{j}\right] =$$

$$= \frac{p_{*i+1}^{(\sigma_3)} \upsilon_{i+1}^{(\sigma_4)} - p_{*i}^{(\sigma_3)} \upsilon_i^{(\sigma_4)}}{h}. \tag{27}$$

Bu parametrlar σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 ning ixtiyoriy qiymatlari uchun konservativ sxema. Xususiy holda $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 1$, $\sigma_4 = 1$ bo'lganda shunday ayirmali tenglamalar sestemasiga ega bo'lamizki, ular oshkor formulalar yordamida hisoblanadi: dastlab υ_i^{i+1} ni topamiz so'ngra $\eta_{i+1/2}^{i+1}$ ni aniqlaymiz keyin energiya tenglamasi va holat formulasidan

$$p\eta = (j-1)\varepsilon$$

Progonka metodi yordamida $p_{i+\frac{1}{2}}$, $i = 0, 1, 2, \dots\dots, M-1$ ni aniqlaymiz, agarda $i = 0$ va $i = M-1$ da chegaraviy shartlar berilgan bo'lsa, masalan formulalar (19) asosan.

Qayd etish lozimki, to'liq energiya tenglamasini approksimatsiyalovchi konservativ ayirmali sxema ichki energiya tenglamasi (14) ni, ya'ni

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p\frac{\partial \upsilon}{\partial s}.$$

yomon approksimatsiyalash mumkin.

Ushbu effekti o'ta xavfli bo'lib, u temperaturani noto'g'ri hisoblashga olib keladi. Ichki energiyaning bunday disbalansligini fazoviy kordinata s bo'yicha to'r tugunlarini zichlashtirish orqali bartaraf etib bo'lmaydi.

Shu sababli ayirmali sxemadan nafaqat massa, impuls va to'liq energiyaning saqlanish qonunlari balki, energiyaning detallashtirilgan balansini −kenitek va ichki inergiyasini approksimatsiyalamiz.

Ushbu xususiyatlarga ega bo'lgan sxemani to'liq konservativlik talabi amalda ushbu tenglamalar (14) va (15) ni ham approksimatsiyalash lozim:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p\frac{\partial \upsilon}{\partial s}, \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p\frac{\partial \eta}{\partial s}.$$

Qo'shib belgilashlar kiritamiz

$$\bar{p}_i = p_{i+1/2}, \qquad \bar{\eta}_i = \eta_{i+1/2}, \qquad \bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_{i+1/2},$$

$$\bar{p} = \bar{p}_i^j, \quad \upsilon = \upsilon_i^j \quad \text{va hokozo}$$

$$\frac{1}{h}\left(p_{i+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}\right) = \bar{p}_s, \quad \frac{\upsilon_{i+1} - \upsilon_i}{h} = \upsilon_s,$$

So'ngra p, ξ, va ε funksiyalar ustiga qo'yilgan chiziqlarni angloshuvchilik paydo bo'lmaydigan hollarda soddalik uchun tushirib qoldiramiz

Bu holda tenglamalar (25) va (26) ushbu ko'rinish oladi

$$\upsilon_t = -p_{\bar{s}}^{(\sigma_1)} \ , \quad \eta_t = \upsilon_s^{(\sigma_2)} \ . \tag{28}$$

Sxema (27) o'rniga ichki energiya tenglamasi (14) approksimatsiyalaydigan quydagi sxemani kiritamiz

$$\varepsilon_t = -p^{(\sigma_3)}\upsilon_s^{(\sigma_4)} \ , \tag{29}$$

Natijada biz to'rtta parametrdan bog'liq bo'lgan sxema (28), (29) ga ega bo'lamiz. Ushbu sxemalar oraasidan to'liq konservativ sxemalarni izlaymiz. Buning uchun, sxema (28), (29) tenglamalar (15) va (10) ni approksimatsiyalashi kerak. Bizga ushbu malum formula kerak bo'ladi

$$f^{(\beta)} = f^{(\alpha)} + \tau(\beta - \alpha)f_t \tag{30}$$

bu yerda α va $\beta -$ ixtiyoriy sonlar

$$f^{(\alpha)} = \alpha\hat{f} + (1 - \alpha)f$$

Ushbu tenglamalardan

$$\eta_t = \upsilon_s^{(\sigma_2)} \quad \text{va} \quad \upsilon_s^{(\sigma_4)} = s_s^{(\sigma_2)} + \tau(\sigma_4 - \sigma_2)\upsilon_{st} = \eta_t + \tau(\sigma_4 - \sigma_2)\upsilon_{st}$$

quydagi kelib chiqadi

$$\varepsilon_t = -p^{(\sigma_3)}\eta_t + \delta_1 E \ , \tag{31}$$

bu yerda $s_1 E = -\tau(\sigma_4 - \sigma_2)p^{(\sigma_3)}\upsilon_{st}$ –disbalans miqdori. Bundan ko'rinadiki, tenglama (31) "energiya" tenglamasi (15) ga faqat

$$\delta_4 = \delta_2$$

bo'lganda mos tushiniladi.

Endi sxema (28), (29) konservativ bo'lishini talab etamiz. Tenglama

$$\upsilon_t = -p_{\bar{s}}$$

ni tenglama $\upsilon^{(0.5)} = 0.5(\upsilon + \hat{\upsilon})$ bilan ko'paytirib quydagiga ega bo'lamiz

$$\frac{1}{2}(\upsilon^2)t = -\upsilon^{0.5} p_{\bar{s}}^{(\sigma_1)}\ , \qquad (32)$$

so'ngra ushbu tenglamani tenglama (29) bilan qo'shamiz:

$$(\varepsilon + 0.5^2)_t = -p^{(\sigma_3)} \upsilon_s^{(\sigma_4)} - \upsilon^{(0.5)} p_{\bar{s}}^{(\sigma_1)} \qquad (33)$$

Tenglama (33) ning o'ng tomonini formula (30) yordamida o'zgartirib yozamiz:

$$p^{\sigma_3} \upsilon_s^{(\sigma_4)} + \upsilon^{(0.5)} p_{\bar{s}}^{\sigma_1} =$$

$$= (p^{\sigma_1} + \tau(\sigma_3 - \sigma_1) p_t)(\upsilon_s^{0.5} + \tau(\sigma_4 - 0.5)\upsilon_{st}) + \upsilon^{(0.5)} p_{\bar{s}}^{(\sigma_1)} =$$

$$= (p_{(-1)}^{\sigma_1} \upsilon^{0.5})_s + \delta_2 E, \qquad (34)$$

bu yerda $p_{(-1)} = \overline{p}_{i-1} = p_{i-1/2}$

$$\delta_2 E = \tau(\sigma_3 - \sigma_1)\upsilon_s^{0.5} p_t + \tau(\sigma_4 - 0.5) p^{(\sigma_1)} \upsilon_{st} + \tau^2(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_4 - 0.5) p_t \upsilon_{st}$$

Natijada tenglama (33) ushbu ko'rinishga keltiriladi

$$(\varepsilon + 0.5\upsilon^2)_t = -(p_{(-1)}^{\sigma_1} \upsilon^{(0.5)})_s - \delta_2 E \qquad (35)$$

Bu yerda $\delta_2 E$ to'liq energiya disbalansini bildiradi. ixtiyoriy p va υ uchun $\delta_2 E = 0$ deb hisoblab quydagicha aniqlaymiz

$$\delta_3 = \delta_1\ , \qquad \delta_4 = 0.5$$

va o'z navbatida,

$$\delta_2 = 0.5$$

bo'ladi.

Shunday qilib, biz parametrli to'liq konservativ sxemalar oilasini hosil qildik

$$\upsilon_t = -p_{\bar{s}}^{(\sigma_1)}, \quad \eta_t = \upsilon_s^{(0.5)}, \quad \varepsilon_t = -p^{(\sigma_1)}\upsilon_s^{0.5} \tag{36}$$

Uchinchi tenglamani, malumki quydagi tenglamardan biri bilan almashtirish mumkin

$$\varepsilon_t = -p^{\sigma_1}\eta_t \tag{37}$$

$$(\varepsilon + 0.5\upsilon^2)_t = -(p_{(-1)}^{\sigma_1}\upsilon^{0.5})_s \tag{38}$$

Takidlash lozimki, oxirgi tenglama o'rniga quydagi tenglamalardan birini yozish mumkin

$$(\varepsilon + 0.5\upsilon_{(+1)}^2)_t = -(p^{\sigma_1}\upsilon^{0.5})_s\,, \tag{39}$$

$$(\varepsilon + \frac{\upsilon^2+\upsilon_{(+1)}^2}{4})_t = -\left(p_*^{(\sigma_1)}\upsilon^{0.5}\right). \tag{40}$$

Tenglama (39) ni hosil qilish uchun yuqoridagi mulohazalarda tenglama (32) ni to'rning $(i+1)$ −guruhida olish kerak:

$$0.5(\upsilon_{i+1}^2)_t = -\upsilon_{i-1}^{0.5}p_{s,i}^{(\sigma_1)} \quad yoki \quad 0.5(\upsilon_{(+1)}^2)_t = -\upsilon_{(+1)}^{(0.5)}p_s^{(\sigma_1)} \tag{41}$$

Tenglamalar (38) va (39) dan bevosita (40) kelib chiqadi.

(40) va (27) ni taqqoslashdan ko'rish mumkinki, biz tomondan aniqlangan to'liq konservativ sxemalar oilasi to'rtta parametrni o'z ichiga olgan hamda integro-interpolatsiyali metodi yordamida olingan (25)-(27) konservativ sxemalar oilasiga tegishli bo'ladi

Malumki, sxema (36) ixtiyoriy δ uchun $O(\tau + h^2)$ approksimatsiyaga ega, $\delta_1 = 0.5$ da esa $O(\tau^2 + h^2)$ approksimatsiyaga ega :

$$\upsilon_t = -p_{\bar{s}}^{(0.5)}, \qquad \eta_t = \upsilon_s^{(0.5)}, \qquad \varepsilon_t = -p^{(0.5)}p_s^{(0.5)}\,. \tag{42}$$

Psevdoyopishqoqlikni hisobga olish unchalik qiyin emas: tenglama (36) da bosim p ni hamisha joyida $g = p + \omega$ bilan almashtirish lozim:

$$\upsilon_t = -g_{\bar{s}}^{\sigma_1}, \qquad \eta_t = \upsilon_s^{0.5}, \qquad \varepsilon_t = -g^{(\sigma_1)} p_s^{0.5}, \qquad g = p + \omega \qquad (43)$$

Gaz ideal va yopishqoqlik chiziqli bo'lganda quydagiga ega bo'lamiz

$$p\eta = (\gamma - 1)\varepsilon, \;\; \omega = -\frac{v}{\eta}\upsilon_s \qquad (44)$$

Ushbu tenglamalarga $i = 0$ va $i < M$ dagi chegaraviy shartlarni qo'shishimiz lozim:

$$\frac{\upsilon_0^{j+1} - \upsilon_0^j}{\tau} = -\left(\frac{p_0 - p_{\frac{1}{2}}}{0.5h}\right)^{(\sigma_1)}, \quad \frac{\upsilon_N^{j+1} - \upsilon_N^j}{\tau} = -\left(\frac{p_N - p_{N-\frac{1}{2}}}{0.5h}\right)^{\sigma_1}.$$

Bu tenglamalardan υ_0^{j+1} va υ_N^{j+1} topiladi. Qolgan η, ε, p miqdorlar to'rning faqat ichki yarim butun nuqtalari $s_{1/2}$, $s_{3/2}, \dots \dots, s_{N-1/2}$ da aniqlanadi.

Konservativ sxema misol sifatida "krest" sxemasini ko'rsatish mumkin, bu sxema o'z vaqtida juda keng tarqalgan sxemalardan biri. Miqdorlar η, ε, p butun bo'lmagan tugunlar $\left(s_{i+\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}}\right)$ da, v esa butun tugunlar (s_i, t_j) da qaraladi.

Sxema "krest" ushbu ko'rinishga ega

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = -\frac{p_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}}{h},$$

$$\frac{\eta_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{3}{2}} - \eta_{i+\frac{1}{2}}^{j-\frac{1}{2}}}{\tau} = \frac{v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1}}{h},$$

$$\frac{\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{3}{2}} - \varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}}{\tau} = -p_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{3}{2}} \frac{v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1}}{h}.$$

Ushbu belgilashlardan foydalansak

$$p_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = \overline{p}_i^j = \overline{p}, \qquad \eta_{i+1/2}^{j+3/2} = \overline{\eta}_i^{j+1} = \hat{\overline{\eta}}$$

va hokozo, yuqoridagi sxemalarni qisqacha quydagicha yozishimiz mumkin

$$v_t = -\overline{p}_{\bar{s}}, \qquad \eta_t = \hat{v}_s, \qquad \hat{\varepsilon}_t = -\hat{\overline{p}}\hat{v}_s \tag{45}$$

Bunda yani qaraladigan miqdorlar oshkor formula bilan topiladi.

Ayirmali tenglamalarni

$$v_t = -\overline{p}_{\bar{s}}$$

$v^{(0.5)}$ ga ko'paytirib va yuqorida keltirilgan mulohazalarni takrorlasak, quydagi ayirmali sxemani xosil qilamiz

$$(\hat{\varepsilon} + 0.5v^2)_t = -(\overline{p}_{(-1)} v^{(0.5)})_s - \delta E\,,$$

bu yerda

$$\delta E = \tau p_t v_s^{(0.5)} + 0.5\tau^2 p_t v_{st}\,,$$

yani, ayirmali sxema (45) konservativ sxema.

3.3. Yechish algoritimi

To'r funksiyalari υ^{j+1}, g^{j+1}, η^{j+1} ning yani qatlamdagi qiymatlari $\delta_1 \neq 0$ t toppish uchun chiziq bo'lmagan ayirmali tenglamalar sestemasiga ega bo'lamiz. Ularni yechish uchun Nuyuton metodidan foydalanamiz. Dastlab tenglamalar (43)-(44) ni ushbu ko'rinishda yozamiz.

$$\hat{\upsilon} + \sigma_1 \tau \hat{g}_{\bar{s}} = \upsilon - (1-\sigma_1)\tau g_{\bar{s}}\,,$$

$$\hat{\eta} - 0.5\tau \hat{\upsilon}_s = \eta + 0.5\tau \upsilon_s\,,$$

$$\hat{\varepsilon} + \sigma_1 \hat{g}(\hat{\eta} - \eta) + (1+\sigma_1) g\hat{\eta} = \varepsilon + (1-\sigma_1) g\eta\,,$$

$$\hat{g}\hat{\eta} - \hat{\varepsilon}(\gamma - 1) + v\hat{\upsilon}_s = 0.$$

Nyuton metodidan foydalangan holda quydagi tenglamalarga ega bo'lamiz

$$\Delta\upsilon^{k+1} + \sigma_1 \tau \Delta g_{\bar{s}}^{k+1} = f_1^k, \qquad \Delta\eta^{k+1} - 0.5\tau\Delta\upsilon_s^{k+1} = f_2^k \tag{46}$$

$$\Delta\varepsilon^{k+1} + g^{(\sigma_1)}\eta^{k+1} + \sigma_1(\eta^k - \eta)\Delta g^{k+1} = f_3^k \tag{47}$$

$$-\Delta\varepsilon^{k+1} + a g^k \Delta\eta^{k+1} + a\eta\Delta g^{k+1} + av\Delta\upsilon^{k+1} = f_4^k \tag{48}$$

$$k = 1,2,3, \ldots,$$

bu yerda

$$\alpha = \frac{1}{\gamma - 1}\,, \quad f_1^k = f_2^k = 0 \quad agar \;\; k > 0$$

$$\dot{f}_1 = \upsilon - \dot{\upsilon} - (1-\sigma_1)\tau g_{\bar{s}} - \sigma_1 \tau \dot{g}_{\bar{s}},$$

$$\dot{f}_2 = \eta - \dot{\eta} + 0.5\tau(\upsilon_s + \dot{\upsilon}_s),$$

$$\dot{f}_3 = -\varepsilon + \varepsilon + \overset{k}{g^{(\sigma_1)}}(\eta^k - \eta), \quad \overset{k}{g^{(\sigma_1)}} = \sigma_1 g^k + (1-\sigma_1) g,$$

$$\dot{f}_4 = \varepsilon - ag\eta - av\upsilon_s\,, \qquad \Delta\upsilon^{k+1} = \upsilon^{k+1} - \upsilon^k\,, \quad \Delta\eta^{k+1} = \eta^{k+1} - \eta^k$$

va hokozo.

Bu tenglamalardan $\Delta\varepsilon^{k+1}$, $\Delta\eta^{k+1}$, $\Delta\upsilon^{k+1}$ larni yo'qotamiz va $y^{k+1}=\Delta g^{k+1}$ ni aniqlash uchun uch nuqtali ayirmali tenglamalarga ega bo'lamiz

$$(\sigma_1(\eta^k-\eta)+a\eta^k)y^{k+1}-\sigma_1\tau[\left(g^{(\overset{k}{\sigma_1})}+ag^k\right)0.5\tau+av]y_{\bar{s}s}^{k+1}=F^k$$

(bu yerda F^k ushbu f_1^k, f_2^k, f_3^k, f_4^k funksiyalar orqali ifodalanadi), bu sxema progonka metodi bilan yechiladi.

Endi $\Delta g^{k+1}=y^{k+1}$ ni bilgan holda $\Delta\varepsilon^{k+1}$, $\Delta\eta^{k+1}$, $\Delta\upsilon^{k+1}$ larni aniqlaymiz, so'ngra Δg^{k+1}=$\Delta g^{k+1}+g^k$, $\Delta\upsilon^{k+1}$=$\Delta\upsilon^{k+1}+\upsilon^k$ va hokozo.

Yuqoridagi sestemani progonka metodi bilan yechilishini aytib o'tdik. Ushbu metodning algoritmi va turg'unligi masalalariga to'xtalamiz. Quydagi masalani qaraylik

$$A_iy_{i-1}-C_iy_i+B_iy_{i+1}=-F_i\,,\qquad i=1,2,\dots\dots N-1,$$

$$y_0=\kappa_iy_i+\mu_1\,,\qquad y_N=\kappa_2y_{N-1}+\mu_2$$

Bunda

$$A_i\neq 0\,,\ B_i\neq 0 \text{ barcha}\qquad i=1,2,\dots\dots N-1.$$

Ushbu sestemani sodda usulda yechish yo'lini ko'rsatishimiz lozim. Bunda asosiy g'oya ikkinchi tartibli ayirmali tenglama (49) ni uchta birinchi tartibli

Ayirmali tenglamaga keltirishga asoslanadi, bu tenglamalar, umuman olganda chiziqli bo'lmagan tenglamalardan iborat bo'ladi. Quydagi rekurrent munosabat o'rinli deb hisoblanadi.

$$y_{i-1}=\alpha_{i+1}y_{i+1}+f_{i+1}\,, \tag{49}$$

Bu yerda α_i va β_i nomalum koeffisentlar.

Ifoda

$$(A_i\alpha_i - C_i)y_i + A_i\beta_i + B_i y_{i+1} = -F_i\ .$$

Ushbu tenglamaga (50) dan y_i ni qo'yamiz

$$[(A_i\alpha_i - C_i)\alpha_{i+1} + B_i]y_{i+1} + A_i\beta_i + (A_i\alpha_i - C_i)\beta_{i+1} = -F_i\ .$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama ixtiyoriy y_i lar uchun o'rinli bo'ladi, agarda quydagi ikkita tenglik o'rinli bo'lsa

$$(A_i\alpha_i - C_i)\alpha_{i+1} + B_i = 0\ ,$$

$$A_i\beta_i + (A_i\alpha_i - C_i)\beta_{i+1} + F_i = 0\ .$$

bularning birinchisidan α_{i+1} ni toppish uchun recurrent formulaga ega bo'lamiz

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i B_i}\ , \qquad i = 1, 2, \dots \dots N-1 \tag{51}$$

Tenglama (49) ushbu shartlar bajarilishiga qanoatlantiradi.

$$A_{i-1} - (C_i - B_i\xi_{i-1})\xi_i = 0\ ,$$

$$-F_i = B_i\eta_{i+1} - (C_i - B_i\xi_{i-1})\eta_{i.}\ .$$

Bu yerdan formulalar (59) va (60) ga ega bo'lamiz qiymat ixtiyoriy y_0 ni ushbu shartdan

$$y_0 = \kappa_i y_i + \mu_1$$

va formula

$$y_0 = \xi_i y_i + \eta_1$$

dan aniqlaymiz, ya'ni $\xi_1 = \kappa_1$ $\eta_1 = \mu_1$.

ushbu tengliklardan ko'rinadiki

$$|C_i - B_i\xi_{i-1}| \geq |C_i| - |B_i| \cdot |\xi_{i-1}|.$$

$$|1-\xi_1\kappa_1| \geq 1-|\xi_1|\cdot|\kappa_1|$$

Shart (56) chap progonka formulalarining qo'llanilishi kafolatlaydi, chunki

$$\xi_i \leq 1 \quad \text{barcha} \quad i=1,2,\dots\dots M$$

larda o'rinli bo'ladi.

Chap va o'ng progonka formulalarini bir-biriga qo'llab, qarama-qarshi progonka metodini hosil qilamiz. Faraz qilaylik $i=i_0$, $0<i_0<N$ biror bir ichki tugun bo'lsin. Bu holda $0 \leq i \leq i_0$ sohada (50)-(55) formulalar yordamida progonka koeffitsentlar α_i, β_i hisoblanadi:

$$\alpha_{i+1}=\frac{B_i}{C_i-\alpha_i B_i}, \qquad i=1,2,\dots\dots i_0 \qquad \alpha_1=\kappa_1$$

$$\alpha_{i+1}=\frac{A_i\beta_{i+1}+F_i}{C_i-\alpha_i B_i}, \qquad i=1,2,\dots\dots i_0 \qquad \beta_1=\mu_1$$

va $i_0 \leq i \leq N$ sohada formulalar (57)-(60) bilan ξ_i va η_i hisoblanadi:

$$\xi_i=\frac{A_i}{C_i-\xi_{i+1}B_i}, \qquad i=N-1,N-2,\dots\dots i_0 \qquad \xi_N=\kappa_2$$

$$\eta_i=\frac{B_i\beta_{i+1}+F_i}{C_i-\xi_{i+1}B_i}, \qquad i=N-1,N-2,\dots\dots i_0. \qquad \eta_N=\mu_2 .$$

So'ngra $i=i_0$ nuqtada (50) va (57) ko'rinishdagi ikkiga yechimini birlashtirish yo'li bilan olib boriladi. Yaqinlashish xatoliklari mavjudligini etiboriga (49) ning yechimi y_i emas, balki, aynan o'sha masalaning tarkibiy koeffitsentlar $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i, \tilde{\kappa}_1, \tilde{\kappa}_2$ va o'ng tomonlar $\tilde{F}_i, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$ bilan olingan yechim $\tilde{y}_1$ ga ega bo'lamiz. Shunday tabiiy savol tug'iladi?

Biz progonka metodida $|\alpha_i| \leq 1$ shartli bajarilanda xato

$\delta y_{i+1}=\tilde{y}_{i+1}-y_{i+1}$, ya'ni y_{i+1} ni yo'l qo'yilgan xatolik y_i ni topishda ortib ketmaydi.

Haqiqattan ham ushbu tenglamalardan

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}\ , \quad y_i = \alpha_{i+1} \bar{y}_{i+1} + \beta_{i+1}$$

$$\delta y_i = \alpha_{i+1} \beta y_{i+1}, \quad |\delta y_i| \le |\alpha_{i+1}| \cdot |\beta y_{i+1}|\ ,$$

$$|\delta y_i| \le |\beta y_{i+1}|, \text{ chunki } |\alpha_{i+1}| \le 1\ .$$

tengsizlik o'rinli. Bu tengsizlik progonka metodining turg'unligi bilan ko'rsatiladi. Xuddi formulalar (50)-(55) ni hosil qilganimizdek chap progonka formulalarini olish mumkin

$$y_{i+1} = \xi_{i+1} y_i + \eta_{i+1} \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots N-1, \tag{57}$$

$$\xi_i = \frac{A_i}{C_i - \xi_{i+1} B_i}\ , \qquad i = N-1, N-2, \ldots\ldots 2, 1. \quad \xi_N = \kappa_2 \tag{58}$$

$$\eta_i = \frac{B_i \beta_{i+1} + F_i}{C_i - \xi_{i+1} B_i}\ , \qquad i = N-1, N-2, \ldots\ldots 2, 1. \quad \eta_N = \mu_2\ . \tag{59}$$

$$y_0 = \frac{\mu_1 + \kappa_i \eta_1}{C_i - \xi_{i+1} \kappa_1}\ . \tag{60}$$

Haqiqattan ham, agar ushbu munosabat

$$y_{i+1} = \xi_{i+1} y_i + \eta_{i+1}$$

o'rinli deb hisoblab tenglama (49) dan ketma y_{i+1}, $y_i = \xi_i y_{i-1} + \eta_i$ ni yuqotsak, ushbu tenglamaga ega bo'lamiz

$$-F_i = A_i y_{i-1} + (B_i \xi_{i+1} - C_i) y_i + B_i \eta_{i+1} =$$
$$= [A_i - (C_i - B_i \xi_{i+1})] y_{i-1} + B_i \eta_{i+1} - (C_i - B_i \xi_{i+1}) \eta_i\ .$$

$$|C_i| \ge |A_i| + |B_i|\ , \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots N-1\ ,$$

$$|\kappa_\alpha| \le 1 \quad i = 1, 2 \qquad |\kappa_1| + |\kappa_2| < 2\ . \tag{56}$$

$|\alpha_i| \le 1$ faraz qilib, $|\alpha_{i+1}| \le 1$ ekanligini ko'rsatamiz, chunki,

$|\alpha_1| = |\kappa_1| \le 1$ ekanligi ma'lum, bundan barcha $i = 1, 2, \ldots\ldots N$ lar $|\alpha_i| \le 1$ bo'lib kelib chiqadi.

Ushbuni qaraylik

$$|C_i - \alpha_i A_i| - |B_i| \geq |C_i| - |\alpha_i||A_i| - |B_i| \geq |A_i| \cdot (1 - |\alpha_i|) \geq 0,$$

Ma'lumki $B_i \neq 0$, bu holda $|C_i - \alpha_i A_i| > 0$, yani

$$|\alpha_{i+1}| = \frac{|B_i|}{|C_i - \alpha_i B_i|} \leq 1$$

Bu yerdan ko'rinadiki, $|\alpha_{i+1}| < 1$ bo'ladi, agar $|\alpha_i| < 1$ bo'lsa, barcha $|\alpha_i| < 1$ bo'ladi, agar $|\alpha_1| = |\kappa_1| < 1$, yani $|1 - \alpha_H \kappa_2| > 0$ bo'ladi.

Shunday qilib, formulalar (51), (52) va (55) ning natijalari shartlar (56) bajarilganda noldan farqli bo'ladi. Agarda hech bo'lmaganda bitta $i = i_0$ nuqtada

$$\left|C_{i_0}\right| \geq \left|A_{i_0}\right| + \left|B_{i_0}\right|$$

Sharti bajarilsa, u holda $|\alpha_i| < 1$ bo'ladi va barcha $i > i_0$ da va shu jumladan $i = M$ uchun ham: $|\alpha_M| < 1$. Bunday holda, shart $|\kappa_1| + |\kappa_2| < 2$ ortiqcha bo'lib qoladi, chunki, $|1 - \alpha_N \kappa_1| \geq 1 - |\alpha_N| \cdot |\kappa_1| > 0$ bo'ladi $\kappa_1 = 1$ va

$\kappa_1 = 2$ da ham.

Shunday qilib, shartlar (46) bajarilganda masala (49) formulalar (50)-(55) bilan aniqlanadigan yagona yechimga ega bo'ladi.

Kompyuterda ushbu formulalar bo'yicha hisoblashlar taqribiy, yani chekli qiymatli shunday qilib, α_i va β_i funksiyalar Koshi masalasiga ega bo'lamiz: α −uchun bu (51), (53), β −uchun esa (52), (54) (bular to'g'ri progonka formulalari).

Funksiyalar α_i va β_i barcha $i = 1, 2, \ldots\ldots N$ lar uchun aniqlanadigan keyin, y_N uchun chegaraviy qiymatini aniqlashimiz lozim. U ushbu tenglamalar sestemasini yechimi orqali topiladi

$$y_N = \kappa_2 y_{N-1} + \mu_2 \qquad y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N ,$$

bundan agar $1-\alpha_N\kappa_2 \neq 0$

$$y_N = \frac{\mu_2+\kappa_2\beta N}{1-\alpha_N\kappa_2}. \qquad (55)$$

Shu tariqa, y_i ni toppish uchun Koshi masalasi (50), (55) ni hosil qilamiz (teskari progonka formulalari).

Ushbu bayon qilingan metod o'ng progonka formulalari deb ataladi (o'ng progonka). Endi o'ng progonkaning barcha formulalarini yig'ib ularni kompyuterga programma tuzishga qo'lay ko'rinishida yozamiz:

$$\vec{\alpha}_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i B_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots N-1 \quad \alpha_1 = \kappa_1$$

$$\vec{\beta}_{i+1} = \frac{A_i\beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i B_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots N-1 \quad \beta_1 = \mu_1$$

$$y_N = \frac{\mu_2 + \kappa_2\beta_N}{1-\alpha_N\kappa_2},$$

$$\overleftarrow{y}_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}, \qquad i = N-1, \quad N-2, \ldots\ldots, 1, 0.$$

Formulalar ustidagi strelkalar hisoblash yo'nalishlarini ko'rsatadi: ($\rightarrow$) i dan $(i+1)$ ga ($\leftarrow$) - $(i+1)$ dan i ga tomon. Progonka metodi bo'yicha hisoblashlar olib borishning turg'unligiga to'xtalamiz. Biz yuqorida metodning formulalarini formal ravishda chiqardik. Biz $C_i - \alpha_i A_i$ va $1-\alpha_N\kappa_2$ miqdorlarga bo'ldik va bunday bo'lishni qanday hollarda o'rinli bo'lishini ko'rsatdik. Formulalar (50) va (55) quydagi shartlar bajarilganda ma'noga ega bo'ladi:

Formula (51) ning maxraji noldan farqli deb faraz qilamiz va ushbu shartlar o'rinli ekanligini keyinroq ko'rsatib o'tamiz. Formula (51) ning ikkinchi tenglamalardan β_{i+1} uchun ushbu rekurrent formulaga ega bo'lamiz:

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i\beta_i+F_i}{C_i-\alpha_i A_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots N-1 \qquad (52)$$

Bu formulalarni chiqarishda biz munosabat (50) dan kelib chiqdik.

Agar α_i va β_i koeffitsentlar va y_N ning qiymati ma'lum bo'lsa, u holda, o'ngdan chapga tomon $(i+1\ \ dan\ \ i\ \ ga)$ harakatlanib, biz ketma-ket y_i larni topamiz. koeffitsentlar α_i va β_i uchun tenglamalar chiziqli bo'lmagan tenglamalar bo'lib, ular ushbu funksiyalarning ikki qo'shni tuginlaridagi qiymatlarini o'zaro bog'laydi. α_i β_i lar uchun masala chapdan o'nga tomon yechiladi, y_i uchun esa qarama-qarshi yo'nalishda har-bir $\alpha\,,\beta\,,y$ funksiyalar uchun Koshi masalasini yechish lozim. Ushbu funksiyalarga boshlang'ich shartlarni topish uchun chegaraviy shartlardan foydalanamiz

$$y_0 = \alpha_i y_i + \beta_i$$

boshqa tarafdan masalaning chegaraviy shartlariga ko'ra

$$y_0 = \kappa_1 y_1 + \mu_1$$

Shu sababli, oxirgi tomonlarni o'zaro taqqoslash natijasida

$$\alpha_i = \kappa_1 \tag{53}$$

$$\beta_i = \mu_1 \tag{54}$$

munosabatlarni xosil qilamiz.

Ushbu formulalardan

$$y_{i_0} = \alpha_{i_0+1} y_{i_0+1} + \beta_{i_0+1}\ , \qquad y_{i_0} = \xi_{i_0+1} y_{i_0} + \eta_{i_0+1}$$

y_{i_0} ni aniqlaymiz

$$y_{i_0+1} = \frac{\beta_{i_0+1} + \alpha_{i_0+1}\eta_{i_0+1}}{1 - \alpha_{i_0+1}\eta_{i_0+1}}$$

Bu formula ma'noga ega chunki $1 - \alpha_{i_0+1}\eta_{i_0+1} > 0$ bo'ladi, chunki, quydagi

$|\alpha_{i_0+1}|$ yoki $|\eta_{i_0+1}|$ miqdorlardan hech bo'lmaganda bittasi (56) shartga asosan birdan kichik bo'ladi.

Qiymat y_{i_0} ni bilgan holda formula (50) yordamida barcha y_i larni $i < i_0$ da aniqlaymiz, so'ngra formula (57) yordamida y_i ning qiymatlarini barcha $i > i_0$ uchun topamiz.

Qarama-qarshi progonka metodini y_i ning qiymatini faqat bitta $i = i_0$ nuqtada topish talab qilinganda qo'llash foydali bo'ladi.

Chegaraviy masala (49) ning yechimini berilgan o'ng tomonlar F_i, μ_1, va μ_1 (masalaning berilganlari) orqali baholash uchun biz maksimumlik prinsipidan (tamoyilidan) foydalanamiz. U biroz xususiy ko'rinishdagi masalalar uchun o'rinli, ya'ni

$$A_i > 0\,, B_i > 0\,, C_i > 0.$$

Bayon qilishlarni almashtirish maqsadida dastlab birinchi chegaraviy masalani qaraymiz ($\kappa_1 = 0\,, \kappa_2 = 0$ bo'lgan holni):

$$\mathcal{L}[y_i] = A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i$$

$$i = 1, 2, \ldots\ldots N-1, \tag{55}$$

$$y_0 = \mu_1\,,\ y_N = \mu_2\,.$$

Teorema (maksimumlik prinsipini). Quydagi shartlar bajarilgan bo'lsin

$$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad D_i = C_i - A_i - B_i \geq 0 \tag{56}$$

bunda $i = 1, 2, \ldots\ldots N-1.$

U holda ushbu shartlarning to'rning barcha ichki tugunlarida bajarilishidan

$$\mathcal{L}[y_i] \geq 0 \qquad (\mathcal{L}[y_i] \leq 0\,)$$

barcha $i = 1, 2, \ldots\ldots N-1$

Bu yerda y_i o'zgarmasdan farqli funksiya y_i funksiyaning to'rning ichki tugunlarida ya'ni, $i = 1, 2, \ldots\ldots N - 1$ da eng katta musbat (eng kichik manfiy) qiymatni qabul qila olmasligi kelib chiqadi.

Isbot. $\mathcal{L}[y_i] \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots\ldots N - 1$ da berilgan bo'lsin. Biror bir ichki $i = i_*$ $0 < i_* < N$ tugunda y_i funksiya o'zining eng kata musbat qiymatiga erishadi

$$y_* = \max_{0 \leq i \leq N} y_i = M_0 > 0 .$$

Bu shart teorema shartiga zid shart bo'lib hisoblanadi va ana shu teskari faraz teskari tengsizlikka ($\mathcal{L}[y_i] < 0$) olib keladi va teorima isbotlanadi.

Endi teorima shartiga ko'ra $y_i \equiv const$ bo'lganligi uchun shunday bir i_0 nuqta topiladiki (i_0 nuqta i_* nuqta bilan mos tushishi ham mumkin), bu nuqtada

$$y_{i_0} = y_{i_*} = M_0 > 0$$

bo'ladi, o'nga qo'shni bo'lgan biror nuqtada masalan, $i = i_0 - 1$ nuqtada qat'iy tengsizlik bajariladi. $y_{i_0-1} < M$. Endi $\mathcal{L}[y_i]$ uchun ifodani quydagi ko'rinishda yozamiz.

$$\mathcal{L}[y_i] = B_i(y_{i+1} - y_i) - A_i(y_i - y_{i-1}) - (C_i - A_i - B_i)y_i$$

Shart (56) ga asosan $i = i_0$ nuqtada ushbu tengsizlik bajraladi

$$\mathcal{L}[y_{i_0}] = B_{i_0}(y_{i_0+1} - y_{i_0}) - A_{i_0}(y_{i_0} - y_{i_0-1}) - (C_{i_0} - A_{i_0} - B_{i_0})y_{i_0} \leq$$

$$-B_{i_0}(y_{i_0} - y_{i_0+1}) - A_{i_0}(y_{i_0} - y_{i_0-1}) < 0,$$

chunki

$$y_{i_0} \geq y_{i_0+1} \quad va \quad y_{i_0} > y_{i_0-1}, \qquad A_{i_0} > 0, \; B_{i_0} > 0.$$

Bu tenglamalarning shartiga zid: ($\mathcal{L}[y_i] \geq 0$) barcha , $i = 1, 2, \ldots\ldots$

$N-1$ larda, shu jumladan $i=i_0$ nuqtada ham. Teoremaning birinchi mulohazasi isbotlanadi, yani y_i funksiya to'rning ichki tugunlarida eng katta musbat qiymatlarni qabul qila olmaydi.

Teoremaning ikkinchi qismi ham xuddi shunday isbotlanadi, bunda y_i ni $-y_i$ ga almashtirish va isbotlangan mulohazalardan foydalanish yetarli.

Bu yerda F^k funksiya f_1^k ,f_2^k, f_3^k , va f_4^k orqali ifodalanadi, va progonka metodi bilan yechiladi.

Qiymat $\Delta g^{k+1}=y^k$, ni bilgan holda, $\Delta \upsilon^{k+1}$,$\Delta\eta^{k+1}$, $\Delta\varepsilon^{k+1}$ ni aniqlaymiz, so'ngra

$$g^{k+1}=\Delta g^{k+1}+g^k\,, \qquad \upsilon^{k+1}=\Delta\upsilon^{k+1}+\upsilon^k$$

va hokozolar.

Endi iteratsiya jarayonining yaqinlashi masalalariga to'xtalamiz.

Ushbu farqlarni baholaymiz

$$g^{k+1}=\Delta g^{k+1}-\hat{g}\,, \quad \eta^{k+1}=\Delta\eta^{k+1}-\hat{\eta}\ \ , \quad \upsilon^{k+1}=\Delta\upsilon^{k+1}-\hat{\upsilon}\,,$$

bu yerda $\hat{g}$, $\hat{\eta}$, $\hat{\upsilon}$ lar tenglama (43) ning aniq yechimlari. Ushbu farqlar uchun tenglamalarni yozamiz.

Tenglamalar (46) ning chiziqli ekanligi sababli, darxol bir jinsli tenglamalarga ega bo'lamiz

$$\delta\upsilon^{k+1}=-\sigma_1\tau\delta^{k+1}g_{\bar{s}}\,, \quad \delta\eta^{k+1}=-\sigma_1\tau\delta^{k+1}\upsilon_s\,, \ k=0,1,2,\ldots.. \qquad (57)$$

Tenglamalar (47) va (48) ga quydagilarga ko'ra qo'yamiz

$$\Delta\varepsilon^{k+1}=\delta\varepsilon^{k+1}-\varepsilon_{\varepsilon}^{k}, \qquad \Delta\eta^{k+1}=\delta\eta^{k+1}-\eta^k$$

$$\Delta\upsilon^{k+1}=\delta\upsilon^{k+1}-\delta\upsilon^k, \qquad \Delta g^{k+1}=\delta g^{k+1}-g^k.$$

Dastlab tenglama (56) da almashtiramiz:

$$\delta\varepsilon^{k+1}+\ g^{\overset{k}{(\sigma_1)}}\delta\eta^{k+1}+\sigma_1(\eta^k-\eta)\delta g^{k+1}=F_3^k\ ,$$

$$F_3^k = \overset{k}{g^{(\sigma_1)}}\delta\eta^k + \delta\varepsilon^k + \sigma_1(\eta^k - \eta)\delta g^k -$$

$$-\left[\delta\varepsilon^k + (\hat{\varepsilon} - \varepsilon) + \left(\sigma_1\delta g^k + g^{(\sigma_1)}\right)(\delta\eta^k + \hat{\eta} - \eta)\right] =$$

$$= \sigma_1(\eta^k - \eta)\delta g^k - \sigma_1(\hat{\eta} - \eta)\delta g^k - \left[(\hat{\varepsilon} - \varepsilon) + g^{(\sigma_1)}(\hat{\eta} - \eta)\right] = \sigma_1\delta\eta^k\delta g^k ,$$

chunki

$$\hat{\varepsilon} - \varepsilon + g^{(\sigma_1)}(\hat{\eta} - \eta) = 0$$

tenglama (43) ga shunday qilib

$$\delta\varepsilon^{k+1} + \overset{k}{g^{(\sigma_1)}}\delta\eta^{k+1} + \sigma_1(\eta^k - \eta)\delta g^{k+1} = \sigma_1\delta\eta^k\delta g^k. \qquad (58)$$

tenglama (56) ni ushbu ko'rinishga keltiramiz

$$-\delta\varepsilon^{k+1} + ag^k\delta^{k+1}g + av\delta^{k+1}g + av\delta^{k+1}\upsilon_s = a\delta\eta^k\delta^k g. \qquad (59)$$

haqiqattan ham (48) dagi ushbu chiqadi

$$0 = -(\delta\varepsilon^{k+1} - \delta\varepsilon^k) + ag^k(\delta^{k+1}\eta - \delta^k\eta) + a\eta^k((\delta^{k+1}g - \delta^k g) +$$

$$+av(\delta^{k+1}\upsilon_s - \delta^k\upsilon_s) - (\delta\varepsilon^k + \hat{\varepsilon} - ag^k\eta^k) - av\upsilon_s^k) =$$

$$= [-\delta\varepsilon^{k+1} + ag^k\delta^{k+1}\eta + av\eta^k\delta^{k+1}g + av\delta^{k+1}\upsilon_s] - F^4 ,$$

bunda

$$F^4 = ag^k\delta\eta^k + a\eta^k\delta g^k + av\delta\upsilon_s + \hat{\varepsilon} - a\eta^k g^k - av^k\upsilon_s^k.$$

Quydagilarni inobatga olib $\hat{\varepsilon} = a\hat{g}\hat{\eta} - \hat{\upsilon}_s$, $F_4^k = a\delta\eta^k\delta g^k$ topamiz.

Tenglamalar (50) va (51) dan δ ε yo'qotamiz.

$$\left(ag^k + \overset{k}{g^{(\sigma_1)}}\right)\delta^k\eta + \left((\sigma + \sigma_1)\eta^k - \sigma_1\eta\right)\delta^{k+1}g + a\delta^{k+1}\upsilon_s =$$

$$= (\sigma + \sigma_1)\delta\eta^k\delta g^k. \qquad (52)$$

Bunga quydagilarni qo'shib $\delta^{k+1}\upsilon_s = -\sigma_1\tau\delta^{k+1}g_{\bar{s}s}$, $\delta^{k+1}\eta = 0.5\tau\delta^{k+1}\upsilon_s$ larga ega bo'lamiz

$$\delta^{k+1}g - \alpha_k \delta^{k+1} g_{\bar{s}s} = q_k \delta g^k \,, \;\; q_k = \frac{(\sigma+\sigma_1)\delta\eta^k}{(\sigma+\sigma_1)\eta^k - \alpha_1\eta},$$

bularda

$$\alpha_k = \sigma_1 \tau \left[av + 0.5\tau \left(a g^k + g^{\overset{k}{(\sigma_1)}} \right) \right] / [(\sigma+\sigma_1)\eta^k - \sigma_1\eta] \geq 0. \quad \text{to'ri}$$

$$\eta^k = \frac{\sigma_1}{\sigma+\sigma_1}\eta \quad \text{barcha} \;\; k = 0, 1\,, 2\,, \dots \dots \tag{54}$$

Agar $i = 0$ va $i = N$ da bosim berilgan bo'lsa, u Δg^{k+1} uchun chegaraviy shartlar malumki, bir jinsli bo'ladi.

$$\delta^{k+1} g_0 = 0\,, \quad \delta^{k+1} g_N = 0.$$

Tenglama (53) ni $g^{k+1}(S_i)$ ga nisbatan kanonik ko'rinishda yozamiz

$$A(P)y(p) = \sum_{Q\epsilon \text{Ш}\,(P)} B(P,Q)y(Q) + F(P),$$

ko'rinishni hosil qilamizki

$$A(P) > 0, \quad B(P,Q) > 0,$$

$$D(P) = A(P) - \sum_{Q\epsilon \text{Ш}\,(P)} B(P,Q)y(Q) = 1,$$

yani bunda maksimumlik ko'rinishga shartlari qanoatlantiradi

Tenglama (53) uchun bir jinsli chegaraviy shartlar (55) bilan ushbu baho o'rinli

$$\left\| \delta^{k+1} g \right\|_c \leq |q_k| \left\| \delta^k g \right\|_c . \tag{62}$$

Bu yerdan ko'rinadiki, iteratsiyalar yaqinlashuvchi bo'ladi, agar

$$|q_k| \leq q < 1 \quad \text{barcha} \;\; k = 1, 2\,, \dots \dots .., \tag{63}$$

$$\frac{\left|\eta^k - \hat{\hat{\eta}}\right|}{\eta^k - b\eta} \leq q, \qquad b = \frac{\sigma_1}{\sigma+\sigma_1}.$$

Bu ushbu tengsizlikka ekvivalent

$$\frac{\hat{\eta}+bq\eta}{1+q} \leq \eta^k \leq \frac{\hat{\eta}-bq\eta}{1-q}\,, \quad \hat{\eta} > bq\eta\,, \tag{64}$$

bu esa nisbiy hajm η (yoki zichlikning $\rho = \frac{1}{\eta}$) ning o'zgarishi tezligiga nisbatan vaqt qadamiga chegaralar qo'yishi shartlar qo'yishni shart qilib qo'yadi.

$$\frac{1}{\eta}\left|\eta^k - \eta\right| \leq q(1-b)$$

yoki

$$(1-q(1-b))\eta \leq \hat{\eta} \leq (1+q(1-b))\eta \tag{65}$$

Izotermik holat $(T=0)$ uchun $j=1$, $\alpha=\infty, b=0$ bo'ladi, bu holda (59) o'rniga ushbuga ega bo'lamiz

$$\frac{\hat{\eta}}{1+q} \leq \eta^k \leq \frac{\hat{\eta}}{1-q} \quad \text{va} \quad \frac{|\hat{\eta}-\eta|}{\eta} \leq q\,.$$

Agar shartlar (57) bajarilgan bo'lsa, u holda

$$\left\|\delta^{k+1}g\right\|_c \leq |q_k|\left\|\delta^k g\right\|_c\,, \qquad q^{k+1} \to 0 \quad \text{agar} \quad k \to \infty,$$

yani iteratsiyalar geometrik progersiya tezligi bilan yaqinlashadi.

3.4. Kompyuter dasturi

Gazlar dinamikasi tenglamalari progonka metodini iteratsiya metodi bilan birgalikda qo'llash orqali yechimini ko'rib o'tdik. Ushbu hisoblashlarni gazlar dinamikasi tenglamalari sestemasi uchunemas, faqat bitta tenglama misolida ko'rib o'tamiz. Bunda iteratsiya metodi va progonka metodi birgalikda qo'llaniladi. Ushbu natijalarni bevosita tenglamalar sestemasi uchun umumlashtirish mumkin. Shu maqsadda Laplas tenglamasi uchun Direxle masalasani qaraymiz.

Masalaning qo'yilishi:

Berilgan $\overline{D} = \{0 \leq x_\alpha \leq 1, \qquad \alpha = 1, 2, \dots\}$ sohada Laplas tenglamasi

$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0,$ quydagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi sonli yechimni topish talab qilinadi:

$$U(0, x_2) = g_1(x_2), \qquad U(1, x_2) = g_2(x_2), \quad (2)$$

$$U(x_1, 0) = g_3(x_1), \qquad U(x_1, 1) = g_4(x_1), \qquad (3)$$

Yechish algoritmi: D- sohada to'g'ri to'rtburchakli to'r kiritamiz.

$$\omega_{h_1 h_2} = \left\{x_{ij} = (ih, jh), i = 0,1,2 \dots., N; j = 0,1,2 \dots N; h = \frac{1}{N}\right\}$$

Differensial masala (1)-(3) ni yechish uchun ayirmali sxemani qaraymiz.

$$(\text{E-}\alpha_x \lambda_1) y_{ij}^{s+\frac{1}{2}} = (E + \beta_k \lambda_2) y_{ij}^s, \quad (4)$$

$$(\text{E-}\alpha_x \lambda_2) y_{ij}^{5+1} = (E + \beta_k \lambda_1) y_{ij}^{s+\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

$$y^{s+\frac{1}{2}} = g + (\beta_k - \alpha_k)\lambda_2 g, \quad x_1 = 0; 1$$

$$y^{s+1} = g(x), \quad x_2 = 0; 1.$$

$\alpha_{k,}\beta_k$ −iteratsiya parametrlari bo'lib ular quydagicha aniqlanadi:

$$\alpha_k = \frac{1}{\alpha_k} - \delta, \;\; \beta_k = \alpha_k + \delta, \qquad k = 1,2,\dots,N$$

$$\delta = \frac{h^2}{6}, \;\; \alpha_k = \frac{4}{h^2}, \;\; \sin^2\frac{k\pi h}{2}.$$

Ma'lumki bir o'lchamli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun yozilgan oshkormas sxema har bir qatlamda har bir qatlamda quydagi ayirmali chegaraviy masalaga olib keladi:

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad 1 < i < N-1,$$

$$y_0 = \mathrm{M}_1, \quad y_N = M_2, \qquad A_i > 0, \quad B_i > 0, \; C_i > A_i + B_i \tag{7}$$

Bu masala standart progonka usuli bilan yechiladi. Endi kvadrat sohada qo'yilgan ikki o'lchamli masalani qaraylik. Tenglamalar (4)-(5) ni ushbu ko'rinishga keltirish mumkin:

$$y_{ij}^{s+\frac{1}{2}} - \alpha_k \Lambda_1 y_{ij}^{s+\frac{1}{2}} = -F_{ij}, \;\; F_{ij} = y_{ij}^{s} + \beta_k \Lambda_2 y_{ij}^{s}$$

$$y_{ij}^{s+\frac{1}{2}} - \alpha_k \Lambda_2 y_{ij}^{s+1} = -\overline{F}_{ij}, \qquad \overline{F}_{ij} = y_{ij}^{s+\frac{1}{2}} + \beta_k \Lambda_1 y_{ij}^{s+\frac{1}{2}}$$

Ulardagi chegaraviy shartlar o'z holicha qoladi. Tenglama (8) dagi va operatorlar to'r funksiyalariga quydagicha tasir qiladi.

$$\Lambda_1 y_{ij} = \frac{y_{i-j,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}}{h^2}$$

$$\Lambda_2 y_{ij} = \frac{y_{i,j-1} - 2y_{i,j} + y_{i,j+1}}{h^2}$$

Kelgusida Tenglama (8) dagi biron bir indeks qo'zg'almas bo'lsa, uni yozamaymiz. Bu vaqtda tenglamalar (8) ni tenglama (7) ko'rinishiga keltirish mumkin.

$$\frac{\alpha_k}{h^2} y_{i-1}^{s+\frac{1}{2}} - \left(1 + 2\frac{\alpha_k}{h^2}\right) y_i^{s+\frac{1}{2}} + \frac{\alpha_k}{h^2} y_{i+1}^{s+\frac{1}{2}} = -F_i, \qquad i = \overline{1, N-1}$$

$$y^{s+\frac{1}{2}} = g + (\beta_k - \alpha_k)\Lambda_2 g \qquad (i = 0; i = N), \tag{9}$$

$$\frac{\alpha_k}{h^2} y_{i-1}^{s+1} - \left(1 + 2\frac{\alpha_k}{h^2}\right) y_j^{s+1} + \frac{\alpha_k}{h^2} y_{j+1}^{s+1} = -\overline{F}_j, \qquad j = \overline{1, N-1}$$

$$y^{s+1} = g(x), \epsilon\, j = 0:\ j = N \tag{10}$$

tenglamalar (9) va (10) da o'ng tomondagi to'r funksiyalar quydagi formulalar bilan aniqlanadi.

$$F_i = \frac{\beta_k}{h^2} y_{i,j-1}^{s} + \left(1 - 2\frac{\beta_k}{h^2}\right) y_{ij}^{S} + \frac{\beta_k}{h^2} y_{i,j+1}\,,$$

$$\overline{F}_j = \frac{\beta_k}{h^2} y_{i-1,j}^{s+\frac{1}{2}} + \left(1 - 2\frac{\beta_k}{h^2}\right) y_{ij}^{s+\frac{1}{2}} + \frac{\beta_k}{h^2} y_{i+1,j}^{s+\frac{1}{2}}\,.$$

Parameter $S = 0$ bo'lganda ixtiyoriy boshlang'ich yaqinlashish $y_{ij} = y_{ij}^{S}$ berilgan bo'lsin, bu yaqinlashish to'rning chegaraviy nuqtalarida mavjud chegaraviy xatlarni qanoatlantirishi lozim. Dastlab o'ng tomondagi funksiya F_i ni hisoblaymiz, hamda perimeter $j - 1,2 \dots, N-1$ ning har bir qiymatida satrlar bo'yicha progonka usuli yordamida masala (9) yechiladi va ω_{h1h2} to'rning barcha nuqtalarida to'r funksiyasi $y_{ij}^{s+\frac{1}{2}}$ ning qiymati topiladi keyin F_j funksiya hisoblanadi va parameter $i = 1,2 \dots, N-1$ ning har bir qiymati uchun ustunlar bo'yicha masala (10) ni progonka usuli bilan yechimi buning natijasida $y_{i,j+1}^{s+1}$ ni to'rning hamma tugunlarida aniqlaymiz. Har bir iteratsiya k uchun hisoblash

jarayoni takrorlanadi, ya’ni satr va ustun yo’nalishi bo’yicha hisoblash almashinib turadi.

Differensial masalaning yechimi sifatida quydagi funksiyani qarang:

$$U(x_1, x_2) = c(x_1^4 - 6x_1^2x_2^2 + x_2^4)$$

Parametrlar / Variant nomerlari	C	N
1	1,2	10
2	1,4	20
3	1,6	8
4	2,7	20
5	3,1	10

1-jadval

Tenglama sinov funksiyasi uchun yuqorida keltirilgan variant asosida hisoblashning kompyuter dasturini keltiramiz.

```
 Program  UXXUYY(input,  output);
const   n1=4;   n2=4;   n3=4;  n=n1; m=n2;
type  st=array[0 ... n,  0 ... m]  off  real;
        sn=array[0 ... n]   of real;
        sm=array[0 ... m]   of real;
        sk=array[0 ... n3]   of real;
var  I,j,s,k: integer;
       h1,h2,h12,h22, sigma, d, pi, mahrag, x2, y1, x1, y2: real;
       sn1, sn2:  real;
       a3, alfa, beta: sk;
       betapr1, x, 12s, a1, b1, c1, alfapr1:sn'
       betapr2, y, 1ys, a2, b2, c2,  alfapr2:sm;
       ξ, ys, ysb2, f, f1, ysp1, u: st;
       f1:text;
begin
      assign(f1, 'm1s18.otb');
      rewrite(f1);
           writeln(f1,  'boshlang'ich qiymatlar');
                writeln(f1, 'n1=' , n:2,  'm=' , m2);
             writeln(f1,  '(Tugunlar bo'yicha  aniqlangan natijalar)' );
             writeln(f1, ' ----------------------------------------------------');
```

```
            writeln(f1, 'k  y[j]   x[i]  taqribiy  yechim  aniq yechim');
  writeln(f1, '-----------------------------------------------------')
pi=3,141592;
h1:=1/n1;   h2:=1/n2;
h12:=n1*n1;  h22:=n2*n2;  sigma:=n12/6;
{ taqribiy  yechimni  aniqlovchi  progonka  usuli  bo'yicha  ishlaydigan qism
          for  I:=0  to  n do  x[i]: i*h1;
          for  j:=0  to  n do  y[j]: j*h2;
          for   k:=1  to     n3  do
begin
         sn1:=sin(pi*k*h1)/2.0);
          sn2:=sn1*sn1;
         a3[k]:=(4/h12)*sn2;
          alfa[k]:=1/a3[k]- sigma;
           beta[k]:=alfa[k]+sigma;
           for   k:=1  to  3  do
begin
           x2:=x[i]*x[j];
           for   j:=0  to  m do
        begin
               y2:=y[j]*y[j];
                g[I,j]:=x2*x2-6*x2*y2+y2*y2
```

```
            end;
   end;
   for  i:=0   to  n  do
       begin  for  j:=0  to  m  ys[I, j]:=g[I, j];  end;
                  for  j:=1  to  m-1   do
begin
          12s[0]:=(ys[0, j+1]-2*ys[0, j]+ys[0, j-11])/h22;
          12s[n]:=(ys[n, j+1]-2*ys[n, j]+ys[n, j-11])/h22;
           ysb2[0, j]=ys[0, j]+(beta[k]-alfa[k])*12s[0];
           ysb2[n, j]=ys[n, j]+(beta[k]-alfa[k])*12s[n];
          for  I:=1    to    n-1     do
                     begin
                        12s[i]:=(ys[i, j+1]-2*ys[i, j]+ys[i, j-11])/h22;
                        f[I, j]:=ys[I, j]+beta[k]*12s[i]
                   end;
end;
          for  I:=1    to    m-1     do
begin
           for  I:=1    to    n     do
              begin
                     a1[i]=alfa[k]/h12;
                    b1[i]=alfa[k]/h12;
```

```
                c1[i]=1+2*alfa[k]/h12;
            end;
            alfapr1[1]= 0;   betapr1[1]:=g[0, j];
              for  i:=1    to    n-1     do
               begin
               mahrag:=c1[i]-alfapr1[i]*a1[i];
                alfapr1[i+1]:=b1[i]*a1[i];
                 betapr1[i+1]:=(a1[i]*betapr1[i]+f[I, j])/mahrag
end;
for   i:=n-1   downoto   1  do
       ysb2[I, j]:=alfapr1[i+1]*ysb2[i+1, j]+betapr1[i+1]
end;
for   i:=1  to  n-1  do
 begin
          ysp1[i, 0]:=g[i, 0];
          ysp1[i, m]:=g[i, m];
for   i:=1  to  m-1  do
    begin
          lys[j]:=(ysb2[i+1, j]-2*ybs2[i, j]+ysb2[i-1, j])/h12;
         ff[i, j]:=ysb2[I, j]+beta[k]*lys[j]
        end;
         end;
```

```
alfapr2[1]:=0;
for  i:=1  to  n-1  do
begin
        betapr2[1]:=ysp1[i, 0];
        for   j:=1  to  m  do
        begin
                b2[j]:=alfa[k]/h22;
                a2[j]:=b2[j];
                 c2[j]:=1+2*alfa[k]/h22
          end;
          for   j:=1   to  m-1   do
          begin
                  mahrag:=c2[j]-alfa2[j]*a2[j];
                 alfapr2[j+1]:=b2[j]/mahrag;
                  betapr2[j+1]:=(a2[j]*betapr2[j]+ff[i, j])/mahrag
                  end;
                 for  j:=m-1   downoto  0  do
                        ysp1[i, j]:=alfapr2[j+1]*ysp1[i, j+1]+betapr2[j+1]
end;
{ aniq  yechimni  hisoblash  qismi }
for  i:=0  to n  do
begin
```

```
        x2:=x[i]*x[i];
         for   j:=0  to  m  do
          begin
          y2:=y[j]*y[j];
          u[i, j]:=x2*x2-6*x2*y2+y2*y2
        end;
  end;
{ aniqlangan  yechimni  chop  etish  qismi }
for  j:=1  to m-1  do
begin
      for  i:=1  to n-1  do
if   ysp1[i, j]<0   then
    writeln(f1, ‘  ‘,k:=1,’  ‘:3,  y[j]:3:2, ‘   ‘:4,  x[i]:3:2, ‘  ‘:4,  x[i]:3:2,
   ‘    ‘:5,   ysp1[i, j]:8:6, ‘   ‘:6,  u[i, j]:8:6)
else
    writeln(f1, ‘  ‘,k:=1,’  ‘:3,  y[j]:3:2, ‘   ‘:4,  x[i]:3:2, ‘  ‘:4,  x[i]:3:2,
   ‘    ‘:6,   ysp1[i, j]:8:6, ‘   ‘:6,  u[i, j]:8:6)
      end;
writeln(f1,  ‘-------------------------------------------------------‘);
end;
close(f1);
end.
```

3.5. Hisoblash natijalari

Boshlang'ich qiymatlar n=4, m=4 da tugunlar bo'yicha aniqlangan natijalar.

k	y[i]	x[i]	Taqribiy yechim	Aniq yechim
1	0.25	0.25	-0,007807	-0.015625
1	0.25	0.50	-0.031707	-0.028344
1	0.25	0.75	0.107728	0.109285
1	0.50	0.25	-0.011085	-0.028344
1	0.50	0.50	-0.259074	-0.250000
1	0.50	0.75	-0.468269	-0.464844
1	0.75	0.25	0.128722	0.109375
1	0.75	0.50	-0.475642	-0.464844
1	0.75	0.75	-1.269701	-1.265625
2	0.25	0.25	-0.015882	-0.015625
2	0.25	0.50	-0.028629	-0.027344
2	0.25	0.75	0.109118	0.109375
2	0.50	0.25	-0.028034	-0.027344
2	0.50	0.50	-0.253452	-0.250000
2	0.50	0.75	-0.465534	-0.464844
2	0.75	0.25	0.108303	0.109375
2	0.75	0.50	-0.470205	-0.464844
2	0.75	0.75	-1.266697	-1.265625

k	y[i]	x[i]	Taqribiy yechim	Aniq yechim
3	0.25	0.25	-0.016105	-0.015625
3	025	0.50	-0.027709	-0.027344
3	0.25	0.75	0.109338	0.109375
3	0.50	0.25	-0.028843	-0.027344
3	0.50	0.50	-0.251142	-0.250000
3	0.50	0.75	-0.464959	-0.464844
3	0.75	0.25	0.1206637	0.109375
3	0.75	0.50	-0.466927	-0.464844
3	0.75	0.75	-1.265835	-1.265625
4	0.25	0.25	-0.016004	-0.015625
4	0.25	0.50	-0.027554	-0.027344
4	0.25	0.75	0.109360	0.109375
4	0.50	0.25	-0.028578	-0.027344
4	0.50	0.50	-0.250684	-0.250000
4	0.50	0.75	-0.464893	-0.464844
4	0.75	0.25	0.107004	0.109375
4	0.75	050	-0.466158	-0.464844
4	0.75	0.75	-1.265719	1.265625

2-jadval

Xulosa

1. Gazlar dinamikasi tenglamalarini yechishda hisoblashlar o'tkazish bosqichlari tahlil etiladi.

2. Gazlar dinamikasi harakat tenglamalarida yopishqoqolik evaziga paydo bo'ladigan "zarbali to'lqinlar" kabi effektlar o'tkaziladi.

3. Gazlar dinamikasi tenglamasi uchun ayirmali sxemalarning tug'unligi.

4. Gazlar dinamikasi tenglamalari sestemasi uchun differensial masala qo'yildi.

5. Gazlar dinamikasi differensial masalasiga mos ayirmali masala qo'yildi.

6. Ayirmali sxemalarning bir jinsligi bir jinsliligi, konservativligi tadqiq etiladi.

7. Gazlar dinamikasi tenglamalarini approksimatsiyalovchi konservativ sxema, uning ichki energiyasini approksimatsiyalamasligi, shu saqbabli ayirmali sxema to'liq konservativ bo'lishi talabi qo'yilashi lozimligini o'eganiladi.

8. Gazlar dinamikasi tenglamalari integratsiya metodi va progonka metodini birgalikda qo'llab yechilishini tadqiq etiladi.

9. Laplas tenglamasi uchun Dirixle masalasini interatsiya va progonka metodi bilan birgalikda qo'llab yechish algoritmi va kompyuter dasturi chiqariladi, sonli hisoblashlar o'tkaziladi.

10. Sonli hisoblash natijalardan ko'rinadiki, masalaning aniq yechimi ko'rinadiki, masalaning aniq yechimi yuqori aniqliklarida topiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Дородницын А.А.Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики. – Труды III. Всесоюзн. матем. съезда, т. III, Изд-во АН СССР, 1958, 447-453.

2. Белоцерковский О.М.Обтекание кругового цилиндра с отошедшей ударной волной.-Докл. АН СССР, 1957, 113, №3, 509-512.

3. Белоцерковский О.М.Обтекание симметричного профиля с отошедшей ударной волной.-Прикл. матем. и механ., 1958, 22, №2, 206-219.

4. Белоцерковский О.М., Булекбаев А, Грудницкий В.Г. Алгоритмы численный метод интегральных соотношений.- Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, №5, 731-759.

5. Белоцерковский О.М., Булекбаев А, Грудницкий В.Г. Алгоритмы численных схем метода интегральных соотношений для расчета смешанных течений газа. –Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, 6, №6, 1064-1082.

6. Белоцерковский О.М., Булекбаев А, Голомазов М.М. и др. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. –М.: ВЦ АН СССР, 1966 (I изд.), 1967 (II изд.).

7. Чушкин П.И.Затупленные тела простой формы в сверхзвуковом потоке газа. – Прикл. матем. и механ., 1960, 24, №5, 927-930.

8. Чушкин П.И.Метод характеристик для пространственных сверхзвуковых течений. – М.: ВЦ АН СССР, 1968.

9. Магомедов К.М., Холодов А.С.О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, 9, №2, 373-386.

10. Численное исследование современных задач газовой динамики (под ред. О.М.Белоцерковского). – М.: Наука, 1974.

11.Харлоу Ф.Х.Численный метод «частиц в ячейках» для задач гидродинамики. В сб.: «Вычисл. методы в гидродинамике». – М.: Мир, 1967, 316-342.

12. Rich M. A. Method for Eularen Fluid Dynamics. Los Alomos Scient. Lab., Rep. LAMS-2826, 1983.

13. Hirt C. W. Huaristic Stability Theory for Finite-Difference Equation, J. Comput. Ph., 1968, 2, №4 339-355.

14. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Нестационарный метод «крупных частиц» для решения задач внешней аэродинамики. М.: ВЦ АН СССР, 1970, препринт.

15. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Нестационарный метод «крупных частиц» для газодинамических расчетов. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, 11, №1, 182-207.

16. Гущин В.А., Щенников В.В.Об одном численном методе решения уравнений Навье – Стокса. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, 14, №2, 512-520.

17. Белоцерковский О.М., Гущин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, 15, №1, 197-207.

18. Белоцерковский О.М., Северинов Л.И. Консервативный метод «потоков» и расчет обтекания тела конечных размеров вязким теплопроводным газом. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1973, 13, №2, 385-397.

9. Белоцерковский О.М., Шифрин Э.Г. Трансзвуковые течения за отошедшей ударной волной. – Ж. вычисл матем. и матем. физ., 1969, 9, №4, 908-931.

20. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Расчет методом «крупных частиц» трансзвуковых «закритических» режимов обтекания. –Ж . вычисл матем. и матем. физ., 1973, 13, №1, 147-171.

21. Яницкий В.Е. Применение стохастического процесса Пуассона для расчета столкновительной релаксации неравновесного газа. –Ж . вычисл матем. и матем. физ., 1973, 13, №2, 505-510.

22.Яницкий В.Е. Применение процессов случайных блужданий для моделирования свободномолекулярного движения газа. –Ж . вычисл матем. и матем. физ., 1974, 14, №1, 259-262.

23. Белоцерковский О.М., Яницкий В.Е. Статический метод «частиц в ячейках» для решения задач динамики разреженного газа. –Ж . вычисл матем. и матем. физ., 1975, 15, №5, 1195-1208, №6, 1553-1567..

24. Нармурадов Ч.Б., Подгаев А.Г. Сходимость спектрально-сеточного метода / Узбекский матема¬тический журнал.-Ташкент, 2003. - №2. - С.64-71.

25. Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Численное решение задачи гидродинамической устойчивости с помощью спектрально-сеточного метода // Инновация- 2003: Тез. докл. Межд. науч. - практ. конф. 13 - 15 мая 2003 - Ташкент, 2003. - С.60-62.

26. Нармурадов Ч.Б. Матричное преобразование в спектрально - сеточном методе // Узбекский журнал «Проблемы информатики и энергетики». - Ташкент, 2003. №4. - С. 9-13.

27. Нармурадов Ч.Б. Об эффективном методе решения задачи гидродинамической устойчивости для двухфазных потоков//Докл. АН РУз. - Ташкент, 2004.№1. - С.19-26.

28. Нармурадов Ч.Б. Об одном эффективном методе решения уравнения Орра - Зоммерфельда // Матема¬тическое моделирование, - Москва, 2005. - № 9(17). - С. 35-42.

29. Нармурадов Ч.Б. Спектр собственных значений для двухфазного течения Пуазейля и пространственная зави¬симость характерных параметров // Техника и технология. - Москва, 2007. - № 5(23). - С.55-57.