**O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI AXBOROT TEXNOLOGIYALAR VA KOMMUNIKASIYALARINI RIVOJLANTIRISH VAZIRLIGI**

**MUHAMMAD AL-XORAZMIY NOMIDAGI AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI URGANCH FILIALI**

**Kompyuter injiniringi fakulteti**

**Tabiiy va umumkasbiy fanlar kafedrasi**

**UDK ---.---**

# **“Matematika 1”** fanining

# **<u>“Chiziqli algebra elementlari”</u>**

bo’limi bo’yicha uslubiy qo’llanma

(Barcha yo’nalishdagi bakalavr ta’lim yo’nalishlari uchun)

**URGANCH – 2019**

Annottasiya

Mazkur qo’llanmada “Chiziqli algebra elementlari” bo’limi va unga bog’liq bo’lgan mavzular batafsil bayon qilingan. Talabaning bilimini tekshirish uchun yetarli miqdorda misollar va test savollari berilgan. Qo’llanma to’rtta bo’limdan iborat bo’lib: nazariya, mustaqil ishlash uchun misoll va masalalar, test savollari hamda nazorat savollaridan iborat. Qo’llanma oliy matematikaning shu bo’limini mustaqil o’rganuvchilar uchun mo’ljallangan.

**Tuzuvchilar:** **f.-m.f-n, dots. Q.A.Mamedov, f.-m.f-n, dots. O.A.Allaberganov, Ph.D, dots, N.B. Jumaniyazov**

**Taqrizchilar:** **SAMDU prof. A. Hasanov, ---.**

**TATU ilmiy-uslubiy kengashida tasdiqlangan**
**“___”_____2019 yil**
**№_ __ Bayonnoma**

**---- bosmaxonasida**
**“______” nusxada**
**chop qilingan**

## Mavzu: Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar va ularning xossalari

### Reja:

1. Texnika oliy o'quv yurtlarida oliy matematika kursining vazifasi. Tabiiy fanlarda matematika fanining ahamiyati.
2. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar va ularni hisoblash.
3. Uchinchi tartibli determinantning minori va algebraik to'ldiruvchisi.
4. Determinantning xossalari.

**Mustaqil o'qib o'rganishga tavsiya etilgan adabiyotlar ro'yhati:**


1. T.Sh. Shodiyev «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O'qituvchi». 1984 y., 5-20 betlar.
2. Yo.U. Soatov. «Oliy matematika» 1-jild. T. «O'qituvchi». 1992. 23-30 betlar.
3. F. Rajabov, A. Nurmatov. «Analitik geometriya va chiziqli algebra» T. «O'qituvchi». 1990 y., 5-7, 8-14 betlar.
4. http:// docs. titli, uz/sim/ html. Oily matematika ,2005 y.


### 1.1. Ikkinchi tartibli determinant.

To'rtta sondan iborat ushbu jadvalni qaraymiz va uni matritsa, aniqrog'i ikkinchi tartibli kvadrat matritsa deb ataymiz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ son (1) matritsaning determinanti yoki ikkinchi tartibli determinant deb ataladi. (1) – matritsa determinanti $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ (2) kabi belgilanadi.

Shunday qilib determinant uchun quyidagiga egamiz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (3)$$

Matritsa bilan determinantni almashtirmaslik lozim. Matritsa sonlardan iborat jadval bo'lib, determinant esa shu jadvaldan (3) da ko'rsatilgan kabi hosil qilingan birgina sondir.

Determinantni tashkil qiladigan sonlar uning elementlari deb ataladi. Ikkinchi tartibli determinant ikkita satr va ikkita ustunga ega. Istalgan elementning belgilanishida birinchi indeks shu element turgan satr tartibini, ikkinchi indeks esa ustun tartibini ko'rsatadi. $a_{11}$ va $a_{12}$ lar birinchi satrni, $a_{21}$ va $a_{22}$ elementlari ikkinchi satrni tashkil etadi. $a_{11}$, $a_{22}$ elementlar joylashgan diagonal determinantining bosh diagonali, $a_{12}$ va $a_{21}$ elementlar joylashgan diagonal esa yordamchi diagonal deb ataladi. Shunday qilib ikkinchi tartibli determinantni hisoblash uchun bosh diagonalda turgan elementlar ko'paytmasidan, yordamchi diagonalda turgan elementlar ko'paytmasini ayirish kerak.

1-misol. $\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 8\cdot 5 - 3\cdot(-1) = 40 + 3 = 43,$

2-misol. $\begin{vmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1.$

<u>2. Uchinchi tartibli determinant.</u>

Uchinchi tartibli kvadrat matritsani, ya`ni 9 ta sondan iborat ushbu jadvalni qaraymiz.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Bu matritsaning uchinchi tartibli determinanti deb quyidagi $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$ songa aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

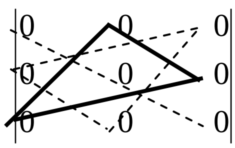
Shunday qilib,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{22}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{5}$$

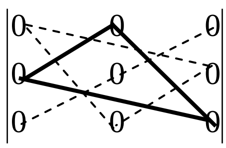
3-chi tartibli determinantni hisoblash usullari:

a) Uchburchak usuli. Uchburchak usulida hisoblash sxemasi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{6}$$



(+)ishora bilan



(-)ishora bilan

Uchinchi tartibli determinantni aniqlagan (hisoblaydigan) son bosh diagonal elementlari ko’paytmasi va har bir bosh uchburchak uchlaridagi elemenetlari ko’paytmasidan tuzilgan uchta son yig’indisidan yordamchi diagonal elementlari ko’paytmasi va har biri yordamchi uchburchak uchlaridagi elementlari ko’paytmasidan tuzilgan uchta son yig’indisining ayirmasiga teng.

b) Sarrius usuli.

$$\Delta = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{7}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

$$\begin{matrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \qquad (8)$$

3-misol.

a) $$\left|\begin{matrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix} = 2\cdot 2\cdot 0 + (-2)\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot 1\cdot 1 - (3\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 2 + 0\cdot 1\cdot(-2)) =$$

$$= 0 - 6 + 3 - 18 - 2 - 0 = -23$$

в)

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot(-2)\cdot 1 - (3\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot(-2)\cdot 0) =$$

$$= 0 + 3 - 6 - 18 - 2 - 0 = -23$$

## 1.2. Determinantning xossalari.

Determinantda mos satr va ustun elementlari o’rnini almashtirishga uni transponirlash deyiladi.

1-xossa. Transponirlash natijasida determinantning qiymati o’zgarmaydi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (9)$$

2-xossa. Determinantda istalgan ikki satr yoki ikki ustunning o’rnini almashtirsak, uning qiymati o’z ishorasini o’zgartiradi, ammo absolyut qiymat o’zgarmaydi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{21} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{23} & a_{31} \end{vmatrix} \qquad (10)$$

*1-natija.* Ikkita satri yoki ustuni bir xil bo’lgan (yoki proporsional) determinantning qiymati nolga teng.

3-xossa. Determinantning satri yoki ustunidagi elementlar umumiy $\lambda$ ko’paytuvchiga ega bo’lsa, $\lambda$ ni determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

*2-natija.* Determinantning biror satri ustuni boshqa satri yoki ustuniga parallel bo’lsa bunday determinantning qiymati nolga teng.

4-xossa. Agar determinantning biror qatorining har bir elementi ikki qo’shiluvchining yig’indisidan iborat bo’lsa, u holda bu determinant ikki determinant yig’indisidan

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (11)$$

iborat bo'ladi.

5-xossa. Agar biror qator elementlariga boshqa parallel qatorning elementlari istalgan ko'paytuvchiga ko'paytirib qo'shilsa, determinant o'zgarmaydi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (12)$$

### 1.3. Algebraik to'ldiruvchilar va minorlar

1-ta`rif. Determinant berilgan elementining minori deb, shu element turgan satr va ustunni bir vaqtda o'chirishdan hosil bo'lgan determinantga aytiladi.

Masalan, ushbu $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ determinant $a_{12}$ turgan satr va ustunni o'chirish natijasida hosil bo'lgan $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ 2-tartibli determinant $a_{12}$ elementning minoridan iborat bo'ladi va $M_{12}$ deb beriladi:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (13)$$

Shunday qilib yuqorida tuzilgan uchinchi tartibli $\Delta$ determinantning har bir $a_{i,j}(i, j = 1, 2, 3)$ elementiga mos minori $M_{i,j}$ bo'lib, ular ikkinchi tartibli va hammasi 9 ta bo'ladi.

Ta`rif. Determinant biror elementning algebraik to'ldiruvchisi deb uning bu determinantda juft yoki toq joy egallaganiga bog'liq ravishda musbat yoki manfiy ishora bilan olingan minoriga aytiladi:

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j} \qquad (14)$$

Masalan, $a_{22}$ elementning algebraik to'ldiruvchisi $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ son bo'ladi, chunki $a_{22}$ juft joyda turibdi, $a_{32}$ element algebraik to'ldiruvchisi $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})$ son bo'ladi, chunki $a_{32}$ toq o'rinda turibdi.

**Nazorat savollari.**

1. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlarni hisoblash formulalarini yozing.
2. Uchinchi tartibli determinantning xossalarini aytib bering?

3. Uchinchi tartibli determinant biror elementining minori deb nimaga aytiladi?



4. Uchinchi tartibli determinant biror elementining algebraik to'ldiruvchisi deb nimaga aytiladi?

## Mavzu: Ikki va uch noma`lumli chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli yordamida yechish va uni tekshirish. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

### Reja:

1. Uchinchi tartibli determinantni yo'l va ustun elementlari bo'yicha yoyish.
2. Ikki noma`lumli chiziqli tenglamalar sistemasi va uning yechimlari.
3. Ikki noma`lumli chiziqli tenglamalar sistemasi uchun Kramer qoidasi.
4. Uch noma`lumli chiziqli tenglamalar sistemasi uchun Kramer qoidasi.
5. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi va uning yechimi.

### Mustaqil o'qib o'rganishga tavsiya etilgan adabiyotlar ro'yhati:


1. T.Sh. Shodiyev «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O'qituvchi». 1984 y., 22-33 betlar.
2. Yo.U. Soatov. «Oliy matematika» 1-jild. T. «O'qituvchi». 1992. 55-60 betlar.
3. F. Rajabov, A. Nurmatov. «Analitik geometriya va chiziqli algebra» T. «O'qituvchi». 1990 y., 7-8, 14-20 betlar.
4. http:// docs. titli, uz/sim/ html. Oily matematika ,2005 y.


## 2.1. Laplas teoremasi

1-teorema (Laplas teoremasi)

Determinant qiymati uning biror satri (yoki ustun) elementlarini bu elementlarning mos algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirilgan yig'indisiga teng .

Isbot. (5)determinantning ikkinchi ustuni uchun teoremaning tasdig'i quyidagicha $\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$ (15) tenglikning to'g'riligidan iborat, ya`ni

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} =$$
$$= a_{12}\left(a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}\right) + a_{22}\left(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}\right) + a_{32}\left(a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}\right) =$$
$$= a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} +$$
$$+ a_{22}(-1)^{2+2}M_{22} + a_{32}(-1)^{3+2}M_{32} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}.$$

4-misol. a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}4\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= 5(4-1) - (4+3) + 4(2+6) = 15 - 7 + 32 = 40.$$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-3) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$$= 2(4-2)-(-3)(8-1)+5(4-1) = 4+21+15 = 40.$$

## 2.2. Ikki noma`lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi.

Aytaylik bizga ushbu ikki noma`lumli chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Sistemaning yechimini topish uchun determinantlar nazariyasidan foydalanamiz. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish deganda, x va y sonlarning shunday to'plamini topish demakki, uni (1) tenglamadagi ayniyatga aylansin. Bu sonlar to'plamini sistemaning yechimi deb ataymiz. Kamida bitta yechimga ega bo'lgan sistema birgalikdagi sistema yoki aniq sistema deb ataladi. Cheksiz ko'p yechimga ega bo'lgan birgalikdagi sistema aniqmas sistema deb ataladi. Bitta ham yechimga ega bo'lmagan sistema birgalikda bo'lmagan sistema deb ataladi. Sistema koeffisiyentlaridan quyidagi determinantlarni tuzamiz va uni Δ bilan belgilaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Unga bosh determinant deyiladi. So'ngra bu determinantda mos ravishda birinchi va ikkinchi ustunlarni ozod hadlar bilan almashtirib, $\Delta_x$, $\Delta_u$ bilan belgilanadigan ushbu yordamchi determinantlarni tuzamiz.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Agar Δ≠0 bo'lsa, (1) – sistemaning yechimini aniqlaydigan

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad (2)$$

(2) formulani hosil qilamiz. Olingan bu qoida Kramer qoidasi deyiladi.

Bu yerda uch hol bo'lishi mumkin:

a) Agar Δ≠0 bo'lsa, (1) sistema birgalikda bo'lib, birgina yechimga ega bo'ladi.

b) Agar Δ=0, lekin $\Delta_x$ va $\Delta_y$ larning kamida bittasi nolga teng bo'lmasa, u holda (1) sistema birgalikda emas, ya`ni bitta ham yechimga ega bo'lmaydi.

v) Agar Δ=0 va $\Delta_{ч} = 0,\ \Delta_{и} = 0$ bo'lsa, (1) – sistema aniqmas, ya`ni cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'ladi.

1-misol.

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$ sistema yechilsin.

Yechish.



$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=7; \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix}5 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=14; \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 4\end{vmatrix}=7$$

(2) – formuladan $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{14}{7}=2; \qquad y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{7}{7}=1.$

2-misol.

$\begin{cases}3x+y=2\\ 6x+2y=3\end{cases}$ tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish.

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 6 & 2\end{vmatrix}=0; \quad \Delta_x=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=1; \quad \Delta_y=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 6 & 3\end{vmatrix}=-3.$$

Sistema birgalikda emas, yechimlari yo'q.

3-misol.

$\begin{cases}3x-y=2\\ 6x-2y=4\end{cases}$ tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish.

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 6 & -2\end{vmatrix}=0; \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=0; \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 6 & 4\end{vmatrix}=0.$$

Sistema aniqmas, cheksiz ko'p yechimlarga ega, ikkinchi tenglamani 2 ga qisqartirsak, sistema ushbu bitta tenglamaga keladi:

$$3x-y=2$$

Noma`lum *x* ga ixtiyoriy qiymatlar berib *y* ning unga mos qiymatlari hosil qilinadi:

*x=0* bo'lsa, u holda *y=-2*

*x=1* bo'lsa, u holda *y=1* va hokazo.

### 2.3. Uch noma`lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini yechish.

Uch noma`lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases} \qquad (3)$$

berilgan bo'lsin. Bu sistemaning yechimini topish uchun quyidagi determinantlarni tuzamiz.

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}; \quad \Delta_x=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}; \quad \Delta_y=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}; \quad \Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}$$

Bu determinantlardan foydalanib (3) – sistemaning yechimlari $\Delta\neq0$ bo'lganda quyidagi Kramer formulalaridan topiladi:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}; \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}; \qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta} \qquad (4)$$

a) Agar $\Delta\neq0$ bo'lsa, sistema bitta yechimga ega bo'ladi.

b) Agar Δ=0, Δ≠0, Δ≠0, Δ≠0 bo’lsa, (3) –sistema yechimga ega emas.



v) Agar Δ=0, Δ=0, Δ=0, Δ=0 (3) sistema cheksiz ko’p yechimga ega bo’ladi.

4-misol.

$$\begin{cases} 2x-3y+z=-5 \\ x+2y-4z=-9 \\ 5x-4y+6z=5 \end{cases}$$

Yechish.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 24+60-4-10-32+18=56;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 24+60-4-10-32+18=56;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & -9 & -4 \\ 5 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -60+60+36-10+80-162=-56;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -9 \\ 5 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 20+135+20+50-72+15=16;$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=-1; \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=2; \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=3.$$

Tekshirish.

$$\begin{aligned} &2\cdot(-1)-3\cdot 2+3=-2-6+3=-5 \\ &-1+2\cdot 2-4\cdot 3=-1+4-12=-9 \\ &5\cdot(-1)-4\cdot 2+6\cdot 3=-5-8+18=5 \end{aligned}$$

Demak, $\{-1;2;3\}$ yechim bo’ladi.

Uch noma`lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasining o’ng tomoni nolga teng bo’lsa, unga bir jinsli sistemasi deb ataladi: bir jinsli sistema doim nol (trivial) yechimga ega, ya`ni (0;0;0) uchlik doim yechim bo’ladi.

Teorema-1. Agar Δ≠0 bo’lsa, u holda bir jinsli sistema yagona $x=y=z=0$ yechimga ega.

Teorema-2. Bir jinsli sistema noldan farqli yechimlarga ega bo’lishi uchun uning koeffisiyentidan tuzilgan determinantning nolga teng bo’lishi zarur va yetarlidir.

**Nazorat savollari.**

1. Kramer qoidasini aytib bering.
2. Chiziqli tenglamalar sistemasi qaysi holda birgina yechimga ega? Ikkita va uchta tenglamalar sistemasi uchun buni geometrik nuqtai nazardan qanday talqin etish mumkin?

3. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning boshqa yana qanday usullarini bilasiz?
4. Laplas teoremasini tushuntirib bering.

## Mavzu. Matritsalar va ular yordamida chiziqli tenglamalar sistemasini yechish

*Reja:*

1. Matritsalar va ular ustida amallar.
2. Teskari matritsa.
3. Matritsa tushunchasi yordamida sistemani yechish.

**Mustaqil o'qib o'rganishga tavsiya etilgan adabiyotlar ro'yhati:**


1. T.Sh. Shodiyev. «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O'qituvchi» nashr. 1984 yil. 30-36 betlar.
2. Yo.U. Soatov. «Oliy matematika» 1-j. T. «O'qituvchi». 1992 yil. 64-73 betlar.
3. F. Rajabov, A. Nurmatov. «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O'qituvchi». 1990 yil. 35-40 betlar.
4. http:// docs. titli, uz/sim/ html. Oily matematika ,2005 y.


### 3.1. Matritsalar va ular ustida amallar

m ta satrli va n ta ustunli to'g'ri to'rtburchak shaklida berilgan m·n ta sonlardan tuzilgan ushbu ifoda m·n o'lchovli matritsa deb ataladi. Matritsani tashkil qilgan sonlar uning elementlari deyiladi va $a_{ij}$ deb belgilanadi, bunda $i=\overline{I,m},\ J=\overline{I,n}$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}...a_{1}n \\ a_{21} & a_{22}...a_{2}n \\ \vdots & \vdots\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matritsalar lotin alfavitidagi bosh harflar bilan belgilanadi, ba`zida $(a_{ij}),\ \|a_{ij}\|,\ (i=\overline{I,m},\ \overline{I,n})$ ko'rinishlarda ham belgilanadi.

n=1 bo'lganda ustun matritsa deb ataluvchi

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

matritsaga, m=1 bo'lganda yo'l (satr) matritsa deb ataluvchi $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}...a_{1n} \end{pmatrix}$ matritsaga ega bo'lamiz.

m=n bo'lganda hosil bo'lgan matritritsa kvadrat matritsa deyiladi:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}...a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}...a_{2m} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix}$$

Kvadrat matritsaning elementlaridan tuzilgan determinantni $\det A,\ |A|$ yoki $\Delta_A$ deb belgilanadi. Agar $\det A=0$ bo'lsa, u holda A matritsa xos yoki maxsus matritsa, $\det A\neq 0$ bo'lsa xosmas yoki maxsusmas matritsa deyiladi. Kvadrat matritsani $a_{11}\ a_{22}...,a_{nn}$ elementlari joylashgan diagonali bosh diagonal, $a_{1n},\ a_{2n-1},...,a_{n1}$ diagonali esa yordamchi diagonal deyiladi.

Bosh diagonali 1 lardan, qolgan elementlari nollardan tuzilgan matritsani birlik matritsa deyiladi va E bilan belgilanadi:

$$E=\begin{pmatrix} 1\ 0...0 \\ 0\ 1...0 \\ \vdots\ \vdots\ \vdots \\ 0\ 0...1 \end{pmatrix}$$

Barcha elementlari nollardan iborat matritsani nol matritsa deyiladi va Q bilan belgilanadi:

$$Q=\begin{pmatrix} 0\ 0...0 \\ 0\ 0...0 \\ \vdots\ \vdots\ \vdots \\ 0\ 0...0 \end{pmatrix}$$

Endi matritsalar ustida amallar bilan tanishamiz.

1. Matritsalarni qo'shish va ayrish.

Ikkita bir xil o'lchovli matritsalarning mos elementlari yig'indilari (ayirmalari)dan tuzilgan uchinchi matritsani berilgan matritsalarning yig'indisi (ayirmasi) deyiladi:

$$A=(a_{ij}),\ \ B=(b_{ij}),\ C=(c_{ij}),$$

$$i=\overline{I,m},\ J=\overline{I,n}$$

va $A\pm B=C\Leftrightarrow a_{ij}\pm b_{ij}=c_{ij}$

Misol; $A=\begin{pmatrix}12\\34\end{pmatrix} va B=\begin{pmatrix}2-1\\3\ \ 1\end{pmatrix}$

A+B=?

$$A+B=\begin{pmatrix}12\\34\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2-1\\3\ \ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\ \ 2+(-1)\\3+3\ \ 4+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31\\65\end{pmatrix}\quad \text{j;}\ \begin{pmatrix}31\\65\end{pmatrix}$$

2. Matritsani songa ko'paytirish.

A matritsa bilan λ sonning ko'paytmasi λA deb A matritsaning har bir elementini λ soniga ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan matritsaga aytiladi. Misol:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -2\\ 5 & 6 & 3\end{pmatrix}$$

$$5A=5\cdot\begin{pmatrix}3 & 4 & -2\\ 5 & 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot3 & 5\cdot4 & 5\cdot(-2)\\ 5\cdot5 & 5\cdot6 & 5\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 20 & -10\\ 25 & 30 & 15\end{pmatrix}$$

Matritsalarni qo'shish va songa ko'paytirishning ushbu xossalari to'g'riligini tekshirish uncha qiyinchilik tug'dirmaydi:

1) $A+B=B+A$ 4) $\mu\cdot(\lambda A)=\lambda(\mu A)$

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ 5) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

3) $A+Q=A$ 6) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

Bunda A, B, S – matritsalar, $\lambda,\mu$ - sonlar ,Q – nol matritsa.

3. Matritsalarni skalyar ko'paytirish.

mxk o'lchovli A matritsaning kxn o'lchovli B matritsa bilan ko'paytmasi deb, mxn o'lchovli shunday C matritsaga aytiladiki, uning har bir $C_{ij}$ elementi A matritsa *i*-satri elementlarini B matritsa *j*-ustunining mos elementlariga ko'paytmalari yig'indisiga teng, ya`ni:

$$C_{ij}=a_{i1}b_{ij}+a_{i2}b_{2i}+...+a_{ik}b_{kj}$$

C=A·B deb ko'paytmasi belgilanadi. Ta`rifdan ikki matritsaning ko'paytmasi mavjud bo'lishi uchun birinchi matritsaning ustunlari soni ikkinchi matritsaning satrlari soniga teng bo'lishi kerakligi kelib chiqadi. Shuningdek, A·B mavjud bo'lganda B·A umuman mavjud bo'lmasligi mumkinligini ko'rish mumkin. Demak, umuman olganda A·B≠B· A ekanligini ko'ramiz. Misol:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot4-3\cdot2 & -2\cdot3-3\cdot6\\ 5\cdot4+1\cdot2 & -5\cdot3+1\cdot6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -24\\ 22 & -9\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -15\\ 34 & 0\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B\neq B\cdot A.$$

Matritsalar ko'paytmasi uchun ushbu xossalarning o'rinliligini ko'rish mumkin:

1) $(A\cdot B)C=A(B\cdot C)$ 4) $A\cdot E=EA=A$

2) $(A+B)C=AC+BC$ 5) $A\cdot Q=QA=Q$

3) $(\lambda A)\cdot B=\lambda(AB)$ 6) $\det(AB)=\det A\cdot\det B.$

Bunda A, B, C – matritsalar, *Q* – nol matritsa, *E*-birlik matritsa, λ- ixtiyoriy son.

## 3.2. Teskari matritsa.
## Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa usulida yechish.

1. A – kvadrat matritsa berilgan bo'lsin:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}...a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix}$$

A matritsa bilan ko'paytmasi birlik matritsadan iborat bo'lgan matritsani A matritsaga teskari matritsa deyiladi va $A^{-1}$ deb belgilanadi, demak

$$A^{-1}\cdot A=E$$

Har qanday xosmas, ya`ni $\det A\neq 0$, bo'lsa matritsaga teskari matritsa mavjud bo'lib, uning ko'rinishi quyidagicha bo'lishini ko'rsatish mumkin:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Bunda $\Delta=\det A$, $A_{ij}$ – algebraik to'ldiruvchilar.

Bu tasdiqning to'g'riligini bevosita $A^{-1}\cdot A=E$ tenglik o'rinli ekanligini ko'rsatish orqali isbotlash mumkin.

Teskari matritsani ushbu xossalarini mavjudligini aytib o'tamiz:

1. $\det A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}$
2. $A^{-1}A=AA^{-1}=E$
3. $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

**2.** Endi chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa tushunchasi yordamida qanday yechish mumkinligini ko'rsatamiz.

n ta noma`lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ ....... \quad ......... \quad .... \quad .......... \quad .... \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Ushbu belgilarni keltiramiz:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}...a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

U holda berilgan sistemani bu matritsalar yordamida quyidagicha yozish mumkin:

$$AX=B \qquad (3)$$

Agar A matritsa xosmas, ya`ni $\det A\neq 0$ bo'lsa $A^{-1}$ teskari matritsa mavjud bo'lib, quyidagi tengliklarning to'g'riligini ko'rish mumkin:

$$
\begin{aligned}
&A^{-1}(AX) = A^{-1}B \\
&(A^{-1}A)X = A^{-1}B \\
&EX = A^{-1}B \\
&X = A^{-1}B
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Shunday qilib, tenglamalar sistemasini yechish uchun A matritsaga teskari matritsani topib uni ozod xaddan tuzilgan B ustun matritsaga ko'paytirish yetarli ekan.

Sistemani yechishning bunday usulini matritsa usuli deyiladi.

Misol: $\begin{cases} x-2y+z=5 \\ 2x-z=0 \\ -2x+y+z=-1 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish. Matritsalarni tuzib olamiz:

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
$$

$$
\Delta \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,
$$

demak ,teskari matritsa mavjud ekan. Uni tuzish uchun barcha algebraik to'ldiruvchilarni topib olamiz.

$$
A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3
$$

$$
A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0
$$

$$
A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3,
$$

$$
A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3
$$

$$
A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4.
$$

Demak,

$$
A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}
$$

(4) formuladan foydalanib noma`lumlarni topamiz:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Javob: *x=1, y=-1, z=2.*

**Nazorat savollari.**

1. Ikkita matritsani qanday qo'shamiz?
2. Matritsani songa ko'paytirish qanday amalga oshiriladi?
3. Birlik matritsa deb qanday matritsaga aytiladi.
4. Matritsalarni o'zaro qanday ko'paytiriladi?
5. Teskari matritsa deb nimaga aytiladi?
6. Sistemani matritsa yordamida yechish uchun nimalar qilinadi?

**Mustaqil ish**

1-Vazifa

Chiziqli algebra.

Tenglamalar sistemasini Kramer va matrisalar usullarida yeching.

1. $\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 3x+2y+z=10 \\ 4x+3y-2z=4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=20 \\ 3x-2y-5z=6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=-9 \\ x_1-x_2+3x_3=2 \\ 3x_1-6x_2-x_3=25 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0 \\ 3x_1+2x_2-5x_3=1 \\ x_1+3x_2-2x_3=4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3=1 \\ x_1-2x_2+2x_3=-1 \\ 7x_1+x_2-4x_3=5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x-3y+2z=2 \\ 4x-5y+2z=1 \\ 5x-6y+4z=3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x+2y-4z=8 \\ 2x+4y-5z=11 \\ 4x-3y+2z=1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x+y+z=-2 \\ 5x+y+3z=2 \\ 2x+y+2z=5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2+2x_3=-5 \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x-y+4z=15 \\ 3x-y+z=8 \\ -2x+y+z=0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x-3y+z=7 \\ x+y-z=2 \\ x+2y-3z=-1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3y+3z=1 \\ -5x+3y+6z=2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x-y-6z=4 \\ 5x+7y+11z=-7 \\ 4x+3y+8z=4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+y+z=-2 \\ x-y+z=6 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 4x+y+2z=8 \\ 3x-2y-3z=-4 \\ 5x+4y+5z=18 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 4x+y+2z=6 \\ 2x-5y+2z=2 \\ 3x+4y+6z=0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=2 \\ x_1+5x_2-4x_3=-5 \\ 4x_1+x_2-3x_3=-4 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1-4x_2+3x_3=1 \\ x_1+2x_2+4x_3=3 \\ 3x_1-x_2+5x_3=2 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=5 \\ 2x_1-x_2-x_3=1 \\ x_1+3x_2+4x_3=6 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=2 \\ 3x_1+2x_2+2x_3=-2 \\ x_1-2x_2+x_3=1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=-7 \\ x_1+3x_2-5x_3=-4 \\ -x_1+4x_2+x_3=7 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=-11 \\ 3x_1-2x_2+x_3=-13 \\ 4x_1+3x_2+2x_3=-13 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x+y+z=-2 \\ 2x-3y-z=-9 \\ x+y-3z=8 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3=-2 \\ x_1+2x_2+4x_3=3 \\ 3x_1-3x_2-x_3=10 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2 \\ 2x_1+5x_2+6x_3=7 \\ x_1-2x_2+x_3=6 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x+2y+3z=-8 \\ 2x+4y-5z=17 \\ 3x+y-2z=4 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 3x+2y+z=-6 \\ 2x+5y+3z=-11 \\ 3x+4y-2z=3 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x-y+2z=2 \\ 2x-2y-3z=-7 \\ 5x+5y-z=-11 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3x_1-x_2+4x_3=12 \\ x_1+3x_2-5x_3=-12 \\ 2x_1-x_2+3x_3=9 \end{cases}$

**Mavzu: Tekislikda va fazoda Dekart koordinatalar sistemasi. Skalyar va vektorlar kattaliklar. Kollinear va komplanar vektorlar. Ba`zis vektorlar**

**Reja:**

1. Skalyar va vektor kattaliklar haqida tushuncha.
2. Vektorlar ustida chiziqli amallar.
3. Kollinear va komplanar vektorlar
4. Ba`zis vektorlar.

**Mustaqil o'qib o'rganishga tavsiya etilgan adabiyotlar ro'yhati:**

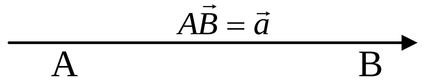

1. T.Sh. Shodiyev «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O'qituvchi». 1984 y., 37-51 betlar.
2. Yo.U. Soatov. «Oliy matematika» 1-jild. T. «O'qituvchi». 1992. 5-13 betlar.
3. F. Rajabov, A. Nurmatov. «Analitik geometriya va chiziqli algebra» T. «O'qituvchi». 1990 y., 41-50, 55-58 betlar.

1. 4. http:// docs. titli, uz/sim/ html. Oily matematika ,2005 y.


## 4.1. Skalyar va vektor kattaliklar haqida tushuncha.

Skalyar miqdor deb faqat son qiymati bilan aniqlanadigan kattaliklarga aytiladi. Masalan: uzunlik, vaqt, hajm, yuza va boshqalar. Shunday miqdorlar ham borki, ular o'zlarining son qiymatlari bilan to'la aniqlanmaydi; ularni to'liq aniqlash uchun son qiymatlari bilan bir qatorda yo'nalishlari ham berilgan bo'lishi kerak. Masalan, harakat, kuch, tezlik, tezlanish kabi miqdorlar. To'g'ri chiziqda oddiy kesma bilan bir qatorda yo'nalgan kesma, ya`ni bir uchi uning boshi, ikkinchi uchi uning oxiri hisoblangan kesmaga qaraladi. Bunday kesma vektor deyiladi. Oddiy kesmada esa aniqlovchi nuqtalar teng huquqli bo'lib tartibining ahamiyati yo'q.

Boshlang'ich nuqtasi A va oxirgi nuqtasi B bo'lgan vektor $\vec{AB}$ yoki qisqacha $\vec{a}$ shaklida belgilanadi. Shunday qilib, vektor miqdor geometrik usulda ma`lum uzunlikdagi va aniq yo'nalishdagi kesma yordamida tasvirlanadi:

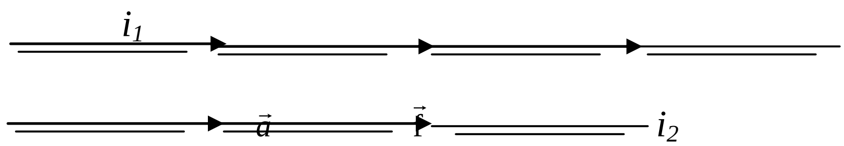



Vektorning uzunligi uning moduli deb ataladi va $|\vec{AB}|=|\vec{a}|$ ko'rinishida belgilanadi. Moduli nolga teng vektor nol vektor, moduli birga teng bo'lgan vektor birlik vektor deyiladi. Nol vektorining yo'nalishi aniqlanmagan bo'ladi.

<u>1-ta`rif.</u> Noldan farqli vektorlar bir to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotsa, bunday vektorlarga kollinear vektorlar deyiladi.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa $\vec{a}\,||\,\vec{b}$ ko'rinishda belgilanadi $\vec{a}$

$\vec{b}$ $\vec{c}$



Uzunliklari teng, kollinear va bir xil yo'nalishli ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar teng vektorlar deyiladi va $\vec{a}=\vec{b}$ kabi belgilanadi.

<u>2-ta`rif.</u> Bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotgan vektorlarga komplanar vektorlar deb ataladi.

## 4.2. Vektorlar ustida amallar.

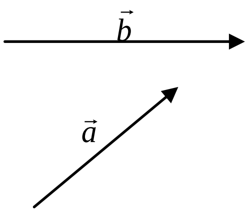
1. Vektorlarni qo'shish.

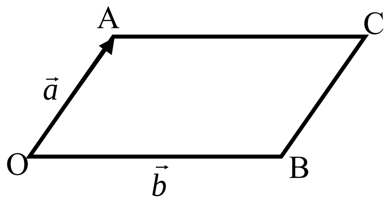
<u>3-ta`rif.</u> Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorning yig'indisi deb istalgan *A* nuqtadan $\vec{a}$ vektorni qo'yib, uning oxirida *B* ga $\vec{b}$ vektorni qo'yganda boshi $\vec{a}$ vektorning boshi *A* da, oxiri $\vec{b}$ vektorning oxiri *C* nuqtada bo'lgan $A\vec{C}$ vektorga aytiladi va $\vec{a}+\vec{b}=A\vec{C}$ bilan belgilanadi.

Vektorlarni qo'shish ta`rifidan istalgan *A, B, C* nuqtalar uchun $A\vec{B}+B\vec{C}=A\vec{C}$ (1) tenglik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

(1) – tenglik vektorlarni qo'shishning uchburchak qoidasi deyiladi.

Undan tashqari vektorlarni parallelogramm qoidasiga asosan ham qo'shish mumkin. Buning uchun $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'z-o'ziga parallel ravishda bitta boshga ko'chiriladi va ularga parallelogramm yasaladi. Parallelogrammning katta diagonali shu ikki vektorning yig'indisidan, kichik diagonali esa ularning ayirmasidan iborat.




$$O\vec{C}=\vec{a}+\vec{b}=O\vec{A}+O\vec{B}$$

$$B\vec{A}=\vec{a}-\vec{b}=O\vec{A}-O\vec{B}$$

Vektorlarni qo'shishning xossalari.

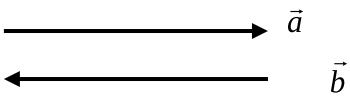
a) Qo'shishning gruppalash (assosiativlik) xossasi.

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$

b) Qo'shishning o'rin almashtirish (kommutativlik) xossasi.

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

Agar $\vec{a}+\vec{b}=0$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga o'zaro qarama-qarshi vektorlar deyiladi. Qarama-qarshi vektorlar modul jihatidan teng, yo'nalish jihatidan esa qarama-qarshi bo'ladi.




$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ $\quad\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektorni

$\vec{a}\quad\vec{b}\quad -\vec{a}$ bilan belgilaymiz.

2. Vektorni songa ko'paytirish.

$\vec{a} \neq 0$ vektor va λ son berilgan bo'lsin, bu yerda λ∈ N.

4-ta`rif. $\vec{a}$ vektorning λ soniga ko'paytmasi deb shunday $\vec{b}$ vektoriga aytiladiki, λ>0 bo'lganda $\vec{b}$ ning yo'nalishi $\vec{a}$ ning yo'nalishi bilan bir xil, λ<0 bo'lsa, $\vec{b}$ ning yo'nalishi teskari bo'lib, $\vec{b}$ vektorning uzunligi esa $\vec{a}$ vektorning uzunligi bilan λ son moduli ko'paytmasiga teng va $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ shaklida belgilanadi.

Ta`rifdan ushbu xulosalar kelib chiqadi:

a) Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$;

b) Ixtiyoriy λ∈ R son uchun $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda a$

v) Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun $1 \cdot \vec{a} = \vec{a},\ -1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}.$

g) $\vec{a}$ va $\lambda \cdot \vec{a}$ vektorlar o'zaro kolleneardir.

Vektorni songa ko'paytirish quyidagi xossalarga ega:

a) $a(\beta\vec{a}) = (a\beta)\vec{a}$ (gruppalash qonuni);

b) $a(\vec{a} + \vec{b}) = a\vec{a} + a\vec{b}$ (vektorlarni qo'shishga nisbatan taqsimot qonuni)

v) $(a + \beta)\vec{a} = a\vec{a} + \beta\vec{a}$ (skalyarni qo'shishga nisbatan taqsimot qonuni).

1-misol. *ABS* uchburchak berilgan. O nuqta uchburchakning og'irlik markazi (ya`ni uchburchak medianalarining kesishish nuqtasi) bo'lsa, $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 0$ ekanini isbotlang.

Isbot.

Tomonlari $\vec{OA}$ va $\vec{OB}$ vektorlardan iborat *AOBE* parallelogramm yasaymiz. Bu parallelogrammdan $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OE}$ .

O nuqta uchburchakning og'irlik markazi bo'lgani uchun $\vec{OД} = (1/3)\vec{CД}$, chizmadan: $(\vec{OC} = -2\vec{OД},\ \vec{OД} = \vec{ДE})\quad \vec{OC} = \vec{EO},\ \ \vec{OC} = -(\vec{OA} + \vec{OB})$ bundan

## 4.3. Chiziqli kombinatsiya. Ba`zis.

Bizga $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3,...,\vec{a}_k$ vektorlar $\lambda_1, \lambda_2,...,\lambda_k$ haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin.

*Ta`rif.* $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + ... + \lambda_k\vec{a}_k$ ifoda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3,...,\vec{a}_k$ vektorlarning chiziqli kombinatsiya deyiladi.

Agar $\vec{a}$ vektor $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3,...,\vec{a}_k$ koeffisiyenti chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalangan bo'lsa, $\vec{a}$ vektor shu vektorlar bo'yicha yoyilgan deyiladi, ya`ni quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + ... + \lambda_k\vec{a}_k \qquad (5)$$

Agar kamida bittasi noldan farqli $\lambda_1, \lambda_2,...,\lambda_k$ sonlar ma`lum tartibda tanlab olinganda

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + ... + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{0} \qquad (6)$$

tenglik bajarilsa, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3,...,\vec{a}_k$ vektorlar chiziqli bog'liq deyiladi. Agar (6) munosabat faqat $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$da o'rinli bo'lsa, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3...$ vektorlar chiziqli bog'lanmagan deyiladi yoki chiziqli erkli deyiladi. Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa ular chiziqli bog'liq bo'ladi. Uchta vektor chiziqli bog'liq bo'lishi uchun ularning komplanar bo'lishi zarur va yetarlidir.

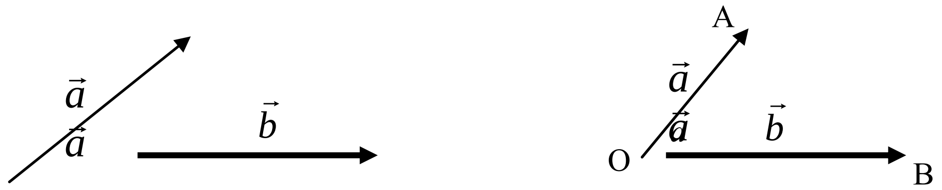
Ma`lum tartibda olingan $\vec{e}_1, \vec{e}_2,....,\vec{e}_k$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo'lib, boshqa har qanday vektorni $\vec{e}_1, \vec{e}_2,....,\vec{e}_k$ lar orqali chiziqli ifodalansa bu vektorlar sistemasi bazis deyiladi va $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2,....,\vec{e}_k\}$ ko'rinishda belgilanadi. Agar bazisning har bir vektori birlik vektor bo'lib, ularning har ikkitasi o'zaro perpendikulyar bo'lsa, bunday bazis ortonormallangan bazis deyiladi. Bazis tashkil etuvchi vektorlar soni qaralayotgan fazoning o'lchovi deyiladi. Istalgan $\vec{a}$ vektorni berilgan $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2,....,\vec{e}_k\}$ bazis vektorlar bo'yicha yoyish mumkin:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \qquad (7)$$

(7) yoyilmadagi $a_1, a_2\ a_3$ sonlar $\vec{a}$ vektorning $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ ortonormal bazisiga nisbatan koordinatalari deyiladi. Bu qisqacha $\vec{a} = \{a_1, a_2,\ a_3\}$ ko'rinishida belgilanadi.

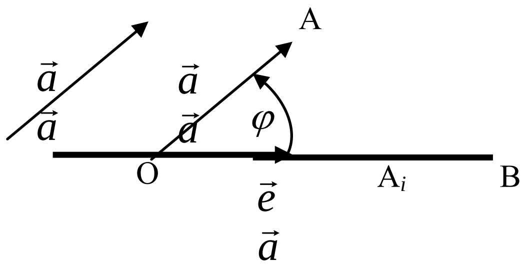
### 4.4. Vektorlar orasidagi burchak. Vektorlarning o'qdagi proyeksiyasi.

Ikki vektor hamda vektor va o'q orasidagi burchak tushunchalarini kiritamiz. Aytaylik $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Bu vektorlar boshini biror O nuqtaga joylashtiramiz, boshqacha aytganda $O\vec{A} = \vec{a}$ va $O\vec{B} = \vec{b}$ vektorlarni yasaymiz.




U holda $\Delta AOB$ ning ichki $AOB$ burchagi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak deyiladi hamda $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$ ko'rinishda yoki $\alpha, \beta, \gamma, ...$ harflar bilan belgilanadi. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak deb, vektorlardan birini soat strelkasiga teskari yo'nalishda ikkinchi vektor bilan ustma-ust tushguncha aylantirishdan hosil bo'lgan burchaklarning kichigiga aytiladi. Vektorlar orasidagi burchak, $0^0$ dan $180^0$ gacha oraliqda bo'ladi. Bundan ko'rinadiki bir xil yo'nalishdagi kollinear vektorlar orasidagi burchak $0^0$ga, qarama-qarshi yo'nalishdagi kollinear vektorlar orasidagi burchak esa $180^0$ ga teng bo'ladi. Agar vektorlar orasidagi burchak $90^0$ ga teng bo'lsa, ular perpendikulyar yoki ortogonal vektorlar deyiladi va $\vec{a} \perp \vec{b}$ kabi belgilanadi.

Aytaylik, 1 o'q va uning birlik vektori $\vec{e}$ berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy $\vec{a} \neq 0$ vektorning birlik vektori $\vec{a}$ quyidagicha aniqlanadi: $\alpha_0 = \vec{\alpha}/|\vec{\alpha}|$. $\vec{\alpha} \neq 0$ tekislikdagi ixtiyoriy vektor bo'lsin. $\vec{\alpha}$ vektor bilan 1 o'q orasidagi burchak deganda, 1 o'qning birlik vektori $\vec{e}$ bilan $\vec{\alpha}$ vektor orasidagi burchak tushuniladi. $\vec{\alpha}$ vektor 1 o'q bilan $\varphi$ burchak tashkil qilsin.



*Ta`rif.* Vektorlarning o'qdagi ortogonal proyeksiyasi deb vektor uzunligini shu vektor $\rightarrow$ bilan o'q orasidagi burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng songa aytiladi.

$\vec{\alpha}$ vektorning 1 o'qdagi proyeksiyasi $\Pi p_i \vec{a}$ ko'rinishda belgilanadi. Ta`rifdan:

$$\Pi p_e \vec{a} = |\vec{a}| \cos\varphi \qquad (2)$$

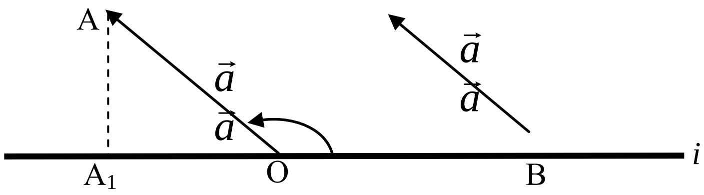
$\vec{\alpha}$ vektorni bu o'qdagi ortogonal proyeksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$OA_1 = \Pi P_i \vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \cos\varphi = OA_i$$

Bu yerda $\varphi = (\vec{e}, \vec{\alpha}), A_1$ nuqta $A$ nuqtaning 1 to'g'ri chiziqdagi proyeksiyasi.

Agar $\vec{\alpha}$ va $\vec{e}$ vektorlar orasidagi burchak o'tmas bo'lsa

$$\Pi p_\ell \vec{\alpha} = -|\vec{\alpha}| \cos(\angle BOA) = -|\vec{\alpha}| \cos(\angle A\, OA_1) = -OA_1 \qquad (3)$$




Agar $\vec{\alpha} \hat{\ } \vec{t} = 90^0$ bo'lsa $(\vec{a} \perp \vec{e})$, $\Pi p_i \vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \cos 90^0 = 0.$ Ixtiyoriy $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar uchun

$$\Pi p_i (\vec{b} + \vec{c}) = \Pi p_i \vec{b} + \Pi p_i \vec{c} \qquad (4)$$

## 4.5. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarni qo'shish va ayrish.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\mathrm{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ bazisga nisbatan quyidagi koordinatalarga ega bo'lsin: $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3;$

$\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3.$

1) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni qo'shishda (ayirishda) ularning mos koordinatalari qo'shiladi (ayriladi):

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) + (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\vec{e}_3$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) - (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) = (a_1 - b_1)\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\vec{e}_2 + (a_3 - b_3)\vec{e}_3$$

2) Vektorni songa ko'paytirishda uning barcha koordinatalari shu songa ko'paytiriladi.

$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ bo'lsin. U holda $\lambda\vec{a} = \lambda(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) =$ $= (\lambda a_1)\vec{e}_1 + (\lambda a_2)\vec{e}_2 + (\lambda a_3)\vec{e}_3$ ga ega bo'lamiz.

2-misol. $\vec{a} = \{3;-2;1\};$ $\vec{b} = \{0;3;-2\}$ $\vec{c} = \{1;0;5\}$ bo'lsa a) $\vec{a} + \vec{b},$ b) $\vec{a} + \vec{c},$ s) $5\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$ vektorlarning koordinatalarini aniqlanadi.

a) $\vec{a} + \vec{b} = \{3 + 0;\ -2 + 3;\ 1 - 2\} = \{3;\ 1;\ -1\}.$

b) $\vec{a} + \vec{c} = \{3 - 1;\ 2 - 0;\ 1 - 5\} = \{2;\ -2;\ -4\}.$

s) $5\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} = \{15 + 0 - 3;\ -10 + 6 - 0;\ 5 - 4 - 15\} = \{12;\ -4;\ -14\}.$

**Nazorat savollari.**

1. Qanday vektorlar kollinear, komplanar, teng deb ataladi?
2. Vektorning moduli nima?
3. Vektorlar ustidagi qaysi amallar chiziqli amallar deb ataladi.
4. Qanday vektorga chiziqli bog’liq va qanday vektorlar chiziqli erkli deb ataladi?
5. Fazoning bazisi va o’lchami nima?
6. Vektorning o’qdagi tashkil etuvchisi nima?
7. Vektorning o’qqa proyeksiyasi nima?
8. Vektorlar ustida chiziqli amallarga ularning koordinatalari ustida shunday amallar mos kelishini isbotlab bering.

## Mavzu. Vektorlarning ko’paytmalari

*Reja:*

1. Vektorlarning skalyar ko’paytmasi.
2. Vektorlarning vektor ko’paytmasi va uning xossalari.
3. Uchburchakni yuzi.

**Mustaqil o’qib o’rganishga tavsiya etilgan adabiyotlar ro’yhati:**


1. T.Sh. Shodiyev. «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O’qituvchi» nash. 1984 yil. 52-57 betlar.
2. Yo.U. Soatov. «Oliy matematika» 1-j. T. «O’qituvchi». 1992 yil. 30-39 betlar.
3. F. Rajabov, A. Nurmatov. «Analitik geometriya va chiziqli algebra». «O’qituvchi». 1990 yil. 59-61 betlar
4. http:// docs. titli, uz/sim/ html. Oily matematika ,2005 y.


### 5.1. Vektorlarning skalyar ko’paytmasi

<u>*Ta`rif:*</u> Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusining ko’paytmasidan hosil bo’lgan son shu vektorlarning skalyar ko’paytmasi deyiladi.

Skalyar ko’paytma $\vec{a}*\vec{b}$ ko’rinishda belgilanadi:

Demak, $\vec{a}*\vec{b}=|\vec{a}|*|\vec{b}|*\cos\varphi,\ \varphi=\vec{a}\hat{\ }\vec{b}$ (8)

(8) formula fizikada o’zgarmas $\vec{F}$ kuchning boshlang’ich B nuqtadan C nuqtagacha to’g’ri chiziqli harakati davomida bajargan ishi $A=|\vec{F}|*|\vec{BC}|*\cos\varphi$ ni ifodalaydi.

<u>3-misol.</u> $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3$ hamda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak $\varphi 135^0$ ga teng bo’lsa, $\vec{a}*\vec{b}$ skalyar ko’paytma topilsin.

<u>Yechish.</u>

$$\vec{a}*\vec{b}=|\vec{a}|*|\vec{b}|*\cos\varphi=2*3*\cos135^0=6*\cos(90^0+45^0)=-6*\sin45^0=-6*\sqrt{2}/2=-3\sqrt{2}.$$

## Xossalari

1. $\vec{a}*\vec{b}=\vec{b}*\vec{a}$ (9)
2. $(k\vec{a})\vec{b}=k(\vec{a}*\vec{b})$ (10)
3. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}*\vec{b}+\vec{a}*\vec{c}$ (11)
4. $\vec{a}*\vec{a}=|\vec{a}|^2$ (12)
5. Ortonormallangan $\mathrm{E}=\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ bazis uchun

$$\vec{e}_i\,\vec{e}_j=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j\end{cases}\quad i,j=\overline{1,2,3}.$$

Teorema. Nol bo'lmagan ikkita vektorning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, bu vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'ladi va aksincha.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar ortonormallangan $\mathrm{E}=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ bazisda $\vec{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$ va $\vec{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$ vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo'lsin.

U holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}, a_y\cdot\vec{j}, a_z\cdot\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\cdot\vec{i}, b_y\cdot\vec{j}, b_z\cdot\vec{k}$, yoyilmalarga ega bo'ladi.

Koordinatalari bilan berilgan ikki vektorning skalyar ko'paytmasi bu vektorlar mos koordinatalarri ko'paytmalarining yig'indisiga teng, ya`ni

$$\vec{a}*\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \qquad \vec{a}*\vec{a}=a_xa_x+a_ya_y+a_za_z, \qquad \vec{a}^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2 \qquad (12)$$

Ma`lumki,

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{\vec{a}_x^2+\vec{a}_y^2+\vec{a}_z^2} \qquad (13)$$

Demak, koordinatalari bilan berilgan *a* vektorning uzunligi uning koordinatalari kvadratlarining yig'indisidan olingan arifmetik kvadrat ildizga teng.

4-misol. Koordinatalari bilan berilgan $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi hamda uzunliklari topilsin.

$$\vec{a}*\vec{b}=2*3-3*1+1*(-2)=6-3-2=1.$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14},\quad |\vec{b}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}.$$

Agar vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo'lsa, skalyar ko'paytmadan foydalanib, vektorlar orasidagi burchakni, vektorlarning o'qidagi proyeksiyalarni hisoblash mumkin.

5-misol.

Berilgan $\vec{a}=\{1;3;-2\}$ va $\vec{b}=\{3;1;3\}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

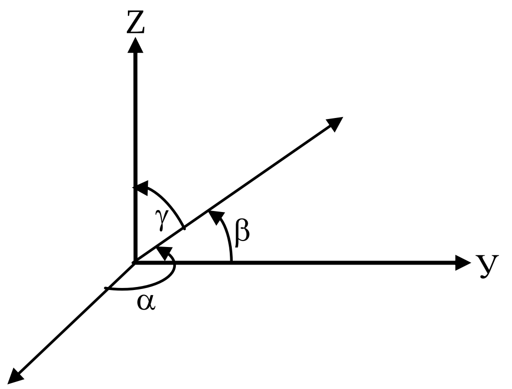
Yechish.

$$\cos\varphi=\frac{1*3+3*1-2*3}{\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}*\sqrt{3^2+1^2+3^2}}=\frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{19}}=0$$

$$\varphi=\arccos 0=90^0.$$

Odatda vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan α, β, γ burchaklarning kosinuslari uning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi.

$\vec{a}=\{x,y,z\}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari uning koordinatalari orqali quyidagicha aniqlanadi.




$$Cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$Cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$Cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Birlik vektorning koordinatalari uning yo'naltiruvchi kosinuslaridan iborat, ya`ni agar $\left|\vec{a}^0\right| = 1$ bo'lsa, $\vec{a}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

bo'ladi.

## 5.2. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi va uning xossalari. Uchburchakning yuzi.

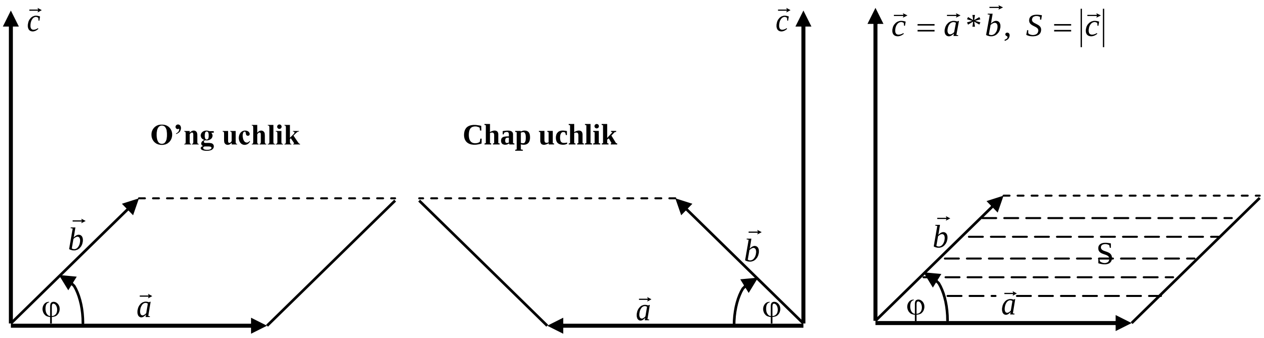
<u>1-Ta`rif.</u> Agar uchta nokomplanlar $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorni umumiy boshlang'ich nuqtaga keltirgandan so'ng $\vec{c}$ vektorlarning oxiridan (uchidan) qaraganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga qarab π dan kichik burchakka burish soat miliga qarshi yo'nalishda ko'rinsa $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar (o'ng uchlik) o'ng bog'lam tashkil etadi deyiladi. Aks holda chap uchlik deyiladi. Chap yoki o'ng uchlikni tashkil etadigan uchlik tartiblangan uchlik deb yuritiladi.

2-Ta`rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi deb quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan $\vec{c}$ vektorga aytiladi.

1) $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyar (ortogonal);

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \sin(\vec{a}, \vec{b})$;

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarning tartiblangan uchligi o'ng uchlikni tashkil etadi. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi $a \times \vec{b}$ yoki $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ ko'rinishda yoziladi.



Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lmasa, u holda $|\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}|$ son $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogrammning yuziga teng bo'ladi.

Vektor ko'paytmaning asosiy xossalari.

1. $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{a},\vec{b}\right]$
2. $\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right] = \left[\vec{a},\vec{c}\right] + \left[\vec{b},\vec{c}\right]$
3. $\left[(\lambda\vec{a}),\vec{b}\right] = \lambda\cdot\left[\vec{a},\vec{b}\right]$
4. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa, $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = 0,$ xususiy holda $\left[\vec{a},\vec{a}\right] = 0$ bo'ladi.

Ortlarning vektor ko'paytmalari:

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 0, \qquad \vec{i}\cdot\vec{j}\cdot\vec{k}\cdot\vec{i}\cdot\vec{j} \quad \rightleftarrows \pm$$

Agar $\vec{a}\{a_x;a_y;a_z\}$, $\vec{b}\{b_x;b_y;b_z\}$ bo'lsa ularning vektor ko'paytmasi:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Masala.

$\vec{F}\{6;-2;1\}$ kuchning $A(3;4;-2)$ nuqtadan to'g'ri chiziq bo'ylab $B(4;-2;-3)$ nuqtaga siljishdagi bajargan ishini hisoblang.

Yechish.

$\vec{AB} = \{x,y,z\}$ vektorning koordinatlarini aniqlaymiz. $x = x_2 - x_1;\ y = y_2 - y_1;\ z = z_2 - z_1$ formulalarga A va B nuqtalarning koordinatalarini qo'ysak:

$$x = 4-3 = 1;\ y = -2-4 = -6;\ z = -3-(-2) = -3+2 = -1.$$

Demak, $\vec{AB} = \{1;-6;-1\}$. $\vec{F}$ kuch ta`siri ostida bajarilgan ish o'tilgan yo'l bilan $\vec{F}$ kuchning skalyar ko'paytmasiga teng bo'ladi, ya`ni $\vec{F} * \vec{AB} = A.$

$$A = \vec{F} * \vec{AB} = \left(6\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right)\cdot\left(\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}\right) = 6 + 12 - 1 = 17.$$

Uchburchak yuzi formulasi

Uchlari $A(x_1,y_1,z_1);\quad B(x_2,y_2,z_2);\quad C(x_3,y_3,z_3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak berilgan bo'lsin. $\vec{AB}$ va $\vec{AC}$ vektorlarga ABC uchburchak yasalgan bo'lsin, u holda bu uchburchakning yuzi:

$$\vec{c} = \vec{AB}\cdot\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \quad S = \frac{1}{2}|\vec{c}| \text{ formuladan topiladi.}$$

Vektor ko'paytmani mexanikaga tadbiqini quyidagi misolda ko'rish mumkin.

Kuch momenti. Q qattiq jism berilgan bo'lsin va bu jismning bitta, masalan, O nuqtasi harakatlanmaydigan qilib mahkamlangan bo'lsin. Agar Q jismning boshqa R nuqtasiga $\vec{F}$ kuch qo'yilsa, u holda aylantiruvchii moment yoki kuch momenti hosil bo'ladi.

Kuch momenti $\vec{m} = \vec{r}\times\vec{F}$, bunda $\vec{r} = \vec{OP}.$

## Nazorat savollari

1. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
2. Skalyar *ko'paytmaning* qanday xossalarini bilasiz?
3. Ikki vektor orasidagi burchakni skalyar ko'paytma yordamida qanday topish mumkin?
4. Vektorning perpendikulyar sharti nimadan iborat?
5. Vektor ko'paytma ta`rifini ayting.
6. «O'ng uchlik», «chap uchlik» deb nimaga aytiladi?
7. Vektor ko'paytma qanday xossalarga ega?
8. Vektor ko'paytma bilan shu vektorlar orqali yasalgan parallelogramm yuzi orasida qanday bog'lanish bor?
9. Vektor ko'paytmaning mexanikadagi qanday tadbiqlarini bilasiz?

## Mavzu. Vektorlarning aralash ko'paytmasi.

*Reja:*

1. Vektorlarning aralash ko'paytmasi.
2. Aralash ko'paytmaning xossalari.
3. Paralelopiped xajmi.

Mustaqil o'qib o'rganishga tavsiya etilgan adabiyotlar ro'yhati:


2. T.Sh. Shodiyev. «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O'qituvchi» nash. 1984 yil. 52-57 betlar.
3. Yo.U. Soatov. «Oliy matematika» 1-j. T. «O'qituvchi». 1992 yil. 30-39 betlar.
4. F. Rajabov, A. Nurmatov. «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O'qituvchi». 1990 yil. 59-61 betlar
5. http:// docs. titli, uz/sim/ html. Oily matematika ,2005 y.

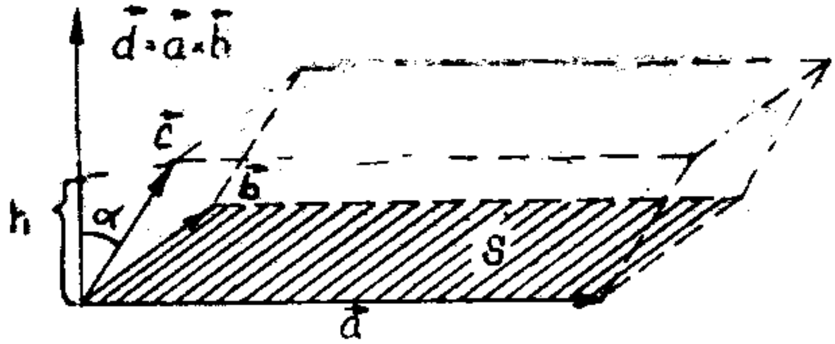

### 6.1. Aralash ko'paytma.

Ixtiyoriy $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarni olamiz.

*Ta`rif:* Berilgan $\vec{a}$ vektor bilan $\vec{b}$ vektorning vektor ko'paytmasidan hosil bo'lgan $\vec{a}\times\vec{b}$ vektor hamda $\vec{c}$ vektorlarining skalyar ko'paytmasini shu uchta vektorlarning aralash ko'paytmasi deyiladi. Aralash ko'paytma $\left(\vec{a}x\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ ko'rinishda yoziladi.

Aralash ko'paytma oddiy geometrik ma`noga ega bo'lib, uning musbat ishora bilan olingan qiymati $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlardan yasalgan parallelopiped hajmidan iboratdir. Buning to'g'riligini ko'rsatish uchun $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarni o'zaro komplanar bo'lmagan vektorlar deb faraz qilib ular orqali parallelopiped yasaymiz.

Hosil bo'lgan parallelopiped balandligini h, asosining yuzini S va hajmini V deb belgilasak, V=Sh ekanligi ma`lum. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi xossasiga ko'ra $|\vec{a}xb| = S$, $\vec{a}x\vec{b}$ vektor bilan $\vec{c}$ vektorning skalyar ko'paytmasi ta`rifiga ko'ra $(\vec{a}x\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}x\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos\alpha,$ bunda α-burchak $(\vec{a}x\vec{b})$ va $\vec{c}$ vektorlar orasidagi burchak (1-chizma).




***1-chizma***

Demak, $(\vec{a}x\vec{b})\cdot\vec{c}=S\cdot|\vec{c}|\cos\alpha$ .

1-chizmadan ko'rinadiki, parallelopipedning h balandligi $\vec{c}$ vektorning $\vec{a}x\vec{b}$ vektordagi proyeksiyasidan iborat, ya`ni $h=|\vec{c}|\cos\alpha$ . U holda $(\vec{a}xb)\cdot\vec{c}=S\cdot h=V.$

Shaklda $\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar o'ng uchlik hosil qilingan hol berilgan bo'lib, bunda $\cos\alpha>0$ bo'ladi, agar bu vektorlar chap uchlikni tashkil etsa, u holda $\cos\alpha<0$ bo'ladi, demak umuman $(\vec{a}x\vec{b})\cdot\vec{c}=\pm V$ bo'lar ekan.

Aralash ko'paytmaning xossalari.

**1.** $\vec{a}\cdot(\vec{b}x\vec{c})=(\vec{a}x\vec{b})\cdot\vec{c}$

Haqiqatan, $(\vec{a}x\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot(\vec{a}x\vec{b})$ ekanligi skalyar ko'paytma xossasiga ko'ra ma`lum, shu bilan birga $(\vec{a}x\vec{b})\cdot\vec{c}=\pm V$ va $(\vec{b}x\vec{c})\cdot\vec{a}=\pm V$ . Bunda $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar qanday uchlikni tashkil etsa $\vec{b},\vec{c},\vec{a}$ vektorlar ham shunday uchlikni tashkil etadi, demak, $(\vec{b}x\vec{a})\cdot\vec{c}=(\vec{a}x\vec{b})\cdot\vec{c}$ yoki $\vec{a}\cdot(\vec{b}x\vec{c})=(\vec{a}x\vec{b})\cdot\vec{c}$ ekanligi kelib chiqadi. Bu xossaga ko'ra aralash ko'paytmadagi «•» va «x» belgilarining o'rinlarini almashtirish mumkinligi, ya`ni ularni qanday tartibda qo'shilishining ahamiyati yo'qligi kelib chiqadi. Shuning uchun, odatda $(\vec{a}x\vec{b})\cdot\vec{c}$ aralash ko'paytma $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ ko'rinishda yoziladi.

**2.** $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ ko'paytmada ikkita qo'shni ko'paytuvchilarning o'rnini almashtirish uning ishorasini almashtirishga olib keladi:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=-(\vec{b}\vec{a}\vec{c})=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}$$

Bu tenglikning to'g'riligi $\vec{a}x\vec{b}=-\vec{b}x\vec{a}$ xossadan bevosita kelib chiqadi.

Aralash ko'paytmani hisoblash

Agar

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},$$
$$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},$$
$$\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k},$$

bo'lsa, u holda

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & y_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

ekanligini ko'rsatish mumkin.

Haqiqatan,

$$\vec{a}x\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Skalyar ko'paytma xossasiga ko'ra

$$\left(\vec{a}x\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot c_x-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\cdot c_y+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\cdot c_z=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Shunday qilib, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarga yasalgan parallelopiped hajmi quyidagicha hisoblanar ekan:

$$Vn.n.=\pm\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & y_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Natija 1. Elementar geometriyadan ma`lumki, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar orqali yasalgan piramida hajmi parallelopiped hajmining 1/6 qismidan iborat, demak

$$V_{nup}=\pm\frac{1}{6}\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & y_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Natija 2. Noldan farqli $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning komplanar bo'lishi uchun ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Haqiqatan, $\vec{a}\vec{b}\,\vec{c}=0$ bo'lsa, ya`ni

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & y_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$$

Bundan determinantning kamida ikkita yo'li o'zaro proporsional ya`ni vektorlar kolleniar bo'lishi, bundan esa $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lar komplanar bo'lishi kelib chiqadi.

Aksincha, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lar komplanar vektorlar bo'lsa $\vec{a}x\vec{b}$ vektor $\vec{c}$ vektorga perpendikulyar bo'ladi, demak ,skalyar ko'paytma xossasiga ko'ra $\left(\vec{a}x\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$ bo'ladi.

1-misol.

Uchlari A(-2; 0; 1), B(1; 2; 3), C(2; -1; 4) va D(-3; 1; 0) nuqtalarda bo'lgan piramida hajmini toping.

Yechish.

Piramidani $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ va $\overrightarrow{AD}$ vektorlar orqali yasalgan deb olamiz. U holda

$$\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k},$$
$$\overrightarrow{AC} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k},$$
$$\overrightarrow{AD} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

Ularning aralash ko’paytmasini topamiz:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & - & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3-6+8-2+8-9 = 19-17 = 2$$

Demak, $V_{nup} = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$ kub, birlik.

2-misol.

$\vec{a} = (-2;1;3)$, $\vec{b}(4;\ 7;\ 8)$ va $\vec{c}(4;\ -2;\ -6)$ vektorlarning komplanar ekanligini ko’rsating.

Yechish.

Aralash ko’paytmani topamiz:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \\ 4 & -2 & -6 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning aralash ko’paytmasi nolga tengligidan ularning komplanarligi kelib chiqadi.

## Nazorat savollar.i

1. Vektorlarning aralash ko’paytmasi nima va u qanday hisoblanadi?
2. Aralash ko’paytma qanday geometrik ma`noga ega?
3. Uchta vektorning aralash ko’paytmasi bilan ularning komplanarligi orasidagi bog’lanishni ayting.

## Mustaqil ish

2-vazifa

## Vektorlar algebrasi

1. $a(1,2)$, $\vec{b}(-5,-1)$, $\vec{c}(-1,3)$ vektorlar berilgan $2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$, $16a+5\vec{b}-9\vec{c}$ vektorlarning koordinatalarini toping.
2. $a(3,0,-2)$, $\vec{b}(1,2,-5)$, $c(-1,1,1)$, $\vec{d}(8,4,1)$ vektorlar berilgan $-5a+\vec{b}-6\vec{c}+\vec{d}$, $3a-\vec{b}-\vec{c}-\vec{d}$ vektorlarning koordinatalarini toping.
3. $\vec{a}=\{12;-15;-16\}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.
4. $\vec{a}=\{3;-2;6\}$ ва $\vec{b}=\{-2;1;0\}$ vektorlar berilgan **1)** $\vec{a}+\vec{b}$ **2)** $\vec{a}-\vec{b}$ **3)** $2\vec{a}$ vektorlarning koordinatalarini toping.
5. $\vec{c}=16i-15j+12k$ vector $i, j, k$ bazislar bo'yicha yoyilgan bo'lsa, $\vec{C}$ ga parallel va qarama-qarshi yo'nalishda, $|\vec{d}|$=75 bo'lgan $\vec{d}$ vektorning shu bazislar bo'yicha yoyilmasini toping.
6. $\alpha$ va $\beta$ ning qanday qiymatlarida $\vec{a}=-2i+3j+\beta k$ va $\vec{b}=\alpha i-6j+2k$ vektorlar collinear bo'ladi.
7. Tekislikda $\vec{a}=\{3;-2\}$ $\vec{b}=\{-2;1\}$ $\vec{c}=\{7;-4\}$ vektorlar berilgan. Bu vektorlarni xar birini qolgan ikkitasi orqali yoyilmasini toping.
8. $\vec{a}=\{3;-1\}$, $\vec{b}=\{1;-2\}$, $\vec{c}=\{-1;7\}$ vektorlar berilgan. $\vec{P}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ vektorni $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ bazislarga yoyilmasini toping.
9. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{C}$ vektorlar $\vec{a}+\vec{b}+\vec{C}$ =0 shartini qanoatlantiradi. Agar $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $|c|=4$ bo'lsa $(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{c})+(\vec{c},\vec{a})$ ni hisoblang.
10. $\vec{a}=\{4;-2;-4\}$ $\vec{b}=\{6;-3;2\}$ vektorlar berilgan .

    1) $(\vec{a},\vec{b})$ 2) $\sqrt{\vec{a}^2}$ 3) $(2\vec{a}-3\vec{b},\vec{a}+2\vec{b})$ 4) $(\vec{a}+\vec{b})^2$ ni hisoblang.
11. Uchburchakning *A(-1;-2;4), B(-4;-2;0) va C(3;-2;1) uchlari berilgan.* Uning B uchidagi ichki burchagini toping.
12. To'rtburchakning *A(1;-2;2), B(1;4;0), C(-4;1;1)* va *Д(-5;5;3) uchlari bo'lsa, AC* va *ВД* diogonallarining perependikulyarligini isbotlang.
13. $\vec{a}=\{2;-4;4\}$ $\vec{b}=\{-3;2;6\}$ vektorlar orasidagi burchakning kosinusini toping.
14. $\vec{a}=\{5;2;5\}$ vektorni $\vec{b}=\{2;-1;2\}$ vektorning o'qidagi proeksiyasini toping.

15. *A(1;2;0), B(3;0;-3), C(5;2;6) nuqtalar berilgan ABC* uchburchakning yuzini toping.

16. Uchburchakning uchlari *A(1;-1;2), B(5;-6;2), C(1;3;-1)* bo'lsin. Uning *B* uchidan *AC* tomonga tushirilgan balandligini hisoblang.

17. $\vec{a}=\{2;-2;1\}$, $\vec{b}=\{2;3;6\}$ *vektorlar orasidagi burchakning sinusini toping..*

18. $\vec{a}=\{2;-3;1\}$ ва $\vec{b}=\{1;-2;3\}$ vektorlarga perpendikulyar bo'lgan va $(\vec{x}, i+2j-7k)=10$ shartni qanoatlantiruvchi $\vec{X}$ vektorni toping.

19. $\vec{X}$ vektor $\vec{a}=\{4;-2;-3\}$ va $\vec{b}=\{0;1;3\}$ vektorlarga perpendikulyar va *OX* o'qi bilan o'tmas burchak tashkil etadi. $|\vec{x}|=26$ bo'lsa $\vec{X}$ ning koordinatalarini toping.

20. $\vec{c}$ vector $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyar, $a^{\wedge}b=30^0$ $|a|=6$, $|b|=3$, $|c|=3$ bo'lsa, $a\cdot b\cdot c$ aralash ko'paytmani hisoblang.

21. $\vec{a}=\{2;3;-1\}$ $\vec{b}=\{1;-1;3\}$ $\vec{c}=\{1;9;-1\}$ vektorlarni komplanarligini tekshiring.

22. *A(1;2;-1), B(0;1;5), C(-1;2;1)* ва *D(2;1;3)* nuqtalar bir tekislikda yotishini isbotlang.

23. Uchlari *A(2;-1;1), B(5;5;4), C(-1;2;1)* va *D(2;1;3)* nuqtalarda bo'lgan tetraedrning xajmini hisoblang.

24. Tetraedrning uchlari *A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7)* va *D(-5;-4;8)* bo'lsin. Uning *D* uchidan tushirilgan balandligini hisoblang.

25. Tetraedrning xajmi *V=5* uning uchta uchlari *A(2;1;-1), B(3;0;1)* va *C(2;-1;3)*. Agar uning to'rtinchi *D* uchi *OУ* o'qida yotsa *D* ning koordinatalarini toping.

26. $\vec{a}$ *={3;-1;-2}* ва $\vec{b}$ *={1;2;-1}* vektorlar berilgan. **1)** $\vec{a}\times\vec{b}$ **2)** $(2\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}$ vektor ko'paytmaning koordinatalarini toping.

27. $(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2(\vec{a}^2+\vec{b}^2)$ ayniyatni isbotlang va uning geometric ma'nosini bfodalang.

28. $\vec{a}=\{2;-1;3\}$ $\vec{b}=\{-6;3;-9\}$ vektorlarning kolleniarligini isbotlang va ularning uzunliklarini va yo'nalishlarini taqqoslang.

29. *A(3;-1;2), B(1;2;-1) C(-1;1;-3)* ва *D(3;-5;3)* nuqtalar trapetsiyaning uchlari ekanini ko'rsating.

30. *A(-1;5;-10), B(5;-7;8), C(2;2;-7)* ва *D(5;-4;2)* nuqtalar berilgan. $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ vektorlar collinear ekanini isbotlang.

## 6. TEST savollari

Tenglamalar sistemasini determinant yordamida yechish. Kramer formulalari.

1. $\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$ A)(3;2), B)(3;-2), C)(-3;2), D)(-3;-2), E(2,-3)

2. $\begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 4x - 5y = -6 \end{cases}$ A)(1;2), B)(-1;2), C(1;-2), D)(2;1), E)(-2;-1)

3. $\begin{cases} 4x + y + 3 = 0 \\ 5x - 2y + 7 = 0 \end{cases}$ A)(-1;-1), B)(-1;1), C)(1;1), D)(2;1), E)(1;2)

4. $\begin{cases} 3x - 7y + 6 = 0 \\ \frac{1}{2}x + 5y + 1 = 0 \end{cases}$ A)(2;0), B)(0;2), C)(-2;0), D)(0;-2), E)(2;-2)

5. $\begin{cases} 7x - 2y = -1 \\ 3x - 5y = 12 \end{cases}$ A)(-1;3), B)(1;-3), C)(-1;-3), D)(1;3), E)(1;1)

6. $\begin{cases} 4x + y + 5 = 0 \\ 3x + 5y - 9 = 0 \end{cases}$ A)(2;3), B)(3;2), C)(2;-3), D)(-2;3), E)(-2;-3)

7. $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$ A)(-1;2), B)(2;-3), C)(-2;3), D)(-4;-3), E)(0;0)

8. $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = -7 \end{cases}$ A)(1;2), B)(-1;2), C)(2;-1), D)(2;1), E)(-2;-1)

9. $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = -1 \end{cases}$ A)(1;-2), B)(-1;2), C)(-1;-2), D)(2;-1), E)(1;2)

10. $\begin{cases} 4x - 3y + 5 = 0 \\ 3x + y - 6 = 0 \end{cases}$ A)(3;1), B)(-3;1), C)(-1;3), D)(1;3), E)(2;1)

11. $\begin{cases} 2x + y - 5z = 3 \\ 3x - 5y + 2z = 1 \\ 5x - 6y + 3z = 6 \end{cases}$ A)(3;2;1), B)(2;3;1), C)(3;1;2), D )(1;2;3), E)(2;1;3)

12. $\begin{cases} 4x+3y+2z+3=0 \\ 7x+9y-3z+8=0 \\ 2x-5y+6z+3=0 \end{cases}$ A)(1;1;2), B)(1;-2;1), C)(-2;1;1), D)(1;1;-2), E)(-1;-2;1)

13. $\begin{cases} 5x+2y-3z-3=0 \\ 8x-3y+2z+7=0 \\ 2x+3y-5z-4=0 \end{cases}$ A)(3;1;0), B)(1;3;0), C)(0;1;3), D)(!;0;3), E)(0;3;1)

14. $\begin{cases} 7x+2y-8z-1=0 \\ 5x-3y+13z-14=0 \\ x+2y-9z+5=0 \end{cases}$ A)(0;1;3), B)(1;-3;0), C)(-3;1;0), D)(1;0;3), E)(3;-1;0)

15. $\begin{cases} y+2z=4 \\ 3x-2y+4z=19 \\ 2x+5y+z=-5 \end{cases}$ A)(1;2;3), B)(1;-2;3), C)(1;2;-3),D) (-1;2;3),E)(1;-2;-3)

16. $\begin{cases} 3x-4y+z=6 \\ 2x+6-3z=-10 \\ 5x-8y=1 \end{cases}$ A)(1;0,5;5),B)(1;5;0,5),C)(0,5;1;5),D)(5;0,5;1)E)(3;2;-1)

Determinantni xisoblang.

17. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \\ -8 & 6 & -3 \end{vmatrix}$

A) 0 B) 3 C) 5 D) –4 E) 8

18. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

A) –1 B) 0 C) 3 D) 2 E) 5

19. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \\ -6 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

A) 4 B) 2 C)-4 D) 0 E) 1

20. $\begin{vmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -9 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix}$

determinantning 1) $a_{12}$, 2) $a_{23}$, 3) $a_{22}, a_{31}$, 4) $a_{32}$, element-larning minorlari va algebraik to'ldiruvchilari topilsin.

1. A) –14 ;14  B) –24; 24  C) –34; 34  D) –44; 44  E) –54; 54
2. A) 45; -45  B) 35; -35  C) 25; -25  D) 15; -15  E) 5; -5
3. A) 25; 25  B) –25; -25  C) 35; 35  D) –35; -35  E) 0; 0
4. A) 5; 5  B) 10; 10  C) 15; 15  D) 20; 20  E) 25; 25
5. A) 10; -10  B) 20; -20  C) 29; -29  D) 30; -30  E) 39; -39

21. $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ matritsalar berilgan:

1) $A+2B$, 2) $3A-B$, 3) $A\cdot B$ lar topilsin.

1. A) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

2. A) $\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} -7 & 13 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 7 & -13 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 7 & -13 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

3. A) $\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 18 & 13 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} -18 & -13 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 18 & -13 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$

22. $\begin{cases} 3x-5y+7z=9 \\ 2x-4y-5z=6 \\ -5x+2y-3z=-15 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini matritsa usulida eching.

A) (0; 3; 0),  B) (-3; 0; 0),  C) (0; 4; 4),  D) (3; 0; 0),  E) (0; 0; 3)

## Vektorlar algebrasi bo’limi bo’yicha

1. $\vec{a}\,\{3;2;7\}$ va $\vec{b}\,\{4;1;-5\}$ vektorlarning yig’indisi va ayirmasi topilsin.

*A)* $\vec{a}+\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+10\vec{k}$

*B)* $\vec{a}+\vec{b}=7\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{a}-\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}+12\vec{k}$

*C)* $\vec{a}+\vec{b}=5\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{a}-\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}+12\vec{k}$

*D)* $\vec{a}+\vec{b}=12\vec{i}+3\vec{j}+7\vec{k}$, $\vec{a}-\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}+12\vec{k}$

*E)* $\vec{a}+\vec{b}=7\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{a}-\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}+12\vec{k}$

**2.** $\vec{r}\,\{0;2;-3\}$ radius vektorning ortlar bo’yicha yoyilmasini yozing va modulini hisoblang.

*A)* $\vec{r}=2\vec{j}-3\vec{k}$, $|\vec{r}|=\sqrt{13}$ *B)* $\vec{r}=2\vec{j}+3\vec{k}$, $|\vec{r}|=\sqrt{13}$ *C)* $\vec{r}=2\vec{j}+2\vec{k}$, $|\vec{r}|=\sqrt{13}$

*D)* $\vec{r}=2\vec{j}-\vec{k}$, $|\vec{r}|=\sqrt{13}$ *E)* $\vec{r}=\vec{j}-3\vec{k}$, $|\vec{r}|=\sqrt{13}$

3. AB kesmaning boshlang'ich nuqtasi *A(-1;2;4)*. Uni teng ikkiga bo'luvchi esa C*(2;0;2)* bo'lsin. B uchning koordinatalarini toping.

   *A)(-5:0:2) B)(5:-2:0) C)(5:2:0) D)(5:0:-2) E)(5:1:2)*

4. *m* va *p* ning qanday qiymatlarida $\vec{a}=2\vec{i}+m\vec{j}+\vec{k}$ va $\vec{b}=3\vec{i}-6\vec{j}+n\vec{k}$ vektorlar kolliniar bo'ladi?

*A) -4 va 1,5; B) 4 va 1,5; C) -4 va –1,5; D) 4 va –1,5; E) 4 va 3*

5. Uchlari *A(5;3;-10), B(0;1;4)* va *C(-1;3;2)* nuqtalarda bo'lgan uchburchak *AD* medianacining uzunligini toping.

*A)* $\frac{\sqrt{401}}{2}$ *B)* $\frac{\sqrt{501}}{2}$ *C)* $\frac{\sqrt{601}}{2}$ *D)* $\frac{\sqrt{701}}{2}$ *E)* $\frac{\sqrt{801}}{2}$

6. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasida burchak $\varphi=\frac{\pi}{4}$ ga teng va

$|\vec{a}|=\sqrt{2}$ **;** $|\vec{b}|$ **=3** ekanligi ma'lum. $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$ vektorning uzunligini hisoblang.

*A)5 B)25 C)* $5\sqrt{5}$ *D)* $\sqrt{5}$ *E)* $3\sqrt{2}$

7. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasida burchak $\varphi=\frac{\pi}{3}$ ga teng.

$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$. $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$ vektorning uzunligi topilsin.

*A)* $\sqrt{17}$ *B)* $\sqrt{29}$ *C)* $\sqrt{127}$ *D)* $\sqrt{217}$ *E)* $\sqrt{721}$

8. $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{k}$ vektor berilgan. Uning uzunligini toping.

*A)7 B)-1 C)* $\sqrt{5}$ *D) 12 E) 5*

9. $\vec{a}\{1;2,0\}$ va $\vec{b}\{-3;0;4\}$ vektorlar berilgan. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi topilsin.

*A)7 B)-10 C)* $\sqrt{5}$ *D) 12 E) -3*

10. Koordinatalar boshidan *M(12;-3;4)* nuqtagacha bo'lgan masofa topilsin.

*A)* $\sqrt{13}$ *B)13 C)12 D)5 E)* $\sqrt{5}$

11. $\vec{a}\left\{\frac{3}{4}:1\right\}$ bo'lsa $4\vec{a}$ vektorning uzunligi topilsin.

*A) 5* *B)* $\sqrt{5}$ *C)* $3\sqrt{\frac{25}{4}}$ *D)* $\frac{5}{2}$ *E) 1*

12. C*(3;-5)* va *D(1;1)* nuqtalar berilgan. *CD* kesma o'rtasi koordinatasi topilsin.

*A)(4;-4)* *B)(4;-4)* *C)(2;-2)* *D)(-2;2)* *E)(0;0)*

13. $\vec{c}\ \{4;3;-1\}$ va $\vec{d}\ \{-1;2;2\}$ vektorlar berilgan $\vec{c}\cdot\vec{d}$ skalyar ko'paytma topilsin.

A) 0 B) 1 C)2 D) 3 E) 4

14. Boshlang'ich nuqtasi *A(4;7)* va oxirgi *B(1;3)* bo'lgan vektor uzunligi topilsin.

*A) 1* *B) 2* *C)3* *D) 4* *E) 5*

15. $\vec{a} = m\cdot\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ va $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$ vektorlar berilgan. *m* ning qanday qiymatlarida bu vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'ladi.

*A) 1* *B) 2* *C)3* *D) 4* *E) 5*

16. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro $60^0$ li burchak tashkil qiladi va *[*$\vec{a}$ *]=5 , [*$\vec{b}$ *] =8* bo'lsa , $\vec{a}-\vec{b}$ vektorni uzunligini hisoblang.

*A) 3* *B)9* *C)7* *D)5* *E)6*

17. $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ va $\vec{b}=\vec{i}-5\vec{j}+m\vec{k}$ vektorlar berilgan. *m* ning qanday qiymatida $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar perendikulyar bo'ladi.

*A) 7* *B)-7* *C)9* *D)-11* *E)-13*

18. $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}$ **va** $\vec{b}=-2\vec{k}$ vektorlar berilgan. $\vec{a}x\vec{b}$ vektor ko'paytma nimaga teng?

*A)* $2\vec{i}-6\vec{j}$ *B)* $2\vec{i}+6\vec{j}$ *C)* $-2\vec{i}+6\vec{j}$ *D)* $-2\vec{i}-6\vec{j}$ *E)* $6\vec{i}$

19 . $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro $60^0$ li burchak tashkil qiladi va *[*$\vec{a}$ *]=5 , [*$\vec{b}$ *] =8* bo'lsa $\vec{a}-\vec{b}$ vektorning uzunligi hisoblansin.

*A)* $\sqrt{127}$ *B)* $\sqrt{129}$ *C)* $\sqrt{137}$ *D)* $\sqrt{138}$ *E)3*

20. $\vec{a}$ *( 5;4 )* vektor boshining koordinatalari *A(-2:3)* bo'lsa, uning oxirining koordinatalarini aniqlang.

*A) (3; 7)* *B) (7; 3)* *C) (-3;7)* *D) (3;-7)* *E) (-3;-7)*

21. Vektorlar $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$ va $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$ berilgan. Bu vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping.

*A) –6* *B)-8* *C)-10* *D)-12* *E)-16*

*22.* $\vec{a}$=6$\vec{i}$ +3$\vec{j}$ -2$\vec{k}$ va $\vec{b}$ =3$\vec{i}$ -2$\vec{j}$ -6$\vec{k}$ vektorlardan yasalgan parallelogrammning yuzini toping.

*A)24* *B)32* *C)36* *D)42* *E)49*

23. $\vec{a}$ *{2;3;5}* va $\vec{b}$ *{1;2;1}* vektorlarning vektor ko'paytmasini toping.

*A)* 7$\vec{i}$ -3$\vec{j}$ +2$\vec{k}$ , *B) 7*$\vec{i}$ *+3*$\vec{j}$ + $\vec{k}$ , *C) 7*$\vec{i}$ *+3*$\vec{j}$ - $\vec{k}$ *,D)-7*$\vec{i}$ *-3*$\vec{j}$ + $\vec{k}$ , *E) 7*$\vec{i}$ *-3*$\vec{j}$ - $\vec{k}$

24. $\vec{a}$ *= {2;-1;-1},* $\vec{b}$ *= {1;3;-1},* $\vec{C}$ *= {3;-4;7}* vektorlarning aralash ko'paytmasini toping.

**A) 13** **B)23** **C)33** **D)43** **E)53**

25. $\vec{a}$ =-$\vec{i}$ +3$\vec{j}$ +m$\vec{k}$ , $\vec{b}$ =2$\vec{i}$ -3$\vec{j}$ -4$\vec{k}$ , $\vec{C}$ =-3$\vec{i}$ +12$\vec{j}$ +6$\vec{k}$ vektorlar *m* ning qanday qiymatida komplanar bo'ladi?

*A)1* *B)2* *C)3* *D)4* *E)5*

26. Uchlari *A(1,2,3), B(2,4,1), C(7,6,3), D(2,-3,-1)* nuqtalarda bo'lgan piramidaning xajmi topilsin.

*A)18* *B)40* *C)120* *D)30* *E)46*

*27.* $\vec{a}$ *{3;2;* $\sqrt{12}$ *}* va $\vec{b}$ *{4;0 ;* $\sqrt{3}$ *}* vektorlar berilgan $pr_a\vec{b}$ topilsin.

*A)3,6* *B)2,6* *C)1,6* *D)4,6* *E)5,6*

*28.* $\vec{a}$ =3$\vec{i}$ - $\vec{j}$ , $\vec{b}$ =4$\vec{k}$ + $\vec{j}$ , vektorlar berilgan $\vec{a}-\vec{b}$ vektorni toping .

*A) 3*$\vec{i}$ *-5*$\vec{j}$ *+4*$\vec{k}$ *B) 3*$\vec{i}$ *-2*$\vec{j}$ *-4*$\vec{k}$ *C) 3*$\vec{i}$ *+2*$\vec{j}$ *-4*$\vec{k}$ *D) 3*$\vec{i}$ *-4*$\vec{k}$

*E) 3*$\vec{i}$ *+2*$\vec{j}$ *+4*$\vec{k}$

29. $\vec{a}$ =3$\vec{i}$ + $\vec{j}$ , $\vec{b}$ =-$\vec{j}$ -4$\vec{k}$ vektorlar berilgan $\vec{a}+\vec{b}$ vektorni toping .

*A) 3*$\vec{i}$ *+2*$\vec{j}$ *+4*$\vec{k}$ *B) 3*$\vec{i}$ *+2*$\vec{j}$ *-4*$\vec{k}$ *C) 3*$\vec{i}$ *-4*$\vec{k}$

*D) 3*$\vec{i}$ *+2*$\vec{j}$ *E) 3*$\vec{i}$ *+4*$\vec{k}$

30. $\vec{a}=4\vec{i}+\sqrt{20}\vec{k}$ vektor berilgan. Uning uzunligini toping.

*A)3* *B)4* *C)* $\sqrt{5}$ *D) 4,4* *E) 6*

MUNDARIJA