O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI AXBOROT TEXNOLOGIYALARI VA KOMMUNIKATSIYALARINI RIVOJLANTIRISH VAZIRLIGI

MUHAMMAD AL-XORAZMIY NOMIDAGI TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

FARG'ONA FILIALI

"MATEMATIKA1"

FANIDAN

MUSTAQIL ISHLARNI BAJARISH UCHUN

USLUBIY KO'RSATMA

5330500 –"Kompyuter injiniringi" (Kompyuter injiniringi AT-Servis)
5330300 –"Axborot xavfsizligi"
5350100 –"Telekommunikatsiya texnologiyalari"
5330600 –"Dasturiy injiniringi"
5350400 –"AKT sohasida kasb ta'limi"

Farg'ona - 2018 й

Ushbu Uslubiy ko'rsatma "Matematika1" fanining "Chiziqli algebra", "Analitik geometriya", "Matematik tahlil" bo'limlarini o'z ichiga qamrab olgan. Talabalar Uslubiy ko'rsatma bo'yicha mustaqil ishlarni bajarishi uchun foydalanishi mumkin bo'ladi. Uslubiy ko'rsatma Muxammad-al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Farg'ona filiali Kengashi tomonidan ___.___.2018 yil kungi №__. Bayonnomasi asosida tasdiqlangan.

Tuzuvchi:

O.U.Nasriddinov — TATUFF "Tabiiy fanlar" kafedrasi katta o'qituvchisi

Taqrizchilar:

J.Mamajonov — FerPI fizika-matematika fanlari nomzodi, "Oliy matematika" kafedrasi dotsenti.

A.Abduqodirov — TATUFF fizika-matematika fanlari nomzodi "Axborot texnologiyalari" kafedrasi dotsenti.

Uslubiy ko'rsatma "Tabiiy fanlar" kafedrasida muhokama etilgan (2018 yil ___.___. №__ -sonli bayonnoma).

Kafedra mudiri: _______________ S.S.Sabirov

(imzo)

TATU Farg'ona filiali "Kompyuter injiniringi" fakulteti Uslubiy Kengashida tasdiqlangan (2018 yil ___.___. №__ -sonli bayonnoma).

Fakulteti Uslubiy Kengash raisi: _______________ I.Tojiboev

(imzo)

"KELISHILDI"

O'quv-uslubiy bo'lim boshlig'i _____________ Sh.Umarov

(imzo)

SO’Z BOSHI

Hozirgi kun talabiga javob beradigan mutaxassislar tayyorlash, ularning nazariy va amaliy masalalarni chuqur o’zlashtirishga yordam beradigan darsliklarni, o’quv qo’llanmalarni o’zbek tilida yozish muhim masalalardan biridir.

Ushbu uslubiy ko’rstma “Kompyuter injiniringi”, “Axborot xavfsizligi”, “Telekommunikatsiya texnologiyalari”, “Dasturiy injiniringi”, “AKT sohasida kasb ta’limi” hamda “Amaliy matematika va informatika” yo’nalishlari bo’yicha bakalavrlar tayyorlash o’quv rejasiga kiritilgan mavzularni o’z ichiga qamrab oladi, talabalar amaliy mashg’ulotlarini o’rganishda, mustaqil ishlarni bajarishda foydalanish mumkin bo’ladi.

CHIZIQLI ALGEBRA VA ANALITIK GEOMETRIYA

1-§. DETERMINANTLAR

Ikkinchi tartibli determinant.

Ta'rif Agar, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sonlar berilgan bo'lsa, shu sonlar orqali aniqlangan $a_{11}a_{22}$ - $a_{12}a_{21}$ ushbu songa ikkinchi tartibli determinant deyiladi va odatda quyidagicha belgilanadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1)$$

Misol. $\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}$ =21-81= -60

Uchinchi tartibli determinant.

Ta'rif. Berilgan $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ sonlar orqali aniqlangan va qo'yidagicha belgilangan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

songa uchinchi tartibli determinant deyiladi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \\ \bullet & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \bullet \\ \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \bullet \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \\ \cdot & \bullet & \cdot \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

n-tartibli determinant

.

Birinchi diagonal elemenlar ko'paytmasi va asoslari shu diagonalga

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ko'rinishdagi simvolga n-tartibli determinant deyiladi.

Determinantning xossalari.

1-xossa. Agar determinantning yo'llarini mos ustunlari bilan almashtirilsa determinantning qiymati o'zgarmaydi.

2-xossa. Determinantning ixtiyoriy ikkita yo'lini (yoki ustunini) o'zaro almashtirilsa, determinant qiymati o'z ishorasini o'zgartiradi.

3-xossa. Determinantning biror yo'lining (yoki ustunining) barcha elementlari nol bo'lsa, determinantning qiymati nol bo'ladi.

4-xossa. Ixtiyoriy ikkita yo'li yoki ikkita ustuni bir xil bo'lgan determinant qiymati nol bo'ladi.

5-xossa. Istalgan yo'l (yoki ustun) ning umumiy elementini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

6-xossa. Determinantning biror yo'l (yoki ustun) elemenlariga boshqa yo'l (yoki ustunining) elementlarini biror songa ko'paytirib qo'shganda determinantning qiymati o'zgarmaydi.

Bu xossalarning to'sriligini bevosita determinantlarni hisoblab ishonch hosil qilish mumkin.

Minorlar va algebraik to'ldiruvchilar.

1-ta'rif. biror n-tartibli determinantning a_{ij} elementinig minori deb, shu element turgan yo'l va ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan n-1 tartibli determinantga aytiladi va odatda M_{ij} orqali belgilanadi.

Masalan.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

uchinchi tartibli determinantning a_{23} elementining minori $M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ ikkinchi tartibli determinant bo'ladi.

2-ta'rif. n-tartibli determinantning a_{ij} elementining algebraik to'ldiruvchisi deb shu element minorini $(-1)^{i+j}$ ishora bilan olinganiga aytiladi va A_{ij} orqali belgilanadi.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

Misol.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

determinantning a_{43} elementining minorini va a_{21} elementining algebraik to'ldiruvchisini hisoblang.

$$M_{43}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}=3-20-15+8= -24$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}= -M_{21}= -\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}= -24+3-6+4= -23.$$

Minor va algebraik to'ldiruvchilar tushunchalari kiritilgandan keyin determinantning yana uchta xossasini ko'rib o'taylik.

7-xossa. Agar determinantning biror i-yo'lida (yoki j-ustunida) a_{ij} elementdan boshqa hamma elementlari nol bo'lsa, u holda bu determinant shu element bilan shu elementning algebraik to'ldiruvchisi ko'paytmasiga teng bo'ladi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1j} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2j} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & .... & a_{il} & .... & 0 \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nj} & .... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ij} \quad Aij = (-1)^{i+j} a_{ij}\, M_{ij}\ .$$

8-xossa. Har qanday determinant, biror yo'li (yoki ustuni) elementlari bilan shu elementlarning algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yitsindisiga teng bo'ladi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+ a_{23}A_{23} \quad \text{yoki} \quad a_{11}A_{11+}a_{21}A_{21}+ a_{31}A_{31.}$$

Determinantning 8-xossasidan foydalanib istalgan tartibli determinantni hisoblash mumkin.

Misol.

$$\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = (-5)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & -8 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -4 & -8 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+(-4)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -264\ .$$

9-xossa. Determinantning biror yo'li (yoki ustuni) elementlarining boshqa yo'li (yoki ustuni) elementlarining algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yitsindisi nol bo'ladi.
Masalan. Ikkinchi ustun elementlarini birinchi ustun elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirsak $a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+ a_{32}A_{31}=0$ bo'ladi.

Misollar.

Quyidagi determinantlarni hisoblang.

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ \sqrt{a} & 1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ a-2 & 1 \end{vmatrix}$

Tenglamani eching.

7. $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0$

Uchinchi tartibli determinantlarni hisoblang.(9-13)

9. $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 10. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -8 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ 11. $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 13. $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$

Tenglamani eching.

14. $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & \end{vmatrix} = 0$ 15. $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Quyidagi determinantlarni eng qulay yo’l yoki ustun elementlari bo’yicha yoyib hisoblang.(16-22)

16. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 17. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 18. $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 1 & d & 3 & -4 \end{vmatrix}$ 21. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}$

2-§. MATRISA VA ULAR USTIDA AMALLAR.

Berilgan a_{ij} (i=1,...,m; j=1,...,n) sonlardan tashkil topgan quyidagi

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{Vmatrix} \quad \text{yoki} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

ko'rinishdagi jadvalga matrisa deyiladi. (1) ga m ta yo'lli, n ta ustunli ,mxn o'lchovli matrisa deyiladi. a_{ij} larga matrisaning elementlari deyiladi.

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & .... & a_{1n} \\ .... & .... & .... \\ a_{n1} & .... & a_{nn} \end{Vmatrix} \text{-kvadrat matrisa.} \qquad \begin{Vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ .... \\ a_{m1} \end{Vmatrix} \text{-ustun matrisa deyiladi.}$$

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \end{Vmatrix} \text{- yo'l matrisa deyiladi.}$$

Kvadrat matrisalar uchun uning elementlaridan tuzilgan determinant quyidagicha bo'ladi:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & .... & a_{1n} \\ .... & .... & .... \\ a_{n1} & .... & a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad \det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & .... & a_{1n} \\ .... & .... & .... \\ a_{n1} & .... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bosh diagonal elementlari bir bo'lib,boshqa barcha elementlari nol bo'lgan kvadrat matrisaga birlik matrisa deyiladi va odatda E xarfi orqali belgilanadi.

$$E=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \ |E|=1, \text{ bo'lishi ravshan.}$$

Matrisani songa ko'paytirish.

Biror A matrisani k songa ko'paytirish deb,A matrisaning xamma elementlarini shu k songa ko'paytirishdan xosil bo'lgan matrisaga aytiladi va kA ko'rinishda yoziladi.

$$kA=Ak=\begin{Vmatrix} ka_{11} & .... & ka_{1n} \\ .... & .... & .... \\ ka_{m1} & .... & ka_{mn} \end{Vmatrix}$$

Matrisalarni qo'shish va ko'paytirish.

Agar A va B matrisalar bir xil o'lchovli bo'lsa, ularning yig'indisi deb shunday C matrisaga aytiladiki, bu C matrisaning elementlari A va B matrisalarning mos elementlarining yig'indisidan iborat bo'ladi.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & .... & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & .... & b_{2q} \\ .... & .... & .... & .... \\ b_{p1} & b_{p2} & .... & b_{pq} \end{pmatrix}$$

$$C=A+B=\begin{Vmatrix} a_{11} & .... & a_{1n} \\ .... & .... & .... \\ a_{m1} & .... & a_{mn} \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} b_{11} & .... & b_{1n} \\ .... & .... & .... \\ b_{m1} & .... & b_{mn} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & .... & a_{1n}+b_{1n} \\ .... & .... & .... \\ a_{m1}+b_{m1} & .... & a_{mn}+b_{mn} \end{Vmatrix}$$

Berilgan matrisalarni ko'paytirish uchun A matrisaning ustunlari soni n, V matrisaning yo'llar soni p ga teng bo'lishi shart. Aks xolda AV ma'noga ega bo'lmaydi. Ikkita matrisani ko'paytirganda xosil bo'lgan matrisaning yo'llar soni ko'payuvchi matrisaning yo'llar soniga, ustunlar soni esa ko'paytuvchi matrisaning ustunlar soniga teng bo'ladi.

A_{mxn} x B_{pq}=C_{mq}

$$C = A\text{x}B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & .... & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & .... & c_{2q} \\ .... & .... & .... & .... \\ c_{m1} & c_{m2} & .... & c_{mq} \end{pmatrix}, \quad A\times B \neq B\times A$$

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+ a_{i2}b_{2j} +...+ a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \text{ . } (i=1,...,m;\ j=1,...,q).$$

Misol.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot 2 & 2\cdot 2+1\cdot 1+0\cdot 2 \\ 3\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 2 & 3\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Teskari matrisa

Teskari matrisa tushunchasi faqat kvadrat matrisalarga nisbatan kiritiladi.

1-ta'rif. Agar xar qanday A va B kvadrat matrisalar uchun AB=BA=E tenglik o'rinli bo'lsa ,u xolda B matrisani A matrisaga (va aksincha) teskari matrisa deyiladi. Odatda A matrisaga teskari matrisa A^{-1} ko'rinishda yoziladi va $AA^{-1}= A^{-1}A=E$ bo'ladi. (E-birlik matrisa).

2-ta'rif. Agar A kvadrat matrisaning determinanti $|A|\neq 0$ bo'lsa, A matrisaga maxsusmas matrisa deyiladi .Agar |A|=0 bo'lsa ,u xolda maxsus matrisa deyiladi

3-ta'rif. Biror A matrisaning barcha mos yo'l va ustunlarining o'rinlarini almashtirishdan xosil bo'lgan matrisaga A ga nisbatan transponirlangan matrisa deyiladi va odatda A* ko'rinishda belgilanadi.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & .... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & .... & a_{m2} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{1n} & a_{2n} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Teorema. Har qanday A kvadrat matrisa teskari A^{-1} matrisaga ega bo'lishi uchun A matrisaning maxsusmas matrisa bo'lishi zarur va kifoya.

Misol.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}=q, \quad |A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-9 \neq 0. \quad A^{-1}=-1/9\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Haqiqatan $A^{-1}A=AA^{-1}=E$ tenglikni o'rinli ekanligini xisoblab ko'rish mumkin.

Matrisaning rangi.

Bizga mxn o'lchovli to'g'ri to'rt burchakli

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisa berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. A matrisaning k-tartibli minori deb , uning k ta ustuni va k ta yo'li kesishishdan xosil bo'lgan kxk o'lchovli kvadrat matrisaning determinantiga aytiladi (k=min(m,n)) mxn o'lchovli matrisaning k-tartibli minorlar soni $C_m^k \cdot C_n^k$ bo'ladi.

2-ta'rif. Matrisaning rangi deb ,uning noldan farqli bo'lgan minorlarining eng yuqori tartibiga aytiladi.

Agar matrisaning rangi k bo'lsa , u xolda bu matrisaning k+1 tartibli minoridan boshlab barcha yuqori tartibli minorlari nol bo'ladi.

Matrisaning rangiga qo'yidagicha xam ta'rif berish mumkin.

3-ta'rif. A matrisaning rangi deb uning chiziqli bog'liqli bo'lmagan yo'llarining (yoki ustunlarining)maksimal soniga aytiladi.

Misollar.

23. Agar $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ bo'lsa,

a) $3A+2B$, b) $-A+3B$, v) $2A+4D$, g) $\frac{1}{2}A+1{,}5B$ larni hisoblang.

Ushbu matrisalarning ko'ypatmasini toping (24-29)

24. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, a) A*B, b)B*A

25. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, a) A*B , b) B*A,

26. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^2$

31. $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

32. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$

33. $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2$

34. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$

Matrisalar rangini elementar almashtirishlardan foydalanib toping (35-38)

35. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 9 & -19 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

36. $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

37. $C=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

38. $Д=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

Ushbu matrisalarga teskari matrisalarni toping. (39-42)

39. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 40. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ 41. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ 42. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

Matrisali tenglamalarni eching. (43-46)

43. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

44. $X * \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

45. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

46. $X * \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$

Ushbu matrisalarga teskari matrisalarni elementar almashtirish yordamida toping. (47-50)

47. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

48. $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

49. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

50. $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

3-§. CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASI. KRAMER FORMULASI VA GAUSS USULI. MATRISALAR USULI.

Kramer formulasi.

Faraz qilaylik birinchi darajali, ikkita noma'lumli ikkita algebraik tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

(1) sistemaning 1-tenglamasini a_{22} ga, 2-tenglamasini $-a_{12}$ ga ko'paytirib qo'shsak

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22}-b_2a_{12} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{2}$$

Agar (1) sistemaning 1-tenglamasini $-a_{21}$ ga, 2-tenglamasini a_{11} ga ko'paytirib qo'shsak

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11}-b_1a_{21} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{3}$$

(2) va (3) larga e'tibor bersak ikkinchi tartibli determinantning ta'rifiga ko'ra

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \tag{4}$$

(4) ga Kramer formulasi deyiladi.

(1) sistema yagona yechimga ega bo'lishi uchun $\Delta \neq 0$ bo'lishi zarur va kifoya.

Agar uch noma'lumli uchta algebraik tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad \text{berilgan bo'lib,} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{bo'lsa}$$

berilgan sistemaning yechimi

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{5}$$

Kramer formulalari orqali aniqlanadi. Bu yerda xam Δ_1, Δ_2, Δ_3 lar Δ ning ustun elementlarini mos ravishda ketma-ket ozod xadlar bilan almashtirishdan xosil bo'ladi.

Agar birinchi darajali n ta noma'lumli n ta algebraik tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad \text{berilgan bo'lib,} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'lsa ,berilgan sistemaning yechimi Kramer formulasiga ko'ra qo'yidagicha aniqlanadi.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ \ldots, \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \tag{6}$$

Δ_1, Δ_2, …, Δ_n lar ning ustun elementlarini mos ravishda ketma-ket ozod xadlar bilan almashtirishdan xosil bo'ladi.

Misol. 1) $\begin{cases} 2x+5y=8 \\ 3x+y=-1 \end{cases}$ (x=-1; y=2), 2) $\begin{cases} 5x-3y+2z=9 \\ 2x+2y-5z=3 \\ 2x-y-3z=7 \end{cases}$,

(x=1;y=-2; z=-1).

Agar uch noma'lumli bir jinsli ikkita tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{cases} \qquad (7)$$

berilgan bo'lib,

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

determinantning loaqal bittasi noldan farqli bo'lsa, u xolda (7) sistemaning barcha yechimlari

$$x=\Delta_1 t,\ \ y=\Delta_2 t,\ \ z=\Delta_3 t \qquad (8)$$

formula bilan aniqlanadi. (t-ixtiyoriy son).

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_1x+d_2y+c_3z=0 \end{cases} \qquad (9)$$

(9) da $\Delta\neq0$ bo'lsa, x=0 ,y=0 ,z=0 lar sistemaning yagona yechimi bo'ladi.

Agar $\Delta=0$ bo'lsa, (9) ning cheksiz ko'p yechimi bo'lib, ular (7) kabi aniqlanadi.

Misol.

1) $\begin{cases} 3x-5y+z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$ (x=3t; y=4t;z=11t),

2) $\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+4y+2z=0 \\ 3x+7y+3z=0 \end{cases}$ (x=2t;y=-3t; z=5t).

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss

usuli bilan yechish.

Quyidagi n ta noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (1)$$

a_{ij} (i=1,...,m; j=1,...,n) koeffisiyentdagi birinchi indeks tenglama nomerini,ikkinchi indeks esa noma'lum nomerini bildiradi.

1-ta'rif. Agar (1) sistema yechimga ega bo'lsa, unga birgalikda bo'lgan sistema, agar yechimga ega bo'lmasa birgalikda bo'lmagan sistema deyiladi.

2-ta'rif. Agar birgalikda bo'lgan chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'lsa, uni aniq sistema deyiladi. Agar cheksiz ko'p yechimga ega bo'lsa, uni aniqmas sistema deyiladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasida qo'yidagi elementar almashtirishlarni bajarish mumkin.

1. Istalgan ikkita tenglamani o'rinlarini almashtirish mumkin.
2. Tenglamalarning ixtiyoriy bittasining ikkala tomonini noldan farqli istalgan songa ko'paytirish mumkin.
3. Ixtiyoriy bitta tenglamasining xar ikkala tomonini biror xaqiqiy songa ko'paytirib, boshqa biror tenglamaga qo'shish mumkin.

Bu elemantar almashtirishlarni bajarganimizda xosil bo'lgan sistema berilgan sistemaga teng kuchli bo'ladi.

Endi (1) sistemani Gauss usuli bilan yechishga o'taylik. Bu usulning moxiyati shundan iboratki noma'lumlarni ketma-ket yo'qotib ,berilgan sistemaga teng kuchli bo'lgan uchburchak (yoki pog'onasimon) ko'rinishdagi sistemaga keltiriladi. $a_{11}\neq0$ deb (1) ning birinchi tenglamasini a_{11} ga bo'lib, so'ngra uni $-a_{21}$ ga ko'paytirib, ikkinchi tenglamaga qo'shamiz.
Keyin $-a_{31}$ ga ko'paytirib, uchinchi tenglamaga qo'shamiz va shu jarayonni davom ettiraversak natijada shunday sistema xosil bo'ladiki, u sistemaning faqat birinchi tenglamasida x_1 qatnashib qolganlarida qatnashmaydi.

Shu jarayonni (1) sistemaning qolgan tenglamalariga ketma-ket tatbiq etsak, qo'yidagi ikkita sistemaning bittasiga kelamiz.

$$\left.\begin{array}{r} x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3+...+c_{1n}x_n=d_1 \\ x_2+c_{23}x_3+...+c_{2n}x_n=d_2 \\ \text{...} \\ x_n=d_m \end{array}\right\} \text{(2) yoki} \qquad \left.\begin{array}{r} x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3+...+c_{1n}x_n=d_1 \\ x_2+c_{23}x_3+...+c_{2n}x_n=d_2 \\ \text{.................................} \\ x_p+...+c_{pn}x_n=d_p \\ p<n \end{array}\right\} (3)$$

(2) sistemaga uchburchak sistema , (3) ga esa pog'onali sistema deyiladi.
Agar (1) sistema (2) ko'rinishdagi sistemaga keltirilsa, u xolda (1)sistema birgalikda bo'lgan sistema bo'lib yechimi yagona bo'ladi. Agar(1)sistema (3) ko'rinishdagi sistemaga keltirilsa u xolda (1) sistema birgalikda bo'lib, yechimi cheksiz ko'p bo'ladi.
Misol. 1)

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1+7x_2+13x_3=0 \\ 3x_1+14x_2+12x_3=18 \\ 5x_1+25x_2+16x_3=39 \end{array}\right\}$$

Yechish. $a_{11}=2\neq0$ bo'lgani uchun birinchi tenglamani 2 ga bo'lamiz.

$$\left.\begin{array}{l} x_1+7/2x_2+13/2x_3=0 \\ 3x_1+14x_2+12x_3=18 \\ 5x_1+25x_2+16x_3=39 \end{array}\right\}$$

Bu sistemaning 1-tenglamasini (-3) ga ko'paytirib 2-tenglamaga, (-5)ga ko'paytirib 3-tenglamaga qo'shsak

$$\left.\begin{array}{l} x_1+7/2x_2+13/2x_3=0 \\ 7/2x_2-15/2x_3=18 \\ 15/2x_2-33/2x_3=39 \end{array}\right\}$$

Endi $a_{22}=\frac{7}{2}\neq0$ bo'lgani uchun 2-tenglamani $\frac{7}{2}$ ga bo'lib , so'ngra uni $\frac{15}{2}$ ga ko'paytirib 3-tenglamadan ayirsak:

$$\left.\begin{array}{l} x_1+7/\ 2x_2+13/\ 2x_3=0 \\ x_2-15/\ 7x_3=36/\ 7 \\ -3/\ 7x_3=3/\ 7 \end{array}\right\} \qquad x_1=-4; x_2=3; x_3=-1.$$

2)

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2-4x_3&=1\\ 2x_1+x_2-5x_3&=-1\\ x_1-x_2-x_3&=-2 \end{aligned}\right\}$$

1-tenglamani (-2) ga ko'paytirib 2-tenglamaga ,(-1) ga ko'paytirib

3-tenglamaga qo'shsak $\left.\begin{aligned} x_1+2x_2-4x_3&=1\\ -3x_2+3x_3&=-3\\ -3x_2+3x_3&=-3 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x_1+2x_2-4x_3&=1\\ x_2-x_3&=1 \end{aligned}\right\}$

$x_2=1+x_3$; $x_1=1-2-2x_3+4x_3-=2x_3-1$.

Shunday qilib $x_1=2x_3-1$; $x_2=1+x_3$.

Demak berilgan sistema cheksiz ko'p yechimga ega ekan, chunki x_3 ga ixtiyoriy son berib, x_1, x_2 larning cheksiz ko'p qiymatlarini xosil qilamiz.

Matrisalar yordamida chiziqli algebraik
tenglamalar sistemasini yechish.

Qulaylik uchun uchta noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini ko'raylik.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=c_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=c_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=c_3 \end{cases} \qquad (1)$$

Elementlari noma'lumlarning koeffisiyentlaridan, noma'lumlardan va ozod xadlardan tuzilgan quyidagi matrisalarni ko'raylik.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3 \end{pmatrix}$$

Bu xolda (1) sistemani qo'yidagicha yozish mumkin.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow AX=C \qquad (2).$$

Agar A matrisa maxsusmas matrisa bo'lsa, u xolda unga teskari bo'lgan A^{-1} matrisa mavjud bo'ladi. Shuning uchun (2) ning xar ikkala tomonini A^{-1} ga ko'paytirsak

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}C \Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}C$$

Agar $A^{-1}A=AA^{-1}=E$ va $EA=AE=A$ tengliklarni e'tiborga olsak

$$(A^{-1}A)X=A^{-1}C \Rightarrow EX=A^{-1}C \Rightarrow X=A^{-1}C \qquad (3)$$

(3) (1)-sistemaning yechimini ifodalaydi.

Misol. Quyidagi tenglamalar sistemasini matrisaviy usulda yeching:

$$\begin{cases} 3x_1-x_2=5\\ -2x_1+x_2+x_3=0\\ 2x_1-x_2+4x_3=15 \end{cases}$$

Yechish. Sistemani matrisa ko'rinishida yozaylik:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\\ 0\\ 15 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix},\quad \det A=|A|=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=50$$

Demak A matrisa uchun A^{-1} matrisa mavjud . Berilgan A matrisa elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini xisoblab teskari matrisani topamiz

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 4/5 & -1/5\\ 2 & 12/5 & -5/3\\ 0 & 1/5 & 1/5\end{pmatrix}$$

Endi (3) formulaga asosan

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4/5 & -1/5\\ 2 & 12/5 & -5/3\\ 0 & 1/5 & 1/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 0\\ 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$$

$x_1=2$; $x_2=1$; $x_3=3$.

Misollar.

51. $\begin{cases}3x-5y=13\\ 2x+7y=81\end{cases}$ 52. $\begin{cases}3x-4y=-6\\ 3x+4y=18\end{cases}$ 53. $\begin{cases}3x+2y=7\\ 4x-5y=40\end{cases}$

54. $\begin{cases}2ax-3by=0\\ 3ax-6by=ab\end{cases}$ 55. $\begin{cases}ax-3y=1\\ ax-2y=2\end{cases}$ 56. $\begin{cases}mx-ny=(m-n)^2\\ 2x-y=n\end{cases}$

57. $\begin{cases}2x+y=5\\ x+3z=16\\ 5y-z=10\end{cases}$ 58. $\begin{cases}x+y-2z=6\\ 2x+3y-7z=16\\ 5x+2y+z=16\end{cases}$ 59. $\begin{cases}2x-3y+z-2=0\\ x+5y-4z+5=0\\ 4x+y-3z+4=0\end{cases}$

60. $\begin{cases}2x-4y+3z=1\\ x-2y+4z=3\\ 3x-y+5z=2\end{cases}$ 61. $\begin{cases}x+2y+3z=4\\ 2x+y-z=3\\ 3x+3y+2z=7\end{cases}$ 62. $\begin{cases}x+2y+3z=4\\ 2x+y-z=3\\ 3x+3y+2z=10\end{cases}$

63. $\begin{cases}x+2y+3y=4\\ 2x+4y+6z=3\\ 3x+y-z=1\end{cases}$ 64. $\begin{cases}x-2y+z=4\\ 2x-3y-z=3\\ 4x-y+z=11\end{cases}$ 65. $\begin{cases}3x-y+2z=0\\ 2x+3y-5z=0\\ x+y+z=0\end{cases}$

66. $\begin{cases}7x-y=8\\ 3y-3z=0\\ 5x+z=6\end{cases}$ 67. $\begin{cases}2x-y+z=2\\ 3x+2y+2z=-2\\ x-2y+z=1\end{cases}$

Quyidagi tenglamalar sistemalarini matrisalar usulida yeching (68-71).

68. $\begin{cases}2x_1+3x_2+2x_3=9\\ x_1+2x_2-3x_3=14\\ 3x_1+4x_2+x_3=16\end{cases}$ 69. $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=5\\ x_1-2x_2+2x_3=-5\\ 7x_1+x_2-x_3=10\end{cases}$

70. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases}$ 71. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7 \end{cases}$

Quyidagi tenglamalar sistemalarini noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usulida yeching (72-77).

72. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$ 73. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 7 \end{cases}$

74. $\begin{cases} x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 1x_3 = 2 \\ x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$ 75. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 14 \end{cases}$

76. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 40 \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37 \end{cases}$ 77. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -6 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = -8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -8 \end{cases}$

4-5-§. VEKTOR.

1-ta'rif. Aniq yo'nalishga ega bo'lgan chekli kesmaga vektor deyiladi.
A nuqtani vektorning boshi, V nuqtani esa vektorning oxiri yoki uchi deyiladi. Odatda vektor $\overline{AB}$ yoki $\vec{a}$ ko'rinishda yoziladi. Kesmaning uzunligi $\overline{AB}$ vektorning modulini ya'ni son qiymatini ifodalaydi va $|\overline{AB}|$ yoki $|\vec{a}|$ ko'rinishda yoziladi. Vektor degan so'z asli lotincha bo'lib, ko'chiruvchi, siljituvchi yoki tortuvchi degan ma'noni bildiradi.

2-ta'rif. Agar vektorlar bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotsa, bunday vektorlarga kollinear vektorlar deyiladi

3-ta'rif. Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlarga komplanar vektorlar deyiladi

4-ta'rif. Har qanday $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning
1) modullari teng bo'lsa;
2) kollinear bo'lsa;
3) yo'nalishlari bir xil bo'lsa , u xolda $\vec{a} = \vec{b}$ deyiladi.

5-ta'rif. Uzunliklari teng bo'lib, yo'nalishlari qarama-qarshi bo'lgan vektorlarga qarama-qarshi vektorlar deyiladi. Kollinear so'zi lotincha «com» ya'ni birgalikda yoki umumiy ma'nosidagi va «Linia» ya'ni chiziq ma'nosidagi so'zlardan tuzilgan bo'lib, «chiziqdosh» degan ma'noni bildiradi.

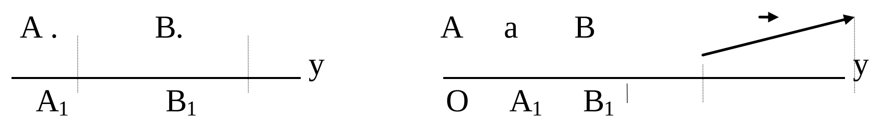
Vektorlar ustida chiziqli amallar.

Vektorlarni qo'shish, ayirish amallari o'rta maktab dasturidan ma'lum bo'lgan uchburchak va parallelogramm qoidalariga asosan amalga oshiriladi.

Vektorni songa ko’paytirish. $\vec{a}$ vektorni biror α xaqiqiy songa ko’paytirganda shu $\vec{a}$ ga kollinear bo’lgan $\vec{b}$ vektor xosil bo’lib, uning uzunligi $|\vec{b}|=|\alpha||\vec{a}|$ ga teng bo’lib, yo’nalishi esa $\alpha>0$ bo’lsa, $\vec{a}$ vektor yo’nalishi bilan bir xil , $\alpha<0$ bo’lsa, $\vec{a}$ yo’nalishiga qarshi bo’ladi. Vektorlarni songa ko’paytirish qoidasidan ko’rinadiki $\vec{b}=\alpha\vec{a}$ bo’lsa $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear vektorlar va aksincha. Demak $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning kollinear vektorlar bo’lishi uchun $\vec{b}=\alpha\vec{a}$ tenglik o’rinli bo’lishi zarur va kifoya.

Vektorlarning o’qqa proyeksiyasi.

Proyeksiya so’zi lotincha «projectiv» so’zidan olingan bo’lib, «tasvir» yoki «soya» degan ma’noni bildiradi. Biror A nuqtaning u o’qdagi proyeksiyasi deb, shu nuqtadan u o’qqa tushirilgan perpendikulyarning A_1 asosiga aytiladi va qo’yidagicha yoziladi



$Pr_u A=A_1$, $pr_u B=B_1$. $\overrightarrow{AB}$ vektorning o’qdagi geometrik proyeksiyasi deb, vektor boshining proyeksiyasi bo’lgan A_1 dan uchining proyeksiyasi bo’lgan B_1 nuqta tomon yo’nalgan $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektorga aytiladi. $pr_u\,\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$.

Har qanday vektorning biror o’qdagi geometrik proyeksiyasi vektordir, lekin uning algebraik miqdori biror aniq sondir. Shuning uchun vektorning proyeksiyasi deb shu son qabul qilinadi.

Demak $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektorning uzunligi $\overrightarrow{AB}$ vektorning u o’qdagi proyeksiyasi deyiladi. Agar A_1 va V_1 nuqtalarning koordinatalarini mos ravishda x_1,x_2 desak $pr_u\,\overrightarrow{AB}=x_2-x_1$ bo’ladi.

Teorema. $\vec{a}$ vektorning y o’qdagi proyeksiyasi shu vektor uzunligini, shu vektor bilan y o’q orasidagi φ burchak kosinus ko’paytmasiga teng bo’ladi:

$$pr_u\,\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$$

Vektor koordinatalari deganda vektorning uchi bilan boshining bir xil koordinatalari ayirmalariga shu vektorning koordinatalari deyiladi va qo’yidagicha yoziladi

$$\vec{a}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1\}$$

Vektor koordinatalar kvadratlarining yisindisidan olingan kvadrat ildizga vektor uzunligi deyiladi.

$$|\vec{a}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Chiziqli bog’liqli va chiziqli bog’liqsiz vektorlar.

1-ta’rif. Agar $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n=0$ (1) $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ larning xammasi bir paytda nolga teng bo’lmagan xolda o’rinli bo’lsa , u xolda

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ vektorlarga chiziqli bog'liqli vektorlar deyiladi.

2-ta'rif. Agar (1) tenglik faqat $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$ bo'lganda o'rinli bo'lsa, u xolda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ vektorlarga chiziqli bog'liqsiz vektorlar deyiladi.

Tekislikdagi xar qanday ikkita vektorning chiziqli bog'liqli bo'lishi uchun ularning kollinear vektorlar bo'lishi zarur va kifoya. Fazodagi har qanday uchta vektorning chiziqli bog'liqli bo'lishi uchun, ularning komplanar vektorlar bo'lishi shart.

Tekislikdagi xar qanday ikkita vektorning va fazodagi har qanday uchta vektorning chiziqli bog'liksiz vektorlar bo'lishi uchun ularning mos ravishda kollinear va komplanar vektorlar bo'lmasliklari zarur va kifoya.

Vektorni bazislar bo'yicha yoyish.

1-ta'rif. Tekislikdagi bazis deb ikkita kollinear bo'lmagan, ya'ni chiziqli bog'liqsiz $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ vektorlarga aytiladi.

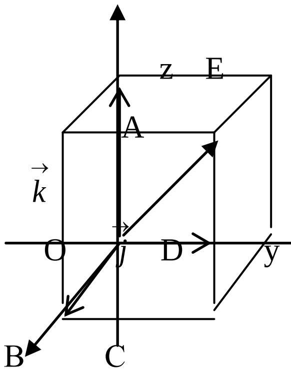
1-teorema. Tekislikdagi biror $\vec{a}$ vektorning $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ bazislar orqali yoyilmasi $\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$ ko'rinishda bo'lib, yagona bo'ladi.

2-ta'rif. Fazodagi bazis deb, undagi xar qanday uchta komplanar bo'lmagan, ya'ni chiziqli bog'liqsiz bo'lgan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlarga aytiladi.

2-teorema. Fazodagi biror $\vec{a}$ vektorning $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ bazislar orqali yoyilmasi $\vec{a}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\vec{a}_3$ (2)
ko'rinishda bo'lib, yagona bo'ladi.

Endi dekart koordinata sistemasidagi bazis va ular bo'yicha vektorlarni yoyishni ko'raylik. Dekart koordinata sistemasida Ox, Ou, Oz o'qlar yo'nalishida mos ravishda uzunliklari birga teng bo'lgan $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlarni $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$ olaylik. Uzunliklari birga teng bo'lgan vektorlarga birlik vektor yoki ort deyiladi. Bu vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lib komplanar bo'lmagani uchun, ya'ni chiziqli bog'liqsiz vektorlar bo'lgani uchun bazislarni tashkil qiladi. Shuning uchun ularga dekart ortogonal bazislar deyiladi.

$$\vec{a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$$



$\overrightarrow{OB}$ va $\vec{i}$; $\overrightarrow{OD}$ va $\vec{j}$; $\overrightarrow{OE}$ va $\vec{k}$ vektorlarning kollinear vektorlar ekanligini e'tiborga olsak

$\overrightarrow{OB} = \lambda_1 \vec{i}$; $\overrightarrow{OD} = \lambda_2 \vec{j}$; $\overrightarrow{OE} = \lambda_3 \vec{k}$ kelib chiqadi $\vec{a} = \lambda_1 \vec{i} + \lambda_2 \vec{j} + \lambda_3 \vec{k}$ vektorning koordinata $\vec{i}$ o'qlaridagi proyeksiyalarini mos ravishda

$pr_{Ox}\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{a}_x = \lambda_1$, $pr_{Ou}\overrightarrow{OD} = \boldsymbol{a}_y = \lambda_2$, $pr_{Oz}\overrightarrow{OE} = \boldsymbol{a}_z = \lambda_3$ desak

$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ formula kelib chiqadi.

Agar $\vec{a}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini x,y,z desak,

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{yoki} \quad \vec{a} = \{x,y,z\},$$

$$\vec{a} = (x_2-x_1)\vec{i} + (y_2-y_1)\vec{j} + (z_2-z_1)\vec{k} \quad \text{yoki} \quad \vec{a} = \{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$$

ko'rinishlarda xam yozish mumkin.

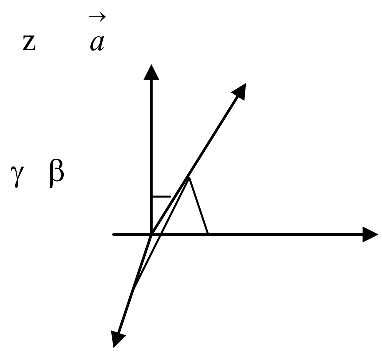
Vektorlarning yo'naltiruvchi kosinuslari.

$\vec{a} = \{x,y,z\}$ vektor Ox, Oy, Oz koordinata o'qlari bilan mos ravishda α, β, γ burchaklar tashkil qilsin.

Ta'rif. $\vec{a}$ vektorning koordinata o'qlari bilan xosil qilgan burchaklar kosinuslariga ya'ni $\cos\alpha$,$\cos\beta$,$\cos\gamma$ larga $\vec{a}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi.

Proyeksiyalash qoidalaridan foydalansak chizmadan ko'rinadiki

$x = a_x = pr_{Ox}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha$, $\quad \cos\alpha = \dfrac{x}{|\vec{a}|} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$



$y = a_y = pr_{OU}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\beta$ $\quad \cos\beta = \dfrac{y}{|\vec{a}|} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$x = a_z = pr_{Oz}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\gamma$ $\quad \cos\gamma = \dfrac{z}{|\vec{a}|} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Misol. A(1,2,3) B(2,4,5) bo'lsa, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

Yechish. $\overrightarrow{AB} = \{1;2;2\}$, $|\overrightarrow{AB}| = 3$, $\cos\alpha = 1/3$; $\cos\beta = 2/3$; $\cos\gamma = 2/3$.

Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.

$A(x_1, y_1, z_1) \qquad N(x,y,z) \qquad B(x_2, y_2, z_2)$

x=? ; y= ?; z=?

$$\frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{NB}} = \lambda \quad => \quad \overrightarrow{AN} = \lambda\,\overrightarrow{NB}.$$

$\overrightarrow{AN}$ *ва* $\overrightarrow{NB}$ vektorlarning kollinearlik shartidan

$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{NB}$ $\Rightarrow$ $(x-x_1)\vec{i}+(y-y_1)\vec{j}+(z-z_1)\vec{k}=\lambda\cdot[(x_2-x)\vec{i}+(y_2-y)\vec{j}+(z_2-z)\vec{k}]$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\quad;\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\quad;\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

xususiy xolda $\lambda=1$ bo'lsa, $x=\frac{x_1+x_2}{2}$; $y=\frac{y_1+y_2}{2}$; $z=\frac{z_1+z_2}{2}$

Misollar.

78. $\vec{a}=\{6;3;-2\}$ vektorning moduli hisoblansin.

79. $\vec{a}$ vektorning ikkita $x=4,\ y=-12$ koordinatasi berilgan. Agar $|\vec{a}|=13$ bo'lsa, uning uchinchi z koordinatasi topilsin.

80. Agar ;-1;4} vektorning boshi M(1;2;-3) nuqta bilan ustma-ust tushsa uning oxiri bilan ustma-ust tushuvchi nuqta aniqlansin.

81. Agar $\vec{a}=\{2;-3;-1\}$ vektorning uchi $(1,-1,2)$ nuqta bilan ustma-ust tushsa, uning boshi aniqlansin.

82. $\vec{a}=\{12;-15;-16\}$ vektorning yo'nltiruvchi kosinuslari hisoblansin.

83. $\vec{a}=\left\{\frac{3}{13};\frac{4}{13};\frac{12}{13}\right\}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari hisoblansin.

84. Vektor Ox va Oz uklari bilan mos ravishda $\alpha=120^\circ, \gamma=45^\circ$ burchak tashkil etadi. Vektor Oy o'q bilan qanday burchak tashkil etadi?

85. $\vec{a}$ vektor Ox va Oy o'qlari bilan mos ravishda $\alpha=60^\circ, \beta=60^\circ$ burchak tashkil etadi. $|\vec{a}|=2$ deb, uning koordinatalari hisoblansin.

86. Quyidagilar berilgan $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$ va $|\vec{a}+\vec{b}|=24$. $|\vec{a}-\vec{b}|$ hisoblansin.

87. Quyidagilar berilgan $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$ va $|\vec{a}-\vec{b}|=23$. $|\vec{a}+\vec{b}|$ aniqlansin.

88. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vertorlar o'zaro perpendikulyar va $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=12$. $|\vec{a}+\vec{b}|$ va $|\vec{a}-\vec{b}|$ lar aniqlansin.

89. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vertorlar o'zaro $\varphi=60^\circ$ burchak tashkil etadi, shu bilan birga $|\vec{a}|=5$ va $|\vec{b}|=8$, $|\vec{a}+\vec{b}|$ va $|\vec{a}-\vec{b}|$ lar aniqlansin.

90. Berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vertorlar yordamida quyidagi vektorlarni yasang:

1) $3\vec{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 3) $\overrightarrow{2a}+\frac{1}{3}\vec{b}$; 4) $\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$.

91. ABS uchburchakda $\overline{AB}=\vec{m}$ va $\overline{AC}=\vec{n}$ bo'lsin.

Quyidagi vektorlarni yasang: 1) $\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$; 2) $\frac{\vec{m}-\vec{n}}{2}$; 3) $\frac{\vec{n}-\vec{m}}{2}$;

4) $-\dfrac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$. Masshtab birligi sifatida $\dfrac{1}{2}\ |\vec{n}|$ ni olib, quyidagi vektor yasalsin:

5) $|\vec{n}|\ \vec{m}+|\vec{m}|\ \vec{n}$; 6) $|\vec{n}|\ \vec{m}-|\vec{m}|\ \vec{n}$.

92. $ABCDA^1B^1C^1D^1$ parallepipedda uning qirralari bilan ustma-ust tushuvchi vektorlar berilgan: $\vec{AB}=\vec{m}$, $\overline{AD}=\vec{n}$ $AA^1=\vec{p}$. Quyidagi vektorlarni yasang:

1) $\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$; 2) $\vec{m}+\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p}$

3) $\frac{1}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}+\vec{p}$; 4) $\vec{m}+\vec{n}-\vec{p}$

5) $-\vec{m}-\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p}$/

93. α va β koeffisientlarning qanday qiymatlarida $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ va $\vec{b}=a\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ vektorlar kollinear bo'ladi?

94. Quyidagi to'rtta nuqtani trapesiyaning uchlari ekanligi tekshirilsin:
$A(3;-1;2)$, $B(1;-2;-3)$, $C(1;-1;-3)$, $D(3;-5;3)$

95. $\vec{a}=\{6;\ \ -2;\ \ -3\}$ vektorning orti topilsin

96. $\vec{a}=\{3;\ \ 4;\ \ -12\}$ vektorning orti topilsin

97. $\vec{a}=\{3;\ \ -5;\ \ 8\}$ va $\vec{b}=\{-1;\ \ 1;\ \ -4\}$ vektor yigindisi va ayirmasining modullari aniqlansin.

98. $\overline{AB}=\{2;\ \ 6;\ \ -4\}$ va $\overline{AC}=\{4;\ \ -2;\ \ 2\}$ vektor ABC uchbukchakning tomolari bilan ustma-ust tushidi. Shu uchburchakning uchlariga qo'yilgan
va uning AM, BN, CP, medianalari bilan ustma-ust tushuvchi vektorlarning koordinatalari aniqlansin.

99. Tekislikda uchta $\vec{a}=\{3;-2\}$, $\vec{b}=\{-2;1\}$ va $\vec{c}=\{7;-4\}$ vektor berilgan. Bu vektorlarning har birining, qolgan ikkita vektorni bazis sifatida qabul qilib, yoyilmasi aniqlansin.

100. Uchta $\vec{a}=\{3;-1\}$, $\vec{b}=\{1;-2\}$ va $\vec{c}=\{-1;7\}$ vektor berilgan. $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ vektorning $\vec{a}$, $\vec{b}$ bazis bo'yicha yoyilmasi topilsin

6-§ IKKI VEKTORNING SKALYAR VA VEKTORYAL KO'PAYTMALARI. XOSSALARI. KO'PAYTIRUVCHI VEKTORNING KOORDINATALARI ORQALI IFODALASH.

Skalyar ko'paytma.

1-ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb, shunday songa aytiladiki, bu son shu vektorlar uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusi ko'paytmasiga teng bo'ladi va odatda $\vec{a}\ \vec{b}$ yoki ($\vec{a}\ \vec{b}$) ko'rinishda yoziladi.

Demak ta'rifga ko'ra $\vec{a}\ \vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$; $\varphi=\vec{a}\wedge\vec{b}$

Misol. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\varphi=60°$ bo'lsa ($\vec{a}\ \vec{b}$)$=3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=3$

Skalyar ko'paytmani qo'yidagicha xam ta'riflash mumkin.

2-ta'rif. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi deb, ixtiyoriy bittasining uzunligini ikkinchisining birinchi vektor yo'nalishidagi proyeksiyasi bilan ko'paytmasiga aytiladi.

$pr_a \vec{b} = |\vec{b}|\cos\varphi$ yoki $pr_b \vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$ tengliklardan foydalansak

$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = |\vec{a}|pr_a \vec{b} = |\vec{b}|pr_b \vec{a}$; $pr_a \vec{b} = \dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|}$; $pr_b \vec{a} = \dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{b}|}$

Skalyar ko'paytmaning fizik ma'nosi: $\vec{F}$ kuchning moddiy nuqtani s masofaga ko'chirgandagi bajargan ishdir. $A = \vec{F}\cdot\vec{s}$ yoki $A = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\varphi$.

Skalyar ko'paytmaning xossalari.

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ o'rin almashtirish xossasi.
2. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{a}\,\vec{c}$ taqsimot xossasi.
3. $\lambda\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\cdot\vec{b})$ guruxlash xossasi.
4. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bir xil yo'nalishdagi kollinear vektorlar bo'lsa, $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ chunki $\cos 0 = 1$.

Agar qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsa, $\vec{a}\,\vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$ chunki $\cos 180^0 = -1$.

5. $\vec{a}\,\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$
6. $\vec{a}$ perpendikulyar $\vec{b}$ bo'lsa, $\vec{a}\,\vec{b} = 0$ bo'ladi.

Eslatma. 5 va 6 xossalardan foydalanib $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birlik vektorlarning skalyar ko'paytmalarini ko'rsak

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{l}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = \vec{k}\cdot\vec{j} = 0$$

tengliklarning o'rinli bo'lishi ravshan.

Skalyar ko'paytmaning koordinatalari orqali ifodasi.

Agar $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ vektorlar koordinatalari orqali berilgan bo'lsa, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ni xisoblaylik.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \{x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\}(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$(eslatmaga ko'ra)$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

Demak koordinatalari bilan berilgan ikkita vektorning skalyar ko'paytmasi mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng bo'lar ekan.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yig'indisi esa qo'yidagicha xisoblanadi:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{x_1 \pm x_2;\ y_1 \pm y_2;\ z_1 \pm z_2\}$$

Ikki vektor orasidagi burchak va parallelik, perpendikulyarlik shartlari.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchakni φ desak bu vektorlarning skalyar ko'paytmasidan

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \qquad (1)$$

ikki vektor orasidagi burchak kosinusini xisoblash formulasi kelib chiqadi.

Agar $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ koordinatalari bilan berilgan bo'lsa,

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (2)$$

Agar $\vec{a} \perp \vec{b}$ bo'lsa, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bo'lib $\cos\varphi = 0$ bo'ladi va (2) dan

$$x_1x_2+y_1y_2+y_1y_2+z_1z_2 = 0 \qquad (3)$$

(3) ikki vektorning perpendikulyarlik sharti. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar parallel bo'lsa, u xolda bu vektorlarning kollinearlik shartidan ya'ni $\vec{\boldsymbol{a}} = \lambda\vec{b}$ dan

$x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} = \lambda(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \Rightarrow x_1 = \lambda x_2$; $y_1 = \lambda y_2$; $z_1 = \lambda z_2$.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \qquad (5)$$

(5) ikki vektorning parallelik sharti.

Misol. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\varphi = \vec{a}\,\hat{}\,\vec{b} = \frac{2\pi}{3}$ bo'lsa $(\vec{a}+\vec{b})^2 = q$,

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + 2(\vec{a}\,\vec{b}) + \vec{b}^{\,2} = 9-12+16=13$$

Vektor ko'paytma.

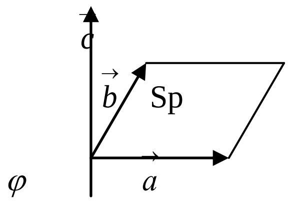
Ta'rif. $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasi deb, qo'yidagicha aniqlanadigan shunday $\vec{c}$ vektorga aytiladi.

1. $\vec{c}$ vektorning moduli son jixatidan tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan tuzilgan parallelogramning yuziga teng $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, $\varphi = \vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}$
2. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$.
3. $\vec{c}$ vektorning musbat yo'nalishi shundayki, agar $\vec{c}$ vektorning uchidan (oxiridan) qaralsa, $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorgacha bo'lgan eng qisqa masofa soat strelkasi aylanishiga qarama-qarshi yo'nalishda bo'ladi.

Vektor ko'paytma $[\vec{a}\,\vec{b}]$ yoki $\vec{a}\times\vec{b}$ ko'rinishlarda belgilanadi.

$S_P = |\vec{c}| = |[\vec{a}\,\vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}|\,\sin\varphi$

$S_{uch} = \frac{1}{2}|[\vec{a}\,\vec{b}]| = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$



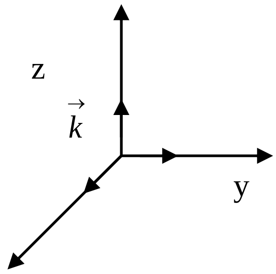
Vektor ko'paytmaning xossalari.

1. $[\vec{a}\ \vec{b}]=-[\vec{b}\ \vec{a}]$.

2. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar parallel bo'lsa , $\vec{a}\times\vec{b}=0$.

3. $\lambda(\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

4. $\vec{\boldsymbol{a}}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.



Endi 1,2 xossalardan foydalanib $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ birlik vektorlarning vektor ko'paytmalarini chiqaraylik.

2-xossaga. ko'ra $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=0$ ekanligi ravshan.

$$|\vec{c}|=|[\vec{i}\ \vec{j}]|=|\vec{i}||\vec{j}|\sin\frac{\pi}{2}=1$$

Ikkinchi tomondan $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{c}$ bu vektor $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorlarga perpendikulyar bo'lib z o'qining musbat yo'nalishi bo'yicha yo'nalgan va $\vec{i}$ dan $\vec{j}$ gacha eng qisqa masofa soat strelkasiga qarshi yo'nalgan bo'ladi. Demak bu vektor $\vec{c}=\vec{k}$ ekan, $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ xuddi shuningdek qolganlarini yozsak.

$$\vec{i}\times\vec{i}=0,\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\ ,\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\ ,\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\ ,\ \vec{j}\times\vec{j}=0,$$

$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\ ,\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\ ,\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\ ,\ \vec{k}\times\vec{k}=0.$$

Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning vektor ko'paytmasi.

$\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$ va $\vec{a}\times\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$ vektorlar berilgan bo'lsin.

$\vec{a}\times\vec{b}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=(y_1z_2-z_1y_2)$

$\vec{i}+(-x_1z_2+z_1x_2)\ \vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\ \vec{k}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

ko'rinishda xam yozish mumkin.

Misol. $\vec{a}=\{2;5;7\}$, $\vec{b}=\{1;2;4\}$, $|[\vec{a}\ \vec{b}]|=q$

$\vec{a}\times\vec{b}=6\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$; $|[\vec{a}\ \vec{b}]|=\sqrt{36+1+1}=\sqrt{38}$

Misollar.

101. $\vec{a}\ \vec{b}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\varphi=\dfrac{2}{3}\pi$ burchakni tashkil etadi. $|\vec{a}|=3,\quad |\vec{b}|=4,$ qiymatlarni bilgan hold quyidagilar hisoblansin:

1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $\vec{a}^{\,2}$, 3) $\vec{b}^{\,2}$; 4) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; 5) $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$;

6) $(\vec{a}-\vec{b})^2$; 7) $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$.

102. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar; $\vec{c}$ vektor ularning har biri bilan $\frac{\pi}{3}$ burchak tashkil etadi; $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$ ekani ma'lum bo'lsa, quyidagilar hisoblansin: 1) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c})$; 2) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$; 3) $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2$.

103. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ shartni qanoatlantiradigan $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ birlik vektor berilgan. $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$ hisoblansin.

104. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ shartni qanoatlantiradigan uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektor berilgan. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 4$ tengliklarni bilgan holda $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$ hisoblansin.

105. $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar juft-jufti bilan $60°$ burchak tashkil etadi. $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 6$ tengliklarni bilgan holda $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ vektorning moduli aniqlansin.

106. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ tengliklar berilgan α ning qanday qiymatida $\vec{a} + a\vec{b}$, $\vec{a} - a\vec{b}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lishi aniqlansin.

107. $\vec{p} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$ vektorning $\vec{c}$ vektorga perpendikulyar ekanligi isbotlansin.

108. $\vec{p} = \vec{b} - \frac{\vec{a}(\vec{a}\vec{b})}{\vec{a}^2}$ vektorning $\vec{a}$ vektorga perpendikulyar ekanligi isbotlansin.

109. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\varphi = \frac{\pi}{6}$ burchak tashkil etadi; $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$ ekanligini bilgan holda, $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ va $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ vektorlar orasidagi a burchak hisoblansin.

110. Teng yonli, to'g'ri burchakli uchburchakning o'tkir burchaklaridan o'tkazilgan medianalari orasidagi o'tmas burchak hisoblansin.

111. $A(-1;3;-7)$, $B(2;-1;5)$ va $C(0;\ 1;-5)$ nuqtalar berilgan. Quyidagilar hisoblansin: 1) $(2\overline{AB} - \overline{CB})\ (2\overline{CB} - \overline{BA})$; 2) $\sqrt{\overline{AB}^2}$; 3) $\sqrt{\overline{AC}^2}$; 4) $(2\overline{CB}\ \overline{BA})$ va $\overline{AB}(\overline{AC}\ \overline{BC})$ vektorlarning koordinatalari topilsin.

112. $\vec{f} = \{3;\ -2;\ -5\}$ kuch qo'yilgan nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qilib, $A(2;\ -3;\ 5;)$ nuqtadan $B(3;\ -2;\ -1)$ nuqtaga siljidi. $\vec{f}$ kuchning bajargan ishi hisoblansin.

113. Bir nuqtaga qo'yilgan uchta kuch berilgan: $\vec{M} = \{3;\ -4;\ 2\}$, $\vec{N} = \{2;\ 3;\ -5\}$ va $\vec{P} = \{-3;\ -2;\ 4\}$. Shu kuchlarning teng ta'sir etuvchisining qo'yilish nuqtasi to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanib, $M_1(5;\ 3;\ -7)$ holatdan $M_2(4;\ -1;\ -4)$ holatga ko'chganda, teng ta'sir etuvchi bajargan ish hisoblansin.

114. To'rtburchakning uchlari A(1; -2; 2), B (1; 4; 0), C (-4; 1; 1) va D(-5; -5; 3) nuqtalarda yotadi. Uning AC va BD diagonallari o'zaro perpendikulyar ekanligi isbotlansin.

115. α ning qanday qiymatida $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ va $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lishi aniqlansin.
116. $\vec{a} = \{2; \quad -4; \quad 4\}$ va $\vec{b} = \{-3; \quad 2; \quad 6\}$ vektorlar tashkil etgan burchakning kosinusi hisoblansin.
117. Uchburchakning uchlari A(-1; -2; 4), B(-4; -2; 0) va C (3; -2; 1) nuqtalarga yotadi. Uning B uchidagi ichki burchagi aniqlansin.
118. Uchburchakning uchlari A(-1; -2; 4), B(-4; -2; 0) va C(3; -2; 1) nuqtalarga yotadi. Uning A uchidagi takshi burchagi aniqlansin.

119. Uchlari A(1; 2; 1), B(3; -1; 7), C(7; 4; -2) bo'lgan uchbarchakning ichki burchakni hisoblash yordamida uchburchakning teng yonli ekanini isbotlang.

120. $\vec{a} = \{6; \quad -8; \quad -7.5\}$ vektorga kollinear bo'lgan $\vec{x}$ vektor Oz o'q bilan o'tkir burchak tashkil etadi. $|\vec{x}| = 50$ ekanligini bilgan holda, uning koordinataltri aniqlansin.

121. $\vec{a} = \{2; \quad 1; \quad -1\}$ vektorga kollinear bo'lgan hamda $\vec{x}\vec{a} = 3$ shartni qanoatlantiradigan $\vec{x}$ vektor topilsin.
122. $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ va $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$ vektorlarga perpendikulyar bo'lgan $\vec{x}$ vektor Oy o'q bilan o'tmas burchak tashkil qiladi. $|\vec{x}| = 14$ ekanligini bilgan holda, uning koordinatalari aniqlansin.
123. $\vec{a} = \{2; \quad 3; \quad -1\}$ va $\vec{b} = \{1; \quad -2; \quad 3\}$ vektorlarga perpendikulyar bo'lgan va $\vec{x}\left(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right) = -6$ shartni qanoatlantiradigan $\vec{x}$ vektor topilsin.
124. $\vec{a} = \{3; \quad -1; \quad 5\}$ va $\vec{b} = \{1; \quad 2; \quad -3\}$ vektorlar berilgan. OZ o'qqa perpendikulyar bo'lgan va $\vec{x}\vec{a} = 9, \vec{x}\vec{b} = -4$ shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{x}$ vektor topilsin.
125. Uchta $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ va $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ vektor berilgan. $\vec{x}\vec{a} = -5, \vec{x}\vec{b} = -11, \vec{x}\vec{c} = 20$ shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{x}$ vektor topilsin
126. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\varphi = \pi/6$ burchakni hosil qiladi. Agar $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 5$ bo'lsa $\left|\left[\vec{a} \quad \vec{b}\right]\right|$ ni hisoblang.
127. Quyidagi kattaliklar berilgan: $|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 2$ va $\vec{a}\vec{b} = 12.$ $\left|\left[\vec{a} \quad \vec{b}\right]\right|$ ni toping.
128. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro perpendikulyardir. Agar $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$ bo'lsa, quyidagilar hisoblansin: 1) $\left|\left[(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})\right]\right|$; 2) $\left|\left[(3\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})\right]\right|$
129. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ burchakni tashkil etadi. $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$ ekanligini bilgan holda quyidagilarni hisoblang: 1) $\left[\vec{a} \quad \vec{b}\right]^2$; 2) $\left|(2\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})\right|$; 3) $\left|(\vec{a} + 3\vec{b})(3\vec{a} - \vec{b})\right|$

7-§ UCHTA VEKTORNING ARALASH KO'PAYTMASI. XOSSALARI. ARALASH KO'PAYTMANI VEKTORNING KOORDINATALARI ORQALI IFODASI. IKKI KARRALI VEKTOR KO'PAYTMA TUSHUNCHASI.

Uchta vektorning aralash ko'paytmasi.

$\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$ va $\vec{c}=\{x_3, y_3, z_3\}$

vektorlar berilgan bo'lsa, bu vektorlarning aralash ko'paytmasi deb , $\vec{a}\times\vec{b}$ vektor ko'paytma bilan $\vec{c}$ vektorning skalyar ko'paytmasiga aytiladi va odatda $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$ ko'rinishda yoziladi

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k},\ \vec{c}=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k},$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}\right)(x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k})=$$

$$=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}x_3+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}y_3+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}z_3=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosi qirralari berilgan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning modullaridan tashkil topgan parallelopepedning xajmini ifodalaydi.

Fazodagi ixtiyoriy $\vec{a}$, $\vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning komplanar vektorlar bo'lishi uchun ularning aralash ko'paytmasi nol bo'lishi zarur va kifoya.

Misol. Uchlari O(0;0;0) , A(5;2;0), B(2;5;0) , C(1;2;4) nuqtalarda bo'lgan parallelopipedning xajmini toping.

$$\boldsymbol{V=(\vec{OA}\times\vec{OB})\cdot\vec{OC}=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}}=84 \text{ kub birlik.}$$

Misollar.

130. $\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ shartni qanoatlantiradi. $[\vec{a}\ \ \vec{b}]=[\vec{b}\ \ \vec{c}]=[\vec{c}\ \ \vec{a}]$ Tenglik o'rinli ekanini isbotlang.

131. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ va $\vec{d}$ vektorlar uchun $[\vec{a}\ \ \vec{b}]=[\vec{c}\ \ \vec{d}]$, $[\vec{a}\ \ \vec{c}]=[\vec{b}\ \ \vec{d}]$ tengliklar o'rinli.

132. $\vec{P}=\{2;\ \ -4;\ \ 5\}$ kuch $M_0(4;\ \ -2;\ \ 3)$ nuqtaga qo'yilgan. $\vec{P}$ kuchning A (3; 2; -2) nuqtaga nisbatan momentini aniqlang.

133. $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$ va $C(5;2;6)$ nuqtalar berilgan. ABC uchburchaqning yuzasini hisoblang.

134. Uchburchakning uchta uchi $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$ va $C(1;3;-1)$ lar berilgan. Uchburchakning B uchidan AC tomoniga balandlik tushirilgan. Ushbu balandlikni uzunligi topilsin.

135. $\vec{a}=\{2;-1;1\}$ va $\vec{b}=\{2;3;6\}$ vektorlar orasidagi burchak sinusi hisoblang.

136. $\vec{x}$ vektor $\vec{a}=\{4;-2;-3\}$ va $\vec{b}=\{0;1;3\}$ vektorlarga perpendikulyar bo'lib, OY o'qi bilan o'tmas burchak hosil qiladi. $\vec{x}$ vektorning uzunligi $|\vec{x}|=26$, uning koordinatlarini aniqlang.

137. $\vec{m}$ vektor OZ o'qiga hamda $\vec{a}=\{8;-15;3\}$ vektorga perpendikulyar va OX o'qi bilan o'tkir burchak tashkil etadi. $|\vec{m}|=51$ ekani ma'lum bo'lsa, uning koordinatlarini toping.

138. $\vec{x}$ vektor $\vec{a}=\{2;-3;1\}$ va $\vec{b}=\{1;-1;3\}$ vektorlarga perpendikulyar hamda $\vec{x}=(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=10$ tenglikni qanoatlantiradi. $\vec{x}$ vektorni aniqlang.

139. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar va o'ng uchlikni tashkil etadi. Ularning uzunliklari $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$ berilgan. $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ hisoblansin.

140. $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyar. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak 30 ni tashkil qiladi. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{c}|=3$ bo'lsa, $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ ni toping.

141. Ayniyatni isbotlang: $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}+\vec{c})\ (\vec{c}+\vec{a})=2\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

142. Ayniyatni isbotlang: $\vec{a}\vec{b}\ (\vec{c}+\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})=\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$, bu erda λ va μ -ixtiyoriy sonlar.

143. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorning komplanar bo'lishi uchun $\overrightarrow{\alpha a}+\overrightarrow{\beta b}+\overrightarrow{\gamma c}=0$ shartning bajarilishi zarur va etarli ekanini isbotlang. Bunda α,β,γ sonlarning kamida bittasi noldan farqli.

144. Quydagi uchta vektor berilgan: $\vec{a}=\{1;-1;3\}$, $\vec{b}=\{-2;2;1\}$, $\vec{c}=\{3;-2;5\}$ $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ hisoblansin.

145. Uchlari $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$ va $D(4;1;3)$ nuqtalardan iborat tetraedrning hajmi hisoblansin.

146. Uchburchakning uchlari berilgan : $A(2;-1;-3)$, $B(1;2;-4)$, $C(3;-1;-2)$, $\vec{h}$ vektor berilgan uchburchakning A uchidan uning qarama-qarshi tomoniga tushirilgan balandligiga kollineardir. $\vec{h}$ vektor OY o'qi bilan o'tmas burchak tashkil qiladi va moduli $2\sqrt{34}$ ga teng. $\vec{h}$ vektorning koordinatlarini aniqlang.

147. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar noldan farqli. Berilgan vektorlar o'zaro qanday joylashganda $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]=[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}]$ tenglik o'rinli bo'ladi?

8-§. TEKISLIKDAGI TO'G'RI CHIZIQ.

To'g'ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi.

Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan φ $(\varphi \neq \frac{\pi}{2})$ burchak tashkil qilib, Oy o'qidan b kesma ajratib o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzaylik. Bu to'g'ri chiziq tenglamasini tuzish degan so'z undagi ixtiyoriy M(x,y) nuqta koordinatalarini o'zaro bog'lovchi tenglamani topish demakdir.

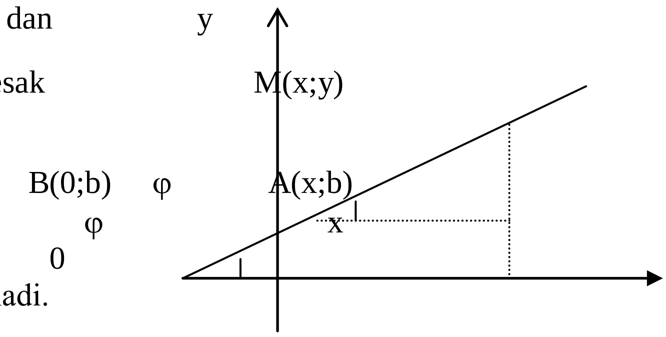
$OB = b$, $AM = y - b$, $AB = x$, ΔABM dan

$tg\varphi = \frac{y-b}{x}$ $\Rightarrow$ y=xtgφ+b , tgφ=k desak

u=kx+b. (1)to'g'ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi deyiladi.

k=tgφ (2) to'g'ri chiziqning burchak koeffisiyenti deyiladi.

k=0 bo'lsa, u=b; b=0 bo'lsa u=kx bo'ladi.



Misol. b=-2, k=45° bo'lsa, to'g'ri chiziq tenglamasi y=x-2 bo'ladi.

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.

Ax+Bx+C=O (1) ko'rinishdagi birinchi darajali tenglamaga to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

1. Agar (1) da C=0 bo'lsa, Ax+Bx=0 bo'lib koordinata boshidan o'tgan to'g'ri chiziqni ifodalaydi.
2. Agar (1) da A=0 bo'lsa, By+C=0* y=-C/B bu esa (0,-C/B) nuqtadan o'tib Ox o'qiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqdir.
3. Agar B=O bo'lsa, $x = -\frac{C}{A}$ bo'lib Oy o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'ladi.
4. C=0, B=0 bo'lsa, Ax=0 $\Rightarrow$x=0 - bu Oy o'qining tenglamasi.
5. C=0 A=0 bo'lsa, By=0 $\Rightarrow$ y=0 - bu Ox o'qining tenglamasi.

Misol. 2x+3u +7=0 umumiy tenglamani burchak koeffisyentli kurinishda yozing.
2x+3y+7=0, 3y=-2x-7,y=-2/3x-7/3; k=-2/3 ; b=-7/3.

Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak va ularning parallellik, perpendikulyarlik shartlari.

Bir - biri bilan kesishadigan L_1, L_2 to'g'ri chiziqlarning tenglamalari mos ravishda

L_1:y= k_1x+b_1

L_2:y= k_2x+b_2

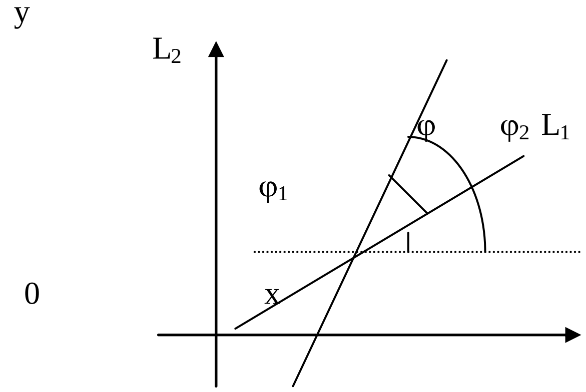
bo'lsin. tg φ=q

Chizmadan $\varphi_2 = \varphi + \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

$$tg\varphi = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 tg\varphi_2}$$

$tg\varphi_1 = k_1$, $tg\varphi_2 = k_2$

ekanliklarini e'tiborga olsak



$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$ (1) ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.

Agar 0< φ <90^o bo'lsa , tgφ>0 ; 90^o < φ <180^o bo'lsa , tgφ < 0 .

Agar L_1, L_2 to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa $\varphi=0$ bo'lib $tg\varphi=0$ bo'ladi.
Bu xolda (1) dan $k_2-k_1=0$ $\boxed{k_2=k_1}$ (2)
(2)-ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti.
Agar L_1, L_2 to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lsa, $\varphi=90$ bo'lib $\varphi_2=\varphi+\varphi_1=90+\varphi_1$; $tg\varphi_2=tg(90+\varphi_1)=-\dfrac{1}{tg\varphi_1}$; $tg\varphi_2=-\dfrac{1}{tg\varphi_1}$, $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$ yoki

$\boxed{k_1k_2=-1}$ (3)

(3) ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti.

Misol. 1) $3x+y-6=0$ $x+2y+1=0$ tugri chiziqlar orasidagi burchak $\varphi=45^o$.

2) $M_1(-3;1)$ nuktadan o'tib $2x+y-3=0$ to'g'ri chiziqga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi $x-2y+1=0$ bo'ladi.

Berilgan nuqtadan o'tib, berilgan vektorga

perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

xOy tekisligidagi biror L to'g'ri chiziqda yotgan $M_1(x_1,y_1)$ nuqta va bu to'g'ri chiziqga perpendikulyar bo'lgan $\vec{N}=A\vec{i}+B\vec{j}$ vektor berilgan bo'lsin. $\vec{N}$ vektorga L to'g'ri chiziqning normal vektori deyiladi. L to'g'ri chiziqning xOy tekislikdagi xolati $M_1(x_1,y_1)$ nuqta va $\vec{N}=\{A,V\}$ normal vektorlarning berilishi bilan to'liq aniqlanadi.
L to'g'ri chiziqda biror M(x,y) nuqta olaylik va bu nuqta kordinatalarini o'zaro bog'lovchi shu to'g'ri chiziqning tenglamasini chiqaraylik.

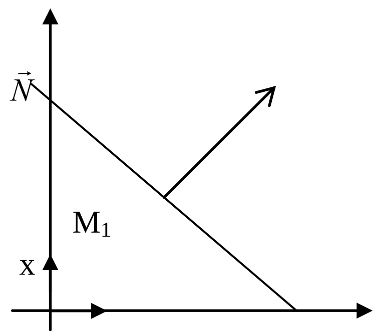
$\vec{N}=A\vec{i}+B\vec{j}$ va $\overrightarrow{M_1N}=(x-x_1)\vec{i}+(y-y_1)\vec{j}$

vektorlar perpendikulyar bo'lgani uchun ularning skalyar ko'paytmasi nol bo'ladi.

$\vec{N}\cdot\overrightarrow{M_1M}=0$ dan $(A\vec{i}+B\vec{j})((x-x_1)\vec{i}+(y-y_1)\vec{j})=0$,

$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$

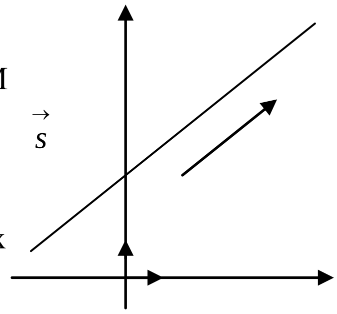
izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasi.



Misol. M(-1,3) nuqtadan o'tib $\vec{N}=2\vec{i}-3\vec{j}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi $2x-5u+17=0$ bo'lishi ravshan.

To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi.

XOy tekisligidagi biror L to'g'ri chiziqda yotgan biror $M_1(x_1,y_1)$ nuqta va bu to'g'ri chiziqga parallel bo'lgan yoki ustma-ust tushgan $\vec{s}=m\vec{i}+n\vec{j}$ vector berilgan bo'lsin. $\vec{s}$ vektorni L to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deyiladi.
L to'g'ri chiziqning xolati $M_1(x_1,y_1)$ nuqta va $\vec{s}=\{m,n\}$ larning berilishi bilan to'la aniqlanadi.



L ustida M(x,y) nuqta olsak $\overrightarrow{M_1M}$ va $\vec{s}$ vektorlar kollinear bo'lgani uchun

$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\vec{s}\Rightarrow$ $(x-x_1)\vec{i}+(y-y_1)\vec{j}=\lambda(m\vec{i}+n\vec{j})$,

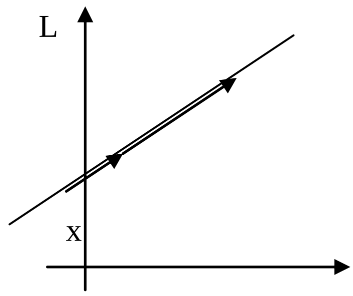
$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}$$ - to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi

Berilgan ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

Tekislikda berilgan $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzaylik. L da biror M(x,y) nuqta olib

vektorni L to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi $\vec{s}=\overrightarrow{M_1M}$

vektori sifatida olsak



$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{M_1M_2}\Rightarrow$, $(x-x_1)\ \vec{i}+(y-y_1)\ \vec{j}=$

$=\lambda[(x_2-x_1)\ \vec{i}+(y_2-y_1)\ \vec{j})\quad\Rightarrow\quad\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$

-berilgan ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

Misol. $M_1(1,2)$, M(2,3) nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

x+3y-7=0

Berilgan nuqtadan berilgan yo'nalishda o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

xOy tekisligidagi Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan φ burchak tashkil qiluvchi biror L to'g'ri chiziq berilgan bo'lsa, bu to'g'ri chiziqning xolati shu φ burchak bilan shu to'g'ri chiziqda yotuvchi biror $M_1(x_{1i}y_1)$ nuqtaning berilishi bilan to'liq aniqlanadi. L to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deb,

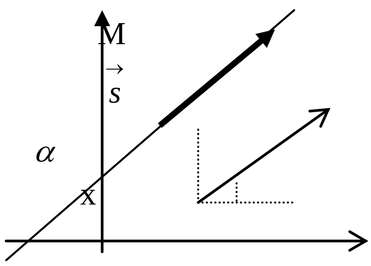
Shu L to'g'ri chiziqga parallel bo'lgan

$\vec{s}=\vec{i}\cos\alpha+\vec{l}\sin\alpha$; $|\vec{s}|=1$; [cosα=cos(90°-α)=sinα]

birlik vektorni olaylik. L to'g'ri chiziq ustida

biror M(x,y) nuqta olsak $\vec{s}$ va $\overrightarrow{M_1M}$ vektorlar

kollinear vektorlar bo'lgani uchun



$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\cdot\vec{s}\Rightarrow(x-x_1)\ \vec{i}+(y-y_1)\ \vec{j}=\lambda\cdot(\vec{i}\cos\alpha+\vec{l}\sin\alpha)$

$$\begin{cases}x-x_1=\lambda\cos\alpha\\ y-y_1=\lambda\sin\alpha\end{cases}\quad\lambda=\frac{x-x_1}{\cos\alpha},\quad\lambda=\frac{y-y_1}{\sin\alpha}\quad\Rightarrow\quad\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\sin\alpha}\quad\Rightarrow\quad y-y_1=k(x-x_1)$$

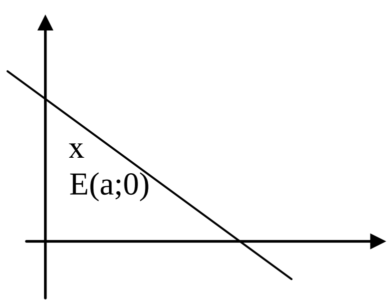
$(k=tg\alpha)$

Bu tenglamaga berilgan nuqtadan berilgan yo'nalishda o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi deyiladi.

Misol. M(2,-1) nuqtadan o'tgan Ox o'qi bilan $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ burchak tashkil qiluvchi to'g'ri chiziq tenglamasini toping. $k=tg\alpha=\sqrt{3}\quad\sqrt{3}x-y-1-2\sqrt{3}=0$.

To'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi.

Koordinata o'qlaridan mos ravishda a va b kesmalarni kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini chiqaraylik. Izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasini Ax+Bu+C=0 (1) ko'rinishda olaylik. $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, deb, Ye(a,0), F(0,b) nuqtalar to'g'ri chiziqda yotgani uchun,bu nuqtalar koordinatalarini (1) ga qo'ysak

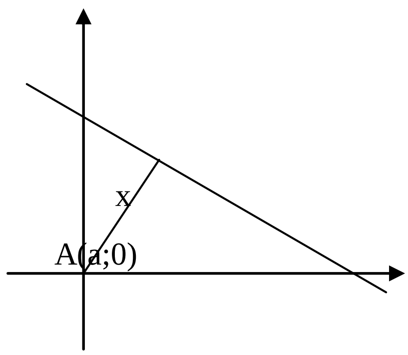


$\boldsymbol{A=-\frac{c}{a}}$, $\boldsymbol{B=-\frac{c}{b}}$ kelib chiqadi. Bularni (1) ga quysak $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (2)
to'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi kelib chiqadi.

To'g'ri chiziqning normal tenglamasi.

Izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasini
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (1) ko'rinishida olaylik.
Koordinata boshidan to'g'ri chiziqgacha
bo'lgan masofani OC=p deylik.
p masofa va α burchaklar berilgan bo'lsin.
u xolda AOC uchburchakdan , $a=\frac{p}{\cos\alpha}$

BOC uchburchakdan $\frac{p}{OB}=\cos(90^0-\alpha)\Rightarrow b=\frac{p}{\sin\alpha}$



topilgan a,b larni (1) ga qo'ysak

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p=0 \quad (2)$$

to'g'ri chiziqning normal tenglamasi deyiladi.

Agar to'g'ri chiziqning tenglamasi Ax+By+C=0 (3) umumiy ko'rinishda berilgan bo'lsa , uni normal ya'ni (2) ko'rinishga keltirish uchun (3) ning xar ikkala tomonini normallovchi ko'paytuvchi deb ataluvchi

$\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ ga ko'paytirish kifoya . Ildiz oldidagi ± ishora (3) dagi C ning ishorasiga teskari olinadi.

$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$ (4) normal tenglama (2) bilan (4) ni solishtirsak

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}};\ \sin\alpha=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}};\ -p=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

Misol. 4x-3u-10=0 to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini normal ko'rinishga keltiring.

Yechish. $\mu=\frac{1}{\sqrt{16+9}}=\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-2=0$ -bu normal tenglama.

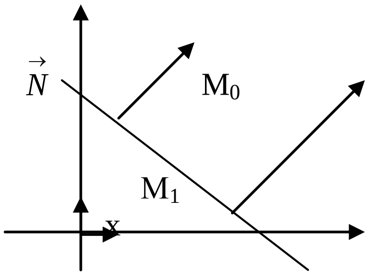
Nuqtadan to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa.

Tekislikda tenglamasi Ax+By+C=0 (1) bo'lgan L to'g'ri chiziq va $M_o(x_o,y_o)$ nuqta berilgan bo'lsin. M_o nuqtadan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning to'g'ri chiziq bilan kesishgan nuqtasini $M_1(x_1,y_1)$ deylik. Bu xolda berilgan $M_o(x_o,y_o)$ nuqtadan L to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa

$\vec{d}=\overrightarrow{M_1M_0}=(x_0-x_1)\vec{i}+(y_0-y_1)\vec{j}$ vektorning moduliga teng bo'ladi. $\vec{d}$ va $\vec{N}$ vektorlar kollinear vektorlar bo'lgani uchun ular orasidagi burchak yoki 0 yoki π ga teng bo'lib, cosφ=±1 bo'ladi.

Shuning uchun $\vec{N}\cdot\vec{d}=\pm|\vec{N}|\cdot|\vec{d}|\cos\varphi \Rightarrow \quad \vec{N}\cdot\vec{d}=|\vec{N}|\cdot|\vec{d}|$ (2).

Ikkinchi tomondan $\boldsymbol{\vec{N}\cdot\vec{d}=(A\,\vec{i}+B\,\vec{j})[(x_0-x_1)\,\vec{i}+(y_0-y_1)\,\vec{j}]}$



$\vec{N}\cdot\vec{d}$ $=Ax_0+By_0-(Ax_1+By_1)$ (3)

$M_1(x_1,y_1)$ nuqta L to'g'ri chiziqda yotgani uchun

$x_1+By_1+C=0$, $C=-(Ax_1+By_1)$ bu xolda

(3) qo'yidagicha bo'ladi.

$\vec{N}\cdot\vec{d}=Ax_0+By_0+C$ (4), $|\vec{d}|=d$, $\vec{N}|=\sqrt{\boldsymbol{A^2+B^2}}$ L larni e'tiborga olib (2) va (4) larning o'ng tomonlarini tenglashtirsak

$\pm|\vec{N}\cdot\vec{d}|=Ax_0+By_0+C \Rightarrow d=\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ ёки $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

izlanayotgan masofa formulasi kelib chiqadi.

Misol. Uchlarining koordinatalari A(1,2);B(-2,1);C(2;3) bo'lgan uchburchakning A uchidan tushirilgan balandlikning uzunligini toping.

Yechish.BC: x-2y+4=0 A nuqtadan BC to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa

$$d=\frac{|1\cdot1-2\cdot2+4|}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 0{,}45$$

Misollar.

148. $M_1(3;1)$, $M_2(2;3)$, $M_3(6;3)$, $M_4(-3;-5)$, $M_5(3;-1)$, $M_6(-2;1)$ nuqtalarning qaysilarning $2x-3y-3=0$ to'g'ri chiziqda yotishi, qaysilari yotmasligi aniqlansin.

149. P_1, P_2, P_3, P_4 va P_5 nuqtalar $2x-3y-6=0$ to'g'ri chiziqda joylashgan; ularning abssissalari mos ravishda 4,0,2,-2 va -6 sonlarga teng. Bu nuqtalarning ordinatalari aniqlansin.

150. $2x-3y-12=0$ to'g'ri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari aniqlansin va shu to'g'ri chiziq chizmada yasalsin.

151. Ikkita $3x-4y-29=0$, $2x+5y+19=0$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi topilsin.

152. ABC uchburchakning AB, BC va AC tomonlari mos ravishda $4x-3y-5=0$ $x-3y+10=0$; $x-2=0$ tenglamalar bilan berilgan. Uning uchlarini koordinatlarini aniqlansin.

153. Parallelogrammning ikkita tomonini tengmalarini $8x+3y+1=0$; $2x+y-1=0$ va uning diagonalaridan berining tenglamasi $3x+2y+3=0$ berilgan. Shu parallelogrammning uchlarini koordinatlari aniqlansin.

154. Uchburchakning tomonlari $x+5y-7=0$; $3x-2y-4=0$; $7x+y+19=0$ to'g'ri chiziqlarda yotadi. Uning S yuzi hisoblansin.

155. Burchak koeffisienti k va Oy o'qdan kesgan kesmasi b bo'lgan to'g'ri chiziqning tenglamasi tuzilsin va chizmasi yasalsin:

1) $k=\dfrac{2}{3}$, $b=3$; 2) $k=3$, $b=0$; 3) $k=0$, $b=-2$; 4) $k=-\dfrac{3}{4}$, $b=0$

5) $k=-2$, $b=-5$; 6) $k=-\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{2}{3}$;

156. Quydagi to'g'ri chiziqlarning har biri uchun k burchak kooeffisient va Oy o'qdan ajratilgan. B kesma aniqlansin:

1) $5x-y+3=0$; 2) $2x+3y-6=0$; 3) $5x+3y+2=0$; 4) $3x+2y=0$; 5) $y-3=0$;

157. Ushbu $5x+3y-3=0$ to'g'ri chiziq berilgan. Bu to'g'ri chiziqqa parallel va perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiqziqlarning burchak koeffisientlari aniqlansin.

158. To'g'ri to'rtburchagning ikkita tomonining tenglamalari $2x-3y+5=0$; $3x+2y+15=0$ va uning uchlaridan biri $A\left(2;-3\right)$ berilgan. Shu to'g'ri to'rtburchagning ikkita tomonining tengmalari tuzilsin.

159. To'g'ri to'rtburchagning ikkita tomonining tenglamalari $x-2y=0$; $x-2y+15=0$ va uning diagonallaridan birining tenglamasi $7x+y-15=0$ berilgan. To'g'ri to'rtburchagning uchlari topilsin.

160. Ushbu $P\left(-6;4\right)$ nuqtaning $4x-5y+3=0$ to'g'ri chiziqdagi proeksiyasi topilsin.

161. Ushbu $2x+3y-3=0$ to'g'ri chiziqqa nisbatan $P\left(-5;13\right)$ nuqtaga simmetrik bo'lgan Q nuqta topilsin.

162. Berilgan ikkita nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqning burchak koeffisienti k hisoblansin:
a) M_1(2;5), M_2(3;2); b) P(-3;1), Q(7;8); v) A(5;-3), B(-1;6).

163.Uchburchagning A(2;-2), B(3;-5) va C(5;7) uchlari berilgan. Uning A uchidagi ichki burchagining bissektrisasiga C uchidan tushirilgan perpendikulyarining tenglamasi tuzilsin.

164. Uchlari A(3;2), B(5;-2),C(1;0) bo'lgan uchburchaginin tomonlarini va medianalarini tenglamalari tuzilsin.

165. M_1(-1;2) va M_2(2;3) nuqtalar orqali to'g'ri chiziq o'tkazilgan. Shu to'g'ri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari aniqlansin.

166. ABCD parallelogrammning ikkita qo'shni A(-3;-1) va B (2;2) uchlari hamda uning diagonallarini kesishish nuqtasi Q(3;0) berilga. Shu parallelogrammning tomonlarini tenglamalari tuzilsin.

167. To'g'ri to'rtburchagning ikkita tomonini tenglamalari $5x+2y-7=0$; $5x+2y-36=0$ va uning diagonali $3x+7y-10=0$ berilgan. Shu to'g'ri to'rtburchagning qolgan tomonlari va ikkinchi diagonalini tenglamalari tuzilsin.

168. Ikkita to'g'ri chiziq orasidagi φ burchak aniqlansin.
1) $5x-y+7=0$, $3x+2y=0$; 2) $3x-2y+7=0$, $2x+3y-3=0$.

169. To'g'ri chiziqlar berilgan:
1) $2x+3y-6=0$; 2) $4x-3y+24=0$; 3) $2x+3y-9=0$;
4) $3x-5y-2=0$; 5) $5x+2y-1=0$. Ular uchun "kesmalardagi" tenglamalar tuzilsin va bu to'g'ri chiziqlar chizmada yasalsin.

170. C(1;1) nuqtadan o'tib, koordinat burchakdan yuzi 2 kv. birlikka teng bo'lgan uchburchak kesuvchi to'g'ri chiziqning tenglamasi tuzilsin.

171. B(5;5) nuqtadan o'tib, koordinat burchakdan yuzi 50 kv. birlikka teng uchburchak kesuvchi to'g'ri chiziqning tenglamasi tuzilsin.

172. To'g'ri chiziqlarning quydagi tenglamalarini qaysilari normal tenglama ekanligi aniqlansin:
1) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0$; 2) $\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}y-1=0$; 3) $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y+2=0$;
4) $-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-2=0$; 5) $-x+2=0$; 6) $x-2=0$;
7) $y+2=0$; 8) $-y-2=0$.

173. Quyidagi hollarning har birida to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi normal ko'rinishga keltirilsin:

1) $4x-3y-10=0$; 2) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+10=0$; 3) $12x-5y+13=0$; 4) $x+2=0$;

5) $2x-y-\sqrt{5}=0$.

9-§. TEKISLIK VA UNING TENGLAMALARI.

Tekislikning umumiy tenglamasi.

Agar $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ tenglamada qavslarni ochib so'ngra

$-Ax_1-By_1-Cz_1=D$ desak

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0} \quad (1)$$

tenglama kelib chiqadi. (1) ga tekislikning umumiy tenglamasi deyiladi.

1. Agar (1) da D=0 bo'lsa , Ax+By+Cz=0 bo'lib, koordinata boshidan o'tgan tekislikni ifodalaydi.

2. Agar (1) da A=0 bo'lsa, By+Cz+D=0 tekislik Ox o'qiga parallel.
Agar B=0 bo'lsa, Ax+Cz+D=0 tekislik Oy o'qiga parallel bo'ladi. C=0 bo'lsa, Ax+By+D=0 tekislik Oz o'qiga parallel bo'ladi.

3. Agar C=0 D=0 bo'lsa, Ax+By=0 tenglama Oz o'qidan o'tgan tekislikni tasvirlaydi. Agar A=0, D=0 bo'lsa, tekislik Ox o'qidan o'tadi. Agar B=0, D=0 bo'lsa, tekislik OY o'qidan o'tadi.

4. $A\neq 0$, $D\neq 0$, B=C=0 bo'lsa, Ax+D=0 yoki $x=-\frac{D}{A}$ yOz koordinatalar tekisligiga parallel bo'lgan tekislik tenglamasi bo'ladi.
Shuningdek A=C=0, $B\neq 0$, $D\neq 0$ bo'lsa, By+D=0 xOz tekisligiga parallel, A=B=0, $C\neq 0$, $D\neq 0$ bo'lsa, Cz+D=0 xOy tekisligiga parallel tekisliklarni ifodalaydi.

5. Agar $A\neq 0$, B=C=D=0 bo'lsa, Ax=0 yoki x=0 tenglama yOz tekislikni tasvirlaydi.
$B\neq 0$, A=C=D=0 bo'lsa, By=0 yoki y=0 xOz tekislikni,
$C\neq 0$, A=B=D=0 bo'lsa, Cz=0 yoki z=0 xOy tekisliklarni ifodalaydi.

Tekislikning kesmalar buyicha tenglamasi.

Koordinata boshidan o'tmagan va koordinata o'qlariga parallel bo'lmagan tekislik tenglamasi Ax+Vy+Sz+D=0 (1) ko'rinishda bo'lib,
$A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, $D\neq 0$ bo'lsin. (1) ni qo'yidagicha yozib olaylik:

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1 \quad \text{ёки} \quad \frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1$$

Agar $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$ десак $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

bo'ladi.

Oxirgi tenglamaga tekislikning kesmalar buyicha tenglamasi deyiladi. a,b,s lar tekislikning mos ravishda Ox,Oy,Oz o'qlaridan ajratgan kesmalardir.

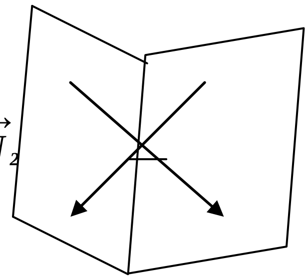
Misol. -3x-2u+1,5z=6 tenglamani kesmalar ko'rinishga keltiring.

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{4}=1; \quad a=-2; \ b=-3; \ z=4 .$$

Tekisliklar orasidagi burchak va ularning

parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

Fazoda o’zaro kesishuvchi ikkita tekislik quyidagi tenglamalar bilan berilgan bo’lsin.
Q_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, Q_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
Ikkita tekislik kesishganda ikkita ikki yoqli burchak xosil bo’lib, ularning bittasi shu tekisliklarning normal vektorlari orasidagi φ burchak bo’lib, ikkinchisi esa 180°- φ bo’ladi



Tekisliklarning normal $\vec{N}_1 = A_1\vec{i}\, B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$ $,\vec{N}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$ vektorlari orasidagi burchak:

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = |\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2| \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (1)$$

Agar tekisliklar o’zaro perpendikulyar bo’lsa , φ =90° bo’lib cos φ =0 bo’ladi. Bu (1) dan

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \quad (2)$$

(2) ikki tekislikning perpendikulyarlik sharti kelib chikadi .

Agar tekisliklar parallel bo’lsa, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ normal vektorlar kollinear bo’lib, ularning koordinatalari propors ional bo’ladi.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (3)$$

(3) ikkita tekislikning parallellik sharti.

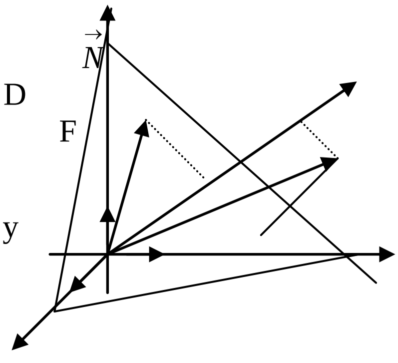
Misol. 2x+3u-z+2=0, x+u+5z-1=0 tekisliklar orasidagi burchak φ=90⁰ bo’lishini ko’rish qiyin emas.

Tekislikning normal tenglamasi.

Tekislikdan berilgan nuktagacha bo’lgan masofa.

Bizga biror Q tekislik berilgan bo’lsin. Koordinata boshidan shu tekislikka tushirilgan perpendikulyarni shu tekislikning normal vektori sifatida olaylik. Normal vektorning tekislik bilan kesishish nuqtasini A deb, OA=p deylik.

Tekislikning $\vec{N}$ normal yo’nalishida



$\vec{n}_0 = \{\cos\alpha ; \cos\beta ; \cos\gamma\}$ birlik vektorni va biror B(x,y,z) nuqtani olaylik. Bu xolda

$пр_{\vec{n}_0} \overrightarrow{OB} = OA = p$ (1) bo’ladi. Ikkinchi tomondan proyeksiyalar xaqidagi nazariyaga ko’ra

$|\vec{n}_0|\, np_{\vec{n}_0} \overrightarrow{OB} = \vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{OB}$ (2) $|\vec{n}_0|=1$ (1) va (2) larning chap tomonlari teng bo’lgani uchun o’ng tomonlarini tenglashtirsak

$\vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{OB} = p$ yoki $(\cos\alpha\, \vec{i} + \cos\beta\, \vec{j} + \cos\gamma\, \vec{k})(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = p$

yoki $$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \quad (3)$$

tekislikning normal tenglamasi deyiladi.

Agar tekislikning tenglamasi Ax+Vy+Sz+D=0 (4) ko'rinishda berilgan bo'lsa , uni (3) normal ko'rinishga keltirishni ko'raylik . (3) va (4) lar bitta tekislik tenglamasi bo'lgani uchun bu tenglamalarning koeffisiyentlari proporsional bo'lishi kerak. Shuning uchun (4) ni λ ga ko'paytirib (3) ga tenglasak $\lambda(Ax+By+Cz+D)= x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p$,

$$\lambda A=\cos\alpha;\ \lambda B=\cos\beta;\ \lambda C=\cos\gamma;\ \lambda D=-p \quad (5)$$

(5)dan $\lambda=\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ kelib chiqadi . λ ga normallovchi ko'paytuvchi deyiladi, uning ishorasi (4) dagi D ning ishorasiga teskari olinadi.

$$\lambda Ax+\lambda By+\lambda Cz+D=0 \ \Rightarrow\ \frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0 \quad (6).$$

(6) tekislikning normal tenglamasi bo'ladi.

(5) dan $\cos\alpha=\dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; $\cos\beta=\dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; $\cos\gamma=\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$D=-\dfrac{p}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ ekanligi ravshan.

Endi Q tekislikdan berilgan $F(x_o;\ y_o;\ z_o)$ nuqtagacha bo'lgan masofani xisoblashni ko'raylik.

Bu masofa $F(x_o;\ y_o;\ z_o)$ nuqtadan tekislikka tushirilgan d=EF perpendikulyar bo'lishi ravshan. Agar tekislik tenglamasi

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

normal ko'rinishda berilgan bo'lsa , izlanayotgan masofa

$$d=|\,x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p\,| \quad (6)$$

formula bilan xisoblanadi.

Agar tekislik tenglamasi Ax+By+Cz+D=0 umumiy ko'rinishda berilgan bo'lsa

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad (7) \quad \text{bo'ladi.}$$

Misol. F(3,-2,1) nuqtadan 3x+6y-5z+2=0 tekislikgacha bo'lgan masofani toping.

Yechish. Tenglamani normal ko'rinishga keltiraylik.

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{70}},\quad -\frac{3}{\sqrt{70}}x+\frac{6}{\sqrt{70}}y-\frac{5}{\sqrt{70}}z+\frac{2}{\sqrt{70}}=0 \Rightarrow d=\left|\frac{3\cdot3}{\sqrt{70}}-\frac{6\cdot2}{\sqrt{70}}-\frac{5\cdot1}{\sqrt{70}}+\frac{1\cdot2}{\sqrt{70}}\right|=\frac{6}{\sqrt{70}}$$

Misollar.

174. Normal vektori $\vec{n}=\{1:-2:3\}$ bo'lgan va M_1 (2;1-1) nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

175. Koordinatalar boshidan o'tuvchi va $\vec{n}=\{5:0:-3\}$ normal vektorga ega bo'lgan tekislik tenglamasi tuzilsin.

176. Koordinatalar boshidan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi $P=\{2:-1:-1\}$ nuqtada joylashgan. Tekislikning tenglamasi tuzilsin.

177. Ikkita $M_1(3;-1;2)$ va $M_2(4;-2;-1)$ nuqtalar berilgan. M_1 nuqtadan o'tuvchi va $\overline{M_1M_2}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi tuzilsin.

178. $M_1(3;4;-5)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{a}_1=\{3:1:-1\}$, $\vec{a_2}=\{1:-2:1\}$ vektorlarga parallel tekislik tenglamasi tuzilsin.

179. $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtadan o'tgan $\overrightarrow{a_1}=\{\ell_1;m_1;n_1\}$ hamda $\overrightarrow{a_2}=\{\ell_2;m_2;n_2\}$ vektorlarga parallel tekislik tenglamasi quyidagi ko'rinishda ekanligi isbotlansin:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

180. $M_1(2;-1;3)$ va $M_2(3;1;2)$ nuqtalardan o'tuvchi va $\overrightarrow{a_1}=\{3:-1:4\}$ vektorga parallel tekislik tenglamasinituzing.

181. $M_1(x_1;y_1;z_1)$ va $M_2(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalardan o'tadigan hamda $\vec{a}=\{\ell,m,n\}$ vektorga parallel bo'lgan tekislikning tenglamasi.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \ell & m & n \end{vmatrix}=0$$ ko'rinishda ekanligini isbotlang.

182. Uchta nuqta $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$ va $M_3(2;0;2)$ lardan o'tuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

183. $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ va $M_3(x_3;y_3;z_3)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislikning tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

ko'rinishda ekanligini isbotlang.

184. Quyidagi tenglamalarning har biri uchun birorta normal vektorning koordinatalarini aniqlang. Har bir hol uchun ixtiyoriy normal vektorning koordinatalarining umumiy ifodasini yozing:

1) $2x-y-2z+5=0$ 2) $x+5y-z=0$ 3) $3x-2y-7=0$

4) $5y-3z=0$ 5) $x+2=0$ 6) $y-3=0$

185 . Quyidagi juft tenglamalarining qaysi biri parallel tekisliklarni aniqlaydi:

1) $2x-3y+5z-7=0$, $2x-3y+5z+3=0$

2) $4x+2y-4z+5=0$, $2x+y+2z-1=0$

3) $x-3z+2=0$, $2x-6z-7=0$

186. Quyidagi juft tenglamalarining qaysi biri perpendikulyar tekisliklarni aniqlaydi:

1) $3x-3y-2z-5=0$, $x+9y-3z+2=0$

2) $2x+3y-z-3=0$, $x-y-z+5=0$

3) $2x-5y+z=0$, $x+2z-3=0$

187. ℓ va m larning qanday qiymatlarida quyidagi juft tenglamalar parallel tekisliklarni aniqlaydi:

1) $2x+\ell+3z-5=0$, $mx-6y-6z+2=0$;

2) $3x-y+\ell z-9=0$, $2x+my+2z-3=0$;

3) $mx+3y-2z-1+=0$, $2x-5y-\ell z=0$;

188. ℓ ning qanday qiymatida quyidagi juft tenglamalar perpendikulyar tekisliklarni aniqlaydi:

1) $3x-5y+\ell z-3=0$, $x+3y+2z+5=0$

2) $5x+y+3z-3=0$, $2x+\ell y-3z+1=0$

3) $7x-2y-3=0$, $\qquad \ell x+y-3z-1=0$

189. Quyidagi juft tekisliklarning kesishishidan hosil bo'lgan ikkiyoqli burchaklarni aniqlang.

1) $x-y\sqrt{2}+z-1=0$, $\qquad x+y\sqrt{2}-z+3=0$

2) $3y-z=0$, $\qquad 2y+z=0$

3) $6x+3y-2z=0$, $\qquad x+2y+6z-12=0$

4) $x+2y+2z-3=0$, $\qquad 16x+12y-15z-1=0$

190. Koordinatalar boshidan o'tgan va $5x-2y+3z-3=0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasi tuzilsin.

191. M_1(3;-2;-7) nuqtadan o'tuvchi va $2x-y+3z+5=0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasi tuzilsin.

192. Koordinatalar boshidan o'tuvchi va $2x-y+3z-1=0$, $x+2y+z=0$ tekisliklarga perpendikulyar tekislikning tenglamasini tuzing.

193. Quyidagi shartrlarni qanoatlantiruvchi tekislik tenglamalarini tuzing:

1) M_1(2;-3;3) nuqtadan o'tadi va OXY tekisligiga parallel;

2) M_2(1;-2;4) nuqtadan o'tadi va OXZ tekisligiga parallel;

3) M_3(-5;2;-1) nuqtadan o'tadi va OYZ tekisligiga parallel;

194. Shunday tekislik tenglamasini tuzinkgi, u 1) ox o'qidan va M_1(4;-1;2) nuqtadan o'tsin; 2) oy o'qidan va M_2(1;4;-3) nuqtadan o'tsin; 3) oz o'qidan va M_3(3;-4;7) nuqtadan o'tgan bo'lsin.

195. $2x-3y+4z-24=0$ tekislikning koordinat o'qlari bilan kesishgan nuqtalarni toping.

196. Tekislikning $x+2y-3z-6=0$ tenglamasi berilgan. Uning "kesmalardagi" tenglamasini tuzing.

197. $3x-4y-24z+12=0$ tekislikning koordinat o'qlaridan ajratgan kesmalari aniqlang.

198. $5x-6y+3z+120=0$ tekislikning koordinat burchakdan kesgan uchburchak yuzasini hisoblang.

199. Koordinat tekisliklari va $2x-3y+6z-12=0$ tekislik bilan chegaralgan piramida xajmi hisoblansin.

200. $\vec{n}=\{-2:1:3\}$ vektorga perpendikulyar va oz o'qida $c=-5$ kesma ajratgan tekislik tenglamasini tuzing.

201. $\vec{\ell}=\{2:1:-1\}$ vektorga parallel va ox, ou koordinat o'qlarida mos ravishda $a=+3$, $b=-2$ kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

202. Quyidagi tenglamalarni normal ko'rinishga keltiring.

1) $2x-2y+z-18=0$ $\qquad$ 2) $\frac{3}{7}x-\frac{6}{7}y+\frac{2}{7}z+3=0$

3) $-4x-6y-12z-11=0$ $\qquad$ 4) $-4x-4y+12z+1=0$

5) $5y-12z+26=0$ $\qquad$ 6) $3x-4y-1=0$

7) $y+2=0$ $\qquad$ 8) $-x+5=0$

9) $-x+3=0$ $\qquad$ 10) $2z-1=0$.

203. Quyidagi tekisliklarning har biri uchun normalning koordinata o'qlari bilan hosil qilgan α,β va γ burchaklari va koordinatlar boshidan tekislikkacha bo'lgan R masofa aniqlansin.

1) $x+y\sqrt{2}+z-10=0$ $\qquad$ 2) $x-y-z\sqrt{2}+16=0$x

3) $x+z-6=0$ $\qquad$ 4) $y-z+2=0$

5) $x\sqrt{2}+y+10=0$ $\qquad$ 6) $x-2=0$

7) $2x+1=0$ $\qquad$ 8) $2y+1=0$

9) $x-2y+2z-6=0$ $\qquad$ 10) $2x+3y-6z+4=0$.

204. Quyidagi nuqtalarining har biri uchun berilgan tekisliklardan δ chetlanish va nuqtadan tekislikkacha d masofa hisoblansin.

1) M_1(-2;-4;3), $2x - y + 2z + 3 = 0$;

2) M_2(2;-1;-1), $16x - 12y + 15z - 4 = 0$;

3) M_3(1;2;-3), $5x - 3y + z + 4 = 0$;

4) M_4(3;-6;7), $4x - 3z + 1 = 0$;

5) M_5(9;2;-2), $12y - 5z + 5 = 0$.

205. M_1(1;-1;1) , M_2(-2;1;3) va M_3(4;-5;-2) nuqtalardan tekislik o'tkazildi. R(-1;1;-2) nuqtadan shu tekislikkacha bo'lgan d masofani hisoblanlang.

206. Q(2;-2;1) nuqta va koordinatalar boshining quyidagi tekisliklardan bir tomonida yoki turli tomonlarda joylashganligini aniqlang:

1) $5x - 3y + z - 18 = 0$; 2) $2x + 7y + 3z + 1 = 0$;

3) $x + 5y + 12z - 1 = 0$; 4) $2x - y + z + 11 = 0$;

5) $2x + 3y - 6z + 2 = 0$; 6) $3x - 2y + 2z - 7 = 0$;

207. $3x - 4y - 2z + 5 = 0$ tekislikning chegaralari M_1(3;-2;1) va M_2(-2;5;2) nuqtalar bo'lgan kesmani kesib m o'tishi isbotlansin.

208. $5x - 2y + z - 1 = 0$ tekislikning M_1(1;4;-3) va M_2(2;5;0) nuqtalar hosil qilgan kesma bilan kesishmasligi isbotlansin.

209.Quyidagi parallel tekisliklar orasidagi masofalar hisoblansin.

1) $x - 2y - 2z - 12 = 0$, $x - 2y - 6z - 6 = 0$ 2) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$, $4x - 6y + 12z + 21 = 0$

3) $2x - y + 2z + 9 = 0$ $4x - 2y + 4z - 21 = 0$ 4) $16x + 12y - 15z + 50 = 0$ $6x + 12y - 15z + 25 = 0$

5) $30x - 32y + 24z - 75 = 0$ $15x - 16y + 12z - 25 = 0$ 6) $6x - 18y - 9z - 28 = 0$ $4x - 12y - 6z - 7 = 0$

210. Kubning ikkita qirasi $2x - 2y + z - 1 = 0$ va $2x - 2y + z + 5 = 0$ tekisliklarda joylashgan. Kubning hajmini hisoblang.

211. $5x - 7y + 2z - 3 = 0$ tekislikning koordinat tekisliklari bilan kesishishidan hosil bo'lgan chiziq tenglamalari tuzilsin.

212. $3x - y - 7z + 9 = 0$ tekislik bilan E(3;2;-5) nuqtadan hamda Ox o'qidan o'tuvchi tekislikning kesishishidan hosil bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

213. $\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqning koordinat o'qlari bilan kesishish nuqtalari topilsin.

214. D ning qanday qiymatlarda $\begin{cases} 2x + y - z + D = 0 \\ 3x - 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$ to'g'ri chiziq 1) Ox o'qini ; 2) Oy o'qini kesib o'tadi ?

215. Ikkita tekislikning, ya'ni $2x - y + 3z - 5 = 0$ va $x + 2y - z + 2 = 0$ tekisliklarning kesishish chizig'idan o'tuvchi va $\vec{l} = (2;-1;-2)$ vektorga parallel tekislik tenglamasi tuzing.

216. $3x - 2y + z - 3 = 0$, $x - 2z = 0$ tekisliklarning kesishishdan hosil bo'lgan to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va $x - 2y + z + 5 = 0$ tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasi tuzilsin.

217. $\alpha(3x - 4y + z + 6) + \beta(2x - 3y + z + 2) = 0$ tekisliklar dastasiga tegishli va M_1(3;-4;-6), M_2(1;2;2) nuqtalardan bir xil uzoqlikdagi tekislik tenglamasi tuzilsin.

218. ℓ va m larning qanday qiymatlarida $5x + ly + 4z + m = 0$ tekislik $\alpha(3x - 7y + z - 3) + \beta(x - 9y - 2z + 5) = 0$ dastaga tegishish bo'ladi.

219. $\begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ to’g’ri chiziqning koordinat tekisliklarini proeksiyalovchi tekisliklarning tenglamalari tuzilsin.

220. $\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x - 3y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ to’g’ri chiziqning $x + 2y + 3z - 5 = 0$ tekislikka proeksiyalovchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

221. $\begin{cases} 5x - 4y - 2z - 5 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$ to’g’ri chiziqning 2x-y+z-1=0 tekislikdagi proeksiyasi topilsin.

222. Quyidagi ikkita nuqtadan o’tuvchi tekislikning kanonik tenglamalari tuzilsin;
1) (1;-2;3),(3;1;-1), 2) (3;-1;0), (1;0;-3),
3) (0;-2;3), (3;-2;-1), 4) (1;2;-4), (-1;2;4)

10-§. FAZODAGI TO’G’RI CHIZIQ.

Fazodagi chiziq deganda, ixtiyoriy ikkita sirtning kesishishidan hosil bo’lgan nuqtalarning geometrik o’rnini tushunamiz. Shuning uchun fazodagi chiziqning umumiy tenglamasi

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ko’rinishda bo’ladi.

Agar (1) tenglamadagi x,u ,z lar birinchi darajada qatnashsa, ular tekisliklarni ifodalab, bu tekisliklarning kesishish nuqtalarining geometrik o’rni to’ђri chiziq bo’ladi.Shuning uchun fazodagi to’ђri chiziqning umumiy tenglamasi

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ko’rinishda bo’ladi.

Fazodagi to’g’ri chiziqning vektor, parametrik va kanonik tenglamalari.

Fazoda biror ℓ to’g’ri chiziq berilgan bo’lsa, bu to’sri chiziqning xolati, shu to’sri chiziqda yotuvchi A(x_1,y_1,z_1) nuqta bilan shu to’sri chiziqqa parallel bo’lgan yoki ustma-ust tushgan $\vec{s}$ ={ ℓ ,m,n} vektorning berilishi bilan to’liq aniqlanadi. $\vec{s}$ = ℓ i+mj+nk vektorni ℓ to’sri chiziqning yo’naltiruvchi vektori deyiladi.

ℓ to’sri chiziq ustida ixtiyoriy B(x,y,z) nuqta olaylik.

Chizmadan ko’rinadiki $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$

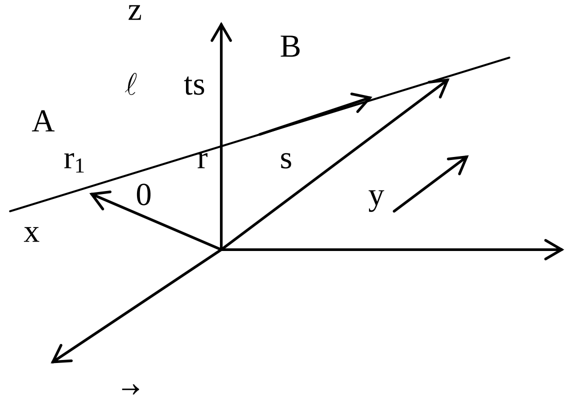
$\vec{AB}$ va $\vec{s}$ vektorlar kollinear vektorlar bo’lgani uchun

$\vec{AB}$ =t$\vec{s}$

Yoki

$\vec{r} = \vec{r}_1 + t\,\vec{s}$ (1)

(1)ga fazodagi to’sri chiziqning vektor tenglamasi deyiladi.



Agar $\vec{r} = \vec{OB}$ =xi+yj+zk , $\vec{r} = \vec{OA}$ =x_1i+y_1j+z_1k , t$\vec{s}$ =tli+tmj+tnk ekanliklarini eqtiborga olsak xi+yj+zk=(x_1+tl)i+(y_1+tm)j+(z_1+tn)k $\Rightarrow$ $\left.\begin{aligned} x &= x_1 + tl \\ y &= y_1 + tm \\ z &= z_1 + tn \end{aligned}\right\}$ (2)

(2) ga fazodagi to'sri chiziqning parametrik tenglamasi deyiladi.

To'sri chiziqning (2) ko'rinishdagi parametrik tenglamasidan to'sri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasining koordinatasini topishda foydalanish qulaydir.

Xaqiqatan, to'sri chiziq tenglamasi (2) ko'rinishda, tekislik tenglamasi

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (3)$$

ko'rinishda berilgan bo'lsa, (2) ni (3) ga qo'ysak:

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Al + Bm + Cn} \qquad (4)$$

xosil bo'ladi. $Al+Bm+Cn \neq 0$ chunki to'sri chiziq bilan tekislik parallel emas.

(4) ni (2) ga qo'ysak izlanayotgan nuqtaning koordinatasi kelib chiqadi.Agar (2) dan t ni topsak, $t=\frac{x-x_1}{l}$; $t=\frac{y-y_1}{m}$; $t=\frac{z-z_1}{n}$ $\Rightarrow$ $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ (5)

(5) ga to'sri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi yoki berilgan nuqtadan o'tgan va berilgan yo'nalishdagi to'sri chiziq tenglamasi xam deyiladi.

Xususiy xolda $\vec{s}$ yo'naltiruvchi vektor koordinata o'qlari bilan α, β, γ burchak tashkil qiluvchi birlik vektor bo'lsa, u xolda (5) tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha} = \frac{y-y_1}{\cos\beta} = \frac{z-z_1}{\gamma} \qquad (6).$$

Agar ℓ to'sri chiziq koordinata o'qlarining biriga masalan Ox ga perpendikulyar bo'lsa, u xolda l=0 bo'lib, (2) va (5) formulalar quyidagicha bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 \\ y &= y_1 + tm \\ z &= z_1 + tn \end{aligned}\right\} \quad (2) \qquad \frac{x-x_1}{0} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \quad (5')$$

Agar to'sri chiziq koordinata o'qlarining biriga masalan Oz ga parallel bo'lsa, $\vec{s} \perp$ Ox, $\vec{s} \perp$ Oy bo'lib, $\vec{s}$={0,0,n} bo'ladi. Bu xolda to'sri chiziqning kanonik tenglamasi

$\frac{x-x_1}{0} = \frac{y-y_1}{0} = \frac{z-z_1}{n}$ ko'rinishda bo'ladi.

Agar to'sri chiziqning tenglamasi

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

umumiy ko'rinishda berilgan bo'lsa, (5) kanonik tenglamasiga o'tish uchun quyidagi amallarni bajarish kerak.

1.(5) dagi A(x_1,y_1,z_1) nuqtaning koordinatasini topish kerak. Buning uchun (7) dagi x,y,z larning ixtiyoriy bittasiga biror aniq qiymat berib, qolgan ikkitasini shu (7) sistemadan topamiz.

2. ℓ to'sri chiziqning $\vec{s}$={l,m,n} yo'naltiruvchi vektorini topish kerak. ℓ to'sri chiziq $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tekisliklarning kesishishidan xosil bo'lgani uchun bu tekisliklarning $\vec{N}_1$ =A_1i+B_1j+C_1k va $\vec{N}_2$ =A_2i+B_2j+C_2k normal vektorlariga perpendikulyar bo'ladi. Shuning uchun ℓ to'sri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida $\vec{N}_1$ va $\vec{N}_2$ vektorlarning vektor ko'paytmasini olsa bo'ladi:

$$\vec{s}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}B_1&C_1\\B_2&C_2\end{vmatrix}i+\begin{vmatrix}C_1&A_1\\C_2&A_2\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix}A_1&B_1\\A_2&B_2\end{vmatrix}k=\text{li+mj+nk;}$$

$$\vec{s}=\{l;m;n\}=\left\{\begin{vmatrix}B_1&C_1\\B_2&C_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}C_1&A_1\\C_2&A_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}A_1&B_1\\A_2&B_2\end{vmatrix}\right\}$$

Misol. $\begin{cases}3x+2y+4z-11=0\\2x+y-3z-1=0\end{cases}$ to’sri chiziqning kanonik tenglamasini tuzaylik.

1) $x_1=1$ desak $\begin{cases}y+2z=4\\y-3z=-1\end{cases}$ $y_1=2$; $z_1=1$. $A(x_1,y_1,z_1)=A(1,2,1)$.

2) $s=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&2&4\\2&1&-3\end{vmatrix}=-10i+17j-k$; Demak , $\frac{x-1}{-10}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{-1}$

Berilgan ikki nuqtadan o’tgan to’g’ri chiziq tenglamasi.

Berilgan $M_1(x_1,y_1,z_1)$ va $M_2(x_2,y_2,z_2)$ nuqtalardan o’tgan ℓ to’g’ri chiziqning tenglamasini tuzaylik. Buning uchun to’sri chiziqda ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqta olib, ℓ to’sri chiziqning yo’naltiruvchi vektori sifatida $\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{s}$ vektorni olaylik. U xolda $\overrightarrow{M_1M}$ va $\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorlar kollinear vektorlar bo’lgani uchun $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\,\vec{s}$, ya’ni

$$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\,\overrightarrow{M_1M_2}\iff (x-x_1)i+(y-y_1)j+(z-z_1)k=\lambda\,[(x_2-x_1)i+(y_2-y_1)j+(z_2-z_1)k]\iff$$

$$\left.\begin{aligned}x-x_1&=\lambda(x_2-x_1)\\y-y_1&=\lambda(y_2-y_1)\\z-z_1&=\lambda(z_2-z_1)\end{aligned}\right\}\iff\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$
- bu xosil bo’lgan tenglamaga berilgan ikki nuqtadan o’tgan to’sri chiziq tenglamasi deyiladi.

Ikki to’sri chiziq orasidagi burchak va ularning parallellik, perpendikulyarlik shartlari.

Fazodagi ikkita to’sri chiziq orasidagi burchak deb, bu to’sri chiziqlarning yo’naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka aytiladi.

Agar to’g’ri chiziqlar kanonik tenglamalari bilan berilgan bo’lsa, ya’ni

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}\quad\text{va}\quad\frac{x-x_1}{l_2}=\frac{y-y_1}{m_2}=\frac{z-z_1}{n_2}$$
bo’lsa, bu to’g’ri chiziqlarning yo’naltiruvchi vektorlari $\vec{s}_1=\{l_1,m_1,n_1\}$, $\vec{s}_2=\{l_2,m_2,n_2\}$ bo’lishlari ravshan.

Bu vektorlar orasidagi burchak

$$\vec{s}_1\vec{s}_2=|\vec{s}_1||\vec{s}_2|\cos\varphi\Rightarrow\cos\varphi=\frac{s_1s_2}{|s_1||s_2|}$$

$$\iff\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}\qquad(1)$$

Agar to’sri chiziqlar parallel bo’lsa, u holda $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ yo’naltiruvchi vektorlar kollinear bo’lib, ularning koordinatalari (proyeksiyalari) proporsional bo’ladi, ya’ni

$$\vec{s}_1=\lambda\vec{s}_2, \quad \frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2} \qquad (2)$$

(2) formula fazodagi ikki to'sri chiziqning parallellik shartidir.

Agar to'sri chiziqlar perpendikulyar bo'lsa, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ bo'lib, $\cos\varphi=\cos\frac{\pi}{2}=0$ bo'ladi. U holda (1) dan $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$ (3)

fazodagi ikki to'sri chiziqning perpendikulyarlik shartini hosil qilamiz.

Agar $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ to'sri chiziq va Ax+Vy+Sz+D=0 tekislik berilgan bo'lsa, ularning o'zaro parallel bo'lishi uchun to'sri chiziqning $\vec{s}=\{l,m,n\}$ yo'naltiruvchi vektori va tekislikning normal vektori $\vec{s}=\{A,B,C\}$lar o'zaro perpendikulyar bo'lishi shart, ya'ni

$$Al+Bm+Cn=0 \qquad (4).$$

Agar to'sri chiziq bilan tekislik perpendikulyar bo'lsa, $\vec{s}\parallel\vec{s}$ bo'ladi.

Bundan

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n} \qquad (5)$$

shart kelib chiqadi.

Tekisliklar dastasi.

Berilgan ℓ to'sri chiziq orqali o'tuvchi tekisliklar to'plamiga tekisliklar dastasi deyiladi. ℓ to'sri chiziq esa dasta o'qi deyiladi.

Dasta o'qi yaqni ℓ to'sri chiziqning umumiy tenglamasi berilgan bo'lsin:

$$\left.\begin{array}{l} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

(1)ning ikkinchi tenglamasini o'zgarmas λ ga ko'paytirib birinchisiga qo'shamiz.

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (2)$$

tenglama λ ning xar qanday qiymatida (1) to'sri chiziq orqali o'tuvchi ($A_2x+B_2y+C_2z+D_2$ tekislikdan tashqari) xar qanday tekislik tenglamasini ifodalaydi.

Xaqiqatan (2) dastaning ixtiyoriy tekisligi uning dasta o'qida yotmagan $M(x_1,y_1,z_1)$ nuqtasi bilan aniqlanadi. Shuning uchun M nuqtaning koordinatalarini (2) ga q o'ysak,

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{A_2x+B_2y+C_2z+D_2} \qquad (3)$$

(3) ni (2) ga qo'ysak, $M_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasini hosil qilamiz. λ ning turli qiymatlarida esa, (1) to'sri chiziq orqali o'tgan har xil tekisliklar tenglamasini xosil qilamiz. Shuning uchun (2) ga tekisliklar dastasining tenglamasi ham deyiladi.

Misollar.

1. $\begin{cases} 2x+3y-5z+1=0 \\ 3x-y+z+28=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziq va $M_1(1,-2,3)$ nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. 2x+3y-5z+1+$\frac{1}{2}$ (3x-y+z+28)=0 bunga berilgan M_1 nuqtaning koordinatalarini qo'ysak $\lambda=\frac{1}{2}$

2. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$ to’sri chiziq orqali o’tuvchi va 3x+3y-z+1=0 (a) tekislikka perpendikulyar bo’lgan tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y-5=0 \\ y-3z+1=0 \end{cases}$

Bu xolda tekisliklar dastasining tenglamasi

$3x-2y-5+\lambda(y-3z+1)=0 \Leftrightarrow 3x+(\lambda-2)y-3\lambda z-5+\lambda=0$ (b).

(a) va (b) tekisliklar o’zaro perpendikulyar bo’lgani uchun ularning $N_1=\{3;3;-1\}$ va $N_2=\{3;\lambda-2;-3\lambda\}$ normal vektorlari perpendikulyar bo’ladi. U holda

$N_1N_2=0 \Rightarrow (3i+3j-k)[3i+(\lambda-2)j-3\lambda k]=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{2}$, $3x-2y-5-\frac{1}{2}(y-3z+1)=0 \Rightarrow 6x-5y+3z=0$.

Misollar.

223. $M_1(1;-1;3)$ nuqtadan o’tgan va quyidagalarga parallel bo’lgan to’g’ri chiziqning parametrik tenglamalari tuzilsin:

1) $\bar{a}=\{2;-3;4\}$ vektorga ; 2) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{0}$ to’g’ri chiziqqa;

3) $x=3t-1;\ y=-2t+2$ to’g’ri chiziqqa.

224. $M_1(-6;6;-5)$ va $M_2(12;-6;1)$ nuqtalardan to’g’ri chiziq o’tkazilgan .Shu to’g’ri chiziqning koordinat tekisliklari bilan kesishish nuqtalari topilsin.

225. $M_1(2;3;-5)$ nuqtadan o’tuvchi va

$\begin{cases} 3x-y+2z-4=0 \\ x+3y-2z+3=0 \end{cases}$ to’g’ri chiziqqa parallel to’g’ri chiziqning kanonik tenglamalari tuzilsin.

226. Quyidagi to’g’ri chiziqlarning kanonik tenglamalari tuzilsin.

1) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+y+z=0 \\ 2x+3y-2z+5=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-2y+3z+1=0 \\ 2x+y-4z-8=0 \end{cases}$

227. Quyidagi to’g’ri chiziqlarning kanonik tenglamalari tuzilsin:

1) $\begin{cases} 2x+3y-z-4=0 \\ 3x-5y+2z+1=0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x+2y-z-6=0 \\ 2x-y+z+1=0 \end{cases}$

228. To’g’ri chiziqlar orasidagi o’tkir burchak topilsin:

$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}},\qquad \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$.

229. To’g’ri chiziqlar orasidagi o’tmas burchak topilsin:
x=3t-2, y=0, z=-t+3 va x=2t-1, y=0, z=t-3.

230. $M_1(-1;2;-3)$ nuqtadan o’tuvchi, $\vec{a}=\{6;-2;-3\}$ vektorga prependikulyar va

$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}$ to’g’ri chiziqning kesib o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

231. M(x;y;z) nuqta harakatining tenglamalari berilgan:
x=5-2t, y=-3+2t, z=5-t shu nuqtaning $t_1=0$ momentdan $t_2=7$ momentgacha bosib o’tgan d yo’lini aniqlang.

232. Boshlang’ich nuqtasi $M_0(3;-1;-5)$ bo’lgan va $\vec{s}=\{-2;6;3\}$ vektor yo’nalishida to’g’ri chiziqli tekis xarakat qilayotgan M(x;y;z) nuqtaning tezligi $\vartheta=21$, shu nuqtaning harakat tenglamalarini tuzilsin.

233. M(x;y;z) nuqta boshlang’ich vaziyat $M_0(20;-18;-32)$ dan boshlab $\vec{s}=\{3;-4;-12\}$ vektorga qarama-qarshi yo’nalishida $v=266$ tezlik bilan to’g’ri chiziqli harakat qilmoqda. M(x;y;z)

nuqtaning harakat tenglamalarini tuzing va $t=3$ vaqtda M qanday nuqta bilan mos tushinishi aniqlang.

234. To'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasi topilsin:

1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$, $\quad 2x+3y+z-1=0$

2) $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}$, $\quad x-2y+z-15=0$

3) $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{-5}$, $\quad x+2y-2z+6=0$

235. M_0(2;-3;-5) nuqtadan o'tuvchi va $6x-3y-5z+2=0$ tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzing.

236. M_0(1;-1;-1) nuqtadan o'tuvchi va $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzing.

237. M_0(1;-2;1) nuqtadan o'tuvchi va

$\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzing.

238. m ning qaysi qiymatida $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$ to'g'ri chiziq $x-3y+6z+7=0$ ning tekislikka parallel?

239. C parametrning qanday qiymatida $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0 \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$

240. A va D ning qanday qiymatlarida $x=3+4t,\quad y=1-4t,\quad z=-3-t$ to'g'ri chiziq $Ax+2y-4z-D=0$ tekislikda joylashgan bo'ladi.

241. R(2;-1;3) nuqtaning $x=3t,\ y=5t-7,\ z=2t+2$ to'g'ri chiziqdagi proeksiyasi topilsin.

242. $\begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqqa nisbatan R(4;1;6) nuqtaga simmetrik bo'lgan Q nuqtani aniqlang.

243. M_1(5;4;6) va M_2(-2;-17;-8) nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa nisbatan P(2;-5;7) nuqtaga simmetrik bo'lgan Q nuqtani aniqlang.

244. P(5;2;-1) nuqtaning $2x-y+3z+23=0$ tekislikdagi proeksiyasi topilsin .

245. P(1;-1;-2) nuqtadan $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan d masofani aniqlang.

246. P(2;3;-1) nuqtadan quyidagi to'g'ri chiziqlargacha bo'lgan d masofani aniqlang:

1) $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}$ $\qquad$ 2) $x=t+1,\quad y=t+2,\quad z=4t+13$

3) $\begin{cases} 2x-2y+z+3=0 \\ 3x-2y+2z+17=0 \end{cases}$

247. To'g'ri chiziqlarning parallelligini isbotlab, ular orasidagi d masofani toping.

$\begin{cases} 2x+2y-z-10=0 \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$ $\qquad$ $\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$

248. Quyidagi hollarning har biri uchun ikki to'g'ri chiziq orasidagi eng qisqa masofa topilsin:

1) $\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$, $\qquad \frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$,

2) $x=2t-4,\quad y=-t+4,\quad z=-2t-1$

$x = 4t - 5, \quad y = -3t + 5, \quad z = -5t + 5$

3) $\frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}$,

$x = 6t + 9, \quad y = -2t, \quad z = -t + 2$.

12-§. Kompleks sonlar

Kompleks son tushunchasiga odatda quyidagi tenglama orqali kelinadi $x^2+1=0$.
Kompleks son deb $z=x+iy$ ko‘rinishidagi ifodaga aytiladi. Bunda x va u sonlar haqiqiy sonlar bo‘lib, x ga z sonning haqiqiy qismi, u ga esa z sonning mavhum qismi, i ni mavhum bir lik deyiladi.
Agar $x = 0$ bo‘lsa, $z = yi$ ga sof mavhum son deyiladi.
2. $z = x+yi$ kompleks sonni tekislikdagi dekart koordinatalari sistemasida A(x;y) nuqta bilan tasvirlash qabul qilingan. U holda $x = z + oi$ haqiqiy son absissa o‘qida yotuvchi V(x;y) nuqta bilan $yi = 0 + yi$ mavhum son ordinata o‘qida yotuvchi C(o;y) nuqta bilan tasvirlanadi.

$o = o+oi$ songa mos keluvchi nuqta koordinata boshi bo‘ladi. Masalan, $z = -3 + 4i$, $\alpha = 5$, $\beta = -7i$ sonlar mos ravishda $A_1(-3;4)$, $B_1(5;0)$ va $C_1(0;7)$ nuqtalar bilan tasvirlanadi.
Bunday tasvirlashda absissa o‘qi - haqiqiy o‘q va ordinata o‘qi - mavhum o‘q deb yuritiladi.
$z=x+yi$ kompleks sonni boshi koordinata boshida va uchi $A(x;u)$ nuqtada yotuvchi vektor bilan ham tasvirlash mumkin. Bu holda haqiqiy sonlar, haqiqiy o‘qda yotuvchi vektorlar bilan va mavhum sonlar mavhum o‘qda yotuvchi vektorlar bilan tasvirlanishi ravshan. Umuman aytganda, kompleks sonlar to‘plami bilan tekislikdagi barcha nuqtalar to‘plami orasida biektiv akslantirish mavjud.
$z = x+yi$ kompleks sonining geometrik tasvirini ifodalovchi vektorning uzunligi bu kompleks sonning moduli deyiladi va u $r=|z|=|x+y|$ ko‘rinishida belgilanadi.
$r=|z|$ ni Pifagor teoremasi bo‘yicha 1- chizmadagi to‘g‘ri burchakli AOV uchburchakda topamiz. Bunda $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ bo‘ladi.

Masalan $a = -3+4i$, $\beta = \sqrt{5} - i\sqrt{7}$ sonlarning modullari mos ravishda

$r_1 = |a| = \sqrt{9+16} \qquad r_1 = 5$

$r_2 = |\beta| = \sqrt{5+7} \qquad r_2 = \sqrt{12}$ ga teng.

Noldan farqli har bir kompleks sonning moduli musbat haqiqiy sondir. Ox o‘qining musbat yo‘nalish bilan $\overrightarrow{OA}$ vektor orasidagi burchakni φ deb belgilaymiz. Unda ΔAOV dan $x=r\cos\varphi$ *va* $y = r\sin i\varphi$ larni topamiz. Bularni $z=x+yi$ ga qo‘yamiz:

$$z=r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \ (1)$$

z kompleks sonning (1) shakliga uning trigonometrik shakli deyiladi. Bunda $r \geq 0$, lekin istalgan (manfiy, nolь, musbat) qiymatlarni qabul qila oladi. Bu φ burchak z kompleks sonining argumenti deb ataladi. $z = x+yi$ ifoda z kompleks sonning algebraik shakli deb yuritiladi.

(1) ni umumiy shaklda $z=r((\cos\varphi+2\pi k) + (i\sin\varphi+2\pi k))$ deb yozish mumkinligi ravshandir, bunda k - istalgan butun son.
Har bir kompleks sonni yuqorida aytilgan shakllarini biridan ikkinchisiga o‘tkazish mumkin. Masalan, algebraik shakldagi $z=1-\sqrt{3}i$ kompleks sonni trigonometrik shakliga keltiray lik. Buning uchun r bilan φ ni topib ularning qiymatlarini (1)ga qo‘yamiz. Bu erda $r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ $r=2$. Endi $\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$ va $\sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ lardan uning to‘rtinchi chorakda ekanligi va 300° ga yoki $\frac{5\pi}{3}$ ga tengligini ko‘ramiz. Shunday qilib, $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ hosil bo‘ladi.

Ixtiyoriy shaklda berilgan kompleks sonlar ustida qo‘shish, ayrish, bo‘lish va ko‘paytirish amallari qo‘yidagicha bajariladi.

I. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

II. $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Bu erdan $i^2 = (0+i)(0+i) = -(0+1)(0+0) = -1$

III. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot z_2}{|z_2|^2} = \dfrac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2{}^2 + y_2{}^2}$ bu yerda $z_2 \neq 0$

Biz endi quyidagi trigonometrik shakldagi kompleks sonlar ustida ko‘paytirish va bo‘lish amallarni ko‘rib o‘tamiz.

$x=r\cos\varphi$, $y = rsini\varphi$ formulalardan kompleks sonning trigonometrik shakli kelib chiqadi.

$$z=r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (1)$$

Kompleks sonning trigonometrik shaklidagi ko‘rinishidan foydalanib

$z_1=r(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

$z_2=r(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

I. $$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 [(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cos\varphi_1)] = \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \end{aligned} \quad (2)$$

II. $$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)[\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)]}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)[\cos(\varphi_2) - i\sin(\varphi_2)]} = \\ &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \end{aligned} \quad (3)$$

bu yerda $z_2 \neq 0$

Demak, trigonometrik shakldagi ikkita kompleks sonning bo‘linmasi ham trigonometrik shaklga ega bo‘lib, bo‘linmaning moduli bo‘linuvchi va bo‘luvchi modullarining bo‘linmasiga, argumenti esa bo‘linuvchi va bo‘luvchi argumentlarning ayirmasiga teng.

Misol. $z_1 = 7(\cos 20^0 – i\sin 20^0)$ va $z_2 = 4(\cos 10^0 + i\sin l0^0)$ sonlarning bo‘linmasini topay lik. Avvalo z_1 ni trigonometrik shaklga keltiramiz:

$z_1=7(\cos(-20^0) – i\sin(-20^0))$

Endi (3) formula bo‘yicha

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{7}{4}[\cos(-20^0 - 10^0) + i\sin(-20^0 - 10^0)] = \frac{7}{4}(\cos 30^0 - i\sin 30^0) = \frac{7}{8}(\sqrt{3} - i)$$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{7}{8}(\sqrt{3} - i)$ *ni topamiz.*

(2) formula bo‘yicha

$z^n=r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (4)

n- natural son. Faraz qilay lik $\sqrt[n]{r} = p(\cos\psi = i\sin\psi)$ bunda $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

shunda (1) formulaga asosan

$z = [p(\cos\psi = i\sin\psi)]^n = p(\cos n\psi = i\sin n\psi)$

$p^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2\pi kn\,(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ demak $p = \sqrt[n]{r}$ $\sqrt[n]{r}$ bu deb $\psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$ arifmetik ildiz deb tushuniladi.

r ga k =0,1,2,…,n-1 qiymatlarni olish etarlidir, chunki k ning boshqa qiymatlarida topilgan ildiz qiymatlarining takrori bo‘ladi.

Shunday qilib:

$\sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$ (5)

k =0,1,2,…,n-1

Misol. ω= $\sqrt{-1}$ ni toping. Haqiqatdan $-1\cos\pi + i\sin\pi$ (2) formula asosida $\sqrt{-1} = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{2}$. $k = 0{,}1$

ω_0= $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$, ω_1= $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$

Misollar.

1 - misol. Kompleks sonni trigonometrik ko`rinishga keltiring.

$z = 3 + 4i \qquad a = 3 \qquad в = 4 \qquad r = \sqrt{a^2 + в^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$a = r\cos\varphi \qquad в = r\sin\varphi \qquad \varphi = arctg\,\frac{в}{a} = arctg\,\frac{4}{3}$

$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{3}{5} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{z} = \frac{4}{5} \qquad \varphi = 53^0 12' \approx 53^0$

$z = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z = 5(\cos 53^0 + i\sin 53^0)$

2 – misol. Soddalashtiring. $a)\ \sqrt{-4} = i\sqrt{4} = 2i$, *chunki* $i^2 = -1.$

$b)\ \sqrt{-x^2 - y^2 + 2xy} = \sqrt{-(x^2 - 2xy + y^2)} = i\sqrt{(x-y)^2} = (x-y)^i$ *, agarda* $x \geq y$ *bo`lsa.*

3 – misol. Amallarni bajaring.

$a)\ \sqrt{-25} + \sqrt{-49} - \sqrt{-64} + \sqrt{-1}$

Yechish. $i^2 = -1$ $bo`\lg anligidan$

$\sqrt{25 \cdot i^2} + \sqrt{49 \cdot i^2} - \sqrt{64 \cdot i^2} + \sqrt{i^2} = 5i + 7i - 8i + i = 5i$

$b)\ \sqrt{-16} \cdot \sqrt{-9} = \sqrt{16 \cdot i^2} \cdot \sqrt{9 \cdot i^2} = 4i \cdot 3i = 12i^2 = -12$

$v)\ (\sqrt{a} + 3\sqrt{-в}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{-в}) = (\sqrt{a} + 3i\sqrt{в})(\sqrt{a} - i\sqrt{в}) = a - i\sqrt{aв} + 3i\sqrt{aв} - 3вi^2 = a + 3в + 2i\sqrt{aв};$

$г)\ (3 + \sqrt{-2})^3 = (3 + i\sqrt{2})^3$ formula bo`yicha ochib chiqamiz.

$$(a + в)^3 = a^3 + 3a^2в + 3aв^2 + в^2$$

$(3 + i\sqrt{2})^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot i\sqrt{2} + 3 \cdot 3 \cdot (i\sqrt{2})^2 + (i\sqrt{2})^3 = 27 + 27\sqrt{2}i - 18 - 2\sqrt{2}i = 9 + 25\sqrt{2}i$

4 – misol. $\sqrt[3]{1}$ barcha qiymatlarini toping.

Yechish: 1 ni trigonometrik ko`rinishga keltiramiz.

$$1 = \cos 0 + i\sin 0$$

$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \cdot \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n})$ formuladan foydalanamiz.

$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{0 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{0 + 2k\pi}{3}$ *k=0, 1, 2* deb ildizning uchta qiymatini topamiz.

$x_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$x_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

5 – misol. $x^4 = 1$ tenglamani eching.

Yechish: Tenglamaning ildizini $x = \sqrt[n]{A}(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n})$ teng likdan topamiz.

$$x = \sqrt[4]{1}(\cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4})$$

k=0, 1, 2, 3 deb

$x_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + i0 = 1$

$x_2 = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i\cdot 1 = i$

$x_3 = \cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i0 = -1$

$x_4 = \cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = 0 - i\cdot 1 = -i$

Mustaqil yechish uchun misollar.

249. Kompleks sonlarni trigonometrik ko`rinishga keltiring.

$a)\ z = -1 - i;$ $b)\ z = 1 - i;$ $v)\ z = \sqrt{3} + i;$ $g)\ z = -1 + \sqrt{3i};$

$d)\ z = -2;$ $e)\ z = i;$ $yo)\ z = 1;$ $j)\ z = -i;$

$z)\ z = 1 + i;$ $k)\ z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$ $l)\ z = \frac{\sqrt{33}}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2};$ $m)\ z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i;$

$n)\ z = 2i;$ $o)\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}};$ $p)\ z = -i;$ $r)\ z = -\sqrt{6} - \sqrt{6i};$

250. Ifodani soddalashtiring.

1) $\sqrt{-в}$	4) $\sqrt{-81}$	7) $\sqrt{-a^2}$
2) $\sqrt{-a}$	5) $\sqrt{-\frac{9}{4}}$	8) $\sqrt{-\frac{a^2}{в^2}}$
3) $\sqrt{-(a-в)^2}$	6) $\sqrt{-9x}$	9) $\sqrt{-a^2-в^2}$

251. Amallarni bajaring.

1) $\sqrt{-144}-\sqrt{-81}-\sqrt{-1}+\sqrt{-9}$

2) $3\sqrt{-4}+5\sqrt{-27}-3\sqrt{-16}-5-\sqrt{-3}$

3) $3+2i+(4-3i)-[(8-5i)-(5+13i)]$

4) $a+вi-(2a-3вi)+[(a-4вi)+(5a-2вi)]$

5) $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-в}$ 6) $\sqrt{-8}\cdot\sqrt{-2}$ 7) $i\sqrt{-x^2}$ 8) $(2-5i)(8-3i)$

9) $(5+2\sqrt{-7})\cdot(6-5\sqrt{-7})$

10) $(\sqrt{a}-\sqrt{-в})\cdot(\sqrt{a}+3\sqrt{-в})$

11) $(3\sqrt{-5}-2\sqrt{-7})\cdot(2\sqrt{-7}+3\sqrt{-5})$

12) $\frac{a^2+в^2}{a-вi}$ 13) $\frac{x-y}{x+yi}$ 14) $\frac{4}{1+\sqrt{-3}}$ 15) $\frac{3-5i\sqrt{3}}{3+5i\sqrt{3}}$ 16) $\frac{36-\sqrt{-2}}{2+3i\sqrt{2}}$

17) $(a+вi)^2$ 18) $(\frac{1+\sqrt{-3}}{2})^2$ 19) $(3-\sqrt{5}+2\sqrt{-1})^2$

20) $(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})^3$ 21) $\sqrt{3+4\sqrt{-1}}$ 22) $\sqrt{-3-4i}$

23) $\sqrt{1+4\sqrt{-3}}$ 24) $\sqrt{2-3\sqrt{-5}}$ 25) $\sqrt[8]{-1}$ 26) $\sqrt[8]{1}$

252. Hisoblang:

$a)$ $(2+3i)(4-5i)+(2-3i)(4+5i)$; $b)$ $(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$, $x\in R$;

$v)$ $\frac{(1+2i)^2}{1-3i}$; $g)$ $(1-4i)-(i(3-4i)+3i)$; $d)$ $(1+4i)^2-(3+i^9)$;

$e)$ $3+8i+9i^2+10i^3$ $yo)$ $8-4(i^{15}+1)+13i$; $j)$ $21i^4+23i^{19}+17i^{17}$.

253.Tegishli kompleks sonlarni trigonometrik shaklda yozib, hisoblashlarni bajaring:

$a)$ $(1+i)^{16}$; $b)$ $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; $v)$ $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$; $g)$ $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{20}}{(1-i)^{20}}$;

$d)$ $(1+i)^9(1-i)^{15}$; $e)$ $(1+2i)^8(2+3i)^3$; $yo)$ $(2+i)^{26}(2+3i)^9$; $j)$ $\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{15}}$.

254. z kompleks sonning modulini toping;

$a)\ z=3+4i;\quad b)\ z=-3-4i;\quad v)\ z=1+\sqrt{8i};\quad g)\ z=2\sqrt{2}+i;\quad n)\ z=-4;$

$d)\ z=3+3i;\quad e)\ z=1+2\sqrt{3i};\quad yo)\ z=1+i;\quad j)\ z=\sqrt{2}+i;\quad o)\ z=bi,\ b\in R;$

$z)\ z=\cos a+i\sin a(a\in R);\quad g)\ z=1+i\cos^2 a\ (a\in R);\quad l)\ z=(2+3i)(3-4i);$

$m)\ z=4\sqrt{81}+3\sqrt{21};\quad n)\ z=i;\quad p)\ z=0.$

255. *z Kompleks sonning* arg*umentini toping*:

$a)\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}};\quad b)\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2};\quad v)\ z=3i;\quad g)=3;$

$d)\ z=\frac{\sqrt{33}}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2};\quad e) z=-2\sqrt{3}i;\quad yo)\ z=-\sqrt{6}-\sqrt{6i};\quad j)\ z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i;$

$z)\ z=1;\quad k)\ z=i;\quad l)\ z=-1;\quad m)\ z=-i.$

256. *Yig`indini toping*.

$a)\ (-3+2i)+(4-i);\quad b)\ (4+5i)+(4-5i);\quad v)\ (5+2i)+(-5-2i);\quad g)\ 4+(-3+i);$

$d)\ (1{,}4-3i)+(2{,}6-4i);\quad e)\ (3+8i)+(3-8i);\quad yo)\ (-7+3i)+(7-3i);\quad j)\ 4{,}3+(1{,}7-9i);$

$z)\ 8i+(4-6i);\quad k)\ -15i+(-4+5i);\quad l)\ (14+2i)+8i;\quad m)\ 81+(43-17i)$

257. *Amallarni bajaring*:

$a)\ -3i+5+8i(3-i);\quad b)\ (4+2i)(-1-3i)+5-8i;\quad v)\ 3i(1+i)+3i(3-i);\quad g)\ i(5-2i)+i(9-8i);$

$d)\ (5-3i)(4+i)+15i;\quad e)\ 16-(15-i)(1+i);\quad yo)\ 4(0{,}5-2{,}5i)(3+i)+5i;\quad j)\ 4{,}2(3-i)(1+i)+2+3i;$

$z)\ 3+5i+2i^{1999};\quad k)\ 35-i^{2000}+i^{1997};\quad l)\ i^{2001}(3+5i^4);\quad m)\ i^{2002}-i^{2001}-i^{1999}.$

258 *Ko`paytmani hisoblang*:

$a)\ (3+5i)(2+3i);\quad b)\ (4+7i)(2-i);\quad v)\ (5-3i)(2-5i);\quad g)\ (-2+i)(7-3i);$

$d)\ \left(\frac{1}{2}+i\right)\left(\frac{1}{4}-i\right);\quad e)\ \left(\frac{4}{7}+3i\right)\left(\frac{7}{4}+4{,}7i\right);\quad yo)\ (2+3i)(2-3i);\quad j)\ 4\cdot(8{,}3-i);$

$z)\ (5-2i)(2i+5);\quad k)\ (-3+i)(3-i);\quad l)\ 0\cdot(4{,}5-i);\quad m)\ \left(\frac{1}{3}-0{,}3\right)\cdot i;$

259. *Ikki kompleks sonning bo`linma*sin*i toping*.

$a)\ \frac{1+i}{1-i};\quad b)\ \frac{3-4i}{2+i};\quad v)\ \frac{2+3i}{2-3i};\quad g)\ \frac{1+2i}{3-2i};$

$d)\ \frac{5-4i}{-3+2i};\quad e)\ \frac{-7+2i}{5-4i};\quad yo)\ \frac{3-4i}{-3+2i};\quad j)\ \frac{14-3i}{3i+2};$

$z)\ \frac{51i}{4-i};\quad k)\ \frac{31i}{17+i};\quad l)\ \frac{31i}{17+i}\quad m)\ \frac{14+i}{31i};$

$n)\ \frac{0}{3i};\quad o)\ \frac{1+4i}{1-5i};\quad p)\ \frac{1}{1+5i};\quad r)\ \frac{1}{1-5i};$

260. *Hisoblang*:

$a)\ \frac{(2-3i)(3-2i)}{1+i}$; $b)\ \frac{(3-i)(1+3i)}{2-i}$; $v)\ \frac{3-4i}{(1+i)(2-i)}$; $g)\ \frac{2-3i}{(1-i)(3+i)}$;

$d)\ \frac{11}{1-2i}-\frac{13}{2-i}$; $e)\ \frac{3-5}{3+i}+\frac{2+3i}{2-i}$; $yo)\ \frac{13}{1-4i}+\frac{11}{1+4i}$; $j)\ \frac{1-i}{1+i}+\frac{3-i}{3+i}$;

$z)\ \frac{i^{18}+i^{19}}{2-3i}+\frac{1}{3+4i}$; $k)\ \frac{2-3i}{2+3i}\cdot i^{18}+\frac{i}{1+i}$; $l)\ \frac{4i^8}{9}+i(1+i^9)$; $m)\ i^3(1-i^4)+i^{12}$.

261. *Amallarni bajaring*.

$a)\ (3-2i)^2$; $b)\ (4+3i)^2$; $v)\ \left(\frac{1-2i}{1+i}\right)^2$; $g)\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$;

$d)\ (3+2i)^2-(3-2i)$; $e)\ (-3+5i)+(-3-5i)$; $yo)\ \left(\frac{i^6+1}{i^8-1}\right)^2$; $j)\ \left(\frac{4+i^7}{3-i^4}\right)^2$.

II BOB. MATEMATIK ANALIZ

12-§. Matematik taxlilga kirish. Matematik mantiq elementlari. Haqiqiy sonlar to'plami. Sonlar ketma-ketligi va uning limiti.

1-ta'rif. Agar biror qonunga ko'ra 1,2,3,...,n,...($n \in N$) natural sonlarga $x_1, x_2, x_3,...$ xaqiqiy sonlar mos keltirilgan bo'lsa , u xolda $x_1, x_2, x_3,...$ xaqiqiy sonlar to'plamiga sonlar ketma-ketligi berilgan deyiladi.

Qisqacha ketma-ketlik $\{x_n\}$ ko'rinishda yoki $\{x_n\}=\{x_1, x_2, x_3,...\}$ ko'rinishda yoziladi. x_i-larga ($i=1,2,...,n,...$) $\{x_n\}$ ketma-ketlikning elementlari , x_n-ga esa ketma-ketlikning umumiy xadi deyiladi.

Misol. $\left\{\frac{1}{n}\right\}=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...\right\}$

$\{n^2+1\}=\{2,5,10,17,...\}$

$\{1+(-1)^n\}=\{0,2,0,2,...\}$

2-ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning istalgan x_n elementi uchun $x_n \le M$ (yoki $x_n \ge m$) tengsizlikni qanoatlantiruvchi M (yoki m) soni mavjud bo'lsa, u xolda $\{x_n\}$ ketma-ketlikni yuqoridan (pastdan) chegaralangan deyiladi.

M va m larga yuqoridan va quyi chegaralari deyiladi. xam pastdan ,xam yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik chegaralangan ketma-ketlik deyiladi.

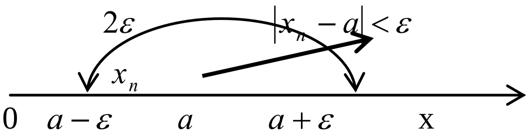
3-ta'rif. Agar ixtiyoriy $n \in N$ uchun $x_n \le x_{n+1}$ (yoki $x_n \ge x_{n+1}$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u xolda $\{x_n\}$ ketma-ketlikni kamaymaydigan (o'smaydigan) ketma-ketlik deyiladi.

4-ta'rif. Agar ixtiyoriy $n \in N$ uchun $x_n < x_{n+1}$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi ketma-ketlik , agar $x_n > x_{n+1}$ bo'lsa $\{x_n\}$ ketma-ketlikni kamayuvchi ketma-ketlik deyiladi.

O'suvchi va kamayuvchi ketma-ketliklarga monoton ketma-ketliklar deyiladi.

5-ta'rif. Agar ixtiyoriy yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N natural son mavjud bo'lsaki, $n > N$ bo'lgan barcha n lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u xolda a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ yoki $x_n \to a$ ko'rinishlarda yoziladi.

$a-\varepsilon < a < a+\varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamiga a nuqtaning ε atrofi deyiladi.

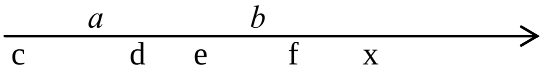


Ta'rifning geometrik ma'nosi quyidagicha: agar a berilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'lsa, u xolda a nuqtaning ε atrofida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p xadlari joylashgan bo'ladi. Shunday xadlarning nomerlari N dan katta bo'lib, bu atrofdan tashqarida esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning x_1 dan x_N gacha xadlari bo'lishi mumkin.

6-ta'rif. Limiti mavjud bo'lgan ketma-ketliklarga yaqinlashuvchi ketma-ketliklar deyiladi. Aks xolda uzoqlashuvchi ketma-ketliklar deyiladi.

1-teorema. Yaqinlashuvchi sonli ketma-ketliklar faqat bitta limitga ega bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik $\{x_n\}$ ketma-ketlik ikkita a va b limitlarga ega bo'lsin, u xolda a va b nuqtalarni o'z ichiga olgan va bir-biri bilan kesishmaydigan $]c,d[$ va



$]e,f[$ intervallarni olaylik. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ bo'lsin, bu xolda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo'lgani uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementlari $]c,d[$ da bo'lib $]e,f[$ da sanoqli elementlari qoladi. Bundan ko'rinadiki, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementlari $]e,f[$ da bo'la olmaydi. Bu esa farazimizga qarama-qarshi.

2-teorema. Xar qanday yuqoridan chegaralangan kamaymaydigan va quyidan chegaralangan o'smaydigan sonli ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'ladi va limitga ega bo'ladi.

3-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u albatta chegaralangan bo'ladi. Lekin aksi qarvaqt to'sri emas, ya'ni zarur lekin kifoya emas.

4-teorema. (Bolqs ano-Veyershtrass). Ixtiyoriy cheksiz, chegaralangan va monoton bo'lgan $\{x_n\}$ ketma-ketlik limitga ega bo'ladi.

Agar cheksiz $\{x_n\}$ ketma-ketliklar yuqoridan yoki quyidan chegaralanmagan bo'lsa, u albatta uzoqlashuvchi bo'ladi, ya'ni chekli limitga ega bo'lmaydi.

Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikka cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi. Boshqa so'z bilan aytganda, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N nomer topish mumkin bo'lsaki, barcha $n > N$ lar uchun $|x_n - 0| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlikka cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi.

Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikka cheksiz katta ketma-ketlik deyiladi. Boshqa so'z bilan aytganda, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N nomer mavjud bo'lsaki,barcha $n \ge N$ lar uchun $|x_n| \ge M$ tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlikka cheksiz katta ketma-ketlik deyiladi.

Sonli ketma-ketliklarning limiti uchun quyidagi xossalar o'rinli:

1^0. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

2^0. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

3^0. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \quad (\lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0)$

Misollar.

1. $x_n = \frac{1}{n}$. 2. $x_n = \sqrt{n}$. 3. $x_n = \frac{n}{4+n^2}$. 4. $x_n = (-1)^n n$.

5. $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. 6. $x_n = \frac{3^n}{(n+1)!}$. 7. $x_n = \frac{n^2}{2^n}$. 8. $x_n = \frac{3^n}{n^3}$.

9. Agar $\{x_n\}, \{y_n\}$ chegaralangan ketma-ketliklar bo'lsa , u holda $\{x_n \pm y_n\}, \{x_n, y_n\}$ ketma-ketliklarning chegaralangan ekanligini ko'rsating.

Quyidagi ketma-ketliklarning o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lishini aniqklang. (10-18).

10. $x_n = 2^n$. 11. $x_n = \frac{2}{n+2}$. 12. $x_n = \sqrt{n}$. 13. $x_n = \log_{(n+1)} 2 /$

14. $x_n = \frac{n}{n+1}$. 15. $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$. 16. $x_n = \frac{n}{2^n}$. 17. $x_n = \sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

18. $x_n = \frac{n!}{n^n}$.

Quyidagi sonlar ketma-ketliklarning limitni toping.(19-37).

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+2}$. 20. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2n+2}{n}}$. 21. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1+2n)}{n^2+1}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 + (n+2)^2}{(n-1)^3}$. 23. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n-1)^3 - (n+1)^3}{n^2}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n! + 2(n+1)!}{(n+2)!}$. 25. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n}, (a>1)$. 27. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n + 3*3^n}{3*2^n + 5 + 3^n}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+3+....+(n-1)}{n^2} \right)$. 29. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right)$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + ... + \frac{1}{n^*(n+1)} \right)$. 31. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1*3} + \frac{1}{3*5} + ... + \frac{1}{(2n-1)*(2n+1)} \right)$.

32. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\bar{1}}{2} + \frac{\bar{1}}{4} + \frac{\bar{1}}{8} + ... + \frac{1}{2n} \right)$. 33. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{3^n}}$.

34. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. 35. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-1})$. 36. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{n}(\sqrt{n^4+n+1} - \sqrt{n^4+1})$. 37. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$.

13-§. Funksiya, uning berilish usullari.Asosiy elementar funksiyalar, ularning xossalari va grafiklari. Elementar funksiyaning berilish usullari.

X va Y lar haqiqiy sonlarning biror to'plamlari bo'lib, x va y o'zgaruvchilar mos ravishda shu to'plamlarda o'zgarsin:

$$x \in X, y \in Y$$

Agar X to'plamdagi har bir x songa biror f qoidaga ko'ra U to'plamdan bitta y son mos qo'yilgan bo'lsa, X to'plamda funksiya berilgan deb ataladi.
Bag'zan funksiya X to'plamda berilgan deyish o'rniga funksiya X to'plamda aniqlangan deb ham yuritiladi. Funksiya $f: x \to y$ yoki $y = f(x)$ kabi belgilanadi. Bunda X funksiyaning aniqlanish to'plami (sohasi), U esa funksiyaning o'zgarish to'plami (sohasi) deb ataladi. x erkli o'zgaruvchi yoki funksiyaning argumenti, y erksiz o'zgaruvchi yoki x o'zgaruvchining funksiyasi deyiladi.
Oxy tekislikning $y = f(x)$ munosabatni qanoatlantiruvchi $M(x, y)$ nuqtalari to'plami $y = f(x)$ funksiyaning grafigi deyiladi.
3. Agar $y = f(x)$ funksiya $D(f)$ sohani $E(f)$ sohaga o'zaro bir qiymatli akslantirsa, u holda x ni y orqali bir qiymatli ifodalash mumkin

$$x = \varphi(y).$$

Hosil bo'lgan funksiya $y = f(x)$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya deyiladi.
$y = f(x)$ va $x = \varphi(y)$ funksiyalar o'zaro teskari funksiyalardir. $x = \varphi(y)$ teskari funksiyani, odatda, x va y larning o'rinlarini almashtirish bilan standart ko'rinishda yoziladi

$$y = \varphi(x).$$

O'zaro teskari $y = f(x)$ va $y = \varphi(x)$ funksiyalarning grafiklari birinchi va uchinchi koordinata choraklarining bissektrisasiga nisbatan simmetrik. $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $y = \varphi(x)$ teskari funksiyaning qiymatlari sohasi bo'ladi.
$u = \varphi(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi D, qiymatlar sohasi E bo'lsin, $y = f(u)$ funksiyaning aniqlanish sohasi E bo'lib, o'zgarish sohasi I bo'lsin, u holda $y = f(\varphi(x))$ funksiyaning aniqlanish sohasi D va o'zgarish sohasi I bo'lgan murakkab funksiya yoki f va φ funksiyalarning kompozitsiyasi deyiladi.
u o'zgaruvchi oraliq o'zgaruvchi deyiladi. $y = f(x)$ ko'rinishidagi funksiya oshkor funksiya deyiladi. $F(x, y) = 0$ ko'rinishdagi tenglama ham, umuman aytganda x va y o'zgaruvchilar orasidagi funktsional boђlanshni beradi. Bu holda tahrifga ko'ra y o'zgaruvchi x ning oshkormas funksiyasi bo'ladi. Aniqlanish sohasi $D(f)$ koordinatlar boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan $f(x)$ funksiya x ning har qanday $x \in D(f)$ qiymati uchun $f(-x) = f(x)$ (yoki $f(-x) = -f(x)$) munosabat bajarilsa, juft (yoki toq) funksiya deyiladi.
Juft funksiya grafigi ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik, toq funksiya grafigi esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrikdir.

Agar $T > 0$ o'zgarmas son mavjud bo'lib, har bir $x \in D(f)$ va $(x + T) \in D(f)$ da $f(x + T) = f(x)$ tenglik bajarilsa, $f(x)$ funksiya davriy funksiya deyiladi.
Funksiyaning aniqlanish sohasini topish uchun elementar funksiyalarning aniqlanish sohalarini bilish zarur:
1. $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ - butun ratsional funksiya $D(y) = R;$

2. $y=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m}=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ - kasr ratsional funksiya

$D(y)=R\setminus\{x:Q(x)=0\};$

3. $y=\log_a x \quad (0<a\neq 1)$ - logarifmik funksiya - $D(y)=R_+=[0,+\infty);$

4. $y=a^x \quad (0<a\neq 1)$ - ko'rsatkichli funksiya $D(y)=R;$

5. $y=x^{\mu} \quad (\mu\in R)$ - darajali funksiya : $\mu\in N$ bo'lsa, $D(y)=R; -\mu\in R$ bo'lsa,

$D(y)=R\setminus\{x=0\}=\{x\in R: x\neq 0\};$ $\mu=\dfrac{s}{r}$ bo'lib, r toq bo'lsa, s ning musbat yoki manfiyligiga qarab $D(y)=R$ yoki $D(y)=\{x\in R: x\neq 0\}$ bo'ladi. r juft bo'lsa, $D(y)=(0,+\infty)$.

6. Trigonometrik funksiyalar:

$y=\sin x: \quad D(y)=R; \quad y=\cos x: \quad D(y)=R;$

$y=tgx: \ D(y)=\{x\in R: x\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k\in Z\};$

$y=ctgx: \ D(y)=\{x\in R: x\neq \pi k, k\in Z\};$

7. Teskari trigonometrik funksiyalar:

$y=\arcsin x: \quad D(y)=[-1,1]; \qquad y=\arccos x: \ D(y)=[-1,1];$

$y=arctgx: \quad D(y)=R; \qquad y=arcctgx: \ D(y)=R;$

Bundan tashqari

$D(f+g)=D(f)+D(g), \qquad D(f\cdot g)=D(f)\cap D(g)$

$D(\dfrac{f}{g})=\{D(f)\cdot D(g)\}\setminus\{x\in R: \ g(x)=0\}$

qoidalardan foydalanish kerak. Funksiyaning aniqlanish sohasini son o'qida tasvirlash maqsadga muvofiqdir.

1-misol. Quyidagi funksiyaning aniqlanish sohasini toping:

$$y=\sqrt{x+1}$$

Yechish:

bu funksiya x ning $x+1\geq 0$, bo'lgan barcha qiymatlarida haqiqiy va chekli.

Bundan $x\geq -1$ kelib chiqadi. Demak,

$$D(y)=[-1;+\infty)$$

2-misol. Quyidagi funksiyaning aniqlanish sohasini toping:

Yechish.

$$y=\lg(\sin\frac{\pi}{x}),$$

Yechish: $D(\lg x)=(0;+\infty)$ bo'lgani uchun $\sin\dfrac{\pi}{x}>0$ bo'lishi kerak.

Mag'lumki, $2\pi k<\alpha<(2k+1)\pi$, $k\in Z$ bo'lganda $\sin\alpha>0$ bo'ladi. Demak,

$$2k\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+1)\pi, \ k\in Z,$$

$$2k < \frac{1}{x} < 2k+1, \qquad \frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}, \;\; k \in Z$$

Shunday qilib, $D(y) = \left\{ x : \frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2\pi}, k \in Z \right\}.$

Kerakli formulalar.

1) $R = (-\infty; \infty)$ xakikiy sonlar to'plami.

$R = QUI$ ratsional va irratsional sonlar.

2) Absolyut qiymat: $|a| = \begin{cases} a, a \geq 0, \\ -a, a < 0. \end{cases}$ (1)

3) $(a;b) \Leftrightarrow a < x < b,$ interval

$[a;b) \Leftrightarrow a \leq x < b,$ yarim kesma

$(a;b] \Leftrightarrow a < x \leq b,$ (yarim interval)

$[a;b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b,$ kesma

4) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$ funksiya qat'iy o'suvchi (2)

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2);$ funksiya qat'iy kamayuvchi (3)

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$ kamaymovchi (4)

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2);$ o'smovchi (5)

$f(-x) = f(x)$ - juft, $f(-x) = -f(x)$ -toq (6)

$f(x \pm t) = f(x), t > 0$ - davriy, t-davr. (7)

5) $Y = \left\{ \frac{f(x)}{a < x < b} \right\}$ tuplamning XOY tekslikdagi

aksiga $f(x)$ ning grafigi deyiladi (8)

Masalalar yechish.

3-masala. $f(x) = x^2$ bulsa, $\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ ni toping.

Yechilishi. $x = a$ da $f(a) = a^2$, $x = b$ da $f(b) = b^2$ bo'lgani uchun

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = a+b.$$

4-masala. $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + 2\sin x$ funksiyani juft-toqlikka tekshiring.

Yechilishi. $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + 2\sin x$ bo'lgani uchun,

$$f(-x) = (-x)^2 \cdot \sqrt[3]{-x} + 2\sin(-x) = x^2 \cdot (-\sqrt[3]{x}) - 2\sin x = -(x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + 2\sin x) = -f(x)$$

yahni $f(-x) = -f(x)$ (60) ga asosan, berilgan funksiya toq.

5-masala. $y = \frac{x-2}{2x-1}$ funksiyaning aniqlanish va uzgarish soxasini toping.

Yechilishi. 1) $f(x) = \frac{x-2}{2x-1}$ funksiyasi aniqlangan bo'lishi uchun $2x - 1 \neq 0$, yahni $2x \neq 1, x \neq \frac{1}{2}$ bulishi kerak. Demak, funksiyaning aniqlanish soxasi: $(-\infty; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty) = X$

2) $f(x)=\dfrac{x-2}{2x-1}=\dfrac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{3}{2}}{2x-1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2(2x-1)}$ ko'rinishda yozib olamiz.

$\dfrac{3}{2(2x-1)}$ giperbola bo'lgani uchun $Y=(-\infty;+\infty)$.

6-masala. Quyidagi funksiyaningt aniqlanish va uzgarish soxalarini toping:

$$y=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x}$$

Yechilishi. 1) Birinchi qo'shiluvchi aniqlangan bo'lishi uchun $4-x^2\geq 0$ bo'lishi kerak, ikkinchi qo'shiluvchida $x\neq 0$. Berilgan funksiyaning aniqlanish soxasini topish uchun quyidagi sistemaning yechimlarini topish lozim, ya'ni:

$$\begin{cases}4-x^2\geq 0,\\ x\neq 0.\end{cases}\quad \begin{cases}x^2\leq 4,\\ x\neq 0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|\leq 2,\\ x\neq 0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leq x\leq 2,\\ x\neq 0.\end{cases}\Rightarrow x\in[-2;0)\cup(0;2].$$

2) O'zgarish soxasini topishda $\dfrac{1}{x}$ qo'shiluvchi asosiy rol o'ynaydi, u giperbola bo'lgani uchun, uning o'zgarish soxasi $(-\infty;+\infty)$. Shuning uchun xam berilgan funksiyaning o'zgarish soxasi $(-\infty;+\infty)$.

Javob: $D_x=x\in[-2;0)\cup(0;2], E_y=(-\infty;+\infty)$.

7-masala. $y=\log_2 x$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. $D_x=(0;\infty)$ bo'lgani uchun, $(-\infty;+\infty)$ soxasida logarifm asosi 2 ning darajalaridan iborat nuqtalarga oid jadval chizamiz:

X	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	
Y	-2	-1	0	1	2	3	4	

2) Mos nuqtalarni yasaymiz.
3) Topilgan nuqtalarni tekis egri chiziq bilan tutashtiramiz.

8-masala. $y=|x-2|+1$ funksiyaning grafigini yasang.

Yechilishi. 1) $y=|x|$ ning grafigini yasaymiz.
2) Hosil bo'lgan grafikni 2 birlik o'ngga siljitamiz;
3) Oxirgi grafikni 1 birlik yuqoriga ko'taramiz.

9-masala. $y=\begin{cases}3-x, x<2,\\ x^2, x\geq 2.\end{cases}$

MISOLLAR

38. Quyidagi funksiyalarni juft-toqlikka tekshiring.

a) $y=2^x+2^{-x}$; b) $y=|x|-5e^{x^2}$; s) $y=x^2+5x$.

39. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish va o'zgarish soxalarini toping:

a) $y=\dfrac{Ln(1+x)}{x-1}$; b) $y=\sqrt{1-2x}+3\arcsin\dfrac{3x-1}{2}$.

40. Eng kichik davri topilsin:

a) $\sin 2x$; b) $\cos\dfrac{x}{2}$; v) $tg3x$.

41. $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ funksiyaning grafigini chizing.

42. $y=\begin{cases} x-2, x<1, \\ \frac{1}{2}x^2, x\geq 1. \end{cases}$ funksiya grafigini chizing.

43. $y=2\sin(2x-1)$ funksiya grafigini $y=\sin x$ funksiya grafigi yerdamida siljishlar yerdamida yasang.

7. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini to'ing

$$a)\ y=\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}; \qquad b)\ y=\arcsin\frac{x-2}{2};$$

$$d)\ y=\frac{1}{\lg(4-x^2)}; \qquad e)\ y=\sqrt{25-x^2}+\lg\sin x$$

$$f)\ y=\sqrt{x+2}; \quad g)\ y=\arccos\frac{x-1}{2}; \quad h)\ y=\sqrt{-x}+\sqrt{4+x};$$

44. Quyidagi funksiyalarning o'zgarish sohasini to'ing

1. $a)\ y=\sqrt{x-3}; \quad b)\ y=\arccos\frac{x-1}{2}; \quad d)\ y=\sqrt{-x}+\sqrt{4+x};$

2. $a)\ y=\sqrt{x+2}; \quad b)\ y=\sqrt{9-x^2}; \quad d)\ y=\sqrt{4x-x^2};$

45. Quyidagi funksiyalarning eng kichik musbat davrini to'ing.

$a)\ y=\sin 5x; \quad b)\ y=\lg\cos 2x; \ c)\ y=tg3x+\cos 4x.$

46. Quyidagi funksiyalarning juft yoki toq funksiya ekanini aniqlang:

$a)\ y=x^4\sin 3x; \ b)\ y=x^4-x^2+x; \ d)\ y=\lg\cos x.$

$a)\ y=\ln\frac{1-x}{1+x}; \quad b)\ y=2^x+2^{-x}; \quad c)\ y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$

14-§. Funksiya, uning limiti va uzluksizligi.

Elementlari xaqiqiy sonlardan iborat bo'lgan D va Y to'plamlar berilgan bo'lib, o'zgaruvchi x miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari D to'plamda, y o'zgaruvchi miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari Y to'plamda bo'lsin.

1-Ta'rif. Agar x o'zgaruvchining D to'plamdagi xar bir qiymatiga biror qoida yoki qonunga ko'ra y o'zgaruvchining Y to'plamdagi faqat aniq bitta qiymati mos qo'yilgan bo'lsa, u xolda o'zgaruvchi y ni o'zgaruvchi x ning funksiyasi deyiladi va odatda y=f(x) ko'rinishda yoziladi.

x ga erkli o'zgaruvchi yoki argument, y ga esa erksiz o'zgaruvchi yoki x o'zgaruvchining funksiyasi deyiladi.

x o'zgaruvchining qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar to'plami D ga funksiyaning aniqlanish soxasi deyiladi va D(f) yoki D(u) ko'rinishda belgilanadi. Ye to'plamga esa funksiyaning o'zgarish soxasi deyiladi va Ye(f) yoki Ye(u) ko'rinishda yoziladi.

Misol. y= $\sqrt{1-x^2}$ funksiyaning aniqlanish soxasi [-1,1] to'plamdan ya'ni D(u)=[-1,1] iborat bo'ladi. O'zgarish soxasi esa Y(u)=[0,1] bo'ladi.

2-Taqrif. Funksiyaning aniqlanish soasi D dagi xar qanday x_1,x_2 lar uchun $x_1<x_2$ tengsizlikdan $f(x_1)\leq f(x_2)$ kelib chiqsa, u qolda f(x) funksiyani D da o'suvchi deyiladi,agar $f(x_1)\geq f(x_2)$ kelib chiqsa, funksiyani D da kamayuvchi deyiladi.

Funksiyaning berilish usullari. a) x va y o'zgaruvchi miqdorlar orasidagi bos lanish matematik formulalar orqali berilishi mumkin, u xolda funksiya analitik usulda berilgan deyiladi;

b) o'zgaruvchi x va y lar orasidagi bos lanish grafik usulda berilishi mumkin;

v) x va y lar orasidagi bos lanish jadval usulida yaqni argument x ning qiymatlariga mos keluvchi y ning qiymatini jadval ko'rinishda berilishi mumkin.

Funksiya limitining ta'rifi.

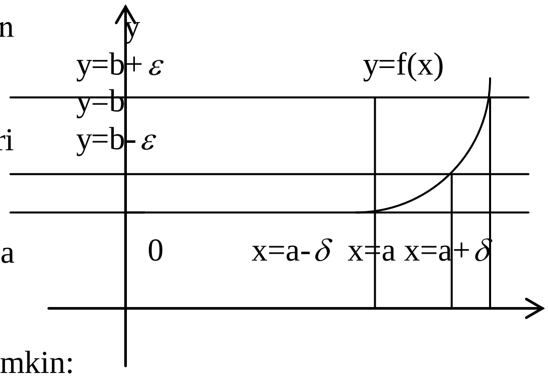
Biror berilgan a nuqtani o'z ichiga olgan xar qanday oraliqqa shu a nuqtaning atrofi deyiladi. Masalan, (a-δ ;a+δ) oraliq a nuqtaning δ atrofi deyiladi.

1-Taqrif. Xar qanday ε >0 son uchun shunday δ >0 son topish mumkin bo'lsaki, x ning 0<|x-a|<δ tengsizlikni qanoatlantirgan barcha qiymatlari uchun |f(x)-b|<ε tengsizlik o'rinli bo'lsa, b songa f(x) funksiyaning a nuqtadagi (x$\to$a) limiti deyiladi va odatda

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

ko'rinishda yoziladi.

Bu ta'rifning geometrik ma'nosi istalgan ε >0 son uchun shunday δ >0 soni mavjud bo'lsaki, x ning (a-δ ;a+δ) intervaldagi barcha qiymatlari uchun f(x) funksiyaning qiymati (b-ε ;b+ε) oraliqda, ya'ni y=b-ε ; y=b+ε to'g'ri chiziqlar orasida bo'ladi.



1-ta'rifni quyidagicha xam ifodalash mumkin:
Har qanday ε >0 son uchun shunday N va M (N<a<M) sonlarni ko'rsatish mumkin bo'lib, x ning N<x<M tengsizlikni qanoatlantiradigan (x=a dan tashqari) xamma qiymatlari uchun |f(x)-b|<ε tengsizlik o'rinli bo'lsa, b songa f(x) funksiyaning a nuqtadagi (x$\to$a) limiti deyiladi: $\lim_{x\to a} f(x)$=b.

2-Ta'rif. Xar kanday ε >0 son uchun shunday N sonni ko'rsatish mumkin bo'lib, x>N tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun |f(x)-b|<ε tengsizlik o'rinli bo'lsa, b songa f(x) funksiyaning x$\to\infty$ limiti deyiladi va

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b$$

ko'rinishda yoziladi.

3-Ta'rif. Xar qanday ε >0 son uchun shunday M>a sonni ko'rsatish mumkin bo'lib, a<x<M tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun |f(x)-b|<ε tengsizlik o'rinli bo'lsa, b songa f(x) funksiyaning a nuqtadagi (x$\to$a+0 ya'ni x a ga o'ngdan intilganda) o'ng limiti deyiladi va

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=b$$

ko'rinishda yoziladi.

Xuddi shuningdek , f(x)funksiyaning a nuqtada chap limiti deb, $\lim_{x\to a-0} f(x)$=b ga aytiladi.
O'ng va chap limitlarga bir tomonlama limitlar deyiladi.

Agar f(x) funksiyaning x=a nuqtadagi limiti chekli mavjud bo'lsa, u xolda albatta

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x)$$

bo’lishi shart.

Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar.

1-Ta’rif. Agar y=f(x) funksiyaning limiti $x\to a$ da nolq bo’lsa ya’ni $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ bo’lsa ,u xolda y=f(x) funksiyani $x\to a$ da cheksiz kichik funksiya deyiladi.

2-Ta’rif. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ bo’lsa , y=f(x) funksiyani $x\to a$ da cheksiz katta funksiya deyiladi.

Misol. 1) $y=x^2-1$ funksiya $x\to 1$ da cheksiz kichik funksiya chunki $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0$

2) $y=\dfrac{1}{x^2}$ funksiya xam $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiya $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

3) $y=x^2$ funksiya esa $x\to\infty$ da cheksiz katta funksiya $\lim\limits_{x\to\infty} x^2=\infty$.

Endi cheksiz kichik funksiyalarning xossalari haqidagi quyidagi teoremalarni isbotsiz keltirib o’taylik

1-Teorema. Chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalarning algebraik yig'indisi cheksiz kichik funksiyadir.

2-Teorema. Cheksiz kichik funksiyaning chegaralangan funksiyaga ko’paytmasi cheksiz kichik funksiya bo’ladi.

3-Teorema. Cheksiz kichik funksiyalarning ko’paytmasi cheksiz kichik funksiyadir.

4-Teorema. Cheksiz kichik funksiyaning limiti noldan farqli bo’lgan funksiyaga bo’linmasi cheksiz kichik funksiyadir.

Funksiya limiti xaqidagi asosiy teoremalar

1-Teorema. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ chekli limit mavjud bo’lsa, u xolda f(x) funksiyani b son bilan α (x) cheksiz kichik funksiya yig’indisi ko’rinishda ifodalash mumkin

$f(x)=b+\alpha(x)$ va aksincha $f(x)=b+\alpha(x)$ bo’lsa, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ bo’ladi.

2-teorema. 1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$ Xususan $g(x)=k$ (k - o’zgarmas son)

$$\lim_{x\to a}[\kappa\cdot f(x)]=\kappa\cdot\lim_{x\to a} f(x)$$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0\right)$

3-teorema. (oraliq o’zgaruvchining limiti xaqidagi teorema).

Agar $u(x)$, $z(x)$ va $v(x)$ funksiyalarning tegishli qiymatlari orasida

$$u(x) \le z(x) \le v(x)$$

tengsizliklar bajarilsa va $x \to \infty$ da $u(x)$, $v(x)$ funksiyalar birgina b limitga intilsa, u xolda $x \to \infty$ da $z(x)$ funksiya xam shu b limitga intiladi.

Ajoyib limitlar.

Birinchi ajoyib limit.

1-teorema. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ bo'ladi.

Isboti. Radiusi birga teng bo'lgan birlik aylanani ko'raylik .

S_1 - OAB uchburchakning yuzasi

S_2 - OAB sektorning yuzasi

S_3 - OCB uchburchakning yuzasi bo'lsin.

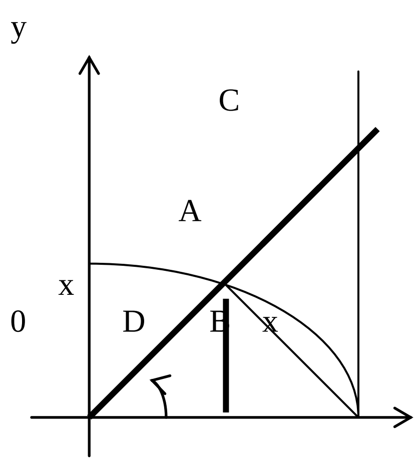
U xolda $S_1 < S_2 < S_3$ bo'ladi.

OA=OB=R=1 ekanligini e'tiborga olsak

$S_1 = \frac{1}{2}$ OV AD= $\frac{1}{2}$ sinx,

$S_2 = \frac{1}{2}$OV AV = $\frac{x}{2}$ va $S_3 = \frac{OB\ \text{CB}}{2} = \frac{1}{2}$ tgx

bo'ladi.



Demak sinx=$\frac{AD}{OA}$=AD; tgx=$\frac{CB}{OB}$=CB.

$\frac{1}{2}$sinx<$\frac{x}{2}$< $\frac{1}{2}$tgx $\Rightarrow$ 1<$\frac{x}{\sin x}$<$\frac{1}{\cos x}$ $\Rightarrow$

cosx<$\frac{\sin x}{x}$<1 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0}$ cosx<$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ <$\lim\limits_{x\to 0}$ 1 $\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$=1 .

Misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Ikkinchi ajoyib limit.

Ta'rif. $(1+\frac{1}{n})^n$ o'zgaruvchi miqdorning $n\to\infty$ dagi limiti e soni deyiladi, e=2,7182818284...

2-teorema. $(1+\frac{1}{x})^x$ funksiyaning $x\to\infty$ dagi limiti mavjud bo'lib e soniga teng bo'ladi.

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \text{ye} \qquad (3)$$

1. $x\to\infty$ deylik, bu xolda x ning xar qanday qiymati ikki musbat butun sonlar orasida yotadi.

$n\le x<n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n} \Rightarrow 1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}<1+\frac{1}{n} \Rightarrow (1+\frac{1}{n+1})^n<(1+\frac{1}{x})^n<(1+\frac{1}{n})^n$.

Agar $x\to\infty$ bo'lsa , n xam $n\to\infty$ chunki n x ning butun qismi, oxirgi tengsizlikdan limitga o'tsak, ikki chekkadagi limitlar y ga intilgani uchun

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = ye$$

kelib chiqadi.

2. $x\to-\infty$ da t=-(x+1) yoki x=-(t+1) almashtirish bajarsak $t\to+\infty$ da $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{t\to\infty}(1-\frac{1}{t+1})^{-t-1}=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t=e.$$

3. $\lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})^x=e$ ekanligini ham quyidagicha xosil qilamiz:

$x=\frac{1}{t}$ desak $t\to\infty$ da $x\to 0$, $\lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t=e.$

Amaliy mashg'ulotlarda ko'p uchraydigan quyidagi limitlarni xam talabalarning bilishi maqsadga muvofiq bo'lar edi.

$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{\kappa}{x})^x=ye^{-k}$; $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\kappa}{x})^x=ye^k$,

$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n$; $\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)^n-1}{x}=-n$,

$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$; $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$,

$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e.$

MISOLLAR.

47. Tengsizlikni eching.

a) $x-4\le 0$ b) $9-x^2\ge 0$ v) $x(x-1)<0$ g) $|x+2|<2$

d) $|x-1|>1$ e) $|2x-3|<5$ j) $|x-1|<|x+1|$

48. $y(x)=\frac{x-2}{x+1}$ funksiya berilgan. $y\left(-\frac{1}{2}\right),\left|y\left(\frac{1}{2}\right)\right|$ larni toping.

49. $y(x)=\sqrt{1+x^2}$ funksiya berilgan. $y(-x), y(\frac{1}{x})$ larni toping.

50. $y(x) = 2^{x-2}$ funksiya berilgan. y(0), y(-1) larni toping.

51. $y(x) = x^2$ funksiya berilgan. $\dfrac{y(b) - y(a)}{b-a}$ ni toping.

52. $y(x) = x^3$ funksiya berilgan. $\dfrac{y(x+h) - y(x-h)}{h}$ ni toping.

53. $y(x) = 2x^2 + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{5}{x} + 5x$ funksiya berilgan. $y(t) = y\left(\dfrac{1}{t}\right)$ o'rinli ekanligini ko'rsating.

54. $y(x) = a^x$ funksiya berilgan. Ihtiyoriy x uchun $y(x) * y(-x) - 1 = 0$ ekanligini ko'rsating.

55. $y(x) = x^2 - 2x + 3$ funksiya berilgan. $y(x) = y(-1)$ tenglamani barcha ildizlarini toping.

56. $y(x) = 2x^3 - 5x^2 - 8x$ funksiya berilgan. $y(x) = y(2)$ tenglamani barcha ildizlarini toping.

Quyidagi funksiyalarining aniqlanish sohalarini toping.(57-73).

57. $y = x^2 + 2x$ 58. $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ 59. $y = \sqrt{4 - x^2}$

60. $y = x + \dfrac{1}{x}$ 61. $y = |x| + 3$ 62. $y = \lg(1 - x^2)$ 63. $y = \log_x (x - \dfrac{1}{2})$

64. $y = arcCos(x+2)$ 65. $y = \sqrt{Cosx}$

66. $y = \sqrt{1 - Cosx}$ 67. $y = \ln \sin x$ 68. $y = \dfrac{e^x}{x}$

69. $y = \lg \dfrac{2+x}{2-x}$ 70. $y = \dfrac{x+1}{arcSin(x-1)}$ 71. $y = arcSin\left(\lg \dfrac{x}{10}\right)$

72. $y = \log_{\cos x} \sin x$ 73. $y = ctgx * tgx$

Quyidagi funksiyalarining juft yoki toqligini aniqlang .(74-82)

74. $y = x^4 - 2x^2$ 75. $y = x - \dfrac{x^3}{3}$ 76. $y = x + \dfrac{1}{x}$ 77. $y = x * \sin x$

78. $y = 2^{-x^2}$ 79. $y = x\dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}$ 80. $y = x^2 * \sin \dfrac{1}{x}$

81. y= $\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$ 82. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$

Quyidagi funksiyalarining eng kichik musbat davrini aniqlang .(83-91)

83 $y = \sin^2 x$ 84. $y = \sin 2x$ 85. $y = \cos \sqrt{2}x$ 86. $y = \sqrt{tgx}$

87 $y = \sin 2x + \cos \dfrac{x}{2}$ 88. $y = tg \dfrac{x}{2} + \cos \dfrac{x}{2} + \sin x$ 89. $y = 3\cos\left(x + \dfrac{x}{4}\right))$

90. $y = a * \sin kx$ 91. $y = tg 2x + \sin \dfrac{x}{2}$

Quyidagi limitlarni toping.(92-140)

92. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x^2+2}$ 93. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{2x+5}$ 94. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^2 * (2x+3)}{x^3+1}$

95. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$ 96. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 97. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

98. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ 99. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$ 100. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$

101. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$ 102. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$ 103. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

104. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ 105 . $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$ 106. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$

107. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ 108. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ 109. $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

110. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x}+h-1}{h}$ 111. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{h}$ 112. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2-1}-x)$

113. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$ 114. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$ 115. $\lim\limits_{x\to\infty} (x-\sqrt{x^2-a^2})$ 116. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$ 117. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$ 118. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\,2x}{\sin 3x}$ 119. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$ 120. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 121. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$

122. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ 123. $\lim\limits_{x\to 0} ctg\,2x * ctg(\dfrac{\pi}{2}-x)$ 124. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$

125. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$ 126. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha^n}{(\sin \alpha)^m}, n>m$ 127. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha\ x}{\sin \beta x}$

128. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}$ 129. $\lim\limits_{x\to\infty} (1+\dfrac{2}{x})^x$ 130. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

131. $\lim\limits_{x\to\infty}$ x(ln(x+3)-lnx) 132 . $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg(1+10x)}{x}$ 133. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$

134. $\lim\limits_{x\to\infty} x(3^{\frac{1}{x}}-1)$ 135. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$ 136. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x^2}$

137. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^x}{\sin x}$ 138. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$ 139. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$

140. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Л. А. Кузнецов Сборник заданий по высшей математике, М., Высшая школа 1983.
2. Н.С.Пискунов Дифференциальное и интегральное исчисления, том 1, Наука, 1985.
3. Демидович Б.П. Сборник задач по математическому анализу М., Наука 1992.
4. Azlarov T., Mansurov X. Matematik analiz, 1-qism, T.: Universitet, 2006.
5. D.B.Eshmamatova, M.Ikramova Birinchi va ikkinchi tartibli egri chiziqlar, T.: ToshTYMI, 2006.
6. A.M.Karimov., E.A.Mirsalihov. Aniqmas integral T.: ToshTYMI, 2006

Tavsiya etiladigan adabiyotlar.

1. T., Mansurov X., Matematik analiz, 1, 2 qism, Toshkent, «O'qituvchii», 1986, 1989.
2. Abdalimov B. A., Oliy matematika, Toshkent, «O'qituvchii», 1994.
3. Azlarov . Matematik analiz. T.2- qisim. O'qituvchi. 1994

4. Juraev T. Va boshqalar, Oliy matematika asoslari, 1-2 tom, Toshkent, «O'zbekiston» 1995, 1999.

5. Latipov X. va boshqalar, Analitik geometriya va chiziqli algebra, Toshkent, «O'zbikiston», 1995

8. Minorskiy T., Oliy matematikadan misol va masalalar to'plami, Toshkent, «O'qituvchii», 1997.

9. Н.Ш.Крамерам. Высщая математика для экономистов. 2002.г.

10. Pogorelov A. V., Analitik geometriya, Toshkent, «O'qituvchii», 1983.

11. Soatov Yo., Oliy matematika asoslari, 1, 2, 3 tom, Toshkent, «O'qituvchii», 1992, 1994, 1997.

12. Shneyder va boshqalar, Oliy matematika qisqa kursi, 1, 2 tom, Toshkent, «O'qituvchii», 1983, 1985.

13. Tojiev Sh.I. Oliy matematikadan masalalar yechish. 2002

Qo'shimcha adabiyotlar

1.Баврин И.И Общий курс высщей математика ,М.в.ш.1995

2. Данко П.Е. Попов А.Г. Кожевникова Т.Я Высщая математика упражнениях и задачах. 1998 г

3. Карасев А.И.и.д. Курс выщей математики для экономических вузов М.в.ш 1998 г

4.Saifnazarov Sh.A. Ortiqova M.T.Boshlang`ich moliyaviy matematik asoslari. M.delo. 2000

MUNDARIJA