

O‘ZBEKISTON OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

FIZIKA FAKULTETI

NAZARIY FIZIKA KAFEDRASI

NAZARIY FIZIKA MUTAXASSISLIGI

RAZZAQOVA E‘ZOZXON RAVSHAN QIZI

OPTIK NUR TOLADA NOCHIZIQLI TO‘LQINLAR

DISSERTATSIYA ISHI

Ta‘lim yo‘nalishi: 5440100-Fizika

Ilmiy rahbar:

Professor Abdumalikov A.A.

Toshkent-2018

Mundarija

Kirish	3
1 Nochiziqli to‘lqinlar va solitonlar	4
1.1 Tabiatda to‘lqinlar	4
1.2 Yakkalangan to‘lqinning kashf qilinishi	6
1.3 Chiziqli va nochiziqli to‘lqinlar	8
1.4 Solitonlar	13
2 Solitonlar uchun g‘alayonlar nazariyasi	21
2.1 Sochilish nazariyasidan ba’zi bir ma’lumotlar. Sochilish ma’lumotlarining analitik xossalari	21
2.2 Sochilishning teskari masala metodi. Teskari masala tenglamasi	31
2.3 Nochiziqli Schrödinger tenglamasi	36
2.4 Nochiziqli Schrödinger tenglamasini bir soliton yechimi	43
3 Nochiziqli Schrödinger tenglamasi yechimini-boshqarish	47
3.1 Teskari metod yordamida nochiziqli Schrödinger tenglamasi uchun olingan variatsion tenglamalar	47
3.2 Natijalar tahlili	50

Kirish

Optik soliton (ingliz tilida "soliter" dan) ma'lum davomiylikdagi (nanodan femtosekundlargacha) nohiziqli dispersiyalovchi muhitlarda tarqaluvchi lazerning yakkalangan impulsi bo'lib, tashuvchisi chastotasi ko'rinadigan diapazonda yotadi. U uzoq masofalarda shaklini va tezligini o'zgartirmasdan tarqalishi mumkin. Solitonlarning bir-biri bilan ta'siri elastik bo'lishi uning muhim xossalariidan biri bo'lib hisoblanadi. Ya'ni to'qnashuvdan keyin o'zining boshlang'ich shaklini qayta tiklaydi. Bu yerda shuni ta'kidlash lozimki, bu hodisalar faqat nohiziqli muhitlarda ro'y beradi. Solitonlar o'zaro ta'sirda avval deformatsiyalanadi, ta'sirdan chiqqandan keyin boshlang'ich parametrlarini qayta tiklaydi. Shu sababli solitonlarga ma'lumotlarni jo'natishda, ya'ni optik aloqa tizimida katta umidlar paydo bo'lmoqda. Soliton impulsining davomiyligini qisqartirish hisobiga informatsiyani zichligini va uzatish tezligini oshirish mumkin.

Har qanday sistema, shu jumladan optik nur tolaning parametrlari ideal bo'lmaydi. Masalan, boshqarib bo'lmaydigan (dissipatsiya, nur tola kesimi va uzunligi bo'yicha bir jinsli bo'lmasligi) ta'sirlar va boshqarish mumkin bo'lgan tashqi ta'sirlar bor.

Mazkur magistrlik dissertatsiya ishi optik solitonlarning tashqi g'alayonlarga nisbatan turg'unlik va uni boshqarish masalalariga qaratilgan.

1-Bob

Nochiziqli to‘lqinlar va solitonlar

1.1 Tabiatda to‘lqinlar

Bizga maktab kursidan ma’lumki, muhitning (qattiq, suyuq yoki gaz) biror nuqtasini g‘alayonga keltirsak, u muhitning boshqa nuqtalariga uzatiladi. Buning sababi muhitning qo‘shni nuqtalari bir-biri bilan bog‘langan bo‘lishidadir. Bunday g‘alayon fazoda muhitning xususiyati bilan aniqlanuvchi tezlik bilan tarqaladi. Muhitda g‘alayonning (xususan, tebranish) bir nuqtadan boshqa nuqtaga uzatilish jarayoniga to‘lqin deb atash qabul qilingan.

Tabiatda to‘lqinning tarqalish mexanizmlari turlicha bo‘ladi. Eng sodda hol - muhitning deformatsiyalanishi natijasida qo‘shni nuqtalar orasida paydo bo‘ladigan elastiklik kuchlar to‘lqin jarayonga sababchi bo‘ladi. Bunda qattiq jismlarda ham ko‘ndalang, ham bo‘ylama to‘lqinlar tarqalishi mumkin. Suyuqliklar va gazlarda siljishga qarshilik ko‘rsatuvchi kuch bo‘lmaganligi uchun faqat bo‘ylama to‘lqinlar yuzaga keladi. Havoning elastikligi natijasida yuzaga keladigan tovush to‘lqinlari bunga yaqqol misol bo‘ladi.

Boshqa tabiatga ega bo‘lgan to‘lqinlar orasida elektromagnit to‘lqinlari alohida o‘rin tutadi. Bu to‘lqinlar elektr va magnit maydonlarning tebranishi natijasida paydo bo‘ladi. Muhit elektromagnit to‘lqinlarning tarqalishiga jiddiy ta’sir ko‘rsatadi, ya’ni uning tarqalish tezligi, to‘lqin uzunligi, qutblanish tekisligi o‘zgarishi mumkin. Eng muhimi shundaki, bunday to‘lqinlar elastiklik

to‘lqinlardan farqli ravishda bo‘shliqda ham tarqaladi. Elektr (magnit) maydonning o‘zgarishi natijasida magnit (elektr) maydoni hosil bo‘lishi muhitning turli qismlari orasidagi bog‘lanish vazifasini o‘taydi.

Elektromagnit to‘lqinlarning tarqalish hodisasi bilan kundalik hayotda har qadamda to‘qnashib turamiz. Bu to‘lqinlarning radio chastotalar diapazonida hozirgi vaqtda hammaga ma’lum bo‘lgan barcha aloqa (radio, televidenie, mobil aloqa va boshqalar) va axborotni uzatish va qabul qilish (internet) tizimlari ishlaydi. Elektromagnit to‘lqinlarning boshqa dipazoniga yorug‘lik to‘lqinlari kiradi. Bu to‘lqin yordamida biz dunyoni ko‘ramiz. Bundan tashqari yorug‘lik chastotasidagi elektromagnit to‘lqinlari yordamida optik nur tolalari orqali amalga oshiriladigan yangi aloqa tizimlari hayotimizga kirib kelmoqda.

Suv sirtidagi to‘lqinlar juda muhim va qiziqarli to‘lqinlarga kiradi. Bunday to‘lqinlar keng tarqalgan bo‘lib, uni hamma yoshligida ko‘p marta kuzatgan, hatto maktab kurslarida to‘lqin to‘g‘risida gap borganda uni misol tariqasida keltiriladi va namoyish qilinadi. Buyuk fizik olim Richard Feynmanning (Richard Feynman) ta’biri bilan suv sirtidagi to‘lqinlar to‘g‘risida gapirsak, ”to‘lqin jarayonni namoyish qilishda, suv sirtidagi to‘lqinlardan noqulayroq misolni topib bo‘lmasa kerak, chunki bu to‘lqinlar na tovush, na yorug‘lik to‘lqinlariga o‘xshaydi, bu yerda to‘lqin bilan bog‘langan barcha qiyinchiliklar mujassamlashgan”.

Agar suv bilan to‘ldirilgan yetarlicha chuqur hovuz sirtida g‘alayon hosil qilinsa, suv sirtida to‘lqin tarqala boshlaydi. Bu to‘lqinlarning hosil bo‘lishi suv sirtida g‘alayon natijasida hosil bo‘lgan chuqurlik yaqinidagi suyuqlik zarrachalari og‘irlik kuchi ta’sirida chuqurlikka intiladi. Buning natijasida suv sirtida yangi do‘nglik paydo bo‘ladi. Do‘nglikdagi suyuqlik zarrachalari yana og‘irlik

kuchi ta'siridan undan qocha boshlaydi. Bu jarayonning vaqt o'tishi bilan takrorlanishi to'liqini yuzaga keltiradi. Bunday to'liqinda zarrachalar pastga va yuqoriga deyarli doira hosil qilib harakatlanganligi uchun suvdagi to'liqlar na ko'ndalang, na bo'ylama bo'la olmaydi. Ular har ikkala toifadagi to'liqlarning aralashmasidan tashkil topganday bo'ladi. Chuqurlik ortgan sari aylanalarning radiuslari nolga teng bo'lgunga qadar kamaya boradi.

Suv sirtidagi to'liqinning tarqalishini o'rganish uning tezligi to'liqin uzunligiga bog'liq ekanligini ko'rsatdi. Xususan, uzun to'liqlarning tarqalish tezligiga proporsional ekan. Ko'rinib turibdiki, bunday to'liqlarning paydo bo'lishiga og'irlik kuchi sababchi ekan. Qisqa to'liqlarning tezligi sirt taranglik kuchi va to'liqin uzunligiga bog'liq bo'ladi. O'rta to'liqlarning tezligi har ikkala kuchga bog'liq. Bundan ayonki, suv sirtidagi to'liqlar yetarlicha murakkab hodisa ekan.

1.2 Yakkalangan to'liqinning kashf qilinishi

Suv sirtidagi to'liqlar qadimdan tadqiqotchilarning e'tiborini o'ziga tortgan. Birinchidan, bu kemalarning suzishi bilan chambarchas bog'liq bo'lgan va odamzodga yaqindan ma'lum bo'lgan tabiat hodisalaridan biridir.

Shotland olimi John Scott Russell 1834-yilda kanallarda bir juft otlar tortib boradigan barjaning suzishini o'rganish vaqtida ajoyib to'liqini kuzatadi. Barja birdaniga to'xtaganda u harakatga keltirgan suv to'xtamasdan uning burun qismida to'planadi va undan ajralib chiqadi. So'ngra to'plangan suv massasi yakkalangan do'nglik ko'rinishini olib, kanal bo'ylab katta tezlikda shaklini o'zgartirmasdan va tezligini pasaytirmasdan oldinga qarab suzib ketadi.

Russell umri davomida bunday to‘lqinni kuzatishga ko‘p marta qaytadi, chunki kashf qilgan yakkalangan to‘lqin tabiatdagi boshqa hodisalarda muhim rol o‘ynashiga ishonchi komil bo‘lgan. Shuning uchun bu to‘lqinni o‘rganib uning ba’zi xossalarini aniqlagan: birinchidan, shaklini o‘zgartirmasdan o‘zgarimas tezlik bilan harakatlanadi, ikkinchidan, tezlik c , kanal chuqurligi h va to‘lqin balandligi a orasidagi bog‘lanishni aniqladi:

$$c = \sqrt{g(h + a)}, \quad (1.1)$$

Bu yerda g -erkin tushish tezlanishi, $a < h$. Uchinchidan, bitta katta to‘lqin bir nechta kichik to‘lqinlarga ajarilishi mumkinligini payqagan. To‘rtinchidan, tajribalarda faqat do‘nglik ko‘rinishidagi to‘lqinlar kuzatilishi mumkinligini ta’kidlagan. Kunlardan bir kun u kashf qilgan to‘lqinning kattasi ham, kichigi ham, hech qanday o‘zgarishsiz bir-biriga o‘tishini payqagan. Ammo to‘lqinning mana shu oxirgi xossasini e’tiborsiz qoldirgan.

Russellning 1844-yilda ”To‘lqinlar haqida” nomi bilan chop etilgan ilmiy maqolasi olimlar tomonidan ehtiyotkorlik bilan qarshi olingan. Yevropada bunga umuman e’tibor berilmagan, Angilyada esa H.R.Airy va J.H.Skott bunga e’tibor qaratishgan, ammo ular Russellning ishini qattiq tanqid qilishgan. Airy Russellning kuzatish natijalarini tanqid qilib, sayoz suvlarda bunday to‘lqinlarni kuzatib bo‘lmaydi, xususan, uzun to‘lqinlar shaklini o‘zgartirmasdan tarqala olmaydi deydi. Shu bilan u Russell kuzatishlarining to‘g‘riligiga shubha bilan qaraydi. Zamonaviy gidrodinamikaning asoschilaridan biri bo‘lgan Stoks ham Russellning natijalariga shubha bilan qarab, yakkalangan to‘lqin faktini tanqid qiladi.

Yakkalangan to‘lqinning kashf qilinishiga bo‘lgan salbiy munosabat uni

uzoq vaqt hech kim eslamasligiga sabab bo'ldi. J. Boussinesq (1872-y.) va J. W. Rayleigh (1876y.) bir biridan mustaqil ravishda suv sirtida do'nglik ko'rinishdagi g'alayon uchun analitik formula topib, Russellning ishiga qandaydir aniqlik kiritishdi. Keyinchalik boshqa tadqiqotchilar tomonidan Russellning tajribalari qayta o'tkazilganda uning natijalari to'g'ri ekanligi isbotlandi.

1.3 Chiziqli va nochiziqli to'lqinlar

Turli muhitlarda to'lqin tarqalishini o'rganishda matematik model sifatida xususiy hosilali differensial tenglamalardan foydalaniladi. Bunday tenglamalarda ko'rilyotgan hodisani aniqlovchi kattalik (masalan, tovush to'lqini tarqalishida havoning zichligi) manbagacha bo'lgan masofaga, vaqtga bog'liq bo'lganligi uchun uning xususiy hosilalari ishtirok etadi. Eng sodda ko'rinishdagi tenglama quyidagi ko'rinishga ega

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}. \quad (1.2)$$

Bu yerda to'lqinni aniqlovchi kattalik u fazoviy koordinata x va vaqt t ga bog'liq, u_{xx} va u_{tt} bilan mos ravishda koordinata va vaqt ikkinchi tartibli hosilalar belgilangan. (1.2) tenglama yassi bir o'lchamli to'lqinni (masalan tordagi to'lqin) aniqlaydi. Bu tenglamada tovush to'lqinlari o'rganilayotgan bo'lsa, u havo zichligi, elektromagnit to'lqinlar masalasida elektr va magnit maydon kuchlanganligi deb qarash kerak.

Ilk bor J.D'Alembert 1748 yilda (1.2) tenglamaning quyidagi ko'rinishda yoziladigan umumiy yechimini topgan:

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (1.3)$$

Bu yerdagi f koordinataning musbat, g esa manfiy yo‘nalishda c tezlik bilan tarqaluvchi yassi to‘lqinlarni ifodalaydi. Ular u uchun qo‘yilgan boshlang‘ich shartlardan topiladi.

Yuqorida yozilgan to‘lqin tenglama o‘ta muhim xususiyatga ega. Bu tenglama chiziqli bo‘lganligi uchun uning ikkita ixtiyoriy yechimlari yig‘indisi yana yechim bo‘ladi. Bu chiziqli to‘lqinlar uchun superpozitsiya prinsipi (qo‘shilish natijasida yangi chiziqli to‘lqin hosil bo‘lishi) o‘rinli ekanligini anglatadi. Bunday prinsip nochiziqli tenglamalar bilan aniqlanuvchi to‘lqinlar uchun o‘rinli bo‘lmaydi. Bu holat nochiziqli to‘lqin jarayonlarining kechishi chiziqli jarayonlar tubdan farq qilishini ko‘rsatadi. Xususan, Russell kuzatgan yakkalangan to‘lqinning tezligi uning amplitudasiga bog‘liq, ammo bunday bog‘lanish (1.2) tenglama bilan aniqlanuvchi chiziqli to‘lqinlarda yo‘q.

Bevosita o‘rniga qo‘yish bilan

$$u(x, t) = a \cos(kx - \omega t) \quad (1.4)$$

bog‘lanish (1.2) - tenglamaning yechimi ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin. Bu yerda a, k va ω - o‘zgarmas kattaliklar bo‘lib, mos ravishda to‘lqin amplitudasi, to‘lqin soni va chastotasi deyiladi. (1.9) ko‘rinishdagi funksiya (1.2) - tenglamaning yechimi bo‘lishi uchun $\omega = \pm ck$ dispersiya qonuni bajarilishi kerak. Ko‘rilayotgan yechim muhitda

$$c_p = \frac{\omega}{k}. \quad (1.5)$$

faza tezligi bilan tarqalayotgan monoxromatik to‘lqinni aniqlaydi. Amalda monoxromatik to‘lqin yig‘indisi - to‘lqin paketi bilan ish ko‘riladi. To‘lqin paket

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (1.6)$$

tenglama bilan aniqlanuvchi guruh tezligiga ega bo'ladi.

Suv sirtidagi to'liqlar masalasiga qaytadigan bo'lsak, ularni o'rganishda gidrodinamika tenglamalaridan foydalanish kerak. Ma'lumki, bu tenglamalar nochiziqli, shuning uchun to'liqlar ham nochiziqli bo'ladi. Faqat kichik amplitudali to'liqlarni chiziqli deb hisoblash mumkin.

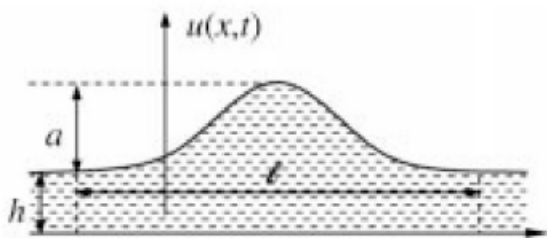
Qayd qilish lozimki, tovush to'liqlari ham har doim chiziqli tenglamalar bilan aniqlanmaydi. Russell kuzatish natijalarini asoslash uchun to'p otilishida hosil bo'lgan tovushning tezligi o'tishga berilgan buyruqdan tez tarqalishini ta'kidlab o'tgan. Buning, sababi kuchli tovush to'liqini chiziqli to'liqin tenglamasi bilan aniqlanmasdan nochiziqli gaz dinamikasi tenglamalari bilan aniqlanadi.

Korteweg - de Vries tenglamasi

Daniya olimlari D.J.Korteweg va G.de Vries Russell tajribalari natijasida paydo bo'lgan muammoga aniqlik kiritishdi. Bu olimlar 1895-yilda gidrodinamika tenglamalaridan foydalanib, suv zichligini o'zgarmas va uyurmalar yo'q deb, suv sirtining muvozanat holatdan chetlashishi $u(x, t)$ uchun tenglama keltirib chiqarishdi. Bu yaqinlashish tabiiy bo'lib, olingan tenglama uzun to'liqlarning tarqalishini aniqlaydi. Olingan tenglama yuqoridagi shartlardan tashqari to'liqin uchun

$$\varepsilon = \frac{a}{h} \ll 1, \quad \delta = \frac{h}{l} \ll 1 \quad (1.7)$$

shartlar bajariladi deb qarashgan. Bu yerda a - to'liqin amplitudasi, h - to'liqin qaralayotgan kanalning chuqurligi, l - to'liqin uzunligi ((1.1)-rasm).



1.1-rasm: Kanalda tarqalayotgan yakkalangan to‘lqin va uning parametrlari

Bu yaqinlashishlarning ma’nosi shundaki, tarqalayotgan to‘lqinning amplitudasi kanal chuqurligidan ancha kichik, shu bilan birga kanal chuqurligi to‘lqin uzunligidan ancha kichik. Shunday qilib, Korteweg-de Vries uzun to‘lqinlarni qarashgan.

Ular olishgan tenglama quyidagi ko‘rinishga ega:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1.8)$$

Bu yerda $u = u(x, t)$ - suv sirtining muvozanat holatdan chetlashishi (to‘lqin shakli) u_t , u_x , u_{xxx} mos ravishda vaqt t hamda koordinata x bo‘yicha birinchi va uchinchi tartibli hosilalar. Bu tenglama (1.2) - tenglama kabi xususiy hosilali tenglama bo‘lib, uning yechimi $u(x, t)$ qaralayotgan masalada tebranishni ifodalovchi funksiya bo‘lib, koordinata va vaqtga bog‘liq.

Tenglamani yechish deganda $u(x, t)$ ning x va t ga shunday bog‘lanishini topish kerakki, uni tenglamaga qo‘yganda ayniyat hosil bo‘lsin.

Tenglama (1.8) to‘lqin yechimi XIX asr oxirlarida topilgan bo‘lib, hozirda Karl Jacobi nomi bilan ataluvchi maxsus elliptik funksiyalar bilan ifodalanadi.

Bu funksiyalar ancha murakkab bo‘lganligi uchun ularni bu yerda keltirishning ma’nosi yo‘q. Ammo, ma’lum shartlarda Jacobi elliptik funksiyasi giperbolik sekansga o‘tadi. Bu holda (1.8) - tenglamaning yechimini yozish mumkin:

$$u(x, t) = 2k^2 \cosh^2[k(x - 4k^2t) + \varphi_0]. \quad (1.9)$$

Bu yerda φ_0 - ixtiyoriy o'zgarmas. Bu yechim to'liqin uzunligi cheksiz katta bo'lgan chegaraviy holdagi to'liqinni ifodalaydi. Mana shu chegaraviy hol 1984-yilda Russell kuzatgan yakkalangan to'liqinga mos keladi.

Korteweg-de Vries tenglamasining (1.9) ko'rinishdagi yechimi koordinata va vaqtga ifoda orqali bog'langan bo'lganligi uchun u tezlik bilan tarqaluvchi yakkalangan to'liqinni ifodalaydi. Bu yechimning yana bir xususiyati, to'liqin amplitudasi va kengligi uning tezligi orqali ifodalanadi. To'liqinning bunday xususiyatlari faqat nochiziqli to'liqlarga xos bo'lib, Korteweg-de Vries tenglamasidagi va hadlar bilan bog'langan. Nihoyat, (1.9) yechim to'liqin tenglama (1.2) ning D'Alambert yechimidan farqli ravishda faqat bir tomonga tarqalayotgan to'liqinni ifodalaydi.

Gidrodinamika tenglamalaridan Korteweg-de Vries tenglamasini keltirib chiqarishda parametrlar ε va δ juda kichik deb faraz qilingan. Agar bu parametrlar nolga intiltirilsa, to'liqin tenglamaning D'Alambert yechimidagi faqat bir qismini olamiz.

Albatta, uzun to'liqlar uchun tenglamani keltirib chiqarishda ε va δ parametrlarning ta'sirini aniqroq hisobga olish mumkin, bunda (1.8) - tenglamaning o'rniga hadlari soni ko'p boshqa tenglama olinadi. Bunga asosan Korteweg-de Vries tenglamasi ham taqribiy bo'lib to'liqin hosil bo'lgan joydan qandaydir masofalarda va qandaydir vaqt oralig'igacha o'rinli bo'ladi. To'liqin tarqalishini yanada katta masofalarda o'rganish uchun nisbatan aniqroq tenglamalarni yozish kerak. Bu ma'noda Korteweg -de Vries tenglamasiga suv sirtidagi to'liqlarni o'rganishda qandaydir yaqinlashishdagi matematik model deb qarash

kerak.

Maxsus metod bilan Korteweg-de Vries tenglamasining yechimlari uchun superpozitsiya prinsipi bajarilmasligini ko'rsatish mumkin. Bunday holat faqat nochiziqli tenglama va nochiziqli to'liqlarga xosdir.

1.4 Solitonlar

Korteweg-de Vries solitonlari. Hayron qoladigan joyi shundaki, Russellning kashfiyoti Korteweg-de Vries ishlarida tasdiqlanishiga qaramasdan ilmiy jamoatchilik nazaridan chetda qoldi. Bu ishlar qariyb 70 yil e'tiborsiz qoldi. Tenglamaning mualliflaridan biri D.J.Korteweg taniqli olim bo'lib, uzoq umr ko'rgan. 1945 yilda uning 100 yillik yubileyi munosabati bilan tuzilgan nufuzli ilmiy ishlari ro'yxatida de Vries bilan bajarilgan bu ishi joy olmagan. Ro'yxatni tuzuvchilar bu ishni e'tiborga loyiq emas deb hisoblashgan. Faqat chorak asrdan keyingina bu ish Kortewegning eng katta ilmiy yutug'iga aylangan.

Biroz o'ylab ko'rsak, Russellning yakkalangan to'liqiniga bo'lgan e'tiborsizlik sabablarini tushunish qiyin emas. Birinchidan, bu to'liqinning boshqalarga o'xshamaydigan xususiyatlari uni ko'p vaqtgacha o'ta xususiy hol deb qarashga sababchi bo'lgan. Ikkinchidan, o'sha davrda fizik olamga chiziqli deb qaralgan va superpozitsiya prinsipi fundamental prinsiplardan bo'lganligi uchun uning bajarilmasligiga aqlbovar qilmasdi. Shuning uchun o'sha davrda va keyinchalik ham Russell to'liqiniga bir ekzotik hol deb e'tibor berilmagan.

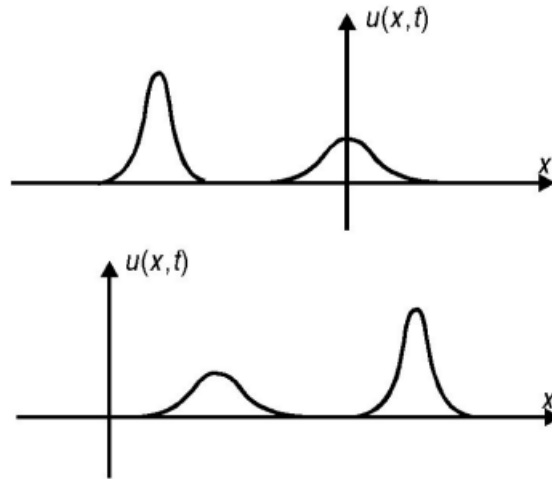
Yakkalangan to'liqin masalasiga qaytish boshida tasoddfan va suvdagi to'liqin masalasiga umuman bog'liq bo'lmagan holda yuz berdi. XX asrning buyuk fizik olimi Enriko Fermi bu voqeaning sababchisi bo'lgan. Fermi 1952-yilda yosh shogirdlari S.Ulam va J.Pastaga EHMda bir nochiziqli masalani

yechishni taklif qiladi. Ular bir-biri bilan prujinalar orqali bog‘langan 64 ta yukning tebranishini o‘rganishlari kerak edi. Bunda prujina cho‘zilganda yoki siqilganda hosil bo‘ladigan muvozanat holatga qaytaruvchi kuch chiziqli Robert Hooke qonunidan farqli ravishda deformatsiya kattaligi Δl ning kvadratiga ham bog‘liq, ya’ni $k\Delta l + \alpha(\Delta l)^2$ ga teng deb olingan.

Bu yerda k va α -o‘zgarmas koeffitsiyentlar. Kuchdagi nochiziqli qo‘shimcha chiziqli kuchdan ancha kichik deb hisoblangan. Tadqiqotchilarning ishi boshlang‘ich momentda biror ”yuk ”(moda) da hosil qilingan tebranish vaqt o‘tishi bilan boshqa hamma modalarda qanday taqsimlanganligini ko‘rishdan iborat bo‘lgan. Hisoblashlar kutilgan natijani bermadi. Boshlang‘ich etapda, haqiqatdan ham tebranish energiyasi ikki-uchta modalarga o‘tgan, keyinchalik tebranish boshlag‘ich holatga qaytgan. Bunday kutilmagan natija-paradoksdan xabar topgan amerikalik fiziklar M.Kruskal va N.Zabusky Fermi taklif qilgan hisoblash eksperimentlarini davom ettirishgan.

Bu olimlar ajoyib o‘xshashlikni topishdi, ya’ni yuklar orasidagi masofani qisqartirib borish va yuklarning sonini cheksiz oshirib borish natijasida Fermi, Pasta va Ulam o‘rgangan diskret tenglama Kortewegde Vries tenglamasiga o‘tishini ko‘rsatishgan. Bundan juda oddiy xulosa kelib chiqadi - Fermi, Pasta va Ulam Russell yakkalangan to‘lqini uchun taklif qilingan Kortewegde Vries tenglamasini EHMda yechishgan. Chamasi shu yillarda plazmada ion-tovush to‘lqinlarini aniqlash uchun Korteweg-de Vries (K.d.V) tenglamasidan foydalanilgan. Shunday qilib, bu tenglamani fizikaning ko‘p sohalarida uchrashi, Russellning yakkalangan to‘lqini ham keng tarqalgan hodisa ekanligidan dalolat beradi.

Hisoblash eksperimentlarini davom ettirib, Kruskal va Zabusky yakkalan-



1.2-rasm: KdV tenglamasining ikkita solitonning ta'sirlashuvi. Yuqorida - ta'sirlangungacha, pastda ta'sirlashgandan keyingi hola

gan to'liqlarni bir-biri bilan to'qnashish masalasini o'rganishgan. Bu fakt ustida batafsilroq to'xtaymiz. Amplitudalari har xil bo'lgan ikkita yakkalangan to'liqin bor bo'lsin. Ular bir-birining ketidan bir xil yo'nalishda harakatlanayotgan bo'lsin. (1.9) -ifodadan ma'lumki, amplitudasi kattalashgan sari to'liqin tezligi ortadi, kengligi esa kichraya boradi((1.2)-rasm).

Shunday qilib, katta amplitudali to'liqin tezroq harakat qilib oldinda ketayotgan kichik amplitudali to'liqinga yetib oladi. Qandaydir vaqt ular bir butun holda harakat qiladi. Keyin ular ajralib ketadi. Bunda bir to'liqin ikkinchisidan o'tib ketmaydi. To'liqinlar yaqinlashganda katta to'liqinning energiyasi asta-sekin kichigiga o'ta boshlaydi. Ma'lum vaqtda to'liqlarning amplitudalari tenglashadi. So'ngra "kichik" to'liqinning amplitudasi orta boradi. Bunda "katta" to'liqin sekinlashadi, "kichik" to'liqin tezlashadi. "Kichik" to'liqinning amplitudasi "katta" to'liqinikiga tenglashganda to'liqlarning ajralishi yuz beradi. Eng muhimi, to'qnashish natijasida ularning "tezligi" va shakli o'zgarmaydi. Faqat to'qnashmasdan harakat qilganga nisbatan siljib qoladi. Bu jarayon ikki zarrachaning elastik to'qnashishiga o'xshaganligi uchun Kruskal va

Zabusky Russell yakkalangan to‘lqinini soliton (inglizcha solitary-yakkalangan) deb atashgan. Bu nom elektron, proton va boshqa ko‘p elementar zarrachalarning nomlari bilan hamohang bo‘lib, hozirda ilmiy jamoa tomonidan qabul qilingan.

Solitonga ta’rif beramiz: Harakat davomida hamda, o‘ziga o‘xshashlar bilan to‘qnashganda shakli va tezligini o‘zgartirmaydigan nochiziqli yakkalangan to‘lqinga soliton deyiladi.

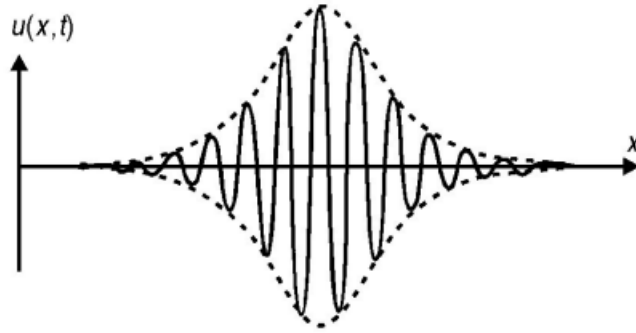
Korteweg-de Vries tenglamasi bilan bog‘langan kashfiyotlar soliton kashf qilinishi bilan to‘xtab qolgani yo‘q. Ajoyib tenglama bilan bog‘liq bo‘lgan keyingi qadam, bu tenglamani yechishning yangi metodini yaratish bo‘ldi. Ma’lumki, nochiziqli tenglamalarning yechimini topish ancha murakkab ish hisoblanadi. XX asrning 60-yillarigacha bunday tenglamalarning faqat maxsus boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlari ma’lum bo‘lgan. Boshqa tenglamalarga nisbatan Korteweg-de Vries tenglamasi alohida holda bo‘lib, uning yechimlari ma’lum bo‘lgan. Gap shundaki, tenglamani yechish deganda berilgan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimni topish kerak bo‘ladi. Tenglamalarning istagancha yechimlarini topish mumkin, ammo bunday yechimlar qanday boshlang‘ich shartlarni qanoatlantirishi no‘malumligicha qoladi. Boshqacha qilib gapiradigan bo‘lsak, boshlang‘ich masalaning yechimi topilmas ekan, boshqa metodlar bilan topilgan yechimlarni amalda qo‘llab bo‘lmaydi. Korteweg-de Vries tenglamasi ham xuddi shunday holda bo‘lgan.

Amerikalik olimlar C.Gardner, G.Grin, M.Kruskal va R.Miura 1967-yilda Korteweg-de Vries tenglamasi koordinata cheksizga intilganda nolga intiluvchi istagan boshlang‘ich shart uchun yechish mumkinligini ko‘rsatishdi. Bu metod nochiziqli xususiy hosilali tenglamalar uchun boshlang‘ich masalani yechishda

olamshumul kashfiyot bo'ldi. Bu maqola doirasi Gardner, Grin, Kruskal va Miura ishlab chiqqan metodni yoritishning imkoniyati yo'q. Bu metodning mohiyatini tushunish uchun fizika va matematikadan maxsus tayyorgarlik talab etiladi. Muhimi shundaki, ular Russell, Fermi va uning shogirdlari, Kruskal va Zabusky olgan natijalarni to'laligicha analitik yo'l bilan topishgan. Boshida bu metodni faqat Korteweg-de Vries tenglamasi uchun tatbiq qilish mumkin, boshqa tenglamalarni bu metod bilan yechib bo'lmaydigan qandaydir matematik "fokus" deb qarashgan. Ammo vaqt o'tishi bilan bu kashfiyot "Sochilishning teskari masalasi" nomi bilan mashhur bo'lgan metodga aylandi.

Guruh solitonlari. Tabiatda to'lqinlar bilan bog'liq bo'lgan yana bir hodisa bor, ya'ni ular guruhlariga birlashib tarqaladi. Bu hodisa suvda qadimdan ma'lum. Chuqur suvlarda davriy to'lqinlar barqaror bo'lmasdan mayda to'lqinlarga ajralib ketadi. Guruhlarda to'lqinlarning soni ko'p bo'lmaydi. Guruhda to'lqinlar taxminan 14-20 ta bo'ladi. O'rtadagi to'lqinning amplitudasi eng katta bo'lib, odatda yettinchi va o'ninchi (dengizlardagi to'lqinlarga nisbatan "to'qqizinchi val" degan iboraning ishlatilishi shu bilan bog'liq) to'lqinlarning orasida joylashgan bo'ladi. Guruhda to'lqinlarning soni ko'payib ketsa, u bir nechta to'lqinlar guruhiga ajralib ketadi.

Guruh to'lqinlarning tarqalishini aniqlaydigan tenglama 1968-yilda V. E. Zakharov tomonidan olingan. Bu tenglama ilgari fizikada ma'lum bo'lgan nochiziqli Schrödinger tenglamasi bo'lib chiqdi. 1971-yilda V.E.Zakharov va A.B.Shabat bu tenglamani Korteweg-de Vries tenglamasi uchun boshlang'ich masalani yechishda ishlatilgan sochilishning teskari masalasi metodi bilan yechish mumkinligini ko'rsatish bilan birga uning soliton yechimini topishdi. Bu soliton Korteweg-de Vries tenglamasining solitonidan farq qilib, modulyatsiyalangan



1.3-rasm: Guruh solitoni (shtrix chiziq)

to‘lqinni eslatar edi. Guruhdagi to‘lqinlarning cho‘qqilarini birlashtiruvchi chiziq (kontur) yuqorida ta’riflangan ma’noda solitonni beradi ((1.3)-rasm. shtrix chiziq). Bu solitonning tezligi chiziqning ichidagi to‘lqinning grupp tezligidan farq qiladi. Nochizikli Schrödinger tenglamasining solitoni (to‘lqin guruhining konturi) shakli

$$a(x, t) = a_0 \cosh^{-1} \left(\frac{x - c_0 t}{l} \right) \quad (1.10)$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bu yerda a_0 - amplituda, l - solitonning o‘lchamining yarmi, c_0 - solitonning tezligi.

Bunday to‘lqinlar nafaqat suvda, boshqa bir qator fizik sistemalarda, masalan, plazmadagi ionlarning zichligining tebranishida, kuchli yorug‘lik impulsini optik nur tolada tarqalishida, kuchli lazer nurining o‘z-o‘zidan fokuslanishi kabi effektlarni o‘rganishda kuzatiladi.

Topologik soliton. Solitonning turli tumanligi Korteweg-de Vries va guruh solitonlari bilan cheklanmaydi. Solitonning yana bir turi topologik soliton ahamiyatga molik bo‘lib, o‘zining tarixi va tatbiq qilinish sohasi bo‘yicha oldin ko‘rganlarimizdan hech ham qolishmaydi. Bu turdagi soliton paydo bo‘ladigan barcha nochizikli to‘lqin jarayonlari

$$u_{xt} = \sin u \quad (1.11)$$

sin-Gordon deb ataluvchi tenglama bilan aniqlanadi. Bunday tenglama XIX asrda Lobachevskiy geometriyasida paydo bo'lgan. O'sha asrning oxirlarida A.Backlund - hozir uning nomi bilan ataladigan maxsus almashtirish yordamida bu tenglamaning analitik yechimlarini topgan. Shunday tenglamadan Ya.I.Frenkel va T.A.Kontorova kristallardagi dislokatsiyani o'rganishda foydalanishgan. Bu olimlar tenglamaning soliton yechimini topishgan, ammo unga ahamiyat berishmagan.

Ingliz fiziklari J. Perring va T. Skirma elementar zarrachalarning ta'sirlashishini (Skirma modeli) shu tenglama yordamida o'rganishgan. Ularning EHMda o'tkazgan raqamli tajribalarida soliton xususiyatiga ega bo'lgan yakka-langon to'liqinni ko'rishgan (Kruskal va Zabusky ishlaridan uch yil oldin) bo'lsa-da, soliton atamasini kiritishmagan.

Taxminan shu davrlarda o'ta qisqa (10-12s) yorug'lik impulsining optik muhitda tarqalishida soliton kuzatilgan. 1965-yilda qiziqarli va kutilmagan effekt-shaffof bo'lmagan muhitlarda kuchli yorug'lik dastasi tarqalishida muhitning shaffoflashuvi kashf qilingan. Bu effekt ham solitonlar bilan bog'liq.

O'tgan asrning ikkinchi yarmida solitonning kashf qilinishi, soliton yechimga ega bo'lgan nochiziqli tenglamalar uchun boshlang'ich masalani yechish metodining paydo bo'lishi tabiat qonunlarini o'rganishda yangi bosqichni ochib berdi. Fizik va matematik olimlarning bu sohadagi izlanishlari jadallashib ketdi. Izlanishlar yangi va ajoyib effektlarning kashf qilinishiga olib keldi. Bu izlanishlarning ko'lami shunchalik kengki, nochiziqli to'liqlarga va solitonga bag'ishlangan bir necha monografiyalar yozilgan. Soliton mexanizmi yorda-

mi mantiqiy va xotira elementlarini yaratish, optik solitonlar yordamida yangi turdagi aloqa tizimini amalga oshirish shmumkin. Ochlgan yangi effektlarning texnikadagi tatbiqi esa hali oldinda.

Solitonlar nazariyasini yaratishda O‘zbekiston olimlarining ham xizmati beqiyos. Ular tomonidan solitonlar nazariyasining qator masalalariga bag‘ishlan-gan monografiyalar va maqolalar chop etilgan.

2-Bob

Solitonlar uchun g'alayonlar nazariyasi

2.1 Sochilish nazariyasidan ba'zi bir ma'lumotlar.

Sochilish ma'lumotlarining analitik xossalari

Bir o'lchamli Schrödinger operatori $\hat{L} = -\partial_{xx} + u(x)$ dagi potensial haqiqiy, yetarlicha silliq bo'lsin va $|x| \rightarrow \infty$ da $u(x)$ nolga intilsin. Operatorning xususiy funksiyalarini x o'qining barcha nuqtalarida aniqlangan va cheklangan $\psi(x)$ funksiyalar to'plamida ko'ramiz. Operator \hat{L} ning uzluksiz spektri $\lambda > 0$ bo'lgan haqiqiy o'qni to'ldiradi, uzlukli spektrning qiymatlari esa, manfiy bo'ladi. Umuman yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi potentsiallar ichida son-sanoqsiz bog'langan holatlarga olib keluvchilari mavjuddir. Bunday potentsiallarni ushbu shart bilan chiqarib tashlaymiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|(1 + |x|)dx < \infty$$

Sochilish masalasini tavsiflashga kirishamiz. Energiya λ ning o'rniga impuls k , ($\lambda = k^2$) dan foydalanish qulaydir. Xususiy qiymatlar uchun tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi.

$$\hat{L}\psi = -\psi_{xx} + u(x)\psi = k^2\psi \quad (2.1)$$

Bu yerda uzluksiz spektr uchun k haqiqiy, uzlukli spektr uchun $k = i\kappa_n$ ($n = 1, 2, \dots, N, \kappa_n > 0$). Har bir haqiqiy $k \neq 0$ uchun (2.1) tenglama

yechimlarining to‘plami ikki o‘lchamli chiziqli fazo G_k ni tashkil qiladi. G_k fazoda ikkita asosni qayd qilamiz. Ulardan biri $\psi_{1,2}$ bo‘lib $x \rightarrow +\infty$ da quyidagi asimptotikalar bilan aniqlanadi:

$$\psi_1(x, k) = \exp(-ikx), \quad \psi_2(x, k) = \exp(ikx)$$

ikkinchisi esa, $x \rightarrow -\infty$ dagi asimptotikalar bilan aniqlanadi:

$$\varphi_1(x, k) = \exp(-ikx), \quad \varphi_2(x, k) = \exp(ikx)$$

Potensial haqiqiy bo‘lganligi uchun

$$\varphi_1(x, k) = \varphi_2^*(x, k), \quad \psi_1(x, k) = \psi_2^*(x, k) \quad (2.2)$$

shartlar o‘rinli bo‘ladi. Bundan tashqari quyidagi tengliklar

$$\varphi_1(x, k) = \varphi_2(x, -k), \quad \psi_1(x, k) = \psi_2(x, -k) \quad (2.3)$$

o‘rinli ekanligi (2.1) va $x \rightarrow \pm\infty$ dagi asimptotikalaridan kelib chiqadi. Birorta asosning ixtiyoriy vektori ikkinchi asos vektorlarining chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanadi:

$$\varphi_i(x, k) = \sum T_{ij}(k) \varphi_j(x, k) \quad (2.4)$$

(2.2) ga asosan o‘tish matritsasi

$$T(k) = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ b^*(k) & a^*(k) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

ko‘rinishga ega ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham, (2.2) xossaga binoan

$$\varphi_1^*(x, k) = T_{11}^*(k) \varphi_1^*(x, k) + T_{12}^*(k) \psi_2^*(x, k) =$$

$$\begin{aligned}
T_{11}^*(k)\psi_2(x, k) + T_{12}^*(k)\psi_1(x, k) &= \varphi_2(x, k) \\
\varphi_2^*(x, k) &= T_{21}^*(k)\psi_1^*(x, k) + T_{22}^*(k)\psi_2^*(x, k) = \\
&= T_{11}^*(k)\psi_2(x, k) + T_{22}^*(k)\psi_1(x, k) = \varphi_1(x, k)
\end{aligned}$$

Bu ifodalarni (2.4) bilan solishtirsak $T_{11} = T_{22}^* = a(k)$, $T_{12} = T_{21}^* = b(k)$ kelib chiqadi, ya'ni (2.5) natijaga kelamiz. Quyida faqat φ_1 va ψ_1 funksiyalardan foydalanamiz, bundan keyin ularning indekslarini yozmasak ham bo'ladi. shunday qilib (2.4) va (2.5) lardan quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\varphi(x, k) = a(k)\psi(x, k) + b(k)\psi^*(x, k) \quad (2.6)$$

(2.1) tenglamada birinchi tartibli hosila ishtirok etmaganligi uchun uning ixtiyoriy ikkita yechimlaridan tuzilgan Vronskian $W(f_1, f_2) = f_1 f_{2x} - f_{1x} f_2$ x ga bog'liq bo'lmaydi. Shuning uchun xususiy funksiyalarning $x \rightarrow \pm\infty$ asimptotikalaridan foydalanib Vronskianlar uchun ushbu natijalarni olamiz:

$$W(\varphi, \varphi^*) = W(\psi, \psi^*) = 2ik, \quad W(\varphi, \varphi) = W(\psi, \psi) = 0$$

Bu ifodalardan va (2.6) tenglikdan foydalanib quyidagi tenglikni hosil qilamiz.

$$|a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1 \quad (2.7)$$

Bundan o'tish matritsasi unimodulyar ekanligi kelib chiqadi, ya'ni:

$$\det T(k) = 1$$

Endi $a(k)$ va $b(k)$ larning ma'nosini ko'rib chiqamiz. Buning uchun (2.6) tenglikning har ikkala tomoni $a(k)$ bo'lib $x \rightarrow \pm\infty$ dagi asimptotikalarini

ko‘ramiz:

$$\frac{\varphi(x, k)}{a(k)} = \exp(-ikx) + \frac{b(k)}{a(k)} \exp(ikx) \quad x \rightarrow +\infty$$

,

$$\frac{\varphi(x, k)}{a(k)} = \frac{1}{a(k)} \exp(-ikx) \quad x \rightarrow -\infty$$

Bulardan ko‘rinib turibdiki, tushayotgan to‘lqinning amplitudasi birga teng bo‘lsa, $x \rightarrow +\infty$ dagi asimptotika tushuvchi ($\exp(-ikx)$) va qaytuvchi ($b(k) \exp(ikx)/a(k)$) to‘lqinlarning superpozitsiyasidan iborat ekan. $x \rightarrow -\infty$ da esa, faqat o‘tgan to‘lqin ($\exp(-ikx)/a(k)$) bor ekan. Demak, $t(k) = 1/a(k)$ oldinga sochilish amplitudasi (o‘tish koeffitsiyenti) ni va $r(k) = b(k)/a(k)$ esa, orqaga sochilishi amplitudasi (qaytish koeffitsiyenti) ni ifodalaydi. Bu ma’noda (2.7) sochilish unitar ekanligini ko‘rsatadi, ya’ni

$$|t(k)|^2 + |r(k)|^2 = 1$$

o‘tish matritsasi $T(k)$ Schrödinger operatorining uzluksiz spektri to‘g‘risida to‘la-to‘kis (mukammal) ma’lumot beradi. Aslida esa, $T(k)$ to‘g‘risidagi barcha ma’lumotlarni qaytish koeffitsiyenti $r(k)$ aniqlab beradi. (2.2)-(2.3) tengliklarga asosan $r(k)$ ni $k > 0$ yarim o‘qda berilishi yetarli ekan, chunki $r(-k) = r^*(k)$. Haqiqatan ham (2.7) tenglikdan $a(k)$ modulini $|r(k)|$ orqali yozish mumkin:

$$|a(k)|^2 = (1 - |r(k)|^2)^{-1} \quad (2.8)$$

Yuqori yarim tekislikda analitik bo‘lgan $a(k)$ ning nollarini bilgan holda uning moduli orqali argumentini aniqlash mumkin. Buning uchun yordamchi funksiya kiritamiz:

$$a_1(k) = a(k) \prod_{n=1}^N \frac{k + i\kappa_n}{k - i\kappa_n} \quad (2.9)$$

Bu yerda $N - a(k)$ ning nollarini soni. Ta'rifga ko'ra yordamchi funksiya $\text{Im}k > 0$ da analitik bo'lib $|k| \rightarrow \infty$ da nolga intiladi. Haqiqiy o'qda $|a_1(k)| = |a(k)|$. $\text{Im}k > 0$ da analitik bo'lgan

$$\ln a_1(k) = \ln |a(k)| + i \arg a(k) \quad (2.10)$$

funksiyaning dispersion munosabati

$$\arg a_1(k) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |a_1(k')|}{k - k'} dk' \quad (2.11)$$

va (2.8) tenglikdan foydalanib quyidagilarni yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \arg a(k) &= \arg a_1(k) + \arg \left[\prod_{n=1}^N \frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |a(k')|}{k - k'} dk' + \frac{1}{i} \sum_{n=1}^N \ln \left[\frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n} \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

(2.8), (2.12) tengliklardan ko'rinib turibdiki, $a(k)$ qaytish koeffitsiyenti $r(k)$ ning $k > 0$ dagi qiymatlari orqali to'liq tiklanadi. Funksiya $b(k)$ esa, $r(k), a(k)$ ga teng. Shunday qilib $r(k)$ ning $k > 0$ yarim o'qda berilishi o'tish matritsasi va sochilishning uzluksiz spektri to'g'risidagi barcha ma'lumotlarni berar ekan. Endi uzlukli spektrning xarakteristikalarini tavsiflashga kirishamiz. Xususiy qiymat $\lambda = -\kappa_n^2$ ga mos kelgan xususiy funksiya ψ ushbu tenglamani qanoatlantiradi:

$$\psi_{xx} + u(x)\psi = -\kappa_n^2 \psi$$

Agar potensial $u(x)$ ikkinchi qismda qo'yilgan shartlarni qanoatlantirsa, Schrödinger operatorining uzlukli spektri oddiy bo'ladi. Shuning uchun biror-ta yechimni o'zgarmasga ko'paytirish bilan boshqa yechimlarni olish mumkin. Uzlukli xususiy qiymatlarga mos kelgan xususiy funksiyalar cheksizda quyidagi asimptotikaga ega bo'ladi:

$$\psi \rightarrow C_{\pm} \exp(\mp \kappa_n x), \quad x \rightarrow \pm \infty$$

Endi $x \rightarrow -\infty$ dagi asimptotikasi quyidagicha bo'lgan $\varphi^{(n)}(x)$ funksiyani qayd qilamiz:

$$\varphi^{(n)}(x) = \exp(\kappa_n x) + 0(\exp(\kappa_n x)) \quad (2.13)$$

Bu holda $\varphi^{(n)}(x)$ funksiya $x \rightarrow \infty$ da quyidagi asimptotikaga ega bo'lib, haqiqiydir:

$$\varphi^{(n)}(x) = b_n \exp(-\kappa_n x) + 0(\exp(-\kappa_n x)) \quad (2.14)$$

Demak b_n ham haqiqiy ekan. Xususiy qiymat λ_n larning o'sish (κ_n) ning kamayish tartibida nomerlaymiz, ya'ni: $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < 0$. Asosiy holatning xususiy funksiyasi $\varphi^{(1)}(x)$ umumiy xossaga binoan nolga ega emas, ya'ni absissa o'qini kesib o'tadi. Shuning uchun

$$b_n = |b_n|(-1)^{n-1} \quad (2.15)$$

$|b_n|$ lar musbat bo'lib, uzlukli spektrning xarakteristikalarini qo'shimcha ravishda to'ldiradi, $r(k), \kappa_n, |b_n|$ lar to'plami (2.1) masalani spektrini to'liq aniqlaydi va sochilish ma'lumotlari deyilib, quyidagicha belgilanadi.

$$S = \left[r(k), \kappa_n, |b_n|, n = 1, 2, \dots, N \right]$$

Potensial $u(x)$ ni S ga o'tkazish sochilishning to'g'ri masalasining mazmunini tashkil qiladi. Berilgan S yordamida $u(x)$ ni tiklash sochilishning teskari masalasini mazmunini tashkil qiladi.

Sochilishning teskari masalasini yechishda Schrödinger tenglamasining maxsus yechimlarining analitik xossalari muhim ahamiyatga ega. Ta'rifga binoan $\varphi(x, k) \exp(ikx)$ funksiya ixtiyor x lar uchun k - kompleks tekislikning yuqori yarmida $\text{Im}k > 0$ analitik bo'lib, ushbu asimptotikaga ega:

$$\varphi(x, k) \exp(ikx) = 1 + o(1/k), \quad |k| \rightarrow \infty, \quad \text{Im}k > 0$$

Ayni paytda $\psi(x, k) \exp(ikx)$ pastki yarim tekislikda ($\text{Im}k < 0$) analitik bo'lib, ushbu asimptotikaga egadir:

$$\psi(x, k) \exp(ikx) = 1 + o(1/k), \quad |k| \rightarrow \infty, \quad \text{Im}k > 0$$

Bu tasdiqlarga ishonch hosil qilish uchun $-\partial_{xx} - k^2$ operatorning Grin funksiyasi $G(x, x'; k)$ dan foydalanib integral tenglamani yozamiz:

$$\varphi(x, k) = \exp(-ikx) - \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x'; k) u(x') \varphi(x', k) dx'$$

Bu yerda $G(x, x'; k)$ Grin funksiyasi bo'lib, quyidagiga teng bo'ladi:

$$G(x, x'; k) = \begin{cases} -\frac{1}{k} \sin(x - x') & x > x' \\ 0 & x < x'. \end{cases}$$

Quyidagi yangi $\chi_+(x, k) = \varphi(x, k) \exp(ikx)$ funksiyani kiritsak, u ushbu tenglamani qanoatlantiradi:

$$\chi_+(x, k) = 1 + \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^x (\exp(2ikx(x - x')) - 1) u(x') \chi_+(x', k) dx' \quad (2.16)$$

Bu tenglamadagi integral $x < x'$ soha bo'yicha olinganligi uchun u-ning yadrosidagi eksponenta $\text{Im}k > 0$ da doimo chekli bo'ladi. Shu sababli $\chi_+(x, k)$ funksiyani $\text{Im}k > 0$ sohaga analitik davom ettirish mumkin. Demak $\varphi(x, k)$ funksiya $\text{Im}k > 0$ da analitik ekan. Xuddi shu usul bilan $\chi_-(x, k) = \psi(x, k) \exp(ikx)$ funksiya uchun quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\chi_-(x, k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_x^\infty (\exp(2ik(x - x')) - 1) u(x') \chi_-(x', k) dx' \quad (2.17)$$

Bundan $\chi_-(x, k)$ ya'ni $\psi(x, k)$ ni $\text{Im}k < 0$ sohaga analitik davom ettirish mumkinligi ko'rinib turibdi. Yuqorida aniqlangan $\chi_-(x, k)$ funksiyaning $|k| \rightarrow \infty$ dagi asimptotikasi bizga keyin kerak bo'ladi. Shuning uchun uni quyida keltiramiz.

$$\chi_-(x, k) = 1 + \frac{1}{2ik} \int_x^\infty u(x') dx' + o(1/k^2) \quad (2.18)$$

Nihoyat

$$\varphi_1(x, k) = \varphi_2^*(x, k) \quad \varphi_1(x, k) = \varphi_2^*(x\varphi, k)$$

,

$$\varphi_1(x, k) = \varphi_2(x, -k), \quad \varphi_1(x, k) = \varphi_2(x\varphi, -k)$$

tengliklarga asosan $\psi^*(x, k)$ funksiya $\text{Im}k > 0$ da analitik ekanligini qayd qilamiz.

Endi $a(k)$ ning analitik xossalarini o'rganishga kirishamiz. Buning uchun $W(\varphi, \psi^*)$ va $W(\psi, \varphi)$ Vronskianlarni hisoblaymiz. Ta'rifga ko'ra va $\varphi_i(x, k) = \sum T_{ij}(k) \psi_j(x, k)$ tenglamag asosan:

$$W(\varphi, \psi^*) = (\varphi \psi_x^* - \varphi_x \psi^*), \quad W(\varphi, \psi^*) = 2ika(k)$$

Bularni solishtirib $a(k)$ uchun quyidagini olamiz:

$$a(k) = \frac{1}{2ik} [\varphi(x, k)\psi_x^*(x, k) - \varphi_x(x, k)\psi^*(x, k)] \quad (2.19)$$

Shunga o'xshash $W(\psi, \varphi)$ yordamida $b(k)$ uchun quyidagini olamiz:

$$b(k) = \frac{1}{2ik} [\varphi_x(x, k)\psi(x, k) - \varphi(x, k)\psi_x(x, k)] \quad (2.20)$$

(2.19) tenglikda $\text{Im}k > 0$ da analitik bo'lgan funksiyalar ishtirok etganligi uchun $a(k)$ shu sohada analitik bo'lib ushbu asimptotikaga ega:

$$a(k) = 1 + o\left(\frac{1}{k}\right), \quad |k| \rightarrow \infty, \quad \text{Im}k > 0$$

Yuqori yarim tekislikda $a(k)$ ning nollarini soni chekli bo'lib, Schrödinger operatorining uzlukli spektriga mos keladi. Bu tasdiqni isbot qilish uchun $k = k_0$ nuqtada $a(k_0)$ nolga teng deb olamiz, u holda Vronskian

$$W(\varphi(x, k_0), \psi^*(x, k_0)) = 0$$

bo'lishidan va $\varphi(x, k) = a(k)\psi(x, k) + b(k)\psi^*(x, k)$ tenglikka asosan $\varphi(x, k_0)$ va $\psi^*(x, k_0)$ funksiyalar o'zaro chiziqli bog'liq ekanligi kelib chiqadi.

$$\varphi(x, k_0) = c\psi^*(x, k_0)$$

$\varphi(x, k)$ funksiyaning ta'rifiga binoan $\varphi(x, k_0)$ funksiya $x \rightarrow -\infty$ da eksponensial ravishda nolga intiladi, $x \rightarrow \infty$ da ham ψ -ning ta'rifiga binoan eksponensial ravishda nolga intiladi. Demak $\varphi(x, k_0)$ \hat{L} operatorning k_0^2 ga mos kelgan xususiy funksiyasi ekan. Operator \hat{L} o'z-o'ziga qo'shma bo'lganligi uchun k_0^2 haqiqiydir, ya'ni $a(k)$ ning nollari mavhum o'qqa joylashgan ekan. $\lambda_n = -\kappa_n^2$

deb belgilash kiritamiz. $\varphi(x, i\kappa_n)$ funksiyaning $x \rightarrow -\infty$ dagi asimptotikasi

$$\varphi^{(n)}(x) = \exp(\kappa_n x) + 0(\exp(\kappa_n x))$$

ifoda bilan aniqlangan $\varphi^{(n)}(x)$ funksiyaning asimptotikasi bilan mos tushadi, demak $\varphi^{(n)}(x) = \varphi(x, i\kappa_n)$, $x \rightarrow \infty$ da esa ,

$$\varphi^{(n)}(x) = b_n \exp(-\kappa_n x) + 0(\exp(-\kappa_n x))$$

$$\varphi(x, i\kappa_n) = b_n \psi^*(x, -i\kappa_n) + b_n \psi(x, -i\kappa_n) \quad (2.21)$$

Mahmum o'qda $\varphi(x, k)$ va $\psi(x, k)$ funksiyalar haqiqiydir. Shunday qilib, $a(k)$ ning nollari ($a(i\kappa_n) = 0$) bilan \hat{L} operatorning xususiy funksiyalari orasida birdan-bir bog'lanish bor ekan. $a(k)$ ning nollari oddiydir. Bu tasdiqni isbot qilish uchun Schrödinger tenglamasidan $k = i\kappa_n$ nuqtada k bo'yicha bir marta hosila olamiz va natijani chap tomondan $\varphi(x, i\kappa_n)$ ga ko'paytirib x bo'yicha $(-\infty, +\infty)$ oralig'ida integrallaymiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, i\kappa_n) (\hat{L} + \kappa_n^2) \varphi'(x, i\kappa_n) dx = 2i\kappa_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x, i\kappa_n) dx \quad (2.22)$$

Bu tenglikda x bo'yicha ikkinchi tartibli hosila ishtirok etgan hadni ikki marta bo'laklab integrallasak (2.22) ning o'rniga quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\left[\varphi(x, i\kappa_n) \varphi'_x(x, i\kappa_n) - \varphi_x(x, i\kappa_n) \varphi'(x, i\kappa_n) \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x, i\kappa_n) (\hat{L} + \kappa_n^2) \varphi(x, i\kappa_n) dx = 2i\kappa_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x, i\kappa_n) dx \quad (2.23)$$

Bu tenglikning chap tomonidagi ikkinchi had Schrödinger tenglamasiga ko‘ra nolga teng. Birinchi had esa, quyi chegarada $\varphi(x, i\kappa_n)$ ning asimptotikasi-ga asosan nolga teng. Birinchi hadni yuqori chegarada ko‘ramiz ($x \rightarrow \infty$)

$$\varphi(x, i\kappa_n) = \left[a(k)e^{-ikx} + b(k)e^{ikx} \right]_{k=i\kappa_n} = b_n e^{-\kappa_n x}$$

$$\varphi'(x, i\kappa_n) = \left[a'(k)e^{-ikx} + b'(k)e^{ikx} - ika(k)e^{-ikx} + ikb(k)e^{ikx} \right]_{k=i\kappa_n}$$

$$\varphi'(x, i\kappa_n) = a'(i\kappa_n)e^{\kappa_n x} + 0(e^{-\kappa_n x}) \quad (2.24)$$

Bu ifodani (2.23) ga qo‘yib, (2.22) ni hisobga olib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz.

$$a'(i\kappa_n) = -\frac{i}{b_n} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x, i\kappa_n) dx \neq 0 \quad (2.25)$$

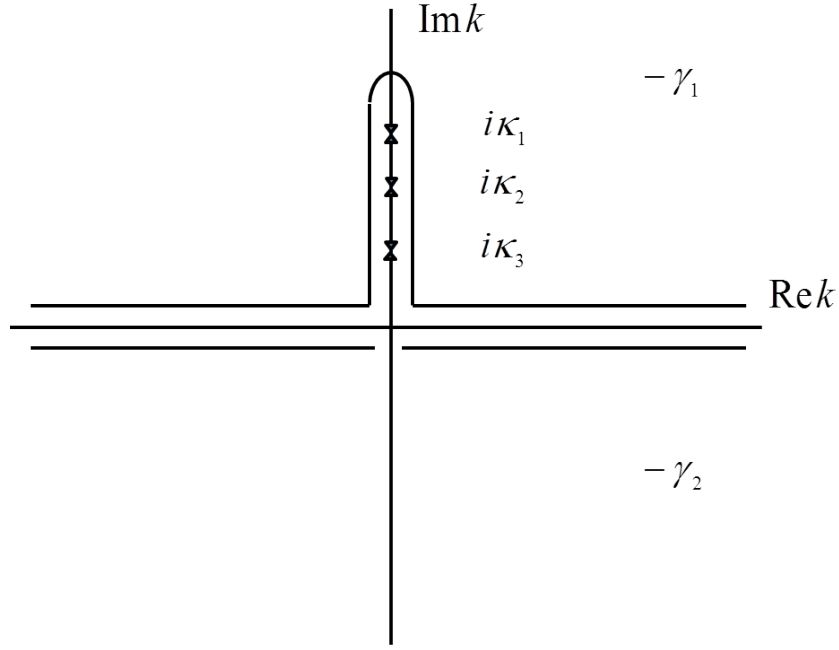
Bu integral hech qachon nolga teng bo‘lmaydi. Shunday qilib, k kompleks tekislikning yuqori yarmidagi $a(k)$ ning nollari oddiyliqi isbotlandi. (2.25) ga asosan $a'(k)$ haqiqiy bo‘lib, uning ishorasi b_n ning ishorasi bilan mos keladi.

2.2 Sochilishning teskari masala metodi. Teskari masala tenglamasi

Sochilishning teskari masalasi tenglamasini keltirib chiqarish uchun

$$\varphi(x, k) = a(k)\psi(x, k) + b(k)\psi^*(x, k)$$

tenglamani $\exp(ikx)/a(k)$ ga ko‘paytiramiz va $\chi_{\pm}(x, k)$ funksiyaning ta’rifidan foydalanib quyidagini yozamiz:



2.1-rasm: Integrallash konturi

$$a^{-1}(k)\chi_+(x, k) = \chi_-(x, k) + r(k)\chi_-^*(x, k) \exp(2ikx) \quad (2.26)$$

Bu tenglamaning chap tomoni kompleks tekislikning yuqori yarmida $k = i\kappa_n$ ($n=1,2,\dots,N$) nuqtalarda oddiy qutblarga ega bo'lib, qolgan hamma nuqtalarda analitikdir. O'ng tomoni to'g'risida esa, $\chi_-(x, k)$ funksiya $\text{Im}k < 0$ analitikligini qayd qilish mumkin.

Ushbu funksiyani kiritamiz

$$\Phi(x, k) = \begin{cases} \chi_+(x, k)/a(k) & \text{Im}k > 0 \\ \chi_-(x, k), & \text{Im}k < 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Bu funksiya k kompleks tekislikning yuqori yarmida oddiy qutblarga va haqiqiy o'qda $r(k)\chi_-^*(x, k) \exp(2ikx)$ ga teng bo'lgan uzilishga ega. Qolgan hamma nuqtalarda analitik bo'lib cheksizda nolga intiladi. $\Phi(x, k)$ uchun yangi tasavvurga o'tamiz. Buning uchun quyidagi Koshi integralini ko'ramiz.

$$\Phi(x, k) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi(x, k') - 1}{k' - k} dk' \quad (2.28)$$

Bu yerda integrallash konturi γ (2.1) da keltirilgan. γ_1 kontur bo'yicha integralda $\Phi(x, k)$ funksiyani $\chi_+(x, k)/a(k)$ funksiya bilan γ_2 kontur bo'yicha integralda $\chi_-(x, k)$ funksiya bilan almashtirish mumkin. Bundan tashqari $\Phi(x, k)$ haqiqiy o'qda uzilishga ega ekanligini hisobga olsak, (2.27) ning o'rniga quyidagini hosil qilamiz:

$$\Phi(x, k) = 1 + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\chi_+(x, k')}{a(k')(k' - k)} dk' + \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(k')\chi_-(x, k')}{k' - k} dk'$$

Bu yerda birinchi integral $a(k)$ ning nollaridagi chegirmalar orqali hisoblab ushbu ifodani hosil qilamiz:

$$\Phi(x, k) = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{\Gamma_n(x)}{k - i\kappa_n} + \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(k')\chi(x, k')}{k' - k} dk' \quad (2.29)$$

Γ_n ni (2.21) ga asosan quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= \frac{\varphi(x, i\kappa_n) \exp(-\kappa_n x)}{a'(i\kappa_n)} = \frac{b_n \psi(x, -i\kappa_n) \exp(-\kappa_n x)}{a'(i\kappa_n)} = \\ &= \frac{b_n}{a'(i\kappa_n)} \chi_-(x, -i\kappa_n) \exp(-2\kappa_n x) \end{aligned}$$

(2.27) tenglikdan $\Phi(x, k)$ funksiyaning $k = -i\kappa_n$ nuqtadagi qiymati orqali $\chi_-(x, -i\kappa_n)$ ni aniqlab yuqoridagi tenglamaga qo'yamiz va ushbu tenglamani hosil qilamiz: [3]

$$\Gamma_n = \frac{b_n}{a'(i\kappa_n)} \exp(-2\kappa_n x) \left[1 + i \sum_{n=1}^N \frac{\Gamma_n(x)}{\kappa_n - \kappa_m} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(k')\chi_{-}^{*}(x, k') \exp(2ik'x)}{k' - k} dk' \right] \quad (2.30)$$

Endi (2.29) tenglikda k ni $\text{Im}k < 0$ tomondan haqiqiy o'qqa intiltirsak (2.27) tenglikka asosan $\Phi(x, k - i0) = \chi_{-}(x, k)$, demak

$$\chi(x, k) = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{\Gamma_n(x)}{k - i\kappa_n} + \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(k')\chi_{-}^{*}(x, k') \exp(2ik'x)}{k' - k - i0} dk' \quad (2.31)$$

(2.30), (2.31) ifodalar $\chi_{-}(x, k)$ va $\Gamma_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots, N$) lar to'plami, ya'ni operator \hat{L} ning xususiy qiymatlariga nisbatan chiziqli, singular va to'liq tenglamalar sistemasi bo'lib, kvant mexanikasidagi teskari masala tenglamasidir. Bu tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega. Nihoyat $u(x)$ potensialni (2.30), (2.31) tenglamalarning yechimlari orqali ifodalasak teskari masala yakunlanadi. Buning uchun (2.31) tenglamani $\frac{1}{k}$ ning darajalari bo'yicha qatorga yoyib $\frac{1}{k}$ ga proporsional hadlar bilan cheklanamiz.

$$\chi_{-}(x, k) = 1 + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^N \Gamma_n(x) + \frac{1}{2i\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} r(k') e^{2ik'x} dk' \quad (2.32)$$

Bu ifodani $\chi_{-}(x, k) = 1 + \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} u(x') dx' + 0(1/k^2)$ formula bilan solishtirib quyidagi natijani olamiz:

$$u(x) = -\frac{d}{dx} \left[2i \sum_{n=1}^N \Gamma_n(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(k') e^{2ik'x} dk' \right] \quad (2.33)$$

Xususiy qiymatlar sifatida ixtiyoriy musbat sonlarni olish mumkin ($\kappa_1 > \kappa_2 \dots > \kappa_N > 0$), $c_n = (-1)^{n-1} b_n$ ham musbat bo'lishi kerak. Qaytish koeffitsiyenti quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy funksiya bo'lishi mumkin:

- 1) $r(-k) = \bar{r}(k)$;
- 2) $|r(k)| < 1, k \neq 0$;

3) $r(k) = 0(1/k), |k| \rightarrow \infty$;

4) $r(k)$ yordamida topilgan $b(k)$ ning Furie tasviri

$$B(x) = \int_{-\infty}^{\infty} b(k) \exp(ikx) dk$$

uchun quyidagi shart o‘rinli bo‘lishi kerak:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) \left| \frac{dB(x)}{dx} \right| dx < \infty$$

Xususan barcha k larda qaytish koeffitsiyenti $r(k = 0)$ bo‘lgan potensiallar mavjud bo‘lib, qaytarmaydigan potensiallar deyiladi. Bunday potensiallar uzlukli spekt yordamida teskari masala uslubi bilan to‘liq tiklanadi va solitonlar nazariyasida muhim ahamiyatga ega. Sochilishning teskari masalasi tenglamasining yuqorida yozilgan ko‘rinishidan amalda ham foydalaniladi.

Agar potensial vaqtga bog‘liq bo‘lsa, $\varphi(x, k)$ ham vaqtga bog‘liq bo‘ladi. Bundan tashqari, sochilish ma’lumotlari ham vaqtga bog‘liq bo‘lishi mumkin. Agar potensialni vaqtga bog‘lanishi ixtiyoriy bo‘lsa, sochilish ma’lumotlarini vaqtga bog‘lanishini aniqlab bo‘lmaydi.

Quyidagi sxema yordamida :

$$u(x, 0) \xrightarrow{I} s(o) \xrightarrow{II} s(t) \xrightarrow{III} u(x, t)$$

Birinchi bosqichda berilgan boshlang‘ich $u(x, 0)$ potensialga ega bo‘lgan Schrödinger tenglamasining xususiy funksiyalari yordamida $s(0)$ aniqlanadi. Ikkinchi bosqichda sochilish ma’lumotlarining vaqtga bog‘lanishi topiladi. Bu masala trivial yechimga ega. Uchunchi bosqichda $s(t)$ uchun teskari masala yechiladi. Barcha bosqichlar chiziqli masalalarni o‘rganish bilan bog‘liqdir. To‘g‘ri va teskari masalalarning analitik yechimlari bo‘lmasligiga qaramasdan

yuqorida ko‘rilgan bosqichlarini birin-ketin chiziqli tenglamalar singari batafsil o‘rganish imkonini beradi.

Shunday ajoyib potentsiallar mavjudki, ular uchun to‘g‘ri va teskari masalalar aniq yechimga ega bo‘ladi. Bular qaytarmaydigan potentsiallar hisoblanadi. Shuni aytish lozimki, sochilishning teskari masalasi yordamida yechiladigan nochiziqli evolutsion tenglamalarning solitonlari ham elastik ta’sirlashadilar.

2.3 Nochiziqli Schrödinger tenglamasi

Bizga ma’lumki, bir jinsli muhitlardagi to‘lqin jarayonlari ushbu ko‘rinishdagi chiziqli to‘lqin tenglamasi bilan ifodalanadi

$$u_{tt} - c_0 u_{xx} = 0 \tag{2.34}$$

Bu tenglama c_0 tezlik bilan tarqaladigan va so‘nmaydigan to‘lqin yechimga ega. To‘lqin tenglamasi (2.34) ni keltirib chiqarishda quyidagi uchta shartlar bajarilishi kerak. Birinchidan, sistemada so‘nish (dissipatsiya) bo‘lmasligi kerak. Bu holat (2.34) tenglamaning vaqt inversiyasiga nisbatan invariantligida namoyon bo‘ladi. Ikkinchidan, to‘lqinning tebranish amplitudasi yetarlicha kichik bo‘lishi kerak. Bu holda tebranuvchi fizik kattalikni ifodalovchi funksiyaning nochiziqli hadlari yetarlicha kichik bo‘ladi va ularni tenglamada hisobga olmasa ham bo‘ladi. Nihoyat, ko‘rilayotgan to‘lqin uzunliklari oralig‘ida dispersiya bo‘lmasligi kerak, ya’ni to‘lqin tarqalish tezligi chastotaga chiziqli bog‘liq bo‘lishi kerak. Shuni ta’kidlash lozimki, to‘lqin tenglama (2.34) universal bo‘lib, uning ko‘rinishi muhitning xossalari bog‘liq emas. Muhitning xossalari esa c_0 kattalikda o‘z aksini topgan. Agar dissipatsiya, nochiziqlik va dispersiyani hisobga olsak albatta bu umumiylik yo‘qoladi. Qizig‘i

shundaki, yuqorida aytilgan effektlarni hisobga olsak, lekin ularni nisbatan kichik desak, hosil bo‘ladigan tenglama yana keng doiradagi hodisalar uchun umumiy bo‘lib qoladi. To‘lqin hodisasi yetarlicha uzoq vaqt davom etsa, yuqorida hisobga olinmagan effektlar yig‘ilib boradi va jiddiy o‘zgarishlarga olib keladi. Haqiqatan ham, energiyaning kichik dissipatsiyasi uzoq vaqt davomida katta so‘nishga, dispersiya to‘lqin paketining yoyilib ketishiga, nochiziqilik esa, to‘lqin frontining tikkalanishiga olib keladi. Fazoda tarqalayotgan optik nurlar yoyilish xususiyatiga ega. Dispersiya hisobiga muhit xossalari o‘zgaradi, buning natijasida to‘lqin tarqalish tezligi chastotaga chiziqli bog‘liq bo‘lmay qoladi. To‘lqin tenglama nochiziqli ko‘rinishda bo‘lib, uning ko‘rinishi muhitning xossalari bog‘liq bo‘ladi. Bu effektlarni hisobga olib, nochiziqli Schrödinger tenglamasini Maxwell tenglamalaridan keltirib chiqarish mumkin.

Elektromagnit maydon kuchli bo‘lganda $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ elektr maydon induksiya vektorining elektr maydonga bog‘lanishi murakkab bo‘lib, uni har bir muhit uchun mikroskopik nazariya orqali aniqlash lozim. Bu o‘ta murakkab masala hisoblanadi. Shuning uchun masalani yechishda boshqa yo‘l tutiladi. Maydonlar nisbatini baholaymiz: - elektr maydon kuchlanganligi $10^9 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ tartibida bo‘ladi. Shu vaqtda impulsli kuchli lazerning maydoni $10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$. Bundan ko‘ramizki, hali ham maydonni kichik deb ko‘rish mumkin ekan. Demak, elektr induksiya vektorini elektr maydon kuchlanganligi bo‘yicha qatorga yoyamiz va birinchi ikkita had bilan chegaralanamiz: [1]

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(1)} + \mathbf{D}^{(2)}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \alpha |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E} \quad (2.35)$$

bu yerda $\mathbf{D}^{(1)}$ - chiziqli qism, $\mathbf{D}^{(2)}$ - nochiziqli qism. Maydonning kvadratiga bog‘liq had nolga teng. Maxwell tenglamalari:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.36)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.37)$$

(2.36)-tenglamaning har ikkita tarafiga rot operatori bilan tasir qilamiz:

$$\operatorname{rotrot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{B} \quad (2.38)$$

hosil bo'lgan ifodadagi $\operatorname{rot}\mathbf{B}$ ning o'rniga (2.37)-tenglamani qo'yamiz. Elektr maydonni yassi to'lqin deb qarajak, yani:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t) \quad (2.39)$$

ko'rinishda olsak, u holda yuqoridagilarni hisobga olib, Maxwell tenglamalaridagi hosilalarni ochib yozamiz:

$$\operatorname{rotrot}\mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div}\mathbf{E} - \Delta\mathbf{E} \quad (2.40)$$

$$\operatorname{rotrot}\mathbf{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{D}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.41)$$

Bu yerda $\operatorname{rotrot}\mathbf{E} \approx -\Delta\mathbf{E}$ ga tengligidan foydalanib hisoblaymiz, Induksiya vektorining o'rniga (2.35) ifodani qo'yamiz:

$$\operatorname{rotrot}\mathbf{E} = -\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial r^2} = ik^2\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varepsilon\mathbf{E} + \alpha|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}) = -(\varepsilon + \alpha\mathbf{E}_0^2)\omega^2\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)}$$

Bu ifodalarni (2.41) tenglamga qo'yamiz va quyidagi ko'rinishdagi belgilashlarni olamiz.

$$k^2 - \frac{1}{c^2}\left(\varepsilon + \alpha E_0^2\right)\omega^2 = 0, \quad \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = -\varepsilon - \alpha E_0^2 \quad (2.42)$$

$$\alpha = \left(\varepsilon + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) \frac{1}{E_0^2} \quad (2.43)$$

Induksiya vektori \mathbf{D} ning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$\mathbf{D} = \left(\varepsilon + \frac{2c^2}{\omega^2} \eta |\mathbf{E}_0|^2 \right) \mathbf{E} \quad (2.44)$$

Bundan $\eta = \frac{\omega^2 \alpha}{2c^2}$ deb belgilab olsak to‘lqin vektori k uchun quyidagi ko‘rinishdagi ifoda kelib chiqadi:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon + 2\eta |\mathbf{E}_0|^2 \quad (2.45)$$

Elektr maydonni yassi to‘lqin deb qarab, berilgan parametrlar uchun div va rot operatorlarini hisoblaymiz.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t, \mathbf{r}) e^{i(k_0 x - \omega t)} \quad (2.46)$$

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \quad (2.47)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \approx -\eta \frac{2c^2}{\varepsilon \omega^2} \mathbf{E}_0 \operatorname{grad} |\mathbf{E}_0|^2 \quad (2.48)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} \approx \left[k_0^2 \mathbf{E}_0 - 2ik_0 \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial x} - \Delta_{\perp} \mathbf{E}_0 \right] e^{i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.49)$$

Ikkinchi tartibli hosilalarni Δ_{\perp} bilan belgilaymiz:

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.50)$$

Endi elektr maydon induksiya vektorini o‘rniga qo‘yib hisoblaymiz:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}^{(1)}}{\partial t^2} = - \left(k_0^2 \mathbf{E}_0 + 2i \frac{k_0}{u} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} \right) e^{i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.51)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}^{(3)}}{\partial t^2} = -2\eta(\omega) |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{E} \quad (2.52)$$

Yuqoridagi ikkita ifodani o‘rniga qo‘yib umumiy ifodani yozamiz:

$$ik_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{E}_0 = -\frac{1}{2} \Delta_{\perp} \mathbf{E}_0 - \eta(\omega) |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{E}_0 \quad (2.53)$$

(2.53)-tenglamada

$$\frac{1}{u} = \frac{dk_0}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{\partial(\omega\sqrt{\varepsilon})}{\partial\omega} \quad (2.54)$$

ko‘rinishdagi almashtirish bajaramiz va bir qator soddalashtirish ishlarini bajaramiz. Natijada quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm |u|^2 u = 0 \quad (2.55)$$

Bu yerda z elektr maydon kuchlanganligining vaqt vazifasini bajardi. Yuqorida nochizikli Schrödinger tenglamasini kanonik ko‘rinishini keltirib chiqardik, endi nur tolada tashqi tasirda optik solitonning evolutsiyasini ko‘rib chiqamiz. Tashqi tasir natijasida nochizikli Schrödinger tenglamasini bir soliton yechimining evolutsiyasini qarasaq, undan oldin nochizikli Schrödinger tenglamasini bir soliton yechimini keltirib chiqaramiz.

Buning uchun nochizikli Schrödinger tenglamasining quyidagicha kanonik ko‘rinishidan foydalanamiz: [4]-[5]

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0 \quad (2.56)$$

Tenglamaning yechimini

$$u(x, t) = A(x - vt) e^{i\varphi t + i\psi x} \quad (2.57)$$

ko‘rinishda izlaymiz. (2.56) ifodani (2.57) tenglamaga olib borib qo‘yamiz va x, t bo‘yicha hosilalarni ochib chiqamiz.

$$A_{xx} + i(2\psi - v)A_x - A(\psi + \varphi^2) + 2A^3 = 0 \quad (2.58)$$

Bu yerda A_x oldidagi koeffitsiyent nolga tengligidan

$$\psi = \frac{v}{2}$$

A oldidagi koeffitsiyentni soddalik uchun belgilab olamiz

$$\varphi = -\psi^2 + B$$

$$\varphi = -\frac{v^2}{4} + B$$

(2.58) tenglamaning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$A_{xx} = BA + 2A^3 \quad (2.59)$$

Ikkita tarafidan integral olamiz:

$$(A_x)^2 = P(A) = C - A^4 + BA^2 \quad (2.60)$$

A uchun elliptik integralga olib olib keladi,

$$\int_{A_0}^A \frac{dA}{\sqrt{C - A^4 + BA^2}} = \pm\xi \quad (2.61)$$

$P(A)$ ning yechimini bikvadrat tenglama yechimi kabi ikkita qismga ajratamiz

$P(A) = (\alpha_1 - A^2)(A^2 - \alpha_2)$ ko‘rinishda bo‘ladi. Elliptik integral xossalaridan foydalanib quyidagi natijalarni olamiz:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} \{K(k) - F(A, k)\} = \pm\xi$$

$$k = \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1}}, \quad \alpha_{1,2} = \frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} + C}$$

A uchun umumiy yechim quyidagicha

$$A(\xi) = A_1 \left[1 - \left\{ \left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2} \right) \operatorname{sn}^2 \left[\sqrt{\frac{k}{2}} \xi \right] \right\} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.62)$$

Bu yerda $C \rightarrow 0$, $A_1 \rightarrow 0$ uchun (2.62) tenglama

$$A \rightarrow A_0 \operatorname{sech} A_0 \xi, \quad A_0 = \sqrt{B}$$

kabi bo'lib, nochiziqli Schrödinger tenglamasi uchun soliton yechimini olamiz:

$$u_s(x, t) = \frac{\sqrt{B}}{\operatorname{ch} \sqrt{B}(x - vt)} \exp \left\{ -i \frac{v^2}{4} t + \frac{ivx}{2} + Bt \right\} \quad (2.63)$$

Agar $\sqrt{B} = 2\eta$, $v = -4\xi$ deb belgilash kiritsak kanonik ko'rinish uchun bir soliton yechimga olib keladi.

$$u_s(x, t) = 2\eta \operatorname{sech} 2\eta(x + 4\xi t + x_0) \exp \{ -2i\xi x + 4(\eta^2 - \xi^2)t + \delta_0 \} \quad (2.64)$$

nochiziqli Schrödinger tenglamasini evolyutsion soliton yechimini tashqi ta'sir natijasida paydo bo'lgan hadlar orqali quyidagicha yozamiz.

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = i\varepsilon R(u_s), \quad \varepsilon \ll 1 \quad (2.65)$$

(2.65) uchun bir soliton yechimining ko'rinishi:

$$u_s(x, t) = 2\eta(t) \operatorname{sech} 2\eta(t)(x - \xi(t)) \exp \left\{ i \frac{\mu(t)}{\eta(t)} z + i\delta(t) \right\} \quad (2.66)$$

2.4 Nochiziqli Schrödinger tenglamasini bir soliton yechimi

Nochiziqli Schrödinger tenglamasini quyida ko‘rinishidan foydalanib bir soliton yechimini keltirib chiqaramiz.

$$iu_t + u_{xx} + 2qu^2 = 0 \quad (2.67)$$

Biz $u = q$ holi uchun ko‘rib chiqamiz:

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0 \quad (2.68)$$

Boshlang‘ich shartga ko‘ra

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, 0)| dx < \infty$$

Birinchi navbatda aniq yechimlarini qaraymiz, (2.68)-tenglamani N-soliton yechimini. Kdv nazriyasidagidek ular barcha λ uchun $u(\lambda) = 0$ bo‘ladigan qaytarmaydigan potentsiallar orqali javob beriladi. Qaytish koeffitsiyentning nolga teng bo‘lishidan

$$|a(\lambda)|^2 = 1 \quad (\text{Im}\lambda = 0)$$

$$a(\lambda) = \prod_{n=1}^N \frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda - \bar{\lambda}_n}$$

Bu holda tenglamalar sistemasini teskari masala metodi bilan $\psi(x, \lambda_n)$ lar bo‘yicha chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga aylantiramiz:

$$\tilde{\psi}(x, \lambda_n)e^{i\bar{\lambda}_n x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{m=1}^N \frac{c_m \psi(x, \lambda_m) e^{i\lambda_m x}}{\lambda_n - \lambda_m}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.69)$$

(2.69) tenglama uchun $\tilde{\psi} = -\psi$ evolutsion almashtirish bajaramiz:

$$\psi(x, \lambda_n)e^{-i\lambda_n x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{m=1}^N \frac{\bar{c}_m \tilde{\psi}(x, \lambda_m) e^{-i\bar{\lambda}_m x}}{\bar{\lambda}_m - \lambda_n} \quad (2.70)$$

(2.69) tenglamani (2.70) tenglamaga qo'yamiz va $\psi(x, \lambda_n)e^{i\lambda_n x} = \chi_n(x)$ belgilash kiritib, yangi tenglama hosil qilamiz.

$$\chi_n(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2i\lambda_n x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sum_{m=1}^N \frac{\bar{c}_m e^{2i(\lambda_n - \bar{\lambda}_m)x}}{\bar{\lambda}_m - \lambda_n} - \sum_{k,m} \frac{\bar{c}_m e^{2i\lambda_n x} c_k e^{-2i\bar{\lambda}_m x}}{\bar{\lambda}_m - \lambda_n \lambda_k - \bar{\lambda}_m} \chi_k(x) \quad (2.71)$$

Bundan tashqari tenglamalardagi $\chi_n(x)$ vektor komponentalari o'zaro bog'liq emas. Berilgan ifodaga ko'ra $\chi_n^{1,2}(x) q(x)$, va $|u(x)|^2$ uchun ikkita qismga ajratib olamiz:

$$q(x) = -2 \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{\acute{a}(\lambda_n)} \psi^{(1)}(x, \lambda_n) e^{i\lambda_n x} + \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda) \psi^{(1)}(x, \lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (2.72)$$

$$\int_x^{\infty} u(x') q(x') dx' = -2i \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{\acute{a}(\lambda_n)} \psi^{(2)}(x, \lambda_n) e^{i\lambda_n x} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda) \psi^{(2)}(x, \lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (2.73)$$

Olingan tenglamalar quyidagicha:

$$|u(x)|^2 = 2i \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^N c_n \chi_n^{(2)}(x) \quad (2.74)$$

$$q(x) = -2 \sum_{n=1}^N c_n \chi_n^{(1)}(x) \quad (2.75)$$

(2.71) tenglamadagi $\chi_n^{(2)}$ ni (2.74) tenglamaga qo'yamiz, va quyidagicha analog almashtirish bajaramiz;

$$|u(x)|^2 = \frac{d^2}{dx^2} \ln \det(1 + \bar{A}A) \quad (2.76)$$

Bu yerda $A(x)$ $N \times N$ kvadratik matritsa ko‘rinishi:

$$A_{mn} = \frac{c_m e^{-2i\bar{\lambda}_n x}}{\lambda_m - \bar{\lambda}_n} \quad (2.77)$$

(2.76) tenglama yechimining vaqtga bog‘liqligi quyidagi tenglamadan kelib chiqadi.

$$b_n(t) = b_n(0) \exp(4i\lambda_m^2 t)$$

(2.77) dagi c_m ni quyidagicha almashtiramiz.

$$c_m(t) = c_m(0) \exp(4i\lambda_m^2 t) \quad (2.78)$$

(2.68) tenglama yechimlari sinfning eng sodda ko‘rinishi solitondir. $N=1$ deb faraz qilib, belgilash kiritamiz.

$$\operatorname{Re}\lambda_1 = \xi, \quad \operatorname{Im}\lambda_1 = \eta, \quad x_0 = \frac{1}{2\eta} \ln |b_1(0)|$$

(2.76) tenglama yechimi quyidagicha:

$$|u(x, t)|^2 = \frac{4\eta^2}{\operatorname{ch}^2 2\eta(x - x_0 + 4\xi t)}$$

$\chi_n^{(1)}(x)$ ni (2.75) tenglamaga qo‘yib $u(x)$ ni topamiz.

$$u(x) = 2i\eta \frac{\exp(-2i\xi x - 4i(\xi^2 - \eta^2)t - i\varphi_0)}{\operatorname{ch} 2\eta(x - x_0 + 4\xi t)} \quad (2.79)$$

Bu yerda

$$\varphi_0 = \arg b_1(0)$$

$\eta = \text{Im}\lambda_1$ – soliton amplitudasi (kengligi), $\xi = \text{Re}\lambda_1$ –tezlik $v = -4\xi$. (2.79)

Nochiziqli Schrödinger tenglamasini bir soliton yechimi hisoblanadi. [9]

3-Bob

Nochiziqli Schrödinger tenglamasi yechimini-boshqarish

3.1 Teskari metod yordamida nochiziqli Schrödinger tenglamasi uchun olingan variatsion tenglamalar

Nochiziqli Schrödinger tenglamasini kanonik ko‘rinishi uchun mos kelgan logrange funksiyasini tuzib olamiz. Variatsiyalash usuli bilan logrange funksiyasini tekshirib ko‘ramiz va harakat tenglamalarini keltirib chiqaramiz.

$$L = -\frac{i}{2} \left(\psi \frac{\partial u^*}{\partial t} - u^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - |u_x|^2 + |u|^4 \quad (3.1)$$

(3.1) tenglama uchun (2.66) ifodadagi soliton yechimdan foydalanamiz. Soddalik uchun quyidagi belgilashlarni kiritib olamiz:

$$z = 2\eta(x - \xi)$$

$$\lambda = 2\mu(x - \xi) + \delta$$

Endi logrange funksiyasidan foydalanib $\eta(t)$, $\mu(t)$, $\xi(t)$, $\delta(t)$ lar uchun harakat tenglamalarini keltirib chiqaramiz. Buning uchun u_s yechimdan foydalanib logrange funksiyasini bizga kerakli bo‘lgan hadlar orqali tuzib olamiz.

$$\psi \frac{\partial u^*}{\partial t} - u^* \frac{\partial u}{\partial t} = -8i\eta^2(2\dot{\mu}(x - \xi) - 2\mu\dot{\xi} + \dot{\delta})\text{sech}^2 z$$

$$|u_x|^2 = 16\eta^4 \text{sech}^4 z \text{sh}^2 z + 16\eta^2 \mu^2 \text{sech}^2 z$$

$$|u|^4 = 16\eta^4 \text{sech}^4 z$$

$$L = (-4\eta\dot{\mu}z + 8\mu\dot{\xi}\eta^2 - 4\eta^2\dot{\delta})\text{sech}^2 z + 16\eta^4 \text{sech}^4 z(1 - \text{sh}^2 z) - 16\eta^2 \mu^2 \text{sech}^2 z \quad (3.2)$$

(3.2) ifodani variatsiyalash natijasida yangi tenglama hosil qilamiz:

$$\mathcal{L} = \int_{-\infty}^{\infty} L dz$$

$$\mathcal{L} = 8\mu\dot{\xi}\eta - 4\eta\dot{\delta} - \frac{16}{3}\eta^3 - 16\eta\mu^2 + \frac{32}{3}\eta^3 \quad (3.3)$$

(3.3) tenglamadan foydalanib $\dot{\eta}$, $\dot{\mu}$, $\dot{\xi}$, $\dot{\delta}$ larni topamiz.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{d\mu}{dt} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \delta} = 0, \quad \frac{d\eta}{dt} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mu}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{d\xi}{dt} = 4\mu \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{d\delta}{dt} = 2\mu \frac{d\xi}{dt} + 4(\eta^2 - \mu^2) \quad (3.7)$$

Olingan ushbu harakat tenglamalarini har birini alohida nolga teng deb statsionar nuqta borligini qaraymiz, agar bo'lsa turg'un (noturg'un) ekanligini

tekshiramiz. (3.4) va (3.5) tenglamadan ko‘rinib turibdiki, $\mu = 0$, $\eta = 0$ ya’ni, bu ikkita parametr vaqtga bog‘liq bo‘lmagan kattalikka teng ekan. Bundan (3.5), (3.6) tenglamalarni ham shu tartibda nolga tenglashtirsak $\mu = 0$, $\eta = 0$ ekanligidan ular uchun ham statsionar nuqta mavjud emas ekan.

Endi logrange funksiyasiga qos‘himcha had kiritamiz va buning uchun ham nochiziqli Shcrödinger tenglamasini bir soliton yechimidan foydalanamiz.

$$L = -\frac{i}{2} \left(\psi \frac{\partial u^*}{\partial t} - u^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - |u_x|^2 + |u|^4 + \gamma |u|^2 \quad (3.8)$$

Dastlabki metod yordamida harakat tenglamalarini keltirib chiqaramiz.

$$\mathcal{L} = 8\mu\dot{\xi}\eta - 4\eta\dot{\delta} - \frac{16}{3}\eta^3 - 16\eta\mu^2 + \frac{32}{3}\eta^3 + 4\gamma\eta \quad (3.9)$$

Ularning ko‘rinishi quyidagicha:

$$\frac{d\mu}{dt} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = 4\mu \quad (3.12)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = 2\mu \frac{d\xi}{dt} + 4(\eta^2 - \mu^2) + \gamma \quad (3.13)$$

Qo‘shimcha had orqali hosil qilingan harakat tenglamalari uchun ham statsionar nuqta mavjudligini qaraymiz. (3.10), (3.11), (3.12) tenglamalar uchun statsionar nuqta mavjud emas.

$$\frac{d\delta}{dt} = 2\mu \frac{d\xi}{dt} + 4(\eta^2 - \mu^2) + \gamma = 0$$

Bundan $\gamma = -4\eta^2$ ekanligi kelib chiqadi, γ uchun olingan bu qiymatni η uchun kiritilgan boshlang'ich shartdan foydalanib hisoblashimiz mumkin.

Demak ikkita holatdagi harakat tenglamalarini bir-biriga solishtirsak, faqatgina δ uchun faza siljishiga olib kelar ekan.

$$\delta = 4(\eta^2 - \mu^2)t + \delta_0 \quad (3.14)$$

$$\delta = (4(\eta^2 - \mu^2) + \gamma)t + \delta_0 \quad (3.15)$$

3.2 Natijalar tahlili

Femto sekundli lazer impulsning optik nurtolada tarqalish masalasini ko'rib chiqamiz. Bizga malumki, elektromagnit to'lqinlarining muhitda tarqalishi Maxwell tenglamalari bilan aniqlanadi. Nur tolada kuchli maydonlarda Keer effekti namoyon bo'ladi. Bunda muhitning qutblanish vektori elektr maydonning uchinchi darajasiga proporsional bo'ladi:

$$P_\alpha^n = \chi_{\alpha\beta\gamma\delta} E_\beta E_\gamma E_\delta$$

Biz muhitni bir jinsli va izotrop deb muhitning noxiziqli elektr kirituvchanligi tenzor kattalikni $\chi_{\alpha\beta\gamma\delta\delta\rightarrow\chi}$ skalyar kattalik bilan almashtiramiz. Tegishli hisoblarni bajarib Maxwell tenglamalaridan lazer impulsining tarqalishini aniqlovchi tenglama noxiziqli Schrödinger tenglamasini (NShT) hosil qildik. Bu tenglama o'lchov birliksiz kattaliklarda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = i\varepsilon R[u_s(x, z)] \quad (3.16)$$

bu yerda $i\varepsilon R[u_s(x, z)]$ sistemani g'alayonga keltiruvchi had bo'lib, $\varepsilon < 0$ bo'lganda sistemaga qo'shimcha energiya berilgan bo'ladi, $\varepsilon > 0$ hol esa nochiziqli so'nishga olib keladi. Ushbu ishda ikkinchi hol bilan chegaralanamiz. NShT ni bir soliton yechimi:

$$u(x, t) = 2\eta \operatorname{sech} 2\eta(x - \xi) \exp\left(i\frac{\mu}{\eta}z + i\delta\right) \quad (3.17)$$

Bu yerda $z = 2\eta(x - \xi)$, $\eta(t)$, $\mu(t)$, $\xi(t)$, $\delta(t)$ lar aniqlanishi kerak bo'lgan kattaliklar. $\eta(t)$ -amplituda, $\mu(t)$ -soliton tezligi, $\xi(t)$ -koordinat, $\delta(t)$ -faza

Tashqi tasir zaif deb, yani, $\varepsilon \ll 1$ deb NShT tenglamasining bir solitonli yechimi uchun teskari masala metodiga asoslangan g'alayonlar tenglamalarini yozamiz: [11]

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{th}z}{\operatorname{ch}z} R[u_s(z)] e^{-i\lambda} dz \quad (3.18)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}z R[u_s(z)] e^{-i\lambda} dz \quad (3.19)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = 4\mu + \frac{\varepsilon}{4\eta^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{\operatorname{ch}z} R[u_s(z)] e^{-i\lambda} dz \quad (3.20)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = 2\mu \frac{d\xi}{dt} + 4(\eta^2 - \mu^2) + \frac{\varepsilon}{2\eta} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - z\operatorname{th}z}{\operatorname{ch}z} R[u_s(z)] e^{-i\lambda} dz \quad (3.21)$$

Olingan tenglamalar uchun: 1) $R[u_s(z)] = u_{xx}|u|^2$ 2) $R[u_s(z)] = |u|^2 u_t$ kabi ko'rinishlarda tanlab olib $\eta(t)$, $\mu(t)$, $\xi(t)$, $\delta(t)$ lar uchun yangi tenglamalarni hosil qilamiz.

I. (3.18)-(3.21) tenglamalarga qo'yib hisoblaymiz:

$$\frac{d\mu}{dt} = -32\varepsilon\eta^4\mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sh}^2 z}{\text{ch}^6 z} dz$$

$$\frac{d\eta}{dt} = 2\varepsilon\eta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(-8\frac{\eta^3}{\text{ch}^4 z} + 16\eta^3 \frac{\text{sh} z}{\text{ch}^6} - 8\eta\mu^2 \frac{1}{\text{ch}^4} \right) dz$$

$$\frac{d\xi}{dt} = 4\mu + \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \left(-8\eta^3 \frac{z}{\text{ch}^4 z} + 16\eta^3 z \frac{\text{sh} z}{\text{ch}^6 z} - 8\eta\mu^2 \frac{z}{\text{ch}^4 z} \right) dz$$

$$\frac{d\delta}{dt} = 32\varepsilon\mu\eta^3 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\text{sh} z}{\text{ch}^5 z} - z \frac{\text{sh}^2 z}{\text{ch}^6 z} \right) dz$$

Integrallarni hisoblab topilgan tenglamalar quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\dot{\mu} = -\frac{128}{15}\varepsilon\mu\eta^4 \quad (3.22)$$

$$\dot{\eta} = -\frac{64}{3}\varepsilon\eta^3(\eta^2 - \mu^2) \quad (3.23)$$

$$\dot{\xi} = 4\mu + \varepsilon\eta^3 \frac{6\pi}{5} \quad (3.24)$$

$$\dot{\delta} = 2\mu \frac{d\xi}{dt} + 4(\eta^2 - \mu^2) \quad (3.25)$$

II. $R[u_s(z)] = |u|^2 u_t$ ga teng bo‘lsin, bunda tenglamalar qanday ko‘rinishda bo‘lishini yuqoridagi metod yordamida aniqlaymiz. (3.18)-(3.21) tenglamalarga qo‘yib hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} &= \varepsilon\dot{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{th} z}{\text{ch}^2 z} dz + \varepsilon\dot{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sh}^2 z}{\text{ch}^4 z} z dz - 2\varepsilon\dot{\xi}\eta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sh}^2 z}{\text{ch}^4 z} dz \\ \frac{d\eta}{dt} &= -\varepsilon\dot{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{\text{ch}^2 z} dz + 2\varepsilon\eta\mu\dot{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\text{ch}^2 z} dz - \varepsilon\eta\dot{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\text{ch}^2 z} dz \end{aligned}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = 4\mu + \frac{\varepsilon}{4\eta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-2\mu \frac{z^2}{\text{ch}^2 z} + 4\eta\mu\dot{\xi} \frac{z}{\text{ch}^2 z} - 2\eta\dot{\delta} \frac{z}{\text{ch}^2 z} \right] dz$$

$$\frac{d\delta}{dt} = 2\mu \frac{d\xi}{dt} + 4(\eta^2 - \mu^2) + \frac{\varepsilon}{2\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \left[2\dot{\eta} \frac{1}{\text{ch}^2 z} - 2\dot{\eta} z^2 \frac{\text{sh}^2 z}{\text{ch}^4 z} - 4\eta^2 \dot{\xi} \frac{\text{sh} z}{\text{ch}^3 z} + 4\eta^2 \dot{\xi} z \frac{\text{sh}^2 z}{\text{ch}^4 z} \right] dz$$

Bu integral tenglamalarni hisoblaymiz va vaqtga bog‘liq bo‘lgan $\mu(t)$, $\eta(t)$, $\xi(t)$, $\delta(t)$ parametrlar uchun evolutsion tenglamalarni olamiz, natijalar quyidagicha:

$$\dot{\mu} = -\frac{4}{3}\varepsilon\eta^2\dot{\xi} \quad (3.26)$$

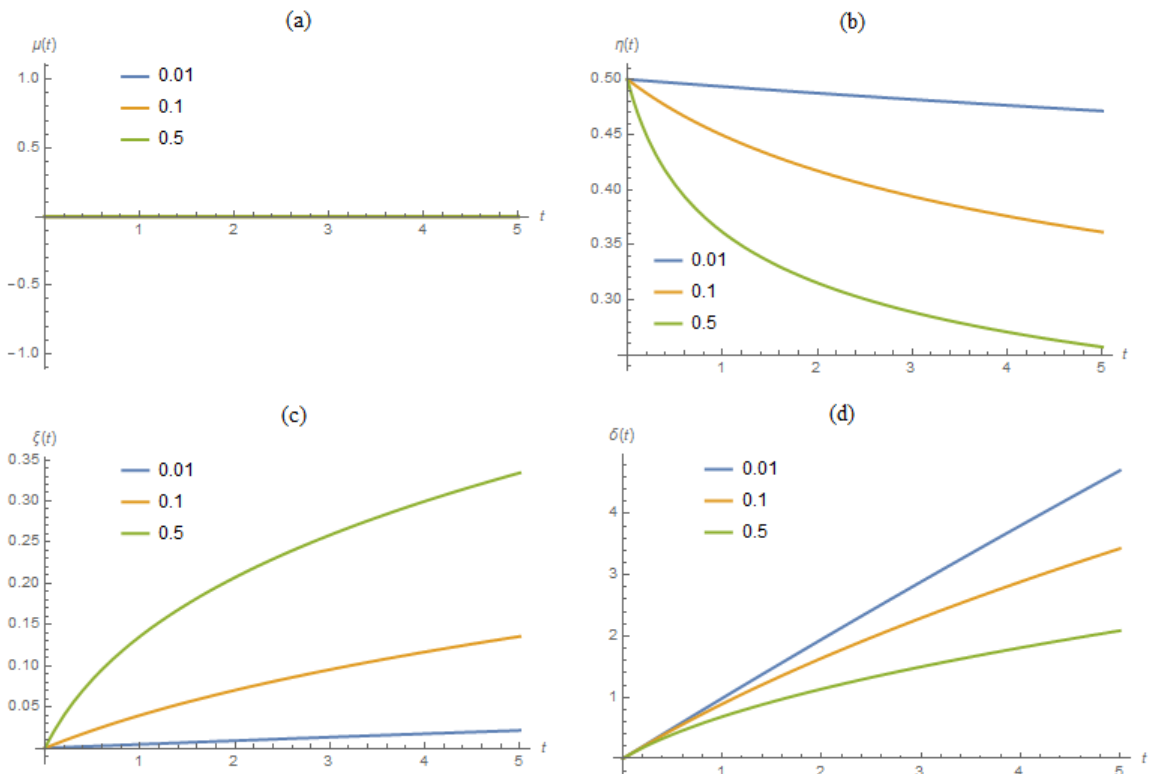
$$\dot{\eta} = 2\varepsilon\eta(2\mu\dot{\xi} - \dot{\delta}) \quad (3.27)$$

$$\dot{\xi} = 4\mu - \frac{\varepsilon\pi^2\dot{\mu}}{12\eta^2} \quad (3.28)$$

$$\dot{\delta} = 2\mu\dot{\xi} + 4(\eta^2 - \mu^2) + \frac{\varepsilon}{2\eta} \left(\frac{8}{3}\dot{\eta} - \frac{\pi^2}{9} \right) \quad (3.29)$$

Ushbu evolutsion tenglamalar uchun statsionar nuqtani topamiz va uning turg‘un nuqta ekanligini tekshiramiz. Funksiyaning statsionar nuqtasi deganda shu nuqtada funksiyaning birinchi tartibli hosilasi nolga teng bo‘ladi va funksiya extremum qiymatlarni qabul qiladi, yani maximum yoki minimum. Agar funksiya statsionar nuqtada minimum qiymatni qabul qilsa - turg‘un statsionar nuqta, maximum qiymatni qabul qilsa - noturg‘un statsionar nuqta bo‘ladi.

Olingan evolutsion tenglamalar uchun grafiklar keltirilgan: Bu grafiklar boshlang‘ich shartlardan foydalanib chizildi.



3.1-rasm: $\mu(t)$, $\eta(t)$, $\xi(t)$ va $\delta(t)$ larning vaqtga bog'lanish grafigi (turli xil ε lar uchun)

Statsionar nuqtani topish uchun keltirilgan shartlar asosida (3.22)-(3.29) birinchi tartibli differensial tenglamalarda vaqt bo'yicha hosilalarni nolga tenglashtiramiz. Natijalar quyidagicha:

I. (3.22)-(3.25) birinchi tartibli differensial tenglamalar uchun statsionar nuqta mavjud emas, shuning uchun uning vaqtga bog'liq bo'lgan $t = 0$ nuqtadagi boshlang'ich shartlarni ixtiyoriy kichik qiymatlar uchun tanlab olamiz.

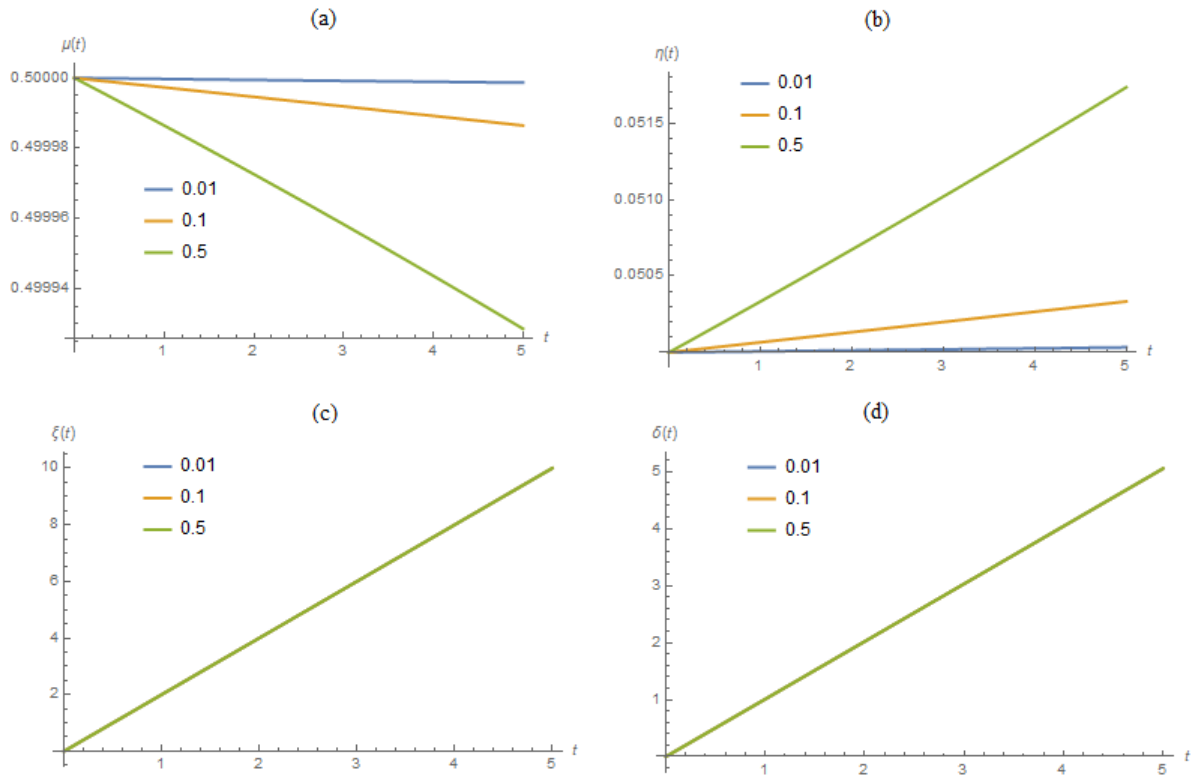
$$1) \mu(0) = 0, \eta(0) = 0.5, \xi(0) = 0, \delta(0) = 0$$

Bu boshlang'ich shartlar yordamida ε ga

a) $\varepsilon = 0$, b) $\varepsilon = 0.01$, c) $\varepsilon = 0.05$, d) $\varepsilon = 0.1$, e) $\varepsilon = 0.5$ qiymatlar berib vaqtga bog'liq bo'lgan $\mu(t)$, $\eta(t)$, $\xi(t)$, $\delta(t)$ lar uchun (3.1) rasmda ko'rsatilgan grafiklarni olamiz. Bunga ko'ra olingan grafiklar (3.22)-(3.25) tenglamalar uchun chizildi, ya'ni (3.1) (a) rasmda $\mu(t)$ -soliton tezligi-

ning vaqtga bog‘lanishi ko‘rsatilgan bo‘lib, unda soliton tezligi berilgan 1-boshlang‘ich shartlar va ε ning keltirilgan qiymatlari uchun o‘zgarmas ekan. Odatda soliton ya’ni, yakka to‘lqin tarqalish davomida o‘z shaklini va tezligini o‘zgartirmaydi. (3.1) (b) rasmda $\eta(t)$ -amplituda (soliton kengligi) ning vaqtga bog‘lanishi ko‘rsatilgan bo‘lib, unda amplituda ε ning kichik qiymati uchun chiziqli, katta qiymatlari uchun nochiziqli kamaydi. (3.1) (c) rasmda $\xi(t)$ -koordinataning vaqtga bog‘lanishi ko‘rsatilgan bo‘lib, unda koordinata ε ning kichik qiymati uchun chiziqli, katta qiymatlari uchun nochiziqli oshadi. (3.1) (d) rasmda $\delta(t)$ -fazaning vaqtga bog‘lanishi ko‘rsatilgan bo‘lib, unda faza ε ning kichik qiymati uchun chiziqli, katta qiymatlari uchun nochiziqli oshadi.

Endi xuddi shu(3.22)-(3.25) birinchi tartibli differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich shartlarga o‘zgartirish kiritamiz: 2) $\mu(0) = 0.5$, $\eta(0) = 0.05$, $\xi(0) = 0$, $\delta(0) = 0$ va yuqorida keltirilgan ε lar uchun (3.2) rasmda ko‘rsatilgan grafiklarni olamiz. (3.2) (a) rasmda soliton tezligi ε ning kichik qiymati uchun chiziqli, katta qiymatlari uchun ham chiziqli kamaydi. Dastlabki boshlang‘ich shartlar uchun soliton tezligi vaqt bo‘yicha o‘zgarmas edi, bu holatda esa vaqt bo‘yicha soliton tezligi kamayib borayapti. (3.2) (b) rasmda amplitudaning vaqtga bog‘lanishi ε ning kichik qiymati uchun chiziqli, katta qiymatlari uchun ham chiziqli oshdi. (3.1) (b) rasmda esa amplituda vaqt bo‘yicha kamaygan edi. (3.2) (c) rasmda koordinata ixtiyoriy ε lar uchun grafiklar bir-biri bilan ustma-ust tushdi va chiziqli oshdi. (3.1) (c) rasmda $\xi(t)$ vaqt bo‘yicha oshgan edi. (3.2) (d) rasmda faza ham vaqt bo‘yicha ε ning ixtiyoriy qiymati uchun grafiklar bir-biri bilan ustma-ust tushdi va chiziqli oshdi. (3.1) (d) rasmda ham $\delta(t)$ vaqt bo‘yicha oshgan edi. Boshlang‘ich shartlarni ma’lum bir qiymatlarga o‘zgartirib, ikkita holatdagi grafiklarni bir-biri bilan solishtirib natijalarni tahlil



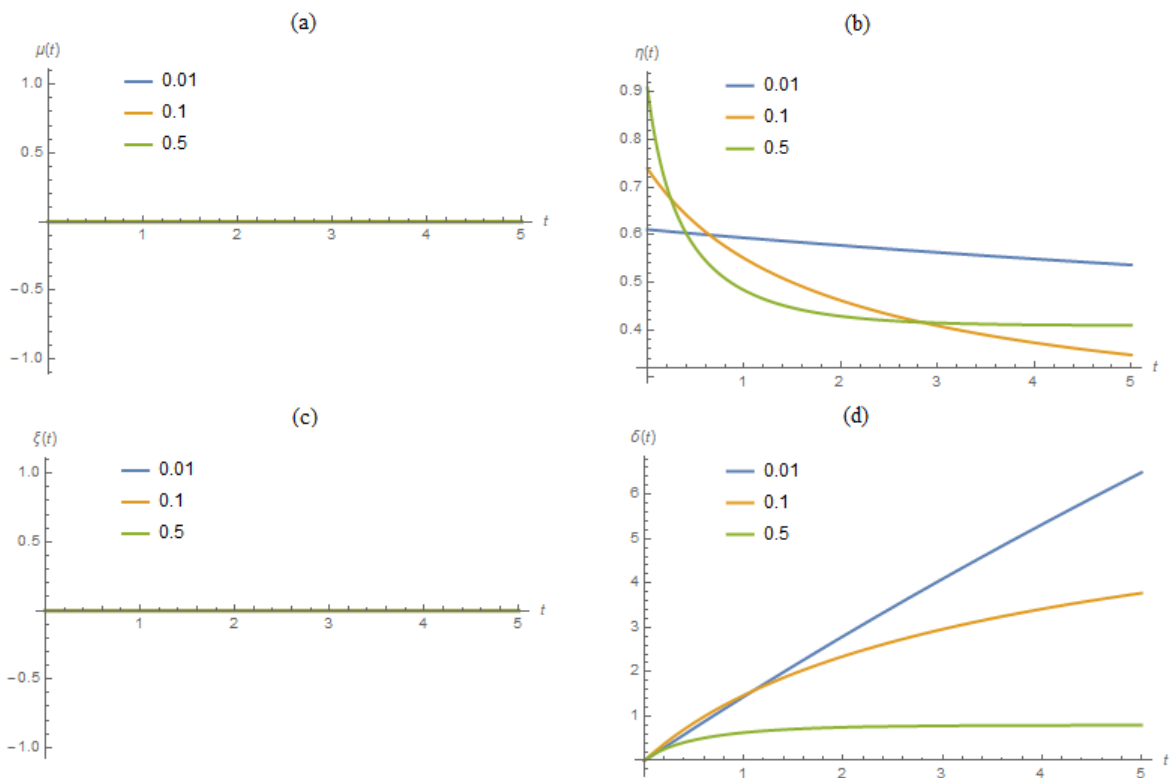
3.2-rasm: $\mu(t)$, $\eta(t)$, $\xi(t)$ va $\delta(t)$ larning vaqtga bog'lanish grafigi (turli xil ε lar uchun)

qildik.

II. (3.26)-(3.29) birinchi tartibli differensial tenglamalar uchun statsionar nuqta faqatgina $\eta(0)$ uchun mavjud ekan, shu sababli qolgan $\mu(0)$, $\xi(0)$, $\delta(0)$ uchun boshlang'ich shartlarni quyidagicha tanlaymiz:

$$\eta(0) = \left(\frac{\varepsilon\pi^2}{72}\right)^{\frac{1}{3}}, \mu(0) = 0, \xi(0) = 0, \delta(0) = 0.$$

Ushbu shartlardan foydalanib a) $\varepsilon = 0$, b) $\varepsilon = 0.01$, c) $\varepsilon = 0.05$, d) $\varepsilon = 0.1$, e) $\varepsilon = 0.5$ qiymatlari uchun vaqtga bog'liq bo'lgan $\mu(t)$, $\eta(t)$, $\xi(t)$ va $\delta(t)$ larning (3.3) rasmda ko'rsatilgan grafiklarini olamiz. (a) rasmda soliton tezligi ixtiyoriy qiymatlar uchun vaqt bo'yicha o'zgarmas ekan. (b) rasmda $\eta(t)$ berilgan boshlang'ich shartlar va ε ning kichik qiymati uchun chiziqli, katta qiymatlari uchun nochiziqli kamaydi. (c) rasmda esa $\xi(t)$ ham ixtiyoriy qiymatlar uchun vaqt bo'yicha o'zgarmadi. (d) rasmda $\delta(t)$ ning vaqtga bog'lanish grafigi vaqt bo'yicha ε ning kichik qiymati uchun chiziqli, katta qiymatlari uchun



3.3-rasm: $\mu(t)$, $\eta(t)$, $\xi(t)$ va $\delta(t)$ larning vaqtga bog'lanish grafigi (turli xil ε lar uchun)

nochiziqli oshdi.

Demak, kiritilgan tashqi ta'sir ya'ni sistemani g'alayonga keltiruvchi hadni o'zgartirish orqali nochiziqli Schrödinger tenglamasini boshqarish mumkinligini ko'rdik. Shu sistemani xarakterlovchi kattaliklarni vaqt bo'yicha qanday o'zgarishini aniqladik. Olingan natijalarni umumlashtirsak, ikkita tenglamadagi umumiy jihatlar faqatgina faza uchun mos keldi. Ya'ni kiritilgan boshlang'ich shartlar uchun faza vaqt bo'yicha oshib borayapti. Soliton tezligi ham vaqt bo'yicha o'zgarmas ekan ikkita holatda.

Xulosa

1. Nochiziqli muhitlarda Maxwell tenglamalaridan Nochiziqli Schrödinger tenglamasini (NShT) keltirib chiqardim;

2. Solitonlar uchun sochilishning teskari masalasiga asoslangan g'ayonlar nazariyasi tenglamalari va Lagrange formalizmida sinov funksiyasiga asoslangan variatsion tenglamalar birinchi yaqinlashishda bir xil ekanligi ko'rsatildi.

3. Birinchi tip g'ayon ta'sirida NShT yechimida faqat faza siljishi yuzaga kelishi ko'rsatildi.

4. Ikkinchi tip g'ayonda soliton uchun fixed point lar topildi va soliton dinamikasi o'rganildi.

Adabiyotlar

- [1] VIII, , "" , 1982
- [2] A.A.Abdumalikov "Elektrodinamika", darslik-T: "Cho'lpon", 2001, 344
- [3] A.A.Abdumalikov "Solitonlar nazariyasi asoslari" o'quv qo'llanma, Toshkent "Universitet" 1995
- [4] .., .., , , 1986 .
- [5] .., .., -, 1982 .
- [6] G.P.Agrawal "Nonlinear fiber optics", 2007, 534p
- [7] .., .. " ", " " 2005. 648
- [8] .., . "" . , 2003. 304
- [9] .., .., .., .. . -: , 1980 , 381 .
- [10] .., .., - , 1983 ,
- [11] V.I.Karpman, E.M. Maslov "Perturbation theory for solitons", 73, p.537, (1997).