O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA KAFEDRASI

5130100 - Matematika ta'lim yo'nalishi

URINBOYEVA BAXTINISO MUZAFFAR QIZI

"Zichlik funksiyasi uchun noparametrik baholar va ularning xossalari"mavzusidagi

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar:

Dots. G'.Tursunov

____

ТАШКЕНТ - 2018

M U N D A R I J A

KIRISH

Tasodifiy miqdoring noma'lum zichlik funksiyasini noparametrik baholashdagi dastlabki natijalar Rossiya matematiklari V.I.Glivenko va N.V.Smirnovlarga tegishli bo'lib, ular zichlik funksiyasining bahosi sifatida gistogrammani o'rganganlar. V.I.Glivenko [1] ma'lum bir shartlar ostida gistogrammani bir ehtimollik bilan noma'lum zichlik funksiyasiga intilishini ko'rsatdi, N.V.Smirnov [2] esa gistogrammani noma'lum zichlik funksiyasidan chetlanishining absolyut qiymatini normallangan maksimumini limit taqsimotini topdi. Noma'lum zichlik funksiyasi uchun "umumlashgan gistogramma"yoki yadroviy bahosini M.Rozenblatt [3] va E.Parzen [4] kiritdilar va ularning dastlabki xossalarini o'rgandilar. Bu kiritilgan baholarning keyingi turli asimptotik va noasimptotik xossalarini E.A.Nadaraya [5], V.G.Alekseev [6], V.D.Konakov [7], G.Uotson va M.Lidbetter [8] va boshqalar o'rgandilar. Matematik statistikaning ketma - ket baholash nazariyasi, ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi, ishonchlilik nazariyasi masalalarida va amaliyotning boshqa turli masalalarida tasodifiy miqdorning noma'lum zichlik funksiyasini tasodifiy hajmdagi tanlanmalar asosida baholashga ehtiyoj tug'iladi. Masalan, $(0, t]$ vaqt oralig'ida biror tasodifiy jarayonning tasodifiy ko'rsatkichini kuzatishlar soni N_t tasodifiy miqdor bo'ladi. Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimiga tushgan talabga xizmat ko'rsatishni boshlanishini kutish vaqtining zichlik funksiyasini baholash masalasida $(0, t]$ oraliqda kelib tushgan talablar soni λt parametrli $(\lambda - musbat\ son)$ Puasson taqsimotiga ega tasodifiy miqdor bo'ladi. Tasodifiy hajmdagi tanlanmalar asosida noma'lum zichlik funksiyasini baholash masalalariga [9 - 11] ishlar bag'ishlangan. Mazkur bitiruv malakaviy ishida tasodifiy miqdorning noma'lum zichlik funksiyasini yadroviy baholash masalasi o'rganilgan.

Bitiruv malakaviy ishi ikkita bobdan va har bir bob to'rttadan paragrafdan, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yhatidan iborat.

Birinchi bob noma'lum zichlik funksiyasini Parzen-Rozenblatt yadroviy bahosini asimptotik xossalarini o'rganishga bag'ishlangan. §1.1 da bu bahoning asimptotik siljimasligi, §1.2 da asosliligi va §1.3 da asimptotik normalligi isbotlangan. §1.4 da esa Parzen - Rozenblattning yadroviy bahosini yadro funksiyasiga misollar keltirilib, bahoning dispersiysini minimallashtiruvchi Yeponichnikovning optimal yadro funksiyasi o'rganilgan.

Ikkinchi bob tasodifiy hajmli tanlanma asosida qurilgan empirik taqsimot funksiyasini asimptotik xossalarini o'rganishga bag'ishlangan. §2.1 tasodifiy indeksli tasidifiy miqdorlar ketma-ketligining xossalari o'rganilgan bo'lib, bu natijalar kelgusi paragraflarda asosiy natijalarni isbotlash uchun xizmat qilganlar. 2.2§ va 2.3§ larda tasodifiy hajmli tanlanma asosida qurilgan empirik taqsimot funksiyasi va Parzen - Rozenblattning yadroviy bahosining siljimasligi, asosliligi va asimptotik normalligi ko'rsatilgan. 2.4§ esa tanlanmaning tasodifiy hajmiga misollar keltirib, tasodifiy hajmdagi tanlanma asosida zichlik funksiyasini baholashni ommaviy xizmat ko'rsatish tizimiga tatbiq qilingan.

I BOB. ZICHLIK FUNKSIYASINI YADROVIY BAHOLASH.

1.1 §. Parzen - Rozenblatt bahosining asimptotik siljimaganligi.

$(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$bir xil taqsimlangan, bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlarning n hajmli tanlanmasi bo'lsin. Tanlanmaning noma'lum taqsimot funksiyasini $y = F(x)$, zichlik funksiyasini$y = f(x)$deb belgilaymiz.

Empirik taqsimot funksiyasi

$$y = F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(\xi_k \le x), \qquad x \in R_1 = (-\infty, +\infty)$$

bo'lsin, bu yerda $I\left(A\right)-$ A tasodifiy hodisaning indikatori, ya'ni $\chi\left(A\right) = 1$, agar A tasodifiy hodisa bajarilsa va $I\left(A\right) = 0$, aks holda.

Noma'lum zichlik funksiyasi $y = f(x)$ uchun statistik baho tuzish uchun $f(x) = F^{'}(x)$ ligidan kelib chiqib $f_n(x) = \frac{F_n(x+h) - F_n(x-h)}{2h}$ifodani ko'ramiz . Bu yerda $h = h(n) \to 0$, $n \to \infty$ $-$orttirma yoki oyna kengligi bo'lib, $h(n)$ ketma-ketlikni tanlashda $f_n(x)$bahoning o'rta qiymati va dispersiyasining xossalaridan kelib chiqamiz.

Agar

$$K(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |y| \le 1 \\ 0, & |y| > 1 \end{cases}$$

$K\left(y\right)-$ funksiyani kiritsak noma'lum zichlik funksiyasi $y = f\left(x\right)$ uchun baho

$$f_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} K\left(\frac{x-y}{h}\right) dF_n(y) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{h} K\left(\frac{x-\xi_i}{h}\right) \tag{1.1.1}$$

ko'rinishga keladi.

Umuman olganda funksiya $K(y)$ni boshqa umumiy ko'rinishlarda tanlasak ham bo'ladi. Lekin h va $K(y)$ni tanlashdagi asosiy me'zon- bu $f_n(x)$ bahoni siljimaganlik, asoslilik, assimptotik normallik va boshqa xossalarini ta'minlashdir.

Ta'rif 1.1.1 Funksiya$K(y)$ni yadro, baho$f_n(x)$ning yadrosi,ketma-ketlik $h = h(n)$ni $f_n(x)$ ning "oyna kengligi"deb va$f_n(x)$bahoni zichlik funksiyasining yadroviy bahosi deb ataymiz. Noma'lum zichlik funksiyasi $y = f(x)$ ning yadroviy bahosi (1.1.1) ni quyida keltirilgan (K_i), $i \geq 1$ shartlarni qanoatlantiruvchi $K(x)$ funksiya yordamida quramiz va uning matematik kutilmasini hisoblaymiz:

$$Mf_n(x) = M\left(\frac{1}{h(n)}K\frac{(x-\xi_1)}{h(n)}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h(n)}K\left(\frac{x-y}{h(n)}\right) f(y)dy \qquad (1.1.2)$$

Ta'rif 1.1.2. Noma'lum zichlik funksiyasi $y = f(x)$ning statistic bahosi $y = f_n(x)$ asimptotik siljimas baho deyiladi, agar $\lim\limits_{n\to\infty} Mf_n(x) = f(x)$ munosabat o'rinli bo'lsa.

Teorema 1.1.1. (Parzen [4]) Agar $\lim\limits_{n\to\infty} h(n) = 0$ bo'lib, yadro $K(x)$ quyidagi

$$(K_1): \qquad \sup_{-\infty<y<\infty} |K(y)| < \infty \ , \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} |K(y)|dy < \infty \, ,$$

$$\lim_{y\to\infty} |yK(y)| = 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(y)dy = 1$$

xossalarga ega bo'lsa, $y = f(x)$zichlik funksiyasining uzluksizlik $x \in R_1$ nuqtalarida $f_n(x)$ baho asimptotik siljimas baho bo'ladi.

Bu teorema (1.1.2) va quyidagi umumiy teoremadan kelib chiqadi.

Teorema 1.1.2. (Boxner[4]) Agar $\lim\limits_{n\to\infty} h(n) = 0$ bo'lib, $K(x)$ funksiya

$$(K_2): \qquad \sup_{-\infty<y<\infty} |K(y)| < \infty \ , \quad \int_{-\infty}^{\infty} |K(y)|dy < \infty \, , \quad \lim_{y\to\infty} |yK(y)| = 0$$

shartlarni qanoatlantirsa va $g(y)$funksiya uchun $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(y)|dy < \infty$ o'rinli bo'lsa, $g(x)$ funksiyaning har bir uzluksizlik $x \in R_1$ nuqtasida $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(y)dy$, bu yerda

$g_n(x) = \frac{1}{h(n)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{y}{h(n)}\right) g(x-y)dy$.

Isbot:

$g_n(x) - g(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(y)\, dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (g(x-y) - g(x)) \frac{1}{h(n)} K\left(\frac{y}{h(n)}\right) dy$

Ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun integrallash oralig'i $(-\infty, +\infty)$ ni ikkita sohaga $|y| \le \delta$ va $|y| > \delta$ ga ajratamiz. U holda

$$\left| g_n(y) - g(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(y)\, dy \right| \le \max_{|y|\le\delta} |g(x-y) - g(x)| \int_{|z|\le\frac{\delta}{h(n)}} |K(z)|\, dz +$$

$$+ \int_{|y|\ge\delta} \frac{|g(x-y)|}{|y|} \frac{|y|}{h(n)} \left| K\left(\frac{y}{h(n)}\right) \right| dy + |g(x)| \int_{|y|\ge\delta} \frac{1}{h(n)} \left| K\left(\frac{y}{h(n)}\right) \right| dy \le$$

$$\le \max_{|y|\le\delta} |g(x-y) - g(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |K(x)|\, dx + \frac{1}{\delta} \sup_{|z|\ge\frac{\delta}{h(n)}} |zK(z)| \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|\, dy +$$

$$+ |g(x)| \int_{|z|\ge\frac{\delta}{h(n)}} |K(z)|\, dz$$

Endi (K_1) shartdan $n \to \infty$ da ikkinchi, uchinchi qo'shiluvchilarning limiti nol ekanligini va nihoyat $\delta \to 0$ da birinchi qo'shiluvchining limiti nol ekanligini hosil qilamiz. Boxner teoremasi isbotlandi.

1.2 §. Parzen - Rozenblatt bahosining asosliligi.

Noma'lum zichlik funksiyasi $y = f(x)$ uchun quyidagi

$$f_n(x) = \frac{1}{nh(n)} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-\xi_i}{h(n)}\right)$$

Parzen - Rozenblatt statistik bahosini quramiz.

Ta'rif 1.2.1. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} M[f_n(x) - f(x)]^2 = 0$ munosabat o'rinli bo'lsa, $f_n(x)$ statistik baho noma'lum zichlik funksiyasi $f(x)$ uchun o'rta kvadratik ma'noda asimptotik asosli deyiladi.

Ta'rif 1.2.2. Agar ixtiyoriy kichik son $\varepsilon > 0$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} = 0$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $\{\xi_n,\ n \geq 1\}$ tasodifiy miqdorlar ketma - ketligi ξ tasodifiy miqdorga ehtimol bo'yicha yaqinlashadi deyiladi va quyidagicha $n \to \infty$ da $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ belgilanadi.

Ta'rif 1.2.3. Agar $n \to \infty$ da $f_n(x) \xrightarrow{P} f(x)$ o'rinli bo'lsa, $f_n(x)$ statistik baho noma'lum zichlik funksiyasi $f(x)$ uchun ehtimol bo'yicha asimptotik asosli deyiladi.

Teorema 1.2.1. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} h(n) = 0$ bo'lib, yadro $K(x)$ (K_1) shartni qanoatlantirsa, quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$\lim_{n\to\infty} nh(n)D\left(f_n(x)\right) = f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(y)dy$$

.

Isbot: $f_n(x)$ bahoning dispersiyasini hisoblaymiz:

$$Df_n(x) = \tfrac{1}{n}D(\tfrac{1}{h(n)})K\left(\tfrac{x-\xi_1}{h(n)}\right) =$$
$$= \tfrac{1}{n}M\left[\tfrac{1}{h^2(n)}K^2\left(\tfrac{x-\xi_1}{h(n)}\right)\right] - \tfrac{1}{n}\left[M\left(\tfrac{1}{h(n)}K\left(\tfrac{x-\xi_1}{h(n)}\right)\right)\right]^2 =$$
$$= \tfrac{1}{nh(n)}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{h(n)}K^2\left(\tfrac{x-y}{h(n)}\right) f(y)dy - h(n)(Mf_n(x))^2\right] \quad (1.2.1)$$

Teorema 1.1.2.dan

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{h(n)}K^2\left(\frac{x-h}{h(n)}\right)f(y)dy=f(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K^2(y)dy$$

munosabatga ega bo'lamiz. Oxirgi munosabatni hisobga olib, (1.2.1) dan teoremaning isbotini hosil qilamiz.

Teorema 1.2.2. Yadro $K(x)$ (K_1) shartni qanoatlantirib, $\lim\limits_{n\to\infty} nh(n)=\infty$ bo'lsa, baho $f_n(x)$ noma'lum zichlik funksiyasi $f(x)$ uchun o'rta kvadratik ma'noda va ehtimol bo'yicha asimptotik asosli bo'ladi.

Isbot: Hisoblaymiz:

$$M[f_n(x)-f(x)]^2=M[f_n(x)-M(f_n(x))+M(f_n(x))-f(x)]^2=$$

$$=M(f_n(x)-M(f_n(x)))^2-2M\left[(f_n(x)+M(f_n(x)))(M(f_n(x))-f(x))\right]+$$

$$+(M(f_n(x))-f(x))^2=Df_n(x)+2(M(f_n(x))-f(x))\cdot$$

$$\cdot(M(f_n(x))-M(f_n(x)))+b_n^2(f_n(x))=Df_n(x)+b(f_n(x))$$

bu yerda

$$b(f_n(x))=Mf_n(x)-f(x)$$

bahoning siljishi.

Teorema 1.1.1.dan $\lim\limits_{n\to\infty} b(f_n(x))=0$ va teorema 1.2.1. dan $\lim\limits_{n\to\infty} D(f_n(x))=0$ munosabatlarni hosil qilamiz.

Demak

$$\lim_{n\to\infty} M[f_n(x)-f(x)]^2=0 \tag{1.2.2}$$

Chebishev tengsizligidan [12] ixtiyoriy kichik son $\varepsilon>0$ uchun

$$P\{|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\}\le\frac{1}{\varepsilon^2}M[f_n(x)-f(x)]^2$$

tengsizlikni hosil qilamiz va (1.2.2) munosabatdan

$$n \to \infty \; da \quad f_n(x) \xrightarrow{P} f(x)$$

Ta'riflar 1.2.1 bilan 1.2.3 dan teorema 1.2.2 ning isbotiga ega bo'lamiz.

.1.3 § Yadroviy bahoning asimptotik normalligi.

$f_n(x)$ bahoni bir xil taqsimlangan bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar yig'indisi ko'rinishiga keltiramiz:

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_{nk}$$

bu yerda $\left\{V_{nk} = \frac{1}{h(n)}K\left(\frac{x-\xi_k}{h(n)}\right), \quad 1 \le k \le n\right\}$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $V_n = \frac{1}{h(n)}K\left(\frac{x-\xi}{h(n)}\right)$ tasodifiy miqdor bilan bir xil taqsimlangan.

Teorema 1.3.1. Yadro $K(x)$, $x \in R_1$, (K_1) shartni qanoatlantirib, $\lim\limits_{n\to\infty} nh(n) = \infty$ o'rinli bo'lsa, ixtiyoriy $a \in R_1$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{f_n(x) - Mf_n(x)}{\sigma(f_n(x))} \le a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \Phi(a)$$

o'rinli bo'ladi, bu yerda $\sigma(f_n(x)) = \sqrt{Df_n(x)}$.

Isbot: Markaziy limit teoremaga ([13], 329 bet) ko'ra, teoremaning tasdig'i o'rinli bo'lishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $n \to \infty$ da

$$rnP\left(\left|\frac{V_n - MV_n}{\sigma(V_n)}\right| \ge \varepsilon\sqrt{n}\right) \to 0 \tag{1.3.1}$$

bo'lishi zarur va yetarli. Bu yerda $\sigma(V_n) = \sqrt{D(V_n)}$. Markov tengsizligidan

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \le \frac{M|\xi|^r}{\varepsilon^r} \quad , \quad r > 0$$

birorta $\delta > 0$ uchun quyidagi tengsizlik

$$nP\left(\left|\frac{V_n - MV_n}{\sqrt{DV_n}}\right| \ge \varepsilon\sqrt{n}\right) \le \frac{M|V_n - MV_n|^{2+\delta}}{\varepsilon^{2+\delta}n^{\frac{\delta}{2}}\left(\sqrt{DV_n}\right)^{2+\delta}}$$

o'rinli bo'ladi. Shuning uchun (1.3.1) ni isbotlash uchun quyidagini

$$\frac{M|V_n - MV_n|^{2+\delta}}{n^{\frac{\delta}{2}}\sigma^{2+\delta}(V_n)} \to 0 \quad n \to \infty \ da \tag{1.3.2}$$

isbotlash yetarli.

Teorema 1.1.2 dan $n \to \infty$ da

$$h^{1+\delta}(n)M|V_n|^{2+\delta} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h(n)} \left| K\left(\frac{x-y}{h}\right) \right|^{2+\delta} f(y)\,dy \to f(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} |K(y)|^{2+\delta} dy \qquad (1.3.3)$$

va

$$h(n)\sigma^2(V_n) \to f(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K^2(y)\,dy \qquad (1.3.4)$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Bu munosabatlardan $n \to \infty$ da

$$\frac{M|V_n - MV_n|^{2+\delta}}{n^{\frac{\delta}{2}} \cdot \sigma^{2+\delta}(V_n)} = \frac{h^{1+\delta}(n) \cdot M|V_n - MV_n|^{2+\delta}}{(h(n) \cdot \sigma^2(V_n))^{1+\frac{\delta}{2}}} \cdot \frac{1}{(nh(n))^{\frac{\delta}{2}}} \to 0$$

Teorema 1.3.1 isbotlandi.

Teorema 1.3.2. Yadro $K(x)$, $x \in R_1$, (K_1) shartni qanoatlantirib, $\lim\limits_{n\to\infty} nh(n) = \infty$ bo'lsa, $n \to \infty$ da $\left|P\left(\frac{f_n(x)-Mf_n(x)}{\sigma(f_n(x))} \le a\right) - \Phi(a)\right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{nh(n)}}\right)$ o'rinli bo'ladi.

Isbot: Berri - Esseen teoremasidan ([13], 301 bet) quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz: shunday o'zgarmas son $c < \infty$ mavjudki

$$\left|P\left(\frac{f_n(x) - Mf_n(x)}{\sigma(f_n(x))} \le a\right) - \Phi(a)\right| \le c\frac{M(V_n)^3}{\sqrt{n}\sigma^3(V_n)} \qquad (1.3.5)$$

hamma a va n lar uchun.

$\delta = 1$ deb olsak, (1.3.3) dan quyidagi $n \to \infty$ da

$$h^2(n)MV_n^3 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h(n)} K^3\left(\frac{x-y}{h(n)}\right) f(y)\,dy \to f(x) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K^3(y)\,dy$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu munosabat va (1.3.4) dan

$$\frac{M(V_n^3)}{\sqrt{n} \cdot \sigma^3(V_n)} = \frac{h^2 M(V_n^3)}{(h\sigma^2(V_n))^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{nh(n)}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{nh(n)}}\right) \qquad n \to \infty \;\; da$$

munosabat hosil qilamiz.

Teorema 1.3.2 isbotlandi.

1.4 §. Zichlik funksiyasining yadroviy bahosining yadro funksiyasiga misollar.

§.1.2. dagi teorema 1.2.1 dan noma'lum zichlik funksiyasi $f(x)$ ning yadroviy bahosi

$$f_n(x) = \frac{1}{nh(n)} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-\xi_i}{h(n)}\right) \tag{1.4.1}$$

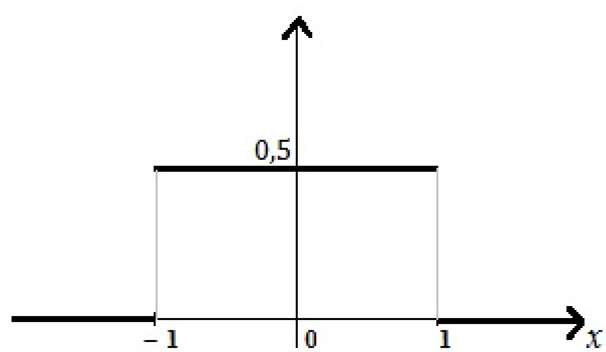
ning dispersiyasining limiti $k_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K^2(y)\,dy$ miqdorga bog'liq ekanligi ma'lum. Yadro funksiyasi $K(y)$ ni tanlash hisobiga k_2 miqdorni, va demak $D(f_n(x))$ ni kamaytirish mumkin, ya'ni $f_n(x)$ statistik bahoning effektivligini oshirish mumkin.

$f_n(x)$ baxoning yadro funksiyasi K(x) uchun bir nechta misolini ko'ramiz.

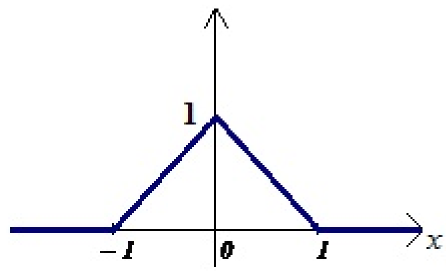
1)

$$K_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

bo'lsin. Bu holda $k_2 = \int\limits_{-1}^{1} K_1^2(y)\,dy = \frac{1}{2} = 0,5$. Uning grafigi:



2) $K_2(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ bo'lsin. Uning grafigi:

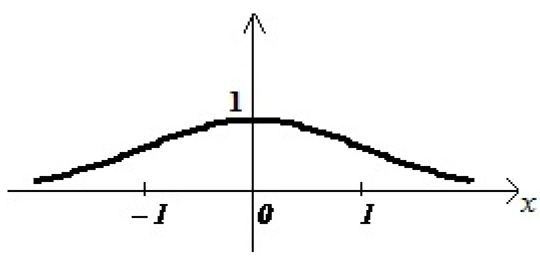


Bu holda $k_2 = \int\limits_{-1}^{1} K_2^2\left(y\right)dy = \frac{2}{3} \approx 0,7.$

3)

$$K_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

bo'lsin. Uning grafigi:



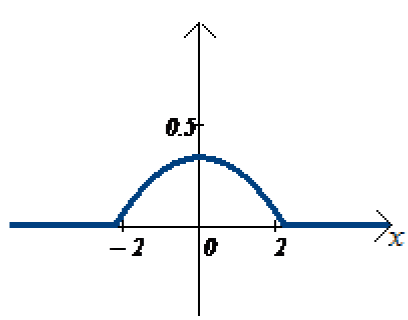
bu holda

$$k_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \approx 0.282$$

4) Optimal yadroni Eponichnikov [14] topgan:

$$K_4\left(x\right) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}}\left(1 - \frac{x^2}{5}\right), & |x| \leq \sqrt{5} \\ 0, & |x| \geq \sqrt{5} \end{cases}$$

Uning grafigi:



Bu holda $k_2 = \int\limits_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} K_4^2\left(y\right)dy = \frac{3}{4\sqrt{5}} = 0,268$. Eponichnikovning optimal yadro funksiyasi $K_4\left(x\right)$ uchun k_2 miqdor minimal qiymat qabul qiladi va uning yadro funksiyasi yordamida qurilgan (1.4.1) statistik baho (K_1) shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyalar sinfida effektiv bo'ladi

II BOB. TANLANMA HAJMI TASODIFIY BO'LGANDA ZICHLIK FUNKSIYASINI YADROVIY BAHOLASH.

2.1 §. Tasodifiy indeksli tasodifiy miqdorlar ketma - ketligining asimptotik xossalari.

Biz bu paragrafda kelgusi paragraflarda kerak bo'ladigan asimptotik natijalarni keltiramiz. $\{Y_n\}-$ tasodifiy miqdormar ketma - ketligi va $t > 0$ uchun manfiy bo'lmagan butun qiymatli N_t tasodifiy miqdor berilgan bo'lsin. Tasodifiy miqdorlar ketma - ketligi $\{Y_n, \ n \geq 1\}$ va $\{N_t, \ t > 0\}$ bog'liq bo'lmasligi yoki bog'liq bo'lishi mumkin.

Avval bog'liq bo'lmagan holni ko'ramiz.

1) Quyidagi shart bajarilsin:

(A1): $\{Y_n \quad n \geq 1\} \, va \, \{N_t, \ t > 0\}$ ketma - ketliklar bog'liq bo'lmasin, hamda $t \to \infty$ da $N_t \xrightarrow{P} \infty$ bo'lsin.

Tasodifiy miqdorlar $Y_n, \ Y_{N_t} \ va \ Y \ ning$ taqsimot funksiyalarini $F_n(x) = P\{Y_n \leq x\}$, $F_{N_t}(x) = P\{Y_{N_t} \leq x\}$ va $F(x) = P\{Y \leq x\}$ kabi belgilaymiz, $x \in R_1 = (-\infty, +\infty)$.

Ta'rif 2.1.1. Agar $F(x)$ funksiyaning uzluksiz nuqtalari $x \in R_1$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ bo'lsa, $\{Y_n, \ n \geq 1\}$ tasodifiy miqdorlar ketma - ketligi Y tasodifiy miqdorga sust intiladi deyiladi va $n \to \infty$ da $Y_n \Rightarrow Y$ kabi belgilanadi.

Teorema 2.1.1. Agar θ biror o'zgarmas son bo'lsa, quyidagi tasdiqlar o'rinli:

(a) Agar $n \to \infty$ da $EY_n \to \theta$ bo'lsa, u holda $t \to \infty$ da $EY_{N_t} \to \theta$ bo'ladi.

(b) Agar $n \to \infty$ da $Y_n \xrightarrow{P} \theta$ bo'lsa, u holda $t \to \infty$ da $Y_{N_t} \xrightarrow{P} \theta$ bo'ladi.

(c) Agar $n \to \infty$da

$$Y_n \Rightarrow Y$$

bo'lsa, u holda $t \to \infty$ da

$$Y_{N_t} \Rightarrow Y$$

bo'ladi.

Isbot: Bu teoremaning uchchala qismi bir xil usul bilan isbotlanadi. Shuning uchun ikkita, aytaylik ikkinchi va uchinchi qismlarini isbotlarini keltiramiz:

(b) qismining isboti: $n \to \infty$ da $Y_n \xrightarrow{P} \theta$ bo'lgani uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ va $n_0 = n_0(\delta)$ mavjudki, hamma $n \geq n_0$ uchun

$$P\{|Y_n - \theta| > \varepsilon\} \leq \frac{\delta}{2} \tag{2.1.1}$$

Shuningdek **(A1)** shartdan shunday $t_0 = t_0(\delta)$ mavjudki, hamma $t \geq t_0$ uchun

$$P\{N_t < n_0\} \leq \frac{\delta}{2} \tag{2.1.2}$$

Tasodifiy miqdorlar ketma - ketliklari $\{Y_n,\ n \geq 1\}$ va $\{N_t,\ t > 0\}$ bog'liqsizligidan va (2.1.1), (2.1.2) tengsizliklardan

$$P\{|Y_{N_t} - \theta| > \varepsilon\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{|Y_n - \theta| > \varepsilon\} P\{N_t = n\} =$$

$$= \sum_{n \geq n_0} P\{|Y_n - \theta| > \varepsilon\} P\{N_t = n\} + \sum_{n < n_0} P\{|Y_n - \theta| > \varepsilon\} P\{N_t = n\} \leq$$

$$\leq \frac{\delta}{2} \sum_{n \geq n_0} P\{N_t = n\} + \sum_{n < n_0} P\{N_t = n\} \leq \frac{\delta}{2} \sum_{n=1}^{\infty} P\{N_t = n\} + P\{N_t < n_0\} =$$

$$= \frac{\delta}{2} + P\{N_t < n_0\} \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

hamma $t \geq t_0$ uchun. Demak, $t \to \infty$ da $Y_{N_t} \xrightarrow{P} \theta$.

(c)qismining isboti: $n\to\infty$ da $Y_n\Rightarrow Y$ bo'lgani uchun $\forall\varepsilon>0$ uchun $\exists n_0=n_0(\varepsilon)$ topiladiki, barcha $n\geq n_0$ lar uchun

$$F(x)-\varepsilon\leqq F_n(x)\ \leqq\ F(x)+\varepsilon \tag{2.1.3}$$

(A1) o'rinli bo'lganda, $\exists t_0=t_0(\varepsilon)$ bo'lganda $\forall t\geq t_0$ uchun

$$(N_t<n_0)\leq\varepsilon vaP\left(N_t{\geqq}n_0\right)>1-\varepsilon \tag{2.1.4}$$

Tasodifiy miqdorlar $\{Y_n,n\geq 1\}$ va $\{N_t,\ t>0\}$ ning bog'liqsizligi va (2.1.3), (2.1.4) dan $t\geq t_0$ uchun

$$P\left(Y_{N_t}{\leqq}x\right)=\sum_{n\geqq n_0}P\left(Y_n\leqq x\right)P\left(N_t=n\right)+\sum_{n<n_0}P\left(Y_n{\leqq}\ x\right)P\left(N_t=n\right)\geq$$

$$\geqq\left(F(x)-\varepsilon\right)\sum_{n\geq n_0}P\left(N_t=n\right)=\left(F(x)-\varepsilon\right)P\left(N_t\geq n_0\right)\geq\ \left(F(x)-\varepsilon\right)(1-\varepsilon)$$

va $t\geq t_0$ uchun

$$P\left(Y_{N_t}{\leqq}x\right)\leqq\ \left(F(x)+\varepsilon\right)+\varepsilon$$

Demak

$$\left(F(x)-\varepsilon\right)(1-\varepsilon)\leq P\left\{Y_{N_t}\leq x\right\}\leq\left(F(x)+\varepsilon\right)+\varepsilon$$

tengsizlik ixtiyoriy ε uchun bajarilganidan $t\to\infty$ da

$$P\left\{Y_{N_t}\leq x\right\}=F_{N_t}(x)\to F(x)$$

yoki $Y_{N_t}\Rightarrow Y$ natijani olamiz.

Endi biz $\{N_t,\ t>0\}$ *va* $\{Y_n,\ n\geq 1\}$ ketma - ketlikka bog'liq bo'lgan holni ko'rib chiqamiz.

2) Quyidagi shartlar bajarilsin:

(A2): $\{N_t,\ t>0\}$ va $\{Y_n,\ n\geq 1\}$ ketma - ketliklar bog'liq bo'lib, $t\to\infty$ da $\frac{N_t}{t}\xrightarrow{P}\pi>0$ bo'lsin, bu yerda $\pi-$ chegaralangan tasodifiy miqdor.

(A3): $n\to\infty$ da $Y_n\Rightarrow Y$

(A4): Berilgan $\varepsilon>0$ va$\delta>0$ sonlar uchun shunday sonlar $t_0=t_0(\varepsilon,\delta)$ va $c_0=c_0(\varepsilon,\delta)$ mavjudki hamma $t\geq t_0$ lar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli

$$P\left\{\max_{|n-t|\ \leq\ c_0 t}|Y_n-Y_t|\geq\varepsilon\right\}\leq\ \delta$$

.

Teorema 2.1.2. Agar $\{Y_n\}$ ketma - ketlik va N_t tasodifiy miqdoq **(A2)** dan **(A4)** gacha shartlarni qanoatlantirsa, u holda $t\to\infty$ da

$$Y_{N_t}\Rightarrow Y$$

o'rinli bo'ladi.

Isbot:

Belgilaymiz $n_t=[\pi\cdot t]$, bu yerda $[a]-a$ sonining butun qismi. U holda **(A4)** shartdagi $\varepsilon>0,\ \delta>0,\ t_0\ va\ c_0$ sonlar va $t\geq\ t_0$ da

$$P\{|Y_{N_t}-Y_{n_t}|\geq\ \varepsilon\}=\ P\left\{|Y_{N_t}-Y_{n_t}|\geq\ \varepsilon,\ \left|\frac{N_t}{n_t}-1\right|>\delta\right\}+$$

$$+P\left\{|Y_{N_t}-Y_{n_t}|>\varepsilon,\ \left|\frac{N_t}{n_t}-1\right|\leq\delta\right\}\leq$$

$$\leq\ P\left\{\left|\tfrac{N_t}{n_t}-1\right|>\delta\right\}+\ P\left\{\max_{|n-t|\ \leq c_0\cdot t}|Y_n-Y_t|\geq\ \varepsilon\right\}\qquad(2.1.5)$$

(A2) shartga ko'ra (2.1.5) munosabatni o'ng tarafidagi birinchi had $t\to\infty$ da nolga intiladi. Demak, **(A4)** shartni e'tiborga olib $P\{|Y_{N_t}-Y_{n_t}|\geq\ \varepsilon\}\leq\ 2\delta$ tengsizlikni hosil qilamiz va bundan $t\to\infty$ da

$$Y_{N_t}-Y_{n_t}\xrightarrow{P}0\qquad(2.1.6)$$

natijani olamiz. Teoremaning isbotini tugallash uchun quyidagi Slutskiy teoremasidan foydalanamiz, uning isboti [15] kitobda (127-129 betlar) keltirilgan.

Slutskiy teoremasi. Tasodifiy miqdorlar $\{U_t,\ t>0\}$, $\{V_t,\ t>0\}$, U va o'zgarmas son c quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

(B): $t\to\infty$ da $U_t \Rightarrow U$ va $V_t \xrightarrow{P} c$.

U holda quyidagi o'rinli bo'ladi:

(a) $t\to\infty$ da $U_t \pm V_t \Rightarrow U+c$

(b) $t\to\infty$ da $U_t\cdot V_t \Rightarrow cU$

(c) $t\to\infty$ da $\frac{U_t}{V_t} \Rightarrow \frac{U}{c}$, agar $c\neq 0$ bo'lsa.

Quyidagi $Y_{N_t} = Y_{n_t} + (Y_{N_t} - Y_{n_t}) \equiv U_t + V_t$ munosabat, **(A3)** shart va (2.1.6), hamda Slustkiy teoremasining (a) qismidan teorema 2.1.2 ning isbotini hosil qilamiz.

Natija 2.1.1. Y tasodifiy miqdor θ qiymatga ega o'zgarmas son bo'lsa, ya'ni **(A3)** shartda $n\to\infty$ da $Y_n \xrightarrow{P} \theta$ bo'lsa, hamda **(A2)** va **(A4)** bajarilsa $t\to\infty$ da $Y_{N_t} \xrightarrow{P} \theta$ bo'ladi.

Natija 2.1.2. Faraz qilaylik $x_1, x_2, ...$ matematik kutilmasi nol va dispersiyasi bir bo'lgan bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun $Y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ va $Y_n^* = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ bo'lsin. Bu holda **(A3)** va **(A4)** shartlar bajarilib, $Y=0$ va Y^* standart normal taqsimotga ega tasodifiy miqdor ([16], 603 - bet va [17], 194 - bet) bo'ladi. Teorema 2.1.2 dan $t\to\infty$ da $Y_{N_t} \xrightarrow{P} 0$ va $Y_{N_t}^* \Rightarrow Y^*$ natijaga ega bo'lamiz.

Teorema 2.1.3. Agar quyidagi shartlar

(A5): $n\to\infty$ da 1 ehtimollik bilan $Y_n \to Y$ va

(A6): $t\to\infty$ da 1 ehtimollik bilan $\frac{N_t}{t} \to \pi > 0$

bajarilsa, u holda $t \to \infty$ da 1 ehtimollik bilan $Y_{N_t} \to Y$ bo'ladi.

Isbot. Aytaylik $\varepsilon > 0$ berilgan. Egorovning deyarli muqarrar va tekis intilishi haqidagi ([18], 269 - bet) teoremasiga ko'ra, shunday $n_0 = n_0(\varepsilon)$ butun son mavjudki , $n \geq n_0$ uchun $A = \{\omega \in \Omega : \ |Y_n - Y| < \varepsilon\}$ to'plamning to'ldiruvchisi A^c uchun $P(A^c) < \frac{\varepsilon}{2}$ o'rinli bo'ladi va A to'plamda $n \to \infty$ da tekis ravishda

$$Y_n \to Y$$

intiladi. Xuddi shunday $t_0 = t_0(\varepsilon)$ son mavjudki barcha $t \geq t_0$ uchun $B = \{\omega \in \Omega : \ N_t > n_0\}$ to'plamning to'ldiruvchisi B^c uchun $P(B^c) < \frac{\varepsilon}{2}$ o'rinli bo'ladi. Shuning uchun $A \cup B$ to'plamda

$$|Y_{N_t} - Y| < \varepsilon$$

tengsizlik va $P\left\{|Y_{N_t} - Y_t| \geq \varepsilon\right\} = P(A^c \cup B^c) < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Demak o'lchovi ε dan kam bo'lgan to'plamdan tashqarida Y_{N_t} ketma - ketlik Y ga tekis intiladi va bundan ([19], teorema B, 89 - bet) $t \to \infty$ da $Y_{N_t} \to Y$ bir ehtimol bilan kelib chiqadi. Teorema 2.1.3 isbotlandi.

2.2 §. Zichlik va taqsimot funksiyalarini tasodifiy hajmdagi tanlanmalar uchun qurilgan baholarining asimptotik siljimaganligi va asosliligi.

ξ tasodifiy miqdorning noma'lum zichlik funksiyasi $f(x)$ va noma'lum taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'lsin. $\xi_1, ..., \xi_{N_t}$ tasodifiy miqdorlar ξ tasodifiy miqdorni bog'liqsiz kuzatishlar natijasi bo'lib, N_t butun musbat qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdor tanlanmaning hajmi, $t > 0$ esa cheksizga intiluvchi notasodifiy son bo'lsin. Tabiiy ravishda biz $F(x)$ noma'lum taqsimot funksiyasini $\hat{F}_{N_t}(x)$ empirik taqsimot funksiyasi bilan baholaymiz, bu yerda

$$\hat{F}_{N_t}(x) = \frac{[\xi_i \leq x \ \ lar \ \ soni]}{N_t} = \frac{1}{N_t}\sum_{i=1}^{N_t} I(\xi_i \leq x) \qquad (2.2.1)$$

Noma'lum $f(x)$ zichlik funksiyasining bahosi uchun Parzenning quyidagi

$$\hat{f}_{N_t}(x) = \frac{1}{N_t}\sum_{j=1}^{N_t} \frac{1}{h(N_t)} K\left(\frac{x-\xi_j}{h(N_t)}\right) \qquad (2.2.2)$$

yadroviy bahosini olamiz, bu yerda $K(x)$ funksiyasi §1.1 dagi (K_1) shartni qanoatlantiradi va $n \to \infty$ da $h(n) \to 0$. Quyidagi shartni kiritamiz:

(A1): tanlanma $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ tanlanma hajmi N_t ga bo'g'liq bo'lmay $t \to \infty$ da $N_t \xrightarrow{P} \infty$ bo'lsin.

Teorema 2.2.1. (A1) shart bajarilsin.

1) Noma'lum taqsimot funksiyasi $F(x)$ uchun (2.2.1) baho siljimas baho bo'ladi, ya'ni $M\left(\hat{F}_{N_t}(x)\right) = F(x)$

2) Agar $n \to \infty$ da $h(n) \to 0$ va $t \to \infty$ da $N_t \xrightarrow{P} \infty$ bo'lib, $K(x)$ yadro (K_1) shartni qanoatlantirsa, (2.2.2) baho noma'lum zichlik funksiyasi $f(x)$ uchun $f(x)$ ning uzluksiz nuqtalarida asimptotik siljimagan baho bo'ladi, ya'ni $\lim\limits_{t\to\infty} M(f_{N_t}(x)) = f(x)$.

Isbot: 1)

$$M\left(\hat{F}_{N_t}(x)\right) = M\left(\frac{1}{N_t}\sum_{i=1}^{N_t} I(\xi_i \le x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\xi_i \le x)\right)\cdot$$

$$\cdot P(N_t = n) = F(x)\cdot\sum_{n=1}^{\infty} P(N_t = n) = F(x)$$

2) Teorema 1.1.1 dan teorema 2.1.1 ning (a) qismining sharti kelib chiqadi. Teorema 2.1.1 ning (a) qismidan teorema 2.2.1 ning ikkinchi qismini isboti kelib chiqadi.

Teorema 2.2.2 (A_1) shart bajarilsin.

1)Noma'lum taqsimot funksiyasi $F(x)$ uchun (2.2.1) baho asosli bo'ladi, ya'ni $t \to \infty$ da $\hat{F}_{N_t}(x) \xrightarrow{P} F(x)$.

2) Agar $n \to \infty$ da $nh(n) \to \infty$ va $K(x)$ yadro (K_1) shartni qanoatlantirsa, noma'lum zichlik funksiyasi $f(x)$ uchun (2.2.2) baho $f(x)$ ning uzluksizlik nuqtalarida asosli bo'ladi, ya'ni $t \to \infty$ da $f_{N_t}(x) \xrightarrow{P} f(x)$.

Isbot:

1) Katta sonlar qonunidan $\{F_n(x),\ n \ge 1\}$ ketma - ketlik uchun teorema 2.1.1 ning (b) qismini sharti kelib chiqadi va shu teorema 2.1.1 ning (b) shartini tasdig'idan teorema 2.2.2 ning birinchi tasdig'ini hosil qilamiz.

2) Teorema 1.2.2 dan $\{f_n(x),\ n \ge 1\}$ ketma - ketlik uchun teorema 2.1.1 ning (b) qismini sharti bajariladi va shu teorema 2.1.1 ning (b) qismini tasdig'idan teorema 2.2.2 ning ikkinchi tasdig'i hosil bo'ladi.

Endi quyidagi shartni kiritamiz.

(A2): tanlanma $\xi_1, ..., \xi_n$ tanlanma hajmi N_t ga bo'g'liq bo'lib, $t \to \infty$ da $\frac{1}{t}N_t \xrightarrow{P} \pi > 0$ bo'lsin, bu yerda π birorta son.

Teorema 2.2.3.

1) Agar **(A2)** shart bajarilsa, noma'lum taqsimot funksiyasi $F(x)$ uchun (2.2.1) baho asosli baho bo'ladi, ya'ni $t \to \infty$ da $F_{N_t}(x) \xrightarrow{P} F(x)$ bo'ladi.

2) Agar **(A2)** shart bajarilib, $n \to \infty$ da $nh(n) \to \infty$ va $K(x)$ yadro (K_1) shartni qanoatlantirsa, noma'lum zichlik funksiyasi $f(x)$ uchun (2.2.2) baho $f(x)$ ning uzluksiz nuqtalarida asosli bo'ladi, ya'ni $t \to \infty$ da $f_{N_t}(x) \xrightarrow{P} f(x)$bo'ladi.

Isbot:

1) Natija 2.1.1 va natija 2.1.2 larni $F_n(x) - F(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} [I(\xi_i \leq x) - MI(\xi_i \leq x)]$, $n \geq 1$ ketma - ketlik uchun qo'llab, teorema 2.2.3 ning birinchi tasdig'ini hosil qilamiz.

2) Ayirma $f_n(x) - f(x)$ ni quyidagi ko'rinishga keltiramiz: $f_n(x) - f(x) = [f_n(x) - Mf_n(x)] + [Mf_n(x) - f(x)] = = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{h(n)}K\left(\frac{x-\xi_i}{h(n)}\right) - M\left(\frac{1}{h(n)}K\left(\frac{x-\xi_i}{h(n)}\right)\right)\right] + b(f_n(x))$

Teorema 1.1.1 dan $\lim\limits_{n\to\infty} b(f_n(x)) = 0$ kelib chiqishini hisobga olib, natija 2.1.1 va natija 2.1.2 larni $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{h(n)}K\left(\frac{x-\xi_i}{h(n)}\right) - M\frac{1}{h(n)}K\left(\frac{x-\xi_i}{h(n)}\right)\right]$, $n \geq 1$ ketma - ketlikga qo'llab, teorema 2.2.3 ning ikkinchi tasdig'ini hosil qilamiz.

2.3 §. Zichlik va taqsimot funksiyalarini tasodifiy hajmdagi tanlanmalar uchun qurilgan baholarining asimptotik normalligi

Y^* orqali o'rta qiymati 0 va dispersiyasi 1 bo'lgan normal taqsimotga ega tasodifiy miqdorni belgilaymiz. $\widehat{F}_{N_t}(x)$ va $f_{N_t}(x)$ baholar (2.2.1) va (2.2.2) ko'rinishga ega bo'lsin.

Teorema 2.3.1. 1) Agar tanlanma $(\xi_1, ..., \xi_n)$ va tanlanma hajmi N_t bog'liqsiz bo'lib, $t \to \infty$ da $N_t \xrightarrow{P} \infty$ bo'lsa, yoki 2) Tanlanma $(\xi_1, ..., \xi_n)$ va tanlanma hajmi N_t bog'liq bo'lib, $t \to \infty$ da $\frac{N_t}{t} \xrightarrow{P} \pi > 0$, $\pi-$ son bo'lsa, $t \to \infty$ da

$$\frac{\sqrt{N_t}\left(\hat{F}_{N_t}(x) - F(x)\right)}{F(x)(1 - F(x))} \Rightarrow Y^*$$

Isbot: (2.2.1) ta'rifga ko'ra

$$Y_n^* = \frac{\sqrt{n}\left(\hat{F}_n(x) - F(x)\right)}{F(x)(1 - F(x))} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i(x)$$

bu yerda

$$X_i(x) = \frac{I(\xi_i \leq x) - F(x)}{F(x)(1 - F(x))}$$

, $i \geq 1$ bo'lib, $MX_i(x) = 0$ va $DX_i(x) = 1$. Markaziy limit teoremadan ([12], teorema 1, 154 - bet) $n \to \infty$ da $Y_n^* \Rightarrow Y^*$. Teorema 2.1.1 ning c qismidan teorema 2.3.1 ning birinchi qismini va natija 2.1.2 dan teorema 2.3.1 ning ikkinchi qismini hosil qilamiz.

Teorema 2.3.2 1) Agar tanlanma $(\xi_1, ..., \xi_n)$ va tanlanma hajmi N_t bog'liqsiz bo'lib, $t \to \infty$ da $N_t \xrightarrow{P} \infty$ bo'lsa, yoki **2)** Tanlanma $(\xi_1, ..., \xi_n)$ va tanlanma hajmi N_t bog'liq bo'lib, $t \to \infty$ da $\frac{N_t}{t} \xrightarrow{P} \pi > 0$, $\pi-$ son bo'lsa

$$\lim_{t \to \infty} P\left[\sqrt{N_t h(N_t)}\left(\hat{f}_{N_t}(x) - f(x)\right) \leq y\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

o'rinli bo'ladi.

Isbot: Teoremaning birinchi qismining isboti. Lemma 2.1 [10] ning (IV) qismidan va teorema 2.1.1 ning (c) qismidan kelib chiqadi.

Teoemaning ikkinchi qismining isboti A.Ren'ining [17] isbotlash usuliga o'xshash.

Bizga $0 < \varepsilon < \frac{1}{5}$ berilgan bo'lsin. U holda, $t \geqq t_0$ uchun $t_0 = t_0(\varepsilon)$ topiladiki

$$P\left\{\mid N_t - \pi t \mid < \varepsilon \pi t\right\} > 1 - \varepsilon$$

Agar $N = [\pi(1-\varepsilon)t]$ va $N_1 = [\pi(1+\varepsilon)t]$ belgilash kiritsak, bu yerda [x] - x ning butun qismi,

$$|P\left(\sqrt{N_t h(N_t)}\left(\widehat{f}_{N_t}(x) - f(x)\right) \leqq y\right) -$$

$$-\sum_{n=N}^{N_1} P\left(\sqrt{nh(n)}\left(\widehat{f}_n(x) - f(x)\right) \leqq y \ va \ \ N_t = n\right) | \leqq \varepsilon$$

o'rinli bo'ladi.

$f_n(x)$ bahoning quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} V_{nj}; \qquad V_{nj} = \frac{1}{h(n)} K\left(\frac{x - X_j}{h(n)}\right)$$

U holda

$$P\left(\sqrt{\frac{h(n)}{n}}\sum_{j=1}^{n}(V_{nj} - f(x)) \leqq y \ va \ N_t = n\right) \leqq$$

$$\leqq P\left(\sum_{j=1}^{N} V_{Nj} \leqq y\sqrt{\frac{N_1}{h(N_1)}} + \nu_1 + \nu_2 \ va \ N_t = n\right) \tag{2.3.1}$$

bu yerda, $\nu_1 = \max\limits_{N<n\leqq N_1}\left|\sum\limits_{j=N+1}^{n} V_{nj}\right| \quad va \quad \nu_2 = \max\limits_{N<n\leqq N_1}\left|\sum\limits_{j=1}^{N} V_{nj} - V_{Nj}\right|$

Shuningdek quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$P\left(\sqrt{\frac{h(n)}{n}}\sum_{j=1}^{n}(V_{nj}-f(x))\leqq y\ va\ N_t=n\right)\geqq$$

$$\geqq P\left(\sum_{j=1}^{N}V_{Nj}\leqq y\sqrt{\frac{N}{h(N)}}-\nu_1-\nu_2\ va\ N_t=n\right) \tag{2.3.2}$$

V_{nj} ning ta'rifidan quyidagi natijaga ega bo'lamiz:

$$n\to\infty\quad da\qquad h(n)\left|V_{N_1j}-V_{nj}\right|\xrightarrow{P}0$$

Shuning uchun

$$P\left(\nu_1\geqq\sqrt{\frac{N}{h(N)}}\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)=P\left(\max_{N<n\leqq N_1}^{n}\left|\sum_{j=N+1}^{n}(V_{N_1j}-f(x))\right|\geqq\sqrt{\frac{N}{h(n)}}\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)$$

Kolmogorov tengsizligidan ([12], 180 bet) quyidagini hosil qilamiz:

$$P\left(\nu_1\geqq\sqrt{\frac{N}{h(n)}}\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)\leqq\frac{(N_1-N)}{N\varepsilon^{\frac{2}{3}}}D(V_{N_1j})\leqq 5\varepsilon^{\frac{1}{3}}f(x)\int_{-\infty}^{+\infty}K^2(y)dy \tag{2.3.3}$$

agar $t\geqq\frac{1}{\pi\varepsilon}$ va yetarlicha katta bo'lsa, bu yerda katta N uchun teorema 1.2.1 dan kelib chiqadigan quyidagi munosabatdan foydalandik.

$$h(N)D(V_{N_1j})=f(x)\int_{-\infty}^{+\infty}K^2(y)dy$$

Shuningdek,

$$P\left(\nu_2\geqq\sqrt{\frac{N}{h(n)}}\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)\leqq\frac{h(N)}{N\varepsilon^{\frac{2}{3}}}\sum_{N<n\leqq N_1}D\left(\sum_{j=1}^{N}V_{nj}-V_{Nj}\right) \tag{2.3.4}$$

E.Parzenning ([4], 1069 bet) maqolasidan ma'lumki,

$$h(N)D\left\{\sum_{j=1}^{N}(V_{nj}-V_{Nj})\right\}\leqq l$$

bu yerda l n ga bog'liq emas. (2.3.4) gan biz quyidagi ifodani olamiz:

$$P\left(\nu_2 \geqq \sqrt{\frac{n}{h(n)}}\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right) \leqq \frac{(N_1-N)}{N\varepsilon^{\frac{2}{3}}} l \ \leqq \ 5\varepsilon^{\frac{1}{3}} l \text{ agar } t \geqq \frac{1}{\pi\varepsilon} \text{ bo'lsa} \tag{2.3.5}$$

Quyidagi tasodifiy hodisalarni kiritamiz.

$$A = \{ \ \omega \in \Omega : \nu_1 < \sqrt{\frac{N}{h(n)}}\varepsilon^{\frac{1}{3}} \}$$

$$B = \{ \ \omega \in \Omega : \nu_2 < \sqrt{\frac{N}{h(n)}}\varepsilon^{\frac{1}{3}} \}$$

$$C = \{ \ \omega \in \Omega : N < n \leqq N_1 \}$$

(2.3.1), (2.3.2), (2.3.3) va (2.3.5) lardan quyidagiga erishamiz:

$$P\left(\sqrt{N_t h(N_t)}(f_n(x) - f(x)) \leqq y\right) \geqq$$

$$\geqq P\left(\sqrt{\frac{N}{h(N)}} \sum_{j=1}^{N} (V_{Nj} - f(x)) \leqq y \sqrt{\frac{N_t h(N)}{N h(N_1)}} + 5\varepsilon^{\frac{1}{3}} \ \ va \ \ A \cap B \cap C\right) - \varepsilon$$

va

$$P\left(\sqrt{N_t h(N_t)}(f_n(x) - f(x)) \leqq y\right) \leqq$$

$$\leqq P\left(\sqrt{\frac{h(N)}{N}} \sum_{j=1}^{N} (V_{Nj} - f(x)) \leqq y - 5\varepsilon^{\frac{1}{3}} \ \ va \ \ A \cap B \cap C\right) + \varepsilon$$

E.Parzenning ([4], 1069-bet) maqolasidan

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\sqrt{\frac{h(N)}{N}} \sum_{j=1}^{N} (V_{Nj} - f(x)) \leqq y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

o'rinli bo'ladi.

Limit normal taqsimot uzluksiz bo'lgani uchun

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\sqrt{N_t h(N_t)}(f_{N_t}(x) - f(x)) \leqq y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

munosabatga ega bo'lamiz. Teorema 2.3.2 isbotlandi.

2.4 §. Tanlanmaning tasodifiy hajmiga misollar va tasodifiy hajmdagi tanlanma asosida zichlik funksiyasini baholashning ommaviy xizmat ko'rsatish tizimiga tatbiqi

Bu paragrafda $t \to \infty$ ga $\frac{N_t}{t} \xrightarrow{P} \pi, \quad \pi > 0$ son, shartni qanoatlantiruvchi N_t tasodifiy miqdorga va ommaviy xizmat ko'rsatish nazariysida tasodifiy hajmli tanlanmalar vujudga kelishiga misollar keltirilgan.

Teorema 2.4.1

1) N_t tasodifiy miqdor t parametrli Puasson taqsimotiga ega bo'lsa, $t \to \infty$ da $\frac{N_t}{t} \xrightarrow{P} 1$ o'rinli bo'ladi.

2) N_t tasodifiy miqdor (t,p,q) parametrli Bernulli taqsimotiga ega bo'lsa $t \to \infty$ da $\frac{N_t}{t} \xrightarrow{P} p$ o'rinli bo'ladi, bu yerda t tajribalar soni va p+q=1.

3) $N_t = max(k : \sum\limits_{i=1}^{k} \tau_i \le t)$ tiklanishlar soni bo'lsa, $t \to \infty$ da $\frac{N_t}{t} \xrightarrow{P} \frac{1}{a}$ o'rinli bo'ladi, bu yerda $\tau_i, \ \ i \ge 1$ manfiy bo'lmagan, bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma - ketligi bo'lib,$0 < a = M(\tau_1) < \infty$.

Isbot: 1) Ma'lumki $P\{N_t = k\} = \frac{t^k}{k!} e^{-t}, \ \ k \ge 0$ va $M(N_t) = t$, $D(N_t) = t$. Chebishev tengsizligidan foydalanib, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun quyidagi tengsizliklarga ega bo'lamiz:

$$P\left\{\left|\frac{N_t}{t} - 1\right| > \varepsilon\right\} = P\left\{|N_t - t| > \varepsilon t\right\} =$$

$$= P\left\{|N_t - MN_t| > \varepsilon t\right\} \le \frac{D(N_t)}{\varepsilon^2 t^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 t}$$

Demak $\lim\limits_{t\to\infty} P\left\{\left|\frac{N_t}{t} - 1\right| > \varepsilon\right\} = 0$.

2)Ma'lumki $P\{N_t = k\} = C_t^k p^k q^{t-k}, \ 0 \le k \le t$ va $M(N_t) = tp$, $D(N_t) = tpq$. Chebishev tengsizligidan foydalanib, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun quyidagi tengsizliklarga ega bo'lamiz:

$$P\left\{\left|\frac{N_t}{t} - p\right| > \varepsilon\right\} = P\left\{|N_t - tp| > \varepsilon t\right\} =$$

$$= P\left\{|N_t - M(N_t)| > \varepsilon t\right\} \le \frac{D(N_t)}{\varepsilon^2 t^2} = \frac{pq}{\varepsilon^2 t}$$

Demak $\lim\limits_{t\to\infty} P\left\{\left|\frac{N_t}{t} - p\right| > \varepsilon\right\} = 0.$

3) Tiklanish funksiyasi $H(t) = M(N_t)$ uchun elementar tiklanish teoremasidan ([20], 129 bet) $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{a}$ ekanligi ma'lum. Chebishev tengsizligidan $\forall\varepsilon > 0$ son uchun quyidagi tengsizlikga ega bo'lamiz:

$$P\left\{\left(\frac{N_t}{t} - \frac{1}{a}\right) > \varepsilon\right\} \le \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{H(t)}{t} - \frac{1}{a}\right), \quad agar \frac{N_t}{t} - \frac{1}{a} \ge 0 \ \ bo'lsa$$

$$P\left\{\left(\frac{1}{a} - \frac{N_t}{t}\right) > \varepsilon\right\} \le \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{H(t)}{t}\right), \quad agar \frac{N_t}{t} - \frac{1}{a} < 0 \ \ bo'lsa$$

Demak, $\lim\limits_{t\to\infty} P\left\{\left|\frac{N_t}{t} - \frac{1}{a}\right| > \varepsilon\right\} = 0$

Endi bitta xizmat ko'rsatish qurilmasidan iborat va talablarning xizmat ko'rsatishni kutish navbati chegaralanmagan ommaviy xizmat ko'rsatish tizimini o'rganamiz. $(G/G/1/\infty)$

Faraz qilamiz τ_i, ya'ni $0 < \tau_1 < \tau_2 < ...$ $\;i-$ talabning kelib tushish vaqti bo'lsin. $X_i = \tau_i - \tau_{i-1},\ i \ge 2$ bog'liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma ketligi bo'lib, zichlik funksiyasini f(x) deb belgilaymiz. Y_i deb i-talabga xizmat ko'rsatish vaqtini belgilaymiz.

Faraz qilamiz $Y_i,\ \ i \ge 1$ bog'liqsiz, bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma - ketligi bo'lib, zichlik funksiyasi g(x) bo'lsin.

Noma'lum f(x) va g(x) funksiyalari uchun $(0, t]$ vaqt intervali davomida ommaviy xizmat ko'rsatish tizimining faoliyatini kuzatib, mos baholarni ko'rsatamiz. $\{X_i\}$ va $\{Y_i\}$ ketma-ketliklarni (0,t] vaqt davomida kuzatishlarimiz natijasini mos raishda $X_1, ..., X_{n_t}$ va $Y_1, ..., Y_{m_t}$ deb belgilaymiz, bu yerda $n_t = max\left(k : \sum\limits_{i=1}^{k} X_i \le t\right)$ $\;va\;$ $m_t = max\left(k : \sum\limits_{i=1}^{k} Y_i \le t\right)$ lar mos ravishda (0,t] vaqt oralig'ida kelib tushgan talablar soni va xizmat ko'rsatishlar soni bo'lsin.

Teorema 2.4.1 ning 3) qismidan $t \to \infty$ da $\frac{n_t}{t} \xrightarrow{P} \frac{1}{\mu}$ va $\frac{m_t}{t} \xrightarrow{P} \frac{1}{\nu}$ natijalarga ega bo'lamiz, bu yerda $\mu \;\; va \;\; \nu$ mos ravishda $X_1 \;\; va \;\; Y_1$ tasodifiy miqdorlarning o'rta qiymatlaridir.

Noma'lum f(x) va g(x) funksiyalar uchun baho sifatida

$$\widehat{f}_{n_t}(x) = \frac{1}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \frac{1}{h(n_t)} K\left(\frac{x - X_j}{h(n_t)}\right) \qquad (2.4.1)$$

$$\widehat{g}_{m_t}(x) = \frac{1}{m_t} \sum_{j=1}^{m_t} \frac{1}{h(m_t)} K\left(\frac{x - X_j}{h(m_t)}\right) \qquad (2.4.1)$$

statistikalarni olamiz.

2.2§ va 2.3§. lardagi teoremalardan (2.4.1) va (2.4.2) statistik baholarning asimptotik siljimasligi, asosliligi va asimptotik normalligi kelib chiqadi.

Xulosa

Matematik statistikaning asosiy qismlaridan biri statistik baholash nazariyasi bo'lib, u o'z navbatida parametrik va noparametrik baholash nazariyalariga bo'linadi. Tasodifiy miqdorning noma'lum zichlik funksiyasini statistik baholash va uning xossalarini o'rganish noparametrik baholash nazariyasining salmoqli qismi bo'lib, u o'tgan asrning o'rtalaridan boshlangan bo'lsa ham hozirgacha o'z aktualligini yo'qotmagan. Mazkur bitiruv malakaviy ishi bu masalaning yangi qirralari - tasodifiy hajmdagi tanlanma asosida noma'lum zichlik funksiyasini baholash va uning natijalarini ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi masalalariga tatbiq qilishga bag'ishlangan.

Bitiruv malakaviy ishi ikkita bobdan iborat va har bir bob to'rttadan paragrafdan iborat bo'lib quyidagi natijalarga erishilgan: Notasodifiy hajmdagi tanlanma asosida qurilgan Parzen - Rozenblattning yadroviy bahosining asimptotik siljimas, asosli va asimptotik normal bo'lish shartlari ko'rsatilgan; Parzen - Rozenblatt yadroviy bahosining yadro funksiyasiga misollar keltirib, bahoning dispersiyasini minimallashtiruvchi Eponichnikov optimal yadro funksiyasi ko'rsatilgan; tanlanma hajmi tasodifiy bo'lib, u tanlanmaga bog'liq bo'lmaganda Parzen - Rozenblatt yadroviy bahosini va empirik taqsimot funksiyasini siljimasligi, asoslilifi va asimptotik normalligi ko'rsatilgan; tanlanma hajmi tasodifiy bo'lib, u tanlanmaga bog'liq bo'lganda Parzen - Rozenblattning yadroviy bahosini va empirik taqsimot funksiyasini asosliligi va asimptotik normalligi ko'rsatilgan; tanlanmaning tasodifiy hajmiga misollar keltirilib, tasodifiy hajmdagi tanlanma asosida zichlik funksiyasini baholashni ommaviy xizmat ko'rsatish tizimiga tatbiq qilingan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Гливенко В.И. Курс теории вероятностей. - Москва, 1939.

2. Смирнов Н.В. О приближении плотности распределения случайной величины. Ученые записки МГПИ им. В.П.Потемкина, 1951, XVI, 3, 69-96.

3. Rozenblatt M. Remarks on same non - parametric estimate of a density function. Ann. Math.Stat., 1956, 27, 832-837.

4. Parzen E. On estimation of a probability density function and mode. Ann. Math.Stat., 1962, 33, 3, 1065 - 1076.

5. Надарая Э.А. Непараметрическое оценивание плотности вероятностей и кривой регрессии. - Тбилиси , 1983.

6. В.Г.Алексеев. Об оценках производных плотности вероятности. Вычислительная и прикладная мамематика., 1981, вып 43, 139-147.

7. Конаков В.Д. Полные асимптотические разложения для максимума уклонения эмпирической функции плотности. Теория вероятностей и ее применения., 1978, 23, 495-508.

8. Watson G., Leadbetter M. On the estimation of the probability density, Ann. Math. Stat. 1963, 34, 480-491.

9. Сильвестров Д.С., Мирзахмедов М.А., Турсунов Г.Т. О применениях предельных теорем для сложных случайных функций к некоторым задачом статистики. Теория вероятностей и математическая статистика, - 1976, вып. 14, 124-137.

10. Srivastava R.C. Estimation of Probability density Funktion based on random number of observations with applications. Int. statist. Rev., 1973, v 4, N 1, 77-86.

11. Samante M., Mugisha R.X. On a class of estimates of the probability density function and mode based on a random number of observations. 1981, Calcutta stat. assoc. bulletin, 30, N 117-118, 23-40.

12. Abdushukurov A., Zuparov T. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, 2015, Tafakkur Bo'stoni.

13. Лоэв М. Теория вероятностей. - Москва, 1962.

14. Епаничников В.А. Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности. Теория вероятностей и ее применения, 1969, том 16, N 1, 156-161.

15. Sen P.K., Singer J.M. Large sample methods in statistics: An introduction with Applications, New York, Chapmann - Hall, 1993.

16. Anscombe F.J. Large sample theory of sequential estimation, 1952, Proc. Camb. Philos. Soc., v 48, 600-607.

17. Renyi A. On the asymptotic distribution of the sum of a random number of independent random variables, 1957, Acta. Math. Acad. Sci. Hung. V 8, 193-199.

18. А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, Москва, Наука, 1972. 19.

19. Халмош П. Теория меры, Москва, Мир, 1953

20. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. "Введение в теорию массового обслуживания"Москва, Наука, 1987.