

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.4

МЕТОДЫ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ
В МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ
ГИДРОАЭРОУПРУГОСТИ

© 2018 г. Т. Е. Бадокина, А. Б. Бегматов,
П. А. Вельмисов, Б. В. Логинов

При применении методов теории бифуркаций к нелинейным граничным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) четвёртого и более высоких порядков возникают технические трудности, связанные с исследованием спектра прямой и сопряжённой линеаризованных задач, построением функций Грина (т.е. с доказательством фредгольмовости спектральных задач и с определением многообразий точек бифуркации). Для их преодоления предложены методы отделения корней соответствующих характеристических уравнений с последующим представлением через них бифуркационных многообразий, что позволяет исследовать нелинейные задачи в точной постановке. Такой подход рассматривается на примере двухточечной краевой задачи для ОДУ четвёртого порядка, описывающего статический изгиб участка трубопровода в виде гибкого упругого полого стержня с протекающей внутри него жидкостью, сжимаемого или растягиваемого внешними краевыми усилиями при свободной скользящей заделке левого и жёсткой заделке правого торцов.

DOI: 10.1134/S0374064118020012

1. Постановка задачи. В прикладных задачах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями четвёртого и более высокого порядка, зачастую имеет место сложная зависимость уравнений от нескольких бифуркационных и физических небифуркационных параметров, что значительно усложняет процесс определения критических значений параметров, особенно в многопараметрических бифуркационных задачах, тем самым препятствуя их точному исследованию. Это явление возникает, в частности, в точной постановке граничных задач для нелинейных дифференциальных уравнений гидроаэроупругости, описываемых ОДУ четвёртого порядка с двумя бифуркационными (спектральными) параметрами и моделирующих дивергенцию (изгибные формы) удлинённой пластины в сверхзвуковом потоке газа [1, с. 831; 2, с. 216], а также участка трубопровода в виде гибкого полого стержня кругового сечения, внутри которого протекает жидкость [3, 4]. Зависимость дифференциального уравнения от бифуркационных параметров выражается через корни соответствующего характеристического уравнения линеаризованной задачи, которые можно считать известными точно. Такое представление позволяет найти в пространстве спектральных параметров критические бифуркационные кривые и поверхности, в окрестности точек которых строится асимптотика разветвляющихся решений в виде сходящихся рядов по малым параметрам.

Ранее в работах разных авторов при исследовании указанных задач гидроаэроупругости, как правило, применялся метод Галёркина [5, с. 43], при этом учитывался лишь один бифуркационный параметр. Только в последних работах В.В. Болотина и соавторов задачи аэроупругости стали рассматриваться как бифуркационные (см., например, [6]). Метод групповых преобразований, позволяющий сводить однопараметрическую граничную задачу для ОДУ четвёртого порядка к задаче Коши, применялся в работах [7; 8, с. 39] при решении задачи о дивергенции пластины-полосы в сверхзвуковом потоке газа.

Задача о дивергенции удлинённой пластины в сверхзвуковом потоке газа методами теории бифуркаций и катастроф [9] исследовалась в работе [10]. В настоящей работе рассматривается плоская задача об изгибных формах участка трубопровода, описываемая нелинейным ОДУ с

двумя бифуркационными (спектральными) параметрами $T = T_0 + \varepsilon_1$ и $mu^2 = mu_0^2 + \varepsilon_2$ (T_0, mu_0^2 – соответствующие критические значения):

$$EJ \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + (T + mu^2)K + kw - \theta w'' \int_0^l [(1 - w'^2)^{-1} - 1] dx = 0, \quad (1)$$

где $K = w''(1 + w'^2)^{-3/2}$ – кривизна, $w = w(x)$ – прогиб, $0 \leq x \leq l$, l – длина участка трубопровода, $J = \pi(R_{\text{out}}^4 - R_{\text{in}}^4)/4$ – момент инерции, R_{out} и R_{in} – внешний и внутренний радиусы кругового поперечного сечения, $EJ = \chi^2$ – изгибная жёсткость трубы, $T > 0$ ($T < 0$) – сжимающее (растягивающее) усилие, m – удельная масса жидкости, u – скорость её течения, E – модуль Юнга материала трубы, k – коэффициент жёсткости основания, интегральное слагаемое учитывает нелинейное воздействие продольного усилия.

Замечание 1. Случай присутствия малой нагрузки $\varepsilon_0 q(x)$ исследуется подобно [10] методами теории катастроф [9].

Замены $\bar{x} = x/l$, $\bar{w} = w/l$ ($0 \leq \bar{x} \leq 1$) позволяют записать задачу (1) в безразмерных переменных в виде

$$\frac{\chi^2}{l^2} \left(\frac{w''}{(1 + w'^2)^{3/2}} \right)'' + (T + mu^2) \frac{w''}{(1 + w'^2)^{3/2}} + kl^2 w - \theta l w'' \int_0^1 [(1 - w'^2)^{-1} - 1] dx = 0.$$

Общий подход к вычислению малых изгибных форм участка трубопровода рассматривается на примере граничных условий

$$w'(0) = w^{(3)}(0) = 0, \quad w(1) = w'(1) = 0. \quad (2)$$

2. Вычисление разветвляющихся решений. Линеаризованной двухточечной граничной задаче на собственные значения

$$\chi^2 l^{-2} w^{(4)} + (T + mu^2) w'' + kl^2 w = 0$$

с граничными условиями (2) отвечает характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0, \quad (3)$$

где $a = (T + mu^2)\chi^{-2}l^2$, $b = k\chi^{-2}l^4 > 0$.

Соответствующая сопряжённая линеаризованная задача имеет вид

$$\chi^2 l^{-2} \omega^{(4)} + (T + mu^2) \omega'' + kl^2 \omega = 0$$

с граничными условиями

$$\omega'(0) = 0, \quad \chi^2 l^{-2} \omega^{(3)}(0) + (T + mu^2) \omega'(0) = 0, \quad \omega(1) = 0, \quad \omega'(1) = 0.$$

Для исследования алгебраическое уравнение (3) удобно привести к виду

$$\left(\lambda^2 + \frac{a}{2} \right)^2 + b - \frac{a^2}{4} = 0,$$

или, равносильно, к виду

$$\left(\lambda^2 + \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \right) \left(\lambda^2 + \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \right) = 0.$$

Пусть $b - a^2/4 < 0$ и $a < 0$, тогда $a < -2\sqrt{b}$, а значит, $T < -mu^2 - 2\sqrt{b}\chi^2l^{-2} < 0$, т.е. имеет место растяжение участка трубы. В этом случае при $-a/2 - \sqrt{a^2/4 - b} \geq 0$ уравнение (3) имеет вещественные корни $\lambda_{1,2} = \pm\alpha_1$ и $\lambda_{3,4} = \pm\alpha_2$, где $\alpha_1 = (-a/2 + \sqrt{a^2/4 - b})^{1/2}$, $\alpha_2 = (-a/2 - \sqrt{a^2/4 - b})^{1/2}$, причём $\sqrt{-a/2} < \alpha_1 < \sqrt{-a}$, $0 < \alpha_2 < \sqrt{-a/2}$.

Пусть $b - a^2/4 < 0$ и $a > 0$, тогда $-a/2 + \sqrt{a^2/4 - b} < 0$, следовательно, корни имеют вид $\lambda_{1,2} = \pm\delta_1i$ и $\lambda_{3,4} = \pm\delta_2i$, где $\delta_1 = (a/2 + \sqrt{b - a^2/4})^{1/2}$, $\delta_2 = (a/2 - \sqrt{b - a^2/4})^{1/2}$, причём $\delta_1 > \sqrt{a/2}$, $\delta_2 < \sqrt{a/2}$. Растяжение или сжатие трубы определяется знаками величин T и $2\sqrt{b}\chi^2l^{-2} - mu^2$.

Для $b - \frac{a^2}{4} > 0$, т.е. $|a| < 2\sqrt{b}$, сжатие/растяжение также определяется знаками величин T и $2\sqrt{b}\chi^2l^{-2} - mu^2$. Применение формулы Эйлера позволяет найти корни $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \delta i$, $\lambda_{3,4} = \gamma \pm \delta i$, где $\gamma = 2^{-1}\sqrt{2\sqrt{b} - a}$, $\delta = 2^{-1}\sqrt{2\sqrt{b} + a}$, причём $\gamma \in (\sqrt[4]{b}/\sqrt{2}, \sqrt[4]{b})$, $\delta \in (0, \sqrt[4]{b}/\sqrt{2})$.

При $a^2 = 4b$ уравнение (3) имеет вид $(\lambda^2 + a/2)^2 = 0$, т.е. $\lambda^2 = -a/2$. При $a < 0$ корнями являются $\lambda_{1,2} = \pm\gamma$ кратности 2 ($\gamma = \sqrt{-a/2}$) и имеет место растяжение участка трубы. При $a > 0$ уравнение (3) имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm\delta i$ кратности 2 ($\delta = \sqrt{a/2}$), сжатие/растяжение участка трубы определяется знаком величины $2\sqrt{b}\chi^2l^{-2} - mu^2$.

Таким образом, уравнение (3) имеет корни следующих видов:

- А) $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2$ ($\alpha_1 > \alpha_2 > 0$);
- В) $-\gamma \pm \delta i, \gamma \pm \delta i$ ($\gamma, \delta > 0$);
- С) $\pm\delta_1i, \pm\delta_2i$ ($\delta_1 > \delta_2 > 0$);
- А-В) $-\gamma$ кратности 2, γ кратности 2 ($\gamma > 0$);
- В-С) $\pm\delta i$ кратности 2 ($\delta > 0$).

Случай А-В) получается из случаев А) и В) при $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ и $\delta > 0$ соответственно, а случай В-С) – из случаев В) и С) при $\gamma \rightarrow 0$ и $\delta_1 \rightarrow \delta_2$ соответственно.

Асимптотика разложений по малым параметрам $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ разветвляющихся решений в точке бифуркации (T_0, mu_0^2) вычисляется в случае существования бифуркационных многообразий, которые определяются равенством нулю определителя матрицы граничных условий.

Линеаризованная в точке бифуркации задача (1), (2) определяет фредгольмов оператор $B : C^{4+\alpha}[0, 1] \rightarrow C^\alpha[0, 1]$ с одномерным подпространством нулей $N(B) = \text{span}\{\varphi(x)\}$ и дефектным подпространством $N^*(B) = \text{span}\{\psi(x)\}$. Фредгольмовость линеаризованной спектральной задачи, как и в работе [11], доказывается построением соответствующей функции Грина по схеме монографии [12], которое также выполняется с помощью выражения бифуркационных параметров через корни характеристического уравнения.

Аналогично [11], применяя регуляризатор Шмидта [9, с. 340] к уравнению (1) в разложении аналитической нелинейности

$$Bw = \chi^2l^{-2}w^{(4)} + (T + mu^2)w'' + kl^2w = \chi^2l^{-2}(1.5w'^2w^{(4)} + 3w''^3 + 9w'w''w''') - \varepsilon_1w'' - \varepsilon_2w'' + \theta lw'' \int_0^1 w'^2 dx + \dots \equiv R(w, \varepsilon),$$

запишем его в виде системы $\tilde{B}w = R(w, \varepsilon) + \xi z$, $\xi - \langle w, \gamma \rangle = 0$. Здесь и далее $\langle a, b \rangle = \int_0^1 a(x)b(x) dx$, а $\tilde{B} = B + \langle \cdot, \gamma \rangle z$, где γ и z – биортгональные системы к функциям $\varphi \in N(B)$ и $\psi \in N^*(B)$ соответственно. Оператор $\tilde{B}^{-1} = \Gamma$, обратный к оператору \tilde{B} , существует согласно лемме Шмидта [9, с. 339], при этом $\Gamma z = \varphi$, $\Gamma^* \gamma = \psi$. Разыскивая решение первого уравнения системы в виде ряда

$$w = w_{100}\xi + w_{010}\varepsilon_1 + w_{001}\varepsilon_2 + \sum_{k+|\alpha|>1} w_{k;\alpha}\xi^k\varepsilon^\alpha$$

и подставляя результат во второе её уравнение, получаем разложение по ξ и ε уравнения разветвления (УР) Шмидта $L(\xi, \varepsilon) = \xi - \langle w(\xi, \varepsilon), \gamma \rangle = 0$.

Определяемая методом диаграммы Ньютона [9, с. 34] главная часть УР имеет вид

$$L(\xi, \varepsilon) = L_{300}\xi^3 + L_{110}\xi\varepsilon_1 + L_{101}\xi\varepsilon_2 + \dots = 0,$$

где $L_{300} = \chi^2 l^{-2} \langle 1.5\varphi'^2\varphi^{(4)} + 3\varphi''^3 + 9\varphi'\varphi''\varphi^{(3)}, \psi \rangle$, $L_{110} = -\langle \varphi'', \psi \rangle$, $L_{101} = -\langle \varphi'', \psi \rangle$.

Решение задачи представляется рядом, сходящимся в малой окрестности $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$:

$$w(x) = \pm \sqrt{\frac{L_{110}\varepsilon_1 + L_{101}\varepsilon_2}{L_{300}}} \varphi(x) + o(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|), \quad \text{sign}(L_{110}\varepsilon_1 + L_{101}\varepsilon_2) = \text{sign } L_{300}.$$

Следовательно, при $L_{300} \neq 0$ в точках, где определитель Δ матрицы граничных условий обращается в нуль, имеет место бифуркация типа “вилка”.

3. Исследование спектральной задачи.

А. Характеристическое уравнение имеет четыре различных действительных корня.

Теорема 1. Если корни характеристического уравнения (3) имеют вид А), то при граничных условиях (2) прогиб трубопровода отсутствует.

Определитель Δ матрицы граничных условий на множестве $\Omega = \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 > \alpha_2 > 0\}$ удовлетворяет неравенству

$$\Delta = -2\alpha_1\alpha_2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)((\alpha_1 - \alpha_2) \text{sh}(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_2) \text{sh}(\alpha_1 - \alpha_2)) < 0.$$

Действительно,

$$\frac{\Delta}{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)} = (\alpha_1 - \alpha_2)(e^{-(\alpha_1+\alpha_2)} - e^{\alpha_1+\alpha_2}) + (\alpha_1 + \alpha_2)(e^{-(\alpha_1-\alpha_2)} - e^{\alpha_1-\alpha_2}).$$

Так как $e^{-(\alpha_1+\alpha_2)} < e^{\alpha_1+\alpha_2}$, $e^{-(\alpha_1-\alpha_2)} < e^{\alpha_1-\alpha_2}$ и $\alpha_1 > \alpha_2$, то $\Delta < 0$ и, значит, прогиб трубопровода отсутствует (см. рис. 1).

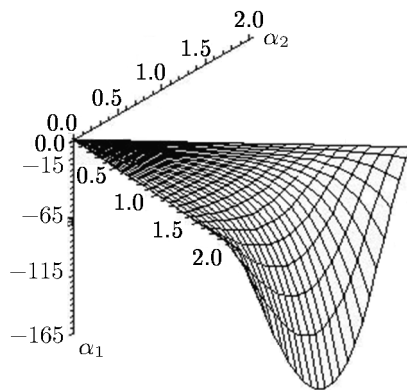


Рис. 1. Рельеф определителя Δ при корнях вида А).

В. Корнями характеристического уравнения являются две пары комплексно-сопряжённых чисел.

Теорема 2. Если корни характеристического уравнения (3) имеют вид В), то при граничных условиях (2) прогиб трубопровода отсутствует.

Для определителя Δ матрицы граничных условий справедливо равенство $\Delta = 2\delta\gamma(\gamma^2 + \delta^2)(-2\delta \text{sh}(2\gamma) - 2\gamma \sin(2\delta))$. Действительно, при фиксированном γ_0 рассмотрим функцию

$$\tilde{\Delta}(\delta) = \frac{1}{2\delta\gamma_0(\gamma_0^2 + \delta^2)} \Delta = -2\delta \text{sh}(2\gamma_0) - 2\gamma_0 \sin(2\delta),$$

тогда

$$\frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial \delta} \Big|_{\gamma=\gamma_0} = -(2 \operatorname{sh}(2\gamma_0) + 4\gamma_0 \cos(2\delta)) = -4\gamma_0 \left(\frac{2 \operatorname{sh}(2\gamma_0)}{4\gamma_0} + \cos(2\delta) \right).$$

Так как

$$\frac{2 \operatorname{sh}(2\gamma_0)}{4\gamma_0} = \frac{1}{2\gamma_0} \left(2\gamma_0 + \frac{(2\gamma_0)^3}{3!} + \frac{(2\gamma_0)^5}{5!} + \dots \right) > 1$$

и $|\cos(2\delta)| \leq 1$, то

$$\left(\frac{2 \operatorname{sh}(2\gamma_0)}{4\gamma_0} + \cos(2\delta) \right) > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial \delta} < 0,$$

и $\tilde{\Delta}(\delta)$ – убывающая функция при любом $\gamma_0 > 0$. С учётом того, что $\tilde{\Delta}|_{\delta=0} = 0$, имеем $\tilde{\Delta} < 0$ при любом $\gamma > 0$, $\delta > 0$, и, следовательно, прогиб трубопровода отсутствует.

С. Если корни характеристического уравнения имеют вид C), то для определителя Δ матрицы граничных условий справедливо равенство $\Delta = \Delta(\delta_1, \delta_2) = -\delta_1 \delta_2 (\delta_1^2 - \delta_2^2) (\delta_1 \sin \delta_1 \cos \delta_2 - \delta_2 \cos \delta_1 \sin \delta_2)$.

Существуют такие значения δ_1^i, δ_2^i , $i = 1, 2$, при которых $\Delta(\delta_1^1, \delta_2^1) \Delta(\delta_1^2, \delta_2^2) < 0$ (например, $\delta_1^1 = 3.226$, $\delta_2^1 = 0.5$, $\delta_1^2 = 3.2261$, $\delta_2^2 = 0.5$), таким образом, имеет место прогиб трубопровода (см. рис. 2).

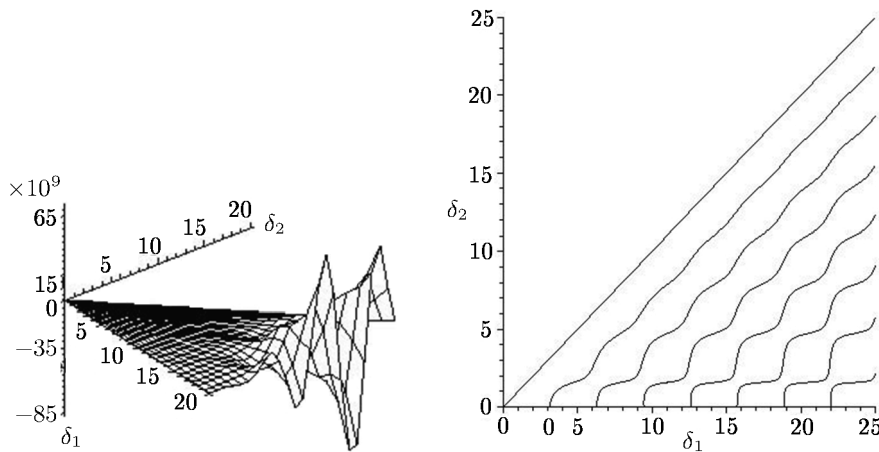


Рис. 2. Определитель Δ при корнях вида С).

Ранг матрицы граничных условий равен трём, следовательно, подпространства нулей прямой и сопряжённых задач $N(B)$ и $N^*(B)$ одномерны с базисными элементами $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Отличные от нуля в точках критических многообразий миноры третьего порядка матриц граничных условий прямой и сопряжённой задач равны между собой и задаются равенством $\Delta_{(3)} = \Delta_{(3)}^* = -\delta_1 \delta_2 (\delta_1^2 - \delta_2^2) \cos \delta_2$, тогда

$$\varphi(x) = \psi(x) = \frac{1}{\cos \delta_2} (\cos(\delta_1 x) \cos \delta_2 - \cos \delta_1 \cos(\delta_2 x))$$

и коэффициенты уравнения разветвления, вычисленные с помощью системы компьютерной алгебры Maple 12, имеют вид

$$L_{101} = L_{110} = \frac{1}{2(\delta_1^2 - \delta_2^2) \cos^2 \delta_2} [\delta_1 (\delta_1^3 - \delta_1 \delta_2^2 - (\delta_1^2 + 3\delta_2^2) \sin \delta_1 \cos \delta_1) \cos^2 \delta_2 + \delta_2 (3\delta_1^2 + \delta_2^2) \cos^2 \delta_1 \sin \delta_2 \cos \delta_2 + \delta_2^2 (\delta_1^2 - \delta_2^2) \cos^2 \delta_1],$$

$$L_{300} = -\frac{27}{16\chi^2 l^2 (\delta_1^2 - \delta_2^2) (9\delta_1^4 - 82\delta_1^2 \delta_2^2 + 9\delta_2^4) \cos^4 \delta_2} \left[\delta_1 \left(2 \sin \delta_1 \left(\frac{28}{3} \delta_2^{10} + \frac{377}{3} \delta_1^4 \delta_2^6 - \frac{862}{9} \delta_1^2 \delta_2^8 - \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{433}{9}\delta_1^6\delta_2^4 + 3\delta_1^{10} - \frac{203}{9}\delta_1^8\delta_2^2) \cos^3 \delta_1 + \delta_1^2(\delta_1^2 - 9\delta_2^2) \left(\frac{8}{9}\delta_2^6 - \frac{71}{9}\delta_2^4\delta_1^2 + \frac{62}{9}\delta_2^2\delta_1^4 - 7\delta_1^6 \right) \times \\
& \times \sin \delta_1 \cos \delta_1 + \delta_1^{11} + \frac{91}{9}\delta_2^4\delta_1^7 - \frac{91}{9}\delta_1^9\delta_2^2 - \delta_1^5\delta_2^6) \cos^4 \delta_2 + \frac{56}{3} \left(\left(\frac{29}{12}\delta_1^2\delta_2^8 - \frac{9}{28}\delta_2^{10} + \frac{431}{42}\delta_1^8\delta_2^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{433}{84}\delta_1^4\delta_2^6 - \frac{377}{28}\delta_1^6\delta_2^4 - \delta_1^{10} \right) \cos^2 \delta_1 + \frac{33}{28}\delta_1^{10} + \frac{197}{12}\delta_1^6\delta_2^4 + \frac{15}{14}\delta_1^2\delta_2^8 - \frac{1033}{84}\delta_1^8\delta_2^2 - \frac{919}{84}\delta_1^4\delta_2^6 \right) \times \\
& \times \delta_2 \sin \delta_2 \cos^2 \delta_1 \cos^3 \delta_2 + 2 \left(-\frac{2}{9} \left(\delta_1^6 - \frac{101}{2}\delta_2^2\delta_1^4 + 71\delta_2^4\delta_1^2 - \frac{99}{2}\delta_2^6 \right) \sin \delta_1 \cos \delta_1 + \right. \\
& \left. + \delta_1^7 - 9\delta_1^5\delta_2^2 - \delta_2^4\delta_1^3 + 9\delta_2^6\delta_1 \right) \delta_1\delta_2^2(9\delta_1^2 - \delta_2^2) \cos^2 \delta_1 \cos^2 \delta_2 + \frac{8}{9}\delta_2^3(9\delta_1^2 - \delta_2^2) \left(-\frac{63}{8}\delta_2^6 + \frac{31}{4}\delta_2^4\delta_1^2 - \right. \\
& \left. - \frac{71}{8}\delta_2^2\delta_1^4 + \delta_1^6 \right) \sin \delta_2 \cos^4 \delta_1 \cos \delta_2 + \delta_2^6(\delta_1^2 - \delta_2^2) \left(\delta_1^4 - \frac{82}{9}\delta_1^2\delta_2^2 + \delta_2^4 \right) \cos^4 \delta_1 \Big].
\end{aligned}$$

А–В. В вырожденном случае, когда корни характеристического уравнения имеют вид А–В), определитель матрицы граничных условий приводится к виду $\Delta = -8\gamma^3(\text{sh}(2\gamma) + 2\gamma)$. Этот определитель, очевидно, отрицателен при любых $\gamma > 0$ и, следовательно, прогиб трубопровода отсутствует.

Замечание 2. Контроль правильности вычислений выполнен с помощью предельного перехода в соответствующих функциях для случая А) при $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ и для случая В) при $\delta \rightarrow 0$.

В–С. Характеристическое уравнение имеет два чисто мнимых корня $\pm \delta i$ кратности 2 ($\delta > 0$). Отсутствие точек бифуркации следует из того, что при $\delta > 0$ определитель $\Delta = -2\delta^3(\cos \delta \sin \delta + \delta) < 0$.

4. Построение функции Грина в случае С). Фредгольмовость линеаризации доказана построением функции Грина, для нахождения коэффициентов которой решалась система линейных уравнений с отличным от нуля определителем $\Delta_G = \delta_1\delta_2(\delta_1^2 - \delta_2^2)^2$ при $\delta_1 \neq \delta_2$.

Условия непрерывности функции Грина и её производных до второго порядка включительно [9, с. 38]

$$G(x, \xi) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + C_4 e^{\lambda_4 x}, & 0 \leq x < \xi, \\ D_1 e^{\lambda_2 x} + D_2 e^{\lambda_3 x} + D_3 e^{\lambda_4 x} + D_4 e^{\lambda_1 x}, & \xi < x \leq 1, \end{cases}$$

в точке $x = \xi$, а также скачок в этой точке третьей производной на величину $l^2 \chi^{-2}$ составляют систему линейных уравнений

$$G(\xi + 0, \xi) - G(\xi - 0, \xi) = 0, \quad G'(\xi + 0, \xi) - G'(\xi - 0, \xi) = 0,$$

$$G''(\xi + 0, \xi) - G''(\xi - 0, \xi) = 0, \quad G^{(3)}(\xi + 0, \xi) - G^{(3)}(\xi - 0, \xi) = l^2 \chi^{-2},$$

определитель которой не зависит от вида граничных условий, но зависит от вида рассматриваемых корней характеристического уравнения.

Для коэффициентов функции Грина справедливы следующие соотношения:

$$c_1(\xi) - d_1(\xi) = -l^2 \chi^{-2}(\delta_2(\delta_1^2 - \delta_2^2) \sin(\delta_1 \xi)), \quad c_2(\xi) - d_2(\xi) = l^2 \chi^{-2}(\delta_2(\delta_1^2 - \delta_2^2) \cos(\delta_1 \xi)),$$

$$c_3(\xi) - d_3(\xi) = l^2 \chi^{-2}(\delta_1(\delta_1^2 - \delta_2^2) \sin(\delta_2 \xi)), \quad c_4(\xi) - d_4(\xi) = -l^2 \chi^{-2}(\delta_1(\delta_1^2 - \delta_2^2) \cos(\delta_2 \xi)),$$

позволяющие выразить коэффициенты $d_i(\xi)$ через $c_i(\xi)$. Функция Грина на интервале $[0, \xi]$ удовлетворяет граничным условиям левого конца, на интервале $(\xi, 1]$ – правого конца, решением приведённой выше системы являются коэффициенты $c_i(\xi)$, имеющие вид

$$c_1(\xi) = l^2 \chi^{-2} \Delta^{-1} \delta_2 [\delta_1 \cos \delta_2 \cos(\delta_1(1 - \xi)) + \delta_2 \sin \delta_2 \sin(\delta_1(1 - \xi)) - \delta_1 \cos(\delta_2 \xi)], \quad c_2(\xi) = 0,$$

$$c_3(\xi) = l^2 \chi^{-2} \Delta^{-1} \delta_1 [\delta_2 \cos \delta_1 \cos(\delta_2(1 - \xi)) + \delta_1 \sin \delta_1 \sin(\delta_2(1 - \xi)) - \delta_2 \cos(\delta_1 \xi)], \quad c_4(\xi) = 0,$$

следовательно,

$$d_1(\xi) = \frac{l^2 \delta_2}{\chi^2 \Delta} [\delta_1 \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos(\delta_1 \xi) + \delta_2 \sin \delta_1 \sin \delta_2 \cos(\delta_1 \xi) - \delta_1 \cos(\delta_2 \xi)],$$

$$d_3(\xi) = \frac{l^2 \delta_1}{\chi^2 \Delta} [\delta_1 \sin \delta_1 \sin \delta_2 \cos(\delta_2 \xi) + \delta_2 \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos(\delta_2 \xi) - \delta_2 \cos(\delta_1 \xi)],$$

$$d_2(\xi) = -\frac{l^2 \cos(\delta_1 \xi)}{\chi^2 \delta_1 (\delta_1^2 - \delta_2^2)}, \quad d_4(\xi) = \frac{l^2 \cos(\delta_2 \xi)}{\chi^2 \delta_2 (\delta_1^2 - \delta_2^2)}.$$

5. Случай $k = 0$, отсутствие жёсткого основания. При отсутствии жёсткого основания линеаризованной задаче $\chi^2 l^{-2} w^{(4)} + (T + mu^2)w'' = 0$ с граничными условиями (2), характеристическое уравнение которой имеет вид

$$\lambda^4 + a\lambda^2 = 0, \quad a = (T + mu^2)\chi^{-2}l^2, \tag{4}$$

соответствует сопряжённая линеаризованная граничная задача

$$\chi^2 l^{-2} \omega^{(4)} + (T + mu^2)\omega'' = 0,$$

$$\omega'(0) = 0, \quad \chi^2 l^{-2} \omega^{(3)}(0) + (T + mu^2)\omega'(0) = 0, \quad \omega(1) = 0, \quad \omega'(1) = 0.$$

При любом значении a уравнение (4) имеет два нулевых корня. Если $a = \alpha^2 > 0$, то уравнение (4) имеет пару сопряжённых чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm \alpha i$. При $a = -\alpha^2 < 0$ корнями являются два действительных противоположных числа $\lambda_{1,2} = \pm \alpha$. В вырожденном случае $a = 0$ уравнение имеет нулевой корень кратности четыре. Таким образом, уравнение (4) имеет корни следующих видов:

- A₀) 0 кратности два, $\pm \alpha i$ ($\alpha > 0$);
- B₀) 0 кратности два, $\pm \alpha$ ($\alpha > 0$);
- A₀-B₀) 0 кратности четыре.

A₀. Характеристическое уравнение имеет два сопряжённых чисто мнимых корня и нулевой корень кратности два. Для функции прогиба $w(x) = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x) + c_3 + c_4 x$ бифуркационное множество определяется равенством нулю определителя $\Delta = -\alpha^4 \sin \alpha$ матрицы граничных условий при $\alpha > 0$. Равенство достигается при $\sin \alpha = 0$, т.е. $\alpha = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Тогда коэффициенты функции Грина, построенные по указанной выше схеме, имеют вид

$$c_1(\xi) = \frac{l^2}{\chi^2 \alpha^3 \sin \alpha} (1 - \cos(\alpha(1 - \xi))), \quad c_2(\xi) = 0,$$

$$c_3(\xi) = \frac{l^2}{\chi^2 \alpha^3 \sin \alpha} (\cos(\alpha \xi) - \cos \alpha - \alpha(1 - \xi) \sin \alpha), \quad c_4(\xi) = 0,$$

$$d_1(\xi) = -\frac{l^2}{\chi^2 \alpha^3 \sin \alpha} (1 - \cos \alpha \cos(\alpha \xi)), \quad d_2(\xi) = -\frac{l^2}{\chi^2 \alpha^3} \cos(\alpha \xi),$$

$$d_3(\xi) = \frac{l^2}{\chi^2 \alpha^3 \sin \alpha} (\cos(\alpha \xi) - \cos \alpha - \alpha \sin \alpha), \quad d_4(\xi) = \frac{l^2}{\chi^2 \alpha^2}.$$

Отличный от нуля в точках, где $\Delta = 0$, минор третьего порядка равен $\Delta_{(3)} = -\alpha^3$. Тогда базисные элементы подпространств нулей прямой и сопряжённой задач равны между собой и имеют вид $\varphi(x) = \psi(x) = \cos(\alpha x) - \cos \alpha$.

Замечание 3. Контроль правильности вычислений для рассматриваемого случая выполнен посредством предельного перехода от случая С наличия жёсткого основания при $\delta_1 \rightarrow \alpha$, $\delta_2 \rightarrow 0$.

В₀. В случае, когда корнями характеристического уравнения являются два действительных ненулевых корня и нулевой корень кратности два, функция прогиба имеет вид $w(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} + c_3 + c_4 x$. Неравенство $\Delta = \alpha^4(e^\alpha - e^{-\alpha}) > 0$ выполнено для любого $\alpha > 0$ и, следовательно, прогиб трубопровода отсутствует.

А₀–В₀. Если характеристическое уравнение имеет четыре нулевых корня, то для функции прогиба $w(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 + c_4 x$ определитель матрицы граничных условий равен $\Delta = -12 < 0$ и прогиб трубопровода отсутствует.

Работа выполнена в рамках государственного задания № 2014/232 Министерства образования и науки России и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15-01-08599, 15-41-02455р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М., 1967.
2. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости М., 1961.
3. *Thompson J.M.T.* Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering. М., 1985.
4. *Болотин В.В., Радин В.П., Гурков В.П., Щугорев А.В.* Устойчивость участка трубопровода с упругой опорой // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 1. С. 174–184.
5. *Алгазин С.Д., Куйко И.А.* Флаттер пластин и оболочек. М., 2006.
6. *Bolotin V.V., Petrovsky A.V., Grishko A.A.* Secondary bifurcations and global instability of an aeroelastic nonlinear system in the divergence domain // J. Sound and Vibration. 1996. V. 191. № 3. P. 431–451.
7. *Вельмисов П.А., Логинов Б.В.* Метод групповых преобразований и ветвление решений в двухточечных граничных задачах аэроупругости // Дифференц. уравнения и их приложения: Матер. Междунар. конф. 20–22 декабря 1994. Саранск, 1995. С. 120–125.
8. *Вельмисов П.А., Куреев С.В.* Математическое моделирование в задачах статической неустойчивости упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск, 2011.
9. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., 1969.
10. *Badokina T.E., Loginov B.V.* Models of Multiparameter bifurcations in boundary value problems for ODEs of the fourth order on divergence of elongated plate in supersonic gas flow // Вестн. ЮУрГУ. Мат. моделирование и программирование. 2015. Т. 8. № 2. С. 24–35.
11. *Loginov B.V., Badokina T.E., Makeeva O.V.* Green functions construction for divergence problems in aeroelasticity // Romanian Society of Industrial and Applied Math. J. 2008. № 4 (2). P. 33–44.
12. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.

Мордовский государственный университет
им. Н.П. Огарёва, г. Саранск,
Национальный университет Узбекистана
им. Мирзо Улугбека, г. Ташкент,
Ульяновский государственный технический университет

Поступила в редакцию
22.03.2017 г.