O’ZBEKICTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

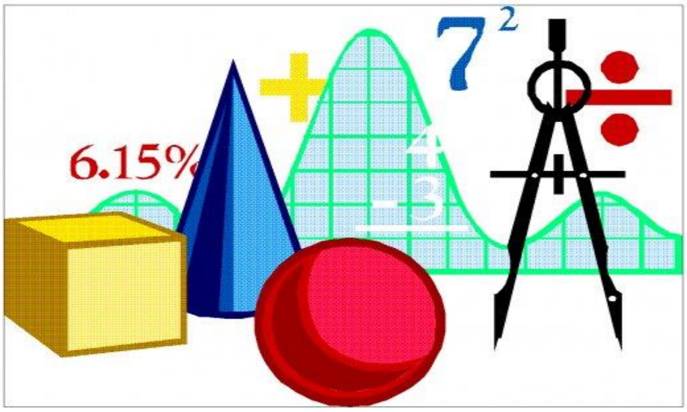
ISLOM KARIMOV NOMLI TASHKENT DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

“MATEMATIKA VA TABIIY-ILMIY FANLAR” KAFEDRASI

Q.N.,SADATOV O.X.,SOQIYEVA B.B.

OLIY MATEMATIKADAN MISOL VA MASALALAR ECHISH UCHUN

O`QUV – USLUBIY QO`LLANMA



Termiz – 2018

O.X.Sadatov,B.B.Soqiyeva. Oliy matematikadan misol va masalalar echish uchun o’quv - uslubiy qo’llanma (bakalavriat bocqichi uchun).
Ter.: TDTUTerF, 2018.

Oliy matematikadan misol va masalalar echish uchun o’quv - uslubiy qo’llanma Islom Karimov nomli Tashkent Davlat Universitetining Termiz filialida “Matematika va tabiiy- ilmiy fanlar” kafedrasida tayyorlangan. Uslubiy qo’llanma metematika fani bo’yicha ma’ruza, amaliy mashg’ulotlarga oid barcha o’quv – uslubiy materiallarni o’z ichiga oladi. Har bir ma’ruza va amaliy mashg’ulot darslarini o’tishga mo’ljallangan pedagogik uslubiyotlar keltirilgan. O’quv – uslubiy qo’llanmadan professor – o’qituvchilar va talabalar foydalanishlari mumkin.

G’oya muallifi: fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent B.B.Jurayev

Taqrizchilar: – TerDU, “Математик тахлил” kafedrasi dotsenti M.Ortiqov
– TDTU TF, “matematik va tabiiy ilmiy fanlar” kafedrasi dotsenti B.B.Jorayev

Олий математикадан мисол ва масалалар ечиш учун ўқув қўлланма.

Аннотация

Ўқув қўлланма олий математикадан намунавий дастурлар асосида яратилди. Унда Олий математиканинг чизиқли алгебра, аналитик геометрия, дифференциал ва интеграл ҳисоби, дифференциал тенгламалар, қаторлар, каби бўлимларига тегишли масала ва мисоллар берилди. Ҳар бир бўлимда қисқача назарий маълумотлар келтирилиб, уларнинг қўлланиши кўплаб машқларда тушунтирилди.

Ўқув қўлланма техника ва иқтисодий йўналишларидаги талабалар учун мўлжалланган.

Учебное пособие по высшей математике для решения задачи.

Аннотация

В соответствии с учебной программой подготовки студентов в сборник включены задачи по основным разделам общего курса высшей математики: аналитическая геометрия, линейная алгебра, дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения, ряды.

В начале каждого раздела приводится необходимый теоретический минимум и подробно разъясняется его использование на большом количестве примеров.

Предназначен для студентов технических и экономических специальностей.

Oliy matematikadan misol va masalalar echish uchun o'quv qo'llanma.

Annotasiya

O'quv qo'llanma oliy matematikadan mo'ljallangan noma`naviy dasturlar asosida yaratildi. Unda Oliy matematikaning chiziqli algebra, analitik geometriya, differensial va integral hisobi, differensial tenglamalar, qatorlar, kabi bo'limlariga tegishli masala va misollar berildi. Har bir bo'limda qisqacha nazariy ma`lumotlar keltirilib, ularning qo'llanishi ko'plab mashqlarda tushuntirildi.

O'quv qo'llanma texnika va istisodiy yo'nalishlaridagi talabalar uchun mo'ljallangan.

O'ZBEKICTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ISLOM KARIMOV NOMLI TASHKENT DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

"MATEMATIKA VA TABIIY-ILMIY FANLAR" KAFEDRASI

TO`RAEV Q.N.,SADATOV O.X.,SOQIYEVA B.B.

OLIY MATEMATIKADAN MISOL VA MASALALAR ECHISH UCHUN O`QUV – USLUBIY QO`LLANMA

OLIY TA'LIMNING

Bilim sohasi:	100 000	- Gumanitar soha;
	300 000	- Ishlab chiqarish-texnik soha;
	600 000	- Xizmatlar sohasi.
Ta`lim sohasi:	310 000	-Muhandislik ishi;
	620 000	-Transport;
	630 000	-Atrof muxit muxofazasi;
Ta`lim yo`nalishlari:	5111000	- Kasb ta`limi (5313100-avtomobil transporti, yo`l qyrilish mashinalari jixozlarinig eksplyatatsiyasi),
	5313100	-Avtomobil transporti, yo`l qurilish mashinalari va jixozlarining ekspluatatsiyasi (ixtisoslashtirilgan transport vositalari bo`yicha),
	5232900	- Ishlab chiqarishni tashkillashtirish va boshqarish (Avtomobil transporti bo`yicha),
	5310600	- Yer usti transporti tizimlari va ekspluatatsiyasi (Avtomobil transporti bo`yicha),
	5310600	- Yer usti transport tizimlari va ekspluatatsiyasi (Yer qurilish mashinalari bo`yicha),
	5310900	-Metrologiya standartlashtirish va mahsulot sifati menejmenti (sohalar bo`yicha),
	5620300	-Tranport logistikasi (Avtomobil transporti bo`yicha),
	5620300	-Tashishlarni tashkil etish va tranport logistikasi (Avtomobil transporti bo`yicha),

Termiz - 2018

SO`Z BOSHI

«Matematika» fani oliy o’quv yurtlarida muhum va hal qiluvchi o’rinda turadi. Axborot texnologiyalarining jadal rivojlanishi va incon faoliytining barcha jabhalarida keng qo’llanilishi Matematika fanining ahamiyatini yanada oshirdi. Bu esa muxandis va iqtisodchi mutahassislarga bo’lgan талабларни янада кучайтирди.

Tevarak atrofimizda ro`y berayotgan jarayonlarni tashkil etuvchi ko`rsatkichlarni aniqlash va ularning ustida olib borilayotgan kuzatuv natijalarini bir tizimda shakllantirish, o`zaro bog`liqlik darajasini o`lchash, bog`lash ishlarini matematik modellarini tahlil etishda optimal matematik uslublarni axtarish davrimizning dolzarb masalalaridan biridir. Shu sababdan ham, zamonaviy raqobatbardosh kadrlar tayyorlash borasida mamlakatimizning OO`YUlaridagi o`quv jarayonini tashkillashtirishda amaliy ahamiyatga ega bo`lgan matematika faniga-modellar haqidagi fanga alohida e`tibor berilmoqda. Fikrimizning dalili sifatida muxtaram yurtboshimiz Mirziyoev SH.M.ning ta`lim sohasidagi islohotlarga tegishli bir qator sermazmun ko`rsatmalari qatorida yoshlarimizga matematika fanini yanada chuqurlashtirilgan holda o`rgatishimizni alohida ta`kidlab o`tganlarini keltirib o`tishimiz mumkin.

Mazkur o`quv – uslubiy qo’llanma “Matematika. Matematik usullar va modellar” fanining dasturining qayta ishlangan varianti asosida yaratildi.

O`quv – uslubiy qo’llanma yuqorida ko`rsatilgan ta`lim yo`nalishlari bo`yicha ta`lim olayotgan bakalavrlar hamda magistrlar uchun mo`ljallangan.

Iqtisodiy va texnikaviy ko`rsatgichlar, ular ustida olib borilayotgan kuzatuv natijalarini bir tizimda shakllantirish, ularga ta`sir etuvchi omillarning o`zaro bog`liqligini aniqlashda zamonaviy matematik usullar va modellardan foydalanishning o`rni beqiyosdir. Shuning uchun ham, ushbu o`quv – uslubiy qo’llanmada amaliy ahamiyatga ega bo`lgan matematika faniga - modellar haqidagi fanga alohida e`tibor berilgan.

Ushbu o’quv qo’llanma oliy matematikadan maxsus texnikaviy va iqtisodiy yo’nalishda yozilgan bo`lib, ko`p hollarda matematik tushunchalarning iqtisodiy talqini berildi va iqtisodiy mazmundagi masala va misollar keltirildi.

O`quv qo’llanmada modellashtirish, matrisa va determinantlar, chiziqli tenglamalar sistemasi, chiziqli fazo elementlari, limitlar nazaryasi, bir o`zgaruvchili va ko`p o`zgaruvchili funksiyalarning differensial hisobi, integral hisob elementlari, oddiy differensial tenglamalar va qatorlarga doir misol va masalalar berilgan.

Barcha bo`limlarda qisqa nazariy ma`lumotlar keltirilgan. Qator masalalar yechimlari bilan berilgan nazorat ishlari hamda mustaqil yechish uchun misol va masalalar tavsiya etilgan.

1. Dastlabki tushunchalar

1.1 Matematik modellashtirish

Jamiyatning rivoj topishi cheklangan resurslar (xom-ashyo, texnika vositalari, kapital qo`yilmalari, yer, suv va boshqalar) dan oqilona foydalanish, optimal yechimlar topish, iqtisodiy jarayonning matematik modelini tuzish, uni tahlil qilish, prognoz berishni taqozo qiladi.

Matematik model – real ishlab chiqarish jarayonini aks ettiruvchi formal munosabatlar majmuidir. Real hayotda uchraydigan jarayonlarni muqobil matematik modelini yaratish g`oyatda murakkab vazifa. Shu sababli ba`zi shartlar bilan tuzilgan matematik model asl holdan biroz farq qiladi. Biror jarayon uchun model tuzilayotganda qancha ko`p ta`sir etuvchi faktorlar e`tiborga olinsa (ko`p o`zgaruvchi funksiyalar sifatida qaralganda), tuzilgan model shuncha aniqroq bo`ladi.

Biz bilgan $y = ax+b$ chiziqli, $y = ax^2+bx+c$ kvadratik, $y = x^\alpha$ $(x \in R)$ darajali, $y = a^x$ ko`rsatkichli va boshqa elementar funksiyalar iqtisodiy jarayonlarning matematik modeli sifatida ko`p qo`llaniladi.

Model so`zi lotincha „*modulus’’* so`zidan olingan bo`lib, o`lchov, me`yor, miqdor degan ma`nolarni anglatadi. Iqtisodiyotdagi ob`ektlarni matematik modellashtirish yordamida iqtisodiy jarayonlarni kuzatish va tahlil qilish mumkin. Iqtisodchilar modellarni qurayotib muhim faktorlarni ajratib olishadi va qo`yilgan masalani echish uchun uncha muhim bo`lmagan parametrlarni hisobga olishmaydi.

Matematik modellar ahamyatini quyidagilarda ko`rish mumkin:

- iqtisodiy matematik modellar yordamida moddiy, mehnat va pul resurslaridan oqilona foydalanish.
- matematik modellar va usullar iqtisodiy va tabiiy fanlarni rivojlantirishda yetakchi vosita bo`lib xizmat qiladi.
- matematik modellarga, ularning iqtisodiy jarayonni adekvat aks ettirishi yetarli bo`lmaganda tuzatish kiritish mumkin.
- matematik modellar yordamida iqtisodiy jarayonlar faqatgina chuqur tahlil qilinibgina qolmasdan, balki ularning yangi o`rganilmagan qonuniyatlarini ham ochish imkoniyati yaratiladi. Shuningdek, ular yordamida iqtisodiyotning kelgusidagi rivojlanishini oldindan bashorat qilish mumkin bo`ladi.
- matematik modellar hisoblash ishlarini mexanizasiyalash va avtomatlashtirish bilan birga, aqliy mehnatni yengillashtiradi,iqtisodiy soha xodimlarining mehnatini ilmiy asosini tashkil etadi va ularni boshqarib turadi.

Ob`ektlarning matematik modellari

Obye’ktlarning matematik modellarini tuzish quyidagi bosqichlardan iborat:

1) iqtisodiy jarayon har tomonlama o`rganib chiqiladi. Nazariy va sifat jihatdan tahlil qilinib, uning parametrlari ichki va tashqi informatsion aloqalar, ishlab chiqarish resurslari, rejalashtirish davri kabi ko`rsatkichlar aniqlanadi;
2) izlanayotgan noma`lum o`zgaruvchilar qanday maqsadni ko`zda tutilishi, natija nimalarga olib kelishi aniqlanadi;
3) modellashtirilayotgan jarayonning iqtisodiy matematik modeli tenglama, tengsizliklar tizimi shaklida ifodalanadi;
4) tuzilgan matematik modelni miqdoriy yechimini aniqlaydigan usul tanlanadi;
5) masalani echish uchun kerak bo`lgan barcha iqtisodiy (umumiy) ma`lumotlar to`planadi;

olingan ma`lumotlar statistik tahlil qilinib, tanlangan usul va matematik model orqali qo`yilgan vazifa yechiladi;

6) olingan natija har tomonlama (iqtisodiy) tahlil qilinib, optimal variant tanlanadi.

Yuqorida aytib o`tilgan bosqichlar bir-biri bilan chambarchars bog`liq bo`lib, biri ikkinchisini to`ldirib turadi va bu usullar har qanday masalalarni hal qilishda eng optimal yo`lni tanlashda qo`llaniladi.

Har qanday iqtisodiy tekshirish, nazariya (iqtisodiy model) va amaliyot (statistik ma`lumotlar) ning birlashmasidan iborat. Kuzatilayotgan hodisalarni tushuntirish va tasvirlash uchun nazariy modeldan foydalaniladi, modelni qurish va asoslash uchun esa statistik ma`lumotlar yig`iladi.

Ishlab-chiqarish jarayonlarining matematik modellari tenglama, tengsizlik, formula ko`rinishida ifodalanadi. Masalan: Bank aholidan quyidagi shartlar bilan omonat qabul qiladi: bankning yillik foiz stavkasi $R$ ($R$ – o`nli kasrda ifodalangan foiz stavkasi: ya`ni, agar $R$ = 0,12 bo`lsa, stavka 12% ni tashkil etadi); foizlarni qo`shib hisoblashlar yiliga $k$ marta amalga oshiriladi. (agar $k$ = 4 bo`lsa, foizlar har kvartalda, agar k = 12 bo`lsa, foizlar har oyda qo'shib hisoblanadi va h.k.). U holda har bir qo`shib hisoblash davrida qo`yilgan omonat $i=\frac{R}{k}$ foizga ortadi.

Faraz qilaylik omonatchi bank hisobiga A_0 so`m qo`ygan bo`lsa, u holda birinchi qo`shib hisoblash davridan keyin summa:

$$A_1 = A_0 + A_0 \times i = A_0(1+i),$$

ikkinchi davr oxirida

$$A_2 = A_1 + A_1 \times i = A_1(1+i) = A_0(1+i)(1+i) = A_0(1+i)^2$$

xuddi shunday n – qo`shib hisoblash davridan keyin

$$A_n = A_0(1+i)^n \qquad (1.1)$$

hosil bo`ladi.

Shunday qilib $A_0, A_1, A_2, A_n ...$ elementlar ketma – ketligi $b_1 = A_0(1+i)$, maxraji $q=(1+i)$ bo`lgan geometrik progressiyani tashkil qiladi.

Masala: 1.1 Yillik stavkasi 8% bo`lgan bankka 100 000 so`m omonat qo`yiladi. Foizlar har kvartalda qo`shib hisoblanadi. Hisobda 5 yildan keyin qanday summa hosil bo`ladi?

Yechish. Masalani yechish uchun avval uning matematik modelini tuzib olamiz. Masalaning shartiga ko`ra $A_0 = 100000$ so`m, $R = 0{,}08$, $k = 4$, $n = 4\cdot 5 = 20$

5 yil davomidagi qo`shib hisoblashlar soni. (1.1) formuladan foydalanib:

$$A_{20} = 100000\left(1+\frac{0{,}08}{4}\right)^{20} = 100000(1{,}02)^{20} \approx 146595 \text{ so`m.}$$

Javob: Bank hisobida 5 yildan keyin 146 595 so`m hosil bo`ladi.

1.2 Aziza har 3 oyning oxirida bankka 30 000 so`m qo`yadi, bankning yillik stavkasi 10% foizlarni har kvartalda qo`shib hisoblaydi. Azizaning hisobida 5 yildan keyin qanday summa hosil bo`ladi.

Yechish.

Berilgan

$P = 30000$
$i = \frac{0{,}1}{4}$
$k = 4$
$n = 20$
$S_{20} - ?$

Demak $n = 20$ marta omonat qo`yiladi. $n$ – omonat $P$ so`m, $(n-1)$ esa bankda bir to`lov davri saqlangan, mos foizlarni qo`shib hisoblanganidan keyin $P(1+i)$ so`m. $n-2$– omonat bankda 2 davr saqlangan $P(1+i)^2$ so`m va h.k. Xuddi shuningdek 1 – omonat $P \cdot (1+i)^{n-1}$ so`mga aylanadi. Hisobdagi umumiy summa:

$$S_n = P + P(1+i) + P(1+i)^2 + \ldots + P(1+i)^{n-1}$$

Yig`indining hadlari $b_1 = P$, $q = (1+i)$ bo`lgan geometrik progressiyani tashkil qiladi.

$$S_n = \frac{P(1-(1+i)^n)}{1-(1+i)} = \frac{P(1-(1+i)^n)}{-i} = \frac{P((1+i)^n - 1)}{i}.$$

Demak, masalani matematik modelining ifodasi

$$S_n = \frac{P((1+i)^n - 1)}{i} \qquad (1.2)$$

Bu formuladan foydalanib

$$S = 30\,000 \frac{((1+0{,}025)^{20} - 1)}{0{,}025} \approx 300 \cdot 2554{,}5 \approx 766340 \text{ so`m}$$

Javob: Azizaning hisobida 5 yildan so`ng 766340 so`m hosil bo`ladi. Bunda bankdan foizlar hisobiga olingan summa 766340-30 000·4·5 = 166 340 so`m

1.3 Alisher o`z qizini kelgusi 4 yil davomida har oyda 10 000 so`mdan renta bilan ta’minlab turish uchun bankka qancha pul qo`yishi kerak. Agar bankning foiz stavkasi yiliga 12%, qo`shib hisoblashlar har oyda amalga oshiriladi.

Yechish.

Berilgan
P = 10 000
$n = 12 \cdot 4 = 48$
$i = \frac{0{,}12}{12} = 0{,}01$
A_{48} - ?

Qo`yiladigan omonat summasi A ni

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$$

ko`rinishda ifodalab olamiz. (bu yerda $A_1$ – omonatning birinchi davrida orttirib olinadigan qismi, $A_2$ – ikkita davrda ortganidan keyin olinadigan qismi, va h.k.). Agar $P$ renta kattaligi bo`lsa, u holda

$$P = A_1(1+i)$$
$$P = A_2(1+i)^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P = A_n(1+i)^n,$$

Bu yerda i – bitta qo`shib hisoblash davridagi bank foizi. Bundan

$$A_1 = \frac{P}{1+i},\quad A_2 = \frac{P}{(1+i)^2}, \ldots A_n = \frac{P}{(1+i)^n},$$

va natijada,

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_n = P\left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}\right);$$

qavs ichidagi ifoda $b_1 = \frac{1}{1+i}$ va $q = \frac{1}{1+i}$ bo`lgan geometrik progressiyaning birinchi $n$ ta hadi yig`indisidan iborat. Natijada, $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ formulaga ko`ra

$$A = \frac{P}{1+i} \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{P\left((1+i)^n-1\right)}{i(1+i)^n} = \frac{P}{i}\left(1-(1+i)^{-n}\right) = P\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Shunday qilib, n marta P so`mdan olib turish uchun bir marta qo`yiladigan omonat kattaligi

$$A = P\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (1.3)$$

formula bilan hisoblanadi. Demak, masalaning matematik modeli tuzildi, endi son qiymatlarini qo`yamiz: $A = 10\,000\cdot\frac{1-(1{,}01)^{-48}}{0{,}01} \approx 379739{,}6$

Javob: Bankka 379739,6 so`m qo`yilishi kerak.

Nominal va real stavka bir biridan farqlanadi. Real foiz stavkasi - yil davomida bank hisobidagi summaning haqiqiy o`sishi. Nominal stavka esa – bank e’lon qilgan stavka.

1.4 R = 0,06 va k = 12 bo`lgan bank uchun real foiz stavkasini aniqlang.

Yechish. Masalaning shartiga ko`ra bankning nominal stavkasi 6%, foizlar yiliga 12 marta qo`shib hisoblanadi. Faraz qilaylik, boshlang`ich summa $A_0$ so`m, u holda bir yildan keyin bank hisobidagi summa (12 oydan keyin)

$$A_{12} = A_0\left(1+\frac{0{,}06}{12}\right)^{12} = A_0(1{,}005)^{12} = A_0\cdot 1{,}0617$$

omonatning bir yilda o`sish foizi quyidagi proporsiyadan topiladi:

$$A_0 \to 100\%$$
$$A_{12} - A_0 \to x\%$$

$$x = \frac{A_{12}-A_0}{A_0}\cdot 100\% = \frac{1{,}0617A_0 - A_0}{A_0}\cdot 100\% = 6{,}17\%.$$

Shunday qilib, real foiz stavkasi 6,17%.

Mustaqil bajarish uchun misol va masalalar

1.5. Quyidagi jadvalda bank e’lon qilgan nominal foiz stavka R**,** boshlang`ich omonat summasi $A_0$ va yillik foiz qo`yib hisoblashlar soni k berilgan n ta to`lov davridan keyin bank hisobida hosil bo`ladigan summani aniqlang.

Variant	***R %***	A_0 (ming so`m)	***K*** marta	***n***
1	12	80	6	24
2	6	120	4	20
3	8	150	3	15
4	9	100	4	20
5	14	200	4	16
6	18	140	2	10
7	20	80	3	15
8	15	150	4	20
9	20	120	4	20

Variant	***R %***	A_0 (ming so`m)	***K*** marta	***n***
16	15	50	3	12
17	12	140	5	20
18	8	100	10	32
19	10	100	6	24
20	12	60	6	12
21	14	70	5	20
22	15	60	4	8
23	10	80	2	16
24	8	80	4	20

10	20	100	6	24	25	6	36	6	24
11	25	80	4	12	26	16	320	7	28
12	16	75	2	36	27	12	240	8	32
13	14	120	4	28	28	8	20	3	12
14	12	140	6	42	29	6	160	4	40
15	14	150	8	16	30	12	120	10	36

1.6 Komil unversitetga kirganida, ota onasi uni chet elda o`qishni davom ettirishi uchun 6 000$ yig`moqchi bo`lishdi. Bu summani ta'minlash uchun ota – ona 2012 yil 1 – sentabrdan to 2016 yil 1 – martgacha har oyda bankka pul qo`yib turmoqchi bo`lishdi. Tanlangan bankning yillik foiz stavkasi 9%, har oyda to`laydi. Har oyda ular bankka qanchadan pul qo`yib turishlari kerak.

1.7 Bill 35 yoshida yiliga 9% ni har oyda qoi`shib hisoblaydigan sug`urta kompanyasi bilan shunday shartnoma tuzdi: Bill 65 yoshgacha har oyda 350$ to`lab turadi. Nafaqaga chiqqandan keyingi 10 yil davomida hosil bo`lgan fonddan har oy bir xil miqdorda pul olib turadi. Bill har oyda qanchadan pul olib turadi.

1.8 Bank murakkab foizlar bo`yicha yiliga 24% dan qo`shib hisoblashlarni har oyda bajaradi. Boshlang`ich summa 360 pul birligi bo`lsa, 8 oydan keyin qo`yilgan omonat summasi qancha bo`ladi.

1.9 Erkin har oyning oxirida bankka 500$ dan qo`yib turadi. Bank e'lon qilgan nominal stavka 7%, yiliga 2 marta qo`shib hisoblanadi. 8 yildan keyin uning bankdagi hisobida qanday summa hosil bo`ladi.

1.3 Funksiya va uning berilish usullari

Barcha ratsional (Q) va irratsional (I) sonlar to'plami birgalikda haqiqiy sonlar to'plamini tashkil qiladi. Haqiqiy sonlar to'plami R harfi bilan belgilanadi.
X va Y lar haqiqiy sonlarning biror qism to'hlamlari bo'lib , x va y mos ravishda shu to'plamlar elementlari $x \in X, \quad y \in Y$ bo'lsin.

Ta'rif: Agar X to'plamdagi har bir x songa biror qoida yoki qonunga ko'ra Y to'plamning bitta y soni mos q'yilgan bo'lsa , X to'plamda funksiya berilgan (aniqlangan) deb ataladi va $f: X \to Y$ yoki $y = f(x)$ kabi belgilanadi. Bu ta'rifdagi X va Y lar orasidagi bog'lanish funksional bog'lanish deyiladi.
X to'plam funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi. Y to'plam ya'ni X ning har bir x elementiga mos kelgan $f(x)$ elementlar to'plami funksiyaning o'zgarish sohasi deyiladi.

Funksiyalar *jadval, grafik, analitik* usullarda berilishi mumkin:
$y = f(x)$ funksiya analitik usulda berilganda uning X va Y sohalari berilmagan bo'lishi mumkin, ammo ularni $f(x)$ funksiyaning xossalaridan foydalanib aniqlanadi.

Agar X sohani Y sohaga akslantirganda o'zaro bir qiymatli moslik ya'ni $y = f(x)$ funksiya bajarilsa, u holda x ni y orqali $x = g(y)$ kabi ifodalash mumkin. Oxirgi funksiya $y = f(x)$ funksiyaga teskari funksiya deyiladi.

$x = g(y)$ funksiya uchun Y aniqlanish sohasi X esa funksiyaning o'zgarish sohasi bo'ladi. $g(f(x)) = x$ va $f(g(y)) = y$ bo'lgani uchun $y = f(x)$ va $x = g(y)$ funksiyalar o'zaro teskari funksiyalar bo'ladi.

1.21 Funksiyaning qiymatlar to`plamini toping.

$$y = \frac{1}{3\sin 2x + 4\cos 2x}$$

Yechish. Maxrajda qavsdan tashqariga $\sqrt{3^2+4^2}=5$ ni chiqaramiz: $y=\dfrac{1}{5(\frac{3}{5}\sin 2x+\frac{4}{5}\cos 2x)}$ $\dfrac{3}{5}=\cos\beta, \dfrac{4}{5}=\sin\beta$ deb faraz qilib (bunday bo`lishi mumkin, chunki $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=1$), quyidagini olamiz: $\dfrac{1}{5(\cos\beta\sin 2x+\sin\beta\cos 2x)}$, yoki $y=\dfrac{1}{5\sin(2x+\beta)}$.
$\sin(2x+\beta)$ ifoda $[-1;1]$ kesmada (yoki $5\sin(2x+\beta)$ $[-5;5]$ kesmada) barcha mumkin bo`lgan qiymatlarni qabul qilishini hisobga olib quyidagini topamiz: $y\in(-\infty;\frac{1}{5}]\cup[\frac{1}{5};+\infty)$

1.22 $y=10^{-2x^2}$ funksiyaning qiymatlar to`plamini toping.

Yechish. Berilgan funksiyaga teskari funksiyaning aniqlanish sohasi, shu funksiyaning qiymatlar to'plamidan iborat. $y=10^{-2x^2}$ funksiyaga teskari funksiyani topamiz, x ni y orqali ifodalab, $-2x^2=\lg y$ yoki $x^2=-\dfrac{1}{2}\lg y$, $x^2\geq 0$ bo`lgani uchun $-\dfrac{1}{2}\lg y\geq 0$ bundan $\lg y\leq 0$ va $y\in(0;1]$, ya`ni topilgan yarim interval berilgan funksiyaning qiymatlar to`plami bo`ladi.

Mustaqil bajarish uchun misol va masalalar

Funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

1.23 $y=\dfrac{\sqrt[5]{\lg(x+1)}}{x-1}+2^{\sqrt{10-x}}$ **1.24** $y=\dfrac{\sqrt[6]{16-x^2}}{\lg(x-1)^2}$

1.25 $y=\sqrt{4-x}\,tgx$ **1.26** $y=\dfrac{\sqrt{\sin x-0{,}5}}{\sqrt[3]{x-2}}-\log_2(x-1)$

1.27 $y=\dfrac{\arcsin(x-1)}{\lg x}$

Funksiyalarning qiymatlar sohasini toping:

1.28 $y=5\sin x+2\cos x$ **1.29** $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$

1.30 $y=\dfrac{3x}{1+x^2}$ **1.31** $y=\dfrac{3}{(\sin x+\cos x)^2+2}$

1.4 Funksiya xossalari

a) Aniqlanish sohasi X dan iborat bo`lgan $f(x)$ funksiya uchun har qanday $x\in X$ uchun $-x\in X$ bo'lib, hamda $f(-x)=f(x)$ tenglik bajarilsa funksiya juft $f(-x)=-f(x)$ bo`lsa toq, aks holda $f(x)$ umumiy ko`rinishdagi funksiya deyiladi.

b) Biror X oraliqda $y=f(x)$ funksiya uchun argumentning katta qiymatiga funksiyaning katta (kichik) qiymati mos kelsa, funksiya o`suvchi (kamayuvchi) deyiladi. O`suvchi yoki kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar deb ataladi.

c) $f(x)$ funksiya uchun shunday o'zgarmas $T(T\neq 0)$ son topilsaki, $\forall x\in X$ da $x-T,\ x,\ x+T\in X$ bo'lib $f(x-T)=f(x)=f(x+T)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ davriy funksiya, musbat T lar ichida eng kichigi funksiyaning davri deyiladi.

d) Agar shunday $M>0$ son mavjud bo`lsaki, barcha $x\in X$ uchun $|f(x)|<M$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ X oraliqda chegaralangan deyiladi. Aks holda funksiya chegaralanmagan deyiladi.

e) $u=\varphi(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi D, qiymatlar to`plami $V$ bo`lsin, $y=f(u)$ funksiyaning aniqlanish sohasi V bo`lib, o`zgarish sohasi E bo`lsin. U holda, $y=f(\varphi(x))$ funksiya aniqlanish sohasi $D$ va o`zgarish sohasi E bo`lgan murakkab funksiya bo`ladi.

f) $y=f(x)$ ko`rinishdagi funksiya oshkor funksiya, $F(x, y)=0$ tenglama bilan ifodalangan funksional bog`lanish oshkormas funksiya deyiladi.

Funksiyalarning juft-toqligini aniqlang:

1.32 $y=\dfrac{x^4}{\cos x}-\sqrt{1-x^2}$

Yechish. *Ta`rifga asosan tekshiramiz.*

$$y(-x)=\frac{(-x)^4}{\cos(-x)}-\sqrt{1-(-x)^2}=\frac{x^4}{\cos x}-\sqrt{1-x^2}=y(x)$$

Demak, berilgan funksiya o'zining aniqlanish sohasida juft funksiya ekan.

1.33 $y=3^x\sin x$

Yechish. $y(-x)=3^{-x}\sin(-x)=-3^{-x}\sin x$. Ta`rifga asosan, $y(-x)\neq y(x)$ va $y(-x)\neq -y(x)$ bo`lganligi uchun berilgan funksiya umumiy ko`rinishdagi funksiya.

1.25. Funksiyaning eng kichik musbat davrini toping: $y = 2\sin 4x$

Yechish. Davriy funksiyaning ta`rifiga ko`ra barcha x va $T\neq 0$ lar uchun $y(x+T) = y(x)$ bo`lishi kerak. Demak, $2\sin(4(x+T)) = 2\sin 4x$, yoki $\sin(4(x+T))-\sin 4x = 0$ bundan

$$2\sin\frac{4x+4T-4x}{2}\cos\frac{4x+4T+4x}{2}=0$$

ya`ni $\sin 2T\cos(4x+2T)=0$. Hosil qilingan tenglik barcha $x$ lar uchun bajariladi, qachonki o`zgarmas ko`paytuvchi $\sin 2T = 0$ bo`lganda. Demak eng kichik musbat davri esa T = $\dfrac{\pi}{2}$.

$T>0$ son f(x) funksiya uchun eng kichik musbat davr bo'lsin. U holda y=f(kx+b) funksiyaning eng kichik musbat davri $\dfrac{T}{|K|}$ bo'ladi.

Mustaqil bajarish uchun misol va masalalar

Funksiyalarning juft-toqligini aniqlang.

1.34 $y=x+\sin x$

1.35 $y=x\sin x$

1.36 $y=\dfrac{\lg(1-x^2)}{\sqrt[3]{\cos x}}e^{-x^2}$

1.37 $y=\dfrac{x^3\cos x}{2^{x^2}}+\sin x$

1.38 $y=\lg\left(\dfrac{2-x^3}{2+x^3}\right)$

1.39 $y=\dfrac{\sin x}{x^3}$

1.40 $y=(\sin^2 x+\cos x)x^3$

1.41 $y=x^2\ln x$

1.42 $y=3^{4x}x^2+\cos x$

1.43 $y=\dfrac{tgx}{x^4+x^2+x}$

1.44 $y=\dfrac{x^4}{\sin x}-x^3\ln(1+x^2)$

1.45 $y=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x+1}$

Funksiyalarning eng kichik davrini toping yoki davriy emasligini isbotlang

1.46 $y=4\cos(\dfrac{\pi}{2}+3x)$

1.47 $y=3tg4x+1$

1.48 $y = \sin^2 x$ 　　　　**1.49** $y = \sin\dfrac{1}{x}$

1.50 $y = x\sin x$ 　　　　**1.51** $y = \sin^2 4x$

1.5. Elementar funksiyalar

Quyidagi funksiyalar asosiy elementar funksiyalar deyiladi:

a) Darajali funksiya $y = x^n$ $(x > 0)$

b) Ko`rsatkichli funksiya $y = a^x, a > 0, a \neq 1 (x \in (-\infty; +\infty);\ y \in (0; +\infty));$

c) Logarifmik funksiya $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1 (x \in (0; +\infty); y \in (-\infty; +\infty)$

d) Trigonometrik $y = \sin x$, $y = \cos x$,funksiyalar $(-\infty; +\infty)$ da aniqlangan. Qiymatlar to'plami esa $-1 \leq y \leq 1$.

e) Teskari trigonometrik $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ funksiyalarning aniqlanish sohasi $-1 \leq x \leq 1$, qiymatlar to'plami esa mos ravishda $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ va $0 \leq y \leq \pi$.

$y = \mathrm{arctg} x$,funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty; +\infty)$, qiymatlar to'plami esa $-\pi/2 < y < \pi/2$, $y = \mathrm{arcctg} x$ .funksiyaning aniqlanish to'plami $(-\infty; +\infty)$, qiymatlar sohasi esa $0 < y < \pi$.

Elementar funksiya deb asosiy elementar funksiyalardan chekli sondagi arifmetik amallar yordamida tuzilgan murakkab funksiyalarga aytiladi.

1.6. Grafiklarni almashtirish

$y = f(x)$ funksiyaning grafigi uchun quyidagi almashtirishlar mavjud:

a) $y = f(x+a)$ – funksiyaning grafigini Ox o`qiga parallel $|a|$ birlikka siljitadi, ($a > 0$ - chapga, $a < 0$ – o'ngga);

b) $y = f(x)+b$ – funksiya grafigini Oy o`qi bo`yicha $|b|$ birlikka siljitadi, ($b > 0$ – yuqoriga, $b < 0$ pastga);

c) $y = c\,f(x)$ $(c \neq 0)$ – grafik $c > 1$ da Oy o`qiga nisbatan $c$ marta cho`ziladi, $0 < c < 1$ da esa c marta qisqaradi; $c < 0$ da grafik Ox o`qiga nisbatan simmetrik akslanadi.

d) $y = f(kx)$ $(k \neq 0)$ – grafik $k > 1$ da $y = f(x)$ ning grafigidan Ox o`qiga nisbatan $k$ marta cho`ziladi, $0 < k < 1$ da k marta qisqaradi. $k < 0$ da grafik Oy o`qiga nisbatan simmetrik akslanadi.

Funksiyalar grafigini chizing:

1.52 $y = 1 - 2x^2 - 4x$

Yechish. To`la kvadrat ajratamiz. $y = -2x^2 - 4x + 1 = -2(x^2 + 2x + 1) + 3 = -2(x+1)^2 + 3$. Grafiklarni almashtirishdan foydalanamiz. (Grafik 1)

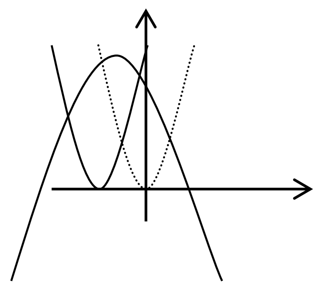
a) $y = x^2$ funksiyaning grafigini chizamiz:

b) $y = (x+1)^2$ ning grafigini, $y = x^2$ ni bir birlik chapga siljitish bilan hosil qilamiz.

c) $y = 2(x+1)^2$ grafigini $y = (x+1)^2$ grafikni Oy o`qi bo`yicha 2 marta cho`zish bilan hosil qilamiz.

d) $y = -2(x+1)^2$ grafigini yasash uchun $y = 2(x+1)^2$ning grafigini Ox o`qiga nisbatan simmetrik akslantiriladi.

e) $y = -2(x+1)^2+3$ grafigi $y = -2(x+1)^2$ning grafigini Oy o`qi bo`yicha 3 birlik yuqoriga siljitish bilan hosil qilinadi.



1.53 $y(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ funksiya berilgan. $y(\dfrac{1}{x})$ ni toping.

Yechish. $y(\frac{1}{x})$ ni topish uchun funksiya ifodasidagi *x* o`rniga $\frac{1}{x}$ ni qo`yish lozim. $y(\frac{1}{x})$ = $\frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{1}{x}-2}$,

yoki $y(\frac{1}{x})$ = $\frac{1+2x}{1-2x}$.

1.54 Ma`lumki, *y*(*x*) = 2*x*+5 va *y*(3-2*z*(*x*)) = 10-6*x*. *z*(*x*)ni toping.

Yechish. Bir tomondan *y*(3-2*z*(*x*)) ni *y*(*x*)dan *x* o`rniga (3-2*z*(*x*)) ni qo`yib hosil qilish mumkin; boshqa tomondan shartga ko`ra *y*(3-2*z*(*x*)) = 10-6*x*. Shunday qilib quyidagi tenglamaga ega bo`lamiz*:*

$$2(3-2z(x))+5 = 10-6x$$

$$z(x) = 1{,}5x+0{,}25.$$

Mustaqil bajarish uchun misol va masalalar

1.55. $y=\frac{1+x}{1-x}$ funksiya berilgan, $y(\frac{4-x}{2+x})$ ni toping.

1.56 $y=2^x$ berilgan, $y(\log_{0,5}x)$ ni toping.

1.57 Ma`lumki, $y(x)=\frac{3-x}{2+x}$, $y(\frac{1+z(x)}{2})=\frac{1}{x}$. *z*(*x*) ni toping.

1.58 Ma`lumki, $y=3^x$, *y*(4*z*(*x*)) = $\frac{1}{x^2}$. *z*(*x*) ni toping.

Funksiyalarning grafiklarini chizing.

1.59 y = 7+6x-x^2

1.60 $y=\frac{3x-2}{x+1}$

1.61 $y=3\cdot 2^{x+1}$

1.62 $y=2\log_2(4+x)$

1.63 $y=2\cos(2x+\frac{\pi}{2})$

1.64 $y=\frac{1-5x}{2-5x}$

1.7 Iqtisodiyotda uchraydigan funksiyalar

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

P – (price) narx;

Q – (quantity) miqdor;

R – (revenue) daromad;

π – (profit) foyda;

TC – (total cost) umumiy xarajat;

FC -(fixed cost) o’zgarmas xarajat;

VC -(average cost) o’zgaruvchan xarajat;

$TC = FC + VC$

Iqtisodiyotda talab va taklif, daromad, xarajat, foyda, Kobb Duglas, Lorens funksiyalaridan foydalaniladi. Iste’molchilar tomonidan sotib olingan tovar miqdori Q_D va tovar narxi orasidagi bo’g’lanish $Q_D = f(P)$ talab funksiyasi deyiladi. Ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori Q_S va tovar narxi orasidagi bo’g’lanish $Q_S = g(P)$ taklif funksiyasi deyiladi.

Muvozanat narxni topish uchun $\begin{cases} Q_D = f(P) \\ Q_S = g(P) \end{cases}$ sistema yechiladi.

Ishlab chiqaruvchining daromadi tovar narxi P bilan sotilgan miqdaori Q ning ko’paytmasidan iborat R=PQ foyda funksiyasi π daromad va umumiy xarajat funksiyalarining ayirmasidan iborat $\pi = R - TC$.

1.65 Tovarga bo`lgan talab darajasi oilaning daromad darajasi *x* bilan $y=a-\frac{b}{x+c}$ formula bilan bog`langan. Oila daromadining darajasi 158 p.b. bo`lganda tovarga bo`lgan talab darajasini toping. x = 50 bo`lganda $y$ = 0, $x$ = 74 bo`lganda y = 0,8, va x = 326 bo`lganda y = 2,3. ekanligi ma'lum.

Yechish:

$$\begin{cases} a-\dfrac{b}{50+c}=0 \\ a-\dfrac{b}{74+c}=0{,}8 \\ a-\dfrac{b}{326+c}=2{,}3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a-\dfrac{b}{50+c} \\ \dfrac{b}{50+c}-\dfrac{b}{74+c}=0{,}8 \\ \dfrac{b}{50+c}-\dfrac{b}{326+c}=2{,}3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{b(74+c-50-c)}{(50+c)(74+c)}=0{,}8 & (1) \\ \dfrac{b(326+c-50-c)}{(50+c)(326+c)}=2{,}3 & (2) \\ a=\dfrac{b}{50+c} & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24b=0{,}8(c+50)(c+74) & (1) \\ 276b=2{,}3(c+326)(c+50) & (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} 30b=(c+50)(c+74) & (1) \\ 120b=(c+326)(c+50) & (2) \end{cases}$$

$\dfrac{30b}{120b}=\dfrac{(c+50)(c+74)}{(c+3260)(c+50)}$ $\quad \dfrac{1}{4}=\dfrac{c+74}{c+326}$ dan c=10 kelib chiqadi.

yuqoridagilardan esa b=168, a=2,8 ekanligi kelib chiqadi.

Demak talabning daromadga bog'liq grafigi $y = 2{,}8 - \dfrac{168}{x+10}$ ga teng ekan.

X=158 p.b bo'lganda talab miqdori $y = 2{,}8 - \dfrac{168}{158+10} = 1{,}8$ ga teng bo'lar ekan.

Javob: 1,8

1.66 Firma sport tovarlari ishlab chiqaradi sport kostyumining narxi P_1=30 p.b. bo'lganda bir kunlik sotilish miqdori Q_1=50 ta, narx P_2=32 p.b. bo'lganda esa sotilish miqdori Q_2=40 ta. Talab funksiyasi chiziqli.Bu tovarni ishlab chiqarishga ketgan xarajat TC =20+6Q. Agar kunlik foyda 580 p.b. bo'lsa, bir kunda ishlab chiqarilgan va sotilgan tovar miqdorini aniqlang. Tovar qanday narxda sotilgan?

Yechish. Talab chiziqli bo'lganligi uchun ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi $\dfrac{Q-Q_1}{Q_2-Q_1}=\dfrac{P-P_1}{P_2-P_1}$ dan foydalanib talab funksiyasi $P=40-0{,}2Q^2$ ni topamiz.

$$R=PQ=(40-0{,}2Q)Q=40Q-0{,}2Q^2$$

Ishlab chiqaruvchining foydasi $\pi = R - TC = 40Q - 0{,}2Q^2 - 20 - 6Q$.

Masalaning shartiga ko'ra foyda 580 p.b. ekanligidan

$-0{,}2Q^2+34Q-20=580 \quad | \cdot (-5)$

$Q^2-170Q+3000=0$ kvadrat tenglamani yechib Q_1=150 ; Q_2=20 ni topamiz.

Unga mos keluvchi narxlar esa talab funksiya P_1=10 , P_2=36.

Mustaqil bajarish uchun misol va masalalar

1.67 B tovar ishlab chiqaruvchining umumiy xarajati TC=36+6Q , bu tovarga bo'lgan talab funksiyasi esa P=20-0,5Q ifoda bilan berilgan , bu yerda Q ming birlikda ishlab chiqarilgan va sotilgan tovar miqdori, P tovarning birlik narxi. Foyda 60000 so'mdan kam bo'lmasligi uchun nechta tovar ishlab chiqarish kerak?

1.68 Quyidagi berilganlardan foydalanib masalani yeching : P=30-0,25Q , TC=200+5Q va foyda 400000 so'mdan kam bo'lmasligi kerak?

1.69 Uyali telefon ishlab chiqaradigan firmaning xarajat funksiyasi TC=10+4Q bu yerda Q bir oyda ishlab chiqarilgan telefonlar miqdori . Firmaning daromad funksiyasi , $R=0{,}125Q^2+7Q$.Agar bir oyda 28000 telefon ishlab chiqarilgan va sotilgan bo'lsa , foydani toping.

Mavzu yuzasidan savollar.

1. Matematik modelning mohiyati nimadan iborat?
2. Iqtisodiy ob’yektlarning matematik modelini tuzish bosqichlarini sanab o`ting.
3. Transport masalasining matematik modeli qanday tuziladi?

Adabiyotlar

1. SH.Shorahmetov, B.Naimjanov, «Iqtisodchilar uchun matematica», - T.: «Fan va texnologiya»., 2007 y.
2. К. Сафаева « Математик дастурлаш », Тошкент, Ибн Сино, 2004 й.
3. Саипназаров Ш. А., Ортикова М.Т., “Бошланғич молиявий математика асослари” – Т.: ТДИУ 2002 й.
4. Масагутова Р. В. “Математика в задачах для экономистов” – Т. Ўқитувчи 1996 й.
5. Замков О. О., Толстопятенко А. Б., Черемных Ю. Н. “ Математические методы в экономике ”, - М.: ДИС 2004 г.
6. Клименко Ю. И. “Высшая математика для экономистов”. – Москва 2005 г.
7. Кремер Н. Ш. и др. “Практикум по высшей математике для экономистов ” – М.: 2004 г.
8. Шапкин А.С. «Задачи с решениями по высшей математике теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию» - М.: 2008г.
9. Макаров С.И., Мищенко М.В., «Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики» Н.: 2008г.
10. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. «Основы математики и ее приложения в экономическом образовании» -М.: 2008
11. Ермаков В.И. «Общий курс высшей математика для экономистов». –Н: 2010г.
12. Ермаков В.И. «Общий курс высшей математика для экономистов». –Н: 2010г.

2. Matrisa va determinantlar
2.1 Matrisalar. Diagonal va birlik matrisalar

Sonlarning m ta satr va n ta ustundan iborat to`g`ri to`rburchak shaklida tuzilgan jadvali m×n o`lchamli matrisa deyiladi. U

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

ko`rinishida yoziladi. Bunda $a_{ij}$- haqiqiy sonlar $(i=\overline{1,m}\ \ j=\overline{1,n})$ va matrisaning elementlari hisoblanib $i$ va $j$ lar mos ravishda qator va ustun indekslari, $m\times n-A$ matrisaning o`lchami deb ataladi. (2.1) formuladagi A matrisaning qisqacha ko`rinishi quyidagicha yoziladi:

$$A=\left\|a_{ij}\right\|,\ (i=\overline{1,m}\ \ j=\overline{1,n})$$

Agar matrisaning barcha elementlari nolga teng bo`lsa, u holda bu matrisa nol matrisa deb ataladi.

Matrisaning qatorlar soni ustunlar soniga teng bo`lsa, bu matrisa kvadrat matrisa deyiladi.

Kvadrat matrisaning bosh dioganaldan tashqari barcha elementlari nolga teng bo`lsa, bunday matrisa dioganal matrisa deb ataladi.

Dioganal matrisaning bosh dioganalidagi barcha elementlari birga teng bo`lsa, bunday matrisa birlik matrisa deyiladi.

Agar ikkita A va B matrisalarning o`lchamlari bir xil bo`lib, elementlari ham mos ravishda o`zaro teng, ya`ni $a_{ij} = b_{ij}\,(i=\overline{1,m}\ \ j=\overline{1,n})$ bo`lsa, ular o`zaro teng matrisalar deyiladi.

2.2 Matrisalarni qo`shish, ayirish, songa ko`paytirish

Bir xil o`lchamli $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ matrisalarning yig`indisi deb mos elementlar yig`indisi $c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$ ga teng bo`lgan $C = (c_{ij})$ matrisaga aytiladi. Matrisalarning bunday qo`shishning kommutativligi va assosiativligi ravshandir. Matrisalar ustida ayirish amali ham mavjud bo`lib, natijada elementlari berilgan matrisaning mos elementlari ayirmasiga teng bo`lgan matrisa hosil bo`ladi.

Matrisalarni songa ko`paytirish uchun uning har bir elementi shu songa ko`paytiriladi.

2.1 A va B matrisalarning yig`indisini hisoblang. $A=\begin{pmatrix}2&3\\6&5\\1&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&8\\7&2\\4&6\end{pmatrix}$

Yechish. $A+B=\begin{pmatrix}2&3\\6&5\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&8\\7&2\\4&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3&3+8\\6+7&5+2\\1+4&2+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&11\\13&7\\5&8\end{pmatrix}$

2.2 Quyidagi amallarni bajaring. $2\begin{pmatrix}3&-1&4\\2&5&0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&4\end{pmatrix}.$

2.3. Agar $A=\begin{pmatrix}7&2&1&5\\3-2&4-3\\2&1&1&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5&4&3&0\\2&3-2&1\\1&0&2&4\end{pmatrix}$ bo`lsa, $\frac{1}{2}B-\frac{5}{2}A$ ni hisoblang.

2.4 Do`konga birinchi hafta 3 turdagi tovar keltirildi: muzlatkich, televizor va kir yuvish mashinalari. Quyidagi

$$X_1 = (10;\ 12;\ 8)$$

vektor 10 ta muzlatgich, 12 ta televizor va 8 ta kir yuvish mashinalari keltirilganligini bildiradi. Agar 2-hafta bu tovarlar quyidagi

$$X_2 = (5;\ 8;\ 10)$$

miqdorda keltirilgan bo`lsa, umumiy tovarlar miqdorini aniqlang.

2.5 2.4. masala shartidagi do`konlar soni ikkita bo`lsin, u holda tovarlarni keltirishni ikkata satr va uchta ustunli matrisa yordamida ifodalash mumkin. Birinchi satr 1-do`konga, ikkinchisi 2-do`konga keltirilgan mahsulotlar miqdori. Tovarlarning ikkita do`konga birinchi marta olib kelinishi quyidagi $A_1=\begin{pmatrix}10&12&8\\5&20&14\end{pmatrix}$ matrisa bilan, ikkinchi marta olib kelinishi esa, $A_2=\begin{pmatrix}5&8&10\\12&5&10\end{pmatrix}$ matrisa bilan berilgan bo`lsa, keltirilgan ja`mi tovarlar miqdorini aniqlang.

2.6 Tarmoqdagi m ta zavod n turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. A_{mxn} matrisa – har bir zavodning birinchi kvartalda beradigan mahsulot hajmi, B_{mxn} matrisa esa zavodlarning ikkinchi kvartalda beradigan mahsulot hajmi. (a_{ij}; b_{ij}) – i - zavodning j - turdagi mahsulotdan ishlab chiqarish hajmi. Quidagilarni aniqlang:

a) ikkala kvartaldagi mahsulot hajmi;
b) ikkinchi va birinchi kvartalda har zavodlar ishlab chiqargan tovarlar hajmi orasidagi farq;
c) agar bir birlik mahsulotning qiymati λ bo`lsa, yarim yillikda ishlab chiqarilgan mahsulot qiymatini toping.

2.3. Matrisalarni ko`paytirish

$m \times k$ o`lchamli $A$ matrisaning $k \times n$ o`lchamli B matrisaga ko`paytmasi deb *mxn* o`lchamli shunday $C = A \cdot B$ matrisaga aytiladiki, uning c_{ij} elementi A matrisaning *i*-satr elementlarini B matrisaning *j*-ustinidagi mos elementlariga ko`paytmalari yig`indisiga teng, ya`ni

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}$$

Agar $AB = BA$ bo`lsa, u holda $A$ va $B$ matrisalar o`rni almashinadigan yoki kommutativ matrisalar deyiladi. Matrisalarning kommutativlik sharti ba`zi hollardagina bajariladi. Masalan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 10{,}5 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ matrisalar uchun}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 10{,}5 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 6 + 0\cdot 10{,}5 + 2\cdot 3 & 1\cdot 2 + 0\cdot 6 + 2\cdot 6 & 1\cdot 6 + 0\cdot 10{,}5 + 2\cdot 3 \\ 3\cdot 6 + 1\cdot 10{,}5 + 0\cdot 3 & 3\cdot 2 + 1\cdot 6 + 0\cdot 6 & 3\cdot 6 + 1\cdot 3 + 0\cdot 3 \\ 0\cdot 6 + 2\cdot 10{,}5 + 0\cdot 3 & 0\cdot 2 + 2\cdot 6 + 0\cdot 6 & 0\cdot 6 + 2\cdot 3 + 0\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 14 & 12 \\ 28{,}5 & 12 & 21 \\ 21 & 12 & 6 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 10{,}5 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cdot 1 + 2\cdot 3 + 6\cdot 0 & 6\cdot 0 + 2\cdot 1 + 6\cdot 2 & 6\cdot 2 + 2\cdot 0 + 6\cdot 0 \\ 10{,}5\cdot 1 + 6\cdot 3 + 3\cdot 0 & 10{,}5\cdot 0 + 6\cdot 1 + 3\cdot 2 & 10{,}5\cdot 2 + 6\cdot 0 + 3\cdot 0 \\ 3\cdot 1 + 6\cdot 3 + 3\cdot 0 & 3\cdot 0 + 6\cdot 1 + 3\cdot 2 & 3\cdot 2 + 6\cdot 0 + 3\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 14 & 12 \\ 28{,}5 & 12 & 21 \\ 21 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

$AB=BA$ bo`lib, A va B matrisalarning kommutativlik sharti bajarildi.
Matrisalarni ko`paytirishda quyidagi hollar mavjud:
1) $A \cdot B$ ko`paytma aniqlanmagan;
2) $A \cdot B$ ko`paytma aniqlangan lekin $A \cdot B \neq B \cdot A$;
3) shunday A va B matrisalar borki, ular uchun $A \cdot B$ ko`paytma aniqlangan va $A \cdot B = B \cdot A$ bo`ladi.

Matrisalarni ko`paytirish kommutativ emas, lekin assotsiativ ya`ni umumiy holda $A \cdot B \neq B \cdot A$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

4) shunday A≠0, B≠0 matritsalar mavjudki A·B=0 bo’ladi.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.7. Matrisalarning ko`paytmasini aniqlang.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & -5\\ 1 & 2 & -3 & 4\\ -1 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Yechish

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2\cdot3+3\cdot4+4\cdot1-5\cdot2 & 2\cdot2+3\cdot1+4\cdot3-5\cdot0 & 2\cdot1-3\cdot1+4\cdot2-5\cdot1\\ 1\cdot3+2\cdot4-3\cdot1+4\cdot2 & 1\cdot2+2\cdot1-3\cdot3+4\cdot0 & 1\cdot1-2\cdot1-3\cdot2+4\cdot1\\ -1\cdot3-2\cdot4+3\cdot1+1\cdot2 & -1\cdot2-2\cdot1+3\cdot3+1\cdot0 & -1\cdot1+2\cdot1+3\cdot2+1\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}12 & 19 & 2\\ 16 & -5 & -3\\ -6 & 5 & 8\end{pmatrix}$$

2.8 A = $\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$ bo`lsa, $A{\cdot}B$ ni toping.

2.9. Bozordan 4 hafta davomida xarid qilingan 3 xil mahsulot; go`sht, guruch, yog` miqdori *A* matrisa bilan va ularning narxlari esa *B* matrisa bilan berilgan.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 4\\ 2 & 5 & 6\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1000\\ 600\\ 300\end{pmatrix}$$

To’rt hafta davomida bu mahsulotlarni sotib olish uchun sarflanadigan xarajatni aniqlang.

2.10. Zavoddan yangi ishlab chiqarilgan dvigatellarning 40*%i* qayta ta`mirlashga beriladi, qolgani foydalanishga chiqarib yuboriladi. Statistik ma`lumotlarga qaraganda ta`mirlangan dvigatellarning 65*%i* yana qayta ta`mirlashga qaytariladi va 35*%i* yaxshi ishlab ketadi. Qayta ta`mirlashni talab qilgmagan dvigatellarning 20*%i* 1 oydan keyin qayta ta`mirlashni talab qiladi. Qolgani esa yaxshi ishlab ketadi. 2 oydan keyin yaxshi ishlab ketadigan va qayta ta`mirlash kerak bo`lgan dvigatellar qismini aniqlang. Masala sharti xuddi shu tarzda davom etsa 3 oydan keyingisini ham aniqlang.

Yechish. Ishlab chiqarilgandan keyin barcha dvigatellarning 0,6 qismi yaxshi ishlaydi, 0,4 qismi esa qayta ta`mirlashni talab qiladi. Bir oydan keyin yaxshi ishlab ketadigan dvigatellar ulushi 0,6×0,8+0,4×0,35 = 0,62 ni, qayta ta`mirlanishi kerak bo`lgan dvigatellar ulushi esa 0,6×0,2+0,4×0,65 = 0,38 ni tashkil etadi. *t*–holatdagi aniqlikni beruvchi $X_t$ qatorni kiritamiz. $X_t = (x_{1t};x_{2t})$, bunda $x_{1t}$ – *t* - momentdagi yaxshi ishlab ketadigan dvigatellar ulushi. $x_{2t}$ - *t* momentdagi qayta ta`mirlanishi kerak bo`lgan dvigatellar ulushi. Quyidagi matritsani qaraymiz;

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \mathrm{a}_{12}\\ a_{21} & \mathrm{a}_{22}\end{pmatrix}$$

bunda a_{ij} – dvigatellar ulushi, *i* – dvigatellar holati (ishlab ketishi yoki yo`qligi: 1- yaxshi ishlab ketadi, 2- ta`mirlash kerak), *j* - bir oydan keyingi holati. Ko`rinib turibdiki, matritsaning qatoridagi elementlari yig`indisi 1 ga teng bo`lishi kerak va barcha elementlar nomanfiy.

$$X_0=(0{,}6\ \ 0{,}4),\qquad A=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}35 & 0{,}65\end{pmatrix};$$

bir oydan keyin

$$X_1 = X_0A = (0{,}6\ \ 0{,}4)\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}35 & 0{,}65\end{pmatrix} = (0{,}62\ 0{,}38);$$

ikki oydan keyin

$$X_2 = X_1 \times A = X_0 \times A^2 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,71 & 0,29 \\ 0,5075 & 0,4925 \end{pmatrix} = (0,629\ ;\ 0,371),$$

$X_3 = X_2 \times A = X_0 A^3 = \begin{pmatrix} 0,634 & 0,366 \end{pmatrix}$ Umumiy holda $X_t = X_0 \times A^t$ formula o`rinli.

Matritsani transponirlash – A matritsadan satrlari va ustunlari o'rni almashgan A′ matritsaga o'tishdir. A′ matritsa A matritsaga nisbatan transponirlangan deyiladi.

Ta'rifdan kelib chiqadiki agar A matritsani o'lchami m× n bo'lsa, u holda transponirlangan matritsaning o'lchami n× m bo'ladi.

Masalan:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 10 & 8 & 20 \end{bmatrix};\ A' = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 7 & 8 \\ 9 & 20 \end{bmatrix}$$

Transponirlashning xossalari:

1) $(A')' = A$ 3) $(A + B) = A + B$

2) $(\lambda A)' = \lambda A'$ 4) $(AB)' = B'A'$

2.11 Korxona uch turdagi mebel ishlab chiqarib, mahsulotini 4 ta tumanda sotadi.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

matrisada b_{ij} – i – turdagi mebelni j - tumandagi qiymati. Agar $A = \begin{pmatrix} 200 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}$ matrisa orqali bir oyda tumanlarga tarqatilgan mebellar miqdori berilgan bo`lsa, korxonaning har bir tumandan oladigan pul miqdorini aniqlang.

2.12. Korxona 4 xil xom ashyodan foydalanib 3 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. A matrisaning elementlari a_{ij} $(i = \overline{1,4};\ j = \overline{1,3})$ orqali j - turdagi mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan i - xom ashyo miqdori aniqlanadi. B matrisa korxonaning ma`lum bir vaqt oralig`ida ishlab chiqargan mahsulot miqdorini ifodalaydi.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix}$$

mahsulot ishlab chiqarishga sarflanadigan umumiy xom ashyo miqdorini toping.

2.13. Telefon apparatlarini ta`mirlovchi usta 70% telefonlarni past darajada, 20% o`rta darajada va 10% to`liq ta`mirdan chiqardi. Statistik ma`lumotlarga ko`ra 70% past darajada ta`mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 10% past darajada, 60% o`rta darajada, 30% ni to`liq ta`mirlashadi. O`rta darajada ta`mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 20% past darajada, 50% o`rta, 30% ni to`liq ta`mirlashadi. To`liq ta`mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 60% past darajada, 40% o`rta darajada ta`mirlashadi. Agar masala sharti shu tarzda davom etsa 1, 2, 3 – yillardan keyingi har bir darajada ta`mirlangan telefonlar ulushini aniqlang.

2.14 . Ikki turdagi yog` mahsuloti uchta magazinda sotiladi. Birinchi va ikkinchi kvartallarda ikki turdagi yog`ning uchta magazinda sotilish hajmini mos ravishda A va B matrisalar bilan berilgan.

$$A=\begin{pmatrix}20 & 30\\ 10 & 20\\ 25 & 20\end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix}10 & 15\\ 14 & 12\\ 16 & 15\end{pmatrix}.$$

1) ikkala kvartal davomida sotilgan mahsulotlar hajmini aniqlang.
2) Ikkinchi kvartalda sotilgan mahsulot hajmining birinchi kvartalda sotilgan mahsulot hajmidan farqini aniqlang.

2.15. Korxona ikki turdagi xom ashyodan foydalanib, 3 xil mahsulot ishlab chiqaradi. *A* matrisa bilan *j* - xil mahsulotga *i* - turdagi xom ashyoning ishlatilish hajmi berilgan. *B* matrisa esa bir kvartalda ishlab chiqarilgan mahsulotlar hajmi. Xom ashyo birligining narxi *P* matrisa bilan berilgan. Quyidagilarni aniqlang.

1) ishlatilgan jami xom ashyo miqdorini aniqlovchi *C* matrisani;
2) sarflangan jami xom ashyoning umumiy narxi;

$a)\ A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix};\ P=(6\ ;3) \quad b)\ A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix};\ P=(3\ ;5)$

2.16. Zavod tikuv mashinalarini ishlab chiqaradi va ishlab chiqarilgan mashinalar ikki holatda bo`ladi. 1) yaxshi ishlab ketadigan mashinalar, 2) ta`mirlashni talab qiladigan mashinalar. Ishlab chiqarilgan mashinalarning *P %i* yaxshi ishlab ketadigan va (100-*P*) *%i* qayta ta`mirlashni talab qiladigan mashinalar hisoblanadi. Statistik ma`limotlarga qaraganda yaxshi ishlab ketgan mashinalarning 1 oydan keyin 70*%i* yaxshi ishlaydi va 30*%i* qayta ta`mirlashni talab qiladi. Qayta ta`mirlangan mashinalar esa bir oydan keyin 60*%i* yaxshi ishlab ketadigan va 40*%i* qayta ta`mirlashni talab qiladi. Yana bir oydan keyin bu mashinalarning ishlab ketish holatlari qanday bo`ladi?

$a)\ P=80 \quad b)\ P=50 \quad c)\ P=20$

2.17. Quyidagi amallarni bajaring:

$$3\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 2 & 5 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

2.18. *A* va *B* matrisalar berilgan, $A\cdot B=(c_{ij})$ matrisaning c_{32} elementini toping.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4 & 5\\ 9 & 2 & -3 & 4\\ -1 & -5 & 3 & 11\end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & -1\\ 1 & -3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

2.4. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar

Ikkinchi tartibli matrisaning determinanti deb quyidagi songa aytiladi:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \qquad (2.6)$$

uchinchi tartibli matrisaning determinanti deb quyidagi songa aytiladi.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11} \qquad (2.7)$$

2.19. Berilgan matrisalarni determinantini hisoblang.

$$a)\ A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix} \qquad b)\ A=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 4 & 7\end{pmatrix} \qquad c)\ A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 8\\ 4 & 5 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

Yechish.

$$a)\ |A|=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=3\cdot 4-2\cdot 5=2$$

$$b)\ |A|=\begin{vmatrix}5 & 8\\ 4 & 7\end{vmatrix}=5\cdot 7-4\cdot 8=3$$

$$c)\ |A|=\begin{vmatrix}3 & 2 & 8\\ 4 & 5 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=3\cdot 5\cdot 4+2\cdot 3\cdot 2+4\cdot 1\cdot 8-8\cdot 5\cdot 2-3\cdot 3\cdot 1-4\cdot 2\cdot 4=-17$$

2.5. Minor. Algebraik to`ldiruvchi

Determinant a_{ik} elementining M_{ik} minori deb, bu element turgan qator va ustunni o`chirish natijasida hosil bo`lgan determinantga aytiladi.

Determinant a_{ik} elementining algebraik to`ldiruvchisi

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik} \qquad (2.3)$$

munosabat bilan aniqlanadi.

Har qanday determinant ixtiyoriy satri (ustuni) elementlarining mos algebraik to`ldiruvchilariga ko`paytmalarining yig`indisidan iborat, ya`ni:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in} \qquad (2.4)$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\dots+a_{nj}A_{nj} \qquad (2.5)$$

(2.4) va (2.5) tengliklar mos ravishda determinantning i-satr va j-ustun elementlari bo`yicha yoyilmasi deyiladi. (2.4) va (2.5) formulalar matrisalarning determinantlarini hisoblash uchun qo`llaniladi.

2.6. Yuqori tartibli matrisaning determinanti va uning xossalari

Kvadrat matrisa uchun shu matrisaning elementlaridan tuzilgan n - tartibli determinantni hisoblash mumkin. Bu determinant *det A* yoki $|A|$ orqali belgilanadi:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2.2)$$

<u>Determinantning asosiy xossalari:</u>

1. Agar determinantning barcha satr elementlarini ustun elementlariga (yoki aksincha), almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmaydi $(\det A = \det A')$.

2. Agar determinantning ikki yonma- yon turgan satr (ustun) elemenylarini o'rnini mos ravishda almashtirsak, determinantning qiymati qarama-qarshi ishoraga o'zgaradi.

3. Agar determinantning biror satr (ustun) elementlari umumiy k ko'paytuvchiga ega bo'lsa, u holda bu ko'paytuvchini determinant tashqarisiga chiqarish mumkin.

4. Agar determinantning biror satr (ustun) elementlari mos ravishda boshqa yo'l (ustun) elementlariga proporsional bo'lsa, u holda determinant qiymati nolga teng bo'ladi.

5. Agar determinantning satr (ustun) elementlari ikki ifodaning yig'indisi ko'rinishida bo'lsa, u holda determinant ikki determinant yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin.

6. Agar determinantning biror ustun (satr) elementlariga boshqa ustun (satr)ning mos elementlarini umumiy ko`paytuvchi *m* soniga ko`paytirib qo`shilsa, uning qiymati o`zgarmaydi.

2.20. Berilgan determinantni to`rtinchi satr elementlari bo`yicha yoyib hisoblang

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

Yechish. 1) To`rtinchi satr elementlari bo`yicha yoyib yechamiz:

$$|A| = a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44} = -a_{41}M_{41} + a_{42}M_{42} - a_{43}M_{43} + a_{44}M_{44} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 546$$

2) Uchunchi ustun elementlarini nolga aylantirish usuli bilan hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & -10 & 0 & 6 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ -19 & 17 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 17 & -10 & 6 \\ -3 & -2 & 4 \\ -19 & 17 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 17 & -10 & 6 \\ -3 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} -10 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 17 & 6 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2(-40+12) + 7(68+18) = 546$$

2.21 Berilgan determinantlarni hisoblang.

1. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 & 1 \\ 13 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & -7 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & -5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & -4 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 11. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 12. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ 14. $\begin{vmatrix} 13 & 14 & 15 & 13 \\ 18 & 18 & 23 & 22 \\ 5 & 6 & 7 & 7 \\ 25 & 29 & 30 & 26 \end{vmatrix}$ 15. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 13 & 19 & 6 & 9 \\ 6 & 17 & 11 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 9 & 9 & 13 & -17 \\ 10 & 15 & 22 & 3 \\ 5 & 9 & 13 & 6 \\ 9 & 15 & 21 & 17 \end{vmatrix}$ 17. $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$ 18. $\begin{vmatrix} -2 & -5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 9 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ 21. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 23. $\begin{vmatrix} -2 & 6 & -2 & 4 \\ -4 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 12 & 10 & 8 \\ 8 & 6 & 0 & -6 \end{vmatrix}$ 24. $\begin{vmatrix} 8 & 5 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

$$25.\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ - & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad 26.\begin{vmatrix} -2 & 7 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 9 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad 27.\begin{vmatrix} 5 & -6 & 10 & -7 & -2 \\ -3 & 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -4 & 5 & -3 \\ 6 & -8 & 7 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$28.\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ -2 & 7 & 3 & 5 & -1 \\ -4 & -2 & 5 & -2 & -4 \\ -6 & 4 & 5 & 2 & -4 \\ -3 & 3 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad 29.\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ a_1 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{vmatrix} \quad 30.\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2.22

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$ ekanligini isbotlang.

2.23 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & -7 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ bo`lsa $|A|$ ni hisoblang.

2.24 Berilgan determinantni uch usul bilan hisoblang:

a) *i*-satr bo`yicha yoyib;
b) *j*-ustun elementlari bo`yicha yoyib;
c) Oldin *j* - ustundagi bittadan boshqa elementlarini nolga aylantirib, so`ngra shu ustun elementlari bo`yicha yoyib.

$$a)\ \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 3 & 5 & -5 & 0 \\ 4 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$i=3,\quad j=2 \qquad\qquad i=4,\quad j=1$$

2.25 . Tenglamani yeching. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & x-1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

2.26. $y = \begin{vmatrix} 1 & x-2 & 2 \\ 3 & x & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ to’gri chiziqning funksiyaning burchak koeffisentini toping va grafigini chizing.

2.7. Teskari matrisa. Xosmas matrisa

A kvadrat matrisa uchun $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$ tenglik bajarilsa, u holda A^{-1} matrisa A matrisaga teskari matrisa deyiladi.(E birlik matrisa).

A kvadrat matrisaning determinanti noldan farqli, ya`ni $|A|\neq 0$ bo`lsa, u holda A matrisa xosmas matrisa deb ataladi.

A kvadrat matrisaning teskari matrisasi mavjud (va yagona) bo`ladi, faqat va faqat bu matrisa xosmas bo`lsa.Teskari matritsa quyidagi munosabat yordamida hisoblanadi.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

bu erda $|A|$ - A matrisaning determinanti, A_{ij} esa a_{ij} elmentining algebraik to`ldiruvchisi.

2.27 Berilgan matrisaga teskari matrisani toping

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Yechish. $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}=5+12+21+10-21+6=33;$ va $\begin{matrix} A_{11}=-16,\ A_{12}=9,\ A_{13}=31 \\ A_{21}=9,\ A_{22}=-3,\ A_{23}=-3 \\ A_{31}=11,\ A_{32}=0,\ A_{33}=-11 \end{matrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}=\frac{1}{33}\begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ \frac{31}{33} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Tekshirib ko`ramiz:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{33}\begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}=\frac{1}{33}\begin{pmatrix} -16+27+22 & -32-45+77 & -16+27-11 \\ 9-9+0 & 18+15+0 & 9-9+0 \\ 31-9-22 & 62+15-77 & 31-9+11 \end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{33}\begin{pmatrix} 33 & 0 & 0 \\ 0 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & 33 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

2.28. Quyidagi berilgan matrisaga teskari matrisani aniqlang.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.29. Quyidagi matrisali tenglamani yeching:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

2.30. Quyidagi matrisalarni teskari matrisasini aniqlang.

1. $\begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 8 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -15 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 14 & -4 & -4 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 11 \\ 7 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -7 & -2 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & -5 & -6 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 8 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -2 & -5 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 17. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ 18. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ 20. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 6 & -10 & 6 \\ 4 & 14 & -2 \end{pmatrix}$ 21. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ 23. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 10 & -8 & -4 \end{pmatrix}$ 24. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 26. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ 27. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 \\ -6 & -7 & -8 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix}$ 29. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 8 & 12 & 1 \\ 11 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 30. $\begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 9 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2.31. Quyidagi matrisalarni teskari matrisasini toping

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & -2 & -5 \end{pmatrix} \qquad b)\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -4 \\ -3 & 3 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

2.8 Matrisaning rangi. Elementar almashtirishlar

$m \times n$ o'lchamli A matrisaning rangi deb, uning noldan farqli minorining eng yuqori tartibiga aytiladi va $rang(A)$ yoki $r(A)$ kabi belgilanadi.
Matrisa ustidagi quyidagi almashtirishlar elementar almashtirishlar deb ataladi:

a) faqat nollardan iborat satrni (ustunni) o`chirish;
b) ikkita satr (ustun)ning o`rnini almashtirish;
c) bir satr (ustun)ning barcha elementlarini biror ko`paytuvchiga ko`paytirib, boshqa satr (ustun) elementlariga qo`shish;
d) satr (ustun)ning barcha elementlarini noldan farqli bir xil songa ko`paytirish;

Elementar almashtirishlar matrisani rangini o`zgartirmaydi.

e) matritsani transponirlash

2.32 Berilgan matrisani rangini toping.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Yechish.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{-1} & \boxed{-4} & \boxed{-1} \\ + & + & \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \\ -19 & -6 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & -19 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{-2} & \boxed{-1} \\ + & + \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -15 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Demak, $r(A) = 3$.

2.33 Berilgan matrisalarni rangini aniqlang.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 11 & 3 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 17 & 12 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2.34.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

2.35. Matrisalarning rangini toping.

1. $\begin{pmatrix} 25 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 11 \\ 7 & 8 & 15 \\ 31 & 36 & 67 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 15 & 20 & 25 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & 14 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 9 & 4 & -1 & 5 \\ 17 & -3 & -8 & 5 \\ 5 & -2 & -3 & 1 \\ -13 & 9 & 10 & -1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 15 & 13 & 21 \\ -7 & 5 & -4 \\ 23 & 31 & 38 \\ 8 & 2-18 & 17 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} -9 & 20 & -3 & -6 \\ -5 & 2 & -3 & -4 \\ 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 11 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 9 & 18 & 27 \\ 4 & 3 & 12 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 3 & 23 & 43 & 63 & 83 \\ 1 & 11 & 21 & 31 & 41 \\ 4 & 24 & 44 & 64 & 84 \\ 8 & 58 & 108 & 158 & 208 \\ 6 & 46 & 86 & 126 & 166 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 2 & 12 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 10 & 11 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 12 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$

18 $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ -4 & -3 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 11 \\ 7 & 8 & 15 \\ 31 & 36 & 67 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 15 & 20 & 25 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & 14 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 9 & 4 & -1 & 5 \\ 17 & -3 & -8 & 5 \\ 5 & -2 & -3 & 1 \\ -13 & 9 & 10 & -1 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 15 & 13 & 21 \\ -7 & 5 & -4 \\ 23 & 31 & 38 \\ 8 & 18 & 17 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} -9 & 20 & -3 & -6 \\ -5 & 2 & -3 & -4 \\ 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 11 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix}$

2.9 Matrisalar algebrasining iqtisodiyotda qo`llanilishi

2.36. Korxona 3 xil xom ashyodan foydalanib 5 xil mahsulot ishlab chiqaradi. Xom ashyo sarflash me'yori A matritsa bilan berilgan.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Xom ashyoning birlik narxi $B =$ (10 25 30) matrisa bilan berilgan. Agar ishlab chiqarish rejasi (90, 110, 140, 180, 200) bo`lsa, korxonaning umumiy xarajatini toping.

Yechish. Avvalo ishlab chiqilgan mahsulotlar har bir turining bir birligiga ketadigan xarajatni topamiz. Buning uchun B va A matrisalarni ko`paytiramiz:

$$C = B \cdot A = (10 \;\; 25 \;\; 30) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (175 \;\; 100 \;\; 260 \;\; 215 \;\; 255)$$

$$D = \begin{pmatrix} 90 \\ 110 \\ 140 \\ 180 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Umumiy xarajatni topish uchun C va D matrisalarni ko`paytiramiz.

$$X = (175 \;\; 100 \;\; 260 \;\; 215 \;\; 255) \cdot \begin{pmatrix} 90 \\ 110 \\ 140 \\ 180 \\ 200 \end{pmatrix} == 152850$$

2.37. Korxona 2 xil xom ashyo sarflab 3 xil mahsulot ishlab chiqaradi. Xom ashyo sarflash normasi quyidagi matrisa bilan berilgan:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Bu yerda a_{ij} (i = 1,2,3, j = 1,2) element i - mahsulot birligiga j - xom ashyodan qancha sarflanishini ko`rsatadi. Mahsulot ishlab chiqarish rejasi satr matrisa bilan berilgan

C = (80; 120; 100). Har bir tur xom ashyoning narxi ustun matrisa bilan berilgan. $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$

quyidagilarni aniqlang: 1) mahsulot ishlab chiqarish rejasiga zarur bo`lgan xom ashyo miqdorini, 2) xom ashyoning umumiy narxini.

2.38 . Hafta davomida bozordan xarid qilinadigan uch turdagi mahsulotga sarflanadigan pul miqdorini hisoblash kerak bo`lsin. A matrisa bilan har hafta sotib olinadigan mahsulot miqdori, har bir mahsulot birlik narxi esa B matrisa bilan berilgan:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1000 \\ 600 \\ 300 \end{pmatrix}$$

2.39 . Korxona 2 xil xom ashyoni sarflab 3 xil mahsulot ishlab chiqaradi. Xom ashyo sarflash normasi A matrisa bilan berilgan. Har bir xom ashyo turining narxi ustun matrisa B bilan berilgan. Mahsulot ishlab chiqarish rejasi satr matrisa C bilan berilgan. Mahsulot ishlab chiqarish rejasiga kerak bo`lgan xom ashyo miqdorini va uning umumiy narxini aniqlang.

$$A=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 4 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}120 & 150 & 70\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}30\\ 40\end{pmatrix}$$

2.40 . Korxona 2 xil xom ashyo turini sarflab 3 xil mahsulot ishlab chiqaradi. Xom ashyo sarflash normasi A matrisa bilan, mahsulot ishlab chiqarish rejasi esa satr matrisa C bilan berilgan. Har bir xom ashyo turining narxi ustun matrisa B bilan berilgan. Mahsulot ishlab chiqarish rejasiga kerak bo`lgan xom ashyo miqdorini va narxini aniqlang.

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}120 & 150 & 60\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}20\\ 30\end{pmatrix}$$

2.41. Korxona 3 xil xom ashyodan foydalanib 4 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Quyidagi jadvalda korxonaning kunlik mahsulot ishlab chiqarish hajmi, sarflanadigan xom ashyo miqdori, narxi va kunlik ish miqdori berilgan.

Mahsulot turi	Korxonaning kunlik mahsulot ishlab chiqarish unumdorligi	Xom ashyo sarfi (og`irlik birligida)
1	13 10 8 13 5	2 13 13
2	13 4 6 5 13	5 2 1
3	4 13 2 1 5	13 1 13
4	13 13 1 1 4	4 13 13
	Yillik ish kuni	Xom ashyo narxi
	200 300 160 150 200	50 60 40

Quyidagilarni topish talab qilinadi:

1) har bir korxonaning mahsulot turlari bo`yicha yillik mahsuldorligi;
2) har bir korxonaning xom ashyo turlariga bo`lgan ehtiyoji;
3) har bir korxonaning ko`rsatilgan turdagi va miqdordagi mahsulotni ishlab chiqarishga zarur bo`lgan xom ashyoni sotib olish uchun yillik kredit summasi.

2.42. Ikki turdagi resursdan foydalanib, 3 xil mahsulot ishlab chiqariladi. A matrisa bilan j - turdagi mahsulotga, i- turdagi resursning ishlatilish hajmi berilgan. X matrisa esa bir kvartal davomida ishlab chiqariladigan mahsulotlar hajmi. Har bir resurs birligining narxi P matrisa bilan berilgan.
1) jami ishlatilgan resurslarni aniqlovchi S matrisani aniqlang;
2) jami sarflangan resurslarni umumiy narxini aniqlang.

$$a)\ A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix} \quad b)\ A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix} \quad c)\ A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$P=(6;3) \qquad P=(3;5) \qquad P=(2;4)$$

2.43. Korxonada ikki xil xom ashyodan foydalanib 3 turdagi mahsulot ishlab chiqariladi. Bir birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun sarflanadigan xom ashyo normasi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisa bilan berilgan. Agar har bir turdagi xom ashyo narxi $P = (2 \quad 3)$ va ishlab chiqarilgan tovarlar hajmi

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

matritsalar bilan berilgan bo`lsa, u holda mahsulot ishlab chiqarish uchun qilingan jami xarajatlarni aniqlang.

Mavzu yuzasidan savollar.

1. Matrisa deb nimaga aytiladi va matrisalar ustida qanday amallar aniqlangan? Uchinchi tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
2. Kvadrat matrisaning determinanti va xossalri.
3. Minor va algebraik to`ldiruvchi nima?
4. Teskari matrisa nima?
5. Matrisaning rangi nima?
6. Matrisalar ustida qanday elementar almashtirishlarni bilasiz?
7. Matrisaning iqtisodiyotda qo`llanilishi.

Adabiyotlar

1. SH.Shorahmetov, B.Naimjanov, «Iqtisodchilar uchun matematica», - T.: «Fan va texnologiya»., 2007 y.
2. Клименко Ю. И. “Высшая математика для экономистов теория, примеры задачи”. М.: Экзамен 2005 г.
3. М. С. Красс, Б. П. Чупринов. “ Основы высшей математики и ее приложения в экономическом образовании ”, - М.: Дело, 2000 г.
4. Проскуряков И. В. “ Сборник задач по линейной алгебре ” – М.: Наука, 1998 г.
5. Минорский И. П., “Сборник задач по высшей математике ” – М.: 2004 г.
6. Данко П. Е., Попов А. Т., Кожевникова Т. Я. “Высшая математика в упражнениях и задачах” – М.: Высшая Школа, 1998 г.
7. “ Высшая математика для экономистов”. Подред. Н.Ш.Крамера. – М.: ЮНИТИ, 2006 г.
8. Соатов Ё.У. “Олий математика”, Т.: Укитувчи, 3-жилд 1996 й.
9. В. С. Шипачев “Курс высшей математики”, М.: Проспект, 2005 г.
10. Шапкин А.С. «Задачи с решениями по высшей математике теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию» - М.: 2008г.
11. Макаров С.И., Мищенко М.В., «Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики» Н.: 2008г.
12. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. «Основы математики и ее приложения в экономическом образовании» -М.: 2008
13. Ермаков В.И. «Общий курс высшей математика для экономистов». –Н: 2010г.
14. Ермаков В.И. «Общий курс высшей математика для экономистов». –Н: 2010г.

3. Chiziqli tenglamar sistemasi

3.1. Chizqli tenglamar sistemasi

No'malumlar soni n ta bo`lgan $m$ ta chiziqli tenglamalar sistamasining umumiy ko`rinishi quyidagicha:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \qquad (3.1)$$

bu yerda a_{ij} – no`malumlar oldidagi koeffisentlar; b_i lar esa sistemaning – ozod hadlari (i = 1,2,...m, j = 1,2,...n.) deyiladi.

3.2 Sistemaning echimi

(3.1) tenglamalar sistemasida x_1, x_2, ..., x_n lar o`rniga mos ravishda $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ o`zgarmas sonlarni qo`yish natijasida berilgan tenglamar sistemasi ayniyatlar sistemasiga aylansa, u holda $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ lar (3.1) sistemaning echimi deb ataladi.

Kamida bitta yechimga ega tenglamalar sistemasi birgaklikdagi tenglamalar sistemasi deyiladi. Yechimga ega bo`lmagan tenglamar sistemasi birgalikda emas deb ataladi.

Agar ikkita tenglamalr sistemasi bir xil yechimga ega bo`lsa, yoki ikkisi ham yechimga ega bo'lmasa ular teng kuchli deb ataladi.

3.3 Chiziqli tenglamar sistemasini Kramer usulida yechish

(3.1) tenglamar sistemasini matrisa ko`rinishda quyidagicha ifodalash mumkin: $A \cdot X = B$ bunda,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (3.2)$$

Chizqli tenglamalar sistemasida no`malumlar soni tenglamalar soniga teng ( $m = n$) va sistema matrisasi $A$ – xosmas, ya`ni $detA \neq 0$ bo`lsa, bu sistema yagona yechimga ega bo`ladi.

Bu holda sistemaning **Kramer usuli**dagi yechimi quyidagicha bo`ladi:

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$. bunda Δ- sistema matrisasining determinanti, Δ_k- sistema determinantining k- ustunini ozod hadlar ustuni bilan almashtirishdan hosil bo`lgan determinant.

Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa sistema yagona yechimga ega bo'ladi.

Agar $\Delta = 0$ va $\Delta_i = 0 (i = 1, 2, \ldots n)$ bo'lsa, berilgan tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

Agar $\Delta = 0$ bo'lib Δ_i lardan kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, sistema yechimga ega bo'lmaydi.

3.1 Berilgan tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Yechish.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -18 + 4 + 30 + 12 - 12 - 15 = 1 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 2 + 6 + 6 - 8 - 3 = -9$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 8 + 15 - 6 - 6 - 30 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 2 + 20 + 8 - 6 - 5 = 13$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-9}{1} = -9 \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -10 \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 13.$$

3.2 Tenglamlar sistemalarini Kramer usulidan foydalanib yeching

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = \dfrac{2}{3} \\ 4x_1 + 6x_2 - 14x_3 = \dfrac{32}{3} \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = \dfrac{-32}{3} \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = \dfrac{29}{8} \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{3}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 - \dfrac{1}{4}x_3 = \dfrac{5}{4} \\ \dfrac{1}{6}x_1 + \dfrac{2}{9}x_2 + x_3 = \dfrac{2}{3} \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -8 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = -5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -11 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 17 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 7 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 = -4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 32 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 23 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 + 8x_2 - 6x_3 = 38 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 19 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 17 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -15 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 - x_2 = -3 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 10x_3 = 33 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 17 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ 5x_1 + 2x_2 - 13x_3 = 21 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 12 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 34 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 40 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 32 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -12 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 13 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -17 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 29 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 18 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 29 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 21 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -8 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 19 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 13 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

3.4. Chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matrisa usulida yechish

Agar tenglamalar sistemasining ($m = n$) matrisasi xosmas, ya`ni $detA \neq 0$ bo`lsa, u holda sistemaning matrisa ko`rinishdagi yechimi quyidagicha bo`ladi:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

bunda, A^{-1}- (3.2) munosabatdagi A matrisaning teskari matrisasi, B- esa ozod hadlar matrisasi.

3.3. Quyidagi tenglamalar sistemasini matrisa usulida yeching.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$$

Yechish.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 24 + 27 + 16 - 24 - 24 - 1 = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

demak, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

3.4. Matrisali tenglamani yeching.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

3.5. Umumiy ko`rinishdagi tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish

Tenglamalar sistemasini Gauss usulida echish deganida biz sistemadagi noma’lumlarni ketma – ket yo’qotish usuli bilan sistemani echishni tushunamiz.

Tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechganda, berilgan sistema uchburchak shaklini yo trapesiya shaklini yoki sistemada ishtirok etayotgan biror – bir tenglama $0 = a(a \neq 0)$ ko’rinishini olib qoladi.

Agarda sistema uchburchak shakliga keltirilgan bo’lsa, u cheksiz ko’p echimga ega bo’ladi.

Agarda, sistemadagi biror – bir tenglama $0 = a(a \neq 0)$ ko’rinishga ega bo’lsa, sistema yechimga ega bo’ladi.

Birgalikda bo`lgan tenglamalar sitemasining ($m = n$ bo`lishi shart emas) Gauss usulida yechishning mohiyati shundan iboratki, unda no`malumlar ketma-ket yo`qotilib, sistema uchburchaksimon shaklga keltiriladi. Agar sistema uchburchaksimon shaklga kelsa, u yagona yechimga ega bo`ladi va uning no`malumlari oxirgi tenglamadan boshlab topib boriladi.(Sistema cheksiz ko`p yechimga ega bo`lsa, no`malular ketma-ket yo`qotilgach, u trapetsiyasimon shaklga keladi.).

3.5. Sistemani Gauss usuli bilan yeching

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases}$$

Yechish. Sistemaning kengaytirilgan matrisasini yozib olamiz:
Birinchi qadamda $a_{11} \neq 0$ bo`lishi zarur, lekin $a_{11} = 1$ hisoblashlar uchun qulaydir. Shuning uchun birinchi va to`rtinchi satrlarning o;rnini almashtiramiz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \end{array}\right) \quad \boxed{-5}\ \boxed{3}\ \boxed{-2}$$

1-*Qadam.* Birinchi satr elementlarini –5, 3 va -2 ga ko`paytirib, ularni mos ravishda ikkinchi, uchinchi va to`rtinchi satrlarga qo`shamiz, chunki maqsad $a_{11}$ element ostida nollardan iborat “ zina ” hosil bo`lsin.

2-qadamni o`tkazish uchun, ya`ni matrisada $a_{22} \neq 0$, lekin $a_{22} = 1$ yoki $a_{22} = -1$ bo`lgan i qulayroq. Shuning uchun ikkinchi va uchinchi satrlar o`rnini almashtiramiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \quad \boxed{4}\ \boxed{3}$$

2-*Qadam*. Ikkinchi satr elementlarini 4 va 3 ga ko`paytirib mos ravishda uchinchi va to`rtinchi satr elementlariga qo`shamiz, natijada $a_{22}$ element tagida ikkinchi ustunda “ zina ” hosil bo`ladi.

3-*Qadam*. Hosil bo`lgan matrisada $a_{33} = 26 \neq 0$,uchinchi satr elementini $-\frac{24}{26} = -\frac{12}{13}$ ga ko`paytirib, to`rtinchi satrga qo`shamiz. Natijada:

$$-\frac{13}{13} \times \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 24 & -5 & -5 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{13} & \frac{19}{13} \end{array}\right).$$

Kengaytirilgan matrisa zinapoya ko`rinishiga keltirildi. Unga mos keluvchi sistemaning ko`rinishi quyidagicha:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \\ \quad - x_2 - 11x_3 - 4x_4 = -11 \\ \qquad 26x_3 - 7x_4 = -7 \\ \qquad\quad \frac{19}{13}x_4 = \frac{19}{13} \end{cases}$$

oxirgi tenglamadan $x_4 = 1$, uchinchidan $x_3 = \frac{-7 + 7x_4}{26} = 0$, ikkinchidan $x_2 = 11 + 11x_3 - 4x_4 = 7$ va birinchidan $x_1 = -4 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5$ yechimlarni olamiz. Javob: (5; 7; 0; 1)

3.6. Berilgan tenglamalar sistemasini Gauss usulida yeching

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

3.6. Kroneker – Kapelli teoremasi

(3.1.) Tenglamalar sistemasida koeffitsientlardan iborat A matritsa ozod hadlari bilan birgalikda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

olinsa kengaytirilgan matritsa deb ataladi.

Kroneker-Kapelli teoremasi: 3.1 sistema yechimga ega bo'lishi uchun rangA=rangB bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar (3.1) da barcha b_i i=(1….n) ozod hadlari nolga teng bo'lsa bu tenglamalar sistemasi bir jinsli tenglamalar sistemasi deyiladi.

Quyidagi $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m_1}x_1 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

bir jinsli tenglamalar sistemasini qaraylik. Bu sistema har doim yechimga ega. Chunki uning hech bo'lmaganda 1ta trivial $x_i=0$ (i=1,2,…n) yechimi bor. Uning trivial bo'lmagan yechimi mavjud bo'lishi uchun r(A)=r< min(m,n) bo'lishi zarur va yetarlidir

3.7 Quyidagi berilgan tenglamalar sistemasini Gauss usulida yeching

1. $\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 8 \\ 3x_1 \quad + \quad 2x_3 = 3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -4 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -11. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 7 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 13 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 = -21 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -33 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 28 \\ 15x_1 + 30x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 97 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 35 \\ 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 33 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 15x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 19 \\ 3x_1 + 20x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 11 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 9x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 21 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -5 \\ 13x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 13x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 = -11 \\ 11x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -7 \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = -14 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -5 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 15 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 18 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 = -12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 21 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$

16. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 19 \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -5 \\ 11x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \\ 5x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 11x_4 = 30 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = -2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 17 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 = -6 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 24 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 = -3 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -6 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -10 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 = -14 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -6 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 22 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -5 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 35 \\ 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 24 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 15 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 25 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -19 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_{54} = 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -6 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 16 \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 20 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 9 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 17 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 11x_4 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 6 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 = -22 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 - 2x_4 = 12 \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 18 \\ 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 16 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 25 \\ 10x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 34 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 11 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 14 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + x_3 + 10x_4 = 41 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 21 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_4 + 5x_3 = 35 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 17 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -12 \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 = -30 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = -13 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 17x_4 = -1 \end{cases}$

3.7 Bir jinsli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasini toping.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Yechish. Sistemaning oxirgi tenglamasini birinchi o`ringa yozamiz, so`ngra uni zinapoya shakliga keltiramiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & 8 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrisaning rangi r = r(A) = 2. x_1, x_2 o`zgaruvchilarning bazis minori $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} \neq 0$; $x_1$, $x_2$ ni asosiy o`zgaruvchilar sifatida tanlab olamiz va ularni asosiy bo`lmagan x_3, x_4, x_5 lar orqali ifodalaymiz:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \\ \quad 8x_2 - 7x_3 + 25x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Fundamentall yechimlar sistemasi e_1, e_2, e_3 ni hosil qilish uchun asosiy bo`lmagan o`zgaruvchi x_3, x_4, x_5 larni birlik matrisa E_3 satr elementlari bilan almashtiramiz. $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ da sistemaning ko`rinishi quyidagicha bo`ladi:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2 = 0 \\ \quad 8x_2 - 7 = 0 \end{cases}$$

bundan $x_1 = \dfrac{19}{8}$, $x_2 = \dfrac{7}{8}$ ya`ni bazis yechimni hosil qilamiz: $e_1 = \left(\dfrac{19}{8};\ \dfrac{7}{8};\ 1, 0, 0\right)$

1) Shunga o`xshash yana ikkita bazis yechimni topamiz:

$x_3 = 0$; $x_4 = 1$; $x_5 = 0$ da $e_2 = \left(\dfrac{3}{8}; -\dfrac{25}{8};\ 0, 1, 0\right)$;

$x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_5 = 1$ da $e_3 = \left(-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2};\ 0, 0, 1\right)$.

Topilgan yechimlar (vektorlar) e_1, e_2, e_3 fundamental sistemani tashkil qiladi. e_1, e_2, e_3 yechimlarning kompanentlarini mos ravishda 8, 8, 2 ga ko`paytirib butun kompanentli yechimlar sistemasini hosil qilamiz:
(19; 7; 8; 0; 0), (3; -25; 0; 8; 0), (-1; 1; 0; 0; 2).

Ko`p tarmoqli iqtisodiyotning Leontev modeli

Ko`p tarmoqli xo`jalikni boshqarish alohida tarmoqlar orasidagi balansni talab qiladi. Har bir tarmoq, bir tomondan ishlab chiqaruvchi, ikkinchi tomondan boshqa tarmoq ishlab chiqargan mahsulotning iste`molchisidir. Tarmoqlar orasidagi turli mahsulotlarni ishlab chiqarish va iste`mol qilish orqali bog`lanishni hisoblash masalasi ancha murakkab. Bu masalani birinchi bo`lib mashhur amerika iqtisodchisi V.V. Leontev 1936 yil matematik model ko`rinishida ifodalagan. U 1929-1932 yillarda amerikadagi iqtisodiy depressiyani tahlil qilishga urungan bu model matrisalar algebrasiga asoslagan.

Balans munosabatlar

Quyidagi

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \quad (i = \overline{1, n})$$

tenglama balans munosabat deyiladi. Bu yerda x_i – i tarmoq mahsulotining umumiy hajmi (yalpi ishlab chiqarish) x_{ij} – j – tarmoqning x_j – mahsulotni ishlab chiqarish mobaynida iste`mol qilingan $i$ – tarmoqning mahsulot miqdori; $y_i$ – $i$ – tarmoqning ishlab chiqarishdan tashqariga realizatsiya (iste`mol) uchun mo`ljallangan mahsulot miqdori yoki
chekli iste`mol mahsuloti. Sodda ko`rinishda balans munosabatning ko`rinishi

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i, \quad i = 1,2,..,n. \qquad (3.4)$$

(3.4) tenglamalr balans tenglamalari deyiladi. Leontev quyidagi muhim faktni o`rnatgan: $a_{ij} = x_{ij}/x_j$; uzoq vaqt davomida juda sekin o`zgaradi, uni o`zgarmas son sifatida qarash mumkin. Bu tushunarli chunki ishlab chiqarish texnologiyasi uzoq vaqt bir xil darajada saqlanib qoladi, natijada *j* – tarmoqning o`z mahsuloti x_j miqdorni ishlab chiqarishi uchun *i* - tarmoqning iste`mol qilish xajmi o`zgarmas son.

(3.4) tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n \end{cases} \qquad (3.5)$$

Matrisa ko`rinishida esa

$$X = A \cdot X + Y \qquad (3.6)$$

yoki

$$(E - A) \cdot X = Y \qquad (3.7)$$

bu erda

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$

X - yalpi mahsulot, *A* - to`g`ridan to`g`ri xarajatlar koeffisientining matrisasi, *Y* - chekli iste`mol. (3.6) muonsabat tarmoqlararo modelning chiziqli tenglamasi deyiladi. Tarmoqlararo modelning asosiy vazifasi *A* matrisa ma`lum bo`lsa va berilgan *Y* vektorni ta`minlansa , yalpi mahsulot ishlab chiqarish vektori *X* ni topishdan iborat. *X* quyidagi formula bo`yicha topiladi:

$$X = (E - A)^{-1}Y = SY. \qquad (3.8)$$

$S = (E - A)^{-1}$ matrisa to`la xarajatlar matrisasi deyiladi. Agar ixtiyoriy $Y \geq 0$ vektor uchun, (3.7) tenglamaning shunday $X \geq 0$ yechimi mavjud bo`lsa , $A \geq 0$ matrisa samarali deyiladi. Agar $a_{ij} \geq 0$ barcha $i, j = \overline{1,n}$, $\max\limits_{j=1,2,\ldots,n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ va shunday j nomer mavjud bo`lsaki, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$ bo`lsa, A matrisa samarador deyiladi, ya'ni $a_{ij} > 0$ bo`lsa, ixtiyoriy ustun (satr) elementlari yig`indisi birdan kichik bo` lsa, *A* matrisaning samaradorligi saqlanadi. Qiymatli balans holi qaralganda o`rganilayotgan *j* xo`jalik mahsulotini tannarxi 1 so`mdan oshmasligi uni rentabilligini bildiradi. Masalan quyidagi matrisada ifodalangan mahsulot samarador:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

3.9. Quyidagi matrisalarni mahsuldorligini tekshiring.

$a)\ A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 \\ 0,7 & 0,8 \end{pmatrix}$ $\qquad b)\ A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

$c)\ A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,3 \\ 0,6 & 0,5 & 0,7 \end{pmatrix}$ $\qquad d)\ A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 1,1 & 0,3 \end{pmatrix}$

Tarmoqning yalpi mahsulot miqdori va barcha tarmoqlarga bo`lgan pul xarajatlari orasidagi farq tarmoqning **sof mahsuloti** deyiladi.

3.10. Quyidagi jadvalda tarmoqlarning reja davriga mo`ljallangan xarajat koeffisentlari va chekli mahsuloti shartli pul birligida berilgan.

Tarmoq		Iste`mol		Chekli mahsulot
		Sanoat	Qishloq xo`jaligi	
Ishlab chiqarish	Sanoat	0,3	0,25	300
	Qishloq xo`jaligi	0,15	0,12	100

Quyidagilarni

a) Tarmoqlarning rejalashtirilgan yalpi mahsulot miqdorini, tarmoqlararo mahsulot yetkazib berish, tarmoqlarning so*f* mahsulotini;

b) Agar qishloq xo`jaligining chekli mahsuloti 20% ga, sanoatniki 10% ga oshirilsa, har bir tarmoqning zarur yalpi ishlab chiqarish miqdorini topish kerak.

Yechish. a) To`g`ridan – to`g`ri xarajatlar koeffisentini A matrisa va chekli mahsulot vektori *Y* ni yozib olamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,25 \\ 0,15 & 0,12 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix}$$

bundan $E - A = \begin{pmatrix} 1-0,3 & -0,25 \\ -0,15 & 1-0,12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,25 \\ -0,15 & 0,88 \end{pmatrix}$ matrisani yozib olamiz.

U holda to`la xarajatlar matrisasi

$$S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,5785}\begin{pmatrix} 0,88 & 0,15 \\ 0,25 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,52 & 0,26 \\ 0,43 & 1,21 \end{pmatrix}.$$

(3.8) formula bo`yicha yalpi mahsulot vektori X ni aniqlaymiz:

$$X = \begin{pmatrix} 1,52 & 0,26 \\ 0,43 & 1,21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 482 \\ 250 \end{pmatrix}$$

Tarmoqlar mahsulot yetkazib berish miqdori x_{ij} ni $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$ formuladan topamiz. Masalan $x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0.3 \cdot 482 = 144.6$.

Tarmoqlarning yalpi mahsuloti, tarmoqlararo mahsulot yetkazib berish, shuningdek tarmoqlarning so*f* mahsulotlarini hisoblab topib, quyidagi jadvalni tuzamiz.

Tarmoq		Iste`mol		Chekli mahsulot	Yalpi mahsulot
		Sanoat	Qishloq xo`jaligi		
Ichlab chiqarish	Sanoat	144,6	62,5	300	482
	Qishloq xo`jaligi	72,3	30	100	150
So*f* mahsulot		265,1	157,5		
Yalpi mahsulot		482	250		

b) Shartga ko`ra chekli mahsulot vektori

$$Y = \begin{pmatrix} 300 \cdot 1,1 \\ 100 \cdot 1,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 330 \\ 120 \end{pmatrix}$$

U holda (3.8) formulaga asosan mahsulot vektori quyidagicha bo`ladi:

$$X = S \cdot Y = \begin{pmatrix} 1,52 & 0,26 \\ 0,43 & 1,21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 330 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 532,8 \\ 287,1 \end{pmatrix}.$$

Shunday qilib sanoatdagi ishlab chiqarishni 532,8 shartli pul birligigacha, qishloq xo`jaligida 287,1 shartli pul birligigacha oshirish kerak.

3.11. Oyoq kiyimlarini ishlab chiqaradigan fabrika S_1, S_2, S_3 xom ashyodan foydalanib 3 xil
mahsulot ishlab chiqaradi. Har bir juft oyoq kiyimiga xom ashyodan sarflanishi meyori quyidagi jadvalda berilgan.

Xom ashyo turi	Bir juft oyoq kiyimiga sarflanadigan xom ashyo miqdori			Bir kunda sarflanadigan xom ashyo
	Etik	Krasovka	Tufli	
S_1	4	2	3	1700
S_2	1	3	1	1100
S_3	7	1	4	2100

Bir kunda ishlab chiqariladigan har bir turdagi oyoq kiyimning sonini hisoblang.

3.12. Korxona 3xil xom ashyodan foydalanib 3 xil mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarishning xarakteristikasi quyidagi jadvalda berilgan.

Xom ashyo turi	Hr bir mahsulotga sarflanadigan xom ashyo (og`irlik birligida)			Xom ashyo zahirasi (o`girlik birligida)
	1	2	3	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

Berilgan xom ashyo zahirasidan foydalanib har bir tur mahsulotning ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

3.13. Firma ikkita bo`limdan iborat. O`tgan yilgi umumiy foyda 12 mln. p/b ni tashkil qiladi. Bu yil birinchi bo`lim foydasini 70% ga, ikkinchisinikini esa 40% ga oshirish rejalashtirilgan. Natijada umumiy foyda 1,5 marta ortishi kerak.

Har bir bo`limning: a) o`tgan yildagi; b) bu yildagi foydasi qanday kattalikda?

3.14. Ofisni jihozlash uchun firma 29 predmet: narxi 20 ming p/b bo`lgan bir nechta kompyuter, 8,5 ming p/b dan ofis stollari, narxi 1,5 p/b bo`lgan stullar sotib olishga 236 ming p/b ajratdi. Keyinroq ma’lum bo`lishicha boshqa joyda kompyuterlarni 19,5 ming p/b dan, stollarni 8 p/b dan, stullarni esa oldingi narxda olish mumkin. Har bir jihozdan arzon narxlarda qanday miqdorda sotib olinganligini aniqlang.

3.15. Tikuv fabrikasi 3 kun davomida kostyum, plash va kurtkalar ishlab chiqardi. 3 kun mobaynida ishlab chiqariladigan mahsulot miqdori va ishlab chiqarish uchun sarflanadigan pul xarajatlari quyidagi jadvalda berilgan:

Kunlar	Mahsulot ishlab chiqarish miqdori			Xarajatlar (ming pul birligida)
	Kostyumlar	Plashlar	Kurtkalar	
Birinchi	50	10	30	176
Ikkinchi	35	25	20	168
Uchinchi	40	20	30	184

Har bir mahsulot tan narxini toping.

3.16 . Korxona uch xil xom ashyodan foydalanib uch xil mahsulot ishlab chiqaradi. Xom ashyo sarfi va xom ashyo zahirasi quyidagi jadvalda berilgan. Har bir mahsulotdan ishlab chiqarish miqdorini aniqlang.

a)

Xom ashyo turi	Mahsulot turlari bo`yicha xom ashyo sarfi, mahsulot birligining og`irligi			Xom ashyo zahirasi (o`girlik birligida)
	1	2	3	
1	5	12	7	2350
2	10	6	8	2060
3	9	11	4	2270

б)

Xom ashyo turi	Hr bir mahsulotga sarflanadigan xom ashyo (og`irlik birligida)			Xom ashyo zahirasi (o`girlik birligida)
	1	2	3	
1	6	5	4	2200
2	10	8	3	3350
3	7	12	5	3390

c)

Xom ashyo turi	Mahsulot turlari bo`yicha xom ashyo sarfi, mahsulot birligining og`irligi			Xom ashyo zahirasi (o`girlik birligida)
	1	2	3	
1	8	4	10	3000
2	6	7	4	2700
3	13	2	3	2650

д)

Xom ashyo turi	Hr bir mahsulotga sarflanadigan xom ashyo (og`irlik birligida)			Xom ashyo zahirasi (o`girlik birligida)
	1	2	3	
1	4	4	7	2900
2	5	3	5	2260
3	7	2	9	3500

Mavzu yuzasidan savollar.

1. Kramer formulasi qanday ko`rinishga ega va qachon qo`llaniladi?
2. Chiziqli algebraik tenglamalr sistemasi qanday shart bajarilganda yagona yechimga ega bo`ladi?
3. Uchta no'malumli ikkita tenglamadan iborat chiziqli tenglamalr sistemasi qanday yechiladi?
4. Qanday shart bajarilganda *n* no'malumli *n* ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi notrivial yechimga ega?
5. Chiziqli tenglamalar sistemasi matrisalar usuli bilan qanday yechiladi?
6. Kroneker – Kapelli teoremasi qanday ifodalanadi?

Adabiyotlar

1. SH.Shorahmetov, B.Naimjanov, «Iqtisodchilar uchun matematica», - T.: «Fan va texnologiya»., 2007 y.
2. Кремер Н. М. и другие. – " Высшая математика для экономистов " , - М.: 2004 г.
3. М. С. Красс, Б. П. Чупринов. " Основы высшей математики и ее приложения в экономическом образовании ", - М.: Дело, 2000 г.
4. Соатов Ё.У. " Олий математика ", Т.: Укитувчи, 1-жилд, 2-жилд, 1994 й., 3-жилд, 1996 й.
5. В. С. Шипачев "Курс высшей математики", М.: Проспект, 2005 г.
6. Кремер Н. Ш. и др. "Практикум по высшей математике для экономистов " – М.: 2004 г.
7. Шапкин А.С. «Задачи с решениями по высшей математике теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию» - М.: 2008г.
8. Макаров С.И., Мищенко М.В., «Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики» Н.: 2008г.
9. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. «Основы математики и ее приложения в экономическом образовании» -М.: 2008
10. Ермаков В.И. «Общий курс высшей математика для экономистов». –Н: 2010г.

4. Chiziqli fazo elementlari.

4.1 Tekislik va fazoda vektorlar.

1. *Ta'rif.* Boshi *A* nuqtada, oxiri *B* nuqtada bo`lgan yo`naltirilgan kesma *vektor* deb ataladi va $\overline{AB}$ yoki $\bar{a}$ kabi belgilanadi.

$\bar{a}$ vektorning uzunligi uning moduli deb ataladi va $|\bar{a}|$ kabi belgilanadi. Oxiri boshi bilan ustma – ust tushadigan vektor nol vektor deb ataladi va 0 bilan belgilanadi. Agar $|\bar{a}|$ = 1 bo`lsa, u holda *a* birlik vektor deyiladi.

Bir to`g`ri chizqda yoki paralell to`g`ri chiziqlarda yotuvchi vektorlar *kolleniar* vektorlar deyiladi.

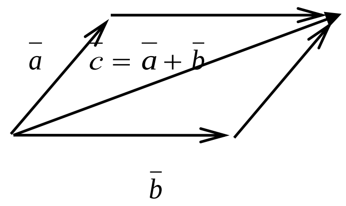
Agar ikki vektor o`zaro kolleniar, bir xil yo`nalgan va modullari teng bo`lsa, bu vektorlar teng vektorlar deyiladi.

Bir tekislikda yoki paralell tekisliklarda yotuvchi vektorlar *komplanar* vektorlar deyiladi.

2. $\bar{a}$ vektorning λ soniga ko`paytmasi deb, $\bar{a}$ ga kolleniar, (λ > 0 da u bilan yo`nalishdosh,

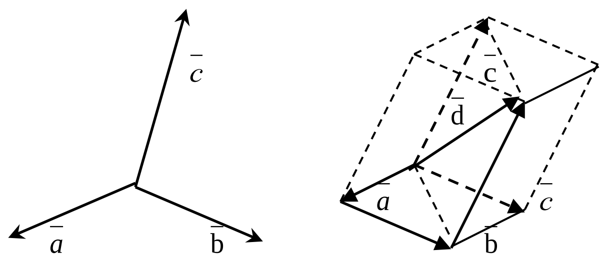
λ < 0 da esa yo`nalishi qarama – qarshi) hamda moduli $|\lambda|\cdot|\bar{a}|$ga teng bo`lgan $\lambda\bar{a}$ (yoki $\bar{a}\lambda$) vektorga aytiladi.

Ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning yig`indisi deb uchburchak yoki paralellogram qoidasi bo`yicha aniqlanadigan $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ vektorga aytiladi. (4.1 – rasm)



(4.1–rasm)

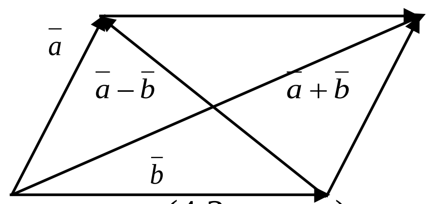
Bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotmagan *a*, *b*, *c*, vektorlarning yig`indisi *a*, *b*, *c*, vektorlarga qurilgan parallelipiped dioganalini beradi. $\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$



a) *b*)

(4.2 – rasm)

Ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning ayirmasi deb $\bar{c} = \bar{a} + (-\bar{b})$ vektorga aytiladi (4.3 – rasm)



(4.3 – rasm)

3. $\bar{a}$ vektorning (*x*, *y*, *z*) koordinatalari deb, boshlang`ich nuqtasi koordinata boshi bilan ustma - ust tushganda, oxirgi nuqtasining koordinatalariga aytiladi.

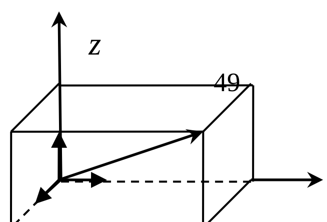
$$\bar{a}=(x, y, z) \text{ vektorni } \bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \qquad (4.1)$$

ko`rinishida ifodalanishi mumkin, bu yerda $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - birlik vektorlar (ortlar), mos ravishda *Ox*, *Oy*, *Oz* o`qlarining musbat yo`nalishi bilan mos tushadi; $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1.$

4. $|\bar{a}|$ vektorning uzunligi

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (4.3)$$

formula bilan aniqlanadi. (4.4 - rasmga qarang).



C

M

k B

i j y

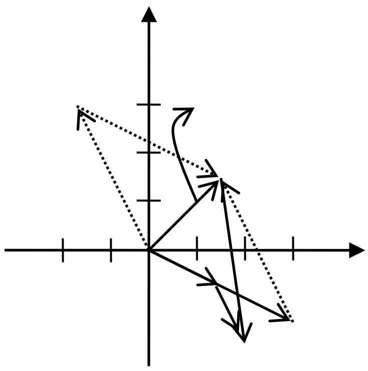
A M'

x

(4.4 – rasm**)**

Misol. Uchta vektor berilgan: $\bar{a}=(1;-1),\ \bar{b}=(1;-2),\ \bar{c}=(1;\ 7).$ $\bar{p}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ ni yasang, uning uzunligini toping va $\bar{p}$ vektorni $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar bo`yicha yoying.

Yechish. $\bar{p}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ vektorni yasash ko`pburchak qoidasiga asosan rasmda ko`rsatilgan. U holda vektorni (4.3) formulaga asosan $\bar{p}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ $\bar{p}$ vektorni $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar bo`yicha yoyish, uni quyidagi ko`rinishda ifodalashdir: $\bar{p}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b},$ bu yerda α va β - haqiqiy sonlar uni aniqlash uchun $(3;\ 4)=\alpha(3;\ -1)+\beta(1;\ -2)$ yoki quyidagi $\begin{cases} 3=3\alpha+\beta \\ 4=-\alpha-2\beta \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yozib olamiz. Olingan sistemani yechib, $\alpha=2,\ \beta=-3;$ ya'ni $\bar{p}=2\bar{a}-3\bar{b}$ ni olamiz. Demak $\bar{p}$ vektorning $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar bo`yicha yoyilmasi $2\bar{a}$ va $-3\bar{b}$ vektorlarga qurilgan paralellogram dioganalidan iborat (4.5 - rasmda ko`rsatilgan).



y

$\bar{p}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$

6

$-3\bar{b}$ 4

2 $\bar{c}$

0 2 4 6 x

$\bar{b}$ $2\bar{a}$

(4.5 – rasm)

5. Vektorning yo`naltiruvchi kosinuslari deb $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ sonlariga aytiladi, bunda mos ravishda $\alpha,\ \beta,\ \gamma-\bar{a}$ vektorning *Ox*, *Oy*, *Oz* o`qlari bilan hosil qilgan burchaklari:

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\qquad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\qquad (4.4)$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \text{ bunda } \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \quad (4.5)$$

6. Ikkita $\bar{a}=(x_1,\, y_1,\, z_1)$ va $\bar{b}=(x_2,\; y_2,\; z_2)$ yig'indisining koordinatalari va $\bar{a}$ vektorning λ songa ko`paytmasi quyidagi formulalar bo`yicha aniqlanadi:

$$\bar{a}+\bar{b}=(x_1,\, y_1,\, z_1)+(x_2,\, y_2,\, z_2)=(x_1+x_2,\, y_1+y_2,\, z_1+z_2) \quad (4.6)$$

$$\lambda\bar{a}=\lambda(x_1,\, y_1,\, z_1)=(\lambda x_1,\, \lambda y_1,\, \lambda z_1) \quad (4.7)$$

7. $\bar{a}$ vektorning *l* o`qdagi proeksiyasi deb $pr_l\,\bar{a}$

$$pr_l\,\bar{a}=|\bar{a}|\cdot\cos\varphi \quad \mathbf{(}4.8\mathbf{)}$$

songa aytiladi, bu yerda φ $\bar{a}$ vektor va *l* o`q orasidagi burchak.

8. Ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalyar ko`paytmasi ($\bar{a}$, $\bar{b}$) deb

$$(\bar{a},\, \bar{b})=\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cdot\cos\varphi \quad (4.9)$$

songa aytiladi. $\bar{a}=(x_1,\, y_1,\, z_1)$ va $\bar{b}=(x_2,\; y_2,\; z_2)$ vektorlarning skalyar ko`paytmasi:

$$(\bar{a},\, \bar{b})=\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \quad (4.10)$$

formula bilan aniqlanadi.

Vektorning skalyar kvadrati,

$$(\bar{a},\, \bar{a})=\bar{a}^2=|\bar{a}|^2=x^2+y^2+z^2 \quad (4.11)$$

yoki

$$|a|=\sqrt{\bar{a}^2} \quad (4.12)$$

9. $\bar{a}=(x_1,\, y_1,\, z_1)$ va $\bar{b}=(x_2,\; y_2,\; z_2)$ vektorlar orasidagi burchak

$$\cos\varphi=\frac{(a,\, b)}{|a||b|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}}} \quad (4.13)$$

formula orqali aniqlahadi.

10. Ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar ortogonal deyiladi, agar ularning skalyar ko`paytmsi nolga teng bo`lsa, ya'ni $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$.

11. Ikkita $\bar{a}=(x_1,\, y_1,\, z_1)$ va $\bar{b}=(x_2,\; y_2,\; z_2)$ vektorlarning kolleniarlik (parallellik) sharti

$$\bar{b}=k\bar{a},\ \text{yoki}\ \frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}=\frac{1}{k}; \quad (4.14)$$

ortogonallik (perpendikulyarlik) sharti

$$\bar{a}\bar{b}=0\ \text{ yoki }\ x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0 \quad (4.15)$$

4.1 Berilgan $\bar{a}=(2;\,-1;\,-2)$ va $\bar{b}=(8;\,-4;\,0)$ vektorlar bo`yicha quyidagilarni toping:

a) $\bar{c}=2a$ va $\bar{d}=\bar{b}-\bar{a}$; *b*) $\bar{c}$ va $\bar{d}$ vektorlarning uzunliklarini;

c) $\bar{d}$ vektorning skalyar kvadratini; *d*) $(\bar{c},\, \bar{d})$ vektorlarning skalyar ko`paytmasini

e) $\bar{c}$ va $\bar{d}$ vektorlar orasidagi burchakni

4.2 Quyidagi $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar berilgan. Berilgan vektorlar modullarini, ularning chiziqli kombinasiyasi $\bar{c}$ vektor koordinatalarini va uzunligini, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalyar ko`paytmasini, ular orasidagi burchak kattaligini, o`zaro ortogonalligini aniqlang:

$$\bar{a}=\left(0,\, \frac{\sqrt{2}}{2},\, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \ \bar{b}=(-1,\, 2,\, -2),\ \ \bar{c}=3\sqrt{2}\,\bar{a}-\bar{b}.$$

4.3 $\bar{a} = (2; 1; -1)$ vektorga kolleniar va $(\bar{a}, \bar{b})$ = 3 shartni qanoatlantiruvchi $\bar{b}$ vektorni toping.

4.4 $a = (5;\ 2;\ 5)$ vektorning $b = (2; -1;\ 2)$ vektor o`qidagi proyeksiyasini toping.

4.5 Agar $\bar{a} + 2\bar{b}$ va $5\bar{a} - 4\bar{b}$ vektorlar o`zaro perpendikulyar bo`lsa, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ birlik vektorlar orasidagi burchakni toping.

4.6 Quyidagi $b = (8;\ -3;\ -10;\ 10)$ vektorni $a_1 = (1;\ 0;\ 4;\ 3);\ a_2 = (-2;\ 3;\ 1;\ 4);\ a_3 = (1;\ 1;\ -4;\ 5);$ $a_4 = (1;\ -2;\ 0;\ 3)$ vektorlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi ko`rinishida yoyish mumkin yoki yo`qligini tekshiring.

4.7 a = (5; 1; -2) va b = (1; 5; -2) vektorlar berilgan. $3\bar{a} - \bar{b}$ vektorning

a) $3\bar{a} - \bar{b}$ vektorning koordinata o`qlarida hosil qilgan proeksiyalarini;

b) uzunligini;

c) yo`naltiruvchi kosinuslarini toping.

4.8 Quyidagi $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar berilgan. Berilgan vektorlar modullarini, ularning chiziqli kombinasiyasi $\bar{c}$ vektor koordinatalarini va uzunligini, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalyar ko`paytmasini, ular orasidagi burchak kattaligini, o`zaro ortogonalligini aniqlang:

a) $\bar{a} = (0,\ 0,\ -1,\ 1)$, $\bar{b} = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$ $\bar{c} = 2\bar{a} + \bar{b}$.

b) $\bar{a} = (1,\ 2,\ 3)$, $\bar{b} = (-5,\ 3,\ 2)$, $\bar{c} = -4\bar{a} + 3\bar{b}$.

4.9 $\bar{a} = 2\bar{m} + 4\bar{n}$ va $\bar{b} = \bar{m} - \bar{n}$ vektorlar berilgan, bu yerda $\bar{m}$ *va* $\bar{n}$ birlik vektorlar, ular orasidagi burchak 120°. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

4.10 Tekislikda uchta $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektorlar berilgan. Ma'lumki $|\bar{a}| = 2,\ |\bar{b}| = 3,\ |\bar{c}| = 3$ $(\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}) = 60^\circ$, $(\widehat{\bar{b}\,\bar{c}}) = 60^\circ$, $\bar{d} = -\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$ vektorning uzunligini toping.

4.11 α va β ning qanday qiymatlarida $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \beta\bar{k}$ va $\bar{b} = \alpha\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$ vektorlar *a*) kolleniar, *b*) ortogonal.

4.12 $\overline{OA}$ vektor *OX*, *OY* va *OZ* o`qlari bilan mos ravishda $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ burchaklar hosil qiladi. Agar $B(2;\ 2; -2\sqrt{2})$ bo`lsa, $\overline{OA}$ va $\overline{OB}$ vektorlarning perpendikulyarligini isbotlang.

4.13 Uchta $\bar{a}(2; -2),\ \bar{b}(2; -1),\ \bar{c}(2;\ 4)$ vektorlar berilgan. $\bar{p} = 2\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$ vektorning koordinatalarini toping hamda *a* va *b* vektorlar bo`yicha yoying.

4.14. To`rtta vektor berilgan:

$\bar{a} = (2;\ 1;\ 0),\ \bar{b} = (1; -1;\ 2),\ \bar{c} = (2;\ 2; -1),\ \bar{d} = (3,\ 7, -7).$ $\bar{a}$ vektorni $\bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ vektorlar bo`yicha yoying.

4.15 $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 6\bar{k}$ vektorning uzunligini va yo`naltiruvchi kosinuslarini toping.

4.16 m ning qanday qiymatlarida $\bar{a} = m\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ va $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - m\bar{k}$ vektorlar o`zaro perpendikulyar bo`ladi.

4.17 $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ vektorning $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$ vektor yo`nalishidagi proyeksiyasini toping.

4.18 $\bar{a} = 3\bar{i} - 6\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 4\bar{j} - 5\bar{k}$ va $\bar{c} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k}$ vektorlar berilgan. $\bar{a} + \bar{c}$ vektorni $\bar{b} + \bar{c}$ vektorga proyeksiyasini toping.

4.2 Vektorlarning vektor va aralash ko`paytmalari.

$\bar{a}$ vektorning $\bar{b}$ vektorga *vektor ko`paytmasi* deb, $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ ko`rinishda belgilanuvchi va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\bar{c}$ vektorga aytiladi:

1. $\bar{c}$ vektor $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarga perpendikulyar;

2. $\bar{c}$ vektor uchidan qaralganda $\bar{a}$ vektordan $\bar{b}$ vektorga eng qisqa burilish soat mili yo`nalishiga teskari yo`nalishda kuzatiladi ($\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ vektorlarning bunday joylashuvini o`ng uchlik deyiladi);

3. $\bar{c}$ vektorning moduli $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarga qurilgan paralellogramning S yuzasini ifodalovchi songa teng, ya'ni $|\bar{c}| = S = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$ (φ - $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar orasidagi burchak).

Vektor ko`paytmasining asosiy xossalari:

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$;

2. $(\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a} \times \bar{b})$;

3. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \overline{a \times c}$;

4. Agar $\bar{a} = 0$, yoki $\bar{b} = 0$, yoki $\bar{a} \,||\, \bar{b}$ bo`lsa, u holda $\bar{a} \times \bar{b} = 0$. Xususan $\bar{a} \times \bar{a} = 0$.

Koordinata o`qlari ortlarining vektor ko`paytmasi:

$$\bar{i} \times \bar{i} = 0,\ \bar{j} \times \bar{j} = 0,\ \bar{k} \times \bar{k} = 0; \quad \bar{i} \times \bar{j} = \bar{k},\ \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i},\ \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}.$$

agar $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$ bo`lsa, u holda
$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Agar $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar kolleniar bo`lsa, u holda $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$.

4.19 $\bar{a} = \bar{i} + 3\bar{j}$ va $\bar{b} = 3\bar{j} - 4\bar{k}$ vektorlarga qurilgan parallelogram yuzasini hisoblang.

Yechish. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning S yuzasi shu vektorlarning vektor ko`paytmasining moduliga teng: $S = |\bar{a} \times \bar{b}|$. Vektor ko`paytmani topamiz:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -12\bar{i} + 4\bar{j} - 9\bar{k}.$$

Demak, $S = \sqrt{(-12)^2 + 4^2 + (-9)^2} = \sqrt{144 + 16 + 81} = \sqrt{241}$ kv birlik.

$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ vektorlarning *aralash ko`paytmasi* ($\vec{a}\vec{b}\vec{c}$) deb, ($\overline{a}\times\overline{b}$) vektor ko'paytmaning $\overline{c}$ vektorga skalyar ko`paytmasiga aytiladi. Aralash ko`paytmaning xossalari:

a) $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c})$.

Bu xossadan aralash ko`paytmani $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ ko`rinishda belgilash mumkin ekanligi kelib chiqadi.

b) $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a}=\overline{c}\,\overline{a}\,\overline{b}$, ya'ni ko`paytiriluvchi vektorlar o`rinlari doiraviy almashtirilganda aralash ko`paytma qiymati o`zgarmaydi;

c) $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=-\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a}$, $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=-\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}$, $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=-\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b}$, ya'ni qo`shni ikkita vektorlarning o`rinlari alamshtirilganda aralash ko`paytma ishorasini o`zgartiradi;

d) agar vektorlardan aqalli bittasi nol vektor yoki $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ vektorlar komplanar bo`lsa, holda $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=0$ bo`ladi.

Agar

$$\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}$$

$$\overline{b}=b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+a_z\overline{k}$$

$$\overline{c}=c_x\overline{i}+c_y\overline{j}+c_z\overline{k}$$

bo`lsa, u holda

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Agar $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ vektorlar komplanar bo`lsa, u holda

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

Aralash ko`paytma ko`paytiriluvchi vektorlarga qurilgan parallelopiped hajmiga ishora aniqligida teng, ya'ni $V=\pm(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c})$.

4.20 . Uchlari *A*(1, 2, 0); *B*(-1, 2, 1); *C*(0; -3; 2) va *D*(1, 0, 1) nuqtalarda bo`lgan piramidaning hajmini hisoblang.

4.21 $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlar o`zaro $\varphi=45^\circ$ li burchak tashkil qilib, $|\overline{a}|=|\overline{b}|=5$ bo`lsa, $\overline{p}=\overline{a}-2\overline{b}$ va $\overline{q}=3\overline{a}+2\overline{b}$ vektorlarga qurilgan uchburchak yuzini hisoblang.

4.22 Uchlari *A*(7, 3, 4), *B*(1, 0, 6), *C*(4, 5, -2) nuqtalardan iborat uchburchak yuzini hisoblang.

4.23 Piramidaning uchlari berilgan: *A*(2, 3, 1), *B*(4, 1, -2), *C*(6, 3, 7), *D*(-5, -4, 8). Uchburchakning *D* uchidan tushirilgan balandligi uzunligini toping.

4.24 Uchburchakning uchlari berilgan: *A*(1, -1, 2), *B*(5, -6, 2), *C*(1, 3, -1). Uning *B* uchidan *AC* tomoniga tushirilgan balandligining uzunligini hisoblang.

4.25 Uchlari *A*(2, -1, 1), *B*(5, 5, 4), *C*(3, 2, -1), *D*(4, 1, 3) nuqtalarda bo`lgan piramida hajmini hisoblang.

4.3. Chiziqli fazo va uning o`lchovi

Barcha kompleks sonlarning qism to`plami P quyidagi xossalarni bajarsa, sonli maydon deyiladi:

1) Agar $\alpha, \beta \in P,$ u holda $\alpha + \beta \in P$ va $\alpha \cdot \beta \in P$;

2) Agar $\alpha \in P,$ u holda $(-\alpha) \in P;$

3) Agar $\alpha \in P$ va $\alpha \neq 0$, u holda $\dfrac{1}{\alpha} \in P$.

Barcha ratsional, haqiqiy, kompleks sonlar to`plami sonli maydon bo`la oladi. Elementlari *x*, *y*, *z*,... bo`lgan $V$ to`plam ustida vektor fazo aniqlangan deyiladi, agar $x + y \in V,$ va $x \in V,$ $\forall \alpha \in P$ uchun $\alpha \cdot x \in V$ bo`lsa va quyidagi munosabatlar o'rinli bo'lsa:

1) $x + y = y + x$;

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

3) shunday $\exists o \in V$ element mavjud bo`lsaki, $\forall x \in V$ uchun $x + 0 = x$ bo`lsa;

4) $\forall x \in V$ uchun $\exists - x \in V,$ $x + (-x) = 0;$

5) $1 \cdot x = x,$ $1 \in P,$ $x \in V;$

6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x;$ $\alpha, \beta \in P;$ $x \in V;$

7) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$ $\alpha \in P;$ $x, y \in V;$

8) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Vektor fazoning elementlari vektorlar deb ataladi.

Haqiqiy (kompleks) koordinatali barcha *n* o`lchovli vektorlar to`plami R^n (C^n) orqali belgilanadi. Quyidagi tartiblangan $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ n - likka, n - o'lchovli vector deyiladi.

To`plamdagi *n* – o`lchovli vektorlarni qo`shish va songa ko`paytirish:

$(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, ...\beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_{12}, ...\alpha_{1n} + \beta_n),$

$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, ...\lambda\alpha_n)$

amallari uni vektor yoki chiziqli fazoga aylantiradi.

4.26 Quyidagi to`plamlardan qaysi biri sonli to`plam bo`lishini aniqlang:

a) barcha butun sonlar to`plami;

b) $a + b\sqrt{3}$ ko`rinishdagi barcha sonlar to`plami, bu yerda *a* va *b* – ratsional sonlar;

c) $m + n\sqrt{3}$ ko`rinishdagi barcha sonlar to`plami, bu yerda *m* va *n* – butun sonlar;

d) $a + bi$ ko`rinishdagi kompleks sonlar, bu yerda *a* va *b* – ratsional sonlar.

4.27 Quyidagi to`plamlarning vektor fazo bo`lishini aniqlang (to`plam elementlarini qo`shish va ularni songa ko`paytirish odatdagiday aniqlangan).

a) elementlari haqiqiy yoki kompleks sonlardan iborat barcha kvadrat matrisalar;

b) darajasi *n* bo`lgan barcha ko`phadlar;

c) *f* (2) = 0 shartni qanoatlantiradigan barcha ko`phadlar to`plami;

d) *f* (2) = 1 shartni qanoatlantiradigan barcha ko`phadlar to`plami;

e) [*a*; *b*] kesmada uzluksiz barcha funksiyalar;

f) barcha haqiqiy sonlar;

g) barcha kompleks sonlar;

4.4 Vektorlarning chiziqli bog`liqligi va chiziqli erkliligi. *n* - o`lchovli chiziqli fazo bazisi va koordinatalari

x_1, x_2, …, x_n vektorlarning chiziqli kombinasiyasi deb $\overline{x} = \lambda_1\overline{x_1} + \lambda_2\overline{x_2} + ... + \lambda_m\overline{x_m}$ formula bilan aniqlanuvchi $\overline{x}$ vektorga aytiladi, bunda λ_1, λ_2,… λ_m - tayin sonlar.

Agar $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ... \overline{x_n}$ vektorlar sistemasi uchun kamida bittasi noldan farqli shunday $\lambda_1,\ \lambda_2,..,\ \lambda_n$ sonlar mavjud bo`lib,

$$\lambda_1 \overline{x_1} + ... + \lambda_n \overline{x_n} = 0 \qquad (4.16)$$

shart bajarilsa, bu sistema chiziqli bog`liqli deyiladi. Agar yuqoridagi tenglik faqat $\lambda_1, = ... = \lambda_n = 0$ bo`lganda o`rinli bo`lsa, x_1, x_2, …, x_n vektorlar sistemasi chiziqli erkli deyiladi.

Ikkita kolleniar vektor har doim chiziqli bo`gliqlidir. Uchta komplanar vektor har doim chiziqli bog`liqli.

n ta chiziqli bog`liqmas vektorlar sistemasi $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ... \overline{e_n}$ berilgan bo`lib, ixtiyoriy $\overline{x}$ vektorni ularning chiziqli kombinatsiyasi, ya`ni

$$\overline{x} = \alpha_1 \overline{e_1} + ... + \alpha_n \overline{e_n} \qquad (4.17)$$

shaklida ifodalash mumkin bo`lsa, u holda berilgan sistema basiz deyiladi.

(4.17) tenglik $\overline{x}$ vektorning $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ... \overline{e_n}$ basis bo`yicha yoyilmasi deyiladi. Fazoda chiziqli bog`liq bo`lmagan har qanday uchta $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ vektor bazis tashkil qiladi, shu sababli fazodagi har qanday $\overline{x}$ vektor shu bazis bo`yicha yoyilishi mumkin. *n* o`lchovli *V* fazoda $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ... \overline{e_n}$ bazisni ajratib olamiz $\forall x \in V$ uchun $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$ yagona yoyilma mavjud. $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n$ sonlar x vektorning koordinatalari bo`lib, bunday yoziladi:

$$x = \{\ \alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n\ \}.$$

Agar bazisning vektorlari o`zaro perpendikulyar va birlik uzunlikka ega bo`lsa, bu bazis ortonormallangan bazis deyiladi va u ortlar deb ataluvchi *i, j, k*, …*n* vektorlar orqali belgilanadi.

4.28 $\overline{a_1}(1,3,5,7)$, $\overline{a_2}(3,5,7,1)$, $\overline{a_3}$ (5,7,1,3), $\overline{a_4}(7,1,3,5)$ vektorlar chiziqli bog'liqmi?

Yechish:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$\Delta \neq 0$ bo'lgani uchun $\overline{a_1}$, , , $\overline{a_4}$ vektorlar chiziqli erkli.

4.29 Barcha *n* – o`lchovli vektorlardan iborat $R^n$ fazoning o`lchamini aniqlang va bazisini tioping.

4.30 Darajasi *n* dan oshmaydigan barcha $P_n(t)$ ko`phadlar fazosining o`lchamini aniqlang va bazisni toping.

4.5 Chiziqli fazoda skalyar ko`paytma tushunchasi

n o`lchovli *V* fazoda $x = (\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n)$ va $y = (\beta_1, \beta_2, ... \beta_n,)$ vektorlar berilgan bo`lsin. Ularning skalyar ko`paytmasi $x \cdot y = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + .. \alpha_n \beta_n$ formula bilan aniqlanadi va quyidagi xossalarga ega:

1) $xy = yx$
2) $(x + y)z = xz + yz$;
3) $(\alpha x) y = \alpha (xy)$;
4) $xx > 0$, agar $x \neq 0$;

4.6 Evklid fazosi

Haqiqiy sonlar to`plami ustida aniqlangan vector fazoda skalyar ko`paytma aniqlangan bo`lsa u Evklid fazosi deyiladi. Vektorning uzunligi $|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ...\alpha_n^2}$. Uzunligi birga teng vektor birlik vektor deyiladi.

$e_1, e_2, ...e_n$ bazis orto deyiladi, agar $i \neq j$ da $e_i \cdot e_j = 0$ bo`lsa, Evklid fazosining vektorlari uchun Koshi-Bukyakovskiy va uchburchak tengsizligi bajariladi:

$$|xy| \leq |x||y|$$
$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

4.7. Chiziqli operator

Chiziqli operator ustida amallar. Chiziqli operatorning xos sonlari va xos vektorlari.

Agar fazodagi har bir *x* vektorga o`sha fazoning aniq *y* = *Ax* vektori mos qo`yilgan bo`lib, u ushbu $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2$ chiziqlilik shartiga bo`ysunsa u holda *A* chiziqli operator deyiladi, bu yerda x_1 va x_2 fazoning ixtiyoriy vektorlari λ_1 va λ_2 ixtiyoriy sonlar.

Agar shunday noldan farqli $x \in R^n$ vektor mavjud bo`lsaki,

$$Ax = \lambda x \qquad (4.18)$$

tenglik bajarilsa λ son *A* chiziqli operatorning xos soni, *x* esa xos vektor deyiladi. Boshqacha aytganda matrisani uning xos vektoriga ko`paytmasi, bu vektorni $\lambda$ baravar, cho`zish $(\lambda > 1)$ yoki siqish $(\lambda < 1)$ dan iborat. $\lambda = 1$ da vektor o`zgarmaydi.

(4.18) tenglikning boshqacha ko`rinishi

$$(A - \lambda E)x = 0$$

E – birlik matrisa, 0 – vektor, *A* matrisaning elementlari a_{ij} – bo`lsa, A chiziqli operatorning $e_1, \ldots, e_n$ bazisdagi matrisasi yana A harfi bilan belgilanadi.

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

xarakteristik matrisa deyiladi. $A - \lambda E = 0$ tenglama xarakteristik tenglama deyiladi.

4.31 Matrisaning xos son va xos vektorini toping.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Yechish. Matrisaning xarakteristik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

bundan $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0,\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5.$ Xos vektorni topish uchun :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 2$ ga mos keluvchi xos vektor

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ sistemaning yechimi bo`ladi, bu bitta tenglama, $x_2 = b$ deb olsak, x_1 = (-2*b*, *b*) =

=b(-2, 1) bo`ladi.

$\lambda_2 = 5$ xos songa mos keluvchi xos vektor

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

erkli o`zgaruvchini $x_2$ = $c$ deb olsak. $x_2$ = ($c$, $c$) = $c$(1, 1). $b$ va $c$ ixtiyoriy sonlar bo`lgani uchun bitta xos songa bir nechta har xil uzunlikdagi xos vektorlar mos kelishi mumkin. Masalan bir jinsli sistemaning fundamental yechimlariga mos keluvchi xos vektorlar

x_1=(-2, 1), x_2=(1, 1).

4.8 Kvadratik formalar

Kvadratik forma deb $L(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ n ta x_1, x_2,… x_n noma`lumlarning har bir qo`shiluvchisi bir noma`lumning kvadrati, yoki ikkita turli noma`lumning ko`paytmasidan iborat yig`indiga aytiladi. Kvadratik formani $L = X'AX$ yoki $L(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ ko`rinishida yozish mumkin. Kvadratik formaning kanonik ko`rinishi deb, noma`lumlarning ko`paytmasini o`z ichiga olmagan berilgan kvadratik formaga ekvivalent formaga aytiladi.

$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ kvadrtik forma kanonik ko`rinishga ega deyiladi, agar barcha $i \neq j$ da $a_{ij} = 0$ bo`lsa, ya’ni: $L = a_{11}x_1{}^2 + a_{22}x_2{}^2 + ... + a_{nn}x_n{}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i{}^2$.

Har qanday kvadratik formani noma`lumlarni chiziqli almashtirish $X = SY$ (bu yerda $X = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ - o`zgaruvchilarning ustun matrisasi.) yordamida kanonik ko`rinishga keltirish mumkin.

Agar barcha $x \neq 0$ da $L(x) > 0$(L(x) < 0) bo`lsa, u holda $L(x)$ musbat (manfiy) aniqlangan kvadratik forma deyiladi.

4.32 Kavdratik formani matrisasini yozing.

F= $2x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

4.33 Quyidagi matrisiga mos kvadratik formani toping.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.34. $F = -x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$ **4.35.** $F = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$

4.36. $F = x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 5x_1x_3$ **4.37.** $F = 3x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$

Quyida berilgan kavdratik formalarni kanonik ko`rinishga keltiring.

4.38. $F = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$

4.39. $F = 2x_1^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

4.40. $F = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$

4.41. $F = x_1^2 - 4x_2x_3 + x_3^2$

4.42. Uchlari *A*, *B*, *C* nuqtalarda bo'lgan uchburchakning yuzini toping.

№	*A*	*B*	*C*
1	(1, -1, 1)	(-1, 1, 2)	(2, -2, 4)
2	(4, 5, 2)	(-5, 0, -2)	(1, -4, 0)
3	(8, 2, -6)	(0, -5, 1)	(4, 1, -3)
4	(5, 4, 3)	(-2, 2, 1)	(0, 4, 4)
5	(-10, 8, -4)	(-7, 7, -3)	(-9, 5, -7)
6	(3, 6, -3)	(2, 5, -2)	(1, 4, -3)
7	(-5, 3, 1)	(-2, 0, 1)	(-1, 4, -1)
8	(4, -2, 2)	(3, 2, 2)	(4, 2, -4)
9	(2, -1, 2)	(0, -1, 1)	(-3, 0, 1)
10	(6, 2, 5)	(5, 2, 4)	(7, 3, 5)
11	(-1, 2, 2)	(-3, 6, 2)	(2, -3, 1)
12	(5, 4, 10)	(4, 5, 9)	(1, 6, 11)
13	(8, 4, -4)	(7, 2, -3)	(9, 4, 1)
14	(2, 5, -1)	(3, 6, -1)	(-1, 4, -3)
15	(1, 1, -1)	(2, -3, -4)	(2, 1, -2)

4.43 Piramidaning uchlari *A*, *B*, *C*, *D* nuqtalarda yotadi. Piramidaning hajmini toping.

№	*A*	*B*	*C*	*D*
1	(2, -1, 0)	(1, -2, -2)	(-1, 2, 1)	(1, 0, 2)
2	(-3, -1, 0)	(-1, -1, 6)	(2, 2, 1)	(0, 2, 1)
3	(6, 1, -2)	(0, -4, 5)	(-3, 2, 1)	(1, 0, 1)
4	(1, -3, 7)	(-1, 0, 3)	(2, 3, 0)	(0, 3, 1)
5	(5, 3, -4)	(1, 0, 2)	(2, 3, 0)	(-1, 3, 10)
6	(0, 2, 5)	(-2, -1, 2)	(2, 5, 1)	(7, 6, 10)
7	(1, 2, 1)	(-6, 0, 5)	(-3, 0, 0)	(-1, 2, 4)
8	(-8, 5, -2)	(2, 1, -4)	(-2, -1, 7)	(-3, 6, 4)
9	(2, 4, 8)	(3, 6, 9)	(-1, 0, 0)	(1, 0, 0)
10	(4, 2, -1)	(-2, -1, 3)	(10, 0, -1)	(1, 1, 1)
11	(1, 2, 3)	(2, 3, 4)	(3, 4, 5)	(4, 5, 6)
12	(-1, -3, -2)	(-4, -3, 2)	(2, 2, 0)	(-1, 0, 7)
13	(0, -1, -2)	(5, 3, 4)	(-1, 1, 1)	(3, 0, 3)
14	(2, 2, 2)	(-3, -3, -3)	(1, 2, 0)	(-2, -3, 1)

15	(1, 0, 2)	(5, 3, -2)	(2, 1, 4)	(-2, -3, 8)

4.9 Iqtisodda chiziqli modellar. Savdoning chiziqli modeli

n ta mamlakatning budjeti x_1, x_2,… x_n tovarlar sotib olishga sarflanadi. Biz ayriboshlashning chiziqli modelini - xalqaro savdo modelini-qaraymiz.

j – mamlakatning i – mamlakat tovarini sotib olishga sarflaydigan x_j – budjetning bir qismi a_{ij} koeffisentlar matrisasini kiritamiz.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (4.19)$$

U holda bor budjet mamlakatning ichidan va tashqarisidan tovar sotib olishga sarflansa,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \qquad (4.20)$$

o`rinli bo`ladi. (4.19) matrisa (4.20) shart bilan savdoning strukturaviy matrisasi deyiladi. i – mamlakatning ichki va tashqi savdodan daromadi;

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$$

Balanslashtirilgan (defitsitsiz) savdo sharti tabiiy ravishda quyidagichadir: har bir mamlakatning budjeti savdodan tushadigan daromaddan oshmasligi kerak, $P_i \geq x_i$, ya`ni

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq x_i$ $i=\overline{1,n}$. Bu shartda tengsizlik belgisi bo`lishi mumkin emasligi isbotlanadi va

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = x_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_2 = x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = x_n \end{cases} \qquad (4.21)$$

(4.21) sistema matrisa ko`rinishida

$$A\overline{X} = \overline{X} \text{ yoki } (A-E)\overline{X} = \overline{0} \qquad (4.22)$$

Matrisaning xos soni $\lambda = 1$ ga mos keluvchi xos vektor taqchilliksiz xalqaro savdoning budjetlaridan iborat bo`ladi.

Misol: To`rtta mamlakat savdosining strukturaviy matrisasi

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

budjetlar yig`indisi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270$ (shartli pul birligi) bo`lsa, bu mamlakatlarning budjetini toping.

Yechish. Berilgan strukturaviy matrisa A ning xos soni $\lambda = 1$ga mos keluvchi xos vektor $\overline{x}$ ni topish kerak, $(A-E)\overline{x} = 0$ ya`ni tenglamani yechish kerak.

$$\begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & -0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & -0,6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bu sistemaning rangi uchga teng bo`lgani uchun, noma`lumlardan bittasi erkli o`zgaruvchi va u orqali qolganlari ifodalanadi. Sistemani Gauss usuli bilan yechib xos vektor x ning kompanentlarini topamiz:

$$x_1 = \frac{140}{121}c, \quad x_2 = \frac{146}{121}c, \quad x_3 = \frac{20}{11}c, \quad x_4 = c.$$

Topilgan qiymatni berilgan budjetlar yig`indisiga qo`yib c kattalikni topamiz: c = 1210, bundan defitsitsiz savdoda mamlakatlar budjetining izlanayotgan kattaligini topamiz.

$$x_1 = 1400, \quad x_2 = 1460, \quad x_3 = 2200, \quad x_4 = 1210.$$

4.44 Berilgan vektorlar sistemasi chiziqli bog`liq yoki erkli ekanligini aniqlang.

$$A_1 = (3, 5, 1, 4), \quad A_2 = (-2, 1, -5, -7), \quad A_3 = (-1, -2, 0, -1).$$

Yechish. $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0$ bundan quyida tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5x_2 \\ x_3 = 13x_2 \end{cases}$$

Oxirgi hosil qilingan tenglamalar sistemasining nolmas yechimlari ham mavjud. (Masalan x_1= 5, x_2 = 1, x_3 = 13). Demak, A_1, A_2, A_3 vektorlar chiziqli bog`liq ekan.

4.45 Quyida berilganlarga ko`ra B=(2, 7, 11, 6) vektorni A_1=(2, 4, 0, 3) ,A_2 = (-3, 0, 1, 3), A_3(1, -1, 10, -3) vektorlar orqali ifodalash mumkinmi?

4.46. Quyida berilgan uchta vektorlar bazis hosil qilishini tekshiring.

$$\bar{a} = \{0,3,1\}, \bar{b} = \{1,-2,0\}, \ \bar{c} = \{1,0,1\}.$$

4.47. Berilgan vektorlar orasidagi burchak kosinusini aniqlang va skalyar ko`paytmasini toping.

$$\bar{a} = \{1, 1, 3\}$$
$$\bar{b} = \{-1, 1, 3\}$$

4.48. Agar $A_2 - A_1$ va $A_3 - A_1$ vektorlar proporsional bo`lmasa, u holda $A_1$, $A_2$, $A_3$ vektorlar chiziqli bog`liq emasligini ko'rsating.

4.49. $F = x_1^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 2x_3x_1$

4.50. $F = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 2x_3x_1$

4.51. $a_1 = (2,-1, 3, 5), \ a_2 = (6,-3, 3, 15)$ **4.52.** $a_1 = (-4, 2, 8), a_2 = (14,-7,-28)$

4.53. $a_1 = (-7, 5, 19), \ a_2 = (-5, 7, -7), \ a_3 = (-8, 7, 14)$

4.54. $a_1 = (0, 1, 1, 0), \ a_2 = (1, 1, 3, 1), \ a_3 = (1, 3, 5, 1), \ a_4 = (0, 1, 1, 2).$

Barcha shunday a sonlarni topingki bunda, B vektor, A_1, A_2, ... , A_n vektorlarga chizqli bog`liq bo`lsin.

4.55. $b = (2, a, 3), a_1 = (1, 2, 1), a_2 = (3, 4, 5), a_3 = (4, 5, 7).$

4.56. $b = (15, 6, a), \ a_1 = (5, 2, 1), \ a_2 = (10, 4, 2).$

4.57. $b=(3,5,a),\ \ a_1=(2,4,3),\ \ a_2=(1,6,5),\ \ a_3=(1,5,4)$

4.58 Nol bo\`lmagan $b$ vektor $a_1$, $a_2$, $a_3$ va $a_1$, $a_5$ , $a_6$ vektorlar bilan mos ravishda chizqli bog\`liq bo\`lsa, uholda $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$ vektorlar chizqli bog\`liq vektorlar sistemasi ekanligini isbot qiling.

4.59. Quyidagi berilgan vektorlarni bazis hosil qilishini tekshiring.
$\bar{a}=\{4,0,1\},\ \bar{b}=\{3,1,-1\},\ \bar{c}=\{0,-2,1\}$

4.60. $\bar{a}=\{1,0,4\},\ \bar{b}=\{-1,1,3\},\ \bar{c}=\{1,-2,0\}$

4.61. $\bar{a}=\{1,2,-1\},\ \bar{b}=\{-3,0,2\},\ \bar{c}=\{1,-1,4\}$

4.62. $\bar{a}=\{1,2,-1\},\ \bar{b}=\{2,3,0\},\ \bar{c}=\{-1,1,2\}$

Berilgan vektorlarninig skalyar ko\`paytmasini va uzunliklarini aniqlang.

4.63. $\bar{a}=\{9,10,1\},\ \bar{b}=\{4,0,-4\}.$ **4.64.** $\bar{a}=\{7,0,6\},\ \bar{b}=\{-2,-1,5\}.$

4.65. $\bar{a}=\{2,5,-3\},\ \bar{b}=\{0,7,3\}.$ **4.66.** $\bar{a}=\{17,-1,8\},\ \bar{b}=\{-2,-1,5\}.$

Quyida berilgan formulalarni kanonik ko'rinishga keltiring.

4.67. $F = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_1 x_2 - 8x_2x_3 + 4x_3x_1$ **4.68.** $F = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$

4.69. $F = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 8x_3x_1$

Mavzu yuzasidan savollar

1. Vektor deb nimaga aytiladi?
2. Vektorning moduli uning koordinatalari orqali qanday ifodalanadi?
3. Vektorlar uchun qanday chiziqli amallar aniqlangan?
4. Vektorlarning yo\`naltiruvchi kosinuslari uning koordinatalari orqali qanday ifodalanadi?
5. Vektorlarning kolleniarlik shartlari.
6. Ba'zis deb nimaga aytiladi?
7. Vektorlarning skalyar ko\`paytmasi deb nimaga aytiladi?
8. Ikki vektor orasidagi burchak nima?
9. Ikkita vektorning vektor ko\`paytmasi nima?
10. Vektorlarning aralash ko\`paytmasi deb nimaga aytiladi?
11. Vektorlarning perpendikulyarlik va paralellik shartlari.
12. Qanday vektorlar komplanar deb ataladi?
13. Vektor va aralash ko\`paytmaning geometrik ma'nosi.
14. Chiziqli fazoning ta'rifi.
15. *n* o\`lchovli fazoda vektorning uzunligi, vektorlarning skalyar ko\`paytmasi, ular orasidagi burchak qanday aniqlanadi?

Adabiyotlar

11.Sh.Shorahmetov, B.Naimjanov, «Iqtisodchilar uchun matematica», - T.: «Fan va texnologiya»., 2007 y.

12. Клименко Ю. И. “Высшая математика для экономистов теория, примеры и задачи”. М.: Экзамен 2005 г.

13. М. С. Красс, Б. П. Чупринов. “ Основы высшей математики и ее приложения в экономическом образовании ”, - М.: Дело, 2000 г.

14. Кремер Н. М. и другие. – “ Высшая математика для экономистов ” , - М.: 2004 г.

15. Кремер Н. Ш. и др. “Практикум по высшей математике для экономистов” – М.: 2004 г.

16. «Сборник задач по высшей математике для экономистов» под редакцией В.И.Ермакова. М.: Инфра – М, 2003 г.

17. Минорский И. П., “Сборник задач по высшей математике ” – М.: 2004 г.

18. Проскуряков И. В. “ Сборник задач по линейной алгебре ” – М.: Наука, 1998 г.

19. Данко П. Е., Попов А. Т., Кожевникова Т. Я. “Высшая математика в упражнениях и задачах” – М.: Высшая Школа, 1998 г.

20. Соатов Ё.У. “ Олий математика ”, Т.: Укитувчи, 3-жилд, 1996 й.

21. Шапкин А.С. «Задачи с решениями по высшей математике теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию» - М.: 2008г.

22. Макаров С.И., Мищенко М.В., «Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики» Н.: 2008г.

23. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. «Основы математики и ее приложения в экономическом образовании» -М.: 2008

24. Ермаков В.И. «Общий курс высшей математика для экономистов». –Н: 2010г.

25. Ермаков В.И. «Общий курс высшей математика для экономистов». –Н: 2010г.

5. Analitik geometriyaning asosiy tushunchalari va metodlari

5.1 Tekislikda to`g`ri chiziqlar

Tekislikda to`g`ri chiziqning umumiy tenglamasi

$$Ax + By + C = 0 \qquad \left(A^2 + B^2 \neq 0\right) \tag{5.1}$$

Burchak koeffitsiyentli tenglamasi

$$y = kx + b, \tag{5.2}$$

(*k* – burchak koeffitsenti, *b* – boshlang`ich ordinati).
Kesmalarga nisbatan tenglamasi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{5.3}$$

(*a* va *b* *Ox* va *Oy* o`qlarda ajratgan kesmalar).
$M_1(x_1;\ y_1)$ va $M_2(x_2;\ y_2)$ nuqtalar orqali o`tuvchi to`g`ri chiziq tenglamasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Ikkita to`g`ri chiziq $y = k_1x+b_1$ va $y = k_2x+b_2$ yoki $A_1x+B_1y+C_1 = 0$ va $A_2x+B_2y+C_2 = 0$ tenglamalar bilan berilgan bo`lsin, ular orasidagi φ burchak

$$tg\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2} \qquad (5.4)$$

yoki
$$\cos\varphi = \frac{\pm(A_1A_2 + B_1B_2)}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

formulalar bilan topiladi.
To`g`ri chiziqlarning parallellik sharti:

$$k_1 = k_2 \quad \text{yoki} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (5.5)$$

To`g`ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad \text{yoki} \quad A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0 \qquad (5.6)$$

$M_0(x_0; y_0)$ nuqtadan $Ax+By+C = 0$ to`g`ri chiziqgacha bo`lgan masofa

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

formula bilan aniqlanadi.

Misollar:
5.1 $M_1(2, 0)$ va $M_2(3, 4)$ nuqtalardan o`tuvchi to`g`ri chiziq tenglamasini tuzing.
Yechish. $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ formulaga ko`ra

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y-0}{4-0} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y}{4}$$

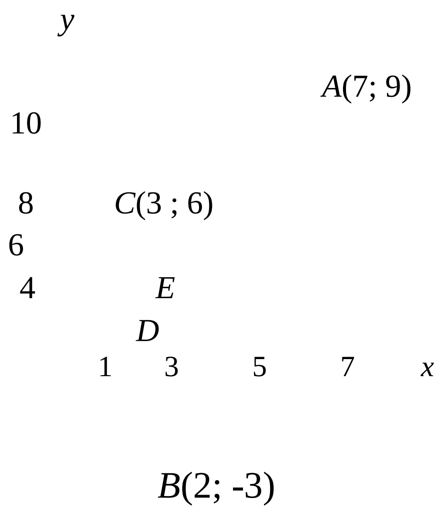
5.2 Berilgan to`g`ri chiziqlarni o`zaro parallel va perpendikulyar bo`lgan juftliklarga ajrating.

1) $2y + 3x + 5 = 0$ 2) $6y + 9x – 25 = 0$
3) $2y + x + 8 = 0$ 4) $y - 2x + 10 = 0$

5.3 $M(0;3)$ nuqtadan o`tuvchi va $\bar{a} = \{2,1\}$ vektorga parallel tog`ri chiziq tenglamasini tuzing.
5.4 $3x + y – 6 = 0$ to`g`ri chiziq va $A(-3; 1)$, $B(3; 3)$ nuqtalar orqali o`tuvchi to`g`ri chiziqlar orasidagi burchakni aniqlang.
5.5 $C(1; 1)$ nuqtadan o`tuvchi va koordinata burchagidan yuzasi 2 kv. birlik bo`lgan uchburchak ajratadigan to`g`ri chiziq tenglamasini tuzing.
5.6 Uchlari $A(7; 9)$, $B(2; -3)$, $C(3; 6)$ nuqtalarda bo`lgan uchburchakning
a) *M* medianalar kesishish nuqtasi koordinatalarini
b) *A* uchidan chiqib *BC* tomonini *E* nuqtada kesib o`tuvchi *AE* bessektrisasi asosi *E* nuqta koordinatalarini aniqlang.
Yechish. *a*) *D* nuqta *BC* tomonni o`rtasi bo`lganligi uchun (1-rasm)

$$x_D = \frac{x_C + x_B}{2} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$$

$$y_D = \frac{y_C + y_B}{2} = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; D\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right).$$



(1- rasm)

M medianalar kesishish nuqta bo\`lganlig uchun bu

AD kesmani $\lambda = 2:1$(uchburchak uchidan boshlab hisoblanganda) nisbatda bo\`ladi. Demak *M* nuqtani koordinatalari quyidagicha aniqlanadi.

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_D}{1+\lambda} = \frac{7 + 2\cdot\frac{5}{2}}{1+2} = 4 \quad y_M = \frac{y_A + \lambda y_D}{1+\lambda} = \frac{9 + 2\cdot\frac{3}{2}}{1+2} = 4$$

Demak $M(4;4)$.

b) Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko\`ra:

$$|AC| = \sqrt{(7-3)^2 + (9-6)^2} = 5,\ |AB| = \sqrt{(7-2)^2 + (9+3)^2} = 13.$$

AE bissektrisa *BC* tomonni quyidagicha nisbatda bo\`ladi: $\lambda = \frac{|CE|}{|EB|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{5}{13} \quad \Rightarrow$

$$x_E = \frac{x_C + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{3 + \frac{5}{13}\cdot 2}{1 + \frac{5}{13}} = \frac{49}{18}, \quad y_E = \frac{y_C + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{6 + \frac{5}{13}\cdot(-3)}{1 + \frac{5}{13}} = \frac{7}{2}$$

Demak $E(\frac{49}{18};\ \frac{7}{2})$.

5.7 Uchlari *A*(-7; 2); *B*(5; -3); *C*(8; 1) nuqtalarda bo\`lgan *ABC* uchburchakni *B* uchidan chiqarilgan mediana, balandlik, bissektrisa tenglamalarini tuzing.

5.8 Quyidagi jadvalda muzqaymoqning narxi va unga mos keluvchi bir kunlik sotilish miqdori berilgan.

P sotilish narxi	100	200	300	400	500
Q sotilish miqdori	900	700	500	300	100

a) *P* = *f* (*Q*) funksiya grafigini chizing.

b) Muzqaymoqqa bo\`lgan talab funksiyasini toping.

5.9. Ikki turdagi transport vositasi bilan yuk tashish xarajatlari $P = 100 + 4Q$ va $P = 200 + 3Q$ funksiyalar bilan ifodalangan. Bunda *Q* – yuz kilometrlardagi masofa, *P* – pul birligidagi transport xarajatlari. Qaysi masofadan boshlab ikkinchi yuk tashish mashinasida birinchisiga qaraganada yuk tashish arzonga tushadi.

5.10 5*x* – *y* + 10 = 0 va 8*x* + 4*y* + 9 = 0 to\`g\`ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan o\`tuvchi va *x*+3*y* = 0 to\`g\`ri chiziqqa parallel bo\`lgan to\`g\`ri chiziq tenglamasini tuzing.

5.11 $3x + 4y - 1 = 0$ va $4x - 3y + 5 = 0$ tenglamalar bilan berilgan ikki to`g`ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

5.12 Paralellogramning ikkita tomonining tenglamalari $x + y + 5 = 0$ va $x - 4y = 0$ bo`lib, dioganallarining kesishish nuqtasi $O(2;-2)$ bo`lsa, qolgan tomonlarining tenglamalarini tuzing.

5.13 $A(-4; 1)$ nuqtadan o`tuvchi va koordinata o`qlariga parallel bo`lgan to`g`ri chiziqlar tenglamalarini tuzing.

5.14 Uchlari $A(1; -3)$ va $B(4; 3)$ nuqtalarda bo`lgan kesmani uchta teng qismlarga ajrating
va bo`linish nuqtalaning koordinatalarini aniqlang.

5.15 Agar uchburchak tomonlari o`rtalri koordinatalari A(-2; 1), B(2; 3), C(4; -1) lar bo`lsa
uning uchlari koordinatalarini aniqlang.

5.16 (3; -1) nuqta orqli o`tuvchi va $Ox$ o`qi bilan 45^0 burchak tashkil qiluvchi to`g`ri chiziq tenglamasini tuzing.

5.17 $A(-3; 1)$ va $B(3; 3)$ nuqtalar orqali o`tuvchi to`g`ri chiziq va $3x+y-6 = 0$ to`g`ri chiziqlar
orasidagi burchak bissektrisa tenglamasini tuzing.
5.18 Uchburchakning $A(-1; 2)$, $B(3; -1)$, $C(0; 4)$ uchlaridan uning qarama – qarshi tomoniga
paralell to`g`ri chiziq o`tkazing va shu to`g`ri chiziqlarning tenglamalarini tuzing.
5.19 Uchburchakning uchta uchi koordinatalari A(-1; 3), B(3; -2), C(5; 3) lar berilgan.
a) Uchta tomoni tenglamasi, *b*) *B* uchidan chiqqan medianasi, *c*) *C* uchidan *AB* tomoniga tushirilgan balandlik tenglamalarini tuzing.

5.20 Uchburchak ikki uchi koordinatalari $A(-2; 1)$, $B(3; -4)$ va balandliklari kesishish nuqtasi $D(5; -1)$ berilgan. Berilgan uchburchakni tomonlari tenglamalarini tuzing.

5.21 Dioganallari 10 sm va 6 sm, katta dioganali Ox o`qida, kichigi esa $Oy$ o`qida joylashgan romb tomonlari tenglamasini tuzing.

5.22 Tovarni ishlab chiqarish xarajatlari quyidagicha: mahsulot miqdori 100 ta bo`lganda xarajat 200 p/b., 300 ta bo`lganda 500 p/b., agar xarajat funksiyasi chiziqli bo`lsa, 500 ta mahsulot ishlab chiqarishga qancha xarajat sarflanishini aniqlang.

5.23 Ishlab chiqaruvchiga 60 ta tovardan 300 p/b., 100 ta dan esa 800 p/b. foyda keladi. Agar foyda funksiyasi chiziqli bo`lsa, u holda 500 ta tovarni sotishdan keladigan foydani toping.

5.24 Tovarni ikkita magazinda sotishdan keladigan foyda P = -2+3Q va P = -3+$\frac{16}{5}Q$ funksiyalar bilan ifodalanadi. Bunda Q – yuz donada miqdor, P – foyda birligi ming so`mda. Qaysi miqdordan boshlab ikkinchi magazinda savdo qilish foydali bo`ladi.

5.25 Firma tovarning narxi 2000 so`m bo`lganda bu tovardan 400 ta, 4000 so`m bo`lganda esa 700 ta ishlab chiqaradi. Bu mahsulotga bo`lgan takli*f* funksiyasini toping.

5.26 Gvoadikaga bo`lgan talab narx 100 so`m bo`lganda xarid 2000 dona, 200 so`m bo`lganda esa 1500 dona. Gvozdikaga bo`lgan talab funksiyani toping.

5.27 B tovarni ishlab chiqarishga sarflanadigan o`zgaruvchan xarajat quyidagicha:

Q	20	40
VC	500	650

O`zgarmas xarajat esa 9000 p/b. bo`lsa, xarajat funksiyasini toping.

5.28 Ikki turdagi transport vositasi bilan transport vositasi bilan yuk tashish xarajatlari
y = 150+50x va y = 250+25x tenglamalar bilan ifodalanadi. Qaysi masofadan boshalab, ikkinchi turdagi transport vositasiga ketgan xarajatlar birinchisiga nisbatan kam bo`ladi.

5.29 Ishlab chiqarish halmi y ni mehnat unumdorligi x ga bog`liqligi chiziqli va x = 3 da
y = 185, x = 5 da y = 305 bo`lsa, ishlab chiqarish tenglamasini toping. x = 20 da ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

5.2 Ikkinchi tartibli egri chiziqlar
Aylana, ellips, giperbola va parabola tenglamalari

Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi:

$$Ax^2 + Bxy + Cx + Dy^2 + Ey + F = 0 \quad \left(A^2 + B^2 \neq 0\right) \qquad (5.7)$$

Aylana

Berilgan nuqtadan bir xil R masofada joylashgan nuqtalar to`plamning geometric o`rniga aylana deyiladi. Berilgan nuqta uning markazi R, masofa esa uning radiusi deyiladi.

Radiusi R ga teng, markazi $C(x_0,y_0)$ va $O(0;0)$ nuqtalarda bo`lgan aylanalarning mos ravishda tenglamalari quyidaghi ko`rinishda bo`ladi:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \qquad (5.8)$$
$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (5.9)$$

5.30 Quyidagi tenglama bilan berilgan aylana markazining koordinatalari va radiusini toping.

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0$$

Yechish. Hadlarni guruhlab, to`la kvadrat ajratamiz.
$x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 + 6y + 9 - 9 - 11 = 0$ yoki $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 36$. Bundan aylana markazi $C(4; -3)$ va radiusi $R = 6$.

5.31 Markazi (0; 3) nuqtada bo`lgan (3; 7) nuqtadan o`tuvchi aylana radiusini toping.

5.32 Radiusi $\sqrt{13}$ ga teng hamda (1; 0) va (0; -1) nuqtalardan o`tuvchi aylana tenglamasini tuzing.
$(x-3)^2 + (y+3)^2 = 3(x+2)^2 + (y-2)^2 = 13$

5.33 Uchta $A(-4; 1)$, $B(2; 7)$, $C(8; 1)$ nuqtalardan o`tuvchi aylana tenglamasini tuzing.

5.34 Markazi $A(4; 7)$ nuqtada bo`lgan va $3x-4y+1 = 0$ to`g`ri chiziqqa urinadigan aylana tenglamasini yozing.

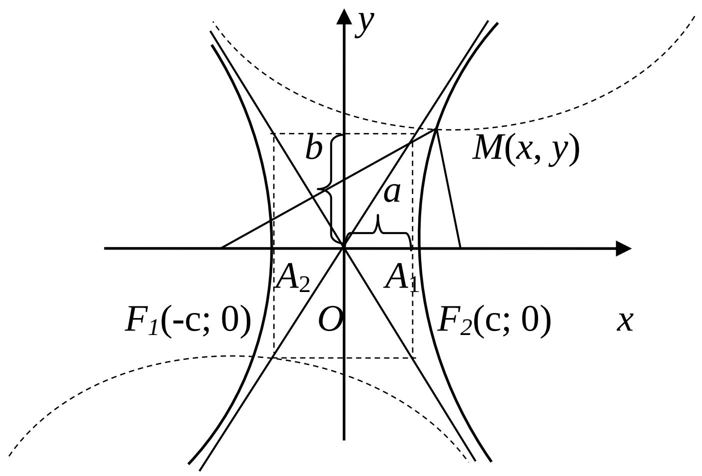
5.35 $9x^2 + 25y^2 = 225$ ellips berilgan. Uning yarim o`qlari, fokuslari koordinatalarini, ekssentrisitetini, direktrisalari tenglamalarini toping.

5.36 O`z harakati davomida $x = 9$ to`g`ri chiziqqa nisbatan $A(1; 0)$ nuqtaga uch marta yaqinroq bo`lgan nuqtalarning trayektoriyasini aniqlang.

5.37 Agar $2x-5y-30 = 0$ to`g`ri chiziq $\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{24} = 1$ ellipsga urinib o`tishi ma'lum bo`lsa, shu urinish nuqtaning koordinatalarini toping.

Giperbola

Ixtiyoriy nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi nuqtalargacha bo`lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati o`zgarmas sondan iborat nuqtalarning geometrik o`rni *giperbola* deyiladi.



(7 – rasm)

Giperbolaning kanonik tenglamasi (koordinata o`qlari giperbola o`qlari bilan ustma-ust tushadi)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (5.15)$$

a, b – mos ravishda gipebolaning haqiqiy va mavhum yarim o`qlari (7 – rasm)

$$c^2 = a^2 + b^2, \qquad (5.16)$$

$F_1(c;\,0)$, $F_2(-c;\,0)$– giperbola fokuslari, $c > a$, giperbola ekssentrisiteti ($e > 1$) (5.12) formula bilan topiladi.
Giperbolaning $M(x;\,y)$ nuqtasidan fokuslarigacha bo`lgan masofalar;

$$r_1 = |ex-a|,\ r_2 = |ex + a| \qquad (5.17)$$

Giperbolaning ikkita assimtotasi mavjud:

$$y=\pm\frac{b}{a}x \qquad (5.18)$$

Giperbolaning direktrisalari tenglamalari:

$$y=\pm\frac{b}{e}=\pm\frac{b^2}{c} \qquad (5.19)$$

5.38 $16x^2-9y^2=144$ giperbola berilgan. Uning yarim o`qini, fokuslari koordinatalarini, ekssentrisitetini, dirktrisasi va assimptotalari tenglamasini toping.
Yechish. Berilgan giperbolaning kanonik ko`rinishdagi tenglamasini yozib olamiz.
$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ = > $a^2 = 9$,$b^2 = 16$ = > o`qlari $a = 3$, $b = 4$ (5.16) formulaga ko`ra $c^2=a^2+b^2=25$ $c = \pm 5$. Fokuslari: $F_1(5;\ 0)$ va $F_2(-5;\ 0)$ (5.12) formuladan ekssentrisisenti $e=\frac{c}{b}=\frac{5}{3}$.

Direktrisasi (5.14) formulaga ko`ra $y=\pm\frac{b^2}{c}=\pm\frac{9}{5}$, assimptotalari tenglamalari (5.18) formulaga ko`ra $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{4}{3}x$

5.39 Fokuslari absissa o`qida, koordinata boshiga nisbatan simmetrik va uchlari orasidagi masofa $2c$=20, asimtota tenglamalari $y=\pm\frac{3}{4}x$ bo`lgan giperbola tenglamasini tuzing.

5.40 Tenglamasi $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$bo`lgan ellips berilgan. Uchlari ellipsning fokuslaridan, fokuslari esa uning uchlarida bo`lgan giperbola tenglamasini tuzing.

Parabola

Ta'rif : Berilgan nuqta (fokus) dan va berilgan to`g`ri chiziq (direktrisa) dan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalar to`plamining geometric o`rniga *parabola* deyiladi. (8 – rasm).

Uchi koordinatalar boshida bo`lgan (agar y *Ox* o`qiga simmetrik bo`lsa) parabola tenglamasi

$$y^2 = 2px \qquad (5.20)$$

bu yerda *p* yoki $A = \dfrac{1}{2p}$ - parabola parametrlari. (9 – rasm)

Parabola fokusi $F(\frac{p}{2};0)$ dan *Ox* o`qigacha bo`lgan masofa (fokal- radius)

$$r = x + \frac{p}{2} \qquad (5.23)$$

formula bo`yicha topiladi.
Parabolaning direktrisasi:

$$x = -\frac{p}{2} \qquad (5.24)$$

5.41 Agar parabolaning uchi koordinatalar boshida bo`lib, u *A*(2; 4) nuqtadan o`tsa va *Ox* o`qiga nisbatan simmetrik bo`lsa, uning tenglamasini tuzing va fokusini toping.

Yechish. *Ox* o`qiga simmetrik va *O*(0; 0) nuqtadan o`tganligi uchun (5.20) formulaga ko`ra $y^2 = 2px$ = > $4^2 = 4p$

$$p = 4 \quad => \quad y^2 = 8x \text{ va } F = \left(\tfrac{p}{2};0\right) \quad => \quad F\,(2;\,0)$$

5.42 Uchi koordinata boshida bo`lgan parabola *A*(2; 4) nuqta orqali o`tadi va *Ox* o`qiga nisbatan simmetrik. Parabolaning tenglamasi, fokuslari va direktrisalarini toping.

5.3 Fazoda tekislik va to`g`ri chiziq tenglamalari

Berilgan $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta orqali o`tuvchi va $\bar{n}=(A, B, C)$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (5.25)$$

Kesmalarga nisbatan tenglamasi esa

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (5.26)$$

(*a*, *b*, *c* mos ravishda O*x*, O*y*, O*z* o`qlaridan ajratilgan kesmalar);

Tekislikning umumiy tenglamasi

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (5.27)$$

$A(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikkacha bo`lgan masofa

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ikkita tekislik $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ berilgan bo`lsin. Ikkita tekislik orasidagi burchak kosinusi φ quyidagi munosabatdan topiladi:

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (5.28)$$

Ikkita tekislikning parallellik sharti:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (5.29)$$

Tekisliklarning perpendikulyarlik sharti:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (5.30)$$

Fazoda to`g`ri chiziq tenglamasi:

Ikkita tekislikning kesishish chizig`i sifatida:

$$\begin{cases} A_1x_1 + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (5.31)$$

Berilgan $M(x_1, y_1, z_1)$ nuqta orqali o`tuvchi va yo`naltiruvchi vektori $S = (m, n, p)$ bo’lgan.

To`g`ri chiziqning kanonik tenglamasi

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \qquad (5.32)$$

to`g`ri chiziqning parametrik tenglamasi

$$\begin{aligned} x &= x_1 + mt, \\ y &= y_1 + nt, \\ z &= z_1 + pt \end{aligned} \qquad (5.33)$$

Berilgan ikki nuqta $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ orqali o`tuvchi to`g`ri chiziq tenglamasi.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (5.34)$$

Ikkita to`g`ri chiziqning yo`naltiruvchi vektorlari $S_1(m_1, n_1, p_1)$ va $S_2(m_2, n_2, p_2)$ berilgan bo`lsin. Ikkita to`g`ri chiziq orasidagi burchak quyidagi munosabatdan topiladi:

$$\cos\varphi = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \qquad (5.35)$$

Fazoda ikkita to`g`ri chiziqning parallellik sharti:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \qquad (5.36)$$

Fazoda ikkita to`g`ri chiziqning perpendikulyarlik sharti:

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0 \qquad (5.37)$$

$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ to`g`ri chiziq va $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislik berilgan bo`lsin.

To`g`ri chiziq va tekislik orasidagi burchak φ quyidagi munosabatdan aniqlanadi:

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (5.38)$$

To`g`ri chiziq va tekislikning parallellik sharti:

$$Am + Bn + Cp = 0 \qquad (5.39)$$

To`g`ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik sharti:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \qquad (5.40)$$

5.44 *a*) $M(1; -2; 3)$ nuqtadan o`tuvchi va $n = (3; -4; 5)$ vektorga perpendikulyar,

b) $M(1; -2; 3)$ nuqtadan o`tuvchi va $3x - 4y + 5z + 6 = 0$ tekislikka parallel bo`lgan tekisliklarning tenglamasini tuzing.

Yechish. *a*)(5.25) formulaga ko`ra $A = 3$, $B = -4$, $C = 5$ va $x_0 = 1$, $y_0 = -2$, $z_0 = 3$

$=> 3(x - 1) - 4(y + 2) + 5(z - 3) = 0$

$3x - 4y + 5z - 26 = 0$

b) $Ax + By + Cz + D = 0$ tenglama bilan berilgan tekislik $M(1; -2; 3)$ nuqtadan o`tsin va $3x - 4y + 5z + 6 = 0$ tekislikka parallel bo`lsin. U holda (5.30) formulaga asosan

$\frac{A}{3}=\frac{B}{-4}=\frac{C}{5}\Rightarrow\ A=\frac{3C}{5}\ \ B=-\frac{4C}{5};\ \frac{5D}{C}=4$ bo`lsin $=> 3x - 4y + 5z + 4 = 0$

M nuqta shu tekislikka tegishli ekanligidan $3\cdot1-4\cdot(-2)+5\cdot3+4=0$ $=> 4 = -26$

demak $3x - 4y + 5z - 26 = 0$

5.45 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{-1}$ to`g`ri chiziq va $M(2; 0; 1)$ nuqtadan o`tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

5.46 Berilgan $A(4; 4)$ nuqta va $x^2+y^2+4x-4y=0$ aylana bilan $y = -x$ to`g`ri chiziqning kesishish nuqtasi orqali o`tuvchi aylana tenglamasini yozing.

5.47 Koordinata boshidan $x^2+y^2-8x-4y+16=0$ aylanaga o`tkazilgan urinma tenglamasini yozing.

5.48 Quyidagi aylanalarning markazlari va radiuslarini toping.

a) $x^2+y^2-6x+4y-23=0$ *b*) $x^2+y^2+5x-7y+2{,}5=0$

c) $x^2+y^2+7y=0$ *d*) $x^2+y^2-2x+8y-19=0$

5.49 $A(-3; 0)$, $B(3; 6)$ nuqtalar berilgan. Diametri *AB* kesmadan iborat bo`lgan aylana tenglamasini yozing.

5.50 Koordinata boshidan va $x+y+a = 0$ to`g`ri chiziqning $x^2 + y^2 = a^2$ aylana bilan urinish nuqtalari orqali o`tuvchi aylana tenglamasini yozing.

5.51 Berilgan $A(1; -2)$, $B(0; -1)$ va $C(-3; 0)$ nuqtalar orqali o`tuvchi aylanaga koordinata boshidan o`tkazilgan urinma tenglamasini yozing.

5.52 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$ aylananing Ox o`qi bilan kesishish nuqtalariga o`tkazilgan radiuslari orasidagi burchakni toping.

5.53 $A(3; 0)$ nuqta $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ aylanani ichida yotishini ko`rsating va $A$ nuqtada teng ikkiga bo`linadigan vatar tenglamasini yozing.
(*Ko`rsatma: izlanayotgan vatar OA ga perpendikulyar*, *bunda O – aylananing markazi.*)

5.54 $3x^2 + 3y^2 - 6x + 8y = 0$ tenglama bilan berilgan aylana radiusini va markazini aniqlang.

5.55 $A(3; 1)$ va $B(-1; 3)$ nuqtalardan o`tuvchi va markazi $3x – y – 2 = 0$ to`g`ri chiziqda yotuvchi aylana tenglamasini tuzing.

5.56 $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ va $x + y = 0$ tenglamalarning kesishishidan hosil bo`lgan va $M(4; 4)$nuqadan o`tuvchi aylana tenglamasini tuzing.

5.57 Yarim o`qi 5, ekssentrisiteti $\frac{12}{13}$ ga teng bo`lgan ellipsning kanonik tenglamasini yozing.

5.58 Er ellips bo`yicha harakatlanadi va uning fokuslaridan birida quyosh joylashgan. Erdan quyoshgacha bo`lgan eng qisqa masofa taxminan 147,5 million kilometr, eng katta masofa esa 152,5 million kilometr. Er orbitasining katta yarim o`qi va ekssentrisitetini toping.

5.59 Koordinata o`qlariga nisbatan simmetrik ellips $M(2; \sqrt{3})$ va $B(0; 2)$ nuqtalar orqali o`tadi. Uning tenglamasini yozing va M nuqtadan fokuslarigacha bo`lgan masofani toping.

5.60 Koordinata o`qlariga nisbatan simmetrik, fokuslari $Ox$ o`qida joylashgan, $M(2; \sqrt{21})$ nuqta orqali o`tuvchi ellipesning ekssentrisiteti $\varepsilon = \frac{3}{4}$. Ellips tenglamasini yozing va uning fokal radius vektorini aniqlang. (*Ko`rsatma: f okal radius vektorlar*, *ya'ni* $M(x, y)$ *nuqtadan f ikuslargacha bo`lgan masof alar* $r_1 = a – ex$, $r_2 = a + ex$ *f ormulalar bilan topiladi*)

5.61 Fokal radiuslarini yig`indisi $2\sqrt{5}$, fokuslari $F_1(-2; 0)$, $F_2(2; 0)$ nuqtalarda bo`lgan ellips tenglamasini yozing.

5.62 Fokuslari orasidagi masofa katta va kichik yarim o`qlari orasidagi masofaga teng bo`lgan ellipsning ekssentrisitetini toping.

5.63 $x^2+4y^2 = 4$ ellipsga uchlaridan biri katta yarim o`qning oxiri bilan ustma – ust tushadigan to`g`ri burchakli uchburchak chizilgan. Uning qolgan ikki uchining koordinatalarini toping. (*Ko`rsatma: tomonlaridan biri* $k = tg30^0$ *og`ma tenglamasi yozilib*, *ellips bilan kesishish nuqtasi topiladi.*)

5.64 $9x^2+25y^2 = 225$ ellipsda, o`ng fokusigacha bo`lgan masofa chap fokusigacha bo`lgan masofadan to`rt marta uzun bo`lgan nuqtani toping.

5.65 $x^2+y^2 = 36$ aylananing barcha ordinatalarini uch marta qisqartirishdan hosil bo`lgan egri chiziqning tenglamsini yozing.

5.66 O`z harakati davomida $A(0;\ 1)$ nuqtagacha bo`lgan masofa y-4 = 0 to`g`ri chiziqqacha bo`lgan masofadan ikki marta qisqa bo`lgan M nuqtaning traektoriyasini aniqlang.

5.67 $x^2-4y^2=16$ giperbolani yasang, asimptotalarini toping. fokuslari, ekssentrisiteti, asimptotalari orasidagi burchakni toping.

5.68 $x^2-4y^2=16$ giperbolada ordinatasi 1 bo`lgan $M$ nuqta olingan. Undan fokuslargacha bo`lgan masofani toping.

5.69 Giperbolaning kanonik tenglamasini yozing: *a*) fokuslari orasidagi masofa 10, uchlari orasidagi masofa esa 8 ga teng. *b*) haqiqiy o`q $a = 2\sqrt{5}$, ekssentrisiteti esa $e = \sqrt{1{,}2}$.

5.70 Uchlari $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ellepsning fokuslarida, fokuslari esa uning uchlarida bo`lgan giperbola tenglamasini yozing.

5.71 Berilgan $M_1\left(2\sqrt{7};-3\right)$, $M_2\left(-7;-6\sqrt{2}\right)$ nuqtalar orqali o`tuvchi koordinata o`qlariga nisbatan simmetrik giperbola tenglamasini yozing.

5.72 Asimptotasi $y=\pm\frac{3}{5}x$ va $M\left(10;-3\sqrt{3}\right)$ nuqtadan o`tuvchi giperbola tenglamasini yozing.

5.73 F (0; 2) nuqtadan va y = 4 to`g`ri chiziqdan baravar uzoqlikda joylashgan nuqtalar geometrik o`rnining tenglamasini yozing.

5.74 *a*) $y^2 = 4x$; *b*) $y^2 = -4x$; *c*) $x^2 = 4y$; *d*) $x^2 = -4y$ tenglamalr bilan berilgan parabolani chizing, fokuslari, direktrisai tenglamasini yozing.

5.75 $y^2 = 4x$ parabolada, fokal radiusi 4 bo`lgan nuqtani toping.

5.76 Agar parabola $x+y = 0$ to`g`ri chiziq va $x^2+y^2+4y = 0$ aylananing kesishish nuqtalari orqali o`tsa hamda *Oy* o`qiga nisbatan simmetrik bo`lsa, uning kanonik tenglamasi va diraktrisasini yozing.

5.77 *A*(0; 0), *B*(-1; 2) nuqtalar orqali o`tuvchi va *Ox* o`qiga nisbatan simmetrik bo`lgan parabola tenglamasini yozing.

5.78 *A*(0; 0), *B*(2; 4) nuqtalar orqali o`tuvchi va *Oy* o`qiga nisbatan simmetrik bo`lgan parabola tenglamasini yozing.

5.79 Diametri 80 m va chuqurligi 10 m bo`lgan parabola shaklidagi chuqurlik qazilgan. Bu chuqurlikning quyi nuqtasidan markaz bo`yicha qanday masofada parabolaning fokusi joylashgan.

5.80 *a*) *Ox* o`qi va *A*(1; -1; 3) nuqta orqali o`tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.
b) *Oy* o`qi va *B*(2; 1; -1) nuqta orqali o`tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

5.81 M_0(2; -3; 1) nuqta orqali o`tuvchi va $x - 4y + 5z + 1 = 0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasini tuzing.

5.82 M_1(2; -15; 1) va M_2(3; 1; 2) nuqtalar orqali o`tuvchi va $3x – y - 4z = 0$ tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

5.83 M_1(2;-1;-1) va M_2(3; 3; -1) nuqtalar orqali o`tuvchi to`g`ri chiziq tenglamasini tuzing.

5.84 *A*(1; 2; 1) nuqtaning $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$ to`g`ri chiziqdagi proyeksiyasini toping.

5.85 *M*(4; -4; 2) nuqta orqali o`tuvchi va *xOz* tekisligiga paralell tekislik tenglamasini tuzing.

5.86 *Ox* va *Oy* o`qlaridan $a = 1$, $b = -1$ kesma ajratuvchi va *A*(2; 3; 4) nuqta orqali o`tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

5.87 Berilgan egri chiziqlarning kanonik tenglamasini tuzing va garfigini chizing.

Variant	Masala sharti	Variant	Masala sharti

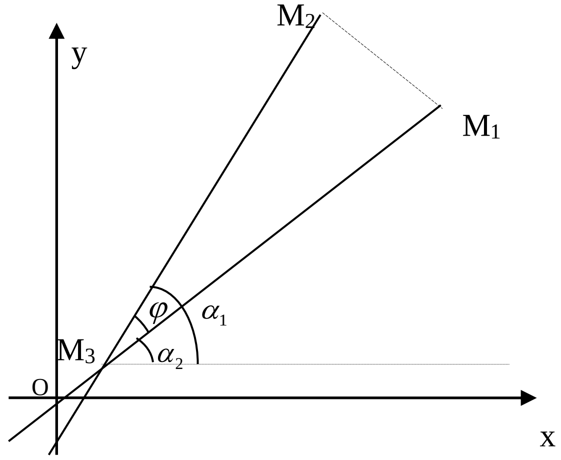
1	$x^2-4x+y^2-6y+4=0$ $9x^2+25y^2-225=0$ $25x^2-49y^2-1225=0$ $y^2=9x$	10	$x^2-10x+y^2+2y+22=0$ $9x^2+16y^2-144=0$ $9x^2-49y^2-441=0$ $y^2=8x$
2	$x^2+6x+y^2-10y+30=0$ $4x^2+49y^2-196=0$ $16x^2-25y^2-400=0$ $y^2=7x$	11	$x^2+10x+y^2-12y+45=0$ $4x^2+25y^2-100=0$ $25x^2-36y^2-900=0$ $y^2=-9x$
3	$x^2+2x+y^2-4y-11=0$ $25x^2+36y^2-900=0$ $25x^2-64y^2-1600=0$ $y^2=5x$	12	$x^2-2x+y^2+10y+25=0$ $16x^2+36y^2-576=0$ $4x^2-25y^2-100=0$ $y^2=-7x$
4	$x^2-6x+y^2+8y=0$ $16x^2+25y^2-400=0$ $25x^2-49y^2-1225=0$ $y^2=16x$	13	$x^2+2x+y^2-6y-15=0$ $9x^2+49y^2-441=0$ $16x^2-49y^2-784=0$ $y^2=-5x$
5	$x^2+6x+y^2+6y+14=0$ $25x^2+49y^2-1225=0$ $9x^2-36y^2-324=0$ $y^2=3x$	14	$x^2-6x+y^2-4y-23=0$ $25x^2+64y^2-1600=0$ $4x^2-9y^2-36=0$ $y^2=-16x$
6	$x^2-2x+y^2+2y+1=0$ $4x^2+16y^2-64=0$ $4x^2-9y^2-36=0$ $y^2=4x$	15	$x^2+4x+y^2+8y-29=0$ $16x^2+49y^2-784=0$ $36x^2-64y^2-2304=0$ $y^2=-3x$
Variant	Masala sharti	Variant	Masala sharti
7	$x^2+4x+y^2-2y-31=0$ $4x^2+9y^2-36=0$ $4x^2-16y^2-64=0$ $y^2=2x$	16	$x^2-6x+y^2-4y+4=0$ $25x^2+9y^2-225=0$ $49y^2-25x^2-1225=0$ $y^2=-4x$
8	$x^2-8x+y^2+4y-29=0$ $36x^2+49y^2-1764=0$ $9x^2-25y^2-225=0$ $y^2=6x$	17	$x^2-10x+y^2+6y+30=0$ $49x^2+4y^2-196=0$ $25y^2-16x^2-400=0$ $y^2=-2x$
19	$x^2+8x+y^2-6y=0$ $25x^2+16y^2-400=0$ $64y^2-25x^2-1600=0$ $y^2=-x$	25	$x^2+2x+y^2-10y-22=0$ $16x^2+9y^2-144=0$ $49y^2-9x^2-441=0$ $x^2=3y$

20	$x^2-6x+y^2-6y+14=0$ $49x^2+25y^2-1225=0$ $36y^2-9x^2-324=0$ $y^2=-8x$	26	$x^2-12x+y^2+10y+45=0$ $25x^2+4y^2-100=0$ $36y^2-25x^2-900=0$ $x^2=4y$
21	$x^2+2x+y^2-2y+1=0$ $16x^2+4y^2-64=0$ $9^2-4y^2-36=0$ $x^2=9y$	27	$x^2+10x+y^2-2y+25=0$ $36x^2+16y^2-576=0$ $25y^2-4x^2-100=0$ $x^2=2y$
22	$x^2-2x+y^2+4y-31=0$ $9x^2+4y^2-36=0$ $16y^2-4x^2-64=0$ $x^2=7y$	28	$x^2-6x+y^2+2y-15=0$ $49x^2+9y^2-441=0$ $49y^2-16x^2-784=0$ $x^2=6y$
23	$x^2+4x+y^2-8y-29=0$ $49x^2+36y^2-1692=0$ $25y^2-9x^2-225=0$ $x^2=5y$	29	$x^2-4x+y^2-6y-23=0$ $49x^2+16y^2-784=0$ $36y^2-4x^2-144=0$ $x^2=y$
24	$x^2-8x+y^2+8y+23=0$ $36x^2+9y^2-324=0$ $36y^2-16x^2-576=0$ $x^2=16y$	30	$x^2+8x+y^2+4y-29=0$ $64x^2+25y^2-1600=0$ $64y^2-36x^2-2304=0$ $x^2=8y$

Uchburchakning yuzini hisoblash

Faraz qilaylik, $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, $M_3(x_3;y_3)$ - uchburchak uchklari. U holda yuza quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$\pm S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix} \qquad (5.41)$$



(5 - rasm)

Uchburchak yuzasi

$$S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\varphi=\frac{1}{2}M_1M_2\cdot M_1M_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)=\frac{1}{2}M_1M_2\cdot M_1M_2(\sin\alpha_1\cos\alpha_2-\sin\alpha_2\cos\alpha_1)$$

$$M_1M_3\cdot\cos\alpha_2=x_1-x_3,\qquad M_1M_3\cdot\sin\alpha_2=y_1-y_3,$$

$$M_2M_3\cdot\cos\alpha_1=x_2-x_3,\qquad M_2M_3\cdot\sin\alpha_1=y_2-y_3,$$

$$\pm S=\frac{1}{2}((y_2-y_3)(x_1-x_3)-(y_1-y_3)(x_2-x_3))=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1-x_3 & y_1-y_3\\ x_2-x_3 & y_2-y_3\end{vmatrix}$$

Agar M_3 koordinata boshi bilan ustma-ust tushsa, u holda $x_3 = y_3 = 0$ va

$$\pm S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}$$

Agar uchta nuqta bir to`g`ri chiziqda yotsa, u holda uchburchakning yuzi nolga teng va biz bundan uch nuqatning bir to`g`ri chiziqda yotish shartini hosil qilamiz:

$$\begin{vmatrix}x_1-x_3 & y_1-y_3\\ x_2-x_3 & y_2-y_3\end{vmatrix}=0 \qquad (5.42)$$

5.88 $M_1(0;\ 2)$; $M_2(2;\ 6)$; $M_3(1;\ 4)$ nuqtalar bir to`g`ri chizqda yotishini ko`rsating.

Yechish.

$$\begin{vmatrix}0-1 & 2-4\\ 2-1 & 6-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2-(-2)=0$$

5.89 Uchlari $M_1(3;-2)$; $M_2(-4;0)$; $M_3(2;5)$ nuqtalarda bo`lgan uchburchak yuzasini hisoblang.

5.90 Quyidagi nuqtalar bir to`g`ri chiziqda yotishini tekshiring.

Variant	M_1	M_2	M_3
1.	(0;5)	(1;3)	(2;1)
2.	(1;5)	(-2;-1)	(3;9)
3.	(-1;-9)	(2;6)	(3;11)
4.	(-1;2)	(2;11)	(3;14)
5.	(0;5)	(-1;1)	(2;13)
6.	(0;-2)	(2;0)	(3;1)
7.	(2;5)	(1;3)	(-2;-3)
8.	(0;5)	(1;8)	(-1;2)
9.	(0;7)	(-1;9)	(2;3)
10.	(2;5)	(7;2)	(-1;3)
11.	(1;2)	(-1;14)	(-2;20)
12.	(3;5)	(-2;5)	(4;4)
13.	(0;1)	(1;10)	(-1;8)
14.	(6;3)	(2;4)	(6;5)
15.	(1;8)	(0;5)	(2;11)

Variant	M_1	M_2	M_3
16.	(9;1)	(1;2)	(2;1)
17.	(-1;5)	(0;3)	(2;-1)
18.	(-3;2)	(0;2)	(1;5)
19.	(2;8)	(-2;2)	(4;11)
20.	(1;0)	(0;8)	(-1;3)
21.	(-1;-3)	(-2;-1)	(0;-5)
22.	(0,5;4)	(-2;-4)	(4;0,5)
23.	(0;1)	(-1;5)	(-3;10)
24.	(1;-3)	(2;-8)	(0;2)
25.	(2;12)	(-1;-12)	(0;-4)
26.	(0;5)	(1;12)	(2;19)
27.	(1;3)	(-1;-9)	(3;15)
28.	(0;1)	(1;3)	(-1;-1)
29.	(0;3)	(1;8)	(-2;-7)
30.	(1;5)	(0;-2)	(-2;-16)

5.91 Uchlari quyidagi nuqtalarda bo`lgan ucburchak yuzini hisoblang.

Variant	M_1	M_2	M_3	Variant	M_1	M_2	M_3
1.	(2;5)	(1;2)	(3;1)	16.	(1;6)	(3;5)	(2;4)
2.	(3;5)	(-2;-1)	(3;10)	17.	(0;7)	(4;8)	(3;9)
3.	(-10;-5)	(0;3)	(4;1)	18.	(1;8)	(3;6)	(3;4)
4.	(-1;2)	(2;5)	(3;10)	19.	(3;2)	(2;11)	(3;20)
5.	(0;2)	(3;1)	(3;4)	20.	(3;5)	(-1;1)	(2;3)
6.	(0;2)	(2;0)	(4;2)	21.	(2;-2)	(3;1)	(4;2)
7.	(2;5)	(3;3)	(-2;-3)	22.	(5;5)	(1;2)	(-2;-2)
8.	(1;5)	(2;8)	(-1;3)	23.	(5;5)	(9;8)	(3;0)
9	(2;7)	(0;4)	(2;3)	24.	(-7;7)	(5;2)	(2;-2)
10.	(3;5)	(7;2)	(-1;4)	25.	(2;5)	(-2;2)	(-8;-4)
11.	(3;2)	(-1;10)	(-2;12)	26.	(3;2)	(-1;10)	(-2;11)
12.	(4;5)	(-2;3)	(4;4)	27.	(3;4)	(5;6)	(7;8)
13.	(3;1)	(2;5)	(-1;4)	28.	(0;1)	(1;2)	(-1;5)
14.	(6;4)	(2;5)	(6;3)	29.	(5;3)	(3;4)	(7;5)
15.	(1;0)	(0;5)	(2;11)	30.	(1;8)	(10;5)	(2;15)

Mavzu yuzasidan savollar.

1. Tекislikdagi analitik geometriyaning sodda masalalarini ko`rsating va sanab o`ting.
2. Tekislikdagi to`g`ri chiziq tenglamalarini yozing.
3. Nuqtadan to`g`ri chiziqgacha bo`lgan masofa.
4. Paralell to`g`ri chiziqlar orasidagi masofa.
5. Tekislikdagi 2 ta to`g`ri chiziq orasidagi burchak.
6. Tekislikdagi 2 ta to`g`ri chiziqning paralellik va perpendikulyarlik shartlari.
7. Tekislikdagi to`g`ri chiziqning burchak koefisentini aniqlash formulalari.
8. Tekislikda to`g`ri chiziqlar dastasining tenglamasini yozing.
9. Ikki nuqta orqali o`tuvchi to`g`ri chiziq tenglamasidan foydalanib talab va taklif funksiyasinini toping.
10. Tekislik tenglamasi $Ax + By + Cx + D = 0$ bo`lsa, u koordinatalar sistemasiga nisbatan quyidagu haollarda qanday joylashadi?
    a) $D = 0$; *b*) $A = 0$; *v*) $A = 0, B = 0$; g) $A = 0, B = 0, D = 0$; *d*) $A = 0, D = 0$.
11. Tekislik tenglamasini yozing.
12. Nuatadan tekislikgacha bo`lgan masofa.
13. Ikkita paralell tekislik orasidagi masofa.
14. Tekisliklarning paralellik va perpendikulyarlik shartlari.
15. Ikki tekislik orasidagi burchak.
16. To`g`ri chziq va tekislikning kesilish nuqtasi qanday topiladi?

Adabiyotlar

1. SH.Shorahmetov, B.Naimjanov, «Iqtisodchilar uchun matematica», - T.: «Fan va texnologiya»., 2007 y.
2. Клименко Ю. И. “Высшая математика для экономистов теория, примеры задачи”. М.: Экзамен 2005 г.

3. Кремер Н. М. и другие. – “Высшая математика для экономистов”, - М.: 2004 г.
4. Кремер Н. Ш. и др. “Практикум по высшей математике для экономистов” – М.: 2004 г.
5. Минорский И. П., “Сборник задач по высшей математике” – М.: 2004 г.
6. «Сборник задач по высшей математике для экономистов» под ред. В.И.Ермакова. М.: Инфра – М, 2003 г.
7. Масагутова Р. В. “Математика в задачах для экономистов” – Т. Укитувчи 1996 й.
8. Проскуряков И. В. “Сборник задач по линейной алгебра” – М.: Наука, 1998 г.
9. В. С. Шипачев “Курс высшей математики”, М.: Проспект, 2005 г.
10. Соатов Ё.У. “Олий математика”, Т.: Укитувчи, 3-жилд 1996 й.
11. Шапкин А.С. «Задачи с решениями по высшей математике теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию» - М.: 2008г.
12. Макаров С.И., Мищенко М.В., «Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики» Н.: 2008г.
13. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. «Основы математики и ее приложения в экономическом образовании» -М.: 2008
14. Ермаков В.И. «Общий курс высшей математика для экономистов». –Н: 2010г.
15. Ермаков В.И. «Общий курс высшей математика для экономистов». –Н: 2010г.

6. Limitlar

6.1 Sonli ketma ketliklar va ularning limiti

Agar har bir natural n songa biror qoida yoki qonun asosida bitta a_n son mos qo`yilgan bo`lsa, u holda $\{a_n\}$ sonli ketma – ketlik deyiladi:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots . \tag{6.1}$$

Boshqacha qilib aytganda sonli ketma–ketlik n- natural argumentning funksiyasidir: $a_n = f(n)$.

Masalan: $\left\{\frac{1}{n}\right\}$; $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$; $\left\{-1+(-1)^n\right\}$, yoki

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots;$$

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots;$$

$$0,\ 2,\ 0,\ 2, \dots .$$

Agar har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon) > 0$ son mavjud bo`lsaki, barcha $n \geq N$ lar uchun

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda o`zgarmas a son $\{a_n\}$ ketma-ketlikning *limiti* deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Agar shunday M musbat son mavjud bo`lib, har qanday natural n soni uchun

$$|a_n| \le M$$

bo`lsa, u holda $\{a_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik deyiladi.

Limitga ega bo`lgan ketma-ketlik yaqinlashuvchi, aks holda uzoqlashuvchi deyiladi.

Agar har qanday natural n son uchun

$$a_{n+1}>a_n$$

tengsizlik bajarilsa, $\{a_n\}$ o`suvchi;

$$a_{n+1}<a_n$$

bo`lsa $\{a_n\}$ kamayuvchi ketma-ketlik deyiladi. Faqat o`suvchi yoki kamayuvchi ketma-ketlik monoton ketma-ketlik deyiladi.

Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik monoton o`suvchi (kamayuvchi) va yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo`lsa, u limitga ega.

6.2 Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar.

Limiti nolga teng bo`lgan ketma-ketlik cheksiz kichik miqdor deyiladi. Chegaralanmagan ketma-ketlik chekli limitga ega bo`lmaydi, lekin uning limiti cheksiz bo`lishi mimkin:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Agar $\{a_n\}$ – cheksiz kichik miqdor bo`lsa, u holda $\{1/a_n\}$ - cheksiz katta miqdor bo`ladi va aksincha.

6.1. $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ **-** yaqinlashuvchiligini tekshiring.

Yechish. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{1+0} = 1$ demak yaqinlashuvchi.

6.2. $\{a_n\} = (-1)^n$, yoki -1, 1, -1, 1, … limitga ega emasligini ko`rsating.

Yechish. Haqiqatan, limit sifatida qanday sonni tasavvur qilmaylik 1 yoki – 1, ε<0,5 da, $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik qanoatlantirilmaydi. Bu ketma-ketlikning barcha toq nomerlar – 1, juftlari 1 ga teng.

6.3.Yaqinlashuvchi ketma – ketlikning xossalari

1) Yaqinlashuvchi ketma-ketlik faqat bitta limitga ega bo`ladi.
2) Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangandir.
3) Yaqinlashuvchi $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklarining yig`indisi (ayirmasi) yaqinlashuvchi ketma ketlik va uning limiti $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar limitlarining yig`indisiga tengdir.
4) Yaqinlashuvchi $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklarning ko`paymasi yana yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo`ladi, uning limiti $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ limitlarining ko`paytmasiga tengdir.
5) Ikkita $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ yaqinlashuvchi, ketma-ketliklarning bo`linmasi, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \ne 0$ bo`lganda yaqinlashuvchi ketma-ketlik va uning limiti $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar limitlarining nisbatiga tengdir.
6) Agar yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning elementlari biror n nomerdan boshlab $x_n \ge b$ $(x_n \le b)$ tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda bu ketma ketlikning $\hat{a}$ limiti ham $a \ge b$ $(a \le b)$ tengsizlikni qanoatlantiradi.

7) Cheksiz kichik miqdorning chegaralangan ketma-ketlikka yoki songa ko`paytmasi cheksiz kichik ketma-ketlikdir.

8) Chekli sondagi cheksiz kichik miqdorning yig`indisi, ayirmasi va ko`paytmasi cheksiz kichik miqdordir.

6.3 Ketma-ketlikning limitini toping.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+4}{4n^2+n-3}$$

Yechish. Kasrning surat va maxrajini n^2 ga bo`lib, bo`linma va yig`indining limiti qoidalaridan foydalanamiz.

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3+2/n+4/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(4+1/n-3/n^2)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}(2/n)+\lim\limits_{n\to\infty}(4/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}4+\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)-\lim\limits_{n\to\infty}(3/n^2)}=\frac{3+0+0}{4+0-0}=\frac{3}{4}.$$

6.4 Ketma-ketlikning limitini toping.

$$x_n=\frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

6.5 Ketma-ketmalikning n→∞ dagi limitini hisoblang.

$$x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

6.6 Quyidagi limitlarni hisoblang

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3+(n-2)^3}{n^4+2n^2-1}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-4n+8}{4n^2+5n-9}$

$c)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$ $\qquad d)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+6+9+\ldots+3n}{n^2+4}$

$e)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}$ $\qquad f)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right)$

6.7 Quyidagi limitlarni hisoblang

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n+1)^2}{(n-1)^2-(n+1)^3}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}$

$c)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$ $\qquad d)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$

$e)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}$ $\qquad f)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-3}\right)$

6.4 Funksiyaning limiti

Agar har qanday $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son mavjud bo`lsaki, $|x-a|<\delta$ bo’lganda $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b soni $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi limiti deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{x\to a}f(x)=b.$$

Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $N=N(\varepsilon)>0$ son mavjud bo`lib, barcha $|x|>N$ lar uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b soni $f(x)$ funksiyaning $x\to\infty$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=b.$$

kabi belgilanadi.

6.5 Aniqmasliklar

1^{∞}

Umuman $\frac{\infty}{\infty}$, , $\infty-\infty$, $0.\infty$, 0^0, ∞^0, , aniqmasliklar mavjud va ularni ochishni misollarda ko'rsatamiz.

Misol: $\lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$ limitni toping.

Yechish: agar x o'rniga 2 ni qo'ysak, $\infty-\infty$, ko'rinishidagi aniqmaslik hosil bo'ladi. Bu aniqmaslikni ochish uchun qavs ichidagi ifodani umumiy maxrajga keltiramiz. Natijada

$\lim_{x\to 2}\left(-\frac{2-x}{x^2-4}\right)$, ya'ni ko'rinishdagi aniqmaslik hosil bo'ladi. Agar $x-2\neq 0$ deb kasr qisqartirilsa, berilgan limit quyidagiga teng bo'ladi:

$$\lim_{x\to 2}\left(-\frac{1}{x+2}\right)=-\frac{1}{4}$$

Misol: $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x^2+5}{3x^3+x^2-x}$ limitni toping.

6.6 Bir tomonlama limitlar

Agar $x\to a$ da $x > a$ bo`lsa, u holda $x\to a+0$ belgi, agar $x\to a$ da $x<a$ bo`lsa, u holda $x\to a-0$ belgi qo`llaniladi. $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi chap va o`ng limitlari deb mos ravishda

$$f(a-0)=\lim_{x\to a-0} f(x) \ \ va \ \ f(a+0)=\lim_{x\to a+0} f(x)$$

sonlarga aytiladi (agarda bu limitlar mavjud va chekli bo'lsa).

Limitni hisoblash qoidalari

a) Agar C o`zgarmas bo`lsa,

$$\lim_{x\to a} C=C.$$

b) Agar $\lim_{x\to a} f(x)$ va $\lim_{x\to a} g(x)$ mavjud bo`lsa, u holda

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x).$$

c) Agar $\lim_{x\to a} f(x)$ va $\lim_{x\to a} g(x)$ mavjud bo`lsa, u holda

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x).$$

d) Agar $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ mavjud va $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$ bo`lsa, u holda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

e) murakkab funksiya limiti:

Agar $\lim_{x\to a} f(x)=b$ va $\lim_{x\to c} g(x)=a$ bo`lsa, u holda

$$\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big)=b \ \text{ bo`ladi.}$$

Quyidagi ketma-ketliklarning limitini hisoblang.

6.8

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)^{100}}{(3n-1)^{98}(n+2)^2}$$

Yechish.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{100}n^{100}\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{100}}{3^{98}n^{100}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{98}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2}}=\lim_{n\to\infty}9\frac{\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{100}}{\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{98}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2}}=9.$$

6.9 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7x^4+2x^3-1}{3x^2-2x^4+x}$

6.10.

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$$

6.11 – **6.22** Limitni hisoblang

6.11 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$ **6.12** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+6x+8}$

6.13 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ **6.14** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-16}$

6.15 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$ **6.16** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x^2-9}$

6.17 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$ **6.18** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)}{x^2-4}$

6.19 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x^3-7x+6}$ **6.20** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

6.21 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}+1}$ **6.22** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

Ajoyib limitlar

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1-\text{ } \textit{birinchi ajoyib limit;}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e-\text{ } \textit{ikkinchi ajoyib limit.}$$

Bundan tashqari quyidagi umumiy holdagi formulalarni keltirib o`tamiz:

1. $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e,$ bunda $x\to a$ bo`lganda $f(x)\to\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to a}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e,$ bunda $x\to a$ bo`lganda $\varphi(x)\to 0.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}=e^{km};$ $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x/m]{1+kx}=\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{m}{x}}=e^{km}$

6.23 Berilgan limitlarni hisoblang.

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$; $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin Ax}{\sin Bx}$; $\quad c)\ \lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin^n \alpha}{\sin \alpha^m}$;

$d)\ \lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x-\sin x}{x+3\cos x}$; $\quad e)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$; $\quad f)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

Yechish. $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}=7\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=7\cdot 1=7.$

$$b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin Ax}{\sin Bx}=\lim_{x\to 0}\frac{Ax\sin Ax}{Ax}\cdot\frac{Bx}{\sin Bx}\cdot\frac{1}{Bx}=\frac{A}{B}\lim_{x\to 0}\frac{Ax\sin Ax}{Ax}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{Bx}{\sin Bx}=\frac{A}{B}\cdot 1\cdot 1=\frac{A}{B}.$$

$$c)\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin^n \alpha}{\sin \alpha^m}=\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^n\cdot\alpha^n\cdot\left(\frac{\alpha^m}{\sin\alpha^m}\right)\cdot\frac{1}{\alpha^m}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha^n}{\alpha^m}\cdot 1=\lim_{\alpha\to 0}\alpha^{n-m}=\begin{cases}0, & agar\ n>m,\\ 1, & agar\, n=m,;\\ \infty, & agar\, n<m.\end{cases}$$

$$d)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x-\sin x}{x+3\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}\sin x}{1+\frac{3}{x}\cos x}=\frac{2-0}{1+0}=2.$$

$$e)\ \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$$

$$f)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{(x/2)}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

6.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{4x-1}$ limitni hisoblang.

6.25 Limitni hisoblang. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3}{2x^2+1}\right)^{-3x^2}$.

6.26 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ ni hisoblang.

Limitni hisoblang

6.27 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+2}\right)^{x}$

6.28 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+5}\right)^{7x}$

6.29 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+2}{4x^2-1}\right)^{5x^2}$

6.30 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2-4}\right)^{3x}$

6.31 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2-2x+5}\right)^{-2x}$

6.32 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3-2}{5x^3+1}\right)^{-6x^3}$

6.33 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3-3x^2+x+1}{2x^3-3x^2-2x+3}\right)^{5x^2}$

6.34 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x^{10}-3}{7x^{10}+2}\right)^{-2x^{10}}$

Ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar

Agar $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ $x\to x_0$ holda cheksiz kichik funksiyalar bo`lib,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$$

bo`lsa, u holda ular ekvivalent deyiladi va $x\to x_0$ da $\alpha(x)$ ~ $\beta(x)$ kabi belgilanadi. Masalan, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, shu sababli $x\to 0$ da $\sin x$ ~ $x$. Shunga o`xshash $x\to 0$ da quyidagi cheksiz kichik funksiyalar ekvivalentdir:

sin$x$ ~ tg$x$~ $\arcsin x$ ~ arctg$x$ ~ ln(1+x) ~ e^x-1 ~ x, 1-cos$x$ ~ $\frac{x^2}{2}$, e^x ~ 1+x, a^x ~1+ $x$ln$a$, $(1+x)^m$ ~ 1+mx, $\sqrt[m]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{m}}\sim 1+\frac{x}{m}$, $\log_a^{(1+x)}=\frac{\ln(1+x)}{\ln a}\sim\frac{x}{\ln a}$.

6.35 Limitlarni toping. 1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$, 2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^\mu x}{x^2}$.

Yechish. 1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}\right)^2=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x}{2x}\right)^2=\frac{9}{4}$.

2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^\mu x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-0{,}5x^2\right)^\mu}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1+0{,}5\mu x^2}{x^2}=0{,}5\mu.$

Ajoyib limitlar iqtisodiyotning statistika, bank kredit, korxona va tashkilotlarning hisoblash jarayonlarida samarali foydalaniladi. Ayniqsa bank va kredit sohalarida murakkab foizlarni hisoblashda ikkinchi ajoyib limitdan, e soniga keltirish orqali hisoblash keng ko`lamda amalga oshiriladi. Bunga misol qilib quyidagilarni keltiramiz.

Uzluksiz foizni hisoblash masalasini ko`rib chiqamiz .

Bankka qo`yilgan boshlang`ich summa Q_0 bo`lsin. Bank yiliga jamg`armaning p% ini to`laydi. $t$ yildan so`ng to`lanadigan $Q_t$ jang`armaning qiymati topilsin. Oddiy foizlardan foydalanilganda yillik jang`armaning miqdori $\frac{P}{100}Q_0$ qiymatga o`sadi, $Q_1=Q_0\left(1+\frac{P}{100}\right), Q_2=Q_0\left(1+\frac{P}{100}\right)^2,..., Q_t=Q_0\left(1+\frac{P}{100}\right)^t$. Amaliyotda ko`pincha murakkab foizlardan foydalaniladi. Bunday xolatda jamg`armaning yillik miqdori quyidagicha qiymatga o`sadi.

$$Q_1=Q_0\left(1+\frac{P}{100}\right), Q_2=Q_0\left(1+\frac{P}{100}\right)^2,..., Q_t=Q_0\left(1+\frac{P}{100}\right)^t,$$

Agar jamg`armaning foiz miqdorini yilda faqat bir marta emas, $n$ marta hisoblansa, yillik $p$% o`sishda miqdorning $\frac{1}{n}$ qismi yilning $\frac{p}{n}$% ini, jamg`armaning t yildagi miqdori esa nt ni tashkil qiladi:

$$Q_t=Q_0\left(1+\frac{P}{100k}\right)^{nt}$$

Faraz qilamiz, foizlar har yarim yilda qo`shib hisoblansa $k = 2$, har kvartalda $k = 4$, har oyga $k = 12$, har kuniga $k = 365$, har soatiga $k = 8760$ va hokazo . U holda jamg`arma miqdori t yilda

$$Q_t=\lim_{k\to\infty}\left(Q_0\left(1+\frac{P}{100k}\right)^{nt}\right)=\lim_{k\to\infty}Q_0\left(\left(1+\frac{P}{100k}\right)^{\frac{100k}{p}}\right)^{\frac{pt}{100}}=Q_0\cdot e^{\frac{pt}{100}}$$

bu tenglik ko`rsatkichli (eksponentsial) o`sish ($p > 0$ da) yoki kamayish ($p < 0$ da) qonunini ifodalaydi.

Izox. Moliya-kredit amaliyotida foizni uzluksiz hisoblashdan kamdan – kam foydalanilsa ham, u murakkab moliyaviy vazifalarning tahlilida, xususan investitsion masalalarni tanlash va asoslashda foydali hisoblanadi.

6.36 Agar yiliga qo`shib hisoblashlar soni cheksiz o`zgarsa, u holda real stavka qanday o`zgaradi? (Boshqacha aytganda $k \to \infty$ da A_n nimaga intiladi?)

6.37 Inflyasiya darajasi kuniga 1% ni tashkil qilsa, yarim yildan keyin boshlang`ich summa qanchaga kamayadi.

6.38 Limitlarni hisoblang

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-6}{2x^3-7x^2+2}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-4x+1}{2x^4+3x^2+x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+2x+3}$ 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x-5}{x^4+5x^2+1}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x^2+x}{4x^3+3x-5}$ 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+3x-4x^2}{2x^2-x+4}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-2x+1}{2x^4+x^2+5}$ 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x+4x^2}{6+5x-3x^2}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-3x^2+4}{6x^3+x-5}$ 10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x^2-x}{x^2-x^3+3x^4}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^2+3x}{7x^2+2x-8}$ 12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4-4x^2+5}{2x^3-3x^2+1}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6-3x^2+7}{3x^5+4x^3-2}$ 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+5}{2x^3-3x^2+1}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^2+2}{x^4-3x}$ 16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+5}{6x^3+3x-7}$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x^2-x^4}{4+x^2+5x^4}$ 18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2-7x+5}{2+x-4x^2}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^7-4x^5+3}{x+3x^5-6x^7}$ 20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x-1}{3x^2+5x-2}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^6-1}{4x^4-5x^5}$ 22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x^2+3}{3-4x-10x^3}$

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x-5}{4x^3-7}$ 24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-3x^2+1}{1+3x^2-x^4}$

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3-4x+1}{3x^3+2x^2-5}$ 26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+2}{5x^2+3x-8}$

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-3x+2}{5x^3+4x^2-3}$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^5-5x^2+7}{1-2x-5x^5}$

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-2}{6-2x-3x^2}$

6.39 Limitni hisoblang

1. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-16}}{\sqrt{x+12}-\sqrt{3x+4}}$

2. $\lim\limits_{x\to}\dfrac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{5x-6}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$

3. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{2-3x}-\sqrt[6]{6-x}}{\sqrt[3]{8+x^3}}$

4. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{4x+5}-\sqrt{6x-5}}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x-1}}$

5. $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{2x+9}-\sqrt{3x+1}}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt[3]{8-x}}$

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{5+x}-\sqrt[3]{5-x}}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}$

8. $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt{\frac{1}{3}+x}-\sqrt{2x-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{3x-2}}$

9. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt[3]{x-3}-\sqrt[3]{2x-7}}{\sqrt{1+2x}-3}$

10. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{6+x}-\sqrt[3]{10+3x}}{\sqrt{2-x}-2}$

11. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^2-3x-1}{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}$

12. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{5x+1}-4}$

13. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5+3x}}{4x^2+3x-1}$

14. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{x^2-8x+15}$

15. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x-1}}{x^2-4x-5}$

16. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+20}-\sqrt{12-x}}{x^2+3x-4}$

17. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{9-2x}}{3x^2-2x-8}$

18. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{3x-10}}{x^2-16}$

19. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+3}}{x^2-2x-3}$

20. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+4x-7}{\sqrt{8+x}-\sqrt{4x+5}}$

21. $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{x^2-10x+9}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{3x-2}}$

22. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{2+x}}{x^2-7x-8}$

23. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-2}{\sqrt{2x+7}-3}$

24. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+7}}$

25. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3x-11}}{x^2+3x-40}$

26. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{2x+9}}{x^3+64}$

27. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}{x^2-9}$

28. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+5x+2}{\sqrt{4-3x}-\sqrt{6-x}}$

29. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^2-3x-10}{\sqrt{3x-4}-\sqrt{x}}$

30. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{3-x}-\sqrt{1-2x}}$

6.40 Hisoblang

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x+2}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{5x}{x-1}}$

3. $\lim\limits_{x\to -\infty}(4x-1)(\ln(x+2)-\ln(x-1))$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-1}{5x+2}\right)^{2x-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{3x}{x-1}}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)(\ln(2x+3)-\ln(2x-1))$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x-3}$

8. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$

9. $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x+3)(\ln(x+2)-\ln(x))$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x-5}$

11. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$

12. $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x+5)(\ln(x+5)-\ln(x))$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-3x}{5-3x}\right)^{4x+3}$

14. $\lim\limits_{x\to -1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$

15. $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x-7)(\ln(3x+4)-\ln(3x))$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+5}\right)^{2x-7}$

17. $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{x}{x^2-1}}$

18. $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x-2)(\ln(2x-1)-\ln(2x+1))$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-5x}{2-5x}\right)^{4x+5}$

20. $\lim\limits_{x\to -1}(2x+3)^{\frac{3x}{x+1}}$

21. $\lim\limits_{x\to -\infty}(3-x)(\ln(1-x)-\ln(2-x))$

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+7}{3x-5}\right)^{4x+3}$

23. $\lim\limits_{x\to 1}(5x-4)^{\frac{x^2}{x-1}}$

24. $\lim\limits_{x\to -\infty}(x-3)(\ln(2-3x)-\ln(5-3x))$

25. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{5x-1}$

26. $\lim_{x\to\frac{2}{5}}(3-5x)^{\frac{4x}{5x-2}}$

27. $\lim_{x\to-\infty}(2x-1)(\ln(1-3x)-\ln(2-3x))$

28. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3-2x}{5-2x}\right)^{3-2x}$

29. $\lim_{x\to-1}(4x+5)^{\frac{3x}{x^2-1}}$

30. $\lim_{x\to-\infty}(x-4)(\ln(3-2x)-\ln(5-2x))$

6.41 Limtlarni hisoblang

1. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 6x}{4x^2}$

2. $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{3x^2}$

3. $\lim_{x\to0}\frac{\cos 5x-\cos x}{2x^2}$

4. $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x-\sin x}{4x}$

5. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{xtgx}$

6. $\lim_{x\to0}\frac{tg2x-\sin 2x}{x^2}$

7. $\lim_{x\to0}\frac{5x}{\sin x+\sin 7x}$

8. $\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}$

9. $\lim_{x\to0}\frac{tgx}{3\sin 3x}$

10. $\lim_{x\to0}\frac{\arcsin 3x}{\sin 5x}$

11. $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 2x-\sin^2 x}{3x^2}$

12. $\lim_{x\to0}\frac{\cos 4x-\cos^3 6x}{4x^2}$

13. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 6x}{4x^2}$

14. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 5x}{3x^2}$

15. $\lim_{x\to0}\frac{arctg2x}{tg3x}$

16. $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos^5 x}{x\sin x}$

17. $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin 2x}-\frac{1}{tg^2x}\right)$

18. $\lim_{x\to0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}$

19. $\lim_{x\to1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$

20. $\lim_{x\to0}\frac{\arcsin 5x}{x^2-x}$

21. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1-tgx}$

22. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 5x}{\sin 3x+\sin x}$

23. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$

24. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)tgx$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xtg3x}{\cos x-\cos x^3}$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{1-\cos x}$

28. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)}{\pi-2x}$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{1-\cos 2x}$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xtg4x}{arctg3x}$

6.42 1986 yilning boshida orol aholisi soni 7500 kishini tashkil qilardi. Agar yiliga 2,5% dan ko`paysa, 1995 yil oxiriga kelib orol aholisi soni qanchaga yetishi aniqlansin.

6.43 Yuk mashinasining boshlanqich narxi 30000$. Yili-ga amortizatsiya ajratmasi15% bo’lsa. Yuk mashinasining narxi ikki yildan so`ng qancha bo’ladi? 5 yil, 8 yildan so`ng-chi?

6.44 1987 yili orolda quyonlar soni 20000 tani tashkil etardi. Agar ular yiliga 30% dan ko`paysa, orolda qachon 60000 ta quyon bo`lishi aniqlansin.

6.45 Korxona 24 ming so`mga avtomobil sotib oldi. Yillik amortizatsiya avtomobil narxining 10% ini tashkil qiladi. *t* vaqtga bog`liq holda avtomobil narxini aniqlovchi tenglama tuzilsin. Avtomobilning a) 5 yildan ; b) 6 yil 3 oydan keyingi narxi aniqlansin.

6.46 Gaz plitasi – 800 (ming) so`mga sotib olindi. Yillik amortizatsiya boshlang’ich narxning 15% ini tashkil qiladi.

a) *t* vaqtdan so`ng gaz plitasining narxini.

b) gaz plitasidan foydalanilgandan 6 yildan keyingi narxini.

c) gaz plitasining xizmat muddati aniqlansin.

6.47 Inflyatsiya darajasi kuniga 1% ni tashkil qilsin, yarim yildan keyin boshlang`ich summa qanchaga kamayadi?

6.48 Mamlakat aholisining o`sishi yiliga *p*% ni tashkil qiladi. Necha yildan keyin davlat aholisi 2 barobar ko`payadi? 1) $p=5\%$, 2) p =15%.

6.49 Inflyatsiya darajasi oyiga 6%, kreditdan keladigan foyda yiliga 12% ni tashkil qilishi uchun, bank beradigan yillik stavka qanday foizda bo`lishi kerak?

6.50 Korxonaning ish haqqini berish uchun xizmat qiladigan tijorat banki, unga tegishli bo`lgan summani kamida 9 oy ushlab turadi. Bu vaqt davomida bank bu pullarni qisqa muddatli kredit ko`rinishida 3 marta aylantirib oladi. Qisqa muddatli kreditlarni xususiy tadbirkorlarga 3 oy muddatga oyiga 3% dan beradi. Bank bu amallarni bajarib qancha foyda oladi?

6.51 6.50 masalaning shartiga ko`ra bankka quyidagi ikki usullardan qaysi biri foydaliroq:

1) korxonaning shaxsiy mulkidan yillik foiz stavkasi 20% bo`lgani;

2) oyiga 3% dan 3 oyda qo`yilganini toping.

Mavzu yuzasidan savollar.

1. Funksiya ta’rifi va misollar.
2. Funksiyaning berilish usullari.
3. Qanday funksiyalar elementar funksiyalar deyiladi?
4. Ketma-ketlik limitning ta’rifi.
5. Ajoyib limitlar.
   a) Birinchi ajoyib limit.
   b) Ikkinchi ajoyib limit.
7. Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar nima?
6. Aniqmasliklarni ochish

Adabiyotlar

16. Sh.Shorahmetov, B.Naimjanov, «Iqtisodchilar uchun matematica», - T.: «Fan va texnologiya»., 2007 y.
17.T. A. Azlarov, H. Mansurov " Matematik analiz ", Toshkent 2006 y.
18.Жураев Т.Ж., Худойберганов Р.Х., Ворисов А. К., Мансуров Х. "Олий математика асослари " Т.: Узбекистон 1999 й.
19.Соатов Ё.У. "Олий математика", Т.: Укитувчи, 1-жилд, 2-жилд, 1994 й., 3-жилд, 1996 й.
20.Клименко Ю.И. "Высшая математика для экономистов теория, примеры и задачи". М.: Экзамен 2005 г.
21.М.С.Красс, Б. П. Чупрынов. " Основы высшей математики и ее приложения в экономическом образовании", - М.: Дело, 2000 г.
22.Кремер Н.М. и другие. – "Высшая математика для экономистов", - М.: 2004 г.
23.Кремер Н.Ш. и др. "Практикум по высшей математике для экономистов" – М.: 2004 г.
24.В.С.Шипачев "Курс высшей математики", М.: Проспект, 2005 г.
25. Шапкин А.С. «Задачи с решениями по высшей математике теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию» - М.: 2008г.
26. Макаров С.И., Мищенко М.В., «Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики» Н.: 2008г.
27. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. «Основы математики и ее приложения в экономическом образовании» -М.: 2008
28. Ермаков В.И. «Общий курс высшей математика для экономистов». –Н: 2010г.

7. Funksiyaning uzluksizligi

7.1 Funksiyaning uzluksizligi

$f(x)$ funksiya x_o nuqtada uzluksiz deyiladi, agar u quyidagi uchta shartni qanoatlantirsa:

a) x_0 nuqtada aniqlangan (ya'ni $f(x_0)$mavjud);

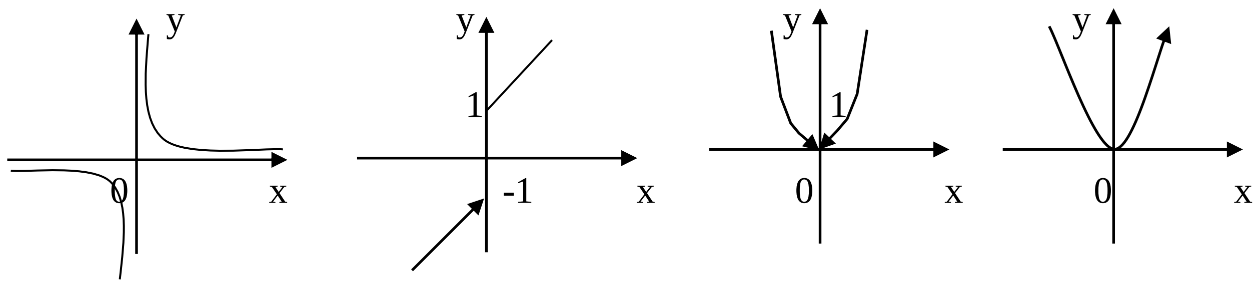
b) $x \to x_0+0$, $x \to x_0-0$ chekli limitlarga ega;

c) bu limitlar funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng, ya`ni:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

7.1 Quyidagi funksiyalarni uzluksizlikka tekshiring:

a) $y = \frac{1}{x}$; b) $y = \begin{cases} x+1, & agar\ x \ge 0, \\ x-1, & agar\ x < 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2, & agar\ x \ne 0, \\ 1, & agar\ x = 0 \end{cases}$; d) $y = x^2$.



a) b) c) d)

Yechish. a) Berilgan $y=\frac{1}{x}$ funksiya (*a* – rasmga qarang) $x = 0$ nuqtada uzilishga ega, chunki uzluksizlikning birinchi sharti buzilgan – $f(0)$ mavjud emas.

b) $y=\begin{cases} x+1, & agar\ \ x\ge 0, \\ x-1, & agar\ \ x<0 \end{cases}$ funksiya (*b* – rasmga qarang) $x = 0$ nuqtada uzilishga ega, chunki uzluksizlikning birinchi sharti bajarilgan, $f(0)$ mavjud ($f(0) = 1$), lekin uchinchi shart buziladi. (bu yerda funksiyaning bir tomonlama limitlari mavjud chapdan $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=-1$, o`ngdan $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=1$, lekin ular teng emas).

c) $y=\begin{cases} x^2, & agar\ \ x\ne 0, \\ 1, & agar\ \ x=0 \end{cases}$ funksiya (*c* – rasmga qarang) $x = 0$ nuqtada uzilishga ega uzluksizlikning ikkita sharti bajariladi, ya’ni $f(0)$ aniqlangan ($f(0) = 1$) va $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ chekli limit mavjud, lekin uchinchi asosiy shart buzilgan: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\ne f(0)$.

$y = x^2$ funksiya (*d* – rasmga qarang) $x = 0$ nuqtada uzluksiz, chunki uzluksizlikning uchchala sharti bajariladi.

$$\lim_{x\to 0} f(x)= f(0)=0.$$

7.2 Funksiyaning uzilishi va uning turlari

f(x) funksiya uchun uzluksizlik shartlaridan aqalli bittasi bajarilmasa, bu funksiya *x* nuqtada uzilishga ega deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya berilgan x_0 nuqtada uzluksiz bo`lmasa, bu uzilishga ega deyiladi.

Uzilish turlari quyidagicha:

I – tur uzilish – funksiyaning chap va o`ng chekli limitlari mavjud, lekin ular teng emas. (7.1. b) misol

II – tur uzilish – bir tomonlama chap va o`ng limitlardan biri cheksiz yoki mavjud emas. (7.1 a) misol)

I – tur uzilishga bartaraf qilinadigan uzilish deyiladi, bunda $x \to x_0$ da funksiyaning limiti mavjud, lekin funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng emas. (7.1 c) misol)

7.2 $y=f(x)$ funksiyani $x=1$ nuqtada uzluksizlukka tekshiring. Uzluksizlikka ega bo`lgan holda $x=1$ nuqtadagi xarakterini aniqlang.

a) $y(x)=\frac{(x-1)^3}{x-1}$; *b*) $y(x)=\frac{x}{x-1}$; *c*) $y(x)=x-1$; *d*) $y(x)=\begin{cases} x-1, & agar\ \ x\ge 1 \\ x+1, & agar\ \ x<1 \end{cases}$

Yechish. *a*) $y(x)=\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}$ funksiya $x=1$da aniqlanmagan. Demak bu nuqtada uzilishga ega.

Funksiya limitini hisoblaymiz: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=\lim\limits_{x\to 1}(1-1)^2=0$,
ya`ni chekli limit mavjud, demak x=1 bartaraf qilinadigan 1-tur uzilish (7.2 – rasm).

Funksiyani x=1 nuqtada aniqlanishini to`ldirib, ya`ni f(1)=0 deb faraz qilib,

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}, & x\neq 1\ \ da\\ 0, & x=1\ \ da\end{cases}$$

funksiyani hosil qilamiz. Bu funksiya x=1 nuqtada uzluksiz.

b) $y(x)=\dfrac{x}{x-1}$ funksiya x=1 nuqtada aniqlanmagan va x=1 nuqtada uzilishga ega chunki

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x}{x-1}=+\infty,\quad \text{va}\ \lim_{x\to 1-0}\frac{x}{x-1}=-\infty \qquad \text{(7.3-rasm)}$$

Bir tomonlama limitlar (bitta limit mavjud bo`lsa ham etarli edi) cheksiz bo`lgani uchun x=1 2-tartibli uzilish nuqtasi.

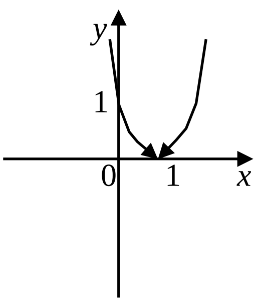
c) $y(x)=x$-1 funksiya x=1 da aniqlangan, $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)=0,\quad \lim\limits_{x\to 1-0}(x-1)=0,\qquad y(1)=0,$
ya`ni

$$\lim_{x\to 1+0}y(x)=\lim_{x\to 1+0}y(x)=y(1)=0$$

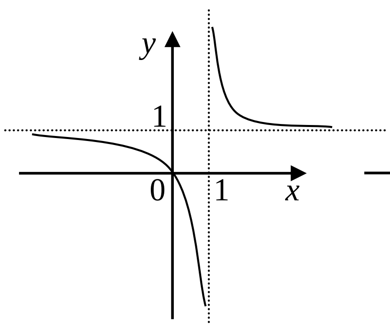
demak funksiya x=1 nuqtada uzluksiz. (7.4 – rasm)

d) $y(x)=\begin{cases}x-1, & agar\ \ x\geq 1\\ x+1, & agar\ \ x<1\end{cases}$ funksiya x=1 da aniqlangan y(1)=0,

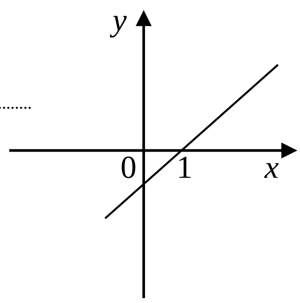
$\lim\limits_{x\to 1-0}y(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(x+1)=2,\quad \lim\limits_{x\to 1+0}y(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)=0,\quad \lim\limits_{x\to 1-0}y(x)\neq\lim\limits_{x\to 1+0}y(x)$ ga ega bo`lamiz, shunday qilib, x=1 nuqtada funksiya bartaraf qilinadigan uzilishga ega (7.5 – rasm).



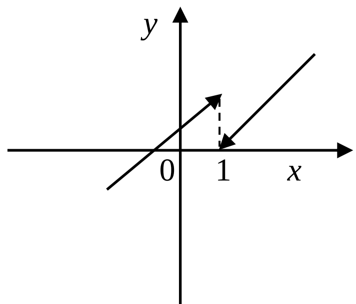
7.2-rasm



7.3-rasm



7.4-rasm



7.5-rasm

7.3 Funksiyani uzluksizlikka tekshiring, uzilish nuqtalarini aniqlang.

7.4 $y=\dfrac{x}{x-3}$ funksiyaning uzilish nuqtasini toping va uzilish turini aniqlang.

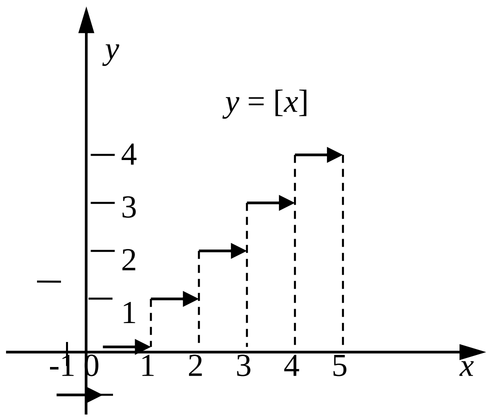
7.5 Agar $f(x)=signx=\begin{cases}-1, & agar\ \ x<0;\\ 0, & agar\ \ x=0;\\ 1, & agar\ \ x>0.\end{cases}$ bo`lsa, f(x) ning uzilish nuqtasini va uzilish turini aniqlang.

7.6 $f(x)= e^{\frac{1}{x}}$ funksiyani uzilish nuqtasi va turlari bo`yicha tekshiring.

7.3. $[x]$, $\{x\}$, $\sin x$, $\chi(x)$ funksiyalar

$f(x)=[x]$ (o`qilishi "ant'e $x$"), bu yerda $[x]$ – $x$ sonining butun qismi, ya'ni $x$ dan katta bo`lmagan eng katta butun son (masalan, [2.6] = 2, [-2.6] = -3). $x=\frac{3}{2}$ nuqtada $f(x) = [x]$, funksiya uzluksiz, yoki $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f(x)= f\left(\frac{3}{2}\right)=1$, $x = 1$ nuqtada esa funksiya aniqlangan $f(1) = 1$, lekin uzilishga ega, chunki $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ mavjud emas (aniqrog'i bir-biriga teng bo`lmagan chap va o`ng chekli limitlar mavjud $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=0$ va $\lim\limits_{x\to1+0} f(x)=1$).

$f(x) = [x]$ barcha haqiqiy sonlar to`plamida aniqlangani bilan, elementar funksiya emas, chunki barcha butun sonlarda uzulishga ega (7.1 – rasm).



7.1- rasm.

7.4 Uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalari

Agar funksiya qaralayotgan oraliqning hamma nuqtasida uzluksiz bo`lsa, u holda funksiya shu oraliqda uzluksiz deyiladi. Elementar funksiyalarning hammasi o`zlarining aniqlanish sohalarida uzluksizdir.

1. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo`lsa, u holda ularning yig'indisi, ko`paytmasi, bo`linmasi (maxraj noldan farqli bo`lganda) shu nuqtada uzluksiz bo`ladi.

2. Agar $y = f(u)$ funksiya $u_0 = \varphi(x_0)$ nuqtada, uzluksiz bo`lsa $u = \varphi(x)$ funksiya esa $x_0$ nuqtada uzluksiz bo`lsa, u holda $y = f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo`ladi.

3. Agar funksiya biror oraliqning har bir nuqtasida uzluksiz bo`lsa, u shu oraliqda uzluksiz deyiladi. Barcha elementar funksiyalar o`zining aniqlanish sohasida uzluksizdir.

7.5. Bo`lsano Koshining teoremalari

Bo`lsano Koshining 1-teoremasi

Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ segmentda aniqlangan, uzluksiz bo`lib, segmentning chetki nuqtalarida har xil ishorali qiymatlarga ega bo`lsa, u holda shunday c $(a<c<b)$ nuqta topiladiki, u nuqtada funksiya nolga aylanadi:

$$f(c) = 0.$$

Bo`lsano Koshining 2-teoremasi

Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo`lib, uning chetki nuqtalarida $f(a) = A$, $f(b)=B$ qiymatlarga ega va $A \neq B$ bo`lsa, A va B sonlari orasida har qanday C son olinganda ham a bilan b orasida shunday c nuqta topiladiki, bunda $f(c)=C$ bo`ladi.

Veyershtrasning 1- teoremasi

Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo`lsa, funksiya shu segmentda chegaralangan bo`ladi.

Veyershtrasning 2 - teoremasi

Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo`lsa, funksiya shu segmentda o`zining aniq yuqori hamda quyi chegaralariga erishadi.

7.7 $f(x) = \dfrac{|x| - x}{2x^2}$ funksiyani uzluksizligini tekshiring.

Yechish. $|x| = \begin{cases} x, & agar \ \ x \geq 0 \ bo'lsa, \\ -x & agar \ \ x < 0 \ bo'lsa. \end{cases}$

Bundan ko`rinadiki,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & agar \ \ x > 0 \ bo'lsa, \\ -\dfrac{1}{x} & agar \ \ x < 0 \ bo'lsa. \end{cases}$$

$x = 0$ nuqtada funksiya aniqlanmagan bolib, $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 0 \ va \ \lim\limits_{x \to -0} f(x) = +\infty$ munosabat o`rinli. Demak, $x = 0$ nuqta $f(x)$ funksiya uchun ikkinchi tur uzilish nuqtasi.

7.8 Quyidagi funksiyani uzluksizligini tekshiring va grafigini chizing.

$$f(x) = \frac{1}{\sin x^2}$$

7.9 Berilgan funksiya *a* ning qanday qiymatida uzluksiz bo`ladi.

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot ctgx, \ agar \ x\neq 0 \ va \ |x|<\dfrac{\pi}{2} bo'lsa, \\ a \ , agar \ \ x=0 \ bo'lsa. \end{cases}$$

Funksiyaning uzilish nuqtasini toping

7.10 $f(x)=4^{\frac{2}{5-x}}$

7.11 $f(x)=6^{\frac{1}{x+3}}$

7.12 $f(x)=3^{\frac{2}{1-x}}$

7.13 $f(x)=\begin{cases} 3x+4, \ agar \ \ x\leq 1 \ bo'lsa, \\ x^2-2, \ agar \ -1<x<2 \, bo'lsa, \\ x, \qquad agar \ \ x\geq 2 \ \ bo'lsa. \end{cases}$

7.14 $f(x)=\begin{cases} x+1, \qquad agar \ x\leq 0 \ bo'lsa, \\ (x+1)^2, \ agar \ 0<x\leq 2 \ bo'lsa, \\ 4-x, \quad agar \ x>2 \ \ bo'lsa. \end{cases}$

Berigan funksiyalarni uzilish nuqtasini va turini aniqlang

7.15

$$f(x)=\begin{cases} x-2, \ \ agar \ x<0 \ \ bo'lsa, \\ 2, \qquad agar \ x=0 \ \ bo'lsa, \\ x^2-2, \ agar \ x>0 \ bo'lsa. \end{cases}$$

7.16

$$f(x)=\begin{cases} x-2, \ \ agar \ x<0 \ \ bo'lsa, \\ -2, \quad agar \ x=0 \ \ bo'lsa, \\ -x-2, agar \ \ x>0 \ bo'lsa. \end{cases}$$

7.17

$$f(x)=\frac{x^2+2}{x-2}$$

7.18

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2+2}$$

7.19

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}$$

7.20

$$f(x)=\frac{1}{x^2+x}$$

7.21

$$f(x)=\begin{cases} x-2, \ agar \ \ x<2 \ bo'lsa, \\ x+2, \ agar \ \ x\geq 2 \ bo'lsa. \end{cases}$$

7.22

$$f(x)=\begin{cases} x-3, \ agar \ \ x<0 \ bo'lsa, \\ x+1, \ agar \ \ 0\leq x\leq 4 \ bo'lsa, \\ 3+\sqrt{x}, agar \, x>4 \ \ bo'lsa. \end{cases}$$

7.23 - 7.28 Funksiyani uzluksizlikka tekshiring va grafigini chizing

7.23 $y=\dfrac{3}{x-4}.$

7.24 $y=|x|.$

7.25 $a) \ y=-\dfrac{5}{x};$ $b) \ y=tgx.$

7.26 $a) \ y=x-|x|;$ $b) \ y=3-\dfrac{|x|}{x}.$

7.27

7.28

$a)\ y=3^{\frac{1}{x-3}};$ $a)\ y=2^{\frac{1}{x-3}};$

$b)\ y=1-3^{\frac{1}{x}}.$ $b)\ y=5-4^{\frac{1}{x^2}}.$

7.29 Funksiya uzilish nuqtalarini toping. Funksiyaning uzilish nuqtasi atrofidagi shaklini chizing

1. $f(x)=2^{\frac{1}{x-5}}$
2. $f(x)=7^{\frac{1}{5-x}}$
3. $f(x)=3^{\frac{1}{x-4}}$
4. $f(x)=8^{\frac{3}{4-x}}$
5. $f(x)=4^{\frac{1}{x-3}}$
6. $f(x)=6^{\frac{1}{2-x}}$
7. $f(x)=5^{\frac{3}{x-8}}$
8. $f(x)=5^{\frac{4}{3-x}}$
9. $f(x)=4^{\frac{2}{x-6}}$
10. $f(x)=4^{\frac{2}{5-x}}$
11. $f(x)=9^{\frac{3}{4-x}}$
12. $f(x)=6^{\frac{1}{x+3}}$
13. $f(x)=7^{\frac{2}{3-x}}$
14. $f(x)=7^{\frac{2}{x+5}}$
15. $f(x)=6^{\frac{1}{x-4}}$
16. $f(x)=9^{\frac{1}{x+2}}$
17. $f(x)=5^{\frac{7}{2-x}}$
18. $f(x)=6^{\frac{3}{x+1}}$
19. $f(x)=4^{\frac{1}{x-5}}$
20. $f(x)=8^{\frac{1}{x+4}}$
21. $f(x)=3^{\frac{3}{4-x}}$
22. $f(x)=5^{\frac{3}{x+4}}$
23. $f(x)=5^{\frac{3}{4-x}}$
24. $f(x)=5^{\frac{4}{x+3}}$
25. $f(x)=6^{\frac{1}{x-3}}$
26. $f(x)=5^{\frac{4}{3-x}}$
27. $f(x)=4^{\frac{3}{3-x}}$
28. $f(x)=3^{\frac{2}{x+1}}$
29. $f(x)=6^{\frac{2}{4-x}}$
30. $f(x)=6^{\frac{3}{x+2}}$

Berilgan funksiyani uzilish nuqtalarini toping. Ularning grafigini chizing

1. $f(x)=\begin{cases} 2 & agar\ \ x\geq 2 \\ 2^x & agar\ \ 0\leq x<2 \\ x+1 & agar\ \ x<0 \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} x-1 & agar\ \ x\geq 1 \\ x^2 & agar\ \ 0\leq x<1 \\ x^3 & agar\ \ x<0 \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} \cos x & agar\ \ x\leq 0 \\ x+1 & agar\ \ 0<x\leq 2 \\ 2 & agar\ \ x>2 \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} 2x & agar\ \ x\geq 0 \\ -x^2 & agar\ \ -1\leq x<0 \\ -x & agar\ \ x<-1 \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} x-3 & agar\ \ x\geq 3 \\ x^3 & agar\ \ 0\leq x<3 \\ x & agar\ \ x<0 \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} x^2 & agar\ \ 0<x\leq 2 \\ x-1 & agar\ \ x\leq 0 \\ x+2 & agar\ \ x>2 \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} \sin x & agar\ \ x\geq 0 \\ x^2 & agar\ \ -1\leq x<0 \\ x & agar\ \ x<-1 \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} 1-x & agar\ \ x\geq 1 \\ \log_x x^2 & agar\ \ -1<x<1 \\ x+3 & agar\ \ x\leq -1 \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} x & agar\ \ x\geq 0 \\ (x+3)^2 & agar\ \ -2<x<0 \\ x+3 & agar\ \ x\leq -2 \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} x^2 & agar\ \ x\leq 1 \\ \lg x & agar\ \ 1<x<10 \\ 11-x & agar\ \ x>10 \end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases} x-1 & agar\ \ x\geq 1 \\ x^2 & agar\ \ 0\leq x\leq 1 \\ -x & agar\ \ x<0 \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & agar\ \ 0<x<1 \\ 1 & agar\ \ x\geq 1 \\ x+1 & agar\ \ x\leq 0 \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} 3x & agar\ \ 0\leq x<1 \\ 2 & agar\ \ x\geq 1 \\ x+1 & agar\ \ x\leq 0 \end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases} x+2 & agar\ \ x>2 \\ 2x & agar\ \ 0<x\leq 2 \\ x+3 & agar\ \ x\leq 0 \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} \sin x & agar\ \ x\geq 0 \\ x & agar\ \ -2\leq x<0 \\ 2 & agar\ \ x<-2 \end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases} \cos x & agar\ \ x\leq 0 \\ x-1 & agar\ \ 0<x\leq 1 \\ x-1 & agar\ \ x>1 \end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases} 1 & agar\ \ x\geq 1 \\ x^2+1 & agar\ \ -1\leq x<1 \\ x+3 & agar\ \ x<-1 \end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases} -x & agar\ \ x\leq 0 \\ 2x^2 & agar\ \ 0<x\leq 1 \\ x+2 & agar\ \ x>1 \end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases} x-1 & agar\ \ x\geq 2 \\ (x-1)^2 & agar\ \ 0\leq x<2 \\ x & agar\ \ x<0 \end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases} 3 & agar\ \ x\geq 1 \\ (x+1)^2 & agar\ \ -2\leq x<1 \\ x+3 & agar\ \ x<-2 \end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases} x & agar\ \ x\ge 3 \\ (x-2)^2+2 & agar\ \ 1\le x<3 \\ -x & agar\ \ x<1 \end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases} x-1 & agar\ \ x\le -1 \\ x^3+1 & agar\ \ -1<x\le 1 \\ x & agar\ \ x>1 \end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases} \sin x & agar\ \ x\le 0 \\ \sqrt{x} & agar\ \ 0<x\le 4 \\ x-3 & agar\ \ x>4 \end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases} -x & agar\ \ x\le 0 \\ \sqrt[3]{x} & agar\ \ 0<x\le 8 \\ 9-x & agar\ \ x>8 \end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{2} & agar\ \ x\le 0 \\ x+1 & agar\ \ 0<x\le 2 \\ x-1 & agar\ \ x>2 \end{cases}$

26. $f(x)=\begin{cases} 1 & agar\ \ x\ge \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{\sin x}{\cos x} & agar\ \ -\dfrac{\pi}{4}\le x<\dfrac{\pi}{4} \\ -x & agar\ \ x<-\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases} x+1 & agar\ \ x\le 0 \\ \sqrt{x}+1 & agar\ \ 0<x\le 4 \\ 5-x & agar\ \ x>4 \end{cases}$

28. $f(x)=\begin{cases} 9-x & agar\ \ x\ge 8 \\ \dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{2} & agar\ \ -1\le x<8 \\ \dfrac{x}{2}+1 & agar\ \ x<-1 \end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases} x & agar\ \ x\ge 2 \\ x^2 & agar\ \ 0\le x<2 \\ \sin x & agar\ \ x<0 \end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}-x & agar\ \ x\ge \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & agar\ \ 0\le x<\dfrac{\pi}{2} \\ \sin x & agar\ \ x<0 \end{cases}$

7.31 Funksiya uzilish nuqtasini toping. Funksiyaning uzilish nuqtasi atrofidagi shaklini chizing

1. $f(x)=4^{\frac{2}{x-3}}$

2. $f(x)=6^{\frac{1}{3-x}}$

3. $f(x)=5^{\frac{2}{x+2}}$

4. $f(x)=3^{\frac{1}{x-6}}$

5. $f(x)=2^{\frac{2}{x-4}}$

6. $f(x)=7^{\frac{3}{x-4}}$

7. $f(x)=8^{\frac{1}{4-x}}$

8. $f(x)=9^{\frac{1}{x-2}}$

9. $f(x)=6^{\frac{2}{3-x}}$

10. $f(x)=5^{\frac{3}{x+3}}$

11. $f(x)=3^{\frac{4}{5-x}}$

12. $f(x)=4^{\frac{3}{5+x}}$

13. $f(x)=7^{\frac{4}{5-x}}$

14. $f(x)=9^{\frac{3}{5-x}}$

15. $f(x)=8^{\frac{2}{x+3}}$

16. $f(x)=3^{\frac{4}{x-8}}$

17. $f(x)=5^{\frac{6}{5-x}}$

18. $f(x)=4^{\frac{3}{8-x}}$

19. $f(x)=7^{\frac{1}{4-x}}$

20. $f(x)=6^{\frac{2}{2+x}}$

21. $f(x)=8^{\frac{3}{x+4}}$

22. $f(x)=9^{\frac{1}{x+1}}$

23. $f(x)=5^{\frac{2}{1-x}}$

24. $f(x)=6^{\frac{3}{x-4}}$

25. $f(x)=3^{\frac{8}{x-4}}$

26. $f(x)=4^{\frac{4}{4-x}}$

27. $f(x)=7^{\frac{1}{4-x}}$

28. $f(x)=9^{\frac{2}{x-3}}$

29. $f(x)=6^{\frac{2}{4-x}}$

30. $f(x)=3^{\frac{3}{3-x}}$

Mavzu yuzasidan savollar

1. Funksiya uzluksizligining ta’rifi.
2. Uzluksiz funksiyaning xossalari.
3. Elementar funksiyalarning uzluksizligi.
4. Funksiyaning uzilishi, uzilish turlari.
5. Bolsano Koshining teoremalari.
6. Veyershtras teoremasi.

Adabiyotlar

29. Sh.Shorahmetov, B.Naimjanov, «Iqtisodchilar uchun matematica», - T.: «Fan va texnologiya»., 2007 y.

30. Клименко Ю.И. “Высшая математика для экономистов теория, примеры и задачи”. М.: Экзамен 2005 г.

31. T.A.Azlarov, H.Mansurov “Matematik analiz”, Toshkent, 2006 y.

32. Жураев Т.Ж., Худойберганов Р.Х., Ворисов А.К., Мансуров Х. “Олий математика асослари” Т.: Узбекистон 1999 й.

33. Кремер Н.М. и другие. – “Высшая математика для экономистов”, - М.: 2004 г.

34. М.С.Красс, Б.П.Чупрынов. “Основы высшей математики и ее приложения в экономическом образовании”, - М.: Дело, 2000 г.

35. «Сборник задач по высшей математике для экономистов» под ред. В.И.Ермакова. М.: Инфра – М, 2003 г.

36. Кремер Н.Ш. и др. “Практикум по высшей математике для экономистов” – М.: 2004 г.
37. Соатов Ё.У. “Олий математика”, Т.: Укитувчи, 1-жилд, 2-жилд, 1994 й., 3-жилд, 1996 й.
38. Минорский И.П., “Сборник задач по высшей математике” – М.: 2004 г.
39. Шапкин А.С. «Задачи с решениями по высшей математике теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию» - М.: 2008г.
40. Макаров С.И., Мищенко М.В., «Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики» Н.: 2008г.
41. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. «Основы математики и ее приложения в экономическом образовании» -М.: 2008
42. Ермаков В.И. «Общий курс высшей математика для экономистов». –Н: 2010г.

8.Bir o`zgaruvchili funksiyalarning differensial hisobi

8.1 Funksiya hosilasi

Aytaylik $y = f(x)$ funksiya biror X sohada aniqlangan b`olib, $x_0 \in X$ va $x_0 + \Delta x \in X$ bo`lsin.

Ta'rif. Agar $\Delta x \to 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

nisbatning limiti mavjud va chekli bo`lsa, bu limit $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi. Hosilaning belgilanishi:

$$y', f'(x_0), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}.$$

Demak, ta'rifga ko`ra

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (8.1)$$

Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo`lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi deyiladi, hosilani topish jarayoni differensiallash deyiladi.

8.1. $y = x^2$ funksiyaning hosilasini hisoblang.

Yechish. Avval x ga Δx orttirma beramiz va funksiya orttirmasi Δy ni topib (8.1) - formulaga qo`yamiz:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 = \Delta x(2x + \Delta x).$$

(8.1) formulaga ko`ra:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x.$$

8.2. $y = \dfrac{1}{x}$ funksiyaning hosilasini hisoblang

8.3. $y=\sin x$ funksiyaning hosilasini toping.

8.4 $y = \dfrac{2x+3}{2x+1}$ funksiyaning hosilasini hosilaning ta’rifidan foydalanib hisoblang

8.5 $y = |x|$ funksiya hosilasini hisoblang

Yechish. $x = 0$ nuqtada argumentga Δx orttirma beramiz, u holda funksiya Δy orttirma oladi:

$$\Delta y = |\Delta x| = \begin{cases} -\Delta x, & agar\ \Delta x < 0\ \ bo'lsa, \\ \Delta x, & agar\ \Delta x > 0\ \ bo'lsa. \end{cases}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & agar\ \Delta x < 0\ \ bo'lsa, \\ 1, & agar\ \Delta x > 0\ \ bo'lsa. \end{cases}$$

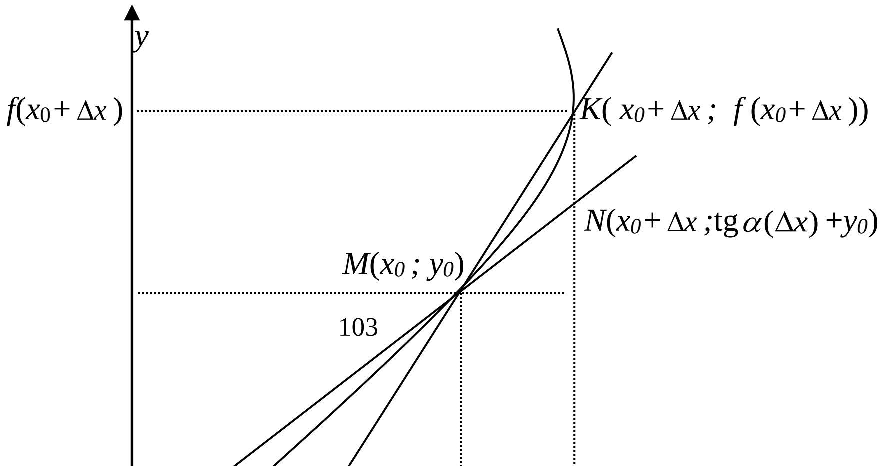
Ko`rinib turibdiki, $\Delta x = 0$ nuqtada $y = |x|$ funksiya hosilaga ega emas, chunki $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning $\Delta x \to 0$ dagi limiti mavjud emas.

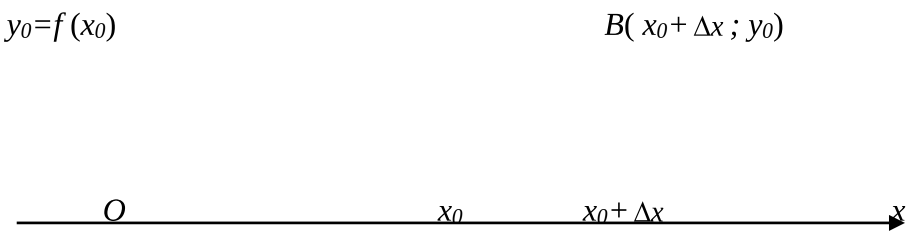
8.2 Hosilaning geometrik ma`nosi

Tekislikda berilgan $y = f(x)$ funksiya grafigining M (x_0 ; y_0), (bu yerda $y_0=f(x_0)$ nuqtasiga o`tkazilgan urinmani qaraymiz. Bu urinmani hosil qilish uchun quyidagi (1- rasm) chizmada avval $MK$ to`g`ri chiziq o`tkazamiz. So`ngra - orttirmani nolga intiltirsak, grafikdagi $K$ nuqta $M$ nuqtaga yaqinlasha borib, $MK$ to`g`ri chiziq $MN$ - urinma holatini egallaydi. $\Delta x \to 0$ da $MK$ to`g`ri chiziq $OX$ – o`qining musbat yo`nalishi bilan hosil qilgan $\alpha(\Delta x)$ burchagi, $MN$ - urinma hosil qilgan $\varphi$ burchakka intiladi. Bu yerda $MN$ - to`g`ri chiziqning tenglamasi $y-y_0 = tg\,\varphi\,(x-x_0)$ ko`rinishda bo`lib, $x-x_0 = \Delta x$ va $tg\,\varphi = k$ – $MN$ to`g`ri chiziq $OX$ – o`qining musbat yo`nalishi bilan hosil qilgan burchak koeffitsenti ekanligini e`tiborga olsak, MN to`g`ri chiziq tenglamasi $y=k\Delta x+y_0$ ko`rinishda bo`ladi. 1 - chizma MKB - uchburchak uchun $MB = \Delta x$, $KB = \Delta y$ va tg $\alpha(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ Demak,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\,\alpha(\Delta x) = tg\,\varphi = k \qquad (8.2)$$

ya`ni $f`(x_0)=k$ tenglikni hosil qilamiz.





(1-rasm)

Shunday qilib, geometrik nuqtai nazardan $y=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi $f`(x_0)$ hosilasi uning grafigiga $M(x_0, y_0)$ nuqtasida o\`tkazilgan urinmaning OX o\`qining musbat yo\`nalishi bilan hosil qilgan burchagining tangensiga teng. MN - urinmaning $y=k\Delta x+y_0$ tenglamasida $\Delta x=$ x – x$_0$, $y_0 = f(x_0)$ va $k=f`(x_0)$. U holda $y=f(x)$ funksiya grafigining $M(x_0, y_0)$ nuqtasida o\`tkazilgan urinma tenglamasi quyidagi ko\`rinishda bo\`lar ekan

$$y = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)\,. \qquad (8.3)$$

8.6. $y=x^2+3$ funksiya grafigiga $M(1;4)$ nuqtadan o\`tkazilgan urinmaning burchak koeffitsentini toping.
Yechish. (8.2)-formulaga ko\`ra: $k = tg\varphi = f'(x_0) = 2x_0 = 2\cdot 1 = 2$

8.7. $y=x^2+3x+4$ funksiya grafigiga M (-1; 2) nuqtadan o\`tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.
8.8 $y = 2x^3+1$ funksiya grafigining M(1; 3) nuqtasiga o\`tkazilgan urinmaning burchak koeffisentini toping.
8.9 $y=\sin x+\cos x$ funksiyaning $x_0 = \frac{\pi}{2}$ nuqtasidan o\`tkazil;gan urinmaning tenglamasini tuzing.
8.10 $y=\ln x$ ($x > 0$) funksiyaning $x_0=1$ nuqtasidan o\`tkazilgan urinma $Ox$ o\`qning musbat yo\`nalishi bilan qanday burchak hosil qiladi.

Hosilaning iqtisodiy ma'nosi

Shuni takidlash lozimki, hosilaning iqtisodiy ma\`nosi ko\`p qirrali bo\`lib, muayyan ob\`ektga yo\`naltirilgan maqsaddan kelib chiqadi. Biz shu masalalardan birini keltiramiz. $U=U(t)$ funksiya $t$ - vaqt davomida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi o\`zgarishini bildirsin. Ishlab chiqarishning $t=t_0$ vaqtdagi mehnat unmdorligini topish masalasini ko\`raylik. Buning uchun $t$ - vaqtga $\Delta t$ - orttirma beramiz, u holda mana shu vaqt davomida ma\`lum miqdordagi $\Delta U = U(t_0+\Delta t) - U(t_0)$ mahsulot ishlab chiqariladi, o\`rtacha mehnat unumdorlik $Z_{o'rta} = \frac{\Delta U}{\Delta t}$ tenglik orqali topiladi. $t = t_0$ vaqtdagi mehnat unumdorligi uchun quyidagi tengliokni hosil qilamiz:

$$Z(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta t} = U'(t_0)$$

Demak, mahsulot hajmini vaqt bilan bog\`lovchi $U(t)$ funksiyaning vaqt bo\`yicha $U`(t)$ hosilasi ishlab chiqarishning $Z(t)$ unumdorligini berar ekan, ya\`ni

$$U`(t) = Z(t)$$

Hosilaning mexanik ma'nosi

Moddiy nuqtaning harakati $S = f(t)$ qoida bilan aniqlangan bo`lsin, bunda t vaqt, $S$ bosib o`tilgan yo`l. Vaqtning $t_0$ va $t_0 + \Delta t$ qiymatlarida ($\Delta t > 0$)$\cdot S = f(t_0)$ funksiya qiymatlari $f(t_0)$ va $f(t_0 + \Delta t)$ ga teng, $f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ ayirma $\Delta t$ vaqt oralig'ida o`tilgan ΔS yo`lni aniqlaydi:

$$\Delta S = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0).$$

Demak, Δt vaqt ichida moddiy nuqta ΔS yo`lni o`tadi. Unda $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ nisbat moddiy nuqta harakatining o`rtacha tezligini bildiradi, $\Delta t \to 0$ da $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ ning limiti moddiy nuqtaning t_0 paytdagi oniy tezligini ifodalaydi.

$$\upsilon(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = f'(t_0) \qquad (8.4)$$

Shunday qilib, $S = f(t)$ funksiyaning t_0 nuqtadagi hosilasi mexanik nuqtai – nazaradan $S = f(t)$ qoida bilan harakatlanayotgan moddiy nuqtaning t_0 paytdagi oniy tezligini bildirar ekan, ya'ni $S'(t) = \upsilon(t)$. Moddiy nuqtaning oniy tezligidan olingan hosila esa, uning oniy tezlanishga teng bo`ladi, $\upsilon'(t) = a(t)$.

8.11 $S = 2t^2 + t$ (m) qonuniyat bilan harakatlanayotgan moddiy nuqtaning $t = 3$ (sek) dagi oniy tezligini toping.

Yechish. $\upsilon(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{2(t + \Delta t)^2 + (t + \Delta t) - 2t^2 - t}{\Delta t} = 4t + 1$

Demak, (3) = 4·3 + 1 = 13 m/sek, ***v* =** 13 m/sek.

8.12 $S = t^3 - t^2 - t + 1$ (m) qonuniyat bo`yicha harakatlanayotgan moddiy nuqta qancha vaqtdan keyin to`xtaydi.

8.3 Hosila olish qoidalari

1. Agar $f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo`lsa, u holda istalgan o`zgarmas a soni uchun $\varphi(x) = a f(x)$ funksiya ham $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bolib, bu hosila quyidagi tenglik orqali topiladi:

$$\varphi'(x_0) = af'(x_0) \qquad (8.5)$$

2. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = x_0$nuqtada hosilaga ega bo`lsa, u holda $\varphi(x) = f(x) \pm g(x)$ funksiya ham $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo`ladi,

$$\varphi'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0) \qquad (8.6)$$

3. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo`lsa, u holda $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ funksiya ham $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bolib, bu hosila quyidagi tenglik orqali topiladi:

$$\varphi'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \qquad (8.7)$$

4. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = x_0$nuqtada hosilaga ega bolib, $g(x) \neq 0$ bo`lsa, u holda $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo`ladi va bu hosila quyidagi formula bilan topiladi:

$$\varphi'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{g^2(x_0)} \qquad (8.8)$$

Elementar funksiyalarning hosilalari jadvali

1. $y = C, \ y' = 0.$
2. $y = u + v + w, \ y' = u' + v' + w'.$
3. $y = Cu, \ y' = Cu'.$
4. $y = uv, \ y' = uv'.$

5. $y = u^n,\ y' = nu^{n-1}u'$.

6. $y = \frac{u}{v},\ y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

7. $y = a^u,\ y' = a^u \ln a \cdot u'$.

8. $y = e^u,\ y' = e^u u'$.

9. $y = \ln u,\ y' = \frac{u'}{u}.u > 0$

10. $y = \log_a u,\ y' = \frac{u'}{u}\log_a e.u > 0$

11. $y = \sin u,\ y' = u'\cos u$.

12. $y = \cos u,\ y' = -u'\sin u$.

13. $y = tg\, u,\ y' = \frac{u'}{\cos^2 x}$.

14. $y = ctg\, u,\ \ y' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

15. $y = \arcsin u,\ \ y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

16. $y = \arcsin u,\ y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

17. $y = arctg\, u,\ y' = \frac{u'}{1+u^2}$.

18. $y = arcctg\, u,\ y' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

19. $y = f(u),\ u = u(x),\ y' = f'_u(u)\cdot u'_x$

20. $x = x(t),\ y = y(t),\ y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

8.13 $y = (3x+1)(\frac{x}{2} +3)$ funksiyaning hosilasini hisoblang

Yechish. $f(x)=3x+1$, $g(x) = (\frac{x}{2} +3)$ (8.7)-formulaga ko\`ra:

$y\grave{}=f\grave{}(x)\, g(x)+g\grave{}(x)\, f(x)=(3x+1)\grave{}(\frac{x}{2}+3)+(\frac{x}{2}+3)\grave{}(3x+1)=3(\frac{x}{2}+3)+\frac{1}{2}\ (3x+1)=$

$=3x+9\frac{1}{2}$

8.14 $y = \frac{8x+1}{2-3x}$ funksiyaning hosilasini hisoblang

8.4. Teskari va murakkab funksiyalarning hosilasi

$y = f(x)$ funksiya $(a,\ b)$ oraliqda berilgan va unga teskari $x= \varphi(y)$ funksiya mavjud bo\`lsin.

Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 $(x_0 \in (a,b))$ nuqtada $f\grave{}(x_0)$ hosilaga ega bo\`lib $f\grave{}(x_0) \neq 0$ bo\`lsa, u holda bu funksiyaga teskari bo\`lgan $x= \varphi(y)$ funksiya $y_0=f(x_0)$ nuqtada hosilaga ega va

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad (8.9)$$

tenglik o\`rinli bo\`ladi.

8.15 $y = arsinx$ $(-1\le x\le 1)$ funksiyani hosilasini aniqlang.

Yechish. $y=arcsinx$ funksiya $x=siny$ funksiyaga nisbatan teskari funksiyadir.

(8.9) - formuladan $f'(y_0) = \frac{1}{\varphi'(x_0)}$ formulani olamiz. Bunda $f(x) =arcsinx$, $\varphi(y)=\sin y$. Demak,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

8.16 y = arccos$x$ funksiyaning hosilasini hisoblang

8.17 y = arctg$x$ funksiyaning hosilasini hisoblang

8.18 y = arcctg$x$ funksiyaning hosilasini hisoblang

Murakkab funksiyaning hosilasi

$y = \varphi(x)$ funksiya X to`plamda, $u = f(y)$ funksiya esa $Y$ ($Y = \{\varphi(x);\ x \in X\}$) to`plamda aniqlangan bo`lib, $u = f(\varphi(x))$ murakkab funksiya berilgan bo`lsin. Agar $y = \varphi(x)$ funksiya x_0 nuqtada $\varphi`(x_0)$ hosilaga ega bo`lib, $u=f(y)$ funksiya esa y_0 ($y_0 = \varphi(x_0)$) nuqtada $f`(y_0)$ hosilaga ega bo`lsa, u holda $u = f(\varphi(x))$ murakkab funksiya ham x_0 nuqtada hosilaga ega bo`ladi va quyidagi formula bilan hisoblanadi;

$$\left(f(\varphi(x))\right)'_{x=x_0} = f'(y_o)\cdot\varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0) \qquad (8.10)$$

Funksiyalarning hosilasini hisoblang:

8.19 $y = cos^3x$

Yechish. $u=cosx$ deb belgilashni kiritsak, $y=u^3$ hosil bo`ladi. (8.10) – formulaga ko`ra:

$$y' = (u^3)' = 3u^2\cdot u',\quad u' = (\cos x)' = -\sin x,\ y' = -3\sin x\cdot\cos^2 x.$$

8.20 $y = (1+ \sin^3 2x)^4$

8.21 $y = tg^2(e^{-x}).$

8.22 $y = \dfrac{(1+x)^2\sqrt[3]{(1-x)^2}}{(x^2+4)^4 e^{-\sin x}}.$

8.23 $y = xarctg^3 5x + \ln tgx.$

8.24 $y = arc\sec x$

8.25 $y = x^3\cdot e^{x^2}\cdot\sin 2x.$

Oshkormas funksiya hosilasi

Ikkita x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish $F(x,y)=0$ tenglama ko'rinishida berilgan bo'lsin. F(x,y)=0 oshkormas funksiyani oshkor ko'rinishga keltirmasdan hosilasini topish qoidasini ko'rsatamiz. y ni x ning funksiyasi deb F(x,y)=0 tenglamaning ikkala qismini differensiallash, so'ngra hosil qilingan tenglamani y' ni topish kerak. Buni quyidagi misolda ko'rsatamiz.

Misol: $x^4+y^4-3xy=0$ oshkormas funksiyaning y' hosilasini hisoblang

Yechish: y ni x ning funksiyasi deb belgilangan tenglamasining ikkala qismini differensiallaymiz $4x^3+4y^3y'-3y-3xy'=0$ bundan esa $y' = (4x^3-3y)/(3x-4y^3)$ ni topamiz.

Funksiyalarning hosilasini hisoblang.

8.26 $x\cdot e^y + y\cdot e^x = xy$.

Yechish: $\left(x\cdot e^y + y\cdot e^x\right)' = (xy)'$, $e^y + xe^y y' + y'\cdot e^x + y\cdot e^x = y + xy'$,

$y'\cdot\left(xe^y + e^x - x\right) = -e^y - y\cdot e^x + y$, bundan $y' = \dfrac{y-(e^y+ye^x)}{e^x + x(e^y-1)}.$

8.27 $\ln(x^2+y^2) = 2arctg\dfrac{y}{x},$

8.28 $y = x^x$

8.5 Funksiya differensiali va uning taqribiy hisoblashlardagi tadbiqlari

Hosila ta'rifiga ko'ra $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ limitning ta'rifiga asosan esa $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon(x)$ yoki $\Delta y = y' + \varepsilon(x)\Delta x$ ifodaga ega bo'lamiz. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(x)=0$ tenglikdan ko'rinib turibdiki, funksiya orttirmasi Δy ni ikki qismga ajratish mumkin. Birinchi qism erkli o'zgaruvchining orttirmasi Δx

ga nisbatan chiziqli bo'lgan, ikkinchi qismi Δx ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdordan iborat. Birinchi qism $y'\Delta x$ funksiya orttirmasining asosiy qismi (bosh qismi) yoki differensiali deyiladi va

$$dy = y'\Delta x \qquad (8.11)$$

kabi belgilanadi. Erkli o'zgaruvchining differentsiali uning orttirmasiga teng, ya'ni $dx=\Delta x$. U holda (8.11) ifoda $dy=y'dx$ yoki $dy=f'(x)dy$ kabi yoziladi.

$$d(y) = y'dx, \quad dy = f'(x)dx \qquad (8.12)$$

8.29 $y = x^3 + 2x^2 + 2$ funksiyaning differensialini hisoblang

Yechish. (8.11) formulaga ko`ra:

$$dy = y'dx = (x^3 + 2x^2 + 2)'dx = (3x^2 + 4x)dx.$$

8.30 $y = e^{2x} + cox2x$ funksiya differensialini toping.

8.31 $y = \ln(e^{2x} + x + 1)$ funksiyaning differensialini toping.

8.32 $\sqrt[3]{28}$ miqdorni taqribiy hisoblang.

Parametrik ko`rinishda berilgan funksiyaning hosilasi

Faraz qilaylik y funksiyaning x argumentga bo`g`liqligi $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ tenglamalar bilan parametrik shaklda berilgan bo`lsin. Masalan:

1) $x = x_0 + l \cdot t, \quad y = y_0 + m \cdot t$ – to`g`ri chiziqning parametrik tenglamasi.

2) $x = x_0 + R \cdot \cos t, \quad y = y_0 + r \cdot \sin t$ – aylananing parametrik tenglamsi. $(x - x_0)$ va $(y - y_0)$ larni kvadratga ko`tarib, qo`shish natijasida (xaqiqatdan ham $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ – markazi $M_0(x_0, y_0)$nuqtada bo'lgan aylana tenglamasini hosil qilamiz).

3) Xuddi shuningdek, $x = a \cdot \cos t$, $y = b \cdot \sin t$ – ellipsning parametrik tenglamasi, $\frac{x}{a}$ va $\frac{y}{b}$ ni kvadratga ko`tarib qo`shib, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tenglamani hosil qilamiz.

Parametr t ga Δt orttirma beramiz, mos ravishda Δx va Δy orttirmalar hosil bo`ladi. U holda $y$ dan $x$ bo`yicha hosila:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y'_t}{x'_t} \quad yoki \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}.$$

8.33 $x = e^{2t}\cos^2 t, \quad y = e^{2t}\sin^2 t$; y'_x hosilani hisoblang

Yechish. $x'_t = 2e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}(-2\cos t \cdot \sin t) = 2e^{2t}(\cos t - \sin t)\cos t,$

$y'_t = 2e^{2t}\sin^2 t + e^{2t} \cdot 2\cos t \cdot \sin t = 2e^{2t}(\cos t + \sin t)\sin t,$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = tgt \cdot \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t} = tgt \cdot \frac{1 + tgt}{1 - tgt} = tgt \cdot tg\left(t + \frac{\pi}{4}\right), \quad \left(t \neq \frac{\pi}{4} + \pi k,\ t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right).$$

8.34 $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$; y'_x =?

Hosilasini hisoblang.

8.35 $x = a\cos t, \quad y = a\sin x$;

8.36 $x = t^2, \quad y = \frac{t^3}{3} - t$;

8.37 $x = e^{2t}, \quad y = e^{3t}$.

8.6. Yuqori tartibli hosilalar

Birinchi tartibli hosiladan olingan hosila ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va y □ □□, f □ □ (x), $\frac{d^2y}{dx^2}$ belgilarning biri bilan belgilanadi.

Ikkinchi tartibli hosilaning hosilasiga uchinchi tartibli hosila deyiladi va y □ □ □□, f □ □ □ (x), $\frac{d^3y}{dx^3}$ (8.12) belgilarning belgilarning biri bilan belgilanadi.

Umuman, $y=f(x)$ funksiyaning n-tartibli hosilasi deb, uning $(n-1)$ - tartibli hosilasining hosilasiga aytiladi va $y^{(n)}$, $f^{(n)}$, (8.13) belgilarning biri bilan belgilanadi.

$y = f(x)$ funksiya differensiali dy ning differensiali berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali deb ataladi va d^2y yo\`ki $d^2f(x)$ kabi belgilanadi:

$$d^2y = d(dy) \quad \text{yoki} \quad d^2f(x) = d(df(x)) \qquad (8.14)$$

Funksiyaning differensialini uning hosilasi orqali ifodalovchi $dy = y\`dx$ formulaga ko\`ra:

$$d^2y = d(dy) = d(y\`dx) = dxd(y\`) = dx(y\`)\`dx = y''dx^2$$

Demak, funkisyaning ikkinchi tartibli differensiali funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasining argument differensiali kvadrat ko\`paytmasiga teng.

Umumiy holda funksiyaning n – tartibli differensiali uning (n-1) – tartibli differensialining differensialidan iboratdir:

$$d^ny = d(d^{n-1}y), \quad d^nf(x) = d(d^{n-1}f(x)) \qquad (8.15)$$

8.38 $y = e^x + x^2$ funksiyaning uchinchi tartibli hosilasini toping.

Yechish. (8.13) – formulaga ko\`ra $n = 3$ da $y^{(3)} = (y^{(2)})\`$

$y'' = (y\`)\` = ((e^x + 2x)\`)\` = (e^x + 2x)\` = e^x + 2$

$y^{(3)} = (e^x + 2)\` = e^x + 0 = e^x$

8.7 Differensial hisobining asosiy teoremalari

1. *Ferma teoremasi.* $f(x)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

a) $[a, b]$ kesmada uzluksiz;

b) (a, b) oraliqda differensiallanuvchi;

c) kesmaning oxirlarida $f(a) = f(b)$ teng qiymatlar qabul qilsa, u holda, aqalli bitta shunday $x = c$ $(a < c < b)$ nuqta mavjudki, unda $f\`(c)=0$ bo\`ladi.

2. *Roll teoremasi.* Agar $f(x)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

a) $[a, b]$ kesmada uzluksiz;

b) (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo\`lsa, u holda berilgan oraliqda aqalli bitta $x = c$ $(a < c < b)$ nuqta mavjudki,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \text{ bo\`ladi.}$$

3. *Lagranj teoremasi.* $y = f(x)$ *va* $y = g(x)$ quyidagi shartlarni qanoatlantirsin;

a) $[a, b]$ kesmada uzluksiz;

b) (a, b) oraliqda differensialanuvchi;

c) $g'(x) \neq 0, \quad x \in [a, b]$

u holda bu oraliqda aqalli bitta shunday $x = c$ $(a < c < b)$ nuqta mavjudki,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo\`ladi.

4. ***Koshi teoremasi.*** Agar $f(x)$ funksiya x oraliqning ichki nuqtasi x_0 da o`zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishsa, hamda shu $x_0$ nuqtada chekli hosilaga ega bo`lsa, u holda funksiya hosilasining x_0 nuqtadagi qiymati nolga teng bo`ladi, ya`ni: $f`(x) = 0$

8.8 Teylor formulasi

Teylor teoremasi: Agar $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada aniqlangan va uning biror atrofida $(n+1)$ – tartibgacha hosilaga ega bo`lsa, u holda shunday $x=\xi$ nuqta mavjudki unda Teylor formulasi o`rinli bo`ladi:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n +$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

ξ nuqta x va a orasida yotadi, ya`ni $\xi = a+\theta(x-a)$ va $0<\theta<1$. Teylor formulasidagi oxirgi qo`shiluvchi Lagranj shaklidagi qoldiq had deyiladi. $a = 0$ da Teylor formulasi Makloren formulasi deyiladi:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{n}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad 0<\theta<1$$

8.39 $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ funksiyani x-1 ning darajasi ko`rinishida ifodalang.

Yechish. Funksiya a=1 nuqtada aniqlangan va bu nuqtaning atrofida barcha hosilalari mavjud. Bu nuqtada funksiyaning qiymatini va beshinchi tartibgacha bulgan hosilasini xisoblaymiz.

$$f(1) = -1,\ f'(1) = \left(\frac{-1}{(x-2)^2}\right)_{x=1} = -1,\quad f''(1) = \left(\frac{-1\cdot 2}{(x-2)^3}\right)_{x=1} = -2,\ \ldots,\ f^{5}(1) =$$
$$\left(\frac{-1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(x-2)^6}\right)_{x=1} = -120$$

U holda Teylor formulasiga ko`ra $x$-1 ga nisbatan ko`phadni hosil qilamiz:

$$\frac{1}{x-2} = -1-(x-1) - \frac{2}{2!}(x-1)^2 - \frac{6}{3!}(x-1)^3 - \frac{24}{4!}(x-1)^4 - \frac{120}{5!}(x-1)^5 + R_6 = -1-(x-1)-$$
$$(x-1)^2 - (x-1)^3 - (x-1)^4 - (x-1)^5 + R_6,\ bunda\ R_6 = \left(\frac{6!}{6!(x-2)^6}\right)_{x=\xi} (x-1)^6 =$$
$$= \frac{(x-1)^6}{(\xi-1)^6}\ va\ 1<\xi<x.$$

8.9 Lopital qoidasi

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a, b) oraliqda aniqlangan bo`lsin.

Agar: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ bo`lsa, u holda $x\to a$ da $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $(\dfrac{0}{0})$ korinishdagi aniqmaslik bo'ladi.

Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ bo`lsa, u holda $x\to a$ da $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ ko`rinishdagi aniqmaslik bo'ladi.

Agar berilgan funksiyalar hosilaga ega bo`lsa, yuqoridagi aniqmasliklarni ochish mumkin. Bunda Lopital qoidasidan foydalaniladi.

f (*x*) va *g*(*x*) funksiya $x = a$ nuqta atrofida mavjud va differensiallanuvchi bolib,

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g(a) = 0$, yoki ∞.

2) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a) = 0$, yoki ∞ va $g`(x) \neq 0$ bo`lsa, u holda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (8.17)$$

tenglik o`rinli bo`ladi.

8.40 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$ ni hisoblang

Yechish: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}\lim\dfrac{0}{0}$ tipidagi aniqmaslik bolib, Lopital qoidasiga ko`ra:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1.$$

8.41 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}$ limitni hisoblang.

8.10 Funksiya ekstremumlari

Agar x_0 ning etarlicha kichik atrofidagi barcha nuqtalar uchun $f(x_0) > f(x)$ bo`lsa, $y = f(x)$ funksiya uchun $x = x_0$ lokal maksimum nuqta deb ataladi.

Agar x_0 ning yetarlicha kichik atrofidagi barcha nuqtalar uchun $f(x_0) < f(x)$ bo`lsa, $x = x_0$ lokal minimum nuqtasi deb ataladi. Funksiyaning maksimum va minimumi uning ekstremal qiymatlari yoki ekstremumlari deyiladi.

Differensiallanuvchi funksiyaning ekstremum nuqtasidagi hosilasi nolga teng bo`ladi.

Funksiyaning *ekstremumlarini* topish.

1) $y`=f`(x)$ topiladi.

2) $f`(x)=0$ tenglama yechilib, statsionar nuqtalarning x_1; x_2; ..., x_k absissalari topiladi.

3) $f``(x) = 0$ tenglama yechimlari $x_1$, $x_2$ bilan $f``(x)$ funksiya ishoralari aniqlanadi va $f``(x_1) > 0$ da $x = x_1$ minimum, $f``(x_2) < 0$ da esa $x = x_2$ maksimum nuqta bo`ladi.

8.42 $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{4x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} + 1$ funksiyani hosila yordamida tekshiring.

Yechish. $f'(x) = x^3 - 4x^2 + 3x, \quad f''(x) = 3x^2 - 8x + 3$

1) $f`(x) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=3$
2) $f``(0) = 3 > 0,\ f``(1) = -2 < 0,\ f``(3) = 6 > 0$ demak $x_2=1$ maksimum nuqta.
3) $f``(x)=0 \Rightarrow 3x^2-8x+3=0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{4+\sqrt{7}}{3},\ x_2 = \dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$.

$\forall x \in \left(-\infty; \dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)$ *uchun* $f''(x) > 0$ $\quad \forall x \in \left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}; \dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$ *uchun* $f''(x) < 0$

$\forall x \in \left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}; +\infty\right)$ *uchun* $f''(x) > 0$

Demak funksiya garafigi $\left(-\infty; \dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)$ va $\left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}; +\infty\right)$ orliqlarda botiq, $\left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}; \dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$ oraliqda esa qavariq bo`ladi.

8.11. Funksiyani hosila yordamida tekshirish

l to’g’ri chiziq *y=f(x)* funksiyaning grafigiga asimptota deyiladi, agar *(x,f(x))* nuqtadan bu to’g’ri chiziqqacha bo’lgan masofa, grafigning nuqtasi koordinata boshidan cheksiz uzoqlashganda nolga intilsa.

Funksiya grafigining vertikal, gorizontal va og’ma asimptotalari bo’ladi.

Agar chap yoki o’ng $\lim\limits_{x\to x_o\pm 0} f(x)=\pm\infty$ limitlardan hech bo’lmaganda bittasi $\pm\infty$ ga teng bo’lsa $x=x_0$ to’g’ri chiziq vertikal asimptota deyiladi.

Agar uzulish nuqtasi yoki aniqlanish sohasining chegaraviy nuqtasi bo’lsa $x=x_0$ to’g’ri chiziq *y=f(x)* funksiyaning vertikal asimptotasi bo’lishi mumkin.

Agar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ bo’lsa y=b to’g’ri chiziq gorizontal asimptota deyildi.

Agar $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k\neq 0$ va $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=b$ bo’lsa , u holda *y=kx+b* to’g’ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigiga og’ma asimptota bo’ladi.

Funksiyani tekshirishning umumiy sxemasi

1) funksiyaning aniqlanish sohasini topish;
2) funksiyani toq yoki juftligini tekshirish;
3) vertikal asimptotalarni topish;
4) funksiyani cheksizlikda tekshirish; gorizontal va og’ma asimptotalarni topish;
5) funksiyaning ekstremumlari va monoton oraliqlarini topish;
6) funksiyaning qavariqlik, botiqlik oraliqlari, bukilish nuqtalarini topish;
7) funksiya grafigining koordinata o’qlari bilan kesishish nuqtalarini topish;

Funksiyani tekshirish grafifni chizish bilan bir vaqtda olib boriladi.

Funksiya hosila yordamida monotonlikka, ekstremumga va grafigining qavariq hamda botiqligi tekshiriladi.

$f'(x-h)$	$f'(x+h)$	Kritik nuqta haqida
+	-	Max
-	+	Min
+	+	Ekstremum yo`q, funksiya o`suvchi
-	-	Ekstremum yo`q, funksiya kamayuvchi.

8.43 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ funksiyaning ektremumlarini toping.

Yechish.

1) $y` = 6x^2 - 18x + 12$
2) $y` = 6x^2 - 18x + 12 = 0$ $6(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow 6(x-1)(x-2) = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$
3) *a*) $x = x_1 - 1$ nuqtaning atrofida $y`$ ning ishorasi qanday o`zgarishini tekshiramiz.

$h = -0{,}2$ bo`lsin.

$$y` = f`(0{,}8) = 6(0{,}8 - 1)(0{,}8 - 2) > 0.$$
$$y` = f`(1{,}2) = 6(1{,}2 - 1)(1{,}2 - 2) < 0.$$

Hosilaning ishorasi (+) dan (-) ga o`zgaryapti, demak $x = 1$ kritik nuqta maksimumdir.

b) $x_2 = 2$da $f`(1{,}8) < 0$ va $f`(2{,}2) > 0$

Demak $x = 2$ min nuqta.

Quyidagi funksiyalarning hosilasini hisoblang

8.44 $y=\frac{\sqrt{6x+1}}{x^2}$ **8.45** $y=\sqrt[4]{1+\sin^2 x}$

8.46 $y=ctg^3x-3ctgx+3x$ **8.47** $y=\sin^4 x+\cos^4 x$

8.48 $y=\dfrac{(x-3)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-4)^{11}}}$ **8.49** $y=x^{\frac{1}{\ln x}}$

Quyidagi berilgan funksiyalarni ikkinchi tartibli hosilalarini hisoblang

8.50 $y=\sin^2 x$ **8.51** $y=-\dfrac{3}{x^2-5}$

8.52 $y=tgx$ **8.53** $y=ctgx$

8.54 $y=\sqrt{1+x^2}\cdot arctgx.$ **8.55** $y=arctgx$

Berilgan funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli differensalini hisoblang

8.56 $y=arctgx$ **8.57** $y=tgx$

8.58 $y=\sin 2x+\cos x$ **8.59** $y=\ln x^2$

8.60 $y=e^{x^2-2x}+tg2x.$

Lopital qoidasidan foydalanib quyidagi limitlarni hisoblang

8.61 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(x+1)}$ **8.62** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{tg\dfrac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$

8.63 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$ **8.64** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 3x}$

Funksiyalarni monotonlik oraliqlarini toping.

8.65 $y=x^3+2x-3$ **8.66** $y=x\left(1+\sqrt{x}\right)$

8.67 $y=2-sinx,\quad 0\le x\le 2\pi.$

Funksiyaning ekstremumlarini toping.

8.68 $y=\dfrac{x^2-4x}{x-2}$ **8.69** $y=\dfrac{\ln x}{x}$

8.70 $y=x\sqrt{4-x^2}$ **8.71** $y=x-cosx$

Funksiyaning qavariq va botiqlik oraliqlarini toping.

8.72 $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$ **8.73** $y=3x^4+4x^3+1$

8.74 $y=\dfrac{x^4}{4}-2x^2-\dfrac{9}{4}$ **8.75** $y=\ln\dfrac{x}{x+5}-1$

8.76 $y=x\ln x$ **8.77** $y=x-\ln x$

8.78 Berilgan funksiyalarni hosilasini hisoblang va absissasi x_0 nuqtadan o`tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

Variant	$f(x)$ funksiya va x_0 nuqta	Variant	$f(x)$ funksiya va x_0 nuqta
1	$f(x)=x^3+3x^2-6x+4,\ x_0=1.$	16	$f(x)=e^{2x-4}+2\ln x,\ x_0=2.$
2	$f(x)=2x^2+5x+2,\ x_0=-2.$	17	$f(x)=x-\cos x,\ x_0=\dfrac{\pi}{4}.$
3	$f(x)=x^4+3x^2-5x-7,\ x_0=-1.$	18	$f(x)=x-\sin x,\ x_0=\dfrac{\pi}{4}.$

4	$f(x)=x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}-6$, $x_0=4$.	19	$f(x)=x^2+\ln(x-1)$, $x_0=2$.
5	$f(x)=2^{-x}+2^{-2x}$, $x_0=2$.	20	$f(x)=x^2+3x+2$, $x_0=0$.
6	$f(x)=3^{-x}+3^{x}$, $x_0=2$.	21	$f(x)=\ln x$, $x_0=e$.
7	$f(x)=\dfrac{x+3}{3-x}$, $x_0=4$.	22	$f(x)=\log_4^{(3x-4)}$, $x_0=2$.
8	$f(x)=x^2+\ln x$, $x_0=e$.	23	$f(x)=\log_3^{(2x-1)}$, $x_0=2$.
9	$f(x)=\cos 3x+5x$; $x_0=\pi/3$	24	$f(x)=\cos 3x$, $x_0=\dfrac{\pi}{6}$.
10	$f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=2$.	25	$f(x)=\dfrac{2x+3}{4x-11}$, $x_0=3$.
11	$f(x)=\sin 2x-\ln(x+1)$, $x_0=0$.	26	$f(x)=-\log_5^{x^2+2x+6}$, $x_0=-1$.
12	$f(x)=4\sqrt{x}$, $x_0=3$.	27	$f(x)=9-x^2$, $x_0=2$.
13	$f(x)=\sin x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.	28	$f(x)=4\ln x-3x$, $x_0=4$.
14	$f(x)=e^x+x^2$, $x_0=1$.	29	$f(x)=\sin x+\cos 2x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.
15	$f(x)=3^x+x^{-3}$, $x_0=2$.	30	$f(x)=\dfrac{5x-1}{3x-5}$, $x_0=2$.

8.79 Quyida berilgan funksiyalar hosilalarini differensiyalash qoidalari va formulalardan foydalanib hisoblang

Variant	Funksiya	Variant	Funksiya
1	$y=x^2\sin 2x$	16	$y=arctg\sqrt{1+e^{-x^2}}$
2	$y=e^{4x}tg2x$	17	$y=(\sin 2x)^{\cos 4x}$
3	$y=\sqrt[3]{x^3+\sin^3 x}$	18	$y=(x^2+1)^{ctg2x}$
4	$y=\sqrt{x^2+1}\cdot ct^2 3x$	19	$y=\dfrac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$
5	$y=3^{-\cos^3 3x}$	20	$y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$
6		21	

	$y=e^{-\arcsin\sqrt{x}}$		$y=x^2\sqrt{1-x^2}$
7	$y=\left(3x^3-ctg^4x\right)^3$	22	$y=\dfrac{\sqrt{4x+1}}{x^2}$
8	$y=\ln^3\left(\sqrt{x}-2^{-x^2}\right)$	23	$y=\sin^4x+\cos^4x$
9	$y=\ln tg\sqrt{x}$	24	$y=\sqrt[4]{1+\cos^2x}$
10	$y=e^{-\sqrt{x^2-3x+3}}$	25	$y=\dfrac{\sin^2x}{\cos x}$
11	$y=sh^2x^3$	26	$y=tg^3x-3tgx+3x$
12	$y=arctg\sqrt{1+x^2}$	27	$y=\dfrac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}$
13	$y=\left(2^{x^3}-tg^4 2x\right)^3$	28	$y=2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$
14	$y=x^3th^3x$	29	$y=\sin^4x+3\cos 2x-\cos^4x$
15	$y=\lg^4\left(x^5-\sin^5 2x\right)$	30	$y=\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$

8.80 Lopital qoidasidan foydalanib quyidagi limitlarni hisoblang

Variant	Funksiya	Variant	Funksiya
1	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-7x^2+4x+2}{x^3-5x+4}$	16	$\lim\limits_{x\to0}(\sin x)^x$
2	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-\sin x}{x-\sin x}$	17	$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{x-\pi}$
3	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 3x}$	18	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+3x^2-2}{x^3-4x^2+5}$
4	$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$	19	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^{\frac{x}{2}}}{\ln(1+x)}$

5	$\lim\limits_{x\to 0} tgx\cdot\ln x$	20	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}$
6	$\lim\limits_{x\to 0}(tgx)^{\sin x}$	21	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$
7	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$	22	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}$
8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$	23	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1/x}$
9	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{tg\dfrac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$	24	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x}{x}$
10	$\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot ctgx$	25	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ctg(x-1)}{\ln(1-x)}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$	26	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\ln(x-5)}{\ln(e^x-e^5)}$
12	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$	27	$\lim\limits_{x\to\infty}(xe^{-x})$
13	$\lim\limits_{x\to\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$	28	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$
14	$\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x$	29	$\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\cdot ctgx)$
15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$	30	$\lim\limits_{x\to 1}\left((1-x)\cdot tg\dfrac{\pi x}{2}\right)$

8.81 Berilgan funksiyalarni ekstremumlarini toping.

Variant	Funksiya	Variant	Funksiya
1	$y=3\left(\dfrac{x^4}{2}-x^2\right)$	6	$y=x^4+8x^3+16x^2$
2	$y=x^3-9x^2+24x-15$	7	$y=x^4+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4$
3	$y=x^5-\dfrac{5}{3}x^3$	8	$y=\dfrac{1}{10}(2x^3-6x^2-18x+15)$
4	$y=2x^3+3x^2-12x-5$	9	$y=1-x^2-\dfrac{x^4}{8}$
5	$y=(x-3)^2(x-2)$	10	$y=-4x+x^3$

11	$y=\frac{x-1}{x^2-2x}$	21	$y=\frac{e^{x-1}}{x-1}$
12	$y=\frac{2-4x^2}{1-4x^2}$	22	$y=(x-2)e^{3-x}$
13	$y=\frac{2x^2}{4x^2-1}$	23	$y=2^{x^3-3x^2}$
14	$y=\frac{2x+1}{x^2}$	24	$y=\frac{\ln x}{x}$
15	$y=\frac{x^3-1}{4x^2}$	25	$y=3^{x^3}\cdot e^{-x}$
16	$y=\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$	26	$y=\frac{e^{3-x}}{3-x}$
17	$y=\frac{x^3+16}{x}$	27	$y=(4-x)e^{x-3}$
18	$y=\frac{4x}{(x+1)^2}$	28	$y=x\sqrt{4-x^2}$
19	$y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$	29	$y=\ln\sqrt{2x^2+4x+3}$
20	$y=\frac{4}{x^2+2x-3}$	30	$y=x^2\cdot e^{1/x}$

Iqtisodiyotda differensial hisobning qo`llanilishi

1. *Chegaraviy kattaliklar*. Hosilaning iqtisodiyotda qo`llanishi iqtisodiy ob’ekt yoki jarayonlarning chegaraviy xarakteristikasini olish imkonini beradi. Chegaraviy kattaliklar iqtisodiy ob’ektlarning holatini emas, balki vaqt bo`yicha yoki boshqa tekshirilayotgan faktorga nisbatan o`zgarish tezligini xarakterlaydi.

2. *Ishlab chiqarish xarajatlari*. Agar ishlab chiqarishning xarajat funksiyasi y ni ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori x ning funksiyasi sifatida qaralsa, ya’ni $y=C(x)$ u holda, $y'=C'(x)$ ishlab chiqarishning chegaraviy xarajatini ifodalaydi va taxminan bir birlik qo`shimcha mahsulot ishlab chiqarish uchun sarflanadigan o`zgaruvchan xarajatni o`sishini xarakterlaydi. O`rtacha xarajat bir birlik mahsulot ishlab chiqarishga sarflanadigan xarajatdir. Ya’ni:

$$y=\frac{C(x)}{x}$$

3. *Iste'mol va jamg'arma funksiyasi*. Agar x milliy daromad, $C(x)$ iste'mol funksiyasi (daromadning sarflanadigan qismi), $S(x)$ - jamg'arma funksiyasi bo`lsa, u holda

$$x = C(x) + S(x)$$

bo`ladi. Uni $x$ bo`yicha differensiallab:

$$\frac{dC}{dx} + \frac{dS}{dx} = 1$$

tenglamani hosil qilamiz, bu yerda $\frac{dC}{dx}$ iste'molga bo`lgan chegaraviy moyillik; $\frac{dS}{dx}$ jamg'armaga bo`lgan chegaraviy moyillik.

4. *Elastiklik*. Bir o`zgaruvchan kattalikni boshqasining o`zgarishiga ta'sirchanlik o`lchovidir. Funksiyaning elastikligi bitta o`zgaruvchining 1% ga o`zgarishi natijasida boshqa o`zgaruvchi necha foizga o`zgarishini ko`rsatadi. Funksiyaning elastikligi quyidagi munosabat bilan aniqlanadi:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'_x \quad \text{yoki} \quad E_x(y) = x \cdot T_y$$

bu yerda $T_y = (\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'_x$ – funksiyaning nisbiy o`zgarish tezligi (tempi, sur'ati).

Funksiyaning elastikligi narxga bog'liq bo`lgan talab va taklifning tahlilida qo`llaniladi. U talab va taklifni, narxning o`zgarishiga ta'sirini ko`rsatadi va narx 1% ga o`zgarganda talab va taklif taxminan qanday foizga o`zgarishini ko`rsatadi. Agar $|E_x(y)| > 1$ bo`lsa, u holda talab elastik, agar $|E_x(y)| = 1$ bo`lsa, birlik elastik (neytral), agar $|E_x(y)| < 1$ bo`lsa,talab noelastik bo`ladi.

8.82 Firmaning mahsulot ishlab chiqarishga sarflanadigan xarajat funksiyasi quyidagicha:

$$y(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}2x^2 + 5x + 250 \qquad (pul\ birlik)$$

Ishlab chiqarishning o`rta va chegaraviy xarajatini toping va uning x = 10 dagi qiymatini toping.

Yechish. Funksiyaning $y'(x)$ hosilasini va uning x = 10 da $y'(10)$ qiymatini topamaiz. Ishlab chiqarishning chegaraviy xarajatlari: $y'(x) = 0{,}3x^2 - 2{,}4x + 5, \quad y'(10) = 30 - 24 + 5 = 11$

O`rtacha xarajatlar: $y = \frac{y(x)}{x} = \frac{0{,}1x^3 - 1{,}2x^2 + 5x + 250}{x} = 0{,}1x^2 - 1{,}2x + 5 + \frac{250}{x}$.

$y = \frac{y(10)}{10} = 10 - 12 + 5 + 25 = 28$ bu berilgan ishlab chiqarish darajasida bir birlik mahsulot ishlab chiqarishga sarflanadigan o`rtacha xarajatdir. Funksiya orttirmasini taqribiy hisoblash formulasiga ko`ra $\Delta C \approx dC = C'(x)\Delta x,\ C'(10)$ kattalikni shunday ifodalash mukin: agar 10 ta mahsulot ishlab chiqarilgan bo`lsa, u holda o`n birinchi mahsulot ishlab chiqarish bo`yicha qo`shimcha xarajatlar taxminan $C'(10)$=9 ga teng.

8.83 Mamlakatning iste'mol funksiyasi $C(x) = 10 + 0{,}47x + 0{,}36x^{3/4}$ bu yerda x – jami milliy daromad (pul birligida) iste'molga bo`lgan chegaraviy moyillikni;

a) agar milliy daromad 15 milliard p/b. bo`lsa, jamg`armaga bo`lgan chegaraviy moyillikni toping.

8.84 To`g`ri to`rtburchak shaklidagi $2{,}4 \times 1{,}5 m^2$ kartondan qopqoqsiz quti yasash talab qilinadi. Kartonning to`rttala burchagidan tomoni qanday bo`lgan kvadrat kesib olinganda, yasalgan qutining hajmi maksimal bo`ladi.

8.85 Agar erta pishar kartoshka terimini avgustning boshida boshlansa, u holda har bir sotihdan 200 kg dan hosil olish mumkin va har bir kilogrami 12 p/b. dan sotiladi. Terimni bir haftaga kechiktirish har sotihdan 50 kg dan hosildorlikni oshiradi, lekin narx har hafta 2 p/b. ga arzonlashadi. Agar terim muddati 5 hafta bo`lsa, kartoshkani sotishdan olinadigan foyda eng ko`p bo`lishi uchun hosilni qaysi haftada yig`ib olish kerak.

8.86 Korxona ishlab chiqarayotgan mahsulot narxi p va unga bo`lgan talab $q$ orasidagi bog`lanish $q = 18 - \sqrt{p}$ tenglik bilan ifodalangan. Talabning elastikligini toping. Narxning qanday qiymatlarida talab elastik, neytral va noelastik bo`ladi. Narx p = 100; p = 150 pul birligi bolganda korxona rahbarlariga bir birlik tovar narxi haqida qanday maslahatlar berish mumkin?

8.87 Konfet sotishdan kelgan daromad $R = 50x - 0{,}5x^2$, bu yerda x – sotilgan mahsulot hajmi (birligi minglarda). Agar: *a*) 10 ming birlik; *b*) 60 ming birlik mahsulot sotilgan bo`lsa, o`rta va chegaraviy daromadni toping.

8.88 Ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori x ning xarajat funksiyaga bog`liqligi $y = 100x - 0{,}2x^3$ ko`rinishida berilgan. Mahsulot hajmi 10 birlik bo`lganda o`rtacha va chegaraviy xarajatni aniqlang.

8.89 Mahsulotning tannarxi y va ishlab chiqailayotgan mahsulot hajmi x orasidagi bo`glanish $y = 6\ln(1 + 3x)$ tenglama bilan ifodalangan. Ishlab chiqarilayotgan hajmi 10 birlik bo`lganda o`rtacha va chegaraviy tannarxni aniqlang.

8.90 Brigadaning mehnat unumdorligi $y = -2{,}5t^2 + 15t + 100$ tenglama bilan berilgan. Bu yerda $0 \le t \le 8$ – ish vaqti (soatlarda). Mehnat unumdorligining t = 2 va t = 7 da tezlik va temp o`zgarishini aniqlang.

8.91 Mamlakatning iste’mol funksiyasi $C(x) = 13 + 0{,}25x + 0{,}37^{\frac{4}{5}}$, bu yerda x – jami milliy daromad. *a*) iste’molga bo`lgan chegaraviy moyillikni; *b*) agar milliy daromad 32 ga teng bo`lsa, jamg`armaga chegaraviy moyillikni toping.

8.92 Mamlakatning jamg`arma funksiyasi $S(x) = 25 - 0{,}53x - 0{,}41x^{\frac{2}{3}}$, bu yerda $x$ jami milliy daromad. Topish kerak: *a*) iste’molga chegaraviy moyillik; *b*) agar milliy daromad 27 bo`lsa, jamg`armaga chegaraviy moyillik.

8.93 Korxonaning tayyor mahsuloti tannarxi y (mln so`m) va mahsulot hajmi orasidagi bog`lanish $y = \sqrt{x + 4} - 2$ tenglama bilan ifodalanadi. Korxona 12 ming dona mahsulot ishalab choqargandagi narxning elastikligini toping. Korxona rahbarlariga ishlab chiqarilayotgan mahsulot miqdorini o`zgartirish haqida qanday maslahatlar berish mumkin.

8.94 Tarmoqning korxonalari uchun ishlab chiqarilayotgan partiyadagi detallar miqdori x (ming birlik) va ularni tayyorlashga ketgan xarajat y (ming so`m) $y = \dfrac{27}{x} + 6$ tenglama bilan ifodalanadi. Partiyada 10 ming donadan detal ishlab chiqarayotgan korxonalar uchun xarajat elastikligini toping.

8.95 Talab funksiyasining berilgan narxdagi elastikligini toping.

a) $q + 10p = 50,\ \ p = 3;$

b) $5q + 3p = 70,\ \ p = 70;$

c) $p^2 + p + 4q = 26,\ \ p = 2\ va\ \ p = 4.$

8.96 Quyidagi talab funksiyalar uchun, talab elastik bo`ladigan p ning qiymatlarini toping:

a) $2p + 3q = 12$; *b*) $q = 50(15 - \sqrt{p})$; *c*) $q = \sqrt[3]{3600 - p^3}$

8.97 Tovarga bo`lgan talab va taklif funksiyalarining narx $x$ ga bog`liqligi $q=\frac{20+x^2}{1+10x}$,

$S=\frac{2{,}5-x+4x^2}{1+10x}$ tenglamalar bilan berilgan. Topish kerak:

a) muvozanat narxni;

b) talab va yaklifning muvozanat narxdagi elastikligi;

c) muvozanat natx 5% ga o`zgarganda daromadning o`zgarishini.

8.98 Tunika bo`lagidan silindr shaklidagi to`la sirti S bo`lgan qopqoqli chelak yasash talab qilinadi. Maksimal hajmdagi chelakning o`lchamlari qanday bo`lishi kerak?

8.99 Bir tomoni devor bilan o`ralgan to`g`ti to`rtbuchakli yuzani o`rash talab qilinadi. Devorga parallel tomonni o`raydigan panjaraning har bir metrining narxi 60 p/b.; qolgan ikkita tomonini o`raydigan panjaraning har bir metri esa 90 p/b. turadi. 10 800 p/b. ga ega bo`la turib, qanday maksimal yuzani o`rab olish mumkin.

8.100 To'g'ri to'rt burchakli sohani panjara bilan o'rash talab qilinadi. Kichik tomonga parallel to'siq bilan ajratilgan. Tashqarini o'raydigan panjaraning metri 900p.b, ichkarini o'raydigan panjaraning metri 1600p.b maydonning yuzasi esa 153m^2 bo'lsa, o'rash narxini minimallashtiradigan maydon o'lchamlarini toping.

8.101 tovarga bo'lgan talab $P=-Q^2+20Q+2$, $(10<Q<20)$ uni ishlab chiqarishga ketadigan xarajat funksiyasi $TC=4+15Q$ ko'rinishida bo'lsa, foyda maksimal bo'ladigan mahsulot miqdorini va narxini aniqlang.

Mavzu yuzasidan savollar

1. Hosilaning ta'rifi: geometrik ma'nosi, iqtisodiy ma'nosi, mexanik ma'nosi.
2. Quyidagi tasdiqlardan qaysi biri to`g`ri

   a) agar funksiya biror nuqtada uzluksiz bo`lsa, u holda shu nuqtada funksiya differensiallanuvchi bo`ladi.

   b) agar funksiya biror nuqtada differensiallanuvchi bo`lsa, u holda shu nuqtada funksiya uzluksiz bo`ladi.
3. Elementar funksiyalarning hosilalari jadvalini yozing.
4. Murakkab, teskari, oshkormas ko`rinishdagi, parametrik ko`rinishdagi funksiyalarning xosilalari.
5. Funksiyaning differensiali deb nimaga aytiladi?
6. O`rta qiymat haqidagi teoremalar:
   a) Ferma teoremasi.
   b) Roll teoremasi.
   c) Lagranj teoremasi.
   d) Koshi teoremasi.
   e) Lopital teoremasi.
7. Hosilaning iqtisodiyotda qo`llanilishi.
8. O`suvchi va kamayuvchi funksiyalar ta'riflari.
9. Funksiyaning ekstremumi nima va u qanday topiladi.
10. Ekstremumning zaruriy shartlari.
11. Ekstremumning yeterli shartlari.
12. Funksiyaning qavariq va botiqliligi, bukulish nuqtalari qanday topiladi?
13. Funksiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari qanday topiladi?
14. Funksiya qanday sxema bilan tekshirilib, grafigi chiziladi?

Adabiyotlar

43. Sh.Shorahmetov, B.Naimjanov, «Iqtisodchilar uchun matematica», - T.: «Fan va texnologiya»., 2007 y.

44. Клименко Ю.И. “Высшая математика для экономистов теория, примеры и задачи”. М.: Экзамен 2005 г.
45. М.С.Красс, Б.П.Чупырнов. “Основы высшей математики и ее приложения в экономическом образовании”, - М.: Дело, 2000 г.
46. Кремер Н.М. и другие. – “Высшая математика для экономистов”, - М.: 2004 г.
47. «Сборник задач по высшей математике для экономистов» под редакцией В.И.Ермакова. М.: Инфра – М, 2003 г.
48. T.A.Azlarov, H.Mansurov “Matematik analiz”, Toshkent, 2006 y.
49. Соатов Ё.У. “Олий математика”, Т.: Укитувчи, 1-жилд, 2-жилд, 1994 й., 3-жилд, 1996 й.
50. “Общий курс высшей математики для экономистов”. Под редакцией В.И.Ермакова. – М.: ИНФРА – М, 2006 г.
51. “Высшая математика для экономистов”. под редакцией Н.Ш.Крамера. – М.: ЮНИТИ, 2006 г.
52. М.С.Красс, Б.П.Чупрынов “Математика для экономического бакалавриата”, - М.: Дело, 2006 г.
53. В.С.Шипачев “Курс высшей математики”, М.: Проспект, 2005 г.
54. Замков О.О., Толстоптенко А.Б., Черемных Ю.Н. “Математические методы в экономике”, - М.: ДИС 2004 г.
55. Коршанова Н., Плясунов В. “Математика в экономике”, - М.: Вита пресс, 2004 г.
56. М.С.Красс “Математика для экономических специальностей”, - М.: 2004 г.
57. Кремер Н.М. и другие. – “Высшая математика для экономистов”, - М.: 2004 г.
58. Минорский И.П., “Сборник задач по высшей математике” – М.: 2004г.
59. Масагутова Р.В. “Математика в задачах для экономистов” – Т. Укитувчи 1996 й.
60. Sh.I.Tojiyev “Oily matematikadan masalalar yechish” Toshkent “O’zbekiston”, 2002y.
61. Шапкин А.С. «Задачи с решениями по высшей математике теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию» - М.: 2008г.
62. Макаров С.И., Мищенко М.В., «Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики» Н.: 2008г.
63. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. «Основы математики и ее приложения в экономическом образовании» -М.: 2008
64. Ермаков В.И. «Общий курс высшей математика для экономистов». –Н: 2010г.
65. Ермаков В.И. «Общий курс высшей математика для экономистов». –Н: 2010г.

9. Ko`p o`zgaruvchili funksiyalar

9.1 Ko`p o`zgaruvchili funksiya va uning berilish usullari

Agar biror D to`plamning har bir $(x, y)$ haqiqiy sonlar juftligi biror qoida bilan $Z$ to`plamdagi yagona z haqiqiy songa mos qo`yilgan bo`lsa, u holda D to`plamda ikki o`zgaruvchining funksiyasi z aniqlangan deyiladi va quyidagi ko`rnishlarda belglanadi:

$$z = f(x, y),\ z = Z(x, y),\ z = F(x, y), \text{ va h.k.}$$

Bu yerda x va y erkli o`zgaruvchilar yoki argumentlar, $z$ esa erksiz o`zgaruvchi yoki funksiya deb ataladi. D - to`plam bu funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi. $Z$ - to`plam funksiyaning o`zgarish sohasi deyladi.

$z=f(x, y)$ funksiyaning argumentlarining tayin $x = x_o$ va $y = y_0$ qiymatlarida qabul qiladigan z_0 xususiy qiymatini topish quyidagicha yoziladi :

$$z_0=z\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \text{ yoki } z_0=f(x_0, y_0).$$

Geometrik nuqtai nazardan $z=f(x, y)$ funksiyaning O_{xyz} to`g`ri burchakli koordinatalar sistemasidagi tasviri (funksiyaning grafigi) biror sirtdan (nuqtalar to`plamidan) iborat.

9.1 $z=\sqrt{4+4x+2y-x^2-y^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish.

$z=\sqrt{4+4x+2y-x^2-y^2}=\sqrt{9-(4-4x+x^2)-(1-2y+y^2)}=\sqrt{9-(x-2)^2-(y-1)^2}$

Demak $9-(x-2)^2-(y-1)^2\geq 0$, ya`ni $(x-2)^2+(y-1)^2\leq 9$ shartda berilgan funksiya haqiqiy qiymatlar qabul qiladi. Demak, funksiyaning aniqlanish sohasi markazi (2; 1) nuqtada, radiusi 3 ga teng bo`lgan doiradan, o`zgarish sohasi esa $[0,3]$ sohadan iborat.

Istalgan chekli sondagi o`zgaruvchining funksiyasi ham yoqoridagidek aniqlanadi $n$ o`zgaruvchili funksiyasining aniqlanish sohasi n ta haqiqiy sonning $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sistemasidan tuzilgan D to`plamdan iborat bo`ladi, n ta o`zgaruvchining funksiyasi quyidagicha belgilanadi.

$$y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ y=y(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

9.2 Funksiyalarning aniqlanish sohasini toping va grafigini chizing:

a) $z=x^2+y^2$; *b*) $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

Quyida berilgan funksiyalarni aniqlanish sohasini toping va garafigini chizing.

9.3 $z=x+y$ **9.4** $z=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$

9.5 $z=\sqrt{xy}$ **9.6** $z=y\sqrt{x}$

9.7 $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$ **9.8** $z=\arcsin(x+y)$

9.9 $z=\ln(x^2+y^2+z^2-1)$ **9.10** $u=\sqrt{x+y+z}$

9.2 Ko`p o`zgaruvchili funksiya limiti

Agar ikki o`zgaruvchining $z=f(x,y)=f(P)$ funksiyasi $P_0=P(x_0;y_0)$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo`lsa va $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topilsaki $d(P;\ P_0)<\delta$ (d – ikki nuqta orasidagi masofa) tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $P(x,y)$ nuqtalar uchun

$$|f(x;y)-A|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda A o`zgarmas son $z=F(x,y)$ funksiyaning $P_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi limiti deyiladi. $A$ sonining $z=f(x,y)$ funksiyaning $P(x,y)\to P(x_0,y_0)$ dagi limiti bo`lishi quyidagicha yoziladi

$$\lim_{p\to p_0} y=A \text{ yoki } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

Uch va undan ortiq o`zgaruvchining limiti ta`rifi shunga o`xshash kiritiladi.

Agar bir necha o`zgaruvchi funksiyasining limiti nolga teng bo`lsa, u holda u cheksiz kichik deb ataladi. Bir o`zgaruvchining funksiyasi uchun limitlar haqidagi barcha asosiy teoremalar bir necha o`zgaruvchining funksiyasi uchun ham o`rinlidir.

9.11 Quyidagi limitni hisoblang.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Yechish. x va y nuqtalar orasidagi masofa $p=\sqrt{x^2+y^2}$ ($p=\sqrt{x^2+y^2}$ deb belgilash kiritamiz). $x\to 0$, $y\to 0$ dan $\rho\to 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{p\to 0}\dfrac{\ln(1-p^2)}{p}=\lim\limits_{p\to 0}\dfrac{(\ln(1-p^2))'}{p'}=\lim\limits_{p\to 0}\dfrac{\frac{1}{1-p^2}\cdot(-2p)}{1}=0$

Limitga ega bo`lgan ikki o`zgaruvchili funksiyalarning bir necha xossalarini keltirib o`tamiz:

1) Agar $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ limit mavjud va chekli bo`lsa, u holda $f(x, y)$ funksiya $(x_0,y_0)$ nuqtaning etarlicha kichik atrofda chegalangan bo`ladi.

2) Agar $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=B$ limitlar mavjud bo`lsa, u holda $f(x, y)\pm g(x, y)$ funksiyaning ham limiti mavjud va $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}[f(x,y)\pm g(x,y)]=A\pm B$. bo`ladi.

3) Agar $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=B$ limitlar mavjud bo`lsa, u holda $f(x, y)\cdot g(x, y)$ funksiyaning ham limiti mavjud va $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}[f(x,y)\cdot g(x,y)]=A\cdot B$ bo`ladi.

4) Agar $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=B$ limitlar mavjud bo`lib, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)\neq 0$ bo`lsa, u holda $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ funksiya ham limtga ega va $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{A}{B}$ bo`ladi.

Ikki o`zgaruvchili funksiyaning limitini hisoblash bir o`zgaruvchili funksiyani limitini hisoblashga qaraganda ancha murakkab. Buni sababi to`g`ri chiziqda faqat ikkita yo`nalish bor, argument limit nuqtaga faqat ikki tarafdan o`ng va chapdan intiladi. Tekislikda bunday yo`nalishlar cheksiz ko`p va funksiyaning limiti turli yo`nalishlar bo`yicha usma – ust tushmasligi mumkin.

9.12 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ limit mavjud emasligini isbotlang.

9.13 Limitlarni hisoblang

$a)\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{y}$, $b)\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\left(x^2+y^2\right)e^{-(x+y)}$, $c)\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$, $d)\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$, $e)\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^{-3x})}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Yechish. $a)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{xy}{x}=\lim\limits_{y\to a} y=a,$ $b)$ $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\left(x^2+y^2\right)e^{-(x+y)}=\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{\left(x^2+y^2\right)}{e^{(x+y)}}=0,$

$c)$ $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}} e^{\frac{x}{x+y}}=\lim\limits_{y\to a} e^1=e,$ $\qquad d)\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{\pi}{2}=1,$

$e)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^{-3x})}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1+0}}=\ln 2$.

Limitlarni hisoblang

9.14 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(xy\sqrt{1+xy})$

9.15 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^3}{x^3+y^3}$

9.16 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}\dfrac{\sin(x+y)}{x+y}$

9.17 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}[xy\cdot\ln xy]$

9.18 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+2y)e^{\frac{1}{x}}$

9.19 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{x-y}{x^3-y^2}$

9.20 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to+0}} \frac{x^y}{1+x^y}$

9.21 $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ y\to\infty}} \frac{1}{xy} tg \frac{xy}{1+xy}$

9.22 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$

9.23 $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ y\to0}} \log_x (x+y)$

9.3 Funksiyaning uzluksizligi

$z = f(x, y)$ funksiya M to`plamda berilgan bo`lib (x_0, y_0) nuqta shu M to`plamning limit nuqtasi bo`lsin.

Agar

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \qquad (9.1)$$

bo`lsa, u holda $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Agar ixtiyoriy $E > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $d\,\{(x, y), (x_0, y_0)\} < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $(x, y) \in M$ nuqtalar uchun $|f(x, y) - f(x_0, y_0| < E$ bo`lsa, u holda $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Agar $f(x, y)$ funksiya M to`plamanng har bir nuqtasida uzluksiz bo`lsa, u holda funksiya shu M to`plamda uzluksiz deyiladi.

Agar argument orttirmalari Δx va Δy nolga intilganda funksiyaning to`liq orttirmasi $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ ham nolga intilsa, ya`ni $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0 \\ \Delta y\to0}} (\Delta f(x_0, y_0) = 0$ bo`lsa, u holda $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz deb ataladi.

9.24 $f(x, y) = x^2 + y^2$ funksiyaning uzluksizligini tekshiring.

Yechish. $(x_0;\, y_0)$ nuqtani hamda $(x_0 + \Delta x;\, y_0 + \Delta y)$ ni olib, funksiyaning to`liq orttirmasini hisoblaymiz :

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x_0;\, y_0 + \Delta y_0) - f(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x_0)^2 + (y_0 + \Delta y_0)^2 - x_0^2 - y_0^2 =$$
$$= 2\Delta x\cdot x + \Delta x^2 + 2\Delta y\cdot y + \Delta y^2 = \Delta x(2x + \Delta x) + \Delta y(2y + \Delta y).$$

bundan esa $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0 \\ \Delta y\to0}} (\Delta f(x_0, y_0) = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to0 \\ \Delta y\to0}} (\Delta x(2x + \Delta x) + \Delta y(2y + \Delta y) = 0$ ekanligini topamiz. Yuqoridagi tariflarga ko`ra $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz.

Ikki o`zgaruvchili uzluksiz funksiyalarning bazi xossalari:

$f(x, y)$ va $g(x, y)$ funksiyalar M to`plamda berilgan bo`lib, $(x_0;\, y_0) \in M$ bo`lsin:

1) Agar $f(x, y)$ va $g(x, y)$ funksiyalarning har biri $(x_0;\, y_0)$ nuqtada uzluksiz bo`lsa, u holda $f(x, y) \pm g(x, y)$ funksiya ham shu $(x_0;\, y_0)$ nuqtada uzluksiz bo`ladi.

2) Agar $f(x, y)$ va $g(x, y)$ funksiyalarning har biri $(x_0;\, y_0)$ nuqtada uzluksiz bo`lsa, u holda $f(x)\cdot g(x)$ funksiya ham $(x_0;\, y_0)$ nuqtada uzluksiz bo`ladi.

3) Agar $f(x, y)$ va $g(x, y)$ funksiyalarning har biri $(x_0;\, y_0)$ nuqtada uzluksiz bo`lib, $g(x_0;\, y_0) \neq 0$ bo`lsa, u holda $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya ham shu $(x_0; y_0)$ nuqtada uzluksiz bo`ladi.

4) Agar $f(x, y)$ funksiya chegaralangan yopiq M to`plamda uzluksiz bo`lsa, u holda funksiya shu to`plamda chegaralangan bo`ladi.

9.25 Funksiyani $M_0(1;\, 1)$ nuqtada uzluksizlikka tekshiring. $z = x^5 y + 10x^2\sqrt{y}$.

9.26 Funksiyani $(0;\, 0)$ nuqtada uzlusizlikka tekshiring. $z = \frac{x+y}{x-y}$.

9.4. Xususiy hosilalar

$z = f(x, y)$ funksiya M to`plamda berilgan bo`lsin. Bu M to`plamda $(x_0; y_0)$ va $(x_0+\Delta x; y_0)$ nuqtalarni olib, bu nuqtalardagi funksiya qiymatlari ayirmasini hisoblaymiz:

$$f(x_0+\Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)$$

Bu ayirma $f(x, y)$ funksiyaning $(x_0; y_0)$ nuqtadagi x o`zgaruvchi bo`yicha xususiy orttirmasi deyiladi va $\Delta_x f(x_0; y_0)$ kabi belgilanadi: $\Delta_x f(x_0; y_0) = f(x_0+\Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)$.

Xuddi shunga o`xshash $\Delta_y f(x_0; y_0) = f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0; y_0)$ ayirma $f(x, y)$ funksiyaning $(x_0; y_0)$ nuqtadagi $y$ argument bo`yicha xususiy orttirmasi deyiladi.

Agar $\Delta x\to 0$ da

$$\frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} \qquad (9.2)$$

nisbatning limiti mavjud va chekli bo`lsa, bu limit $f(x, y)$ funksiyaning $(x_0; y_0)$ nuqtadagi $x$ argument bo`yicha xususiy hosilasi deb ataladi va $\partial f(x_0; y_0)/(\partial x)$ yoki $f'_x(x_0; y_0)$ qisqacha qilib $(\partial f)/(\partial x)$ yoki $f'x$ kabi belgilanadi

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \qquad (9.3)$$

Xuddi shunga o`xshash $\Delta y\to 0$ da

$$\frac{\Delta_y f(x_0; y_0)}{\Delta y} \qquad (9.4)$$

nisbatning limiti mavjud va chekli bo`lsa, bu limit $f(x, y)$ funksiyaning $(x_0; y_0)$ nuqtasidagi $y$ argument bo`yicha xususiy hosilasi deb ataladi va qisqacha qilib $(\partial f)/(\partial y)$ yoki f_y kabi belgilanadi

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \qquad (9.5)$$

9.27 Funksiyaning xususiy hosilalarini hisoblang $f(x, y)=x^y$

Yechish. $(\partial f)/(\partial x) = \left(x^y\right)'_x = y\cdot x^{y-1}$, $(\partial f)/(\partial y) = \left(x^y\right)'_y = x^y \ln x$.

9.28 Funksiyalarning $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *va* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ xususiy hosilalarini toping. $z = x^2 + 3x\sqrt{y} - y + \dfrac{y^2}{x}$.

9.29 $z = xy\cdot e^{x^2-y^2}$.

9.30 Funksiyaning birinchi tartibli xususiy hosilalarini hisoblang.

a) $u = 2x^2y + 3x^3y^2 + xyz^5$; *b*) $u = z^{xy}$; *c*) $u = x^y + y^x$.

9.31 Funksiyalarning xususiy hosilalarini toping.

1. $z = 2x^2 - xy^2 + 3x^2y - 2y^3 + 3x - 4y + 1$ 2. $u = yx^3 + xz^2 + y^2z$

3. $u = s^3\cos 4t$ 4. $z = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y}{x^2}$

5. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ 6. $z = \dfrac{xy}{x+y}$

7. $u = e^{xyz}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ 8. $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{-\frac{z}{y}}$

9. $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$ 10. $z = xye^{x+2y}$

11. $z = \ln(x + \ln y)$ 12. $z = e^{3x^2+2y^2-xy}$

13. $u = e^{\frac{z}{xy}} tg\left(\dfrac{x}{y+z}\right)$ 14. $z = \arcsin\sqrt{xy}$

15. $z = e^{x-y}(2x-1)$ 16. $z = \sin\left(x + \sqrt{y}\right)$

17. $z = xe^{y} + x^{y}$ 18. $z = \ln\sqrt{x + y^2}$

19. $z = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$ 20. $z = x^{\sqrt{y}}$

21. $z = arctg\left(\dfrac{y}{x} + 1\right)$ 22. $z = xye^{xy}$

23. $z = \dfrac{\cos y^2}{x}$ 24. $z = \arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

25. $z = (5x+3y)(12x-7y)$ 26. $z = \left(4x^2 - 3y\right)\left(2x + 9y^3\right)$

27. $z = 7x^3 e^{5xy}$ 28. $z = \ln|4x + 7y|$

29. $z = x^{0,1} y^{0,9}$ 30. $z = \dfrac{(3x+4y)(7x-8y)}{5x-2y}$

9.4 Ko`p o`zgaruvchili funksiya differensiali

$z = f(x, y)$ funksiya M to`plamda berilgan bo`lsin. Bu M to`plamda $(x_0; y_0)$ va $(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)$ nuqtalarni olib, funksiyaning to`liq orttirmasini aniqlaymiz:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0+\Delta x_0; y_0+\Delta y_0) - f(x_0, y_0) \qquad (9.6)$$

Agar $f(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi orttirmasi

$$\Delta f(x_0; y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y \qquad (9.7)$$

ko`rinishda ifodalansa, u holda funksiya $(x_0, y_0)$ nuqtada differensiallanuvchi deb ataladi, bunda $A$, $B$ - o`zgarmaslar, α va β esa Δx va Δy ga bog`liq, hamda $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ da $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$ bo`ladi.

Yoqoridagi (9.7) formulada $A = f'_x(x_0;\ y_0)$, $B = f'_y(x_0;\ y_0)$ $A = f_x(x_0; y_0)$, $B = f_y(x_0; y_0)$.

Agar $f(x_0; y_0)$ funksiya $(x_0; y_0)$ nuqtada $f_x(x_0; y_0)$, $f_y(x_0; y_0)$ xususiy hosilalarga ega bo`lib, bu xususiy hosilalar $(x_0; y_0)$ nuqtadada uzluksiz bo`lsa, u holda $f(x, y)$ funksiya $(x_0; y_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo`ladi. $Z = f(x; y)$ funksiya $(x_0; y_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo`lsa

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y \ (9.8)$$

tenglik o`rinli bo`ladi. Bu ifodadagi $\dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y$ yig`indi $f(x; y)$ funksiyaning $(x_0; y_0)$ nuqtadagi differensiali deb ataladi va y $df(x_0; y_0)$ yoki dz kabi belgilanadi:

$$df(x_0; y_0) = dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\cdot\Delta y \qquad (9.9).$$

Agar $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ bo`lishini e`tiborga olsak, u holda

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy \qquad (9.10)$$

9.32 $z = x^2y - xy^2$ funksiyaning differensialini toping.

Yechish. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2y - xy^2\right)'_x = 2xy - y^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2y - xy^2\right)'_y = x^2 - 2xy$.

(9.10) formulaga ko`ra $dz = (2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy$

9.33 Funksiyaning differensialini toping. *a*) $z = e^{x^2+y^2} \cdot \sin\left(x^2 y^2\right)$ *b*) $u = arctg(xyz)$

Quyidagi funksiyalarning differensiallarini toping.

9.34 $z = 2x^2 - xy + 3y^3$

9.35 $z = \sqrt{x^2 - y^2}$

9.36 $z = \ln(3x + 2y)$

9.37 $z = 2^{xy}$

9.38 $z = x^y$

9.39 $z = \arcsin \dfrac{x-y}{2x+y}$

9.40 $z = xyarctg\,\dfrac{y}{x}$

9.41 $z = e^x e^{\frac{x}{y}}$

9.42 $z = e^{\cos^2\left(x^2+y^2\right)}$

9.43 $u = e^{xyz}$

9.44 $u = tg^2\,\dfrac{xy}{z}$

9.45 $u = e^x\left(\cos y + z\sin x\right)$

9.6 Yuqori tartibli hosilalar

$z = f(x, y)$ funksiya *M* to`plamda berilgan va u $(x_0;\ y_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo`lsin.

$z = f(x, y)$ funksiyaning xususiy xosilalari $f'_x,\ f'_y$ dan olingan $\dfrac{\partial f'_x}{\partial x},\ \dfrac{\partial f'_x}{\partial y}\ \ \dfrac{\partial f'_y}{\partial x},\ \dfrac{\partial f'_y}{\partial y}$ xususiy hosilalarga berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilasi deyiladi va

$$f''_{x^2},\ \ f''_{xy},\ \ f''_{y^2},\ f''_{y^2}\ \ \text{yoki}\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

kabi belgilanadi.

Demak: $f''_{x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f'_x(x,y))'_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right);\ f''_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} = (f'_x(x,y))'_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$

$$f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial x} = (f'_y(x,y))'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right);\ f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (f'_y(x,y))'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Yuqorida ko`rsatib o`tilgan $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ va $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ xususiy hosilalar aralash hosilalar deb ataladi. Bu aralash hosilalar (*x; y*) nuqtada uzluksiz bo'lsa, bir-biriga teng bo'ladi.

Xuddu shuningdek $z=f(x, y)$ funksiyaning uchinchi, to`rtinchi va hokazo tartibli xususiy hosilalar aniqlanadi.

9.46 $f(x, y) = x^3+y^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari hisoblansin

Yechish.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + y^3\right) = 3x^2,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + y^3\right) = 3y^2$$

Demak,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2) = 6x,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3y^2) = 6y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2) = 0.$$

9.47 Ikki o`zgaruvchili $z=\ln(1+x+2y)$ funksiyaning xususiy hosilalarini hisoblang

9.48 Funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilasilalarini hisoblang $y=xy\cdot\ln\dfrac{x}{y}$

9.49 Agar $z=\sin x\cdot tgy$ bo`lsa, u holda $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ ekanligini isbotlang.

9.50 – **9.57** Berilgan funksiyalarni ikkinchi tartibli hosilalarini hisoblang

9.50 $z=3x^2+2xy^2-4xy+x^2y-y^3$ **9.51** $u=e^{xyz}$

9.52 $u=\sin\left(\dfrac{xy}{2}\right)$ **9.53** $z=\arcsin(x+y)$

9.54 $z=\ln tg\dfrac{x+y}{x-y}$ **9.55** $z=x\sin xy+y\cos xy$

9.56 $z=x^2\ln(x+y)$ **9.57** $z=x^2\sin\sqrt{y}$

9.7 Ko`p o`zgaruvchili funksiyalarning lokal ekstremumlari

Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning $P=(x_0;\ y_0)$ nuqtadagi qiymati uning shu nuqtaning biror atrofiga tegishli ixtiyoriy $P(x,\ y)$ qiymatidan katta (kichik) bo`lsa P_0 $(x_0;\ y_0)$ nuqta maksimum (minimum) nuqta deyiladi.

Lokal maksimum va minimum nuqtalar lokal ekstremum nuqtalar deyiladi. Bunda $z=f(x,y)$ funksiya $P_0(\ x_0;\ y_0)$ nuqtada lokal ekstremumga erishadi.

Teorema: Agar $z=f(x,y)$ differensiallanuvchi funksiya $P_0(x_0,\ y_0)$ nuqtada lokal ekstremumga erishsa, u holda uning bu nuqtadagi birinchi tartibli xususiy hosilalari nolga teng bo`ladi:

$$\frac{\partial z(P_0)}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial z(P_0)}{\partial y}=0.$$

Birinchi tartibli xususiy hosilalari nolga teng (yoki mavjud bo`lmagan nuqtalar), kiritik nuqtalar deyiladi. Ularni ekstremumga tekshirish, ikki o`zgaruvchili funksiya ekstremumi mavjudligining yetarlilik shartlari yordamida tekshiriladi.

$P_0(x_0,\ y_0)$ nuqta $z=f(x,y)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo`lsin. $P_0(x_0,\ y_0)$ nuqtadagi ikkinchi tartibli xususiy hosilalari $\dfrac{\partial^2 z(P_0)}{\partial x^2}=A$ $\dfrac{\partial^2 z(P_0)}{\partial x\cdot\partial y}=B$ $\dfrac{\partial^2 z(P_0)}{\partial y^2}=C$ uchun $\Delta=\begin{vmatrix}A, B\\ B, C\end{vmatrix}=AC-B^2$ determinant tekshiriladi. $z=f(x,y)$ funksiyaning $P_0(x_0,\ y_0)$ statsionar nuqtada ekstremumining yeterlilik sharti quyidagicha ifodalanadi:

1) $\Delta>0$ - ekstremum mavjud bo`lib, bunda agar $A>0$ (yoki $A=0$ da $C>0$) bo`lsa $P_0(x_0,\ y_0)$ nuqtada funksiya lokal minimumga, agar $A<0$ (yoki $A=0$ da $C<0$) bo`lsa lokal maksimumga ega bo`ladi.

2) $\Delta<0$ - lokal ekstremum yo`q;

3) $\Delta=0$ - qo`shimcha tekshirishlarni talab qiladi.

9.58 Berilgan $u=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y},\ x\neq 0,\ y\neq 0$ funksiyaning ekstremumlarini toping.

Yechish. Kritik nuqtani topish uchun birinchi tartibli xususiy hosilalarini nolga tenglashtiramiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y-\frac{50}{x^2}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=x-\frac{20}{y^2}=0.$$

Bu sistemani yechib $x^2y=50,\ xy^2=20$, x = 5; y = 2 ekanligini topamiz. Shunday qilib M_0(5, 2) kritik nuqta.

Ikkinchi tartibli hosilalarni va ularni M_0(5, 2) nuqtadagi qiymatlarini aniqlaymiz: $u''_{xx}=\frac{100}{x^3}$, $u''_{xx}(5,\ 2)=\frac{100}{125}=\frac{4}{5}$; $u''_{xy}=1,\ u''_{xy}(5,\ 2)=1$; $u''_{yy}=\frac{40}{y^3}$, $u''_{yy}(5,\ 2)=\frac{40}{8}=5$

$A=\frac{4}{5}>0$ va $\Delta=AC-B^2=\frac{4}{5}\cdot 5-1^2=3>0$ dan funksiya M_0(5, 2) nuqtada minimumga ega. $u_{\min}=u(5,\ 2)=5\cdot 2+\frac{50}{5}+\frac{20}{2}=30.$

9.8 Shartli ekstremumlar

$z=f(x,\ y)$ funksiyaning shartli ekstremumi deb bu funksiyaning x va y o`zgaruvchilarning bog`lash tenglamasi deb ataluvchi $\varphi(x,\ y)$ = 0 tenglama bilan bog`langanlik shartida erishadigan ekstremumga aytiladi.

Nuqtalarni bog'lovchi tenglamalar sistemasi: $G=\{(x,y) | Y_i(x,y) i=1,2,\dots m\}$ ni qanoatlantiradigan G sohada aniqlangan va differensialanuvchi $z=f(x,\ y)$ funksiyani qaraymiz. Bu sohada shunday $M_0(x_0;y_0)$ nuqtani topish kerakki $\forall$ M(x,y) $\in$ G uchun $f(M_0)\geq$ f(M) shart bajarilishi kerak. Bunday masalalar $z=f(x,\ y)$ funksiyanig shartli eksremumini topish masalasi deyiladi.

Shartli ekstremumni topish uchun Lagranjning noma'lum koeffitsentlar usulini keltiramiz

$$L(x,y,\lambda_i) = f(x,y) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i Y_i(x,y)$$

Lagranj funksiyasi ekstremumini zaruriy shari quyidagi ko'rinishga ega:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial Y_i}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial Y_i}{\partial y}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} L_x=0 \\ L_y=0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}=Y_i(x,y)=0 \qquad \varphi(x)=0$$

i=1,2,….m

Bu m+2 no'malumli tenglamadan iborat sistemadan x,y,λ_i $(i=1,2,\dots m)$ no'malumlarning topiladi. λ_i sonlar Lagranj koeffitsienlari deyiladi.

9.59 z = xy funksiyaning x va y lar $2x+y-3=0$ tenglama bilan bog`langanlik sharti ostidagi ekstremumini toping.

Eng kichik kvadratlar usuli

1. Masalaning qo`yilishi. $x$ va $y$ o`zgaruvchili n marta $(x_1,\ y_1), (x_2,\ y_2),\dots,(x_n,\ y_n)$ tajriba o`tkaziladi. $x$ va $y$ lar orasida bog`lanish $y=ax+b$ ko`rinishda deb faraz qilinadi. Eng kichik kvadratlar usuliga asosan xatoliklar kvadratlarining yig`indisi

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-y_i\right)^2 \qquad (9.11)$$

eng kichik $y = ax + b$ bo`ladigan qilib $f(x)$ funksiyaning parametrlari *a* va *b* tanlab olinadi.
2. Agar $f(x)$ - chiziqli funksiya bo`lsa, ya'ni *y* = *ax* + *b* bo`lsa, u holda

$$S = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

a va *b* parametrlarga ega.uning ekstremumini topamiz.
Normal tenglamalar sistemasi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial s}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i ., \end{cases} \tag{9.12}$$

dan olamiz.

Qulaylik uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = S,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = X,\ \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = P,\ \sum_{i=1}^{n} y_i = Y$; u holda sistemaning ko`rinishi:

$$\begin{cases} Sk + Xb = P \\ Xk + nb = Y \end{cases} \tag{9.13}$$

Ikkita *x*, *y* o`zgaruvchili (9.14) ikki tenglamalar sistemasini yechib,

$$k = \frac{nP - XY}{nS - X^2},\ \ b = \frac{SY - PX}{nS - X^2} \tag{9.14}$$

ni hosil qilamiz. $y = kx + b$ tenglama koeffisentlari (9.15) bo`yicha hisoblanadi va bu tenglik regressiya tenglamasi deyiladi.

3. Agar $f(x)$ kvadratik funksiya bo`lsa, u holda $y = ax^2 + bx + c$ bo`lib,
$S = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$ bo`ladi. *a*, *b*, *c* parametrlar normal tenglamar sisitemasidan aniqlanadi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial s}{\partial b} = 0 \\ \dfrac{\partial s}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) b + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) c = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) b + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) c = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i . \end{cases} \tag{9.15}$$

9.60 *Avtomobil poygasi haqida quyidagi ma'lumotlar bor:* x - *masofa(ming km.) va* y – *yonilg`i sarfi (l /ming km.),*

x_i	*50*	*70*	*90*	*110*	*130*
y_i	*0,2*	*0,5*	*0,8*	*1,1*	*1,3*

x *va* y *o`zgaruvchilar orasidagi bog`lanishni chiziqli ekanligini bilgan holda, empirik formula* y = ax + b *ni eng kichik kvadratlar usuli bilan toping.*

Yechish. *Zarur yigindilarni topib olamiz* $\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. *Oradagi hisoblashlar quyidagi jadvalda ko`rsatilgan.*

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	50	0,2	10	2500
2	70	0,5	35	4900
3	90	0,8	72	8100
4	110	1,1	121	12100
5	130	1,3	169	16900
$\sum$	**450**	**3,9**	**407**	**44500**

Normal tenglamalar sistemasi esa (9.13) formulaga ko`ra quyidagicha bo`ladi:

$$\begin{cases} 44500a + 450b = 407 \\ 450a + 5b = 3{,}9 \end{cases}$$

Uning yechimi $a = 0{,}014$, $b = -0{,}48$. Shunday qilib, chiziqli bog`lanishning tuzilishi $y = 0{,}014x - 0{,}48$ ko`rinishda bo`ladi.

9.61 Ishlab chiqaruvchi 2007 – 2013 yillar davomida o`z mahsulotiga quyidagi miqdorda buyurtma qabul qiladi:

Yil	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Miqdor	22	20	21	23	19	25	23

Topish kerak: *a*) regressiya teglamalarini, *b*) 2014 yil uchun buytrma miqdori.

9.62 Jadvalda reklamaga sarf *X* (ming p/b.), mahsulot miqdori *Y* (ming dona) haqida ma'lumot berilgan.

X_i	1	2	3	4	5
Y_i	1,6	4	7,4	12	18

x va y o`zgaruvchilar orasida kvadrat bog`lanish $y = ax^2 + bx + c$ mavjud bo`lsa, a, b, c parametrlar qiymatini eng kichik kvadratlar metodi bilan toping.

Berilgan nuqtalar uchun regressiya tenglamasini tuzing.

9.63 (1; 6), (2; 8), (3; 9), (4; 10).

9.64 (-2; -12), (0; -7), (2; -3), (4; 2).

9.65 (-2; 10), (-1; 9), (0; 8), (1; 7), (2; 6).

9.66 (2; 5), (3; 6), (4; 8), (5; 10), (6; 11).

9.67 **(-**4; 12**), (-**1; 6), (2; 0**)**, (5; -6), (8; -13).

9.68 (-5;-6), (-3; -2), (-1; 3), (1; 7), (3; 12).

Quiyida berilgan masalalarda x va y o`zgaruvchilar chiziqli bog`liq ekanligi ma'lum bo`lsa, eng kichik kvadratlar metodi bilan emperik formulani toping.
9.69 x – tovarning narxi (p/b.), y – sotilish miqdori (ming dona).

x_i	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0
y_i	200	160	120	90	80

9.70 Korxonada elektr energiyasi iste'mol darajasi – x (mln kVt.s); y – mahsulot birligining narxi.

x_i	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
y_i	20,0	18,8	18,2	18,1	18,0

9.71 x – dvigatelning quvvati, y – ekspulatatsiyaning o`rtacha muddati (oy);

x_i	30	40	50	60	70
y_i	18	20	21	24	25

Tajriba natijalariga ko`ra eng kichik kvadratlar metodi bilan $y = ax + b$ emperik bog`lanishni muxolif (alternativ) funksiya bilan solishtiring, ulardan qaysi biri tajriba ma'lumotlariga mos keladi:

9.72

x_i	2	2,5	3	3,5	4
y_i	4,2	5,5	6,9	8	9,5

Muqobil alternativ bog`lanish $y = 2x + 0{,}1x^2$.
9.73

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,0	1,4	1,7	2,0	2,2

Muqobil alternativ bog`lanish $y = \sqrt{x}$.

9.74

x_i	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
y_i	0,50	0,30	0,25	0,18	0,12

Muqobil alternativ bog`lanish $y = 2^{-x}$.

9.75 Ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori *x* va xarajatlar *y* (ming p/b.) haqidagi tajriba natijalari ma'lum.

x_i	10	20	30	40	50
y_i	2,0	5,9	12,0	20,0	30,0

Xarajat funksiyasi $y = ax + b$ ko`rinishda izlanadi. Eng kichik kvadartlar metodi bilan *a* va *b* parametrlarni aniqlang.

9.76 Avtomobilni ekspulatatsiya qilish muddati va uni ta'mirlash xarajatlari orasidagi bog`lanishni tekshirish natijalari jadvalda keltirilgan.

x_i	100	120	140	160	180	200
y_i	100	114	130	146	163	180

Bu yerda *x* – avtomobilni ekpulatatsiya qilish muddati (yillar), *y* – xarajatlar summasi. Topish kerak: *a*) regressiya tenglamasi; *b*) avtomobilni o`n yillik ekspulatatsiyasiga sarflanadigan xarajat summasi.

9.9 Ko`p o`zgaruvchili funksiyalarning iqtisodiyotda qo`llanishi

Umumiy holda *X* tovarga bo`lgan talab ko`p o`zgaruvchi funktsiya bo`ladi, ya`ni sotib olinayotgan tovarning miqdori $Q_x$ uning narxi $P_x$, ikkilamchi xom-ashyo narxi – $P_y$, iste`molchining o`rtacha daromad darajasi *Y*, yil fasllari *t* va hokazolarga bog`liq.

$\frac{\partial Q_x}{\partial P_x}$ xususiy hosila Q_x talabning faqat P_x tovar narxi o`zgarganda o`zgarish tezligining o`lchov birligi bo`lib xizmat qiladi, bu holda qolgan barcha o`zgaruvchilar o`zgarmas deb faraz qilinadi. Xuddi shunga o`xshash xususiy hosila $\frac{\partial Q_y}{\partial Q_y}$ xom-ashyoning narxi $P_y$ o`zgarganda *X* tovarga bo`lgan talab qanday tezlikda o`zgarishini ko`rsatadi.

Xususiy hosilalarning ishorasidan foydalanib *X* va *Y* tovarlarning xarakterini topish mumkin, aynan:

agar, $\frac{\partial Q_x}{\partial P_y} > 0$ va $\frac{\partial Q_y}{\partial P_x} > 0$ bo`lsa, X va Y tovarlar o'rin bosuvchi.

agar, $\frac{\partial Q_x}{\partial P_y} < 0$ va $\frac{\partial Q_y}{\partial P_x} < 0$ bo`lsa, X va Y tovarlar o'rin to'ldiruvchi tovarlar hisoblanadi.

9.77 Avtomobillarga ehtiyot qismlari ishlab chiqaradigan firma o`z mahsulotini ichki va tashqi bozorga chiqarish imkoniyatiga ega. Tashqi bozorda talab quyidagi ifoda bilan berilgan:

$$P_1 + 8Q_1 = 421$$

Ichki bozorda esa:

$$P_2 + 2{,}5Q_2 = 80$$

Bu yerda Q_1 va Q_2 mos ravishda bir hafta davomida tashqi va ichki bozorda sotib olinadigan miqdor; P_1 va P_2 tashqi va ichki bozordagi narxlar. Firmaning umumiy harajatlari

$$TC = 250 + 5Q;$$

bu erda $Q = Q_1 + Q_2$.

Agar

1) firma narxlarning o`zgartirish siyosatini o`tkazish imkoniyatiga ega bo`lsa,

2) ikkita bozordagi narxlar bir xil bo`lsa.

Maksimal foydaga ega bo'lish uchun har qaysi bozorda firmaning mahsulotiga qanday narx o`rnatilishi kerak. Har bir holda firmaning foydasini aniqlang.

Yechish:

Masalaning birinchi qismi firma o`zininng iste`molchilarni ajratishi mumkin va har bir bozorda o`ziga eng ma`qul narxini qo`yishi mumkin deb faraz qilinadi. Tashqi bozordagi talab funksiyasi $P_1 + 8Q_1 = 421$ ichki bozorda esa $P_2 + 2{,}5Q_2 = 80$ firmaning umumiy daromadi tashqi va ichki bozordagi daromadlar yig`indisiga teng:

$R = R_1 + R_2 = P_1Q_1 + P_2Q_2 = (421 - 8Q_1)Q_1 + (80 - 2{,}5Q_2)Q_2 = = 421Q_1 - 8Q_1^2 + 80Q_2 - 2{,}5Q_2^2$

Firmaning umumiy xarajati:

$$TC = 250 + 5(Q_1 + Q_2)$$

demak, foyda funktsiyasi

$$\pi = R - TC = 421Q_1 - 8Q_1^2 + 80Q_2 - 2{,}5Q_2^2 - 250 - 5Q_1 - 5Q_2.$$

Biz Q ga bog`liq bo`lgan foyda funksiyasini hosil qildik. Endi firmaning foydasi maksimum bo`lganda $Q_1$ va $Q_2$ larning qiymatini aniqlash masalasini qaraymiz. Buning uchun $Q_1$ va $Q_2$ bo`yicha xususiy hosilalarni topib nolga tenglaymiz.

$$\begin{cases} \partial\pi/\partial Q_1 = 421 - 16Q_1 - 5, \\ \partial\pi/\partial Q_2 = 80 - 5Q_2 - 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} 416 - 16Q_1 = 0 \\ 75 - 5Q_2 = 0 \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasini echib $Q_1 = 26$, $Q_2 = 15$ ni topamiz.

Ikkinchi shartni tekshiramiz:

$\partial^2\pi/\partial Q_1^2 = -16$, $\partial^2\pi/\partial Q_2^2 = -5$, $\partial^2\pi/\partial Q_1Q_2 = 0$.

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1^2}\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_2^2} - \left(\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1\partial Q_2}\right)^2 = (-16)\cdot(-5) - 0 = 80 > 0$$

va $\partial^2\pi/\partial Q_1^2 = -16 < 0$

Demak, foyda funksiyaning maksimum ga erishish sharti bajariladi. Shunday qilib firma maksimum foydaga ega bo`lishi uchun tashqi bozorga 26 ta ichki bozorga 15 ta mahsulot chiqarishi kerak. $Q_1$ va $Q_2$ ning bu qiymatilarini talab funksiyaga qo`yib P_1 va P_2 narxlarni topamiz

$$P_1 = 421 - 8Q_1 = 421 - 8\times 26 = 213,$$

$$P_2 = 80 - 2{,}5Q_2 = 80 - 2{,}5\times 15 = 42{,}5$$

Demak tovarning tashqi bozordagi narxi 213 pul birligi, ichki bozordagi narxi esa 42,5 pul birligi bo`lib, firmaning foydasi:

$$\pi = 421Q_1 - 8Q_1^2 + 80Q_2 - 2{,}5Q_2^2 - 5Q - 5Q_2 = 421\times 26 - 8\times 26^2 + 80\times 15 -$$

$$- 2{,}5\times 15^2 - 250 - 5\times 26 - 5\times 15 = 5720{,}5 \text{ pul birligi.}$$

Firmaning haftalik foydasi - narx o`zgarish siyosatini o`tkazish shartlarida $\pi = 5720{,}5$ pul birligini tashkil qiladi.

Iste`molchilar bozorini ajratish imkoniyati bo`lmagan holda ichki va tashqi narx bir xil bo`ladi: $P_1 = P_2 = P$. U holda tashqi va ichki bozorga chiqariladigan tovar miqdori teng bo`ladi:

$$Q_1 = \frac{421 - P_1}{8} = 52{,}625 - 0{,}125P; \quad Q_2 = \frac{80 - P_2}{2{,}5} = 32 - 0{,}4P$$

Umumiy miqdori $Q = Q_1 + Q_2 = 84{,}625 - 0{,}525P$, bunda $P = \frac{84{,}625 - Q}{0{,}525}$ - yagona bozor uchun yangi talab funktsiyasi.

Yagona bozordagi daromad:

$$TR = PQ = \frac{84{,}625 - Q}{0{,}525} Q = \frac{84{,}625}{0{,}525} - \frac{Q^2}{0{,}525},$$

Umumiy harajatlar

$$TC = 250 + 5Q;$$

Firmaning foyda funksiyasi:

$$\pi = \frac{84{,}625}{0525} Q - \frac{Q^2}{0{,}525} - 250 - 5Q,$$

Foyda maksimum bo`ladigan birinchi tartibli shartga asosan Q ning qiymatini topish zarur.

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = \frac{84{,}625}{0{,}525} - \frac{2Q}{0{,}525} - 5 = 0$$

$$Q = 41;$$

shartga asosan.

$$\partial^2 \pi / \partial Q^2 < 0 \text{ maksimum sharti.}$$

Demak, $Q = 41$ nuqtada foyda funktsiyasi maksimumga erishadi.

$$\pi(41) = \frac{84{,}625}{0{,}525} \times 41 - \frac{412}{0{,}525} - 250 - 5 \times 41 \approx 2951{,}9$$

Endi birlashgan bozorda tovarning narxini aniqlash kerak. Buning uchun birlashgan talab funktsiyasidan foydalanamiz.

$$P(41) = \frac{84{,}625 - 41}{0{,}525} \approx 83{,}10.$$

E`tibor qilamizki, birinchi va ikkinchi hollarda bozorda chiqarilayotgan tovarning miqdori bir xil. Lekin birinchi holda firmaning tovarlariga bo`lgan narx har xil, natijada foyda olish imkoniyatiga ega bo`ladi.

$$\pi_1 = 5720{,}5, \quad \pi_2 = 2951{,}9.$$

9.78 Korxona ikki turdagi *A* va *B* tovarlar ishlab chiqaradi. Firmaning kunlik foydasi quyidagi ifoda bilan berilgan: $\pi(Q_A,\ Q_B) = -3Q_A^2 + 6Q_AQ_B - 4{,}5Q_B^2 - 90Q_A + 150Q_B - 700$. Bu yerda Q_A va Q_B - bir kundaishlab chiqariladigan *A* va *B* tovarlarning miqdori. Foydani maksimallashtirish uchun korxona *A* va *B* tovarlardan nechtadan ishlab chiqarishi kerak.

9.79 *A* va *B* mahsulotlarni ishlab chiqaruvchi firmaning daromadi quyidagi ifoda bilan beriladi: $R = -2Q_A^2 - 8Q_AQ_B - 4{,}75Q_B^2 - 240Q_A + 400Q_B + 200$. Daromadni maksimallashtira - digan *A* va *B* tovarni ishlab chiqarish miqdorini aniqlang. Firmaning maksimal foydasini toping.

9.80 Ikki turdagi mahsulot ishlab chiqaradigan firmaning umumiy xarajatlari quyidagi tenglama bilan berilgan: $T(C) = 2x^2 + 4xy + 3y^2 - 224x - 294y + 8140$. Bu yerda x va y mos ravishda *A* va *B* tovarlarning miqdori. Topish kerak:

1) Firma xarajatini minimallashtiradigan *A* va *B* tovarlarning miqdori;
2) Minimal xarajatni kattaligi.

9.81 Kichik nonvoyxona ikki turdagi non pishiradi. Oddiy non 100 p/b., shirmoy non 300 p/b. Nonvoyxonaning to`la xarajatlari:
$TC = 20x^2 - 30xy + 20y^2 - 3760x - 2270y + 186700$. Bu yerda x – oddiy non miqdori, y – shirmoy non miqdori. Topish kerak:

1) Foyda maksimal bo`lishi uchun nonvoyxona har bir turdagi nondan nechtadan pishirishi kerak.
2) Nonvoyxonaning kunlik maksimal foydasini toping.

9.82 *A* va *B* turdagi tennis raketkalarini ishlab chiqaradi. Q_A va Q_B sondagi raketkalarni sotishdan kunlik daromad $TR = 70Q_A + 90Q_B$. Bu raketkalarni ishlab chiqarishga sarflanadigan kunlik xarajatlar $TC = 5Q_A^2 - 4Q_AQ_B + Q_B^2 + 20Q_A + 88Q_B + 30$. Foydani maksimallashtirish uchun firma *A* va *B* raketkalardan nechtadan ishlab chiqarish kerak. Firmaning kunlik foydasi qanday.

9.83 Ishlab chiqaruvchining ikkita fabrikasi bor.Birinchi fabrikadagi xarajatlari: $C_1 = 0{,}2Q_1^2 + 50Q_1 + 125$. Ikkinchi fabrikaning xarajatkari: $C_2 = 0{,}4Q_2^2 + 40Q_2 + 250$. Bu yerda Q_1 va Q_2 mos ravishda birinchi va ikkinchi fabrikadagi ishlab chiqarish hajmi. Mahsulot esa $P = 20 - 0{,}2(Q_1 + Q_2)$ narx bilan sotiladi. Ishlab chiqaruvchi umumiy foydasini maksimallashtiruvchi har bir fabrikaning ishlab chiqarish hajmini toping. Mahsulot birligining narxi va maksimal foydani aniqlang.

9.84 - 9.89 Funksiyani shartli ekstremumlarini toping.

9.84 $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$ **9.85** $z = xy^2 - xy + xy^3$ $(x > 0;\ y > 0)$

9.86 $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$ **9.87** $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

9.88 $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$. **9.89** $z = 4 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$

Birinchi tartibli xususiy hosilalar topilsin.

9.90 *a*) $z = 5x^2 - 13xy + 6y^2$; *b*) $z = 4x^3 + 2x^2y^5 - 8y^3$;

c) $z = 7w^3 + 6wx + 4x^2 - 8xy - 3y^2$; *d*) $z = 2w^4 + 7wxy - 3x^2 + 4y^3$.

9.91 *a*) $z = (5x + 3y)(12x - 7y)$; *b*) $z = (4x^2 - 3y)(2x + 9y^3)$;

c) $z = (4w - 3x + 7y)(7w^2 + 11x^4 - 3y^5)$; *d*) $z = 13x/(9x - 4y)$.

9.92 *a*) $z = \dfrac{4w + 7x + 2y}{3w - 2x + 3y}$ *b*) $z = (5x - 7y)^3$;

c) $z = 4e^{5xy}$; *d*) $z = \ln|4x + 7y|$

9.93 *a*) $z = \dfrac{(8x + 7y)^4}{2x - 3y}$; *b*) $z = \dfrac{(3x + 4y)(7x - 8y)}{5x - 2y}$;

c) $z = (12x - 5y)^3(6x - 7y)$; *d*) $z = (2x + 11y)/(5x + 4y)$;

9.94 *a*) $z = 7x^3e^{5xy}$; *b*) $z = 6xy/e^{5x+2}$;

Funksiyaning ekstrimumlarini aniqlang

9.95 $f(x, y) = x^2 + 3xy + 2{,}5y^2 - 5x - 6y + 1{,}5$

9.96 $f(x, y) = x^2 + 3xy + 2{,}5y^2 - 5x - 8y + 3{,}5$

9.97 $f(x, y) = -x^2 + 2xy - 1{,}5y^2 + 0{,}5y + 5$

9.98 $f(x, y) = -x^2 + 2xy - 1{,}5y^2 - 2x + 5y + 0{,}5$

9.99 $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 0{,}25y^2 - 10x + 3y + 4$

9.100 $f(x, y) = -2x^2 + 2xy - 1{,}5y^2 + 75x - 12{,}5y + 9375$.

9.101 Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping

a) $z = x^2y^3 + 5x$; *b*) $z = (3xy - 4y^2)(x - 4)$;

c) $z = 5x/y + 3y/x$; *d*) $z = (x + y)/(x - y)$;

e) $z = \ln[(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)]$; *f*) $z = e^{x^2 - 2xy + y^2}$

9.102 Ekstremal nuqtalarni aniqlang

a) $z = 60x + 34y - 4xy - 6x^2 - 3y^2 + 30$; *b*) $z = 6x^3 + 6y^3 - 12xy$;
c) $z = 5x^3 + 3x^2 + 6xy - 2y^2 - 2.5$; *d*) $z = -6x^2 + 8xy - 2y^2 + 5x + 3y + 17$.

Mavzu yuzasidan savollar.

1. Ko`p o`zgaruvchili funksiya.
2. Ko`p o`zgaruvchili funksiya limiti, uzluksizligi.
3. Ko`p o`zgaruvchi funksiyaning birinchi tartibli xususiy hosilasi.
4. Ko`p o`zgaruvchi funksiyaning to`la differensiali.
5. Ko`p o`zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli hosilalari qanday hisoblanadi?
6. Ikki o`zgaruvchili funksiyaning ekstremumlari qanday hisoblanadi?
7. Ko`p o`zgaruvchili funksiya ekstremumlarining zarurriy va yetarli shartlari.
8. Ikki o`zgaruvchili funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari qanday topiladi?
9. Ikki o`zgaruvchili funksiyaning shartli ekstremumlari qanday topiladi?
10. Eng kichik kvadratlar usuli nimalardan iborat?

Adabiyotlar

66. Sh.Shorahmetov, B.Naimjanov, «Iqtisodchilar uchun matematica», - T.: «Fan va texnologiya»., 2007 y.
67. T.A.Azlarov, H.Mansurov “Matematik analiz”, Toshkent, 2006 y.
68. Соатов Ё.У. “Олий математика”, Т.: Укитувчи, 1-жилд, 2-жилд, 1994 й., 3-жилд, 1996 й.
69. “Обший курс высшей математике для экономистов”. Под редакцией В.И.Ермакова. – М.: ИНФРА – М, 2006 г.
70. “Высшая математика для экономистов”. Подредаксийе Н.Ш.Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2006 г.
71. М.С.Красс, Б.П.Чупрынов. “Математика для экономического бакалавриата”, - М.: Дело, 2006 г.
72. В.С.Шипачев “Курс высшей математики”, М.: Проспект, 2005 г.
73. Солодовников А., Бабайсев А.А., Браилов А.В. “Математика в экономике”, - М.: Финансы и статистика, 2004 г.
74. Замков О.О., Толстоятенко А.Б., Черемних Ю.Н. “Математические методы в экономике”, - М.: ДИС 2004 г.
75. Коршунова Н., Плясунов В. “Математика в экономике”, - М.: Вита пресс, 2004 г.
76. М.С.Красс “Математика для экономических специальностей”, - М.: 2004 г.
77. Кремер Н.М. и другие. – “Высшая математика для экономистов” , - М.: 2004 г.
78. Клименко Ю.И. “Высшая математика для экономистов”. – Москва 2005 г.
79. Минорский И.П., “Сборник задач по высшей математике” – М.: 2004 г.
80. Масагутова Р.В. “Математика в задачах для экономистов” – Т. Укитувчи 1996 й.
81. Кремер Н.Ш. и др. “Практикум по высшей математике для экономистов” – М.: 2004 г.,
82. Шапкин А.С. «Задачи с решениями по высшей математике теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию» - М.: 2008г.
83. Макаров С.И., Мищенко М.В., «Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики» Н.: 2008г.
84. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. «Основы математики и ее приложения в экономическом образовании» -М.: 2008
85. Ермаков В.И. «Общий курс высшей математика для экономистов». –Н: 2010г.
86. Ермаков В.И. «Общий курс высшей математика для экономистов». –Н: 2010г.

10. Integral hisob

10.1 Boshlang`ich funksiya va integral

Berilgan f(x) funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo’lsin. Agar $F'(x)=f(x)$ (bunda $x\in(a,b)$) tenglik o’rinli bo’lsa, *F(x)* funksiya *f(x)* funksiyaning *(a,b)* intervaldagi boshlang’ichi deyiladi. Berilgan *f(x)* funksiyaning ixtiyoriy ikkita boshlang’ich funktsiyasi bir-biridan o’zgarmas songa farq qiladi.

f(x) funksiyaning *F(x)+c* (bunda *c*- o’zgarmas son) boshlang’ich funksiyalar to’plami *f(x)* funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va $\int f(x)dx = F(x)+C$ ko’rinishida ifodalanadi

10.2 Aniqmas integral xossalari

1. $(\int f(x)dx)' = f(x), \int f'(x)dx = f(x)+C$, bu yerda C – ixtiyoriy o`zgarmas son.
2. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$, bu yerda A – o`zgarmas son.
3. $\int [f_1(x)\pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$
4. Agar $\int f(x)dx = F(x)+C$ va x = $y(t)$ differensiallanuvchi funksiya bo’lsa, u holda $\int f(y(t))dy(t) = F(y(t))+C$.

Xususan, $\int f(at+b)dt = \frac{1}{a}F(at+b)+C, (a\neq 0)$.

10.3 Elementar funksiyalar aniqmas integrallari jadvali

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n\neq -1);\quad \int 1\cdot dx = x + C;$.
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a>0, a\neq 1); \int e^x dx = e^x + C$.
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
6. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$.
7. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$.
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$.

11. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right| + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C_1, (a \neq 0);\ \int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

13. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, (a \neq 0)$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C, (a \neq 0)$.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$.

10.4 Integralashning asosiy usullari

1. Bevosita integrallash. Bunda integral ostidagi ifoda elimentar almashtirishlar bilan jadvalga keltiriladi. So`ngra integral xossalaridan foydalanib, boshlang`ich funksiya topiladi.

10.1 Integralni hisoblang: $I_1 = \int \frac{42ax\sqrt{x} - 5bx^2 + 14x + 20}{x^2}dx$.

Yechish. Darajaning va aniqmas integralning xossalaridan foydalanib:

$$I_1 = 42a\int x^{-\frac{1}{2}}dx - 5b\int dx + 14\int x^{-1}dx + 20\int x^{-2}dx = 84a\sqrt{x} - 5bx + 14\ln|x| - \frac{20}{x} + C.$$

10.2 Integralni hisoblang: $I_2 = \int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$.

10.3 Integralni hisoblang: $I_3 = \int (a^m b^n)^x dx = \frac{(a^m b^n)^x}{\ln(a^m b^n)} + C$

10.4 Integralni hisoblang: $I = \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx.$

10.5 Integralni hisoblang: $I = \int \frac{x^4}{x^2+1}dx.$

10.6 $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$.

2.O'rniga qo'yish usuli. Erkli o`zgaruvchi $x$ ni boshqa ixtiyoriy $x$ ga bog`l`iq differensiallanuvchi funksiya bilan almashtirish mumkin.

Integrallarni hisoblashda quyidagi qoidalarni hisobga olish foydalidir:

1) Agar $\int f(x)dx = F(x) + C,$ u holda $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$. Masalan:

a) $\int \sin xdx = -\cos x + C,$ bo`lgani uchun $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C;$

$b)\ \int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C,$ bo`lgani uchun $\int \frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$.

2) Agar integral ostidagi ifodani $f(x)\cdot f'(x)$ yoki $f'(x): f(x)$ ko`rinishida ifodalash mumkin bo`lsa, u holda $f'(x)dx=df(x)$ ekanligidan quyidagilar kelib chiqadi:

$$\int f(x)f'(x)dx=\int f(x)df(x)=\frac{1}{2}f^2(x)+C; \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int \frac{df(x)}{f(x)}=\ln|f(x)|+C$$

3) $\int [f'(x)\varphi(x)+f(x)\varphi'(x)]' dx=\int (f\cdot\varphi)' dx=\int d(f\cdot\varphi)=f(x)\cdot\varphi(x)+C$.

4) $\int x^3 f(x^2)dx=\frac{1}{2}\int x^2 f(x^2)dx^2=\frac{1}{2}\int t\cdot f(t)dt,\quad bunda\ t=x^2.$

5) $\int \frac{f'(x)dx}{a^2+f^2(x)}=\int \frac{df(x)}{a^2+f^2(x)}=\frac{1}{a}arctg\frac{f(x)}{a}+C.$

6) $\int \frac{f'(x)dx}{a^2-f^2(x)}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+f(x)}{a-f(x)}\right|+C.$

7) $\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{a^2-f^2(x)}}=\int \frac{df(x)}{\sqrt{a^2-f^2(x)}}=\arcsin\frac{f(x)}{a}+C.$

8) $\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f^2(x)\pm a^2}}=\int \frac{df(x)}{\sqrt{f^2(x)\pm a^2}}=\ln\left|f(x)-\sqrt{f^2(x)\pm a^2}\right|+C.$

10.7 Integralni hisoblang: $a)\ \int \frac{arctgx}{1+x^2}dx \qquad b)\ \int \frac{a\sin x-b\sin x}{a\sin x+b\sin x}dx \qquad c)\ \int \frac{\sin x}{\cos^7 x}dx$

Yechish. $a)\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx=\int (arctgx)' arctgx\,dx=\int arctgx\,d(arctgx)=\frac{1}{2}arctg^2 x+C$.

$b)\ \int \frac{a\cos x-b\sin x}{a\sin x+b\cos x}dx=\int \frac{(a\cos x+b\sin x)'}{a\sin x+b\cos x}dx=\int \frac{d(a\cos x+b\sin x)}{a\sin x+b\cos x}=\ln|a\sin x+b\cos x|+C.$

$c)\ \int \frac{\sin x}{\cos^7 x}dx=-\int \frac{(\cos x)'}{\cos^7 x}dx=-\int \frac{d\cos x}{\cos^7 x}=\frac{1}{6\cos^6 x}+C.$

10.8 Integralni hisoblang: $\int \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}+\frac{arctgx}{1+x}\right)dx$.

10.9 Integralni hisoblang: $I=\int \cos 9x\cdot dx$.

10.10 Integralni hisoblang: $I=\int e^{-x^2}xdx.$

10.11 Integralni hisoblang: $I=\int \frac{xdx}{\sqrt{10-x^2}}$.

10.12 Integralni hisoblang: $a) I=\int \frac{dx}{ax+b} \qquad b)\ I=\int \frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}.$

3. O`zgaruvchilarni almashtirish usuli. Agar aniqmas integral jadval ko'rinishida bo`lmasa u holda ba'zan o`rniga qo`yish usuliga murojat qilinadi. $\int f(x)dx$ ni topish kerak bo`lsa $x=\varphi(t)$ almashtirish bajariladi.

$\varphi(t)$ funksiya uzluksiz, uzluksiz hosilaga ega va teskari funksiyasi mavjud. $dx=\varphi'(t)dt$ bo`lgani uchun $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$ Qanday qilib muvoqqiyatli almashtirishni olish mumkin degan savolga umumiy javob berish mumkin emas.

Foydali almashtirishni topish mashqlar bilan o`zlashtiriladi. Aniqmas integralda o`zgaruvchilarni almashtirish usuliga qator misollar keltiramiz.

10.13 Integralni hisoblang: $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}.$

Yechish. Ildiz ostidagi ifodalardan ozod bo`lish uchun $x=t^6$ belgilashni kiritamiz. $dx=d(t^6)=(t^6)'dt=6t^5\cdot dt$ ekanligidan $I=\int \frac{6t^5dt}{t^3-t^2}=6\int \frac{t^3dt}{t-1}=6\int \frac{t^3-1+1}{t-1}dt=6\int \frac{t^3-1}{t-1}+$ $+\int \frac{dt}{t-1}=6\int (t^2+t+1)dt+6\ln|t-1|=2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C.$

10.14 Integralni hisoblang: $I=\int \frac{\sqrt{10+x^2}}{x}dx.$

*Ko`rsatma*: $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ ko`rinisdagi funksiyalarni integrallashda quyidagi belgilashlar kiritiladi:

1) $\sqrt{a^2-x^2}$ funksiya uchraganda $x=a\cdot\sin t,$ belgilanib $\sqrt{a^2-x^2}=a\cdot\cos t$ topiladi. $dx=a\cdot\cos t\cdot dt,\ t=\arcsin(x/a).$ Bunda $-a<x<a,\ -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}.$

2) $\sqrt{a^2+x^2}$ ko`rinishdagi funksiyalar uchraganda x = atg$t$ belgilanadi. Bundan $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2(1+tg^2t)}=\frac{a}{\cos t},\ dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt,\ t=arctg\frac{x}{a},\ -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}.$

3) $\sqrt{x^2-a^2}$ ko`rinishdagi funksiyalar uchraganda $x=\frac{a}{\cos t}$ kabi belgilanadi. Bundan $\sqrt{x^2-a^2}=atgt,\ dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt,\ t=\arccos\frac{a}{x},\ -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}.$

10.15 Integralni hisoblang: $I=\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}.$

Yechish. $x=a\sin t$ belgilashni kiritamiz. Bundan esa $dx=a\cos t\cdot dt\ (0<t<\pi/2)$ va $I=\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\int \frac{a\cos t\cdot dt}{\left(\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\right)^3}=\int \frac{a\cos t\cdot dt}{\sqrt{a^6\cos^6 t}}=\frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{tgt}{a^2}+C.$

Yuqoridagi belgilashga ko`ra $\sin t=\frac{x}{a},\ \cos t=\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a},\ tgt=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$

bo`lib, integralning oxirgi ko`rinishi $I=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C.$

10.16 Integralni hisoblang: $I=\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^4}dx.$

10.17 Integralni hisoblang: $I=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$ $(x>3).$

10.18 Integralni hisoblang $\int \frac{e^xdx}{\sqrt{1+e^x}}.$

Integrallarni hisoblang.

10.19 $\int \frac{(1-3x)dx}{3+2x^2}$. **10.20** $\int \frac{2x+3}{2x+1}dx$. **10.21** $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$.

10.22 $\int \frac{xdx}{x^2-5}$. **10.23** $\int \frac{xdx}{(x+1)^2}$ **10.24** $\int \frac{x^2dx}{1+x^6}$.

10.25 $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$. **10.26** $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$. **10.27** $\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}$.

10.28 $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$. **10.29** $\int \frac{xdx}{2x^2+3}$. **10.30** $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^4-x^4}}$.

10.31 $\int \frac{x^3dx}{1+x^8}$. **10.32** $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}}$. **10.33** $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$.

10.34 $\int \frac{arctg\,\frac{x}{2}}{4+x^2}dx$. **10.35** $\int e^{-(x^2+1)}xdx$. **10.36** $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$.

10.37 $\int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$. **10.38** $\int \frac{e^xdx}{e^x-1}$. **10.39** $\int \cos\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

10.40 $\int \sin(\lg x)\frac{dx}{x}$. **10.41** $\int \frac{xdx}{\cos^2 x^2}$. **10.42** $\int x\sin(1-x^2)dx$

10.43 $\int tgxdx$. **10.44** $\int ctgxdx$. **10.45** $\int \sin^3 6x\cos 6xdx$

10.46 $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}dx$ **10.47** $\int \frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx$. **10.48** $\int \frac{ctg^{2/3}x}{\sin^2 x}dx$.

10.49 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+8}}$. **10.50** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. **10.51** $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$.

4. Bo\`laklab integrallash. Agar $u(x)$ va $v(x)$ – differensiallanuvchi funksiyalar bo\`lsa, u holda ular ko\`paytmasining differensiali $d(uv)=udv+vdu.$ Bu ifodaning ikkala tomonini ibtegrallab $\int d(uv)=\int udv+\int vdu$ *yoki* $\int udv=uv-\int vdu$ formulani olamiz.

Bo\`laklab integrallash usuli har xil sinfdagi funksiyalar ko\`paytmalarini integrallashda foydalaniladi:

$\int P_n(x)e^{\alpha \cdot x}dx,\quad \int P_n(x)\cos ax\,dx,\quad \int P_n(x)\sin ax\,dx,\quad \int P_n(x)arctgx\,dx,\quad \int P_n(x)\arcsin x\,dx,$

$\int P_n(x)\arccos x\,dx,\quad \int P_n(x)\ln x\,dx.$

Dastlabki uchta integralda u uchun $P_n(x)$ ko`phad qabul qilinadi, oxirgi to`rtta integralda uchun esa mos ravishda arctg$x$, arcsin$x$, arccos$x$, ln$x$ lar qabul qilinqdi. Ba'zi hollarda bo`laklab integrallash formulasini bir necha marta qo`llash zarur bo`ladi.

10.52 Integralni hisoblang: $\int x\cdot e^{-5x}dx.$

Yechish. $u = x$ va $dv =$ $e^{-5x}dx$ deb olamiz, u holda

$$\int xe^{-5x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x,\ du = dx \\ dv = e^{-5x}dx, v = \int e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}e^{-5x} \end{matrix}\right\} = -\frac{x}{5}e^{-5x}dx - \frac{1}{25}e^{-5x} + C.$$

v ni topishda integrallash doimiysini har doim nolga teng deb hisoblash mumkin.

10.53 $\int arctgx\,dx$ ni hisoblang.

10.54 $\int (x^2+1)\cos x\cdot dx$ integralni hisoblang.

10.55 Aniqmas integralni hisoblang: $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$.

10.56 Integralni hisoblang: $I = \int x^n \ln x\,dx,\ n \neq -1.$

10.57 Integralni hisoblang: $\int x\sin xdx$.

Integrallarni hisoblang:

10.58 $\int e^x \cos xdx$. **10.59** $\int \ln xdx$. **10.60** $\int x\ln(x-1)dx$.

10.61 $\int (5x+6)\cos 2xdx$. **10.62** $\int xarctgxdx$. **10.63** $\int xe^{2x}dx$.

10.64 $\int e^x \sin xdx$ **10.65** $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$. **10.66** $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

10.67 $\int \sqrt{1-x^2}dx$. **10.68** $\int \arcsin xdx$. **10.69** $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$.

10.70 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$. **10.71** $\int (\ln x)^2 dx$. **10.72** $\int \frac{\arcsin xdx}{\sqrt{1+x}}$.

10.73 $\int \frac{x}{e^x}dx$. **10.74** $\int x\cdot 2^{-x}dx$ **10.75** $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$.

5. <u>Kvadrat uchhadni o`z ichiga olgan ba'zi funksiyalarni intahrallash</u>. Quyidagi integrallarni qaraymiz:

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c},\quad I_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx,\quad I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad I_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Bu integrallarni hisoblash uchun maxrajdagi uchhaddan to`la kvadrat ajratamiz.

$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=a\left(t^2\pm m^2\right),$ bu yerda $t=x+\frac{b}{2a},\ \frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm m^2$.

10.76 Integralni hisoblang $I_1=\int\frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

Yechish. To`la kvadrat ko`rinishga keltirib olamiz:

$$4x^2+4x+5=4\left(x^2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x+\frac{5}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=4\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]=4\left(t^2+1\right) bundat=x+\frac{1}{2},\ dx=dt.$$

Demak $I_1=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{4}arctgt+C=\frac{1}{4}arctg\,\frac{2x+1}{2}+C.$

10.77 Integralni toping: $I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

10.78 Integralni hisoblang $\int\frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx.$

Integrallarni hisoblang

10.79 $\int 6x^5dx$.

10.80 $\int(5x^2+7x-\frac{2}{x})dx$.

10.81 $\int\frac{x-4}{x^3}dx$.

10.82 $\int\frac{(x^2+1)^2}{x^3}dx$.

10.83 $\int(\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x})dx$.

10.84 $\int(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}})dx$.

10.85 $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}dx$.

10.86 $\int\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

10.87 $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

10.88 $\int\frac{5-2ctg^2x}{\cos^2 x}dx$.

10.89 $\int\frac{dx}{x^2+8}$.

10.90 $\int\frac{dx}{x^2-5}$.

10.91 $\int\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

10.92 $\int\frac{dx}{\sqrt{12-x^2}}$.

10.93 $\int tg^2xdx$.

10.94 $\int ctg^2xdx$.

10.5. Kasr ratsional funksiyalarni integrallash

$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ ifoda, bu yerda $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – mos ravishda m, n – darajali ko`phadlar, ratsional kasr (yoki funksiya) deyiladi. Agar $m < n$ bo`lsa ratsional kasr to`g`ri, $m \geq n$ bo`lganda esa noto`g`ri deyiladi.

Agar integral ostidagi kasr noto`g`ri bo`lsa, bo`lish usuli bilan bo`linuvchidan bo`linma va qoldiqni ajratib olish mumkin. Masalan, $\frac{x^2+2}{x^2+x-1} = x-1+\frac{2x+1}{x^2+x-1}$.
Har qanday ko'phadni chiziqli va kvadratik ko`paytuvchilarga ajratilsa mumkin. $Q_n(x) = (x-a)^{\alpha}(x^2+px+q)^{\beta}...$ bo`lsa, u holda quyidagi yoyilma o`rinli

$$\frac{P(x)}{(x-a)^{\alpha}(x^2+px+q)^{\beta}...} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} +$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + ... + \frac{M_{\beta}x+N_{\beta}}{(x^2+px+q)^{\beta}} + ...$$

10.95 Integralni hisoblang $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}$

Yechish. Integral ostidagi funksiyani sodda kasrlari yig'indisi ko'rinishida ifodalaymiz.

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+1}$$

A va B o'zgarmaslarni x=A(2x+1)+B(x+1)=(2A+B)x+(A+B) ayniyatdan topamiz.
2A+B=1 , A+B=0 sistemani yechib , A=1 ; B=-1 ni topamiz.

$$\int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}\right)dx = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C = \ln\frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}} + C$$

10.96 Integralni hisoblang $\int \frac{(7x-5)dx}{x^3+x^2-6x}dx$

10.97 $\int \frac{x^3}{x+3}dx$.

10.98 $\int \frac{x^4}{x^2+4}dx$.

10.99 $\int \frac{x^5}{x^3-8}dx$.

10.100 $\int \frac{dx}{(x+2)(x+3)}$.

10.101 $\int \frac{dx}{(x+1)(x+3)}$.

10.102 $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$

10.103 $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx$.

10.104 $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$

10.105 $\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4}dx$.

10.106 $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}dx$.

10.107 $\int \frac{6x^2+10x+2}{2x^3+5x^2+2x}dx$.

Trigonometrik funksiyalarni integrallash

$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx, m, n \in Z$ ko`rinishdagi integral quyidagicha hisoblanadi. Agar *m* va *n* – juft musbat sonlar bo`lsa darajani pasaytirish formulalaridan foydalaniladi.

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Universal almashtirish

t = tg$\frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$ bu almashtirish natijasida sinx = , cosx =

x = 2arcctgt *dx =* u holda $\int R(sinx, cosx)$dx $= \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$

10.108 Integralni hisoblang $\int \cos^2 x \cdot \sin^2 x dx$.

Yechish. $\int \cos^2 x \cdot \sin^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \int \frac{1}{4}(1-\cos^2 2x)dx =$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\int \cos 4x d(4x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

Integrallarni hisoblang

10.109 $\int \sin^2 \frac{x}{2}dx$ **10.110** $\int \cos^2 \frac{x}{2}dx$ **10.111** $\int \cos^3 xdx$

10.112 $\int \sin^5 xdx$ **10.113** $\int \sin^2 x \cos^3 xdx$ **10.114** $\int \sin^3 \frac{x}{2}\cos^5 \frac{x}{2}dx$

10.115 $\int \sin^4 xdx$ **10.116** $\int \sin^2 \frac{x}{2}\cos^2 \frac{x}{2}dx$ **10.117** $\int \sin^2 x \cos^4 xdx$

10.118 $\int \cos^6 3xdx$ **10.119** $\int \sin^3 x \cos^3 xdx$ **10.120** $\int \cos^7 xdx$

10.121 $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$ **10.122** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$ **10.123** $\int \sin^3 xdx$

10.124 $\int \cos^5 xdx$ **10.125** $\int x \sin^2 x^2 dx$ **10.126** $\int e^x \cos^2 e^x dx$.

10.6 Aniq integral

Faraz qilaylik *y=f(x)* funksiya [a,b] kesmada aniqlangan. [a,b] kesmani *n* ta bo`lakka bo`lamiz. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Har bir $[x_{i-1}, x_i]$ oraliqda ixtiyoriy ξ_i nuqtani olamiz va $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ yig`indini tuzamiz, bu yerda $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ ko`rinishidagi yig`indi integral yig`indi deyiladi, uning $\max \Delta x_i \to 0$ dagi limiti (mavjud va chekli bo`lsa) *f(x)* funksiyaning a dan b gacha oraliqdagi aniq integrali deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Bu holda *f(x)* funksiya [a,b] kesmada integrallanuvchi deyiladi. *F(x)* funksiyaning [a,b] kesmada uzluksiz yoki bir necha uzilish nuqtalariga ega bo`lishi, uning integrallanuvchi bo`lishi uchun yetarlidir.

Agar *f(x)* funksiya [a,b] kesmada uzluksiz, $\int f(x)dx = F(x)+c$ aniqmas integrali mavjud bo`lsa u holda $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ Nyuton-Leybnis formulasi o`rinli bo`ladi:

1) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ bu yerda c- o`zgarmas son.

2) $\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

3) $\int_a^b (f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4) $\int_a^a (f(x)dx = 0$

5) $\int_a^b (f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a<c<b$

Bir nechta misollar keltiramiz:

1) $\int_a^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_a^b = -\frac{1}{b}+\frac{1}{a} = \frac{b-a}{ab}(ab\neq 0)$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_1^0 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

3) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{0,5} = \arcsin 0,5 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$

4) $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\sin 2x}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos dx} = \int_0^{\pi/4} (\sin x + \cos x)dx = -\cos x + \sin x\Big|_0^{\pi/4} = 1$

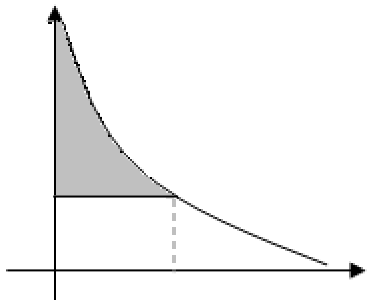
5) $\int_0^1 \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}dx = \int_0^1 \frac{1+e^{2x}+2e^x}{1+e^{2x}}dx = x\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{de^x}{1+e^{2x}} = 1+2arctge^x\Big|_0^1 = 1-\frac{\pi}{2}+2arctge$

Aniq integralni iqtisodiyotda qo`llanilishi

Ishlab chiqarishning va iste'molchining yutug`i.

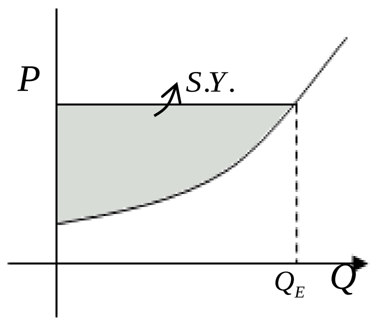
Talab va taklifning funksiyalarining kesishgan nuqtasi muvozanat nuqta deyiladi. Tovarni o'z narxidan ko'ra ancha arzon bo'lgan muvozanat narxida sotib olgan iste'molchi yutuqqa erishadi.Barcha iste'molchilar tomonidan tejalgan pullarning yig`indisi iste'mol yutug`i deyiladi.

Talab egri chizig`i $P = f(Q)$ va $P = P_E$ - tovarning muvozanat narxi bo`lsin. Iste'mol yutug`i yuqoridan talab



egri chizig`i, quyidan $P = P_E$ to`g`ri chiziq bilan chegaralan – gan egri chiziqli trapesiyaning yuzini beradi. (rasmdagi shtrixlangan yuza)

Iste’mol (xarid) yutug`ini hisoblash formulasi $I.Y. = \int_0^{Q_E} [f(Q) - P_E] dQ$.Xuddi shuningdek ishlab chiqaruvchining tovarni mo`ljallaganidan yuqori muvozanat narxda sotishdan olgan qo`shimcha summasi ishlab chiqaruvchi (sotuv) yutug`i deyiladi va $S.Y. = \int_0^{Q_E} [P_E - g(Q)] dQ$ formula bilan hisoblanadi.



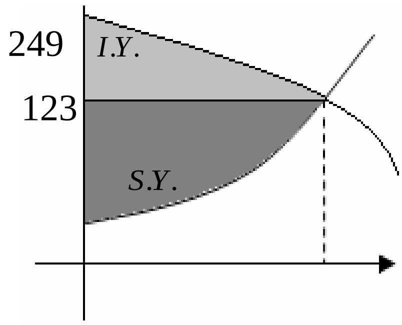
10.127 Tovarga bo`lgan talab va taklif funksiyalari berilgan:
$P_D = -q^2 - 5q + 249,\ P_S = q^2 + 4q + 6,\quad 0 < q < 13.$ Bu yerda q – tovar miqdori, P – esa tovarning so`mdagi narxi. Topish kerak:
a) Tovarning muvozanat narx va miqdori; *b*) Xarid yutug`i; *c*) Sotuv yutug`i.
Yechish. *a*) Muvozanat narx va miqdor talab va taklif teng bo`lgan nuqtadir, ya’ni: $P_D = P_s$

$\begin{cases} P_D = -q^2 - 5q + 249 \\ P_S = q^2 + 4q + 6 \end{cases} \Rightarrow 2q^2 + 9q - 243 = 0$ kvadrat tenglamaning ildizlari $q_1 = -135;\ q_2 = 9.$ q = 9 ni tenglamalar sistemasiga qo`yib, tovarning muvozanat narxini hosil qilamiz P = 123. Demak muvozanat nuqta P(9; 123).

b) Iste’mol yutug`i $I.Y. = \int_0^9 (-q^2 - 5q + 249 - 123) dq = \left[-\frac{q^3}{3} - \frac{5q^2}{2} + 126q \right] \Big/_0^9 = 688{,}5$.

c) Ishlab chiqaruvchining yutug`i $S.Y. = \int_0^{Q_E} [P_E - g(Q)] dQ$ formulaga ko`ra

$$S.Y. = \int_0^9 [123 - q^2 - 4q - 6] dq = \left(117q - \frac{q^3}{3} - 2q^2 \right) \Big/_0^9 = 648.$$



10.128 Tovarni ishlab chiqaruvchi yakka hokimlikka ega. Talab funksiyasi $P = -q^2 - 25q + 2000,\ 0 < q < 13;$ xarajat funksiyasi $TC = 0{,}1q^2 + 572q + 250,$ bu yerda P – tovarning narxi, q – bir kunda ishlab chiqariladigan tovar miqdori. Topish kerak:
a) foydani maksimallashtiradigan tovar narxi va miqdori;
b) foydani maksimallashtiradigan narxdagi iste’mol yutug`i.

10.129 – 10.147 misollarda berilgan talab va taklif funksiyalari uchun

a) muvozanat narx P va mahsulot miqdor q;
b) xarid yutug\`i;
c) ishlab chiqaruvchining yutug\`ini toping.

10.129 $P_S = 4 + q,\ P_D = 16 - 2q,\ 0 < q < 8.$

10.130 $P_S = 5 + 0{,}5Q,\ P_D 21 - 1{,}5Q.$

10.131 $P_S = q^2 + 5q,\ P_D = -q^2 - 5q + 1000,\ 0 < q < 29.$

10.132 $P_S = x^2 + 10x + 2,\ P_D = -x^2 + 2x + 332,\ 0 < x < 19.$

10.133 $P_S = q^2 + 4q + 6,\ P_D = -q^2 - 5q + 249,\ 0 < q < 13.$

10.134 $P_S = x^2 + 10x + 20,\ P_D = -x^2 - 2x + 580,\ 0 < x < 23.$

10.135 $P_S = x^2 + 7x + 5,\ P_D = -x^2 - 9x + 365,\ 0 < x < 15.$

10.136 $P_S = q^2 + 3q + 5,\ P_D = -q^2 - 11q + 5705,\ 0 < q < 70.$

10.137 $P_S = q^3 + q^2 + 100,\ P_D = q^3 - 900q + 9200,\ 0 < q < 17.$

10.138 $P_S = q^3 + 5q + 212,\ P_D = q^3 - 10q^2 + 25q + 1412.$

10.139 $P_S = \frac{q}{2} + 4,\ P_D = \sqrt{236 - 21{,}5q},\ 0 < q < 10.$

10.140 $P_S = \frac{x}{3} + 6,\ P_D = \sqrt{117 - 4x},\ 0 < x < 29.$

10.141 $P_S = \sqrt{5x + 9},\ P_D = \sqrt{737 - 2x},\ 0 < x < 368.$

10.142 $P_S = \sqrt{10q + 25},\ P_D = \sqrt{2425 - 10q},\ 0 < x < 242.$

10.143 $P_S = (q + 8)/4,\ P_D = (583 - 12q)^{1/3},\ 0 < x < 48.$

10.144 $P_S = q + 30,\ P_D = 225/(0{,}2q + 2).$

10.145 $P_S = \frac{20q + 1000}{q + 30},\ P_D = \frac{1225}{(0{,}1q + 2)^2}.$

10.146 $P_S = \frac{20q + 2250}{q + 30},\ P_D = \frac{3200}{(0{,}2q + 3)^2}.$

10.147 $P_S = e^{1+0,2x}, \quad P_D = e^{4-0,1x}.$

10.148 – 10.152 misollarda yakka hokimning tovariga bo`lgan talab va xarajat funksiyasi berilgan. Quyidagilarni topish kerak:
a) foydani maksimallashtiradigan narxni;
b) iste’mol yutug`ini toping.

10.148 $TC = 0,5q^2 + 200, \ P = 140 - 3q, \ 0 < q < 40.$
10.149 $TC = 2q^2 + 500, \ P = 300 - 4q, \ 0 < q < 75.$
10.150 $TC = 0,2q^2 + 210, \ P = 78 - 1,1q, \ 0 < q < 54.$
10.151 $TC = q^2 + 2q + 600, \ P = -q^2 - 3q + 382, \ 0 < q < 18.$
10.152 $TC = q^2 + 4q + 700, \ P = -0,1q^2 - 2q + 214, \ 0 < q < 40.$

Mavzu yuzasidan savollar

1. Funksiyaning boshlang`ichi deb va aniqmas integral deb nimaga aytiladi?
2. Aniqmas integralning asosiy xossalari.
3. Funksiyani integrallashning asosiy usullarini sanab o`ting.
4. Noto`g`ri kasr qanday integrallanadi?
5. Bo`lakalab integrallash formulasi.
6. Qanday funksiyalarni integrallashda aniqmas koeffisentlar usulidan foydalaniladi?
7. Sodda trigonometrik funksiyalarni integrallash usullari.
8. [*a*; *b*] kesmada *f*(*x*) funksiyani aniq integrallash deb nimaga aytiladi.
9. Aniq integralning geometrik ma’nosi.
10. Aniq integralning asosiy xossalari.
11. Nyuton Leybines formulasini keltirib chiqaring.
12. Aniq integralni hisoblashning asosiy usullari.

Adabiyotlar

87. Sh.Shorahmetov, B.Naimjanov, «Iqtisodchilar uchun matematica», - T.: «Fan va texnologiya»., 2007 y.
88. Жураев Т.Ж., Худойберганов Р.Х., Ворисов А. К., Мансуров Х. “Олий математика асослари” Т.: Узбекистон 1999 й.
89. Соатов Ё.У. “Олий математика”, Т.: Укитувчи, 1-жилд, 2-жилд, 1994 й., 3-жилд, 1996 й.
90. “Обший курс высшей математики для экономистов”. Подредак В.И.Ермакова. – М.: ИНФРА – М, 2006 г.
91. “Высшая математика для экономистов”. Под.ред. Н.Ш.Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2006 г.
92. М.С.Красс, Б.П.Чупрынов “Математика для экономического бакалаврианта”, - М.: Дело, 2006 г.
93. В.С.Шипачев “Курс высшей математики”, М.: Проспект, 2005 г.

94.Солодовников А., Бабайцев А.А., Браилов А.В. “Математика в экономике”, - М.:Финансы статистика, 2004 г.

95.Замков О.О., Толстоптенко А.Б., Черемных Ю.Н. “Математические методы в экономике”, - М.: ДИС 2004 г.

96. М.С.Красс “Математика для экономических специальностей ”, - М.: 2004 г.

97. Клименко Ю.И. “Высшая математика для экономистов”. – Москва 2005 г.

98. Масагутова Р.В. “Математика в задачах для экономистов” – Т. Укитувчи 1996 й.

99. Кремер Н.Ш. и др. “Практикум по высшей математике для экономистов” – М.: 2004 г.

100. «Сборник задач по высшей математике для экономистов» под редак. В.И.Ермакова. М.: Инфра – М, 2003 г.

101. Шапкин А.С. «Задачи с решениями по высшей математике теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию» - М.: 2008г.

102. Макаров С.И., Мищенко М.В., «Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики» Н.: 2008г.

103. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. «Основы математики и ее приложения в экономическом образовании» -М.: 2008

104. Ермаков В.И. «Общий курс высшей математика для экономистов». –Н: 2010г.

105. Ермаков В.И. «Общий курс высшей математика для экономистов». –Н: 2010г.

11. Differensial tenglamalar

11.1. Differensial tenglama haqida tushuncha

Umumiy yechim, umumiy integral

$n-$Tartibli oddiy differencial tenglama deb,

$$F\left(x,\, y,\, y',\, y'',\, \ldots,\, y^{(n)}\right)=0 \qquad (11.1)$$

ko`rinishidagi tenglamaga aytiladi, bu yerda $y=y(x)-$noma’lum funksiya.

(11.1) tenglamani ayniyatga aylantiradigan har qanday $y=\varphi(x)$ funksiya bu tenglamaning yechimi deyiladi. Agar yechim $\Phi(x,\, y)=0$ kabi oshkormas ko'rinishda berilsa, u (11.1) tenglamaning integrali deyiladi.

Agar tenglamadagi funksiya bir argumentli bo'lsa, bunday tenglama oddiy differensial tenglama deyiladi. Agar tenglamadagi funksiya, ko'p o'zgaruvchili bo'lsa uning xususiy hosilalari ham ishtirok etadi. Bunday tenglama xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

Biz faqat oddiy differensial tenglamalarni o'rganamiz va kelgusida qisqalik uchun diffensial tenglama deb ataymiz.

Differensial tenglamaga kiruvchi hosila (differensial)larning eng yuqori tartibi differensial tenglamaning tartibi deyiladi. Masalan: $y'=x+y,\ \ y'=x\cdot\cos x+y$ - birinchi tartibli differensial tenglamalar, $y''+y=x$ - esa ikkinchi tartibli differensial tenglama.

Differensial tenglamaning yechimi deb, tenglamani ayniyatga aylantiradigan differensiallanuvchi $y = y(x)$ funksiyaga aytiladi.

n – tartibli differensial tenglamaning *n* ta ixtiyoriy o`zgarmaslarga bog`liq bo`lgan yechimi, bu tenglamaning *umumiy yechimi* deyiladi. Bu o`zgaruvchilarning aniq son qiymatlarida olingan yechim differensial tenglamaning xususiy yechimi deyiladi.

(11.1) tenglama uchun Koshi masalasi boshlang`ich shartlar deb ataluvchi ushbu $y\big|_{x=x_0}=y_0,\ y'\big|_{x=x_0}=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topishdan iboratdir.

Differensial tenglamaning yechimini toppish uni integrallash deyiladi. Yechimni grafigi integral egri chizig'i deyiladi.

11.1 Berilgan $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$ (1) funksiya $y''-3y'+2y=0$ (2) tenglamaning yechimi ekanligini isbotlang.

Yechish. (1) – funksiyani ketma – ket differensiallab quyidagi $y'=c_1e^x+2c_2e^{2x}$, $y''=c_1e^x+4c_2e^{2x}$ tengliklarga kelamiz. Bu sistemani c_1e^x va c_2e^{2x} ga nisbatan yechib: $c_1e^x=2y'-y''$, $c_2e^{2x}=\frac{1}{2}(y''-y')$. Bu ifodalarni (1) ga qo`yib (2) ni hosil qilamiz.

11.2 Berilgan $y^3-cx^3+3xy=0$ (3) funksiya $y^3-(xy^2+x^2)y'+2xy=0$ (4) tenglamaning yechimi bo`lishini tekshiring.

11.3 $y'=2xe^{x^2}$ tenglamaning $y(0) = 1$ boshlang`ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

Quyidagi funktsiyalar differensial tenglamaning integrali ekanliginini tekshiring.

11.4 $x^2-xy+y^2=c^2, (x-2y)y'=2x-y$.

11.5 $x\sqrt{1+y^2}=cy, xy'-y=y^3$.

11.6 $y^2-2=C\cdot e^{\frac{1}{x}}, 2x^2yy'+y^2=2$.

11.7 $y=C_1\ln x-\frac{x^2}{4}+C_2, x(y''+1)+y'=0$.

Birinchi tartibli differensial tenglamalar

11.2 O`zgaruvchisi ajraladigan tenglamalar

Ushbu

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (11.2)$$

ko`rinishdagi tenglama o`zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar deyiladi, bu yerda $M(x)$, $N(y)$ – uzluksiz funksiyalar.

Tenglama hadma - had integrallash yo`li bilan yechiladi:

$$\int M(x)dx+\int N(y)dy=c\,.$$

11.8 $y' = \frac{y}{x}$ differensial tenglamani yeching.

Yechish. Tenglama o`zgaruvchisi ajraladigan differensial tenglama, uni quyidagi ko`rinishga keltiramiz: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Tenglikning ikkala tomonini integrallab, $\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$ umumiy integral va $y = cx$ – umumiy yechimni hosil qilamiz.

11.9 $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$ differensial tenglamaning $y(0)=1$ boshlang`ich shartni qanoatlantiradigan xususiy yechimni toping.

11.10 Tenglamani yeching: $yx^2dy - \ln xdx = 0$.

11.11 Tenglamani yeching: $y' + 1 = \sqrt{x + y + 1}$.

Differensial tenglamalarni yeching. Agar boshlang`ich shart berilgan bo`lsa xususiy yechimini toping:

11.12 Tenglamani yeching. $\sqrt{1 - y^2}dx - ydy = 0$

Yechish: O'zgaruvchilarni ajratib, $dx = \frac{ydy}{\sqrt{1 - y^2}}$ tenglikni hosil qilamiz, uni integrallab $x + c = -\sqrt{1 - y^2}$ yoki $(x + c)^2 + y^2 = 1$ yechimni topamiz.

11.13 Tenglamani yeching. $e^{-y}(1 + y') = 1$

Tenglamalarni yeching

11.14 $(3x - 1)dy + y^2dx = 0$

11.15 $3x^2ydx + 2\sqrt{4 - x^3}dy = 0$

11.16 $xy' + 2y = 2xyy'$

11.17 $e^{1-2x}(y^2 - 1)dy - dx = 0$

11.18 $x^2(y' - 1) = 2y'$

11.19 $e^{x+y}dx + ydy = 0$

11.20 $y' = (x + y)^2$

11.21 $(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0$

11.24 $\sqrt{y^2 - 1}dx = xydy$

11.25 $xy' + y = y^2$, $y(1) = 0{,}5$

11.26 $xyy' = 1 - x^2$

11.27 $y'y(1+e^x) = e^x$, $y(0) = 1$

11.30 $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$

11.31 $z' = 10^{x+z}$

11.32 $y' = \cos(y - x)$

11.33 $y'ctgx + y = 2; \quad y(0) = -1$

11.34 $y' = 3\sqrt[3]{y^2}; \quad y(2) = 0$

11.35 $xy' + y = y^2; \quad y(1) = 0{,}5$

11.36 $(x + 2y)y' = 1; \quad y(0) = -1$

11.37 $(1 + x^2)y^3dx - (y^2 - 1)x^3dy = 0; \quad y(1) = -1$

11.38 $(\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' - y = 0; \quad y(1) = 1$

11.39 $x^2(2yy' - 1) = 1; \quad y(1) = 0$

11.3 Bir jinsli differensial tenglamalar

Agar $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$ ayniyat o`rinli bo`lsa, $f(x, y)$ m darajali bir jinsli funksiya deyiladi. Masalan: $x\cos\frac{y}{x}$; $x - y\cos\frac{y}{x}$; $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$; $\frac{x^2 - y^2}{xy}$ funksiyalar bir jinsli funksiyalardir.

1) Agar $P(x, y)$ *va* $Q(x, y)$ bir xil o`lchovli bir jinsli funksiyalar bo`lsa, u holda

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad \textbf{(*)}$$

birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama deyiladi.

(*) tenglama $y = ux$ alamshtirish yordamida, bu yerda u yangi nomalumli funksiya, o`zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi.

11.40 Tenglamani yeching $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

Yechish: Tenglama bir jinsli bo'lgani uchun $y=ux$ almashtirish bajaramiz, natijada $y' = u + xu'$ ni hosil qilamiz. Tenglama $u+xu' = \dfrac{1+u}{1-u}$ yoki $xu' = \dfrac{1+u^2}{1-u}$ ko'rinishini oladi. O'zgaruvchilarni ajratib $\dfrac{1-u}{1+u^2}du = \dfrac{dx}{x}$ ni hosil qilamiz. Uni integrallab $arctgu - \dfrac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|x| + C_1$ ni topamiz.

.

Oldingi o'zgaruvchilarga qaytib $arctg\dfrac{y}{x} = \ln(1+\dfrac{y^2}{x^2}) + \ln|x| + C$ yoki $arctg\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2} + C$ ni hosil qilamiz.

11.41 Tenglamani yeching $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

11.43 Tenglamani yeching. $xdy = (x+y)dx$.

11.44 Tenglamani yeching.

$$y' = \frac{x+y}{x+1} + \left(\frac{y-1}{x-1}\right)^2$$

11.45 Tenglamani yeching $(x^2 - 2xy)dy - (xy - y^2)dx = 0$.

11.46 Tenglamalarni yeching.

1. $(x+y)dx + xdy = 0$
2. $xy^2dy - (x^2 + y^2)dx = 0$
3. $xy^2dy - (x^3 + y^3)dx = 0$
4. $x\cos\dfrac{y}{x}dy + \left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx = 0$
5. $x^3y' = y(y^2 + x^2)$
6. $\left(xye^{\frac{y}{x}} + x^2\right)dy - y^2C^{\frac{y}{x}}dx = 0$
7. $(xy - x^2)y' = y^2$
8. $xy^2dy = (x^3 + y^3)dx$
9. $xy' = y\ln\dfrac{x}{y}$
10. $y - xy' = x + yy'$
11. $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$
12. $(4x^2 + xy + y^2)dx + (4y^2 + 3xy + x^2)dy = 0$
13. $y' = \dfrac{1-3x-3y}{1+x+y}$
14. $(y+2)\,dx = (2x+y-4)\,dy$
15. $(y'+1)\ln\dfrac{y+x}{x+3} = \dfrac{y+x}{x+3}$
16. $y' = \dfrac{y+2}{x+1} + tg\dfrac{y-2x}{x+1}$

11.4 Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar

11.47 Tenglamani yeching. $y'+2y=4x$

$y'+2y=0$ tenglamani yechimini topamiz. $\frac{dy}{y}=-2dx,\qquad lny=-2x+C_1,\ y=C(x)e^{-2x}$
uni berilgan tenglamaga qo'yamiz.

$$y'+2y-4x=C'e^{-2x}-2Ce^{-2x}+2Ce^{-2x}-4x=0$$

$C(x)=4xe^{2x}$, $\quad C(x)=4\int xe^{2x}dx=e^{2x}(2x-1)+C_0$ umumiy yechim esa $y=C(x)e^{-2x}=2x-1+C_0e^{-2x}$, C_0 – ixtiyoriy o'zgarmas son.

11.48 Differensial tenglamani yeching. $y'-\frac{2}{x}y=2x^3$.

Yechish. Avval $y'-\frac{2}{x}y=0$ ni yechamiz. $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x}\Rightarrow\ln|y|=2\ln|x|\Rightarrow y=cx^2$.

Faraz qilaylik $C=C(x)$, u holda $y=C(x)x^2$ uni berilgan tenglamaga qo`yib, $u(x)$ ni topamiz:

$C'x^2-2xC-\frac{2}{x}x^2C=2x^3\Rightarrow C'=2x\Rightarrow C=x^2+C_1$ bundan berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $y=(x^2+C_1)x^2$.

11.48 -11.53 misollarda differensial tenglamalarni yeching, boshlang`ich sharti berilgan bo`lsa, xususiy yechimini toping.

11.48 $y'+ytgx=\frac{1}{\cos x}$

11.49 $x^2y'+xy+1=0$

11.50 $y=x(y'-x\cos x)$

11.51 $(2x+1)y'=4x+2y$

11.52 $y'-\frac{y}{1-x^2}-1-x=0,\ y(0)=0$

11.53 $xy'+y+e^{x}=0,\ y(a)=b.$

Bernulli tenglamasi

$y'-p(x)y=y^nq(x)$ ko`rinishidagi differensial tenglamaga ($n\neq 0, n\neq 1$). Bernulli tenglamasi deyiladi. Berilgan tenglamani $z=y^{1-n}$ almashtirish yordamida chiziqli differensial tenglama ko`rinishiga keltiriladi.

11.54 Differensial tenglamani yeching. $y'+\frac{2y}{x}=y^2x$.

Yechish. Ravshanki $y=0$ berilgan tenglamaning echimi bo'ladi. $y=0$ dan farqli echimlarini topish uchun berilgan tenglamaning ikkala tomonini y^2 ga bo'lib yuborib,

$$\frac{y^1}{y^2}+\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{y}=x \text{ tenglamaga kelamiz.}$$

$-\frac{1}{h}=z$ almashtirishni bajarsak, $z^1=\frac{y^1}{y^2}$ bo'lib, tenglama quyidagi chiziqli tenglamaga keladi:

$$z^1-\frac{2}{x}z=x \text{ bu tenglamani echib,}$$

$$y=-\frac{1}{x^2\ln|x|+cx^2} \text{ ekanligiga ishonch hosil qilamiz.}$$

Demak, berilgan tenglamaning echimlari

$$y=0 \text{ va } y=-\frac{1}{x^2\ln|x|+cx^2} \text{ bo'lar ekan.}$$

Differensial tenglamalarni yeching.

11.55 $y' + 2y = y^2 e^x$ **11.56** $(1 + x^2)\ y' + 2xy = xy^2,\ y(0) = 0,5$

11.57 $y' = y^4 \cos x + y\,tgx$.

11.5 Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar

Ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama deb

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (11.8)$$

ko`rinishdagi ga aytiladi.

Agar differensial tenglama

$$F(x, y', y'') = 0 \qquad (11.9)$$

ko`rinishida bo`lsa, u holda tenglamaning tartibi darajani pasaytirish $z = y'$ almashtirish yordamida bittaga pasaytirish mumkin. Bu holda $z' = y''$ boladi.

Agar tenglamaning ko`rinishi

$$F(y, y', y'') = 0 \qquad (11.10)$$

bo`lsa, u holda $z = y'$ almashtirishdan foydalaniladi va $z = z(y)$ y ning funksiyasi sifatida qaraladi. Bunda $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} = z\frac{dz}{dy}$

11.58 Tenglamani yeching: $y'' = y' ctgx$.

Yechish. Faraz qilaylik, $z = y'$. U holda $y'' = (y')' = z'$, berilgan tenglamani ko`rinishi $z' = z \cdot ctgx, z \neq 0$ bo`lsin. $\frac{dz}{z} = ctgx \cdot dx$ yoki $\frac{dz}{z} = \frac{d\sin x}{\sin x}$ hadma – had integrallab, $\ln|z| = \ln|\sin x| + \ln c_1$, bu yerda $c_1 > 0$, yoki $z = c_1 \sin x$.

$z = 0$ tenglamaning yechimi bo`lgani uchun, uning ixtiyoriy yechimi $z = c_1 \sin x$, c_1 ixtiyoriy son.

$z = \frac{dy}{dx}$ bo`lgani uchun $dy = c_1 \sin x\, dx$. Ohirgi tenglikni integrallab $y = - c_1 \cos x + c_2$ ni olamiz.

Tenglamalarni yeching.

11.59 $y'' = -\frac{x}{y}$ **11.60** $xy'' + y' = 0$ **11.61** $xy'' = y' \ln\frac{y'}{x}$.

11.6 O`zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar

O`zgarmas koeffitsientli ikinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deb

$$y'' + py' + qy = r(x) \qquad (11.11)$$

ko`rinishdagi tenglamaga aytiladi. Bu yerda $p$ va $q$ – haqiqiy sonlar, $r(x)$ – biror funksiya. Agar r($x$) aynan nolga teng bo`lsa, berilgan tenglama bir jinsli, aks holda bir jinsli emas deyiladi.

Bir jinsli differensial tenglamaga

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (11.12)$$

Quyidagi xarakteristik tenglama mos qo`yiladi.

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \qquad (11.13)$$

λ - o`zgaruvchi.

Quyidagi holler yuz berishi mumkin.

1) Agar (11.13) xarakteristik tenglama haqiqiy λ_1, λ_2 ildizlarga ega bo`lsa, u holda (11.12) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \qquad (11.14)$$

ko`rinishda bo`ladi.

2) Agar (11.13) xarakteristik tenglama bitta λ ikki karrali yechimga ega bo`lsa, u holda (11.12) tenglamaning yechimi

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x} \qquad (11.15)$$

ko`rinishda bo`ladi.

3) Agar (11.13) xarakteristik tenglama kompleks yechimga ega bo`lsa, $\lambda = \alpha \pm i\beta$, bu yerda $\alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, u holda (11.12) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = c_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + c_2 e^{\alpha x} \cos \beta x \qquad (11.16)$$

ko`rinishda bo`ladi.

11.62 Diferensial tenglamalarni yeching.

a) $2y'' - y' - y = 0;$ b) $4y'' + 4y' + y = 0;$ c) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Yechish. a) Xarakteristik tenglama $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ turli ildizlarga ega $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -0.5$, shuning uchun differensial tenglamaning umumiy yechimi $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x/2}$.

b) Bu holda xarakteristik tenglama $4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$ bitta ikki karrali λ=-1/2 yechimga ega bo`ladi, shuning uchun izlanayotgan umumiy yechim $y = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{-x/2}$.

c) $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ xarakteristik tenglama λ = - 1$\pm$ 2i kompleks ildizlarga ega bo`ladi, shuning uchun $y = c_1 e^{-x} \sin 2x + c_2 e^{-x} \cos 2x$.

Bir jinsli bo`lmagan differensial tenglamaning yechimini qaraymiz.

Birinchi usul. Ixtiyoriy o`zgarmasni variatsiyalash usuli.

Faraz qilaylik (11.11) differensial tenglamaga mos (11.12) bir jinsli tenglamasining yechimi

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (11.17)$$

bo`lsin.U holda (11.11) berilgan tenglamaning yechimi (11.17) ko`rinishda bo`ladi, bu yerda $c_1$ va $c_2$ – $x$ o`zgaruvchining funksiyalari. Bu funksiyalar

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = r \end{cases} \qquad (11.18)$$

sistemani yechish natijasida topilishi mumkin.

11.69 Tenglamani yeching. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

11.70 Tenglamani yeching. $y'' - y' - 2y = x \cdot e^x$

Tenglamalarni yeching

11.71 $y'' - 9y = 0$

11.72 $y'' - 2y' + 2y = 0$

11.73 $y'' - 2y' + y = 2e^x$

11.74 $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$

11.75 $y'' + y = \cos x$

11.76 $y'' + y' = \sin^2 x$.

11.7 Yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar

$y^{(n)} = f(x)$ differensial tenglama.

11.77 Tenglamani yeching $y^{(4)}(x) = \sin x$.

Yechish. Berilgan tenglamani 4 marta integrallaymiz: $\int y^4(x)\,dx = \int \sin x dx + C_1$,

$y'''(x) = -\cos x + C_1$, $\int (y'''(x))\,dx = \int (-\cos x + C_1) + C_2$,

$y''(x) = -\sin x + C_1 x + C_2$, $y'(x) = \cos x + C_1 \dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$, $y(x) = \sin x + C_1 \dfrac{x^3}{6} + C_2 \dfrac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$

Tenglamani yeching

11.78 $x''' = 1$.

11.79 $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, y(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\ln 2}{2}, y'(\dfrac{\pi}{4}) = 0$.

11.80 $y^{(20)} = \sin x$.

11.81 $y''' = \dfrac{6}{x^3}, y(1) = 2, y'(1) = 1, y''(1) = 1$.

$y'' = f(x, y')$ tenglama $y' = z(x), y'' = z'(x)$ almashtirish bilan birinchi tartibli tenglama keltiriladi.

$$y'' = f(y, y')$$

tenglama quyidagi

$$\frac{dy}{dx} = p(y), \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dy} = \frac{dy}{dx} = p'p$$

almashtirish bilan $p(y)$ funksiyaga nisbatan birinchi tartibli tenglamaga keltiriladi. $p' = \dfrac{1}{p} f(y, p)$.

11.82 Ko`shi masalasini yeching.

$$y'' = p\frac{dp}{dy} \quad p' = \frac{dp}{dx}$$

$$y'' + 2yy' = 0, y(0) = 2, y'(0) = -4 .$$

Yechish. $y' = p$, almashtirishdan keyin *p(y)* ga nisbatan birinchi tartibli tenglamani olamiz: $\dfrac{dp}{dy} + 2yp = 0$, yoki $\dfrac{dp}{dy} = -2y$. Bundan p ni topamiz: $\dfrac{dp}{dy} = -2y, \int dp = -\int 2y dy + C_1$,

$p = -y^2 + C_1$. Demak, $y' = -y^2 + C_1$. Bunga boshlang`ich qiymatlarni qo`yib -4=-4+C_1=>C_1=0.

Demak, $y' = -y^2$, $\dfrac{dy}{-y^2} = dx$, $\dfrac{1}{y} = x$ $\quad y = \dfrac{1}{x + C_2}$. Boshlang`ich shartni qo`yib

$2 = \dfrac{1}{0 + C_2} \Rightarrow C_2 = \dfrac{1}{2}$.

Shunday qilib xususiy yechim $y = \dfrac{2}{2x + 1}$.

Tenglamani yeching

11.83 $yy'' + (y')^2 = 0.$

11.84 $y^3 y'' = 1, y(\dfrac{1}{2}) = 1, y'(\dfrac{1}{2}) = 1$.

Yuqori tartibli chiziqli bir jinsli o`zgarmas koeffitsientli differensial tenglamalar.

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+...+p_{n-1}y'+p_ny=0 \qquad (11.21)$$

bu yerda $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – o`zgarmas sonlar. (11.21) ning yechimi $p=e^{\lambda x}$ ko`rinishida qidiramiz va $(\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}+...+p_{n-1}\lambda+p_n)e^{\lambda x}=0$, yoki

$$p_n(\lambda)=\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}+...+p_{n-1}\lambda+p_n=0 \qquad (11.22)$$

tenglama xarakteristik tenglama deyiladi.
Turli hollarni qaraymiz.

1) Agar xarakteristik tenglamaning yechimlari haqiqiy va turlicha bo`lsa, u holda

$$y_1=e^{\lambda_1 x}, y_2=e^{\lambda_2 x},..., y_n=e^{\lambda_n x}.$$

(11.21) ning chiziqli bog`liqsiz yechimlari, umumiy yechim esa,

$$y_{um}=\sum_{i=1}^{n}C_ie^{\lambda_i x}$$

ko`rinishda yoziladi.

2) Agar xarakteristik tenglama yechimlari orasida bir juft kompleks ildizlar bo`lsa:

$$\lambda_1=h+i\omega,\ \lambda_2=h-i\omega$$

bu yerda $i=\sqrt{-1}$, u holda ularga ikkita kompleks ildiz mos keladi.

$$\overline{y_1}=e^{\lambda_1 x}=e^{hx}(\cos\omega x+i\sin\omega x),$$

$$\overline{y_2}=e^{\lambda_2 x}=e^{hx}(\cos\omega x-i\sin\omega x).$$

Ulardan ikkita chiziqli bog`liqsiz haqiqiy yechimlar tuzish mumkin:

$$y_1=\frac{\overline{y_1}+\overline{y_2}}{2}=e^{hx}\cos\omega x,$$

$$y_2=\frac{b_1-b_2}{2i}=e^{hx}\sin\omega x.$$

3) Agar xarakteristik tenglama yechimlari orasida k karrali $\lambda=a$ yechim bo`lsa, u holda $y_s=x^3e^{\alpha x}$, $s=0,1,...,k-1$ (11.21) tenglamaning yechimi bo`ladi.

11.85 – 11.95 Differensial tenglamani yeching.

11.85 $y'''-2y''-y'+2y=0$.

Yechish. Xarakteristik tenglama $\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2=0$ ni yechib $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_2=2$ ni hosil qilamiz. U holda umumiy yechimning ko`rinishi $y_{um}=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}$.

11.86 $y'''-4y''-6y'+-4y=0$.

11.87 $y''''+4y'''+8y''+8y'+4y=0$.

11.88 $y''+y'-2y=0$ **11.89** $y''-2y'+y=0$

11.90 $y''-4y'+13y=0$ **11.91** $y'''-8y=0$

11.92 $y''''-y=0$ **11.93** $y''''''-6y''''+9y'''=0$

11.94 $y''''+2y''+y=0$ **11.95** $y''''-5y''+4y=0$.

11.8 Iqtisodiyotda differensial tenglamalar apparati

Faraz qilaylik *y=y(t)* biror ishlab chiqaruvchining t vaqt mobaynida realizatsiya qiladigan tovar miqdori. Tovarning narxi o`zgarmas bo`lsin. U holda *y=y(t)* funksiya

$$y'=ky \qquad (11.21)$$

tenglamani qanoatlantiradi, bu yerda k=mp*l*, m- investitsiya normasi, p - sotilish narxi, *l*- investitsiya kattaligi va mahsulot ishlab chiqarish tezligi orasidagi proparsionallik koeffisienti. (11.21) tenglama o`zgaruvchisi ajraladigan differensial tenglamadir.

Uning yechimi

$$y = y_0 e^{k(t-t_0)} \qquad (11.22)$$

bu erda $y_0 = y(t_0)$

(11.21) tenglama aholining o`sishi, dinamikasini ifodalaydi.

11.96 Agar $y' = ky$ tenglamadagi proporsionallik koeffisiyenti 0,1 ga teng bo`lsa, realizasiya qilingan mahsulot miqdori boshlang`ich vaqtdagi bilan solishtirilganda, qancha vaqt o`tgandan keyin ikki marta ko`payadi?

Realizasiya qilingan mahsulot miqdorini ikkilanishiga ketadigan vaqt 20% ga kamayishi uchun investitsiya normasini qancha foizga oshirish kerak?

Yechish. (11.22) da $t_0=0$, $k=0{,}1$, $y=2y_0$ deb faraz qilsak $2y_0 = y_0 e^{0,1t}$ tenglikka kelamiz, bundan $t = 10\ln 2 \approx 6{,}93$ (vaqt birligi). Endi $t_1 = 0{,}8t$, $k_1 = k/0{,}8 = 1{,}25k$, ya`ni investitsiya normasini 25% ga oshirish kerak.

Narxning o`zgarmasligi haqidagi faraz vaqtning qisqa oralig`i uchun o`rinli. Umimiy holda *p* narx miqdor y ga bog`liq kamayuvchi funksiyadir $p=p(y)$.

U holda $y' = ky$ tenglamaning ko`rinishi

$$y' = mlp(y)\cdot y \qquad (11.24)$$

o`zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo`lib qolaveradi.

(11.24) ko`rinishidagi tenglama bilan aholi soninig o`sishi, epidemiya rivojlanishining dinamikasi, reklama tarqalish prosessi va hakozolar ifodalanadi.

11.97. Talab va taklif funksiyalari mos ravishda $y = 25 - 2p + 3\frac{dp}{dt}$, $x = 15 - p + 4\frac{dp}{dt}$.

Agar boshlang`ich momentida p=9 bo`lsa, muvozanat narxinig narxga bog`liqligini toping.

11.98. Tovar narxi $p(y) = (5+3e^{-y})\, y^{-1}$; $m=0{,}6$, $l=0{,}4$, $y(0)=1$ tenglama bilan berilgan $y=y(t)$ ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorining vaqtga bog`liqligini toping.

11.99 Tovarga bo`lgan talab va taklif funksiyasining ko`rinishi: $y = 50 - 2p - 4\frac{dp}{dt}$, $x = 70 + 2p - 5\frac{dp}{dt}$. Agar $p(0) = 10$ bo`lsa,

a) Muvozanat narxning vaqtga bog`liqligini toping.

b) Muvozanat narxi turg`unmi ?

11.100 Biror tovarga bo`lgan talab va taklif funksiyasi $y = 30 - p - 4\frac{dp}{dt}$, $x = 20 + p + \frac{dp}{dt}$.

a) Muvozanat narxning vaqtga bog`lanishini toping.

b) Muvozanat narxi turg`unmi ?

Differensial tenglamalar nazariyasini iqtisodiyotning uzluksiz modellarida qo`llanishiga doir misoolarni qaraymiz, bu yerda erkin o`zgaruvchi *t* – vaqt. Bunday modellar uzoq vaqt mobaynida iqtisodiy sistemalar evolyutsiyasini tekshirishda foydali : ular iqtisodiy dinami - kaning tekshirish predmetidir.

Ishlab chiqarishning tabiiy o`sish modeli.

Birinchi tartibli differensial tenglamalar.

Faraz qilaylik, qandaydir mahsulot *p* narxda sotiladi Q(t) – t –vaqtda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori desak, u holda bu vaqt davomida pQ(t) ga teng daromad olinadi. Faraz qilaylik, ko`rsatilgan daromadning bir qismi mahsulot ishlab chiqarish investitsiyaga sarf bo`lsin, ya`ni

$$I(t)=mpQ(t) \qquad (1)$$

m – investitsiya normasi va 0 < m < 1.

Agar bozorni yetarlicha ta`minlangan degan tasavvurdan kelib chiqilsa, u holda ishlab chiqarishda foydalaniladi. Bu yana ishlab chiqarish tezligini (akselleratsiya) oshishiga olib keladi, ishlab chiqarish tezligi esa investitsiyaning o`sishiga proparsional, ya`ni

$$Q' = lI \qquad (2)$$

bu yerda 1/l – akselleratsiya normasi. (1) formulani (2) qo`yib

$$Q' = kQ, k = lmpQ \qquad (3)$$

ni olamiz. (3) differensial tenglama o`zgaruvchilari ajraladigan tenglama. Bu tenglama umumiy yechimining ko`rinishi Q = Ce^{kt}, bunda C – ixtiyoriy o`zgarmas.

Faraz qilaylik, boshlang`ich moment t = $t_0$ da mahsulot ishlab chiqarish hajmi $Q_0$ berilgan. U holda bu shartdan o`zgarmas C ni ifodalash mumkin:

$Q_0 = Ce^{kt_0}$ bunda $C = Q_0 e^{-kt_0}$. Bundan (3) tenglamaning xususiy yechimini topamiz:

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)} \qquad (4)$$

Shunga e`tibor berish kerakki, matematik modellar umumiylik xossasiga ega. Biologik tajribalardan kelib chiqadiki, bakteriyalarning ko`payish prosessi (4) tenglama bilan ifodalanadi. Radioaktiv parchalanish prosessi ham (4) formula bilan bilan ifodalanadigan qonuniyatga bo`ysunadi.

Raqobat sharoitida ishlab chiqarishning o`sishi

Faraz qilaylik, p = p(Q) – kamayuvchi funksiya, ya`ni mahsulot hajmining ortishi bilan bozorda uning narxi kamayadi : $dp/dQ$ < 0. Endi (1)-(3) formulalardan $Q$ ga nisbatan chiziqli bo`lmagan o`zgaruvchilari ajraladigan birinchi tartibli differensial tenglama olamiz:

$$Q' = \alpha\, p(Q)\cdot Q \qquad (5)$$

Bu tenglamaning o`ng tomonidagi barcha ko`paytuvchilar musbatligidan $Q' > 0$, ya`ni Q($t$) funksiya o`suvchi.

Funksiya o`sish xarakteri uning ikkinchi hosilasi bilan aniqlanadi. (5) tenglamadan

$$Q'' = \alpha\, p(Q)\cdot Q .$$

Talab elastikligini kiritib, bu tenglikni o`zgartirish mumkin: $E(p) = \dfrac{dQp}{dpQ}$,bundan

$Q'' = \alpha Q' p\left(1 + \dfrac{dpQ}{pdQ}\right)$, yoki $\dfrac{dQ}{dp} < 0$, bo`lgani uchun E < 0, nihoyat

$$Q'' = \alpha Q' p\left(1 - \frac{1}{|E|}\right) \qquad (6)$$

(6) tenglamadan elastik talabda $Q'' > 0$, ya`ni $|E| > 1$ ekanligi kelib chiqadi va Q(t) funksiyaning grafigi pastga qavariq. Bu esa progressiv o`sishi-ni bildiradi.

Noelastik talabda $|E| < 1$ va bu holda $Q'' < 0 - Q(t)$ funksiya yuqoriga qavariq, bu sekin o`sishini ( etarlicha ta`minlangan) bildiradi.

Soddalik uchun p(Q) bog`lanishni chiziqli funksiya ko`rinishda qabul qilamiz.

$P(Q) = a - bQ$, a > 0, b > 0. U holda (5) tenglamaning ko`rinishi:

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q \qquad (7)$$

bundan

$$Q'' = \alpha Q'(a - 2bQ) \qquad (8)$$

(7) va (8) munosabatlardan : $Q' = 0, Q = 0$ da va Q = a/b da $Q'' < 0, Q > a/2b$ da; Q=Q(t) funksiya grafigini egilish nuqtasi Q = $a/2b$.

Keynsning dinamik modeli

Dinamikaning asosiy komponentlari bo`lgan iqtisodiyotning daromad va harakat qismlari sodda balans modelini qaraymiz. Faraz qilaylik $Y$(t), $E$(t), $S$(t), $I$(t) – mos ravishda milliy daromad, davlat chiqimlari, iste`mol va investitsiya. Bu kattaliklarning barchasi *t* vaqtning funksiyasi sifatida qaraladi. U holda quyidagi munosabatlar o`rinli :

$$Y(t) = S(t) + I(t) + E(t),$$

$$S(t) = a(t)Y(t) + b(t), \qquad (9)$$

$I(t)$ $K(t)$ $Y'(t)$ bu yerda a(t) – iste`molga moyillik koeffitsienti (0 < $a$(t) < 1), $b$(t) – chekli iste`mol, K(t) – akseleratsiya normasi. (9) tenglamaga kiradigan barcha funksiyalar musbat.

(9) tenglamalarning ma`nosini oydinlashtiramiz. Barcha harajatlarning yig`indisi milliy daromadga teng bo`lishi kerak – bu balans birinchi tenglamada akslantirilgan. Xalq ho`jaligida umumiy iste`mol milliy daromadning bir qismi bo`lgan ichki iste`mol va chekli iste`moldan iborat mana shu tashkil etuvchilar ikkinchi tenglamada ko`rsatilgan. Nihoyat investitsiya kattaligi ixtiyoriy bo`lishi mumkin emas: u davlat tehnologiyasi va infrostrukturasi xarakterlaydigan kattalik akseleratsiya normasini ohirgi milliy daromadga ko`paytmasi bilan aniqlanadi.

Faraz qilaylik, $a(t)$, $b(t)$, $k(t)$, $E(t)$ funksiyalar berilgan – ular davlat evolyutsiyasi va faoliyatini xarakterlaydi. Milliy daromad dinamikasi $Y(t)$ ni topish talab qilinadi.

Ikkinchi tenglamadan S(t) ni va uchinchi tenglamadan I(t) ni birinchi tenglamaga qo`yamiz. $Y(t)$ funksiyaga nisbatan chiziqli bir jinsli bo`lmagan birinchi tartibli differensial tenglama olamiz :

$$Y' = \frac{1 - a(t)}{k(t)} Y - \frac{b(t) + E(t)}{k(t)} \qquad (10)$$

Biz asosiy parametrlar *a*, *b*, *k* ni o`zgarmas sonlar deb faraz qilib, ancha sodda holni tekshiramiz. U holda (10) tenglama o`zgarmas koeffitsientli birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaga kelib soddalashadi:

$$Y_p' = \frac{1 - a}{k} Y - \frac{b + E}{k} \qquad (11)$$

Ma`lumki, bir jinsli bo`lmagan tenglamaning umumiy yechimi uning qandaydir xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig`indisidan iborat. (11) tenglamaning xususiy yechimi sifatida $y' = 0$ dagi, ya`ni muvozanat yechimini olamiz, ya`ni

$$Y_p = \frac{b + E}{1 - a} \qquad (12)$$

Ko`rish qiyin emaski, bu kattalik musbat. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $Y = C \exp\left(\frac{1 - a}{k} t\right)$ formula bilan beriladi. (11) tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko`rinishda :

$$Y(t) = \frac{b + E}{1 - a} + Ce^{\frac{1-a}{k}t} \qquad (13)$$

Agar vaqtning boshlang`ich momentida $Y_0 < Y_p$ bo`lsa, u holda $C = Y_0 - Y_p < 0$ va egri chiziqlar (12) muvozanat yechimidan pastga keladi, ya`ni milliy daromad vaqt o`tishi bilan masalaning berilgan parametrlari *a*,*b*,*k* va *E* da kamayadi, chunki (13) da eksponenta darajasi musbat. Agar $Y_0 > Y_p$ bo`lsa, u holda C > 0 va vaqt o`tishi bilan milliy daromad o`sadi, integral egri chiziqlar $Y = Y_0$ muvozanat to`g`ri chizig`idan yuqoriga ketadi.

O`sishning noklassik modeli

Faraz qilaylik, $Y = F(K,L)$ milliy daromad, bu yerda *F* – bir jinsli birinchi tartibli ishlab chiqarish funksiyasi: ($F(tK, tL) = F(K,L)$), *K* – sarflangan mablag` hajmi, *L* – mehnat sarfi hajmi. Fond qurollanish kattaligi $k = K/L$ bo`lsin. U holda ishlab chiqarish unumdorligi quyidagi formula bilan aniqlanadi :

$$f(k) = \frac{F(K,L)}{L} = F(K,l) \qquad (14)$$

Bu bo`limda qaralayotgan masalaning maqsadi qurollanish fond dinamikasini vaqtning funksiyasi sifatida ifodalashdir.

Har qanday model ma`lum farazlarga asoslanganligi uchun biz ham ba`zi bir parametrlarni kiritishimiz zarur.

Quyidagilar bajariladi, deb faraz qilamiz :

1. Mehnat resurslari vaqtida tabiiy o`sish o`rinli

$$L' = \alpha L \qquad (15)$$

2. Mablag` ishlab chiqarish fondiga va amortizatsiyaga sarflanadi, ya`ni $I = K' + \beta K$, bu yerda β - amortizatsiya normasi.

Agar *l* – investitsiya (sarflangan mablag` ) normasi bo`lsa, u holda

$$I = lY = K' + \beta K \text{ yoki } K' = lF(K,L) - \beta K \quad (16)$$

k – fond qurollanish ta`rifidan kelib chiqadiki, *lnk=lnK – lnL*.

Bu tenglikni *t* bo`yicha differensiallab,

$$k' = lf(x) - (\alpha + \beta)k \qquad (17)$$

tenglamani olamiz, bu yerda *f* (*x*) funksiya (14) formula bo`yicha aniqlangan. Olingan (17) munosabat o`zgaruvchilari ajraladigan birinchi tartibli chiziqli bo`lmagan differensial tenglama. Bu tenglamaning statsionar yechimini aniqlaymiz: $k' = 0$ shartdan,

$$lf(k) - (\alpha + \beta)k = 0 \qquad (18)$$

ya`ni *k = const* – o`zgarmas kattalik, chiziqli bo`lmagan (18) algebraik tenglamaning yechimi.

Ishlab chiqarish funksiyasi $F(K,L) = \sqrt{KL}$ uchun (17) tenglamaning integral egri chiziqlari va statsionar yechimini toping.

(14) dan $f(k) = \sqrt{k}$, u holda (17) tenglamaning ko`rinishi

$$\frac{df}{dt} = l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k .$$

Bu tenglamaning statsionar yechimi quyidagi tenglikdan kelib chiqadi: $l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k = 0$, bundan (17) tenglamaning nol bo`lmagan xususiy yechimi $k_{st} = l^2 / (\alpha + \beta)^2$.

(17)differensial tenglamani “o`zgaruvchilarni ajratish” usuli bilan yechamiz.

$$\frac{dk}{\sqrt{k}\left[l - (\alpha + \beta)\sqrt{k}\right]} = dt$$

Bu tenglamani $\sqrt{k} = z$ almashtirishdan so`ng integrallab, umumiy yechimining oxirgi ko`rinishini olamiz.

$$k(t) = \left[\frac{1}{\alpha + \beta} + C\exp\left(-\frac{\alpha + \beta}{2}t\right)\right]^2 \qquad (19)$$

Demak, o`zgarmaydigan parametrlarda $l, \alpha, \beta$ fond qurollanish funksiyasi o`z stasionar qiymatiga boshlang`ich shartlardan bog`liqsiz ravishda turg`un barqaror intiladi. Bu stasionar nuqta $k = k_{st}$ barqaror muvozanat nuqtasi bo`-ladi.

Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar

Oldindan aytib beriladigan narxlar bilan bozor modeli

Prognoz qilinadigan narxlar bilan bozor modelini qaraymiz. Oddiy bozor modellarida talab va taklif odatda tovarning shu kundagi narxi bilan bog`liq bo`ladi. Lekin talab va taklif aniq hollarda narxning tashkil qilinishi va narxning o`zgarishi tempi bilan bog`liq bo`ladi. *t* vaqt bo`yicha uzluksiz va differensiallanuvchi funksiyalar modelida bu xarakteristikalar mos ravishda *p*(*t*) narx funksiyasini birinchi va ikkinchi hosilalarini tavsiflaydi.

Misol: Faraz qilaylik, talab funksiyasi D va taklif funksiyasi S, narx funksiyasi p va uning hosilalari bilan quyidagicha bog`lanishga ega bo`lsin.

$$\begin{aligned} D(t) &= 3p'' - p' - 2p + 18, \\ S(t) &= 4p'' + p' + 3p + 3 \end{aligned} \qquad (20)$$

(20) da qabul qilingan bog`lanishlar to`la realistik (amaliy): buni narx funksiyasining hosilalari qo`shiluvchilarda oydinlashtiramiz.

1. Talab narxning o`zgarishi bilan "qizdiriladi". Agar temp o`ssa $(p' > 0)$, u holda bozorning talabga qiziqishi ortadi va aksincha. Narxning tez o`sishi xaridorni qo`rqitadi, shuning uchun narx funksiyasining birinchi hosilasi manfiy ishora bilan kiradi.

2. Taklif yana ko`proq o`lchamda narxning o`zgarish tempi bilan kuchaytiriladi, shuning uchun S(t) funksiyadagi $p''$ ning koeffisienti D(t) dagiga nisbatan katta. Shuningdek narxning o`sishi taklifni oshiradi, shuning uchun p' ni o`z ichiga oluvchi qo`shiluvchi S(t) ning ifodasiga (+) ishora bilan kiradi.

Narxning vaqtga bog`lanishini o`rnatish talab qilinsin. Bozorning muvozanat holati D=S tenglik bilan xarakterlanganligi uchun (20) tenglamaning o`ng tomonlarini tenglashtiramiz va soddalashtirib, quyidagini olamiz :

$$p'' + 2p' + 5p = 15 \qquad (21)$$

(21) munosabat p(t) funksiyaga nisbatan chiziqli bir jinsli bo`lmagan ikkinchi tartibli differensial tenglama. Bunday tenglamaning umumiy yechimi biror hu- susiy yechimi va unga mos bir jinsli

$$p'' + 2p' + 5p = 0 \qquad (22)$$

tenglamaning umumiy yechimi yig`indisidan iboratdir.
(22) uchun xarakteristik tenglama: $k^2 + 2k + 5 = 0$. Uning ildizlari qo`shma kompleks sonlar: $k_{1,2} = -1 \pm 2i$ va natijada (22) tenglamaning umumiy yechimi quyidagi formula bilan beriladi: $\tilde{p}(t) = e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$, bu yerda $c_1$ va $c_2$ – ixtiyoriy o`zgarmaslar.

Bir jinsli bo`lmagan (21) tenglamaning xususiy yechimi sifatida $p=p_{st}$ – narxni belgilaydigan o`zgarmas kattalikni olamiz. Buni (21) ga qo`ysak, p_{st} ni qiymatini olamiz:
$p_{st} = 3$. Shunday qilib, (21) tenglama umumiy yechimining ko`rinishi

$$P(t) = 3 + e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) \qquad (23)$$

Ko`rish qiyin emaski, $t \to \infty$ da $p(t) \to p_{st} = 3$, ya`ni barcha integral egri chiziqlar p=3 gorizontal asimptotaga ega va uning atrofida tebranadi. Bu barcha narxlar o`rnatilgan $p_{st}$ narxga intilishini va uning atrofida tebranishini bildiriladi, bu tebranishlarning amplitudasi vaqt o`tishi bilan o`sa boshlaydi.

Bu masalaning xususiy yechimlarini ikki variantda keltiramiz:

1. Koshi masalasi. Faraz qilaylik, boshlang`ich momentda narx va uning o`zgarish tendensiyasi ma`lum : $t = 0$, $p = 4$, $p' = 1$. Birinchi shartni (23) formulaga qo`yib $p(0) = C_1 + 3 = 4$, bundan $C_1 = 1$ ni olamiz, ya`ni: $p(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + C_2 \sin 2t)$

Buni differensiallaymiz :

$$p'(t) = e^{-t}[(2C_2 - 1)\cos 2t - (C_2 + 2)\sin 2t] \qquad (24)$$

Endi Koshi masalasining ikkinchi shartini qo`llaymiz: $p'(0) = 2C_2 - 1 = 1$, bundan $C_2 = 1$.

Nihoyat Koshi masalasi yechimining ko`rinishi quyidagicha bo`ladi:
$P(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t)$; yoki ancha qulay ko`rinishda $p(t) = 3 + \sqrt{2}e^{-t}\cos(2t - \pi/4)$.

2. Aralash masala. Faraz qilaylik, vaqtning boshlang`ich momentida talab va taklif ma`lum : t = 0, p = 4, D = 16.

Birinchi boshlang`ich shart oldingidek bo`lgani uchun, bu yerda ham (24) yechimga ega bo`lamiz. U holda *p(t)* funksiyaning hosilalari quyidagi formulalar bilan ifodalanadi:

$$p'(t) = e^{-t}[(2C_2 - 1)\cos 2t - (C_2 + 2)\sin 2t],$$
$$p''(t) = -e^{-t}[(4C_2 + 3)\cos 2t - (3C_2 - 5)\sin 2t].$$

Bunan $p'(0) = 2C_2 - 1$ va $p''(0) = -4C_2 - 3$.

Bu tengliklarni *D(t)* ning (20) ko\`rinishini hisobga olgan holda masalaning ikkinchi *D*(0)=16 shartiga qo\`yib, $C_2=-1$ ni olamiz. Shunday qilib, berilgan masala yechimining ko\`rinishi $p(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t - \sin 2t)$ yoki ancha qulay formada:

$$p(t) = 3 - \sqrt{2}e^{-t}\sin(2t - \pi/4) \qquad (25)$$

11.101. Usti ochiq rezervuardagi suvning dastlabki temperaturasi 70^0S edi, 10 minutdan so'ng suvning temperaturasi 65^0S bo'ldi, rezervuarni o'rab turgan muhitning temperaturasi 15^0S. 1) Boshlang'ich momentdan 30 minut keyin rezervuardagi suvning temperaturasini toping; 2) qaysi vaqtda rezervuardagi temperatura 20^0S bo'lishini toping.

Ye**chilishi.** 1. Suvning o'zgaruvchi temperaturasini T bilan belgilab, suvning sovish qonuni funksiyasini vaqtning funksiyasi sifatida belgilaymiz. Suvning sovish tezligi t va T larni bog'lovchi funksiyaning o'zgarish tezligidir, ya'ni u $\frac{dT}{dt}$ hosila bo'ladi.

$\frac{dT}{dt}$ tezlik rezervuardagi suv temperaturasi bilan rezervuarni o'rab olgan muhit temperaturasi orasidagi ayirmaga proporsional, ya'ni $R\left(T - 15^0\right)$, bunda R - proporsionallik koeffisienti. U holda

$$\frac{dT}{dt} = R\left(T - 15^0\right).$$

O'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\frac{dt}{T-15}Rdt.$$

2. (2) tenglamani integrallaymiz:

$$\int \frac{dT}{T-15} = \int RdT,\ \ln\left(T - 15^0\right) = Rt + C$$

yoki

$$T - 15 = e^{Rt} + C = e^{Rt}e^{C} = e^{Rt}C_1, \text{ bundan } T = C_1e^{Rt} + 15 \qquad (3)$$

Sovush qonunini hosil qildik, bu erda t - vaqt va T - suv temperaturasi – chekli o'zgaruvchilar.

3. Berilgan boshlang'ich shartlar $t = 0,\ T = 70^0 C$ da C o'zgarmas miqdorni topamiz.

Quyidagiga ega bo'lamiz:

$$70^0 = C_1e^{R\cdot 0} + 15^0 \text{ yoki } 55^0 = C_ie^0 = C_1 \cdot 1 = C_1,\ C_1 = 55^0 \qquad (4)$$

(4) tenglikdagi C_1 ning qiymatini (3) tenglikka qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$T = 55^0e^{Rt} + 15^0 \qquad (5)$$

4. R o'zgarmas miqdorni topamiz. Masalaning shartida $t = 10$ minutdan so'ng $T = 65^0 C$ bo'lishi berilgan. Bu qiymatlarni (5) tenglamaga qo'yib, ushbuni hosil qilamiz:

$$65^0 = 55^0e^{R\cdot 10} + 15$$

yoki

$$50^0 = 55^0e^{10R},$$

yoki

$$\frac{10}{11} = e^{10R}. \qquad (6)$$

(6) tenglikni logarifmlab, yozamiz:

$$\lg 10 - \lg 11 = 10R\ lq\, e,$$

bundan

$$R=\frac{1-\lg 11}{10\lg e}=\frac{1-1{,}0414}{10\cdot 0{,}4343}=-\frac{0{,}0414}{4{,}343}=-0{,}009532 \qquad (7)$$

R ning qiymatini (5) tenglamaga qo'yib t va T o'zgaruvchilarni bog'lovchi sovish qonunini hosil qilamiz:

$$T=55^0 e^{-0{,}009532t}+15^0. \qquad (8)$$

5. Suvning boshlang'ich momentdan 30 minut keyingi temperaturasini topamiz. (8) tenglamaga $t=30$ minut qiymatni qo'yamiz:

$$T=55^0 e^{-0{,}009532\cdot 30}+15^0,$$

bundan

$$T=55^0 e^{-0{,}286}+15^0 .$$

Hisoblaymiz:

$x=55\cdot e^{-0{,}286}$, $\lg x=\lg x=\lg 55-0{,}286\ \lg e=1{,}7404-0{,}286\times 0{,}4343=1{,}7404-0{,}1242=1{,}6162$,

$x=41{,}32\approx 41$

U holda

$$T=41^0+15^0=56^0 .$$

6. Qancha vaqtdan keyin rezrauardagi suvning temperaturasi 20^0 S bo'lishini topamiz. (8) tenglamaga $T=20^0$ qiymatni qo'yamiz:

$$20^0=55^0 e^{-0{,}009532\ t}+15^0 \text{ yoki } 5^0=55^0 e^{-0{,}009532\ t},$$

bundan

$$e^{-0{,}009532t}=\frac{1}{11}\approx 0{,}0909 \text{ yoki } -0{,}009532\,t\ \lg e=\lg 0{,}0909=\overline{2}{,}9586,$$

$$t=-\frac{\overline{2}{,}9586}{0{,}009532\cdot 0{,}4343}=\frac{1{,}041}{0{,}009532\cdot 0{,}4343}=251\text{ min}=4 \text{ soat } 11 \text{ min.}$$

11.102. Radiyning emirilish tezligi berilgan har bir vaqt momentida radiyning dastlabki miqdoriga proporsional ekanligi tajribada aniqlangan. Boshlang'ich vaqt momentida $t=0$ R_0 gramm radiy bor edi. Radiy miqdorini istalgan t vaqt momenti uchun hisoblash formulasini tuzing.

11.103. Radiy o'zining dastlabki miqdoriga proporsional tezlik bilan emiriladi. Hozirgi momentda bor bo'lgan miqdorining yarmisi qancha vaqtdan keyin emiriladi. Radiy uchun proporsioallik koeffisienti $R=0{,}00044$ ekanligi aniqlangan (vaqt o'lchov biriligi ____ yil).

11.104. Suyuqlikda aylanayotgan diskning burchak tezligi ishqalanish hisobiga sekinlashadi. Ishqalanish burchak tezlikka proporsional ekanligi aniqlangan. 1)iagar disk $t=0$ bo'lganda 12 rad/sek tezlik bilan aylangan bo'lib, $t=10$ sekunda esa uning tezligi 8 rad/sek bo'lgan bo'lsa, disk $t=120$ sek momentda qanday tezlik bilan aylanishini toping;
2) vaqtning qaysi momentida uni 1 rad/sek tezlik bilan aylinishini toping.

11.105. Suyuqlikda aylanayotgan diskka ta'sir qilayotgan sekinlashtiruvchi kuch burchak tezlikka proporsional. Agar disk $t=0$da 20 rad/sek tezlik bilan, $t=8$ da esa 16 rad/sek tezlik bilan aylansa, diskning 2 rad/sek tezlik bilan aylanadigan vaqt momentini toping.

Differensial tenglamalarning iqtisodiyotda qo'llanlishi

Faraz qilaylik $y=y(t)$ - ishlab chiqarilgan va vaqtning t onida sotilgan mahsulot miqdori. Bu tovar narxi (qaralayotgan vaqt oralig'ida o'zgarmas). U holda $y=y(t)$ funksiya

$$y' = R\, y \qquad (1)$$

tenglamani qanoatlantiradi, bu erda $R = mpl$, $m-$investisiya normasi, $p-$sotilish narxi, $l-$investisiya kattaligi va mahsulot ishlab chiqarish tezligi orasidagi proporsionallik koeffisienti.

(1) tenglama o'zgaruvchilari ajaraladigan differensial tenglama. Uning echimi:

$$y = y_0 e^{k(t-t_0)}$$

bu erda $y_0 = y(t_0)$ (2)

SHuningdek, (1) tenglama aholining ko'payishi, doimiy inflyasiya jarayonida narx – navoning o'sishini bildiradi.

11.106. Qancha vaqt oralig'ida realizasiya qilingan mahsulot miqdori boshlang'ich miqdor bilan solishtirilgan ikki baravar ko'payadi, (1) tenglamadagi proporsionallik koeffisienti $R = 0{,}1$. Realizasiya qilingan mahsulot miqdori ikki marta oshishi uchun zarur bo'ladigan vaqt oralig'i 20% ga qisqartirish uchun investisiya normasini necha foiz orttirish kerak.

Yechish: Faraz qilaylik (2) tenglamada $t_0 = 0,\ \ k = 0{,}1\ \ \ y = 2y_0$ bo'lsa, u holda $2y_0 = y_0 l^{0,1t}$ ga kelamiz, bundan $t = 10\ln 2 \approx 6{,}93$ (vaqt birligi) $t_1 = 0{,}8t$ deb faraz qilib $k_1 = k/0{,}8 \approx 1{,}25k$ ni, ya'ni investisiya normasini 25% orttirish kerakligini hosil qilamiz.

Tajribadan ma'lumki, narxning o'zgarmasligi haqidagi faraz (to'yinmagan bozor) faqat vaqtning qisqi oralig'iga tegishli.

Umumiy holda p narx realizasiya qilingan mahsulot miqdori y ning $(p = p(y))$ kamayuvchi funksiyasi.

$$y' = mlp(y)\cdot y\,, \qquad (3)$$

yana o'zgaruvchisi ajaraladigan tenglama bo'lib qoladi.

Shuningdek (3) tenglama aholining ko'payishi, epedemiyaning tarqalishi, reklama tarqatilish jarayoni va h.k.larni ifodalaydi.

2. Tog' – kol posyolkasi aholisi sonining vaqt o'tishi bilan quyidagi tenglama bilan yoziladi:

$$y' = 0{,}3y\left(2 - 10^{-4}y\right)$$

bu erda $y = y(t)$, t - vaqt (yil). Vaqtning boshlan0ich onida posyolki aholisi 500 kishi. Uch yildan keyin aholi soni qancha bo'ladi.

Echish: tenglamadagi o'zgaruvchilarni ajratib, quyidagi tenglamaga kelamiz.

$$\frac{dy}{0{,}3y\left(2-10^{-4}y\right)} = dt$$

va bu tenglikni hadma – had integrallab

$$\ln\left|\frac{y}{2-10^{-4}y}\right| = 0{,}6t + C_1,$$

yoki $\dfrac{y}{2-10^{-4}y} = C\,e^{0,t}$ (4)

ni hosil qilamiz.

C o'zgarmasning qiymati boshlan0ich shartdan topiladi: $y(0) = 500$ bo'lgani uchun. C ս $256{,}4$. (4) tenglikdan u funksiyaning ifodasi

$$y = \frac{512{,}8\ e^{0{,}6t}}{1 - 0{,}02564\ e^{0{,}6t}}$$

U holda $y(3) = 512{,}8e^{1{,}8} / \left(1 - 0{,}02564\ e^{1{,}8}\right) \approx 2685$.

Eslatib o'tamiz, talabaning elastikligi (narxga nisbatan)

$$E_p(y) = \frac{pdy}{ydp}.$$

Ba'zi hollarda elastiklik berilganda talab funksiyasi qiziqish uyg'otadi.

11.107. Agar $E_p = -2 = const$ va $y(3) = \frac{1}{6}$ bo'lganda talab funksiyasini toping.

11.108. Talab va taklif (mos ravishda)

$$y = 25 - 2p + 3\frac{dp}{dt},$$

$$x = 15 - p + 4\frac{dp}{dt}$$

Boshlang'ich vaqtda $p = 9$ bo'lsa muvozanat narxning, vaqtga bog'liqligini toping.

11.109. Talab funksiyasi $p(y) = 2 - y;\ \ l = 1,\ \ y(0) = 0{,}5$ berilgan, sotilgan mahsulot hajmining ifodasini toping.

11.110. Biror tarmoqning vaqtning t onida olgan daromadi $Y(t)$, $I(t)$ – investisiya va $C(t)$ – iste'mol kattaligining yig'indisidan iborat

$$Y(t) = I(t) + C(t) \tag{5}$$

Daromadning o'sish kattaligini investisiya kattaligiga proorsional, ya'ni

$$b\ Y'(t) = I(t) \tag{6}$$

bu erda b – daromad o'sishining kapital sig'im koeffisienti.

Faraz qilaylik $C(t)$ olinayotgan daromadning ajratilgan qismi: $C(t) = (1 - m)(t)$, bu erda m – investisiya normasi. U holda (5) va (6) dan

$$Y' = \frac{m}{b}Y \tag{7}$$

bu esa (1) tenglamaga teng kuchli.

11.111. Iste'mol kattaligi $C = 2t$, daromad o'sishining kapital sig'imi koeffisienti $b = \frac{1}{2}$, $y(o) = 2$, ma'lum bo'lsa daromad funksiyasi $Y = Y(t)$ ni toping.

11.112. To'yilmagan bozor sharoitida, agar vaqtning boshlang'ich onida ishlab chiqarish hajmi $y_0 = y(0) = 24$ (sh.b), investisiya normasi 0,6, sotilish narxi 0,15 (sh.b) va $l = 0{,}4$ bo'lsa 6 oydan keyingi ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

11.113. Tovarning narxi $p(y) = \left(5 + 3e^{-y}\right)y^{-1}$, $m = 0{,}6$ $e = 0{,}6$, $l = 0{,}4$ $y(0) = 1$.

Mavzu yuzasidan savollar.

1. Qanday tenglamalar differensial tenglamalar deyiladi?
2. Differensial tenglamaning yechimi deb nimaga aytiladi?
3. Differensial tenglamaning qanday yechimi umumiy, qanday yechimi xususiy deyiladi?

4. Qanday tenglama o`zgaruvchisi ajraladigan differensial tenglama deyiladi?
5. Qanday tenglama bir jinsli differensial tenglama deyiladi?
6. Qanday tenglama chiziqli differensial tenglama deyiladi?
7. O`zgarmasni variatsiyolash usuli nima?

Adabiyotlar

1. Sh.Shorahmetov, B.Naimjanov, «Iqtisodchilar uchun matematica», - T.: «Fan va texnologiya»., 2007 y.
2. M.С.Солохитдинов, Г.Н.Насритдинов. “Оддий дифференциал тенгламалар”. Т., «Узбекистон» 1994 й.
3. Пискунов И.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука. 1978 г.
4. Клименко Ю.И. “Высшая математика для экономистов теория, примеры и задачи”. М.: Экзамен 2005 г.
5. М. С. Красс, Б.П.Чупринов. “Основы математики и ее приложения в экономическом образовании”, - М.: Дело, 2000 г.
6. «Сборник задач по высшей математике для экономистов» под редакцей В.И.Ермакова. М.: Инфра – М, 2003 г.
7. Кремер Н. М. и другие. – “Высшая математика для экономистов”, - М.: 2004 г.
8. Кремер Н.Ш. и др. “Практикум по высшей математике для экономистов” – М.: 2004 г.
9. Минорский И. П., “Сборник задач по высшей математике ” – М.: 2004 г.
10. Соатов Ё.У. “Олий математика”, Т.: Укитувчи, 1-жилд, 2-жилд, 1994 й., 3-жилд, 1996 й.
11. Шапкин А.С. «Задачи с решениями по высшей математике теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию» - М.: 2008г.
12. Макаров С.И., Мищенко М.В., «Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики» Н.: 2008г.
13. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. «Основы математики и ее приложения в экономическом образовании» -М.: 2008
14. Ермаков В.И. «Общий курс высшей математика для экономистов». –Н: 2010г.
15. Ермаков В.И. «Общий курс высшей математика для экономистов». –Н: 2010г.

11. Differensial tenglamalar

11.1. Differensial tenglama haqida tushuncha

Umumiy yechim, umumiy integral

$n-$Tartibli oddiy differencial tenglama deb,

$$F\left(x,\, y,\, y',\, y'',\, \dots,\, y^{(n)}\right)=0 \qquad (11.1)$$

ko`rinishidagi tenglamaga aytiladi, bu yerda $y=y(x)-$noma’lum funksiya.

(11.1) tenglamani ayniyatga aylantiradigan har qanday $y=\varphi(x)$ funksiya bu tenglamaning yechimi deyiladi. Agar yechim $\Phi(x,\, y)=0$ kabi oshkormas ko’rinishda berilsa, u (11.1) tenglamaning integrali deyiladi.

Agar tenglamadagi funksiya bir argumentli bo’lsa, bunday tenglama oddiy differensial tenglama deyiladi. Agar tenglamadagi funksiya, ko’p o’zgaruvchili bo’lsa uning xususiy hosilalari ham ishtirok etadi. Bunday tenglama xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

Biz faqat oddiy differensial tenglamalarni o’rganamiz va kelgusida qisqalik uchun diffensial tenglama deb ataymiz.

Differensial tenglamaga kiruvchi hosila (differensial)larning eng yuqori tartibi differensial tenglamaning tartibi deyiladi. Masalan: $y' = x + y,\ \ y' = x \cdot \cos x + y$ - birinchi tartibli differensial tenglamalar, $y'' + y = x$ - esa ikkinchi tartibli differensial tenglama.

Differensial tenglamaning yechimi deb, tenglamani ayniyatga aylantiradigan differensiallanuvchi $y = y(x)$ funksiyaga aytiladi.

n – tartibli differensial tenglamaning n ta ixtiyoriy o`zgarmaslarga bog`liq bo`lgan yechimi, bu tenglamaning *umumiy yechimi* deyiladi. Bu o`zgaruvchilarning aniq son qiymatlarida olingan yechim differensial tenglamaning xususiy yechimi deyiladi.

(11.1) tenglama uchun Koshi masalasi boshlang`ich shartlar deb ataluvchi ushbu $y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topishdan iboratdir.

Differensial tenglamaning yechimini toppish uni integrallash deyiladi. Yechimni grafigi integral egri chizig’i deyiladi.

11.1 Berilgan $y=c_1e^x+ c_2e^{2x}$ (1) funksiya $y'' - 3y' + 2y = 0$ (2) tenglamaning yechimi ekanligini isbotlang.

Yechish. (1) – funksiyani ketma – ket differensiallab quyidagi $y' = c_1e^x + 2c_2e^{2x}$, $y'' = c_1e^x + 4c_2e^{2x}$ tengliklarga kelamiz. Bu sistemani c_1e^x va c_2e^{2x} ga nisbatan yechib: $c_1e^x = 2y' - y''$, $c_2e^{2x} = \frac{1}{2}(y'' - y')$. Bu ifodalarni (1) ga qo`yib (2) ni hosil qilamiz.

11.2 Berilgan $y^3 - cx^3 + 3xy = 0$ (3) funksiya $y^3 - (xy^2 + x^2)y' + 2xy = 0$ (4) tenglamaning yechimi bo`lishini tekshiring.

11.3 $y' = 2xe^{x^2}$ tenglamaning $y(0) = 1$ boshlang`ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

Quyidagi funktsiyalar differensial tenglamaning integrali ekanligininі tekshiring.

11.4 $x^2 - xy + y^2 = c^2, (x - 2y)y' = 2x - y$.

11.5 $x\sqrt{1 + y^2} = cy, xy' - y = y^3$.

11.6 $y^2 - 2 = C \cdot e^{\frac{1}{x}}, 2x^2yy' + y^2 = 2$.

11.7 $y = C_1 \ln x - \dfrac{x^2}{4} + C_2, x(y'' + 1) + y' = 0$.

Birinchi tartibli differensial tenglamalar

11.3 O`zgaruvchisi ajraladigan tenglamalar

Ushbu

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (11.2)$$

ko`rinishdagi tenglama o`zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar deyiladi, bu yerda $M(x)$, $N(y)$ – uzluksiz funksiyalar.

Tenglama hadma - had integrallash yo`li bilan yechiladi:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c.$$

11.8 $y' = \dfrac{y}{x}$ differensial tenglamani yeching.

Yechish. Tenglama o`zgaruvchisi ajraladigan differensial tenglama, uni quyidagi ko`rinishga keltiramiz: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$. Tenglikning ikkala tomonini integrallab, $\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$ umumiy integral va $y = cx$ – umumiy yechimni hosil qilamiz.

11.9 $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$ differensial tenglamaning $y(0)=1$ boshlang`ich shartni qanoatlantiradigan xususiy yechimni toping.

11.10 Tenglamani yeching: $yx^2dy - \ln x dx = 0$.

11.11 Tenglamani yeching: $y' + 1 = \sqrt{x + y + 1}$.

Differensial tenglamalarni yeching. Agar boshlang`ich shart berilgan bo`lsa xususiy yechimini toping:

11.12 Tenglamani yeching. $\sqrt{1 - y^2}dx - ydy = 0$

Yechish: O'zgaruvchilarni ajratib, $dx = \frac{ydy}{\sqrt{1 - y^2}}$ tenglikni hosil qilamiz, uni integrallab $x + c = -\sqrt{1 - y^2}$ yoki $(x + c)^2 + y^2 = 1$ yechimni topamiz.

11.13 Tenglamani yeching. $e^{-y}(1 + y') = 1$

Tenglamalarni yeching

11.14 $(3x - 1)dy + y^2dx = 0$

11.15 $3x^2ydx + 2\sqrt{4 - x^3}dy = 0$

11.16 $xy' + 2y = 2xyy'$

11.17 $e^{1-2x}(y^2 - 1)dy - dx = 0$

11.18 $x^2(y' - 1) = 2y'$

11.19 $e^{x+y}dx + ydy = 0$

11.20 $y' = (x + y)^2$

11.21 $(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0$

11.24 $\sqrt{y^2 - 1}dx = xydy$

11.25 $xy' + y = y^2, y(1) = 0,5$

11.26 $xyy' = 1 - x^2$

11.27 $y'y(1 + e^x) = e^x, y(0) = 1$

11.30 $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$

11.31 $z' = 10^{x+z}$

11.32 $y' = \cos(y - x)$

11.33 $y'ctgx + y = 2; \quad y(0) = -1$

11.34 $y' = 3\sqrt[3]{y^2}; \quad y(2) = 0$

11.35 $xy' + y = y^2; \quad y(1) = 0,5$

11.36 $(x + 2y)y' = 1; \quad y(0) = -1$

11.37 $(1 + x^2)y^3dx - (y^2 - 1)x^3dy = 0; \quad y(1) = -1$

11.38 $(\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' - y = 0; \quad y(1) = 1$

11.39 $x^2(2yy' - 1) = 1; \quad y(1) = 0$

11.3 Bir jinsli differensial tenglamalar

Agar $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$ ayniyat o`rinli bo`lsa, $f(x, y)$ m darajali bir jinsli funksiya deyiladi. Masalan: $x\cos\frac{y}{x}$; $x - y\cos\frac{y}{x}$; $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$; $\frac{x^2 - y^2}{xy}$ funksiyalar bir jinsli funksiyalardir.

2) Agar $P(x, y)$ *va* $Q(x, y)$ bir xil o`lchovli bir jinsli funksiyalar bo`lsa, u holda

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad \textbf{(*)}$$

birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama deyiladi.

(*) tenglama $y = ux$ alamshtirish yordamida, bu yerda u yangi nomalumli funksiya, o`zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi.

11.40 Tenglamani yeching $y' = \frac{x + y}{x - y}$

Yechish: Tenglama bir jinsli bo'lgani uchun $y=ux$ almashtirish bajaramiz, natijada $y' = u + xu'$ ni hosil qilamiz. Tenglama $u + xu' = \frac{1 + u}{1 - u}$ yoki $xu' = \frac{1 + u^2}{1 - u}$ ko'rinishini oladi.

O'zgaruvchilarni ajratib $\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x}$ ni hosil qilamiz. Uni integrallab $arctgu-\frac{1}{2}ln(1+u^2)=ln|x|+C_1$ ni topamiz.

Oldingi o'zgaruvchilarga qaytib $arctg\frac{y}{x}=ln(1+\frac{y^2}{x^2})+ln|x|+C$ yoki $arctg\frac{y}{x}=ln\sqrt{x^2+y^2}+C$ ni hosil qilamiz.

11.41 Tenglamani yeching $y' = \frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

11.43 Tenglamani yeching. $xdy=(x+y)dx$.

11.44 Tenglamani yeching.

$$y'=\frac{x+y}{x+1}+\left(\frac{y-1}{x-1}\right)^2$$

11.45 Tenglamani yeching $(x^2-2xy)dy-(xy-y^2)dx=0$.

11.46 Tenglamalarni yeching.

2. $(x+y)dx+xdy=0$
2. $xy^2dy-(x^2+y^2)dx=0$
3. $xy^2dy-(x^3+y^3)dx=0$
4. $x\cos\frac{y}{x}dy+\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx=0$
5. $x^3y'=y(y^2+x^2)$
6. $\left(xye^{\frac{y}{x}}+x^2\right)dy-y^2C^{\frac{y}{x}}dx=0$
7. $(xy-x^2)y'=y^2$
8. $xy^2dy=(x^3+y^3)dx$
9. $xy'=y\ln\frac{x}{y}$
10. $y-xy'=x+yy'$
11. $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$
12. $(4x^2+xy+y^2)dx+(4y^2+3xy+x^2)dy=0$
13. $y'=\frac{1-3x-3y}{1+x+y}$
14. $(y+2)\,dx=(2x+y-4)\,dy$
15. $(y'+1)\ln\frac{y+x}{x+3}=\frac{y+x}{x+3}$
16. $y'=\frac{y+2}{x+1}+tg\frac{y-2x}{x+1}$

11.5 Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar

11.47 Tenglamani yeching. $y'+2y=4x$

$y'+2y=0$ tenglamani yechimini topamiz. $\frac{dy}{y}=-2dx,\quad lny=-2x+C_1,\ y=C(x)e^{-2x}$ uni berilgan tenglamaga qo'yamiz.

$$y'+2y-4x=C'e^{-2x}-2Ce^{-2x}+2Ce^{-2x}-4x=0$$

$C(x)=4xe^{2x}$, $\quad C(x)=4\int xe^{2x}dx=e^{2x}(2x-1)+C_0$ umumiy yechim esa $y=C(x)e^{-2x}=2x-1+C_0e^{-2x}$, C_0 – ixtiyoriy o'zgarmas son.

11.48 Differensial tenglamani yeching. $y' - \frac{2}{x} y = 2x^3$.

Yechish. Avval $y' - \frac{2}{x} y = 0$ ni yechamiz. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| \Rightarrow y = cx^2$.

Faraz qilaylik $C = C(x)$, u holda $y = C(x)x^2$ uni berilgan tenglamaga qo`yib, $u(x)$ ni topamiz:

$C'x^2 - 2xC - \frac{2}{x} x^2 C = 2x^3 \Rightarrow C' = 2x \Rightarrow C = x^2 + C_1$ bundan berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $y = (x^2 + C_1)x^2$.

11.48 -11.53 misollarda differensial tenglamalarni yeching, boshlang`ich sharti berilgan bo`lsa, xususiy yechimini toping.

11.48 $y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}$

11.49 $x^2 y' + xy + 1 = 0$

11.50 $y = x(y' - x\cos x)$

11.51 $(2x + 1) y' = 4x + 2y$

11.52 $y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0, y(0) = 0$

11.53 $xy' + y + e^x = 0, y(a) = b.$

Bernulli tenglamasi

$y' - p(x)y = y^n q(x)$ ko`rinishidagi differensial tenglamaga ($n \neq 0, n \neq 1$). Bernulli tenglamasi deyiladi. Berilgan tenglamani $z = y^{1-n}$ almashtirish yordamida chiziqli differensial tenglama ko`rinishiga keltiriladi.

11.54 Differensial tenglamani yeching. $y' + \frac{2y}{x} = y^2 x$.

Yechish. Ravshanki $y = 0$ berilgan tenglamaning echimi bo'ladi. $y = 0$ dan farqli echimlarini topish uchun berilgan tenglamaning ikkala tomonini y^2 ga bo'lib yuborib,

$$\frac{y^1}{y^2} + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{y} = x \text{ tenglamaga kelamiz.}$$

$-\frac{1}{h} = z$ almashtirishni bajarsak, $z^1 = \frac{y^1}{y^2}$ bo'lib, tenglama quyidagi chiziqli tenglamaga keladi:

$$z^1 - \frac{2}{x} z = x \text{ bu tenglamani echib,}$$

$$y = -\frac{1}{x^2 \ln|x| + cx^2} \text{ ekanligiga ishonch hosil qilamiz.}$$

Demak, berilgan tenglamaning echimlari

$$y = 0 \text{ va } y = -\frac{1}{x^2 \ln|x| + cx^2} \text{ bo'lar ekan.}$$

Differensial tenglamalarni yeching.

11.55 $y' + 2y = y^2 e^x$

11.56 $(1 + x^2) y' + 2xy = xy^2, y(0) = 0,5$

11.57 $y' = y^4 \cos x + ytgx.$

11.8 Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar

Ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama deb

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{11.8}$$

ko`rinishdagi ga aytiladi.
Agar differensial tenglama

$$F(x, y', y'') = 0 \qquad (11.9)$$

ko`rinishida bo`lsa, u holda tenglamaning tartibi darajani pasaytirish $z = y'$ almashtirish yordamida bittaga pasaytirish mumkin. Bu holda $z' = y''$ boladi.

Agar tenglamaning ko`rinishi

$$F(y, y', y'') = 0 \qquad (11.10)$$

bo`lsa, u holda $z = y'$ almashtirishdan foydalaniladi va $z = z(y)$ y ning funksiyasi sifatida qaraladi. Bunda $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} = z\frac{dz}{dy}$

11.58 Tenglamani yeching: $y'' = y' ctgx$.

Yechish. Faraz qilaylik, $z = y'$. U holda $y'' = (y')' = z'$, berilgan tenglamani ko`rinishi $z' = z \cdot ctgx, z \neq 0$ bo`lsin. $\frac{dz}{z} = ctgx \cdot dx$ yoki $\frac{dz}{z} = \frac{d\sin x}{\sin x}$ hadma – had integrallab, $\ln|z| = \ln|\sin x| + \ln c_1$, bu yerda $c_1 > 0$, yoki $z = c_1 \sin x$.

$z = 0$ tenglamaning yechimi bo`lgani uchun, uning ixtiyoriy yechimi $z = c_1 \sin x$, c_1 ixtiyoriy son.

$z = \frac{dy}{dx}$ bo`lgani uchun $dy = c_1 \sin x\, dx$. Ohirgi tenglikni integrallab $y = -c_1 \cos x + c_2$ ni olamiz.

Tenglamalarni yeching.

11.59 $y'' = -\frac{x}{y}$ **11.60** $xy'' + y' = 0$ **11.61** $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

11.9 O`zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar

O`zgarmas koeffitsientli ikinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deb

$$y'' + py' + qy = r(x) \qquad (11.11)$$

ko`rinishdagi tenglamaga aytiladi. Bu yerda $p$ va $q$ – haqiqiy sonlar, $r(x)$ – biror funksiya. Agar r($x$) aynan nolga teng bo`lsa, berilgan tenglama bir jinsli, aks holda bir jinsli emas deyiladi.
Bir jinsli differensial tenglamaga

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (11.12)$$

Quyidagi xarakteristik tenglama mos qo`yiladi.

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \qquad (11.13)$$

λ **-** o`zgaruvchi.

Quyidagi holler yuz berishi mumkin.

1) Agar (11.13) xarakteristik tenglama haqiqiy λ_1**,** λ_2 ildizlarga ega bo`lsa, u holda (11.12) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \qquad (11.14)$$

ko`rinishda bo`ladi.

2) Agar (11.13) xarakteristik tenglama bitta λ ikki karrali yechimga ega bo`lsa, u holda (11.12) tenglamaning yechimi

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x} \qquad (11.15)$$

ko`rinishda bo`ladi.

3) Agar (11.13) xarakteristik tenglama kompleks yechimga ega bo`lsa, $\lambda = \alpha \pm i\beta$, bu yerda $\alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, u holda (11.12) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = c_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + c_2 e^{\alpha x} \cos \beta x \qquad (11.16)$$

ko`rinishda bo`ladi.

11.62 Diferensial tenglamalarni yeching.

a) $2y'' - y' - y = 0$; b) $4y'' + 4y' + y = 0$; c) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Yechish. a) Xarakteristik tenglama $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ turli ildizlarga ega $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -0.5$, shuning uchun differensial tenglamaning umumiy yechimi $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x/2}$.

b) Bu holda xarakteristik tenglama $4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$ bitta ikki karrali λ=-1/2 yechimga ega bo`ladi, shuning uchun izlanayotgan umumiy yechim $y = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{-x/2}$.

c) $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ xarakteristik tenglama λ = - 1 ± 2*i* kompleks ildizlarga ega bo`ladi, shuning uchun $y = c_1 e^{-x} \sin 2x + c_2 e^{-x} \cos 2x$.

Bir jinsli bo`lmagan differensial tenglamaning yechimini qaraymiz.

Birinchi usul. Ixtiyoriy o`zgarmasni variatsiyalash usuli.

Faraz qilaylik (11.11) differensial tenglamaga mos (11.12) bir jinsli tenglamasining yechimi

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (11.17)$$

bo`lsin.U holda (11.11) berilgan tenglamaning yechimi (11.17) ko`rinishda bo`ladi, bu yerda $c_1$ va $c_2$ – $x$ o`zgaruvchining funksiyalari. Bu funksiyalar

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = r \end{cases} \qquad (11.18)$$

sistemani yechish natijasida topilishi mumkin.

11.69 Tenglamani yeching. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

11.70 Tenglamani yeching. *y''-y'-2y=x* · e^x

Tenglamalarni yeching

11.71 $y'' - 9y = 0$

11.72 $y'' - 2y' + 2y = 0$

11.73 $y'' - 2y' + y = 2e^x$

11.74 $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$

11.75 $y'' + y = \cos x$

11.76 $y'' + y' = \sin^2 x$.

11.10Yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar

$y^{(n)} = f(x)$ differensial tenglama.

11.77 Tenglamani yeching $y^{(4)}(x) = \sin x$.

Yechish. Berilgan tenglamani 4 marta integrallaymiz: $\int y^4(x)\,dx = \int \sin x\,dx + C_1$,

$y'''(x) = -\cos x + C_1$, $\int (y'''(x))\,dx = \int (-\cos x + C_1) + C_2$,

$y''(x) = -\sin x + C_1 x + C_2$, $y'(x) = \cos x + C_1 \dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$, $y(x) = \sin x + C_1 \dfrac{x^3}{6} + C_2 \dfrac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$

Tenglamani yeching

11.78 $x''' = 1$. **11.79** $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, y(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\ln 2}{2}, y'(\dfrac{\pi}{4}) = 0$.

11.80 $y^{(20)} = \sin x$. **11.81** $y''' = \dfrac{6}{x^3}, y(1) = 2, y'(1) = 1, y''(1) = 1$.

$y'' = f(x, y')$ tenglama $y' = z(x), y'' = z'(x)$ almashtirish bilan birinchi tartibli tenglama keltiriladi.

$$y'' = f(y, y')$$

tenglama quyidagi

$$\frac{dy}{dx} = p(y), \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dy} = \frac{dy}{dx} = p'p$$

almashtirish bilan $p(y)$ funksiyaga nisbatan birinchi tartibli tenglamaga keltiriladi. $p' = \dfrac{1}{p} f(y, p)$.

11.82 Ko`shi masalasini yeching.

$$y'' = p\frac{dp}{dy} \quad p' = \frac{dp}{dx}$$

$$y'' + 2yy' = 0, y(0) = 2, y'(0) = -4.$$

Yechish. $y' = p$, almashtirishdan keyin *p(y)* ga nisbatan birinchi tartibli tenglamani olamiz: $\dfrac{dp}{dy} + 2yp = 0$, yoki $\dfrac{dp}{dy} = -2y$. Bundan p ni topamiz: $\dfrac{dp}{dy} = -2y, \int dp = -\int 2y dy + C_1$, $p = -y^2 + C_1$. Demak, $y' = -y^2 + C_1$. Bunga boshlang`ich qiymatlarni qo`yib -4=-4+C1=>C1=0. Demak, $y' = -y^2$, $\dfrac{dy}{-y^2} = dx$, $\dfrac{1}{y} = x$ $y = \dfrac{1}{x + C_2}$. Boshlang`ich shartni qo`yib $2 = \dfrac{1}{0 + C_2} \Rightarrow C_2 = \dfrac{1}{2}$.

Shunday qilib xususiy yechim $y = \dfrac{2}{2x + 1}$.

Tenglamani yeching

11.83 $yy'' + (y')^2 = 0$. **11.84** $y^3 y'' = 1, y(\dfrac{1}{2}) = 1, y'(\dfrac{1}{2}) = 1$.

Yuqori tartibli chiziqli bir jinsli o`zgarmas koeffitsientli differensial tenglamalar.

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \qquad (11.21)$$

bu yerda $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – o`zgarmas sonlar. (11.21) ning yechimi $p = e^{\lambda x}$ ko`rinishida qidiramiz va $(\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n) e^{\lambda x} = 0$, yoki

$$p_n(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n = 0 \qquad (11.22)$$

tenglama xarakteristik tenglama deyiladi.
Turli hollarni qaraymiz.

1) Agar xarakteristik tenglamaning yechimlari haqiqiy va turlicha bo`lsa, u holda

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, ..., y_n = e^{\lambda_n x}.$$

(11.21) ning chiziqli bog`liqsiz yechimlari, umumiy yechim esa,

$$y_{um} = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i x}$$

ko`rinishda yoziladi.

2) Agar xarakteristik tenglama yechimlari orasida bir juft kompleks ildizlar bo`lsa:

$$\lambda_1 = h + i\omega,\ \lambda_2 = h - i\omega$$

bu yerda $i = \sqrt{-1}$, u holda ularga ikkita kompleks ildiz mos keladi.

$$\overline{y_1} = e^{\lambda_1 x} = e^{hx}(\cos\omega x + i\sin\omega x),$$

$$\overline{y_2} = e^{\lambda_2 x} = e^{hx}(\cos\omega x - i\sin\omega x).$$

Ulardan ikkita chiziqli bog`liqsiz haqiqiy yechimlar tuzish mumkin:

$$y_1 = \frac{\overline{y_1} + \overline{y_2}}{2} = e^{hx}\cos\omega x,$$

$$y_2 = \frac{b_1 - b_2}{2i} = e^{hx}\sin\omega x.$$

3) Agar xarakteristik tenglama yechimlari orasida k karrali $\lambda = a$ yechim bo`lsa, u holda $y_s = x^3 e^{\alpha x}$, $s = 0, 1, ..., k-1$ (11.21) tenglamaning yechimi bo`ladi.

11.85 – 11.95 Differensial tenglamani yeching.

11.85 $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

Yechish. Xarakteristik tenglama $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ ni yechib $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_2 = 2$ ni hosil qilamiz. U holda umumiy yechimning ko`rinishi $y_{um} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$.

11.86 $y''' - 4y'' - 6y' + -4y = 0$.

11.87 $y'''' + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$.

11.88 $y'' + y' - 2y = 0$

11.89 $y'' - 2y' + y = 0$

11.90 $y'' - 4y' + 13y = 0$

11.91 $y''' - 8y = 0$

11.92 $y'''' - y = 0$

11.93 $y''''' - 6y'''' + 9y''' = 0$

11.94 $y'''' + 2y'' + y = 0$

11.95 $y'''' - 5y'' + 4y = 0$.

11.8 Iqtisodiyotda differensial tenglamalar apparati

Faraz qilaylik *y=y(t)* biror ishlab chiqaruvchining t vaqt mobaynida realizatsiya qiladigan tovar miqdori. Tovarning narxi o`zgarmas bo`lsin. U holda *y=y(t)* funksiya

$$y' = ky \tag{11.21}$$

tenglamani qanoatlantiradi, bu yerda k=mp*l*, m- investitsiya normasi, p - sotilish narxi, *l*-investitsiya kattaligi va mahsulot ishlab chiqarish tezligi orasidagi proparsionallik koeffisienti. (11.21) tenglama o`zgaruvchisi ajraladigan differensial tenglamadir.

Uning yechimi

$$y = y_0 e^{k(t-t_0)} \tag{11.22}$$

bu erda $y_0 = y(t_0)$

(11.21) tenglama aholining o`sishi, dinamikasini ifodalaydi.

11.96 Agar $y' = ky$ tenglamadagi proporsionallik koeffisiyenti 0,1 ga teng bo`lsa, realizasiya qilingan mahsulot miqdori boshlang`ich vaqtdagi bilan solishtirilganda, qancha vaqt o`tgandan keyin ikki marta ko`payadi?

Realizasiya qilingan mahsulot miqdorini ikkilanishiga ketadigan vaqt 20% ga kamayishi uchun investitsiya normasini qancha foizga oshirish kerak?

Yechish. (11.22) da $t_0=0$, k=0,1,y=$2y_0$ deb faraz qilsak $2y_0 = y_0 e^{0,1t}$ tenglikka kelamiz, bundan $t = 10\ln 2 \approx 6{,}93$ (vaqt birligi). Endi t_1 = 0,8t, k_1 = k/0,8 = 1,25k, ya`ni investitsiya normasini 25% ga oshirish kerak.

Narxning o`zgarmasligi haqidagi faraz vaqtning qisqa oralig`i uchun o`rinli. Umimiy holda *p* narx miqdor y ga bog`liq kamayuvchi funksiyadir *p*=*p*(*y*).

U holda $y' = ky$ tenglamaning ko`rinishi

$$y' = mlp(y)\cdot y \qquad (11.24)$$

o`zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo`lib qolaveradi.

(11.24) ko`rinishidagi tenglama bilan aholi soninig o`sishi, epidemiya rivojlanishining dinamikasi, reklama tarqalish prosessi va hakozolar ifodalanadi.

11.97. Talab va taklif funksiyalari mos ravishda $y = 25 - 2p + 3\dfrac{dp}{dt}$, $x = 15 - p + 4\dfrac{dp}{dt}$.

Agar boshlang`ich momentida p=9 bo`lsa, muvozanat narxinig narxga bog`liqligini toping.

11.98. Tovar narxi $p(y) = (5+3e^{-y})\, y^{-1}$; m=0,6, l=0,4, $y(0)$=1 tenglama bilan berilgan y=$y(t)$ ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorining vaqtga bog`liqligini toping.

11.99 Tovarga bo`lgan talab va taklif funksiyasining ko`rinishi: $y = 50 - 2p - 4\dfrac{dp}{dt}$, $x = 70 + 2p - 5\dfrac{dp}{dt}$. Agar *p*(0) = 10 bo`lsa,

a) Muvozanat narxning vaqtga bog`liqligini toping.

b) Muvozanat narxi turg`unmi ?

11.100 Biror tovarga bo`lgan talab va taklif funksiyasi $y = 30 - p - 4\dfrac{dp}{dt}$, $x = 20 + p + \dfrac{dp}{dt}$.

a) Muvozanat narxning vaqtga bog`lanishini toping.

b) Muvozanat narxi turg`unmi ?

Differensial tenglamalar nazariyasini iqtisodiyotning uzluksiz modellarida qo`llanishiga doir misoolarni qaraymiz, bu yerda erkin o`zgaruvchi *t* – vaqt. Bunday modellar uzoq vaqt mobaynida iqtisodiy sistemalar evolyutsiyasini tekshirishda foydali : ular iqtisodiy dinami - kaning tekshirish predmetidir.

Ishlab chiqarishning tabiiy o`sish modeli.

Birinchi tartibli differensial tenglamalar.

Faraz qilaylik, qandaydir mahsulot *p* narxda sotiladi Q(t) – t –vaqtda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori desak, u holda bu vaqt davomida pQ(t) ga teng daromad olinadi. Faraz qilaylik, ko`rsatilgan daromadning bir qismi mahsulot ishlab chiqarish investitsiyaga sarf bo`lsin, ya`ni

$$I(t)=mpQ(t) \qquad (1)$$

m – investitsiya normasi va 0 < m < 1.

Agar bozorni yetarlicha ta`minlangan degan tasavvurdan kelib chiqilsa, u holda ishlab chiqarishda foydalaniladi. Bu yana ishlab chiqarish tezligini (akselleratsiya) oshishiga olib keladi, ishlab chiqarish tezligi esa investitsiyaning o`sishiga proparsional, ya`ni

$$Q' = lI \qquad (2)$$

bu yerda 1/*l* – akselleratsiya normasi. (1) formulani (2) qo`yib

$$Q' = kQ, k = lmpQ \qquad (3)$$

ni olamiz. (3) differensial tenglama o`zgaruvchilari ajraladigan tenglama. Bu tenglama umumiy yechimining ko`rinishi Q = Ce^{kt}, bunda C – ixtiyoriy o`zgarmas.

Faraz qilaylik, boshlang`ich moment t = $t_0$ da mahsulot ishlab chiqarish hajmi $Q_0$ berilgan. U holda bu shartdan o`zgarmas C ni ifodalash mumkin:

$Q_0 = Ce^{kt_0}$ bunda $C = Q_0 e^{-kt_0}$. Bundan (3) tenglamaning xususiy yechimini topamiz:

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)} \qquad (4)$$

Shunga e`tibor berish kerakki, matematik modellar umumiylik xossasiga ega. Biologik tajribalardan kelib chiqadiki, bakteriyalarning ko`payish prosessi (4) tenglama bilan ifodalanadi. Radioaktiv parchalanish prosessi ham (4) formula bilan bilan ifodalanadigan qonuniyatga bo`ysunadi.

Raqobat sharoitida ishlab chiqarishning o`sishi

Faraz qilaylik, $p = p(Q)$ – kamayuvchi funksiya, ya`ni mahsulot hajmining ortishi bilan bozorda uning narxi kamayadi : $dp/dQ < 0$. Endi (1)-(3) formulalardan $Q$ ga nisbatan chiziqli bo`lmagan o`zgaruvchilari ajraladigan birinchi tartibli differensial tenglama olamiz:

$$Q' = \alpha\, p(Q)\cdot Q \qquad (5)$$

Bu tenglamaning o`ng tomonidagi barcha ko`paytuvchilar musbatligidan $Q' > 0$, ya`ni Q($t$) funksiya o`suvchi.

Funksiya o`sish xarakteri uning ikkinchi hosilasi bilan aniqlanadi. (5) tenglamadan

$$Q'' = \alpha\, p(Q)\cdot Q\,.$$

Talab elastikligini kiritib, bu tenglikni o`zgartirish mumkin: $E(p) = \dfrac{dQp}{dpQ}$,bundan

$Q'' = \alpha Q' p\left(1 + \dfrac{dpQ}{pdQ}\right)$, yoki $\dfrac{dQ}{dp} < 0$, bo`lgani uchun E < 0, nihoyat

$$Q'' = \alpha Q' p\left(1 - \frac{1}{|E|}\right) \qquad (6)$$

(6) tenglamadan elastik talabda $Q'' > 0$, ya`ni $|E| > 1$ ekanligi kelib chiqadi va Q(t) funksiyaning grafigi pastga qavariq. Bu esa progressiv o`sishi-ni bildiradi.

Noelastik talabda $|E| < 1$ va bu holda $Q'' < 0 - Q(t)$ funksiya yuqoriga qavariq, bu sekin o`sishini ( etarlicha ta`minlangan) bildiradi.

Soddalik uchun $p(Q)$ bog`lanishni chiziqli funksiya ko`rinishda qabul qilamiz.

$P(Q) = a - bQ$, $a > 0$, $b > 0$. U holda (5) tenglamaning ko`rinishi:

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q \qquad (7)$$

bundan

$$Q'' = \alpha Q'(a - 2bQ) \qquad (8)$$

(7) va (8) munosabatlardan : $Q' = 0, Q = 0$ da va Q = a/b da $Q'' < 0, Q > a/2b$ da; Q=Q(t) funksiya grafigini egilish nuqtasi Q = $a/2b$.

Keynsning dinamik modeli

Dinamikaning asosiy komponentlari bo`lgan iqtisodiyotning daromad va harakat qismlari sodda balans modelini qaraymiz. Faraz qilaylik $Y$(t), $E$(t), $S$(t), $I$(t) – mos ravishda milliy daromad, davlat chiqimlari, iste`mol va investitsiya. Bu kattaliklarning barchasi t vaqtning funksiyasi sifatida qaraladi. U holda quyidagi munosabatlar o`rinli :

$$Y(t) = S(t) + I(t) + E(t),$$
$$S(t) = a(t)Y(t) + b(t), \qquad (9)$$

$I(t)\ K(t)\ Y'(t)$ bu yerda a(t) – iste`molga moyillik koeffitsienti (0 < $a$(t) < 1), $b$(t) – chekli iste`mol, K(t) – akseleratsiya normasi. (9) tenglamaga kiradigan barcha funksiyalar musbat.

(9) tenglamalarning ma`nosini oydinlashtiramiz. Barcha harajatlarning yig`indisi milliy daromadga teng bo`lishi kerak – bu balans birinchi tenglamada akslantirilgan. Xalq ho`jaligida umumiy iste`mol milliy daromadning bir qismi bo`lgan ichki iste`mol va chekli iste`moldan iborat mana shu tashkil etuvchilar ikkinchi tenglamada ko`rsatilgan. Nihoyat investitsiya kattaligi ixtiyoriy bo`lishi mumkin emas: u davlat tehnologiyasi va infrostrukturasi xarakterlaydigan kattalik akseleratsiya normasini ohirgi milliy daromadga ko`paytmasi bilan aniqlanadi.

Faraz qilaylik, $a(t)$, $b(t)$, $k(t)$, $E(t)$ funksiyalar berilgan – ular davlat evolyutsiyasi va faoliyatini xarakterlaydi. Milliy daromad dinamikasi $Y(t)$ ni topish talab qilinadi.

Ikkinchi tenglamadan S(t) ni va uchinchi tenglamadan I(t) ni birinchi tenglamaga qo`yamiz. $Y(t)$ funksiyaga nisbatan chiziqli bir jinsli bo`lmagan birinchi tartibli differensial tenglama olamiz :

$$Y' = \frac{1-a(t)}{k(t)}Y - \frac{b(t)+E(t)}{k(t)} \qquad (10)$$

Biz asosiy parametrlar a, b, k ni o`zgarmas sonlar deb faraz qilib, ancha sodda holni tekshiramiz. U holda (10) tenglama o`zgarmas koeffitsientli birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaga kelib soddalashadi:

$$Y_p' = \frac{1-a}{k}Y - \frac{b+E}{k} \qquad (11)$$

Ma`lumki, bir jinsli bo`lmagan tenglamaning umumiy yechimi uning qandaydir xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig`indisidan iborat. (11) tenglamaning xususiy yechimi sifatida $y' = 0$ dagi, ya`ni muvozanat yechimini olamiz, ya`ni

$$Y_p = \frac{b+E}{1-a} \qquad (12)$$

Ko`rish qiyin emaski, bu kattalik musbat. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $Y = C\exp\left(\frac{1-a}{k}t\right)$ formula bilan beriladi. (11) tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko`rinishda :

$$Y(t) = \frac{b+E}{1-a} + Ce^{\frac{1-a}{k}t} \qquad (13)$$

Agar vaqtning boshlang`ich momentida $Y_0 < Y_p$ bo`lsa, u holda $C = Y_0 - Y_p < 0$ va egri chiziqlar (12) muvozanat yechimidan pastga keladi, ya`ni milliy daromad vaqt o`tishi bilan masalaning berilgan parametrlari a,b,k va E da kamayadi, chunki (13) da eksponenta darajasi musbat. Agar $Y_0 > Y_p$ bo`lsa, u holda C > 0 va vaqt o`tishi bilan milliy daromad o`sadi, integral egri chiziqlar $Y = Y_0$ muvozanat to`g`ri chizig`idan yuqoriga ketadi.

O`sishning noklassik modeli

Faraz qilaylik, $Y = F(K,L)$ milliy daromad, bu yerda F – bir jinsli birinchi tartibli ishlab chiqarish funksiyasi: ($F(tK, tL) = F(K,L)$), K – sarflangan mablag` hajmi, $L$ – mehnat sarfi hajmi. Fond qurollanish kattaligi $k = K/L$ bo`lsin. U holda ishlab chiqarish unumdorligi quyidagi formula bilan aniqlanadi :

$$f(k) = \frac{F(K,L)}{L} = F(K,l) \qquad (14)$$

Bu bo`limda qaralayotgan masalaning maqsadi qurollanish fond dinamikasini vaqtning funksiyasi sifatida ifodalashdir.

Har qanday model ma`lum farazlarga asoslanganligi uchun biz ham ba`zi bir parametrlarni kiritishimiz zarur.

Quyidagilar bajariladi, deb faraz qilamiz :

1. Mehnat resurslari vaqtida tabiiy o`sish o`rinli

$$L' = \alpha L \qquad (15)$$

2. Mablag` ishlab chiqarish fondiga va amortizatsiyaga sarflanadi, ya`ni $I = K' + \beta K$, bu yerda β - amortizatsiya normasi.

Agar *l* – investitsiya (sarflangan mablag` ) normasi bo`lsa, u holda

$$I = lY = K' + \beta K \text{ yoki } K' = lF(K, L) - \beta K \quad (16)$$

k – fond qurollanish ta`rifidan kelib chiqadiki, *lnk=lnK – lnL*.

Bu tenglikni *t* bo`yicha differensiallab,

$$k' = lf(x) - (\alpha + \beta)k \qquad (17)$$

tenglamani olamiz, bu yerda *f* (*x*) funksiya (14) formula bo`yicha aniqlangan. Olingan (17) munosabat o`zgaruvchilari ajraladigan birinchi tartibli chiziqli bo`lmagan differensial tenglama. Bu tenglamaning statsionar yechimini aniqlaymiz: $k' = 0$ shartdan,

$$lf(k) - (\alpha + \beta)k = 0 \qquad (18)$$

ya`ni *k = const* – o`zgarmas kattalik, chiziqli bo`lmagan (18) algebraik tenglamaning yechimi.

Ishlab chiqarish funksiyasi $F(K, L) = \sqrt{KL}$ uchun (17) tenglamaning integral egri chiziqlari va statsionar yechimini toping.

(14) dan $f(k) = \sqrt{k}$, u holda (17) tenglamaning ko`rinishi

$$\frac{df}{dt} = l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k .$$

Bu tenglamaning statsionar yechimi quyidagi tenglikdan kelib chiqadi: $l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k = 0$, bundan (17) tenglamaning nol bo`lmagan xususiy yechimi $k_{st} = l^2 / (\alpha + \beta)^2$.

(17)differensial tenglamani “o`zgaruvchilarni ajratish” usuli bilan yechamiz.

$$\frac{dk}{\sqrt{k}\left[l - (\alpha + \beta)\sqrt{k}\right]} = dt$$

Bu tenglamani $\sqrt{k} = z$ almashtirishdan so`ng integrallab, umumiy yechimining oxirgi ko`rinishini olamiz.

$$k(t) = \left[\frac{1}{\alpha + \beta} + C\exp\left(-\frac{\alpha + \beta}{2}t\right)\right]^2 \qquad (19)$$

Demak, o`zgarmaydigan parametrlarda $l, \alpha, \beta$ fond qurollanish funksiyasi o`z stasionar qiymatiga boshlang`ich shartlardan bog`liqsiz ravishda turg`un barqaror intiladi. Bu stasionar nuqta $k = k_{st}$ barqaror muvozanat nuqtasi bo`-ladi.

Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar

Oldindan aytib beriladigan narxlar bilan bozor modeli

Prognoz qilinadigan narxlar bilan bozor modelini qaraymiz. Oddiy bozor modellarida talab va taklif odatda tovarning shu kundagi narxi bilan bog`liq bo`ladi. Lekin talab va taklif aniq hollarda narxning tashkil qilinishi va narxning o`zgarishi tempi bilan bog`liq bo`ladi. *t* vaqt bo`yicha uzluksiz va differensiallanuvchi funksiyalar modelida bu xarakteristikalar mos ravishda *p*(*t*) narx funksiyasini birinchi va ikkinchi hosilalarini tavsiflaydi.

Misol: Faraz qilaylik, talab funksiyasi D va taklif funksiyasi S, narx funksiyasi *p* va uning hosilalari bilan quyidagicha bog`lanishga ega bo`lsin.

$$\begin{aligned} D(t) &= 3p'' - p' - 2p + 18, \\ S(t) &= 4p'' + p' + 3p + 3 \end{aligned} \qquad (20)$$

(20) da qabul qilingan bog`lanishlar to`la realistik (amaliy): buni narx funksiyasining hosilalari qo`shiluvchilarda oydinlashtiramiz.

1. Talab narxning o`zgarishi bilan “qizdiriladi”. Agar temp o`ssa $(p'>0)$, u holda bozorning talabga qiziqishi ortadi va aksincha. Narxning tez o`sishi xaridorni qo`rqitadi, shuning uchun narx funksiyasining birinchi hosilasi manfiy ishora bilan kiradi.

2. Taklif yana ko`proq o`lchamda narxning o`zgarish tempi bilan kuchaytiriladi, shuning uchun S(t) funksiyadagi $p''$ ning koeffisienti D(t) dagiga nisbatan katta. Shuningdek narxning o`sishi taklifni oshiradi, shuning uchun p' ni o`z ichiga oluvchi qo`shiluvchi S(t) ning ifodasiga (+) ishora bilan kiradi.

Narxning vaqtga bog`lanishini o`rnatish talab qilinsin. Bozorning muvozanat holati D=S tenglik bilan xarakterlanganligi uchun (20) tenglamaning o`ng tomonlarini tenglashtiramiz va soddalashtirib, quyidagini olamiz :

$$p''+2p'+5p=15 \qquad (21)$$

(21) munosabat p(t) funksiyaga nisbatan chiziqli bir jinsli bo`lmagan ikkinchi tartibli differensial tenglama. Bunday tenglamaning umumiy yechimi biror hu- susiy yechimi va unga mos bir jinsli

$$p''+2p'+5p=0 \qquad (22)$$

tenglamaning umumiy yechimi yig`indisidan iboratdir.

(22) uchun xarakteristik tenglama: $k^2+2k+5=0$. Uning ildizlari qo`shma kompleks sonlar: $k_{1,2} = -1\pm 2i$ va natijada (22) tenglamaning umumiy yechimi quyidagi formula bilan beriladi: $\tilde{p}(t)=e^{-t}(c_1\cos 2t+c_2\sin 2t)$, bu yerda $c_1$ va $c_2$ – ixtiyoriy o`zgarmaslar.

Bir jinsli bo`lmagan (21) tenglamaning xususiy yechimi sifatida $p=p_{st}$ – narxni belgilaydigan o`zgarmas kattalikni olamiz. Buni (21) ga qo`ysak, $p_{st}$ ni qiymatini olamiz: $p_{st} = 3$. Shunday qilib, (21) tenglama umumiy yechimining ko`rinishi

$$P(t) = 3 + e^{-t}(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t) \qquad (23)$$

Ko`rish qiyin emaski, $t\to\infty$ da $p(t)\to p_{st}=3$, ya`ni barcha integral egri chiziqlar p=3 gorizontal asimptotaga ega va uning atrofida tebranadi. Bu barcha narxlar o`rnatilgan $p_{st}$ narxga intilishini va uning atrofida tebranishini bildiriladi, bu tebranishlarning amplitudasi vaqt o`tishi bilan o`sa boshlaydi.

Bu masalaning xususiy yechimlarini ikki variantda keltiramiz:

1. Koshi masalasi. Faraz qilaylik, boshlang`ich momentda narx va uning o`zgarish tendensiyasi ma`lum : $t = 0$, $p = 4$, $p'=1$. Birinchi shartni (23) formulaga qo`yib $p(0) = C_1 + 3 = 4$, bundan $C_1 = 1$ ni olamiz, ya`ni: $p(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + C_2\sin 2t)$

Buni differensiallaymiz :

$$p'(t) = e^{-t}[(2C_2-1)\cos 2t-(C_2+2)\sin 2t] \qquad (24)$$

Endi Koshi masalasining ikkinchi shartini qo`llaymiz: $p'(0)=2C_2-1=1$, bundan $C_2 = 1$.

Nihoyat Koshi masalasi yechimining ko`rinishi quyidagicha bo`ladi:

$P(t)=3+e^{-t}(\cos 2t+\sin 2t)$; yoki ancha qulay ko`rinishda $p(t)=3+\sqrt{2}e^{-t}\cos(2t-\pi/4)$.

2. Aralash masala. Faraz qilaylik, vaqtning boshlang`ich momentida talab va taklif ma`lum : t = 0, p = 4, D = 16.

Birinchi boshlang`ich shart oldingidek bo`lgani uchun, bu yerda ham (24) yechimga ega bo`lamiz. U holda *p(t)* funksiyaning hosilalari quyidagi formulalar bilan ifodalanadi:

$$p'(t) = e^{-t}[(2C_2-1)\cos 2t-(C_2+2)\sin 2t],$$

$$p''(t) = -e^{-t}[(4C_2+3)\cos 2t-(3C_2-5)\sin 2t].$$

Bunan $p'(0) = 2C_2-1$ va $p''(0) = -4C_2-3$.

Bu tengliklarni *D(t)* ning (20) ko`rinishini hisobga olgan holda masalaning ikkinchi *D*(0)=16 shartiga qo`yib, $C_2=-1$ ni olamiz. Shunday qilib, berilgan masala yechimining ko`rinishi $p(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t - \sin 2t)$ yoki ancha qulay formada:

$$p(t) = 3 - \sqrt{2}e^{-t}\sin(2t - \pi/4) \qquad (25)$$

11.101. Usti ochiq rezervuardagi suvning dastlabki temperaturasi 70^0S edi, 10 minutdan so'ng suvning temperaturasi 65^0S bo'ldi, rezervuarni o'rab turgan muhitning temperaturasi 15^0S. 1) Boshlang'ich momentdan 30 minut keyin rezervuardagi suvning temperaturasini toping; 2) qaysi vaqtda rezervuardagi temperatura 20^0S bo'lishini toping.

Ye**chilishi.** 1. Suvning o'zgaruvchi temperaturasini T bilan belgilab, suvning sovish qonuni funksiyasini vaqtning funksiyasi sifatida belgilaymiz. Suvning sovish tezligi t va T larni bog'lovchi funksiyaning o'zgarish tezligidir, ya'ni u $\frac{dT}{dt}$ hosila bo'ladi.

$\frac{dT}{dt}$ tezlik rezervuardagi suv temperaturasi bilan rezervuarni o'rab olgan muhit temperaturasi orasidagi ayirmaga proporsional, ya'ni $R\left(T - 15^0\right)$, bunda R - proporsionallik koeffisienti. U holda

$$\frac{dT}{dt} = R\left(T - 15^0\right).$$

O'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\frac{dt}{T-15} Rdt.$$

2. (2) tenglamani integrallaymiz:

$$\int \frac{dT}{T-15} = \int RdT,\ \ln\left(T - 15^0\right) = Rt + C$$

yoki

$$T - 15 = e^{Rt} + C = e^{Rt}e^C = e^{Rt}C_1, \text{ bundan } T = C_1e^{Rt} + 15 \qquad (3)$$

Sovush qonunini hosil qildik, bu erda t - vaqt va T - suv temperaturasi – chekli o'zgaruvchilar.

3. Berilgan boshlang'ich shartlar $t = 0,\ T = 70^0 C$ da C o'zgarmas miqdorni topamiz.

Quyidagiga ega bo'lamiz:

$$70^0 = C_1e^{R\cdot 0} + 15^0 \text{ yoki } 55^0 = C_ie^0 = C_1 \cdot 1 = C_1,\ C_1 = 55^0 \qquad (4)$$

(4) tenglikdagi C_1 ning qiymatini (3) tenglikka qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$T = 55^0 e^{Rt} + 15^0 \qquad (5)$$

4. R o'zgarmas miqdorni topamiz. Masalaning shartida $t = 10$ minutdan so'ng $T = 65^0 C$ bo'lishi berilgan. Bu qiymatlarni (5) tenglamaga qo'yib, ushbuni hosil qilamiz:

$$65^0 = 55^0 e^{R\cdot 10} + 15$$

yoki

$$50^0 = 55^0 e^{10R},$$

yoki

$$\frac{10}{11} = e^{10R}. \qquad (6)$$

(6) tenglikni logarifmlab, yozamiz:

$$\lg 10 - \lg 11 = 10R\ lq\, e,$$

bundan

$$R = \frac{1 - \lg 11}{10\lg e} = \frac{1 - 1{,}0414}{10 \cdot 0{,}4343} = -\frac{0{,}0414}{4{,}343} = -0{,}009532 \qquad (7)$$

R ning qiymatini (5) tenglamaga qo'yib t va T o'zgaruvchilarni bog'lovchi sovish qonunini hosil qilamiz:

$$T = 55^0 e^{-0,009532t} + 15^0. \qquad (8)$$

5. Suvning boshlang'ich momentdan 30 minut keyingi temperaturasini topamiz. (8) tenglamaga $t = 30$ minut qiymatni qo'yamiz:

$$T = 55^0 e^{-0,009532 \cdot 30} + 15^0,$$

bundan

$$T = 55^0 e^{-0,286} + 15^0 .$$

Hisoblaymiz:

$x = 55 \cdot e^{-0,286}$, $\lg x = \lg x = \lg 55 - 0,286 \ \lg e = 1,7404 - 0,286 \times 0,4343 = 1,7404 - 0,1242 = 1,6162$,

$x = 41,32 \approx 41$

U holda

$$T = 41^0 + 15^0 = 56^0 .$$

6. Qancha vaqtdan keyin rezrauardagi suvning temperaturasi 20^0 S bo'lishini topamiz. (8) tenglamaga $T = 20^0$ qiymatni qo'yamiz:

$$20^0 = 55^0 e^{-0,009532\, t} + 15^0 \text{ yoki } 5^0 = 55^0 e^{-0,009532\, t},$$

bundan

$$e^{-0,009532t} = \frac{1}{11} \approx 0,0909 \text{ yoki } -0,009532\, t \lg e = \lg 0,0909 = \overline{2},9586,$$

$$t = -\frac{\overline{2},9586}{0,009532 \cdot 0,4343} = \frac{1,041}{0,009532 \cdot 0,4343} = 251 \min = 4 \text{ soat } 11 \text{ min.}$$

11.102. Radiyning emirilish tezligi berilgan har bir vaqt momentida radiyning dastlabki miqdoriga proporsional ekanligi tajribada aniqlangan. Boshlang'ich vaqt momentida $t = 0$ R_0 gramm radiy bor edi. Radiy miqdorini istalgan t vaqt momenti uchun hisoblash formulasini tuzing.

11.103. Radiy o'zining dastlabki miqdoriga proporsional tezlik bilan emiriladi. Hozirgi momentda bor bo'lgan miqdorining yarmisi qancha vaqtdan keyin emiriladi. Radiy uchun proporsioallik koeffisienti $R = 0,00044$ ekanligi aniqlangan (vaqt o'lchov biriligi ____ yil).

11.104. Suyuqlikda aylanayotgan diskning burchak tezligi ishqalanish hisobiga sekinlashadi. Ishqalanish burchak tezlikka proporsional ekanligi aniqlangan. 1)iagar disk $t = 0$ bo'lganda 12 rad/sek tezlik bilan aylangan bo'lib, $t = 10$ sekunda esa uning tezligi 8 rad/sek bo'lgan bo'lsa, disk $t = 120$ sek momentda qanday tezlik bilan aylanishini toping;
2) vaqtning qaysi momentida uni 1 rad/sek tezlik bilan aylinishini toping.

11.105. Suyuqlikda aylanayotgan diskka ta'sir qilayotgan sekinlashtiruvchi kuch burchak tezlikka proporsional. Agar disk $t = 0$ da 20 rad/sek tezlik bilan, $t = 8$ da esa 16 rad/sek tezlik bilan aylansa, diskning 2 rad/sek tezlik bilan aylanadigan vaqt momentini toping.

Differensial tenglamalarning iqtisodiyotda qo'llanlishi

Faraz qilaylik $y = y(t)$ - ishlab chiqarilgan va vaqtning t onida sotilgan mahsulot miqdori. Bu tovar narxi (qaralayotgan vaqt oralig'ida o'zgarmas). U holda $y = y(t)$ funksiya

$$y' = R\, y \qquad (1)$$

tenglamani qanoatlantiradi, bu erda $R = mpl,$ $m -$ investisiya normasi, $p -$ sotilish narxi, $l -$ investisiya kattaligi va mahsulot ishlab chiqarish tezligi orasidagi proporsionallik koeffisienti.

(1) tenglama o'zgaruvchilari ajaraladigan differensial tenglama. Uning echimi:

$$y = y_0 e^{k(t - t_0)}$$

bu erda $y_0 = y(t_0)$ (2)

SHuningdek, (1) tenglama aholining ko'payishi, doimiy inflyasiya jarayonida narx – navoning o'sishini bildiradi.

11.106. Qancha vaqt oralig'ida realizasiya qilingan mahsulot miqdori boshlang'ich miqdor bilan solishtirilgan ikki baravar ko'payadi, (1) tenglamadagi proporsionallik koeffisienti $R = 0{,}1$. Realizasiya qilingan mahsulot miqdori ikki marta oshishi uchun zarur bo'ladigan vaqt oralig'i 20% ga qisqartirish uchun investisiya normasini necha foiz orttirish kerak.

Yechish: Faraz qilaylik (2) tenglamada $t_0 = 0, \quad k = 0{,}1 \quad y = 2y_0$ bo'lsa, u holda $2y_0 = y_0 l^{0{,}1t}$ ga kelamiz, bundan $t = 10\ln 2 \approx 6{,}93$ (vaqt birligi) $t_1 = 0{,}8t$ deb faraz qilib $k_1 = k/0{,}8 \approx 1{,}25k$ ni, ya'ni investisiya normasini 25% orttirish kerakligini hosil qilamiz.

Tajribadan ma'lumki, narxning o'zgarmasligi haqidagi faraz (to'yinmagan bozor) faqat vaqtning qisqi oralig'iga tegishli.

Umumiy holda p narx realizasiya qilingan mahsulot miqdori y ning $(p = p(y))$ kamayuvchi funksiyasi.

$$y' = mlp(y)\cdot y, \tag{3}$$

yana o'zgaruvchisi ajaraladigan tenglama bo'lib qoladi.

Shuningdek (3) tenglama aholining ko'payishi, epedemiyaning tarqalishi, reklama tarqatilish jarayoni va h.k.larni ifodalaydi.

2. Tog' – kol posyolkasi aholisi sonining vaqt o'tishi bilan quyidagi tenglama bilan yoziladi:

$$y' = 0{,}3y\left(2 - 10^{-4}y\right)$$

bu erda $y = y(t)$, t - vaqt (yil). Vaqtning boshlan0ich onida posyolki aholisi 500 kishi. Uch yildan keyin aholi soni qancha bo'ladi.

Echish: tenglamadagi o'zgaruvchilarni ajratib, quyidagi tenglamaga kelamiz.

$$\frac{dy}{0{,}3y\left(2 - 10^{-4}y\right)} = dt$$

va bu tenglikni hadma – had integrallab

$$\ln\left|\frac{y}{2 - 10^{-4}y}\right| = 0{,}6t + C_1,$$

yoki $$\frac{y}{2 - 10^{-4}y} = C\,e^{0,t} \tag{4}$$

ni hosil qilamiz.

C o'zgarmasning qiymati boshlan0ich shartdan topiladi: $y(0) = 500$ bo'lgani uchun. $C \cup 256{,}4$. (4) tenglikdan u funksiyaning ifodasi

$$y = \frac{512{,}8\,e^{0{,}6t}}{1 - 0{,}02564\,e^{0{,}6t}}$$

U holda $y(3) = 512{,}8e^{1{,}8}/\left(1 - 0{,}02564\ e^{1{,}8}\right) \approx 2685$.

Eslatib o'tamiz, talabaning elastikligi (narxga nisbatan)

$$E_p(y)=\frac{pdy}{ydp}.$$

Ba'zi hollarda elastiklik berilganda talab funksiyasi qiziqish uyg'otadi.

11.107. Agar $E_p=-2=const$ va $y(3)=\frac{1}{6}$ bo'lganda talab funksiyasini toping.

11.108. Talab va taklif (mos ravishda)

$$y=25-2p+3\frac{dp}{dt},$$

$$x=15-p+4\frac{dp}{dt}$$

Boshlang'ich vaqtda $p=9$ bo'lsa muvozanat narxning, vaqtga bog'liqligini toping.

11.109. Talab funksiyasi $p(y)=2-y;\ \ l=1,\ \ y(0)=0{,}5$ berilgan, sotilgan mahsulot hajmining ifodasini toping.

11.110. Biror tarmoqning vaqtning t onida olgan daromadi $Y(t)$, $I(t)-$ investisiya va $C(t)-$ iste'mol kattaligining yig'indisidan iborat

$$Y(t)=I(t)+C(t) \qquad (5)$$

Daromadning o'sish kattaligini investisiya kattaligiga proorsional, ya'ni

$$b\ Y'(t)=I(t) \qquad (6)$$

bu erda $b-$ daromad o'sishining kapital sig'im koeffisienti.

Faraz qilaylik $C(t)$ olinayotgan daromadning ajratilgan qismi: $C(t)=(1-m)(t)$, bu erda $m-$ investisiya normasi. U holda (5) va (6) dan

$$Y'=\frac{m}{b}Y \qquad (7)$$

bu esa (1) tenglamaga teng kuchli.

11.111. Iste'mol kattaligi $C=2t$, daromad o'sishining kapital sig'imi koeffisienti $b=\frac{1}{2}$, $y(o)=2$, ma'lum bo'lsa daromad funksiyasi $Y=Y(t)$ ni toping.

11.112. To'yilmagan bozor sharoitida, agar vaqtning boshlang'ich onida ishlab chiqarish hajmi $y_0=y(0)=24$ (sh.b), investisiya normasi 0,6, sotilish narxi 0,15 (sh.b) va $l=0{,}4$ bo'lsa 6 oydan keyingi ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

11.113. Tovarning narxi $p(y)=\left(5+3e^{-y}\right)y^{-1},\ m=0{,}6\ \ e=0{,}6,\ \ l=0{,}4\ \ \ y(0)=1$.

Mavzu yuzasidan savollar.

8. Qanday tenglamalar differensial tenglamalar deyiladi?
9. Differensial tenglamaning yechimi deb nimaga aytiladi?
10. Differensial tenglamaning qanday yechimi umumiy, qanday yechimi xususiy deyiladi?
11. Qanday tenglama o`zgaruvchisi ajraladigan differensial tenglama deyiladi?
12. Qanday tenglama bir jinsli differensial tenglama deyiladi?
13. Qanday tenglama chiziqli differensial tenglama deyiladi?
14. O`zgarmasni variatsiyolash usuli nima?

Adabiyotlar

16. Sh.Shorahmetov, B.Naimjanov, «Iqtisodchilar uchun matematica», - T.: «Fan va texnologiya»., 2007 y.
17. М.С.Солохитдинов, Г.Н.Насритдинов. “Оддий дифференциал тенгламалар”. Т., «Узбекистон» 1994 й.
18. Пискунов И.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука. 1978 г.
19. Клименко Ю.И. “Высшая математика для экономистов теория, примеры и задачи”. М.: Экзамен 2005 г.
20. М. С. Красс, Б.П.Чупринов. “Основы математики и ее приложения в экономическом образовании”, - М.: Дело, 2000 г.
21. «Сборник задач по высшей математике для экономистов» под редакцей В.И.Ермакова. М.: Инфра – М, 2003 г.
22. Кремер Н. М. и другие. – “Высшая математика для экономистов”, - М.: 2004 г.
23. Кремер Н.Ш. и др. “Практикум по высшей математике для экономистов” – М.: 2004 г.
24. Минорский И. П., “Сборник задач по высшей математике ” – М.: 2004 г.
25. Соатов Ё.У. “Олий математика”, Т.: Укитувчи, 1-жилд, 2-жилд, 1994 й., 3-жилд, 1996 й.
26. Шапкин А.С. «Задачи с решениями по высшей математике теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию» - М.: 2008г.
27. Макаров С.И., Мищенко М.В., «Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики» Н.: 2008г.
28. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. «Основы математики и ее приложения в экономическом образовании» -М.: 2008
29. Ермаков В.И. «Общий курс высшей математика для экономистов». –Н: 2010г.
30. Ермаков В.И. «Общий курс высшей математика для экономистов». –Н: 2010г.

CONTENS

Adabiyotlar

1. T. A. Azlarov, H. Mansurov " Matematik analiz ", Toshkent 2006 y.
2. Хожиев Ж. " Алгебра ва сонлар назаряси ", Т.: Узбекистон 2001 й.
3. Жураев Т.Ж., Худойберганов Р.Х., Ворисов А. К., Мансуров Х. " Олий математика асослари " Т.: Узбекистон 1999 й.
4. Соатов Ё.У. " Олий математика ", Т.: Укитувчи, 1-жилд, 2-жилд, 1994 й., 3-жилд, 1996 й.
5. " Обший курс высшей математике для экономистов ". Подред В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА – М, 2006 г.
6. " Высшая математика для экономистов". Подредаксийе Н.Ш.Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2006 г.
7. М. С. Красс, Б. П. Чупрынов " Математика для экономического бакалавриантa ", - М.: Дело, 2006 г.
8. В. С. Шипачев" Курс высшей математики ", М.: Проспект, 2005 г.
9. Солодовников А., Бабайцев А. А., Браилов А. В. " Математика в экономике ", - М.:Финансы и статистика, 2004 г.
10. Замков О. О., Толстояптенко А. Б., Черемных Ю. Н. " Математические методы в экономике ", - М.: ДИС 2004 г.
11. Коршунова Н., Плясунов В. "Математика в экономикe ", - М.: Вита пресс, 2004г.
12. М. С. Красс "Математика для экономических специальностей ", - М.: 2004 г.
13. Кремер Н. М. и другие. – " Высшая математика для экономистов ", - М.: 2004 г.
14. Sh. Shoraxmetov, B. Naimjonov " Oliy matematika " fanidan ma'ruzalar matni: T.: TDIU 2005 y.
15. М. Каримов " Олий математика " – Т.: TMI. 2005 y.
16. Адигамова Э. Б. ва бошкалар. " Олий математика " фанидан маърузалар туплами – Т.: ТМИ 2004 й. (II - кисм).
17. М. Каримов., Абдукаримов Р. " Олий математика " фанидан маърузалар туплами – Т.: ТМИ 2002 й.
18. Саипназаров Ш. А., Ортикова М. Т., " Бошлангич молиявий математика асослари " – Т.: ТДИУ 2002 й.
19. Куришева Е.С. " Математика " – Москва 2005.
20. Клименко Ю. И. "Высшая математика для экономистов". – Москва 2005 г.
21. Минорский И. П., "Сборник задач по высшей математике " – М.: 2004 г.
22. Проскуряков И. В. " Сборник задач по линейной алгебре " – М.: Наука, 1998 г.
23. Данко П. Е., Попов А. Т., Кожевникова Т. Я. "Высшая математика в упражнениях и задачах" – М.: Высшая Школа, 1998 г.
24. Масагутова Р. В. "Математика в задачах для экономистов" – Т. Укитувчи 1996 й.
25. Кремер Н. Ш. и др. "Практикум по высшей математике для экономистов " – М.: 2004 г.