ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК: 517.983 DOI: 10.25744/vestnik.2020.49.2.001

ДРОБНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НА ПОЛУОСИ, ИНВАРИАНТНОЕ ОТНОСИТЕЛЬНО РАСТЯЖЕНИЯ

© М.У. ЯХШИБОЕВ

Национальный университет Узбекистана, г. Ташкент

Аннотация. *В данной статье вводится и изучается понятие разности дробного порядка с мультипликативным шагом. Рассматриваются операторы «типа свертки», инвариантные относительно растяжения, и их аппроксимации с помощью единицы в весовых пространствах Лебега. Показано, что области определения двух различных рассматриваемых здесь дробных дифференцирований типа Маршо-Адамара и типа Грюнвальда-Летникова-Адамара совпадают в кусочно-степенных весовых пространствах суммируемых функций.*

Ключевые слова: *дробное дифференцирование типа Маршо-Адамара, дробное дифференцирование типа Грюнвальда-Летникова-Адамара, оператор растяжения, разность дробного порядка с мультипликативным шагом, преобразование Меллина.*

Для цитирования: Яхшибоев М.У. Дробное интегро-дифференцирование на полуоси, инвариантное относительно растяжения // Вестник Академии наук Чеченской Республики. 2020. № 2 (49). С. 5–20. DOI: 10.25744/vestnik.2020.49.2.001.

1. Введение

В работах [1–3] была рассмотрена дробная производная Грюнвальда-Летникова:

$$\lim_{h\to 0+0} \frac{\Delta_h^\alpha f}{h^\alpha}, \tag{1.1}$$

где $\left(\Delta_h^\alpha f\right)(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(x-kh)$ – разность дробного порядка α функции $f(x)$, $\alpha, x\in\mathbb{R}$. Такой подход к дробному дифференцированию предложили А. Грюнвальд (1867) [4] и А.В. Летников (1868) [5]. В последнее время подход (1.1) Грюнвальда-Летникова привлек к себе внимание как в задачах теории функций (см. например [6–7]), так и с точки зрения удобства в приближенных вычислениях [8–9].

Введенное Ж. Адамаром [10] дробное интегро-дифференцирование типа $\left(x\dfrac{d}{dx}\right)^\alpha$, где $-\infty<\alpha<\infty$, является инвариантным относительно оператора растяжения $\left(\Pi_\rho f\right)(x)=f(\rho x)$, $\rho, x\in\mathbb{R}_+$. В статьях [11–17] были рассмотрены операторы дробного интегро-дифференцирования Адамара и типа Адамара. Ряд свойств дробного интегрирования по Адамару можно найти в книге [18].

В настоящей работе дается дальнейшее исследование свойств такого дробного интегро-дифференцирования и для него развивается соответствующий разностный подход. А именно в теории Лиувиллевского дробного дифференцирования $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^\alpha$ (рассматриваемого на оси и инвариантного относительно сдвига) известен подход Грюнвальда-Летникова, при котором дробная производная определяется как (1.1) с использованием разностей дробного порядка. В настоящей работе аналогичный подход реализуется на полуоси в терминах разностей дробного порядка, приспособленных к оператору растяжения, а не сдвига, и производится сравнение областей определения такого разностного подхода с другой формой типа дробного дифференцирования Маршо, надлежащим образом модифицированного для случая конструкций Адамара.

Рассмотрение ведется в рамках пространств

$$L^p_{\gamma,\nu} = L^p\left(\mathbb{R}_+, \omega_{\gamma,\nu}(x)\frac{dx}{x}\right) = \left\{ f : \left\| f; L^p_{\gamma,\nu} \right\| = \int_0^1 |f(x)|^p \, x^{-\gamma} \frac{dx}{x} + \int_1^\infty |f(x)|^p \, x^{-\nu} \frac{dx}{x} < \infty \right\}, \qquad (1.2)$$

$$1 \le p < \infty, \ \gamma \ge 0, \nu \ge 0, \text{ и}$$

$$C_{\gamma,\nu} = C\left(\dot{R}_+, \omega_{\gamma,\nu}(x)\right) = \left\{ f : \left\| f; C_{\gamma,\nu} \right\| = \operatorname*{ess\,sup}_{x>0} \left| \omega_{\gamma,\nu} f(x) \right| < \infty \right\}, \qquad (1.3)$$

где $\omega_{\gamma,\nu}(x) = \begin{cases} x^{-\gamma}, \ 0 < x < 1, \\ x^{-\nu}, \ x > 1 \end{cases}$. Показано, что области определения двух различных рассматриваемых здесь толкований Адамаровского дробного дифференцирования совпадают, вообще говоря, в рамках пространств (1.2), (1.3).

В статье вводится понятие разности дробного порядка с мультипликативным шагом и изучены ее свойства. Рассматриваются операторы «типа свертки», инвариантные относительно растяжения и к их аппроксимации с помощью единицы в весовых пространствах Лебега.

Заметим, что вопрос о совпадении областей определения двух форм дробного дифференцирования Маршо и Грюнвальда-Летникова исследован ранее для Лиувиллевского дробного дифференцирования $\left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha$, инвариантного относительно сдвига, в рамках пространств $L_p(\mathbb{R})$ (см. [18]) при $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ и в [2] в общем случае. Результат данной работы в случае $\gamma = \nu = 0$ можно было бы вывести из результатов работ [18], [2], однако мы предпочитаем и в случае $\gamma = \nu = 0$ дать прямое доказательство, т.е. в терминах, подчиненных связи с оператором растяжения. Это продиктовано, в частности, необходимостью развить соответствующий аппарат для дальнейших исследований дробного интегро-дифференцирования, инвариантного относительно растяжения.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 приводятся необходимые определения и различные вспомогательные свойства Адамаровского дробного интегро-дифференцирования. В разделах 3, 4, 5 содержатся доказательства основных результатов: в разделе 3 вспомогательные леммы для пространств $L^p_{\gamma,\nu}$, раздел 4 посвящен исследованию дробных разностных операторов с мультипликативным шагом в пространствах $L^p_{\gamma,\nu}$, а в разделе 5 доказано совпадение областей определений двух различных форм операторов дробного дифференцирования. Мы, однако, выделяем случай $\gamma = \nu = 0$ в 5.1, когда удается дать доказательство теоремы в одну сторону, более прозрачное в образах Меллина, нежели доказательство в 5.2 при всех $\gamma \ge 0, \nu \ge 0$.

Обозначения. $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, $\mathbb{R}_+ = (0;+\infty)$ – полуось; $\dot{R}$ – компактификация $\mathbb{R}$ одной бесконечно удаленной точкой. Всюду ниже: E – единичный оператор; $(\Pi_\rho f)(x) = f(x \circ \rho)$, $x, \rho \in \mathbb{R}_+$ – оператор растяжения; $(\Pi^\mu_\rho f)(x) = \rho^\mu f(x \circ \rho)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $x, \rho \in \mathbb{R}_+$ – оператор растяжения Меллина. $\binom{\alpha}{k} = \frac{(-1)^{k-1} \alpha\, \Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k+1)}$ – биномиальные коэффициенты, в частности, при $\alpha = l$, $l \in \mathbb{N}$, имеем равенство $\binom{l}{k} = \frac{l!}{k!(l-k)!}$ при $l \ge k$ и $\binom{l}{k} = 0$ при $0 \le l < k$. Введем конечную разность с использованием оператора растяжения

$$(\tilde{\Delta}^l_\rho f)(x) = \left(E - \Pi_\rho\right)^l = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} (\Pi_\rho)^k f(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} \Pi_{\rho^k} f(x) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} f\left(x \cdot \rho^k\right),\ l \in \mathbb{N},\ \rho \in \mathbb{R}_+.$$

Разность дробного порядка $\alpha \in \mathbb{R}_+$ с мультипликативным шагом:

$$(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu} f)(x) = \left(E - \Pi_{\rho}^{\mu}\right)^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \left(\Pi_{\rho}^{\mu}\right)^k f(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \Pi_{\rho^k}^{\mu} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \rho^{k\mu} f\left(x \cdot \rho^k\right),\ \mu, \rho, \alpha \in \mathbb{R}_+. \tag{1.4}$$

$$m = \begin{cases} \min\left(\dfrac{\gamma}{p}, \dfrac{\nu}{p}\right), 1 \le p < \infty, \\ \min(\gamma, \nu),\ \ p = \infty. \end{cases} \quad M = \begin{cases} \max\left(\dfrac{\gamma}{p}, \dfrac{\nu}{p}\right), 1 \le p < \infty, \\ \max(\gamma, \nu),\ \ p = \infty. \end{cases} \tag{1.5}$$

$C_0\left(\dot{R}_+\right) = \{\ f : f \in C([0\infty]),\ f(0) = f(\infty)\ \}$, $(u)_+^{\alpha} = \begin{cases} u^{\alpha},\ u > 0, \\ 0,\ \ u < 0. \end{cases}$ Будем использовать нормировочные постоянные $\aleph(\alpha, l) = \int\limits_0^{\infty} t^{-1-\alpha} \left(1 - e^{-t}\right)^l dt$, известные в теории дробного дифференцирования; $C_0^{\infty}\left(\dot{R}_+\right)$ – класс бесконечно дифференцируемых финитных функций с носителем вне начала координат. $\Gamma(\alpha, x) = \int\limits_x^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$, $\alpha,\ x \in \mathbb{R}_+$ – неполная гамма-функция. $\theta_{\pm}(x) = \dfrac{1 \pm \operatorname{sign} x}{2}$ – функции Хевисайда.

2. Предварительные сведения и вспомогательные утверждения

2.1. Дробные интегралы и производные Адамара и типа Адамара

В работе [13] введены дробные интегралы и производные типа Адамара:

$$\left(J_{+,\mu}^{\alpha} \varphi\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \varphi(t) \frac{dt}{t}, \quad x > 0, \alpha > 0, \tag{2.1}$$

$$\left(\mathbf{D}_{0+,\mu}^{\alpha} f\right)(x) := x^{-\mu} \delta^n x^{\mu} (J_{0+,\mu}^{n-\alpha} f)(x),\ \delta = x \frac{d}{dx},\ n = [\alpha] + 1,\ \ x > 0, \alpha > 0, \tag{2.2}$$

где $[\alpha]$ – целая часть числа α. При $\mu = 0$ соответственно (2.1) и (2.2) совпадают с дробными интегралами и производными Адамара порядка $\alpha > 0$ (см. [18], §18.3):

$$\left(J_{+}^{\alpha} \varphi\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \varphi(t) \frac{dt}{t},\ x > 0, \alpha > 0, \tag{2.3}$$

$$\left(\mathbf{D}_{0+}^{\alpha} f\right)(x) := \delta^n \left(J_{0+}^{n-\alpha} f\right)(x),\ \delta = x \frac{d}{dx},\ n = [\alpha] + 1,\ \ x > 0, \alpha > 0. \tag{2.4}$$

При $0 < \alpha < 1$ формулы (2.2) и (2.4) принимают вид

$$(\mathbf{D}_{+}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} x^{1-\mu} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{-\alpha} f(t) \frac{dt}{t^{1-\mu}},\ x > 0, \tag{2.5}$$

$$(\mathbf{D}_{+}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} x \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{-\alpha} f(t) \frac{dt}{t},\ x > 0. \tag{2.6}$$

При $0 < \alpha < 1$ производную (2.5) и (2.6) нетрудно привести на достаточно хороших функциях $f(x)$ к виду, аналогичному дробной производной Маршо:

$$(D_{+,\mu}^{\alpha} f)(x) := \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^1 t^{\mu} \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{-\alpha-1} [f(x) - f(x \cdot t)] \frac{dt}{t} + \mu^{\alpha} f(x),$$

$$(D_{+}^{\alpha} f)(x) := \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{-\alpha-1} [f(x) - f(x \cdot t)] \frac{dt}{t},$$

где $0 < \alpha < 1$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Отправляясь от (2.4), для произвольного $\alpha \geq 1$ дадим следующее

Определение 2.1. Конструкцию

$$(D_{+}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\aleph(\alpha, l)} \int_0^1 \frac{(\widetilde{\Delta}_t^l f)(x)}{|\ln t|^{\alpha+1}} \frac{dt}{t}, \; l > \alpha > 0,$$

назовем дробной производной Маршо-Адамара порядка $\alpha > 0$ (см. [18], с. 102).

Отметим, что $\mathbf{D}_{+,\mu}^{\alpha} f \equiv D_{+,\mu}^{\alpha} f$ не на всех тех функциях $f(x)$, на которых $\mathbf{D}_{+,\mu}^{\alpha} f$ и $D_{+,\mu}^{\alpha} f$ существует. Например, если $\mu = 0$ и в случае $f(x) = const \neq 0$, то $D_{+,\mu}^{\alpha} f$ существует и $D_{+,\mu}^{\alpha} f \equiv 0$, однако $\mathbf{D}_{+,\mu}^{\alpha} f$ для $f(x) = const \neq 0$ не существует. Поэтому дробные производные типа Маршо-Адамара $D_{+,\mu}^{\alpha} f$ являются более естественными на полуоси $\mathbb{R}_{+}$, чем дробная производная типа Адамара $\mathbf{D}_{+,\mu}^{\alpha} f$.

Операторы $\left(D_{+,\mu;1-\rho}^{\alpha} f\right)(x)$ и $\left(D_{+,1-\rho}^{\alpha} f\right)(x)$, определяемые равенствами

$$\left(D_{+,\mu;1-\rho}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\rho} t^{\mu} \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{-\alpha-1} \left(\Delta_t^1 f\right)(x) \frac{dt}{t} + \mu^{\alpha} f(x) \; (0 < \alpha < 1), \qquad (2.7)$$

$$\left(D_{+,1-\rho}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\aleph(\alpha, l)} \int_0^{\rho} \frac{\left(\widetilde{\Delta}_t^l f\right)(x)}{|\ln t|^{\alpha+1}} \frac{dt}{t} \; (l > \alpha > 0),$$

называются усеченными дробными производными типа Маршо-Адамара и Маршо-Адамара. Под “усеченной” дробной производной Маршо-Адамара и типа Маршо-Адамара будем понимать предел по норме пространства $L_{\gamma,\nu}^{p}$:

$$\left(D_{+,\mu}^{\alpha} f\right)(x) = \lim_{\substack{\rho \to 1-0 \\ \left(L_{\gamma,\nu}^{p}\right)}} \left(D_{+,\mu;1-\rho}^{\alpha} f\right)(x), \quad D_{+}^{\alpha} f = \lim_{\substack{\rho \to 1 \\ \left(L_{\gamma,\nu}^{p}\right)}} D_{+;1-\rho}^{\alpha} f.$$

Нам понадобится следующая модификация Адамаровского дробного интегрирования, содержащая дополнительные параметры:

$$\left(J_{+,t}^{\alpha,l} \varphi\right)(x) = \int_0^{\infty} k_{\alpha,l}^{+,t}\left(\ln \frac{x}{\tau}\right) \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \qquad t > 0 \qquad (2.8)$$

с ядром $k_{\alpha,l}^{+,t}(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} (\xi + k \ln t)_{+}^{\alpha-1}$. Очевидно, $\left(J_{+,t}^{\alpha,l} \varphi\right)(x) = \widetilde{\Delta}_t^l \left(J_{+}^{\alpha} \varphi\right)(x)$ на достаточно хороших функциях $\varphi(x)$, т.е. оператор (2.8) получается применением разности $\widetilde{\Delta}_t^l$ с мультипликативным шагом к оператору (2.3). Он имеет то преимущество по сравнению с J_{+}^{α}, что при $l > \alpha > 0$ он ограничен в пространстве $1 \leq p \leq \infty$ при всех $\gamma \geq 0$, $\nu \geq 0$ (т.е. включая и случай $\gamma = \nu = 0$). Это вытекает из того, что $\left(J_{+,t}^{\alpha,l} \varphi\right)(x) = \int_0^{\infty} k_{\alpha,l}^{+,t}(\xi) \varphi\left(x \cdot e^{-\xi}\right) d\xi$, т.е. остается сослаться на то, что $k_{\alpha,l}^{+,t}(\xi) \in L_1\left(\mathbb{R}_{+}\right)$ при $t \in (0, \infty)$ (см. [18] с. 282).

2.2. Подход Грюнвальда-Летникова к дробному дифференцированию Адамара

Определение 2.2. Выражение

$$\left(D_{+}^{\alpha)} f\right)(x)=\lim_{\rho\to 1-0}\frac{\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha} f\right)(x)}{(1-\rho)^{\alpha}},\quad \left(D_{-}^{\alpha)} f\right)(x)=\lim_{\rho\to 1+0}\frac{\left(\widetilde{\Delta}_{\rho^{-1}}^{\alpha} f\right)(x)}{(\rho-1)^{\alpha}}$$

назовем дробной производной Грюнвальда-Летникова-Адамара (соответственно левосторонней и правосторонней).

Аналогично вышесказанному, конструкцию

$$\left(D_{+,\mu}^{\alpha)} f\right)(x)=\lim_{\rho\to 1-0}\frac{\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu} f\right)(x)}{(1-\rho)^{\alpha}},\qquad \left(D_{-,\mu}^{\alpha)} f\right)(x)=\lim_{\rho\to 1+0}\frac{\left(\widetilde{\Delta}_{\rho^{-1}}^{\alpha,\mu} f\right)(x)}{(\rho-1)^{\alpha}}$$

назовем дробной производной типа Грюнвальда-Летникова-Адамара (соответственно левосторонней и правосторонней), где $\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu} f\right)(x)$ – разность дробного порядка $\alpha\in\mathbb{R}_{+}$ с мультипликативным шагом (1.4).

2.3. Интегральное представление усеченных дробных производных Маршо-Адамара и типа Маршо-Адамара

Имеют место следующие утверждения.

Лемма 2.1 ([17]). Пусть $f=J_{+,\mu;}^{\alpha}\varphi,\quad \varphi\in L_{\gamma,\nu}^{p}(\mathbb{R}_{+})$, где $1\le p<\infty,\ 0<\alpha<1,\ \mu\ge 0,\mu>-m$ и $0<\rho<1$. Тогда усеченная дробная производная $D_{+,\mu;1-\rho}^{\alpha} f$ имеет следующее интегральное представление

$$D_{+,\mu;1-\rho}^{\alpha} f=\int_{0}^{\infty} K_{\alpha,\mu}^{+}(t,\rho)\varphi\left(x\cdot\rho^{t}\right)dt,$$

где

$$K_{\alpha,\mu}^{+}(t,\rho)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{\rho^{\mu t}}{t}\left[\left(\alpha\Gamma\left(-\alpha,\mu\ln\frac{1}{\rho}\right)+\Gamma(1-\alpha)\right)\left(\mu\ln\frac{1}{\rho}\right)^{\alpha} t_{+}^{\alpha}-(t-1)_{+}^{\alpha}\right]. \tag{2.9}$$

При этом ядро $K_{\alpha,\mu}^{+}(t,\rho)\in L_{1}(\mathbb{R}_{+})$ является усредняющим: $\int_{0}^{\infty} K_{\alpha,\mu}^{+}(t,\rho)dt=1$, $K_{\alpha,\mu}^{+}(t,\rho)>0$ при $t>0$.

Лемма 2.2 ([17]). Пусть $f=I_{+}^{\alpha}\varphi,\quad \varphi\in L_{\gamma,\nu}^{p}(\mathbb{R}_{+}),\quad 1\le p\le\infty,\ \alpha>0,\ \gamma>0,\ \nu>0$ или $0<\alpha<1,\ 1\le p<\frac{1}{\alpha},\ \gamma=0,\ \nu=0$ и $0<\rho<1$. Тогда усеченная дробная производная $D_{+,1-\rho}^{\alpha} f$ имеет следующее интегральное представление

$$\left(D_{+,1-\rho}^{\alpha} f\right)(x)=\int_{0}^{\infty} K_{l,\alpha}^{+}(y)\varphi(x\rho^{y})dy, \tag{2.10}$$

где ядро $K_{l,\alpha}^{+}(y)=\dfrac{\sum_{k=0}^{l}(-1)^{k}\binom{l}{k}(y-k)_{+}^{\alpha}}{\aleph(\alpha,l)\Gamma(1+\alpha)y}\in L_{1}(\mathbb{R})$ при $l>\alpha>0$, $\int_{0}^{\infty} K_{l,\alpha}^{+}(y)dy=1$.

Лемма 2.3 ([17]). Пусть $f\in L_{\lambda,\theta}^{r}(\mathbb{R}_{+}),\quad 1\le r\le\infty,\lambda>0,\theta>0$ такова, что ее разность $(\widetilde{\Delta}_{t}^{l} f)(x)$ порядка l представима модифицированным Адамаровским дробным интегралом (2.8) от функции из $L_{\gamma,\nu}^{p}$:

$$(\widetilde{\Delta}_{t}^{l} f)(x)=\int_{0}^{\infty} k_{\alpha,l}^{+,t}\left(\ln\frac{x}{\tau}\right)\varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau},\ t>0,$$

где $l>\alpha>0,\varphi\in L_{\gamma,\nu}^{p},1\le p\le\infty,\quad \gamma\ge 0,\ \nu\ge 0$. Тогда усеченная дробная производная $D_{+,1-\rho}^{\alpha} f$ имеет следующее интегральное представление (2.10) при $1\le p<\infty$ и интегральное представление

$$\left(D^{\alpha}_{+,1-\rho}f\right)(x)=\int\limits_0^{\infty}K^{+}_{l,\alpha}(t)\varphi(x\cdot\rho^{t})dt-\varphi(0)$$

при $p=\infty$.

2.4. Преобразование Меллина и дробное дифференцирование по Адамару и типа Адамара

Рассмотрим преобразование Меллина «достаточно хорошей» функции $\varphi(x)$, $x>0$, определяемое формулой

$$\varphi^{*}(s)=m\{\varphi(t);s\}=\int\limits_0^{\infty}x^{s-1}\varphi(x)dx,\mathrm{Re}\,s=\gamma, \tag{2.11}$$

а обратное преобразование Меллина осуществляется с помощью равенства

$$\varphi(x)=m^{-1}\{\varphi^{*}(s);x\}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}x^{-s}\varphi^{*}(s)ds,\ x>0,\ \gamma=\mathrm{Re}\,s.$$

Преобразование Меллина можно записать через преобразование Фурье

$$\varphi^{*}(s)=m\{\varphi(t);s\}=(FQ\varphi)(is)=\widetilde{\psi}(-is),$$

где $(Q\varphi)(x)=\varphi(e^{x})$, $\psi=Q\varphi$.

Лемма 2.4. Пусть $\alpha>0$ и $\mu\in\mathbb{C}$. Также пусть функция $f(x)$ такова, что ее преобразование Меллина $m\{f;s\}$ существует для $s\in\mathbb{C}$. Если $\mathrm{Re}(\mu-s)>0$ и $m\left\{D^{\alpha}_{+,\mu}f;s\right\}$ существует, то

$$m\left\{D^{\alpha}_{+,\mu}f;s\right\}=(\mu-s)^{\alpha}f^{*}(s)\ (0<\alpha<1).$$

В частности, если $\mathrm{Re}(s)<0$, то

$$m\left\{D^{\alpha}_{+}f;s\right\}=(-s)^{\alpha}f^{*}(s)\ (\alpha>0).$$

Доказательство леммы получается непосредственной проверкой.

Лемма 2.5. Для $f(x)\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_{+})$ справедлива формула

$$m\left\{D^{\alpha}_{+,\mu;1-\rho}f;s\right\}=(\mu-s)^{\alpha}K^{+}_{\alpha,\mu}(t)f^{*}(s), \tag{2.12}$$

где $0<\alpha<1$, $K^{+}_{\alpha,\mu}(t)=\dfrac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)t^{\alpha}}\displaystyle\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\rho^{\mu y}-e^{-ty}}{y^{1+\alpha}}dy+\left(\dfrac{\mu}{\mu-s}\right)^{\alpha}$, $t=-(\mu-s)\ln\rho$, $\mathrm{Re}\,t=-\mu\ln\rho$.

Доказательство. Согласно (2.7) и (2.11) имеем

$$m\{D^{\alpha}_{+,\mu;1-\rho}f;s\}=\int\limits_0^{\infty}x^{s-1}\left\{\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^{\rho}t^{\mu}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-\alpha-1}[f(x)-f(t)]\frac{dt}{t}+\mu^{\alpha}f(x)\right\}dx.$$

После перестановки порядка интегрирования, возможной при $0<\rho<1$ на основании теоремы Фубини, получим

$$m\left\{D^{\alpha}_{+,\mu;1-\rho}f;s\right\}=\left\{\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{\ln\frac{1}{\rho}}^{\infty}e^{-\mu\tau}\tau^{-\alpha-1}\left(1-e^{s\tau}\right)d\tau+\mu^{\alpha}\}f^{*}(s)\right\}=$$

$$=\left\{\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{-\alpha}\int\limits_1^{\infty}y^{-\alpha-1}\left(e^{\mu y\ln\rho}-e^{(\mu-s)y\ln\rho}\right)dy+\mu^{\alpha}\}f^{*}(s)\right\}. \tag{2.13}$$

Поэтому из (2.13) вытекает (2.12).

Лемма 2.6. Для $f(x)\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_{+})$ справедлива формула

$$m\left\{D^{\alpha}_{+;1-\rho}f;s\right\}=(-s)^{\alpha}K^{+}_{\alpha}(t)f^{*}(s),$$

где $l>\alpha>0$, $K^{+}_{\alpha}(t)=\dfrac{1}{\aleph(\alpha,l)(-t)^{\alpha}}\displaystyle\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\left(1-e^{-t\xi}\right)^{l}}{\xi^{1+\alpha}}d\xi$, $t=-s\ln\rho$, $\mathrm{Re}\,t=0$.

Доказательство леммы 2.6 аналогично доказательству леммы 2.5.

3. Операторы растяжения в весовых пространствах кусочно-степенных суммируемых функций

Лемма 3.1. Пространствао $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ плотно в $L^p_{\gamma,\nu}\left(\mathbb{R}_+,\frac{dx}{x}\right)$, $1\le p<\infty$, и в

$$C_{0,\gamma,\nu}(\dot{R}_+)=\{f: g(x)=\omega_{\gamma,\nu}(x)f(x),\ g(x)\in C([0,\infty]),\ g(0)=g(\infty)=0\},$$

для любых $\gamma,\nu\in\mathbb{R}$.

Доказательство леммы осуществляется стандартными средствами.

Лемма 3.2. Пусть $\varphi\in L^p_{\gamma,\nu}$, $1\le p\le\infty$, $\mu,\ \gamma,\nu\in\mathbb{R}$, то справедливо неравенство:

$$\left\|\Pi^\mu_\rho\varphi\ ;\ L^p_{\gamma,\nu}\right\|\le c_\rho(\mu)\left\|\varphi\ ;\ L^p_{\gamma,\nu}\right\|, \tag{3.1}$$

где $c_\rho(\mu)=\begin{cases}\rho^{m+\mu},\ 0<\rho<1,\\ \rho^{M+\mu},\ \ \rho>1,\end{cases}$ m,M – числа (1.5).

Доказательство. При $1\le p<\infty$ имеем:

$$\left\|\Pi^\mu_\rho\varphi;\ L^p_{\gamma,\nu}\right\|=\left\{\int_0^1 x^{-\gamma}\rho^{\mu p}|\varphi(x\cdot\rho)|^p\frac{dx}{x}+\int_1^\infty x^{-\nu}\rho^{\mu p}|\varphi(x\cdot\rho)|^p\frac{dx}{x}\right\}^{\frac{1}{p}},$$

откуда заменой $x\cdot\rho=y$ получаем

$$\left\|\Pi_\rho\varphi;\ L^p_{\gamma,\nu}\right\|=\left\{\rho^{\gamma+\mu p}\int_c^\rho y^{-\gamma}|\varphi(y)|^p\frac{dy}{y}+\rho^{\nu+\mu p}\int_\rho^\infty y^{-\nu}|\varphi(y)|^p\frac{dy}{y}\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{3.2}$$

Поэтому из (3.2) вытекает неравенство (3.1). Случай $p=\infty$ рассматривается аналогично.

Лемма 3.3. Пусть $\varphi\in L^p_{\gamma,\nu}$, $1\le p\le\infty$, $\mu,\gamma,\nu\in\mathbb{R}$, тогда справедливо равенство:

$$\lim_{\rho\to1\pm0}\left\|\Pi^\mu_\rho\varphi-\varphi\ ;\ L^p_{\gamma,\nu}\right\|=0. \tag{3.3}$$

Доказательство. Чтобы получить (3.3), сведем оценку разности $\Pi^\mu_\rho\varphi-\varphi$ в пространстве $L^p_{\gamma,\nu}$ к оценке в L_p. Рассмотрим сначала случай $1\le p<\infty$, $0<\rho<1,\ \gamma\ge0,\ \nu\ge0$. Имеем:

$$\left\|\Pi^\mu_\rho\varphi-\varphi;\ L^p_{\gamma,\nu}\right\|\le\rho^\mu\left\{\int_0^\infty\left|\left[\omega^{\frac{1}{p}}_{\gamma,\nu}(x)-\omega^{\frac{1}{p}}_{\gamma,\nu}(x\cdot\rho)\right]\varphi(x\cdot\rho)\right|^p\frac{dx}{x}\right\}^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left\{\int_0^\infty\left|\omega^{\frac{1}{p}}_{\gamma,\nu}(x\cdot\rho)\rho^\mu\varphi(x\cdot\rho)-\omega^{\frac{1}{p}}_{\gamma,\nu}(x)\cdot\varphi(x)\right|^p\frac{dx}{x}\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда

$$\left\|\Pi^\mu_\rho\varphi-\varphi;\ L^p_{\gamma,\nu}\right\|\le\rho^\mu\left\{\int_0^\infty\left|x^{\frac{-\gamma}{p}}\left[\theta_+(1-x)-\theta_+(1-x\cdot\rho)\cdot\rho^{\frac{-\gamma}{p}}\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+x^{-\frac{\nu}{p}}\left[\theta_+(x-1)-\theta_+(x\cdot\rho-1)\rho^{-\frac{\nu}{p}}\right]^p|\varphi(x\cdot\rho)|^p\frac{dx}{x}\right\}^{1/p}+\left\{\int_0^\infty\left|\Pi^\mu_\rho g(x)-g(x)\right|^p\frac{dx}{x}\right\}^{1/p}, \tag{3.4}$$

где $\theta_+(y)-$ функция Хевисайда, $g(x)=\omega_{\gamma,\nu}^{\frac{1}{p}}\varphi(x)$. Из (3.4) имеем:

$$\left\|\Pi_\rho^\mu\varphi-\varphi;\,L_{\gamma,\nu}^p\right\|\le\rho^\mu\left\{\int_0^1\left|x^{\frac{-\gamma}{p}}\left(1-\rho^{\frac{-\gamma}{p}}\right)\right|^p|\varphi(x\cdot\rho)|^p\frac{dx}{x}+\int_1^{1/\rho}\left|x^{-\frac{\nu}{p}}-x^{\frac{-\gamma}{p}}\rho^{\frac{-\gamma}{p}}\right|^p|\varphi(x\cdot\rho)|^p\frac{dx}{x}+\right.$$

$$\left.+\int_{1/\rho}^{\infty}\left|x^{-\frac{\nu}{p}}\left(1-\rho^{-\frac{\nu}{p}}\right)\right|^p\cdot|\varphi(x\cdot\rho)|^p\frac{dx}{x}\right\}^{1/p}+\left\|\Pi_\rho^\mu g-g;\,L^p\right\|.$$

Замена $x\cdot\rho=y$ дает

$$\left\|\Pi_\rho^\mu\varphi-\varphi;\,L_{\gamma,\nu}^p\right\|\le\rho^\mu\left\{\int_0^\rho\left|1-\rho^{\frac{\gamma}{p}}\right|^p y^{-\gamma}|\varphi(y)|\frac{dy}{y}+\int_\rho^1\left|1-\rho^{\frac{\nu}{p}}y^{\frac{\gamma-\nu}{p}}\right|^p y^{-\gamma}|\varphi(y)|^p\frac{dy}{y}+\right.$$

$$\left.+\int_1^\infty\left|1-\rho^{\frac{\nu}{p}}\right|^p y^{-\nu}.|\varphi(y)|^p\frac{dy}{y}\right\}^{1/p}+\left\|\Pi_\rho^\mu g-g;\,L^p\right\|.$$

Поэтому

$$\left\|\Pi_\rho^\mu\varphi-\varphi;\,L_{\gamma,\nu}^p\right\|\le\rho^\mu\left(1-\rho^M\right)\left\|\varphi\,;\,L_{\gamma,\nu}^p\right\|+\left\|\Pi_\rho^\mu g-g;\,L^p\right\|$$

при всех $0<\rho<1,\ 1\le p<\infty,\gamma\ge0,\ \nu\ge0$. В остальных случаях аналогично устанавливается неравенство

$$\left\|\Pi_\rho^\mu\varphi-\varphi\,;\,L_{\gamma,\nu}^p\right\|\le\rho^\mu\left|1-c_\rho(m,M)\right|\left\|\varphi;L_{\gamma,\nu}^p\right\|+\left\|\Pi_\rho^\mu g-g;\,L^p\right\|,\tag{3.5}$$

где $c_\rho(m,M)=\begin{cases}\rho^m, & \gamma<0,\nu<0,\\ \rho^M, & \gamma\ge0,\nu\ge0,\end{cases}$ и в случае $p=\infty,\quad g(x)=\omega_{\gamma,\nu}(x)\varphi(x)\in C$. Утверждение (3.5) следует из неравенства (3.3) в силу теоремы Лебега.

Следующие леммы относятся к операторам «типа свертки», инвариантным относительно растяжения и к их аппроксимации с помощью единицы в пространствах $L_{\gamma,\nu}^p$. Рассмотрим операторы вида

$$\left(A_\rho^\mu\varphi\right)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}k(t)\rho^{\mu\,t}\varphi\left(x\cdot\rho^t\right)dt,\ \rho>0,\ x\in\mathbb{R}_+.$$

Лемма 3.4. Пусть $1\le p\le\infty,\ \mu,\gamma,\nu\in\mathbb{R}$ и $K(\rho):=\int_{-\infty}^{\infty}|k(t)|q(\rho,t)dt<+\infty$, где

$q(\rho,t)=\begin{cases}\rho^{(m+\mu)t}, & 0<\rho<1,\\ \rho^{(M+\mu)t}, & \rho>1.\end{cases}$. Тогда оператор A_ρ^μ ограничен в пространстве $L_{\gamma,\nu}^p$, и

$$\left\|A_\rho^\mu\varphi;\,L_{\gamma,\nu}^p\right\|\le K(\rho)\left\|\varphi\,;L_{\gamma,\nu}^p\right\|.$$

Доказательство. Так как

$$(A_\rho^\mu\varphi)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}k(t)\left(\Pi_{\rho^t}^\mu\varphi\right)(x)dt,$$

то утверждение леммы получается применением обобщенного неравенства Минковского и леммы 3.2.

Следствие 3.1. Оператор вида

$$\left(B_{\lambda}^{\mu}\varphi\right)(x) := \int_0^{\infty} a(t)\left(\Pi_{t^{\lambda}}^{\mu}\varphi\right)(x)dt = \int_0^{\infty} a(t)t^{\mu\lambda}\varphi\left(x\cdot t^{\lambda}\right)dt, \quad \lambda\in\mathbb{R}, \tag{3.6}$$

ограничен в пространстве $L_{\gamma,\nu}^{p}$, $1\le p\le\infty, \mu, \gamma, \nu\in\mathbb{R}$, если

$$d_1(\mu,\lambda) := \int_0^1 |a(t)| t^{\lambda(\mu+m)}dt + \int_1^{\infty} |a(t)| t^{\lambda(\mu+M)}dt < +\infty,$$

при $\lambda\ge 0$, и

$$d_2(\mu,\lambda) := \int_0^1 |a(t)| t^{\lambda(\mu+M)}dt + \int_1^{\infty} |a(t)| t^{\lambda(\mu+m)}dt < +\infty$$

при $\lambda<0$.

Следствие 3.2. Если $k(t)\equiv 0$ при $t<0$, то условие $k(t)\in L_1(\mathbb{R}_+)$ достаточно для ограниченности оператора (3.6) в пространстве $L_{\gamma,\nu}^{p}$ при $0<\rho<1, 1\le p\le\infty, \mu\ge 0, \lambda\ge 0, \nu\ge 0$, при этом

$$\left\|A_{\rho}^{\mu}\varphi; L_{\gamma,\nu}^{p}\right\| \le \left\|k; L_1(\mathbb{R}_+)\right\| \left\|\varphi; L_{\gamma,\nu}^{p}\right\|.$$

Следствие 3.3. Если в (3.6) $a(t)\equiv 0$ при $t\ge 1$, то аналогично оператор (3.6) ограничен в пространстве $L_{\gamma,\nu}^{p}$ при всех $1\le p<\infty, \ \gamma\ge 0, \ \nu\ge 0, \ \mu,\lambda\in\mathbb{R}$, если $\int_0^1 |a(t)| t^{\mu\lambda}dt<+\infty$.

Если в (3.6) $a(t)\equiv 0$ при $t\le 1$, то аналогично оператор (3.6) ограничен в пространстве $L_{\gamma,\nu}^{p}$ при всех $1\le p<\infty, \ \gamma<0, \nu<0, \ \mu,\lambda\in\mathbb{R}$, если $\int_1^{\infty} |a(t)| t^{\mu\lambda}dt<\infty$.

Лемма 3.5. Пусть $k(t)\equiv 0$ при $t<0$, $k(t)\in L_1(\mathbb{R}_+)$ и $\int_0^{\infty} k(t)dt = 1$. Тогда

$$\lim_{\rho\to 1-0}\left\|A_{\rho}^{\mu}\varphi - \varphi; L_{\gamma,\nu}^{p}\right\| = 0$$

для всех $1\le p<\infty, \gamma\ge 0, \nu\ge 0, \mu\in\mathbb{R}$.

Доказательство леммы 3.5 аналогично доказательству леммы 3.3.

4. Дробные разностные операторы с мультипликативным шагом

Дробную разность с мультипликативным шагом (1.4) назовем левосторонней, если $0<\rho<1$, и правосторонней, если $\rho>1$.

Лемма 4.1. Если $f\in L_{\gamma,\nu}^{p}, \ 1\le p\le\infty, \ \ \mu, \gamma,\nu\in\mathbb{R}, \ \rho>0$, то

$$\left\|\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu} f; L_{\gamma,\nu}^{p}\right\| \le q(\alpha,\mu)\left\|f; L_{\gamma,\nu}^{p}\right\|, \tag{4.1}$$

где $q(\alpha,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{k}\right| c_k(\mu) < \infty$, $c_k(\mu) = \begin{cases}\rho^{(m+\mu)k}, & 0<\rho<1,\\ \rho^{(M+\mu)k}, & \rho>1,\end{cases}$ при $0<\rho<1, m+\mu\ge 0$ или при $\rho\ge 1, M+\mu\le 0$, где m, M – постоянные числа из (1.5).

Оценка (4.1) следует из леммы 3.2.

Лемма 4.2. Если $\alpha>0, \ \rho>0, \mu\in\mathbb{R}$ и $f\in L_{\gamma,\nu}^{p}, 1\le p\le\infty$, то для мультипликативной дробной разности $\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu} f\right)(x)$ преобразования Меллина имеет место равенство

$$m\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu} f\right)(s) = \left(1-\rho^{\mu-s}\right)^{\alpha} f^*(s).$$

Доказательство. Применяя образы Меллина, имеем

$$m\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu} f\right)(s)=\int_{0}^{\infty} x^{s-1}\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu} f\right)(x)dx=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\binom{\alpha}{k}\rho^{\mu k}\int_{0}^{\infty} x^{s-1} f\left(x\rho^{k}\right)dx.$$

Сделаем замену $y=x\rho^{k}$ и запишем его в виде

$$m\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu} f\right)(s)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\binom{\alpha}{k}\rho^{(\mu-s)k}\int_{0}^{\infty} y^{s-1} f(y)dx=\left(1-\rho^{\mu-s}\right)^{\alpha} f^{*}(s).$$

Лемма 4.3. Если $f\in L_{\gamma,\nu}^{p}$, $1\le p\le\infty$, $\mu,\gamma,\nu\in\mathbb{R}$, $\rho>0$, $\alpha>0$ и $\beta>0$, то выполняется полугрупповое свойство

$$\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu}\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\beta,\mu} f\right)(x)=\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha+\beta,\mu} f\right)(x). \tag{4.2}$$

В частности, имеем

$$\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha}\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\beta} f\right)(x)=\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha+\beta} f\right)(x).$$

Доказательство. Здесь удобно обозначение $g=\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\beta,\mu} f$. Применяя образы Меллина, имеем

$$m\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu}\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\beta,\mu} f\right)(s)=m\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu} g\right)(s)=\left(1-\rho^{\mu-s}\right)^{\alpha} g^{*}(s)=$$
$$=\left(1-\rho^{\mu-s}\right)^{\alpha} m\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\beta,\mu} f\right)(s)=\left(1-\rho^{\mu-s}\right)^{\alpha}\left(1-\rho^{\mu-s}\right)^{\beta} f^{*}(s)=\left(1-\rho^{\mu-s}\right)^{\alpha+\beta} f^{*}(s).$$

Переходя здесь к равенству прообразов Меллина, получаем (4.2).

Теорема 4.1. Пусть $f\in L_{\gamma,\nu}^{p}$, $1\le p\le\infty$, $\mu,\ \gamma,\nu\in\mathbb{R}$ и $\alpha>0$. Тогда

$$\left\|\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu} f; L_{\gamma,\nu}^{p}\right\|\to 0 \text{ при } \rho\to 1-0. \tag{4.3}$$

При $0<\rho<1, m+\mu\ge 0$, где m – постоянные числа из (1.5).

Доказательство. Ввиду леммы 4.1 мы при условиях теоремы имеем

$$\left\|\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu} f;\ L_{\gamma,\nu}^{p}\right\|\le q(\alpha,\mu)\left\|f;\ L_{\gamma,\nu}^{p}\right\|,$$

т.е. операторы $\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu}$ ограничены в $L_{\gamma,\nu}^{p}$ равномерно по ρ (по всем значениям $\rho\in[0,\infty)$, если $\gamma=\nu=0$, и значениям $0\le\rho\le 1$, если $\gamma>0,\nu>0$). Поэтому по теореме Банаха-Штеенгауза достаточно проверить (4.3) на плотном в $L_{\gamma,\nu}^{p}$ множестве. Таким множеством при $1\le p<\infty$ служит (см. лемму 3.1) класс $C_{0}^{\infty}\left(\mathbb{R}_{+}\right)$. Для доказательства теоремы 4.1 нам понадобится интерполяционное неравенство

$$\left\|f;\ L_{\gamma,\nu}^{p}\right\|\le\left\|f;\ L_{\gamma_1,\nu_1}^{r}\right\|^{1-\lambda}\cdot\left\|f;\ L_{\gamma_2,\nu_2}^{q}\right\|^{\lambda},\ 0<\lambda<1, \tag{4.4}$$

где p,r,q и λ связаны друг с другом соотношением $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1-\lambda}{r}+\dfrac{\lambda}{q}$, а $\gamma_1=\dfrac{\gamma r}{p}$,

$\nu_1=\dfrac{\nu r}{p}, \gamma_2=\dfrac{\gamma q}{p},\nu_2=\dfrac{\nu q}{p}$. В силу (4.4) имеем, считая, что $1\le p<\infty$ и $f\in C_{0}^{\infty}\left(\mathbb{R}_{+}\right)$

$$\left\|\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu} f;\ L_{\gamma,\nu}^{p}\right\|\le\left\|\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu} f;\ L_{\gamma_1,\nu_1}^{r}\right\|^{1-\lambda}\cdot\left\|\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu} f;\ L_{\gamma_2,\nu_2}^{2}\right\|^{\lambda},\ 0<\lambda<1. \tag{4.5}$$

В силу леммы 4.1 в (4.5) первый множитель ограничен по ρ, а для второго имеем

$$\left\|\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu} f;\ L_{\gamma_2,\nu_2}^{2}\right\|=\left\|\omega_{\gamma_2,\nu_2}^{1/2}(x)\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu} f;\ L^{2}\left(\mathbb{R}_{+},\frac{dx}{x}\right)\right\|=\left\|\omega_{\gamma_2,\nu_2}^{1/2}\left(e^{t}\right)\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu} f\right)\left(e^{t}\right),\ L^{2}(\mathbb{R})\right\|.$$

Равенство Парсеваля для преобразования Фурье в $\mathbb{R}_{+}$ дает:

$$\left\|\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu} f;\ L_{\gamma_2,\nu_2}^{2}\right\|=\left\|F\left(\omega_{\gamma_2,\nu_2}^{1/2}\left(e^{t}\right)\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu} f\right)\left(e^{t}\right)\right),\ L^{2}(\mathbb{R})\right\|=$$

$$=\left\|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}\rho^{k\mu}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{i\left(x+\frac{\gamma_2}{2}i\right)t}f\left(e^{t-k\ln\frac{1}{\rho}}\right)dt+\int_{0}^{\infty}e^{i\left(x+\frac{\nu_2}{2}i\right)t}f\left(e^{t-k\ln\frac{1}{\rho}}\right)dt\right];L^2(\mathbb{R})\right\|\le$$

$$\le\left\|\left(1-\rho^{\mu+\frac{1}{2}\min(\gamma_2,\nu_2)-ix}\right)^{\alpha}\widetilde{g}\left(x+i\frac{1}{2}\min(\gamma_2,\nu_2)\right);L^2(\mathbb{R})\right\|.$$

Так как здесь $g(z)\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_+)$, то $\left\|\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu}f;\ L^2_{\gamma_2,\nu_2}\right\|\to 0$ при $\rho\to 1-0$.

Пусть $p=\infty$, тогда $\left\|\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu}f;\ C_{\gamma,\nu}\right\|=\max\limits_{x\in R_+^1}\left|\omega_{\gamma,\nu}(x)\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu}f\right|$. По определению пространства $C_{\gamma,\nu}$ всякая $f\in C_{\gamma,\nu}$ может быть представлена ввиду суммы $f(x)=c\,\omega_{-\gamma,-\nu}(x)+f_0(x)$, где $c-$постоянная, а $f_0(x)\in C_{0,\gamma,\nu}$. Так как $C_{0,0}^{\infty}$ плотно в $C_{0,\gamma,\nu}$, то проверка предельного перехода $\left\|\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu}f;\ C_{\gamma,\nu}\right\|\to 0$ при $\rho\to 1-0$ для $f\in C_{0,0}^{\infty}$ осуществляется аналогично предыдущему с помощью преобразования Фурье с учетом того, что $\left\|\widetilde{g};C\right\|\le\left\|g;L_1\right\|$. Остается, что $\left\|\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu}\left(\omega_{-\gamma,-\nu}(x)\right);C_{\gamma,\nu}\right\|\to 0$ при $\rho\to 1-0$. Непосредственное вычисление дает:

$$\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu}\left(\omega_{-\gamma,-\nu}(x)\right)=\left(1-\rho^{\mu+\min(\gamma,\nu)}\right)^{\alpha}\omega_{-\gamma,-\nu}(x),$$

так что $\left\|\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu}\left(\omega_{-\gamma,-\nu}(x)\right);C_{\gamma,\nu}\right\|=\left(1-\rho^{\mu+\min(\gamma,\nu)}\right)^{\alpha}\to 0$ при $\rho\to 1-0$.

5. Совпадение дробной производной типа Грюнвальда-Летникова-Адамара с производной типа Маршо-Адамара

Теорема 5.1. Пусть $f(x)\in L^r_{\lambda,\theta},\ 1\le r<\infty,\ \lambda\ge 0,\theta\ge 0$ и $\mu\ge 0$. Дробная производная типа Грюнвальда-Летникова-Адамара

$$\left(D^{\alpha)}_{+,\mu}f\right)(x)=\lim_{\substack{\rho\to 1-0\\ \left(L^p_{\gamma,\nu}\right)}}\frac{\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu}f\right)(x)}{(1-\rho)^{\alpha}}\tag{5.1}$$

и дробная производная в смысле Маршо-Адамара

$$(D^{\alpha}_{+,\mu}f)=\lim_{\substack{\delta\to 0-0\\ \left(L^p_{\gamma,\nu}\right)}}\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{1-\delta}t^{\mu}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-\alpha-1}[f(x)-f(x\cdot t)]\frac{dt}{t}+\mu^{\alpha}f(x)\tag{5.2}$$

существуют в $f(x)\in L^p_{\gamma,\nu},\ 1\le p<\infty,\ \gamma\ge 0,\nu\ge 0$ одновременно и совпадают при всех $\alpha,\ 0<\alpha<1$.

5.1. Прямой вывод существования $\left(D^{\alpha)}_{+,\mu}f\right)(x)$ из существования $\left(D^{\alpha}_{+,\mu}f\right)(x)$ в случае $\gamma=\nu=\lambda=\theta=0$

Пусть существует предел (5.2), обозначим для краткости $\varphi_{\rho}(x)=(D^{\alpha}_{+,\mu;1-\rho}f)(x)$. Докажем представление:

$$\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu}f\right)(x)\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{-\alpha}=c\cdot\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu}\varphi\right)(x)+\int_0^{\infty}\tau^{\mu\ln\frac{1}{\rho}}a(\tau)\varphi\left(x\cdot\tau^{\ln\frac{1}{\rho}}\right)\frac{d\tau}{\tau},\tag{5.3}$$

где $a(\tau)\in L_1\left(\mathbb{R}_+,\dfrac{dx}{x}\right)$, причем $\int\limits_0^\infty a(\tau)\dfrac{d\tau}{\tau}=1$, c – постоянная. Докажем (5.3) вначале для $f(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$. Для таких функций мы можем перейти к образам Меллина. В силу леммы 4.2 справедливо следующее равенство

$$\left(\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{-\alpha}\left(\widetilde{\Delta}_\rho^{\alpha,\mu}f\right)(x)\right)^*=\left(\frac{1-\rho^{\mu-s}}{-\ln\rho}\right)^\alpha f^*(s). \tag{5.4}$$

С другой стороны, для $f(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ выполняется равенство (2.12). Сопоставляя (5.4) и (2.12), получаем

$$\left(\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{-\alpha}\left(\widetilde{\Delta}_\rho^{\alpha,\mu}f\right)(x)\right)^*=A^+(t)\varphi^*(s),$$

где $A^+(t)=\dfrac{\left(1-e^{-t}\right)^\alpha}{t^\alpha K_{\alpha,\mu}^+(t)}=\dfrac{\left(1-\rho^{\mu-s}\right)^\alpha}{(\mu-s)^\alpha K_{\alpha,\mu}^+(t)(-\ln\rho)^\alpha}$ $t=(s-\mu)\ln\rho$, $\mathrm{Re}\,t=\mu\ln\dfrac{1}{\rho}$. В лемме 9 из [2] установлено, что функция $A^+(-i\xi)$ имеет структуру

$$A^+(-i\xi)=c\left(1-e^{i\xi}\right)^\alpha+\widetilde{b}(\xi), \tag{5.5}$$

где c – постоянная, в $\widetilde{b}(\xi)$ – преобразование Фурье функции $b(x)\in L_1(\mathbb{R})$. Из (5.5) следует, что $A^+(t)$ имеет вид

$$A^+(t)=c\left(1-e^{-t}\right)^\alpha+a^*(t),$$

где $a^*(t)=\widetilde{b}(it)$. Очевидно, $a^*(t)$ есть преобразование Меллина функции $a(x)=b(\ln x)$, так что $a(x)\in L^1\left(\mathbb{R}_+,\dfrac{dx}{x}\right)$. Поэтому

$$\left(\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{-\alpha}\left(\widetilde{\Delta}_\rho^{\alpha,\mu}f\right)(x)\right)^*=[c\left(1-e^{-t}\right)^\alpha+a^*(t)]\varphi^*(s),\ t=(s-\mu)\ln\rho\,.$$

Переходя здесь к равенству прообразов Меллина, получаем (5.3). Ввиду плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ в L^r тождество (5.3) справедливо для $f(x)\in L^r$, если ограничены в L^r операторы в левой и правой частях равенства (5.3) (с учетом его тривиальности для $f(x)=const$). В силу леммы 4.1 выражения $\left(\widetilde{\Delta}_\rho^{\alpha,\mu}f\right)(x)$ ограничены и остается заметить, что $\varphi_\rho(x)=(D_{+,\mu;1-\rho}^\alpha f)(x)$ и свертка в (5.3) – ограниченные операторы в L^r согласно следствию 3.1 леммы 3.4.

Из (5.3) и выводится тот факт, что существование предела (5.2) влечет существование предела (5.1). Действительно, пусть существует $\varphi(x)=\lim\limits_{\substack{\rho\to1-0\\(L^p)}}\varphi_\rho(x)$. Тогда из (5.3) с учетом равенства $\int\limits_0^\infty a(\tau)\dfrac{d\tau}{\tau}=1$ имеем

$$\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{-\alpha}\left(\widetilde{\Delta}_\rho^{\alpha,\mu}f\right)(x)-\varphi(x)=c\cdot\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\binom{\alpha}{k}[\rho^{k\mu}\varphi_\rho\left(x\cdot\rho^k\right)-\varphi(x)]+$$

$$+\int\limits_0^\infty\tau^{\mu\ln\frac{1}{\rho}}a(\tau)[\varphi_\rho(x\cdot\tau^{\ln\frac{1}{\rho}})-\varphi(x)]\frac{d\tau}{\tau}+\int\limits_0^\infty(\tau^{\mu\ln\frac{1}{\rho}}-1)a(\tau)\varphi(x)\frac{d\tau}{\tau}. \tag{5.6}$$

Учитывая, что $\varphi(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^l\binom{\alpha}{k}=0$, из (5.6) имеем

$$\left\|\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{-\alpha}\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu}f\right)(x)-\varphi(x);\,L^p\right\|\le c\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{k}\right|\left\|\rho^{k\mu}\varphi_{\rho}\left(x\cdot\rho^k\right)-\varphi(x);L^p\right\|+$$

$$+\int_0^{\infty}\tau^{\mu\ln\frac{1}{\rho}}|a(\tau)|\left\|\varphi_{\rho}\left(x\cdot\tau^{\ln\frac{1}{\rho}}\right)-\varphi(x);\,L^p\right\|\frac{d\tau}{\tau}+\int_0^{\infty}\left|1-\tau^{\mu\ln\frac{1}{\rho}}\right||a(\tau)|\left\|\varphi(x);\,L^p\right\|\frac{d\tau}{\tau},\qquad(5.7)$$

где $\left\|\rho^{k\mu}\varphi_{\rho}\left(x\cdot\rho^k\right)-\varphi(x);L^p\right\|=\left\{\int_0^{\infty}\left|\rho^{k\mu}\varphi_{\rho}\left(x\cdot\rho^k\right)-\varphi(x)\right|^p\frac{dx}{x}\right\}^{\frac{1}{p}}$. Из (5.7) получаем

$$\left\|\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{-\alpha}\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu}f\right)(x)-\varphi(x);\,L^p\right\|\le c\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{k}\right|\left[\rho^{k\mu}\left\|\varphi_{\rho}\left(x\cdot\rho^k\right)-\varphi(x);L^p\right\|+\left\|\left(\rho^{k\mu}-1\right)\varphi(x);L^p\right\|\right]+$$

$$+\int_0^{\infty}\tau^{\mu\ln\frac{1}{\rho}}|a(\tau)|\left\|\varphi_{\rho}(x\cdot\tau^{\ln\frac{1}{\rho}})-\varphi(x);\,L^p\right\|\frac{d\tau}{\tau}+\int_0^{\infty}\left|1-\tau^{\mu\ln\frac{1}{\rho}}\right||a(\tau)|\left\|\varphi(x);\,L^p\right\|\frac{d\tau}{\tau}$$

за счет того, что по предположению $\lim_{\rho\to1-0}\left\|\varphi_{\rho}-\varphi;L^p\right\|=0$. Возможность предельного перехода под знаком ряда и интеграла следует из мажорантой теоремы Лебега.

5.2. Доказательство теоремы в общем случае $\gamma\ge0,\ \nu\ge0,\ \lambda\ge0,\ \theta\ge0$

I. Пусть для функции $f(x)\in L_{\lambda,\theta}^r,\ 1\le r\le\infty,\ \lambda\ge0,\theta\ge0$ и $\mu\ge0$ существует предел $\lim_{\substack{\delta\to0+0\\ \left(L_{\gamma,\nu}^p\right)}}(D_{+,\mu;\delta}^{\alpha}f)(x)=\varphi(x),\ \ \varphi(x)\in L_{\gamma,\nu}^p,\ 1\le p<\infty,\ \gamma\ge0,\nu\ge0$ и $\mu\ge0$. Заметим, что $(D_{+,\mu;\delta}^{\alpha}f)(x)$ определен (как ограниченный оператор при фиксированном $\delta>0$) на функциях $f(x)\in L_{\lambda,\theta}^r$.

Докажем тождество

$$\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{-\alpha}\left(\widetilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha,\mu}f\right)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{\alpha}(z)\cdot\left(\Pi_{\rho^z}^{\mu}\right)\varphi(x)dz=\int_{-\infty}^{\infty}\rho^{\mu z}p_{\alpha}(z)\varphi\left(x\cdot\rho^z\right)dz,\qquad(5.8)$$

где $p_{\alpha}(z)=\left(\Delta_1^{\alpha}k_{\alpha}^{+}\right)(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}(z-k)_{+}^{\alpha-1}$. Введем для этого оператор

$$\left(B_{\rho}^{\alpha}\varphi\right)(x)=\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\rho^{\mu z}p_{\alpha}(z)\varphi\left(x\cdot\rho^z\right)dz=\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{\alpha-1}x^{-\mu}\int_0^{\infty}\tau^{\mu}p_{\alpha}\left(\frac{\ln x-\ln\tau}{-\ln\rho}\right)\varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau}.$$

Оператор B_{ρ}^{α} ограничен в пространстве $L_{\gamma,\nu}^p$ в силу того, что $p_{\alpha}(z)\in L_1(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{\infty}p_{\alpha}(z)dz=1$ (см. [18, с. 282]) и в силу следствия 3.2 из леммы 3.4. Докажем (5.8) вначале для $f(x)\in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}_+\right)$.

Рассмотрим выражение $\left(B_{\rho}^{\alpha}\varphi_{\delta}\right)(x),\ \varphi_{\delta}(x)=(D_{+,\mu;\delta}^{\alpha}f)(x)$. Имеем

$$\left(B_{\rho}^{\alpha}\varphi_{\delta}\right)(x)=\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{\alpha-1}\frac{E(\mu,\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}x^{-\mu}\int_0^{\infty}\tau^{\mu}p_{\alpha}\left(\frac{\ln x-\ln\tau}{-\ln\rho}\right)f(\tau)\frac{d\tau}{\tau}-$$

$$-\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{\alpha-1}\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}x^{-\mu}\int_0^\infty \tau^\mu p_\alpha\left(\frac{\ln x-\ln\tau}{-\ln\rho}\right)\frac{d\tau}{\tau}\int_0^{\tau(1-\delta)}\left(\frac{t}{\tau}\right)^\mu\left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{-\alpha-1}f(t)\frac{dt}{t}, \qquad (5.9)$$

где $E(\mu,\alpha)=\mu^\alpha[\alpha\Gamma\left(-\alpha,\mu\ln\frac{1}{1-\delta}\right)+\Gamma(1-\alpha)]$. Так как $p_\alpha(z)\in L_1(\mathbb{R})$, то в (5.9) допустима перестановка порядка интегрирования, в чем можно убедиться с помощью теоремы Фубины. Следовательно, имеем

$$\left(B_\rho^\alpha\varphi_\delta\right)(x)=\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{\alpha-1}\frac{E(\mu,\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}x^{-\mu}\int_0^\infty \tau^\mu p_\alpha\left(\frac{\ln x-\ln\tau}{-\ln\rho}\right)f(\tau)\frac{d\tau}{\tau}-$$

$$-\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{\alpha-1}\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}x^{-\mu}\int_0^\infty t^\mu f(t)\frac{dt}{t}\int_{t(1-\delta)^{-1}}^\infty\left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{-\alpha-1}p_\alpha\left(\frac{\ln x-\ln\tau}{-\ln\rho}\right)\frac{d\tau}{\tau}.$$

Отсюда ввиду определения функции $p_\alpha(z)$ имеем

$$\left(B_\rho^\alpha\varphi_\delta\right)(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left\{E(\mu,\alpha)x^{-\mu}\int_0^\infty\tau^\mu\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\binom{\alpha}{k}\left(\ln\frac{x}{\tau}-k\ln\frac{1}{\rho}\right)_+^{\alpha-1}f(\tau)\frac{d\tau}{\tau}-\right.$$

$$\left.-\alpha x^{-\mu}\int_0^\infty t^\mu f(t)\frac{dt}{t}\int_{t(1-\delta)^{-1}}^\infty\left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{-\alpha-1}\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\binom{\alpha}{k}\left(\ln\frac{x}{\tau}-k\ln\frac{1}{\rho}\right)_+^{\alpha-1}\frac{d\tau}{\tau}\right\}.$$

Сделаем замену $t=x(1-\delta)^u\rho^k$, $\frac{\tau}{t}=\xi$. Тогда получим

$$\left(B_\rho^\alpha\varphi_\delta\right)(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left\{E(\mu,\alpha)(\ln(1-\delta))^\alpha\int_0^\infty(1-\delta)^{\mu u}u_+^{\alpha-1}\left(\widetilde{\Delta}_\rho^{\alpha,\mu}f\right)\left(x\cdot(1-\delta)^u\right)du-\right.$$

$$\left.-x^{-\mu}\int_0^\infty(1-\delta)^{\mu u}(u-1)_+^\alpha\left(\widetilde{\Delta}_\rho^{\alpha,\mu}f\right)\left(x\cdot(1-\delta)^u\right)\frac{du}{u}\right\},$$

т.е.

$$B_\rho^\alpha\varphi_\delta=\int_0^\infty K_{\alpha,\mu}^+(u,\rho)\left(\widetilde{\Delta}_\rho^{\alpha,\mu}f\right)\left(x\cdot(1-\delta)^u\right)du, \qquad (5.10)$$

где $K_{\alpha,\mu}^+(u,\rho)$ – ядро (2.9). В силу (2.9) правая часть (5.10) – ограниченный в $L_{\lambda,\theta}^r$ оператор согласно следствию 3.2 леммы 3.4. Поэтому из (5.10) предельным переходом при $\delta\to 0$ будет получено тождество (5.8).

Так как по предположению $\varphi_\delta\to\varphi$ в $L_{\lambda,\nu}^p$, то левая часть в (5.10) сходится по норме $L_{\lambda,\nu}^p$ в силу ограниченности оператора B_ρ^α в $L_{\gamma,\nu}^p$, вытекающей из следствия 3.2 леммы 3.4. С другой стороны, правая часть в (5.10) сходится при $\delta\to 0$ к $\widetilde{\Delta}_\rho^{\alpha,\mu}f$ по норме $L_{\lambda,\theta}^r$ в силу леммы 3.5.

В силу тождественного совпадения левой и правой частей в (5.10) их пределы при $\delta\to 0$, хотя и по разным нормам $L_{\gamma,\nu}^p$, $L_{\lambda,\theta}^r$, обязаны совпадать почти всюду. Это и дает (5.8). Из тождества (5.8) вытекает существование предела (5.1) в $L_{\gamma,\nu}^p$ согласно лемме 3.5.

II. Пусть для функции $f(x)\in L_{\lambda,\theta}^r$, где $1\le r\le\infty$, $\lambda\ge 0,\theta\ge 0$ и $\mu\ge 0$, существует

$$\lim_{\substack{\rho\to 1-0\\ \left(L_{\gamma,\nu}^p\right)}}\frac{\left(\widetilde{\Delta}_\rho^{\alpha,\mu}f\right)(x)}{(1-\rho)^\alpha}=\varphi(x),\ \text{где}\ \varphi(x)\in L_{\gamma,\nu}^p,\ 1\le p\le\infty,\ \gamma\ge 0,\nu\ge 0.$$

Докажем тождество

$$\left(J^{\alpha,1}_{+,\mu,t}\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{-\alpha}\widetilde{\Delta}^{\alpha,\mu}_{\rho}f\right)(x)=\int\limits_{0}^{\infty}\rho^{\mu z}p_{\alpha}(z)\left(\widetilde{\Delta}^{1}_{t}f\right)\left(x\cdot\rho^{z}\right)dz \tag{5.11}$$

в предположениях теоремы относительно $f(x)$. Так как $J^{\alpha,1}_{+,\mu,t}=\widetilde{\Delta}^{1}_{t}J^{\alpha}_{+,\mu}$, то на «хороших» функциях $f(x)$ тождество (5.11) немедленно сводится к (5.8), так как $\widetilde{\Delta}^{1}_{t}J^{\alpha}_{+,\mu}$ и $\widetilde{\Delta}^{\alpha,\mu}_{\rho}$ коммутируют на хороших функциях. Суть дела заключается в обосновании тождества (5.11) в ситуации, когда $\widetilde{\Delta}^{1}_{t}J^{\alpha}_{+,\mu}$ применимо к $\widetilde{\Delta}^{\alpha,\mu}_{\rho}$, но не применимо, вообще говоря, к каждом члену ряда $\widetilde{\Delta}^{\alpha,\mu}_{\rho}$. Для хороших функций $f(x)$ имеем:

$$\left(J^{\alpha,1}_{+,\mu,t}\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{-\alpha}\widetilde{\Delta}^{\alpha,\mu}_{\rho}f\right)(x)=\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{-\alpha}\left(\widetilde{\Delta}^{1}_{t}J^{\alpha}_{+,\mu}\widetilde{\Delta}^{\alpha,\mu}_{\rho}f\right)(x)=\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{-\alpha}\left(\widetilde{\Delta}^{\alpha,\mu}_{\rho}\widetilde{\Delta}^{1}_{t}J^{\alpha}_{+,\mu}f\right)(x).$$

Применяя тождество (5.8), имеем

$$\left(J^{\alpha,1}_{+,\mu,t}\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{-\alpha}\widetilde{\Delta}^{\alpha,\mu}_{\rho}f\right)(x)=\int\limits_{0}^{\infty}\rho^{\mu z}p_{\alpha}(z)\left(\widetilde{\Delta}^{1}_{t}f\right)\left(x\cdot\rho^{z}\right)dz\,. \tag{5.12}$$

Ввиду ограниченности в $L^{r}_{\lambda,\theta}$ операторов в левой и правой частях равенства (5.12) (вытекающей из следствия 3.2 леммы 3.4).

Переходя же в (5.11) к пределу при $\rho\to 1-0$ в соответствии с леммой 3.5 и на основании свойства ядра $p_{\alpha}(z)$, получаем, что $\left(\widetilde{\Delta}^{1}_{t}f\right)(x)=\left(J^{\alpha,1}_{+,\mu,t}\varphi\right)(x)$, где $\varphi(x)=\lim\limits_{\substack{\rho\to 1-0\\ \left(L^{p}_{\gamma,\nu}\right)}}\dfrac{\left(\widetilde{\Delta}^{\alpha,\mu}_{\rho}f\right)(x)}{\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{\alpha}}$,

$\varphi(x)\in L^{p}_{\gamma,\nu}$, $1\le p<\infty,\ \gamma\ge 0, \nu\ge 0, \mu\ge 0$. Тогда в силу леммы 2.1 справедливо представление

$$\left(D^{\alpha}_{+,\mu,1-\rho}f\right)(x)=\int\limits_{0}^{\infty}K^{+}_{\alpha,\mu}(y,\rho)\varphi(x\cdot\rho^{y})dy, \tag{5.13}$$

где $K^{+}_{\alpha,\mu}(y,\rho)$ – ядро (2.9). Непосредственно из (5.13) и из свойства $K^{+}_{\alpha,\mu}(y,\rho)$ вытекает, что существует в $L^{p}_{\gamma,\nu}$ предел $\lim\limits_{\substack{\rho\to 1-0\\ \left(L^{p}_{\gamma,\nu}\right)}}(D^{\alpha}_{+,\mu;1-\rho}f)(x)$, т.е. предел (5.2).

Теорема 5.2. Пусть $f(x)\in L^{r}_{\lambda,\theta}$, $1\le r\le\infty,\ \lambda\ge 0, \theta\ge 0$. Дробная производная типа Грюнвальда-Летникова-Адамара

$$\left(D^{\alpha)}_{+}f\right)(x)=\lim\limits_{\substack{\rho\to 1-0\\ \left(L^{p}_{\gamma,\nu}\right)}}\frac{\left(\widetilde{\Delta}^{\alpha}_{\rho}f\right)(x)}{(1-\rho)^{\alpha}}$$

и дробная производная в смысле Маршо-Адамара

$$(D^{\alpha}_{+}f)=\lim\limits_{\substack{\delta\to 0-0\\ \left(L^{p}_{\gamma,\nu}\right)}}\frac{1}{\vartheta(\alpha,l)}\int\limits_{0}^{1-\delta}\frac{\left(\widetilde{\Delta}^{l}_{t}f\right)(x)}{|\ln t|^{\alpha+1}}\frac{dt}{t},\ l>\alpha>0$$

существуют в $f(x)\in L^{p}_{\gamma,\nu}$, $1\le p\le\infty,\ \gamma\ge 0,\nu\ge 0$ одновременно и совпадают при всех $\alpha>0$.

Схема доказательства теоремы 5.2 как в теореме 5.1. Для доказательства теоремы 5.2 мы используем леммы 2.2, 2.3 и 2.6.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rogosin S. and Dubatovskaya M. Letnikov vs. Marchaud* A Survey on Two Prominent Constructions of Fractional Derivatives // J. Mathematics, 2018, Vol. 6, No. 3, P. 1–15. doi:10.3390/math6010003.
2. *Самко С.Г.* Гиперсингулярные интегралы и разности дробного порядка // Тр. МИАН СССР, 1990, т. 192, С. 164–182. mathnet.ru/rus/agreemen.
3. *Tuan Vu Kim and Gorenflo R.* The Grunwald-Letnikov Differece operator and Regularization of the Weyl Fractional Differentiation // J. Analysis and its Applications. 1994. Vol. 13. No. 3. P. 537–545.
4. *Griinwald A.K.* Tber «begrenzte» Derivationen und deren Anwendung // Z tschr. angew Math, und Phys. 1987. Bd. 12. P. 441–480.
5. *Летников А.В.* Теория дифференцирования с произвольным показателем // Мат. сб. 1968. Т. 3. С. 1–68.
6. *Бугров Я.С.* Дробные разностные операторы и классы функций // Тр. МИАН СССР, 1985. Т. 172. С. 60–70.
7. *Westphal U.* An approach to fractional powers of operators via fractional differences // Proc. London Math. Soc. 1974. Vol. 29. No. 3. P. 557–576. DOI.org/10.1112/plms/s3-29.3.557.
8. *Желудев В.А.* Производные дробного порядка и численное решение одного класса уравнений в свертках // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 1. С. 1950–1960.
9. *Ostalczyk P.W.* A note on the Grünwald-Letnikov fractional-order backward-difference // J. Phys. Ser. 2009. T. 136. P. 14–36. DOI.10.1088/0031-8949/2009/T136/014036.
10. *KilbasA.A.* Hadamard-type fractional calculus // J. Korean Math. Soc. 2001. Vol. 38. No. 6. P. 1191–1204.
11. *Hadamard J.* Essai sur l'etude des functions donnees par leur developpment de Taylor // J. Math. Pures et Appl. 1892. 8. Ser. 4. P. 101–186.
12. *Бердышев А.С., Турметов Б.Х., Кадиркулов Б.Ж.* Некоторые свойства и применения интегро-дифференциальных операторов типа Адамара-Маршо в классе гармонических функций // Сиб. матем. журн. 2012. Т. 53. № 4. С. 752–764. doi.org/10.1134/S0037446612040039.
13. *Butzer P.L., Kilbas A.A. and Trujillo J.J.* Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractional integrals // J. Math. Anal. Appl. 2002. Vol. 269. No. 1. P. 1– 27. DOI.org/10.1016/S0022-247X(02)00001-5.
14. *Ma L., Li C.* On Hadamard fractional calculus // World Scientific, Fractals. 2017. Vol. 25. No. 03. P. 25–34. DOI. org/10.1142/S0218348X17500335.
15. *Samko S.G. and Yakhshiboev M.U.* A Chen-type Modification of Hadamard Fractional Integro-Dfferentiation, Operator Theory: Advances and Applications. 2014. Vol. 242. P. 325–339.
16. *Wu Y., Yao K. and Zhang X.* The Hadamard fractional calculus of a fractal function, World Scientific, Fractals. 2018. Vol. 26. No. 03. P. 1–10. DOI.org/10.1142/s0218348x18500251.
17. *Yakhshiboev M.U.,* Hadamard-type Fractional Integrals and Marchaud-Hadamard-type Fractional Derivatives in the Spaces with Power Weight. Uzbek Mathematical Journal. 2019. No. 3. P. 155–174. DOI.org/10.29229/uzmj.2019-3-17.
18. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения // Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIATION ON THE SEMI-AXIS, INVARIANT WITH RESPECT TO A DILATATION

© M.U. YAKHSHIBOEV

National University of Uzbekistan, Tashkent

Abstract. *The paper introduces the concept of a difference of fractional order with a multiplicative step and its features. We consider "convolution type" operators that are invariant with respect to a dilatation and to their approximation using units in weighted Lebesgue spaces. It is shown that the domains of two different fractional differentiations considered here of the Marchaud-Hadamard type and the Grunwald-Letnikov-Hadamard type coincide in piecewise-power weighted spaces of summable functions.*

Key words*: fractional differentiation of the Marchaud-Hadamard type, fractional differentiation of the Grunwald-Letnikov-Hadamard type, operator of dilation, fractional difference with multiplicative step, Mellin transform.*