МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА
ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА

На правах рукописи

УДК 517.98

АЗИЗОВ АЗИЗХОН НОДИРХОН УГЛИ

ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ В СИММЕТРИЧНЫХ ИДЕАЛАХ КОМПАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

5A130101 - Математика (по направлениям)

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание академической степени магистра

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ

д. ф.-м. н.,

профессор В. И. Чилин

Ташкент – 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Обоснованность темы магистерской диссертации и ее актуальность. Эргодическая теория в современной математике играет важную роль. С одной стороны, она непосредственно связана с идеями и задачами физики, в первую очередь, статистической механики. С другой стороны, в ней используется абстрактный математический аппарат, опирающийся на общую теории меры и интеграла Лебега, теорию банаховых функциональных пространств и спектральный анализ операторов. За последние четыре десятилетия эргодическая теория - одна из немногих областей математики - претерпела радикальные изменения. Прежде всего, это связано с активным развитием некоммутативного функционального анализа, что дало естественную мотивацию для развития некоммутативной эргодической теории. Известные работы E.C.Lance и F.J.Yeadon внесли важный вклад в развитие этой теории.

Настоящая диссертационная работа посвящена дальнейшему развитию некоммутативной эргодической теории.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, отмеченных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-916 от 15 июля 2008 года "О дополнительных мерах по стимулированию внедрения инновационных проектов и технологий производства" и № УП-2789 от 17 февраля 2017 года "О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Объект и предмет исследований диссертации. Объектом исследований диссертации являются симметричные пространства последовательностей, симметричные банаховы идеалы компактных операторов, операторы Данфорда-Шварца, действующие в симметричных пространствах последовательностей и в симметричных идеалах компактных операторов и эргодические свойства этих операторов.

Предметом исследований диссертации являются индивидуальная и статистическая эргодические теоремы в симметричных пространствах последовательностей, в симметричных идеалах компактных операторов, а также эргодическая теорема Блума-Хансона в банаховых p-выпуклых решетках последовательностей.

Цели и задачи исследований диссертации. Цели диссертационной работы состоят в получении

(i). Вариантов индивидуальной и статистической эргодических теорем для положительных абсолютных сжатий в симметричных идеалах компактных операторов;

(ii). Усиленных вариантов классических индивидуальной и статистической эргодических теорем для абсолютных сжатий симметричных пространств последовательностей;

(iii). Варианта известной эргодической теоремы Блума-Хансона для p-выпуклых банаховых решеток последовательностей.

Задачами исследований диссертации являются нахождение необходимых и достаточных условий для выполнения индивидуальной и статистической эргодических теорем в симметричных пространствах последовательностей и в симметричных идеалах компактных операторов; получение варианта эргодической теоремы Блума-Хансона в p-выпуклых банаховых идеальных решетках последовательностей и в пространствах последовательностей Лоренца.

Научная новизна диссертации. Научная новизна диссертационной работы состоит в установлении необходимых и достаточных условий для выполнения индивидуальной и статистической эргодических теорем в симметричных пространствах последовательностей и в симметричных идеалах компактных операторов, а также в получении варианта эргодической теоремы Блума-Хансона в p-выпуклых банаховых идеальных решетках последовательностей и в пространствах последовательностей Лоренца.

Основные задачи и гипотезы исследования. Основными задачами данной диссертационной работы являются получение индивидуальных и статистических эргодических теорем в симметричных пространствах последовательностей и в симметричных идеалах компактных операторов. Гипотезой исследования является установление вариантов индивидуальной и статистической эргодических теорем в симметричных идеалах компактных операторов. В ходе исследований данной магистерской диссертации эта гипотеза подтверждена.

Обзор литературы по теме исследований диссертации. Обозначим через $L_p(\Omega) = L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ банахово пространство всех измеримых функций f, заданных на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ с полной $\sigma-$конечной мерой μ, для которых $\|f\|_p = (\int_\Omega |f|^p d\mu)^{1/p} < \infty$, $1 \leq p < \infty$ (равные почти всюду функции отождествляются). Рассмотрим оператор Данфорда-Шварца $T : L_1(\Omega) + L_\infty(\Omega) \to L_1(\Omega) +$

$L_\infty(\Omega)$ (запись: $T \in DS$), т.е. такой линейный оператор, для которого

$$T(L_1(\Omega)) \subseteq L_1(\Omega) \text{ и } \|T(f)\|_1 \leq \|f\|_1 \quad \text{для всех} \quad f \in L_1(\Omega);$$

$$T(L_\infty(\Omega)) \subseteq L_\infty(\Omega) \text{ и } \|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad \text{для всех} \quad f \in L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega).$$

Известно, что сужение каждого оператора $T \in DS$ на $L_p(\Omega)$ есть линейное сжатие в $L_p(\Omega)$ при каждом $1 \leq p < \infty$.

Известная индивидуальная эргодическая теорема Данфорда-Шварца [22, Chapter VIII, Theorem VIII.6.6] утверждает, что для любых $T \in DS$ и $f \in L_p$ существует функция $\widehat{f} \in L_p$ такая, что средние $A_n(T)(f) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k(f)$ сходятся почти всюду (п.в.) к $\widehat{f}$.

Согласно теореме Егорова, в случае, когда $\mu(\Omega) < \infty$, п.в.-сходимость совпадает со сходимостью почти равномерно (п.р.). Если $\mu(\Omega) = \infty$, то п.р.-сходимость сильнее чем п.в.-сходимость. Например, если $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ есть атомическое измеримое пространство, где $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, $2^{\mathbb{N}}$ — σ-алгебра всех подмножеств $\mathbb{N}$, $\mu(\{n\}) = 1$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, то п.р.-сходимость последовательности $f_n \in L_\infty(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu) = l_\infty$ есть $\|\cdot\|_\infty$-сходимость, а п.в.-сходимость совпадает с покоординатной сходимостью.

В первом параграфе третьей главы диссертации устанавливается следующий критерий для справедливости индивидуальной эргодической теоремы, в случае пространства с мерой $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$.

Теорема 1. (i). *Для любого $T \in DS$ и для каждого $x \in c_0 \subset l_\infty$ существует такое $\widehat{x} \in E$, что $\|A_n(T)(x) - \widehat{x}\|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$;*

(ii). *Если $x \in (l_\infty \setminus c_0)$, то существует такой оператор $T \in DS$, что средние $A_n(T)(x)$ не сходятся п.в.*

Известная статистическая эргодическая теорема утверждает (см., например, [22, Глава VIII, §5]), что для любого линейного сжатия T

рефлексивного банахова пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ средние Чезаро $A_n(T) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k$ сходятся в X сильно, т.е. для любого $x \in X$ существует такое $\widehat{x} \in X$, что

$$\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k(x) - \widehat{x}\|_X \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty,$$

Важными примерами, иллюстрирующими данную статистическую теорему, являются банаховы пространства $L_p(\Omega) = L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. При $1 < p < \infty$ эти пространства рефлексивны, и поэтому средние $A_n(T)$ сходятся сильно для любого линейного сжатия T в $L_p(\Omega)$. В случае пространств $L_1(\Omega)$ и $L_\infty(\Omega)$, статистическая эргодическая теорема, вообще говоря, уже неверна.

Сужение каждого оператора $T \in DS$ на $L_p(\Omega)$ есть линейное сжатие в $L_p(\Omega)$, и поэтому для таких операторов T средние $A_n(T)$ сходятся сильно в $L_p(\Omega)$ при каждом $1 < p < \infty$.

Если $T \in DS$, то $T(E) \subset E$ для любого точного интерполяционного в банаховой паре $(L_1(\Omega), L_\infty(\Omega))$ банахова пространства E и $\|T\|_{E\to E} \leq 1$ (см., например, [34, Глава II, §4, Раздел 2]). Важными примерами таких интерполяционных пространств служат вполне симметричные пространства $E(\Omega)$ измеримых функций на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Естественно возникает задача о выделении класса вполне симметричных пространств $E(\Omega)$, для которых сохраняется справедливость статистической эргодической теоремы при действии произвольного оператора Данфорда-Шварца T. Известно, что в случае неатомического измеримого пространства $((0, a), \nu)$, $0 < a < \infty$, где ν — обычная мера Лебега, средние Чезаро $A_n(T)$ сходятся сильно в $E(\Omega)$ для любого $T \in DS$ в каждом сепарабельном симметричном пространстве $E(\Omega)$ (см. [43], [44], а также [45, Глава 2, §2.1, Теорема 2.1.3]). В то же время, для несепарабельных вполне симметричных пространств

$E(\Omega)$ на $((0,a),\nu)$, для каждой функции $f \in (E \setminus \overline{L_\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{E(\Omega)}})$ всегда найдутся такие $T \in DS$ и равноизмеримая с f функция $\widetilde{f}$, что средние $A_n(T)(\widetilde{f}) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k(\widetilde{f})$ не сходятся по норме $\|\cdot\|_{E(\Omega)}$ [44].

Если же $\mu(\Omega) = \infty$, то уже в случае сепарабельного симметричного пространства $L_1((0,\infty),\nu)$ существуют такие $T \in DS$, для которых неверна статистическая эргодическая теорема.

Во втором параграфе третьей главы настоящей диссертации доказывается следующий критерий для справедливости статистической эргодической теоремы, в случае пространства с мерой $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$.

Теорема 2. *Пусть $(E, \|\cdot\|_E) \subset l_\infty$ вполне симметричное пространство последовательностей. Следующие условия эквивалентны:*

(i). Для любого $T \in DS$ и для каждого $x \in E$ существует такое $\widehat{x} \in E$, что $\|A_n(T)(x) - \widehat{x}\|_E \to 0$ при $n \to \infty$;

(ii). Пространство E сепарабельно и $E \neq l_1$.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество всех строго возрастающих последовательностей натуральных чисел. Будем говорить, что линейный оператор T, действующий в банаховом пространстве X, имеет свойство Блума-Хансона в точке $x \in X$ (запись: $T \in BH(X,x)$), если для любой последовательности $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x)$$

в нормированной топологии [40].

Для сжатий в гильбертовом пространстве H следующий критерий включения $T \in BH(H,x)$ независимо получен в работах [9], [29], [36].

Теорема 3. *Пусть T линейное сжатие в гильбертовом пространстве H. Для каждого $x \in H$ следующие условия эквивалентны:*

(i) $\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}x - x_0\|_H \to 0$ *для всех* $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$ *и некоторого* $x_0 \in H$.

(ii) Последовательность $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ *сходится слабо в* H *к элементу* $x_0 \in H$.

Следует отметить, что для любого ограниченного линейного оператора T, действующего в банаховом пространстве X, условие $T \in BH(X, x)$ всегда влечет слабую сходимость последовательности $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ к некоторому элементу $\overline{x}$ [35, Гл. 8, Proposition 1.2]. При этом, используя аргументы доказательства импликации $(ii) \to (i)$ Теоремы 1.1 из [9], получим, что в случае выполнения условия (i) теоремы 3, слабым пределом последовательности $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ является элемент x_0.

Для линейных сжатий банахова пространства $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ в работе [9] получен следующий более слабый вариант теоремы 3.

Теорема 4. *Если* T*–линейное сжатие на* $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, *то средние Чезаро* $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}x$ *сходятся по норме* $\|.\|_1$ *для каждого* $x \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *и всех* $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$ *в том и только в том случае, когда последовательность* $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ *сходится слабо для всех* $x \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

В работе [10] вариант теоремы 4 установлен для положительных линейных сжатий пространств $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ при всех $1 < p < \infty$. A. Bellow [12] усилила результат из [10], получив уже вариант теоремы 3 для любых положительных линейных сжатий пространства $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $1 < p < \infty$.

Для произвольных линейных сжатий на $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $1 < p < \infty$, вариантов теорем 3 и 4 до сих пор не имеется. Известен только следующий результат V. Müller and Yu. Tomilov [40, Теорема 2.5].

Теорема 5. *Пусть* T*–линейное сжатие банахова пространства последовательностей* l_p, $1 \leq p < \infty$. *Тогда для любого* $x \in l_p$, *последовательность* $T^n x \to x_0 \in l_p$ *слабо в том и только в том случае, когда* $\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}x - x_0\|_p \to 0$ *для всех* $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

В четвертой главе настоящей диссертации устанавливается следующий вариант эргодической теоремы Блума-Хансона для банаховых пространств Лоренца $l_{p,q}$.

Теорема 6. *Если* $1 < q \leq p < \infty$, *то для любого линейного сжатия* T *банахова пространства* $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ *из слабой сходимости в* $l_{p,q}$ *последовательности* $\{T^n(x)\}$ *к элементу* $x_0 \in l_{p,q}$ *следует сходимость*

$$\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\|_{p,q} \to 0$$

для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

Начало в исследованиях некоммутативных индивидуальных эргодических теорем в пространстве измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгеброй фон Неймана $\mathcal{M}$, снабженной точным полуконечным нормальным следом τ, принадлежит F. J. Yeadon. В [47], доказав некоммутативное максимальное эргодическое неравенство для некоммутативных банаховых пространств $L_1(\mathcal{M},\tau)$, F. J. Yeadon получил следующую индивидуальную эргодическую теорему для положительных $L_1 - L_\infty$-сжатий, действующих в $L_1(\mathcal{M},\tau)$.

Теорема 7. *Если* $T : L_1(\mathcal{M},\tau) \to L_1(\mathcal{M},\tau)$ *положительное линейное* $L_1 - L_\infty$*-сжатие, то для каждого* $x \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, *существует оператор* $\widehat{x} \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ *такой, что для любого* $\varepsilon > 0$ *существует проектор* $e \in \mathcal{M}$ *такой, что* $\mu(\mathbf{1}-e) < \varepsilon$ *и* $\|e\cdot(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} T^k(x) - \widehat{x})\cdot e\|_\infty \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *где* $\mathbf{1}$ *единица алгебры фон Неймана* $\mathcal{M}$.

Исследование индивидуальных эргодических теорем вне $L_1(\mathcal{M},\tau)$ началось намного позже с другой фундаментальной статьи M. Junge and Q. Xu [30] где, среди остальных результатов, индивидуальная эргодическая теорема была расширена на случай положительных операторов Данфорда-Шварца, действующих в пространстве $L_p(\mathcal{M}, \tau)$, $1 < p < \infty$. В [20] (соответственно, [18]), используя подход работы [38], индивидуальная эргодическая теорема была доказана для положительных операторов Данфорда-Шварца в некоммутативных пространствах Лоренца (соответственно, Орлича).

В настоящей диссертационной работе рассматривается случай, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ есть $*$-алгебра $\mathcal{B}(H)$ всех ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном сепарабельном бесконечномерном гильбертовом пространстве H, а след τ есть канонический след $tr(\cdot)$ на $\mathcal{B}(H)$. В этом случае, класс некоммутативных симметричных пространств совпадает с классом симметричных идеалов компактных операторов, действующих в H.

Основная цель пятой главы есть установление критериев для справедливости некоммутативных индивидуальной и статистической эргодических теорем для операторов Данфорда-Шварца, действующих в симметричных идеалах компактных операторов.

Теоретическое и практическое значение результатов исследований диссертации.

При изложении материалов диссертации используется терминология и обозначения из [11], [16], [37], [41], [49], [50], [52].

Основные результаты диссертации опубликованы и анонсированы в работах [54], [55], [56], [57], [59], [58], [60].

Характеристика структуры диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Первая глава диссертации содержит необходимые сведения из теории банаховых пространств, симметричных пространств и теории симметричных идеалов компактных операторов, необходимые для аккуратного изложения новых основных результатов, полученных в диссертации.

Вторая глава диссертационной работы состоит из двух параграфов и посвящена получению усиленных вариантов классических индивидуальной и статистической эргодических теорем для абсолютных сжатий симметричных пространств последовательностей. В § 2.1 устанавливаются необходимые и достаточные условия для справедливости индивидуальной эргодической теоремы в симметричных пространствах последовательностей. В § 2.2 доказывается критерий для справедливости статистической эргодической теоремы в симметричных пространствах последовательностей.

В третьей главе диссертационной работы обсуждается вариант классической эргодической теоремы Блума-Хансона для сепарабельных идеальных банаховых пространств последовательностей.

Наконец, четвертая глава посвящается получению некоммутативных вариантов индивидуальной и статистической эргодических теорем для положительных абсолютных сжатий симметричных идеалов компактных операторов. Эта глава состоит из двух параграфов. В § 4.1 устанавливаются необходимые и достаточные условия для справедливости некоммутативной индивидуальной эргодической теоремы в симметричных идеалов компактных операторов. В § 4.2 доказывается критерий для справедливости некоммутативной статистической эргодической теоремы в симметричных идеалов компактных операторов.

ГЛАВА 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1 Линейные операторы и функционалы

Пусть X,Y - линейные пространства над полем $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K}$ либо поле действительных чисел $\mathbb{R}$, либо поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Отображение $T\colon X \to Y$ называется линейным оператором, если

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \;\; \forall x, y \in X, \; \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — нормированные пространства. Линейный оператор $T\colon X \to Y$ называется ограниченным, если существует такое $c > 0$, что $\|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$ для всех $x \in X$. В этом случае число $\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}$ называется нормой ограниченного линейного оператора T.

Известно, что линейный оператор $T\colon X \to Y$ ограничен в том и только в том случае, когда T непрерывен на X, то есть из сходимости $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x$, $x_n, x \in X$, следует сходимость $Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} Tx$ (сходимость $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x$ означает, что $\|x_n - x\|_X \to 0$).

Обозначим через $B(X,Y)$ множество всех ограниченных линейных операторов $T\colon X \to Y$. Для $T, S \in B(X,Y)$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in X$, положим

$$(T + S)(x) = T(x) + S(x), \; (\alpha T)(x) = \alpha T(x).$$

Ясно, что $T + S$, $\alpha T \in B(X,Y)$ для любых $T, S \in B(X,Y)$, $\alpha \in \mathbb{K}$, при этом, $B(X,Y)$ есть линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, кроме того, относительно нормы $\|T\|_{B(X,Y)} = \|T\|$ линейное пространство $B(X,Y)$ становится нормированным пространством и верна следующая теорема.

Теорема 1.1.1. *[50, гл.5, §1]. Если X- нормированное пространство, а Y - банахово пространство, то $(B(X,Y), \|\cdot\|_{B(X,Y)})$ есть банахово пространство.*

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — банахово пространство, а пространство $(Y, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство. Нам понадобится следующий принцип равномерной ограниченности для последовательности $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B(X, Y)$.

Теорема 1.1.2. *[49, гл.7, §1] Если последовательность ограниченных линейных операторов $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B(X, Y)$ поточечно ограниченна, то есть $\sup_{n\geq 1} \|T_n(x)\| < \infty$ для всех $x \in X$, то $\sup_{n\geq 1} \|T_n\|_{B(X,Y)} < \infty$.*

Функция $f : X \to \mathbb{K}$, где X - линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, называется линейным функционалом, если $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in X$. Линейный функционал f ограничен, если существует такое $c > 0$, что $|f(x)| \leq c\|x\|$ для всех $x \in X$. В этом случае число $\|f\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |f(x)|$ называется нормой функционала f.

Банахово пространство $X^* = B(X, \mathbb{K})$ называется сопряженным пространством к пространству $(X, \|\cdot\|_X)$. Норму в пространстве X^* будем обозначать через $\|f\|_{X^*}$. Отметим следующие полезные свойства сопряженных пространств (см.,например,[49, гл.5, §7]).

Теорема 1.1.3. *(i). Если сопряженное пространство X^* к нормированному пространству X сепарабельно, то X также сепарабельно.*

(ii). (Теорема Хана-Банаха). Если Y - линейное подпространство в нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$ и $f_0 \in Y^*$, то существует такой $f \in X^*$, что $f(y) = f_0(y)$ для всех $y \in Y$ и $\|f\|_{X^*} = \|f_0\|_{Y^*}$.

(iii). Для любого $x \neq 0$ из нормированного пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ существует такой $f \in X^*$, что

$$f(x) = \|x\|, \ \|f\|_{X^*} = 1.$$

(iv). Для любого $x \in (X, \|\cdot\|_X)$ *верно равенство*

$$\|x\|_X = \sup\{|f(x)| : f \in X^*, \|f\|_{X^*} \leq 1\}.$$

Если $T_n \in B(X,Y)$, $T \in B(X,Y)$ и $\|T_n x - Tx\|_Y \to 0$ для всех $x \in X$, то говорят, что T_n сходится к T сильно. Если же $\|T_n - T\|_{B(X,Y)} \to 0$, то говорят, что T_n сходится к T равномерно. Ясно, что равномерная сходимость влечет сильную сходимость. Обратное, вообще говоря, неверно.

1.2 Слабая топология и рефлексивные пространства

Пусть X - линейное пространство над полем $\mathbb{K}$ и τ - отделимая топология на X, относительно которой алгебраические операции $x + y$, αx, где $x, y \in X$ и $\alpha \in \mathbb{K}$, непрерывны по совокупности переменных. В этом случае, пара (X, τ) называется топологическим векторным пространством. Если в (X, τ) существует базис окрестностей нуля, состоящий из выпуклых множеств, то топология τ называется локально выпуклой топологией, а пара (X, τ) называется локально выпуклым пространством (сокращенно ЛВП). Всякое нормируемое пространство является примером ЛВП. Нам понадобится класс ЛВП, связанных со слабой топологией.

Обозначим через X^+ линейное пространство всех линейных функционалов, определенных на линейном пространстве X. Обычно X^+ называют алгебраическим сопряженным пространством к пространству X. Если X нормированное пространство, то X^* есть линейное подпространство в X^+.

Подмножество $Y \subset X^+$ называется тотальным на X, если из того, что $f(x) = 0$ для всех $f \in Y$ вытекает что $x = 0$. Если Y - тотальное линейное подпространство в X^+, то говорят, что $\langle X, Y \rangle$ есть пара векторных пространств, находящихся в двойственности, или $\langle X, Y \rangle$ - дуальная пара. Примерами таких пространств являются пары $\langle X, X^+ \rangle$ и $\langle X, X^* \rangle$.

Если (X, τ) есть ЛВП, то говорят, что топология τ согласуется с двойственностью $\langle X, Y \rangle$, если $(X, \tau)^* = Y$, где $(X, \tau)^*$ есть линейное пространство всех непрерывных линейных функционалов на (X, τ).

Пусть $\langle X, Y \rangle$ - дуальная пара. Локально выпуклую топологию на X, порожденную семейством полунорм $p(x) = |f(x)|$, $x \in X$, где f пробегает все Y, называют слабой топологией в X, определяемой дуальной парой $\langle X, Y \rangle$ и обозначают через $\sigma(X, Y)$. Пусть X - нормированное пространство, а X^* - его сопряженное. Топологию $\sigma(X, X^*)$ на X называют слабой топологией нормированного пространства X, а топологию $\sigma(X^*, X)$ на X^*, соответственно, $(*)$-слабой топологией. Таким образом, на X^* рассматриваются две слабые топологии: $(*)$-слабая топология $\sigma(X^*, X)$ и слабая топология $\sigma(X^*, X^{**})$, при этом, очевидно, что топология $\sigma(X^*, X)$ слабее топологии $\sigma(X^*, X^{**})$. Сходимость в слабой (соответственно, $(*)$-слабой) топологии называют слабой (соответственно, $(*)$-слабой) сходимостью.

Ясно, что из сходимости $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x$, $x_n, x \in X$, следует слабая сходимость $x_n \xrightarrow{\sigma(X,X^*)} x$. Обратное, вообще говоря, не верно.

Пусть X — нормированное пространство. Поскольку X^* в свою очередь является нормированными пространством, имеем смысл говорить о пространстве $X^{**} = (X^*)^*$ — совокупности всех линейных непрерывных функционалов на $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$.

Рассмотрим каноническое вложение $\pi : X \to X^{**}$, которое каждому $x \in X$ сопоставляет линейный функционал F_x на X^*, определяемый формулой

$$F_x(f) = f(x),\ f \in X^*.$$

Ясно, что

$$|F_x(f)| = |f(x)| \le \|x\|\|f\|,$$

и следовательно $F_x \in X^{**}$. Таким образом, π отображает X в X^{**}. В силу Теоремы 1.1.2 (iii), имеем, что

$$\|\pi(x)\| = \|F_x\| = \sup\{|F_x(f)| : f \in X^*, \|f\| \le 1\} =$$

$$= \sup\{|f(x)| : f \in X^*, \|f\| \le 1\ \} = \|x\|.$$

Последнее означает, что π есть линейная изометрия пространства X на подпространство $\pi(X)$ в X^{**}.

Банахово пространство X называется рефлексивным, если $\pi(X) = X^{**}$. Следующая теорема дает полезный критерий для рефлексивности банахова пространства.

Теорема 1.2.1. *[49, гл.5, §7]. Банахово пространство $(X, \|\cdot\|_X)$ рефлексивно тогда и только тогда, когда его замкнутый единичный шар $B_X = \{x \in X : \|x\|_X \le 1\}$ является $\sigma(X, X^*)$-компактным.*

Следствие 1.2.2. *[49, гл.5, §7, След.1]. Любое замкнутое подпространство рефлексивного банахова пространства X рефлексивно.*

Пусть X, Y—нормированные пространства. $T \in B(X,Y)$, $g \in Y^*$. Рассмотрим отображение $T^* \colon Y^* \to X^*$, определяемое равенством $T^*(g) = f$, где $f(x) = g(T(x))$, $x \in X$. Ясно, что f - линейный функционал на X. Поскольку $|f(x)| \le \|g\|_{Y^*}\|Tx\|_Y \le \|g\|_{Y^*}\|T\|_{B(X,Y)}\|x\|_X$, то $f \in X^*$, при этом,

$$\|T^*(g)\|_{X^*} = \|f\|_{X^*} \le \|T\|_{B(X,Y)}\|g\|_{Y^*}$$

Построенное отображение $T^*\colon Y^* \to X^*$ называется сопряженным оператором к оператору $T \in B(X,Y)$. Аналогично определяется второй сопряженный оператор $T^{**}\colon X^{**} \to Y^{**}$. Если X - рефлексивное пространство, то есть $X = X^{**}$, то $T^{**}\colon X \to Y^{**}$. В этом случае верно следующее

Утверждение 1.2.3. *[49, гл.5, §7]. Если пространство X-рефлексивно, а Y-нормированное и $T \in B(X,Y)$, то $T = T^{**}$.*

1.3 Гильбертовы пространства

Пусть H—линейное пространство над полем . Отображение $(\cdot,\cdot)$: $H \times H \to \mathbb{K}$ называется скалярным произведением на H, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

1. $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$;
2. $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$;
3. $(x,y) = \overline{(y,x)}$;
4. $(x,x) \geq 0$ и $(x,x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$

для всех $x,\ y,\ z \in H$ и $\lambda \in \mathbb{K}$.

Линейное пространство H со скалярным произведением называется предгильбертовым пространством и оно обозначается как $(H,(\cdot,\cdot))$. Каждое скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ на H порождает норму в H с помощью равенства $\|x\| = \sqrt{(x,x)},\ x \in H$. Везде ниже, когда говорим про норму в H, мы будем предполагать норму, порожденную скалярным произведением.

Если норма, порожденная скалярным произведением, является банаховой, то пару $(H,(\cdot,\cdot))$ называют гильбертовым пространством.

Примерами гильбертовых пространств являются все конечномерные предгильбертовы пространства, пространство последовательностей $l_2(\mathbb{K})$, где

$$l_2(\mathbb{K}) = \{x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K} : \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty\},$$

в котором скалярное пространство определяется следующим образом

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \overline{\eta_n} \text{ для всех } x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty},\ y = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2(\mathbb{K}).$$

Гильбертово пространство $(H, (\cdot, \cdot))$ называется сепарабельным, если существует счетное подмножество $M \subset H$ такое, что замыкание $\overline{M}$ по норме H совпадает с H, т.е. $\overline{M} = H$.

Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^{k} \subset H,\ k \in \mathbb{N}$, либо $k = \infty$, гильбертова пространства $(H, (\cdot, \cdot))$ называется ортонормированной, если

$$(e_n, e_m) = 0,\ n \neq m \quad \text{и } (e_n, e_n) = 1\ \forall\ n.$$

Ортонормированная система $\{e_n\} \subset H$ называется полной, если замыкание линейной оболочки элементов $\{e_n\}$ совпадает с H. Известно, что во всяком сепарабельном гильбертовом пространстве $(H, (\cdot, \cdot))$ существует полная ортонормированная система (см. например, [50, Гл. 3, §4]). При этом, если гильбертово пространство бесконечномерно, то полная ортонормированная система является счетной.

Пусть $(H, (\cdot, \cdot))$ — гильбертово пространство. Для линейного подпространства E из H определим

$$E^{\perp} := \{z \in H : \ (z, x) = 0, \ \text{ для любого } x \in E\}$$

– *ортогональное дополнение к* E. Известно, что $E^{\perp}$ является замкнутым линейным подпространством в H (см. например, [50, Гл. 3, §4]).

Для линейных подпространств M и N гильбертова пространства $(H, (\cdot, \cdot))$ с нулевым пересечением $M \cap N = \{0\}$ через $M \oplus N$ будем обозначать прямую сумму подпространств M и N, а именно, $M \oplus N := \{z \in H : z = x + y, x \in M, y \in N\}$.

Следующая теорема является полезной в теории гильбертовых пространств.

Теорема 1.3.1 (О разложении гильбертова пространства [50, Глава III, §4, Теорема 7]). *Если M – замкнутое линейное подпространство в гильбертовом пространстве H, то любое $x \in H$ однозначно представимо в виде $x = y + z,\ y \in M,\ z \in M^{\perp}$, т.е. $H = M \oplus M^{\perp}$.*

Из Теоремы 1.3.1 вытекает следующее полезное

Следствие 1.3.2. *Если M – замкнутое линейное подпространство в гильбертовом пространстве H, то $M = M^{\perp\perp} := (M^{\perp})^{\perp}$.*

Пусть теперь $(H, (\cdot, \cdot))$ — бесконечномерное гильбертово пространство. Обозначим через $B(H)$ множество всех ограниченных линейных операторов $T\colon H \to H$.

Из теоремы 1.1.1 следует, что $B(H)$ есть банахово пространство.

Известно, что банахово пространство $B(H)$ относительно умножения операторов $(TS)(x) = T(S(x))$ для всех $x \in H$ и инволюции $T \longmapsto T^*$ является $*$-алгеброй, где T^* есть сопряженный оператор к оператору $T \in B(H)$, т.е. $(Tx, y) = (x, T^*y)$ для всех $x, y \in H$. Отметим, что $T^* \in B(H)$ и $\|T^*\|_{B(H)} = \|T\|_{B(H)}$ (см. например, [50, Гл. IV, §5]). Оператор $T \in B(H)$ называется самосопряженным, если $T^* = T$.

Для самосопряженных операторов верна следующая формула для вычисления нормы.

Утверждение 1.3.3 ([49, Гл. IX, §4, п. 4.2]). *Если $T = T^* \in B(H)$, то $\|T\|_{B(H)} = \sup\{|(Tx, x)| : x \in H, \|x\| \leq 1\}$.*

Пусть теперь $K(H)$ — множество всех компактных операторов в $B(H)$. Напомним, что оператор $T \in B(H)$ называется компактным оператором, если $T(S_c(0,1))$ есть относительно компактное подмножество в H, где $S_c(0,1) = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$. Для множества компактных операторов верна следующая важная теорема (см. например, [50, Гл. IV, §6]).

Теорема 1.3.4. *Множество $K(H)$ есть двусторонний замкнутый $*$-идеал в $(B(H), \|\cdot\|_{B(H)})$.*

Число $\lambda \in \mathbb{K}$ называется собственным значением для оператора $T \in B(H)$, если существует ненулевой элемент $x \in H$ такой, что $Tx = \lambda x$. В этом случае, элемент x называется собственным вектором для оператора T, отвечающим собственному значению λ. Множество $N(\lambda, T) = \{x \in H : Tx = \lambda x\}$ называется собственным подпространством для оператора T, соответствующим собственному значению λ. Нетрудно показать, что всякое собственное подпространство является замкнутым в H. Также известно [53, Гл. IV, §18, п. 18.6], что для самосопряженного оператора $T \in B(H)$ все собственные значения вещественны и собственные подпространства, отвечающие разным собственным значениям взаимно ортогональны. Кроме этого, компактный оператор T имеет не более счетного количества собственных значений.

Теорема 1.3.5 (Теорема Гильберта-Шмидта [50, Гл. IV, §6])**.** *Для любого компактного самосопряженного оператора $T \in B(H)$ существует такая ортонормированная система собственных векторов $\{e_n\}_{n=1}^{m} \subset H$, отвечающих собственным числам λ_n оператора T, где $m \in \mathbb{N}$, либо*

$m = \infty$, что

$$Tx = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n (x, e_n) e_n,$$

где $Te_n = \lambda_n e_n$ для любого $n \in \{1, 2, \ldots, m\}$. При этом, если $m = \infty$, то $|\lambda_n| \to \infty$ при $n \to \infty$.

Оператор $P \in B(H)$ называется проектором, если $P = P^* = P^2$. Обозначим через $P(H)$ множество всех проекторов из $B(H)$.

Пусть $P \in P(H)$. Тогда множество $M = \{x \in H : Px = x\}$ есть замкнутое линейное пространство в H (см. например, [53, Гл. IV, §18, п. 18.6]). При этом, иногда называют проектор P оператором ортогонального проектирования на это замкнутое подпространство M. Кроме того, $Py = 0$ для всех $y \in M^{\perp}$.

Для самосопряженного компактного оператора $T \in K(H)$ обозначим через P_λ оператор ортогонального проектирования на собственное подпространство $N(\lambda, T)$.

Теорема 1.3.6 (Спектральная теорема для компактных самосопряженных операторов [39, Ch. I, Sec. 1.1, Theorem 1.1.12])**.** *Если $T^* = T \in K(H)$ и $\{\lambda_n\}$ набор всех собственных значений оператора T, то*

$$T = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_{\lambda_n},$$

где ряд сходится по норме $B(H)$.

Самосопряженный оператор $T \in B(H)$ называется положительным, если $(Tx, x) \geq 0$ для всех $x \in H$. Для положительных операторов имеется следующая теорема о существовании квадратного корня [53, Гл. VI, §26].

Теорема 1.3.7. *Для каждого положительного оператора $T \in B(H)$ существует единственный положительный оператор $S \in B(H)$*

такой, что $T = S^2$.

Оператор S из теоремы 1.3.7 называется квадратным корнем для положительного оператора T и обозначается $S = \sqrt{T}$.

Для любого оператора $T \in B(H)$ оператор T^*T является положительным. Следовательно, из теоремы 1.3.7 следует, что существует квадратный корень $\sqrt{T^*T}$, который называется модулем оператора T и обозначается через $|T|$.

Для произвольного оператора $T \in \mathcal{K}(H)$ собственные числа $\{\lambda_n(|T|)\}_{n=1}^{\infty}$ оператора $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ называются s-числами оператора T (обозначение $s_n(T) = \lambda_n(|T|), n \in \mathbb{N}$). Ненулевые s-числа нумеруются в порядке убывания с учетом их кратности, т.е. $\lambda_1(|T|) \geqslant \lambda_2(|T|) \geqslant \ldots$

1.4 Банаховы решетки последовательностей

Линейное пространство X над полем $\mathbb{R}$ называется векторной решеткой, если X является одновременно решеткой, то есть упорядоченным множеством, в котором для любых двух элементов $x, y \in X$ существует их супремум $x \vee y$ и инфимум $x \wedge y$, причем выполнены следующие условия согласования алгебраических операций и порядка:

1) для любого $z \in X$ из $x \leq y$ вытекает $x + y \leq y + z$;

2) если $x \geq 0$ и число $\lambda \geq 0$, то $\lambda x \geq 0$.

Для каждого элемента x из X элемент $x_+ = x \vee 0$ ($x_- = (-x) \vee 0$) называют положительной (соответственно, отрицательной) частью для x, а элемент $|x| = x_+ + x_-$ называют модулем для x. Два элемента x, y векторной решетки называются дизъюнктными, если $|x| \wedge |y| = 0$.

Говорят, что норма $\| \cdot \|$ на векторной решетке X монотонна, если из

$|x| \leq |y|$ следует, что $\|x\| \leq \|y\|$. Нормированной решеткой называется векторная решетка, снабженная монотонной нормой. Полная по норме нормированная решетка называется банаховой решеткой.

Банахова монотонная норма $\|\cdot\|$ на X называется порядково непрерывной, если из условия

$$0 \leq x^{(n)} \downarrow 0,\ x^{(n)} \in X, n \in \mathbb{N},$$

следует, что $\|x^{(n)}\| \to 0$.

Говорят, что банахова решетка $(X, \|\cdot\|)$ имеет свойство Фату, если из условий

$$0 \leq x^{(n)} \leq x^{(n+1)} \in X,\ n \in \mathbb{N},\ \ \sup_n \|x^{(n)}\|_E < \infty,$$

следует, что существует $x = \sup\limits_n x^{(n)} \in X$ и $\|x\| = \sup\limits_n \|x^{(n)}\|$.

Пусть $1 \leq p < \infty$. Банахова решетка $(X, \|\cdot\|)$ называется p-выпуклой (p-вогнутой), если существует такая константа $M > 0$, что для любого конечного набора элементов $\{x_i\}_{i=1}^n \subset X$ верно следующее неравенство

$$\Big\|\Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\| \leq M\Big(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \ \left(\textit{соотв.}, \Big(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq M\Big\|\Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\|\right).$$

Наименьшая среди таких констант M называется константой p-выпуклости банаховой решетки X и обозначается через $M^{(p)}(X)$ Ясно, что любая банахова решетка является 1—выпуклой, при этом $M^{(1)}(X) = 1$.

Говорят, что банахова решетка $(X, \|\cdot\|)$ удовлетворяет верхней p-оценке (нижней p-оценке), если существует такая константа $M > 0$, что для любого конечного множества попарно дизъюнктных элементов $\{x_i\}_{n=1}^n \subset X$ верно следующее неравенство

$$\Big\|\sum_{i=1}^n x_i\Big\| \leq M\Big(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \ \left(\textit{соотв.}, \Big(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq M\Big\|\sum_{i=1}^n x_i\Big\|\right).$$

Поскольку для попарно дизъюнктных элементов $\{x_i\}_{i=1}^n$ из банаховой решетки всегда верно равенство

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^n |x_i| = |\sum_{i=1}^n x_i|,$$

то любая p-выпуклая (p-вогнутая) банахова решетка всегда удовлетворяет верхней p-оценке (нижней p-оценке).

Отметим следующие полезные свойства p-выпуклых и p-вогнутых банаховых решеток.

Утверждение 1.4.1 ([21, Prop.2.6]). *Если банахова решетка удовлетворяет верхней (нижней) r-оценке для некоторого $1 < r < \infty$, то она является p-выпуклой (q-вогнутой) для любого $1 < p < r < q < \infty$. В частности, r-выпуклая (вогнутая) банахова решетка является p-выпуклой (q-вогнутой) для любого $1 < p < r < q < \infty$.*

Напомним, что два банахова пространства X и Y называются изоморфными (обозначение $X \approx Y$), если существует непрерывная линейная биекция $T\colon X \to Y$. В этом случае, обратное отображение $T^{-1}\colon Y \to X$ также непрерывно ([52, Следствие 2.12]).

Заметим, что если X и Y банаховы решетки, $X \approx Y$ и X — p - выпукло
(q - вогнуто), вообще говоря, банахова решетка Y не является p - выпуклой (q - вогнутой) [37, Remark to Theorem 1.d.7].

В то же время верна следующая Теорема [37, Theor 1.d.7].

Теорема 1.4.2 ([37, Theor.1.d.7]). *Пусть X и Y банаховы решетки и пусть Y изоморфно подпространству в X, тогда*

(i). Если X — p-выпукло и q-вогнуто для любого $1 < p \leq 2$ и $q < \infty$, тогда Y также является p-выпуклым.

(ii). Если X — p-вогнуто для любого $p \geq 2$, тогда Y также p-вогнуто.

Рассмотрим теперь примеры банаховых векторных решеток последовательностей.

Пусть $s(\mathbb{K})$ — векторная решетка всех последовательностей комплексных ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) или действительных ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) чисел.

Линейное подпространство E в $s(\mathbb{K})$ называется *идеальным линейным подпространством*, если из условий $x \in E$, $y \in s(\mathbb{K})$ и $|y| \leq |x|$ следует включение $y \in E$.

Носителем элемента $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$ называют подмножество $supp\ x = \{n \in \mathbb{N} : \xi_n \neq 0\}$ во множестве $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел. Заметим, что если идеальное линейное подпространство E бесконечномерно, то $supp\ E = \bigcup_{x \in E} supp\ x$ есть бесконечное подмножество в $\mathbb{N}$, и в этом случае, заменяя $\mathbb{N}$ на $supp\ E$, можно считать, что $supp\ E = \mathbb{N}$.

Пусть E—бесконечномерное идеальное подпространство в $s(\mathbb{K})$. Обозначим через c_{00} линейное подпространство в $s(\mathbb{K})$, состоящее из финитных последовательностей вида $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n(x)}, 0, 0, \ldots\}$. Из равенства $supp\ E = \mathbb{N}$ следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$, что $\lambda = |\xi_k| \neq 0$. Поэтому для орта $e_k = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$, где единица стоит на k-ом месте, верно неравенство $e_k \leq \frac{1}{\lambda}|x| \in E$, что влечет включение $e_k \in E$. Это означает, что $c_{00} \subset E$.

Если $\|\cdot\|_E$ — банахова монотонная норма на E, то пара $(E, \|\cdot\|_E)$ называется банаховым идеальным пространством (БИП) в $s(\mathbb{K})$ [49, глава IV, § 3]. При этом, в силу равенства $supp\ E = \mathbb{N}$, БИП $(E, \|\cdot\|_E)$ является фундаментальным идеальным пространством [49, глава IV, § 3].

Согласно [49, глава IV, § 3, теорема 3] имеем, что идеальное банахово фундаментальное пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ в $s(\mathbb{K})$ сепарабельно тогда и только тогда, когда норма $\|\cdot\|_E$ порядково непрерывна.

1.5 Банаховы решетки l_p и $l_{p,q}$

Пусть l_∞ (соответственно, c_0) есть банахово пространство всех ограниченных (соответственно, сходящихся к нулю) последовательностей $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ действительных чисел с банаховой нормой $\|\{\xi_n\}\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|$.

Важными примерами классических банаховых решеток являются банаховы пространства последовательностей $(l_p, \|\cdot\|_p)$ при $p \geq 1$:

$l_p = \left\{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty : x_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty\right\}$, где

$\|\{x_n\}\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ \forall\ \{x_n\} \in l_p,$

и $\{x_n\} \leq \{y_n\} \Longleftrightarrow x_n \leq y_n$ для всех $n = 1, 2...$

Известно, что $l_1^* = l_\infty$, $c_0^* = l_1$ и $l_p^* = l_q$ если $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (см.[50], гл.4, §2). В частности, при $p > 1$, банахово пространство l_p является рефлексивным, а пространства c_0, l_1, l_∞ — не рефлексивны.

Отметим также, что все пространства l_p, $1 \leq p < \infty$, являются p-выпуклыми с $M^{(p)}(l_p) = 1$ (см., например, [37, стр.45]).

Пусть (Ω, Σ, μ) - измеримое пространство с полной σ-конечной мерой. Через $L_0^\mu(\Omega)$ обозначим множество всех тех $f \in L_0(\Omega)$ ($L_0(\Omega)$ - алгебра всех измеримых действительных функций заданных на (Ω, Σ, μ)), для которых существует такое $t > 0$, что $\mu(\{|f| > t\}) < \infty$. В ([34, ch.2, §3]) показано, что $L_0^\mu(\Omega)$ есть подалгебра в $L_0(\Omega)$, при этом $L_p(\Omega) \subset L_0^\mu(\Omega)$ для всех $1 \leq p < \infty$.

Пусть $f \in L_0^\mu(\Omega)$. Функция $f^*\colon (0, \infty) \to [0, \infty)$, определенная равенством $f^*(t) = \inf\{s > 0 : \mu(\{|f| > s\}) \leq t\}$ называется невозрастающей перестановкой функции f.

Для произвольных $p, q \in [1;\infty]$ определим пространство Лоренца $L_{p,q} = L_{p,q}(\Omega, \Sigma, \mu)$, состоящее из всех таких функций $f \in L_0^{\mu}(\Omega)$, для которых

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left\{\int_0^{\infty}[t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^q \frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{q}} < \infty, & (1 \le q < \infty), \\ \sup_{0<t<\infty}\{t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\} < \infty, & (q = \infty). \end{cases} \tag{1.5.1}$$

Ясно, что при $p = q$ верно равенство

$$L_{p,p} = L_p(\Omega, \Sigma, \mu) = \big\{f \in\big\} L_0(\Omega) : \|f\|_p = \Big(\int_{\Omega} |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int_0^{\infty} [f^*(t)]^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty\big\},$$

при этом,

$$\|f\|_{p,p} = \|f\|_p$$

для всех $f \in L_{p,p}(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Следующее утверждение показывает, что при фиксированном p пространства Лоренца $L_{p,q}$ увеличиваются при росте второго показателя q.

Утверждение 1.5.1 ([14, ch.4, Prop.4.2])**.** *Если* $1 \le p \le \infty$ *и* $0 < q \le r \le \infty$, *то*

$$L_{p,q} \subset L_{p,r} \quad \textit{и} \quad \|f\|_{p,r} \le c\|f\|_{p,q}, \tag{1.5.2}$$

для всех $f \in L_{p,q}(\Omega, \Sigma, \mu)$, *где* $c > 0$ *есть константа зависящая только от* p, q *и* r.

Отношения включения между пространствами $L_{p,q}$, связанные с изменением p, аналогичны включениям пространств L_p. Эти включения зависят зависят от структуры пространства с мерой (Ω, Σ, μ). Так,например, если мера
μ - конечная, то есть $\mu(\Omega) < \infty$ и $1 \le p < r \le \infty$, $1 \le q, s \le \infty$ то $L_{r,s} \subset L_{p,q}$ и $\|f\|_{r,s} \le \|f\|_{p,q}$ для всех $f \in L_{r,s}$ [14, ch.4, §4].

В случае $\mu(\Omega)=\infty$, вложение $L_{r,s}$ в $L_{p,q}$, вообще говоря, не верно, однако атомических пространств с мерой, такое вложение сохраняется.

Следует отметить, что функционал $f\to\|f\|_{p,q}$, $f\in L_{p,q}(\Omega,\Sigma,\mu)$, не всегда является нормой. В то же время, верна следующая теорема.

Теорема 1.5.2 ([14, ch.4, Prop.4.3]). *Пусть $1\le q\le p<\infty$ или $p=q=\infty$. Тогда $(L_{p,q},\|\cdot\|_{p,q})$ - является симметричным банаховым пространством функций (симметричность пространства $(L_{p,q},\|\cdot\|_{p,q})$ означает, что из условий $g^*\le f^*, g\in L_0^\mu, f\in L_{p,q}$ следует $g\in L_{p,q}$ и $\|g\|_{p,q}\le\|f\|_{p,q}$).*

Если же $1<p<q\le\infty$, то функция $f\to\|f\|_{p,q}$ есть квазинорма на $L_{p,q}$, то есть для всех $f,g\in L_{p,q}$ и $\alpha\in\mathbb{R}$ выполняются следующие свойства:

1) $\|f\|_{p,q}\ge 0$ и $\|f\|_{p,q}=0\Leftrightarrow f=0$;

2) $\|\alpha f\|_{p,q}=|\alpha|\|f\|_{p,q}$;

3) $\|f+g\|_{p,q}\le c\big(\|f\|_{p,q}+\|g\|_{p,q}\big)$, где $c\ge 1$ не зависит от f и g.

В то же время, в этом случае, на $L_{p,q}$ можно следующим образом ввести симметричную норму $\|\cdot\|_{(p,q)}$, эквивалентную квазинорме $\|\cdot\|_{p,q}$. Для каждого $f\in L_0^\mu(\Omega)$ положим $f^{**}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds$, $t>0$ (см. [14, ch.2, §3]). Пусть $f\in L_{p,q}(\Omega,\Sigma,\mu)$. Определим функционал $f\to\|f\|_{(p,q)}$ с помощью следующих равенств

$$\|f\|_{(p,q)}=\begin{cases}\big\{\int_0^\infty[t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t)]^q\frac{dt}{t}\big\}^{\frac{1}{q}}<\infty, & (1\le q<\infty),\\ \sup_{0<t<\infty}\{t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t)\}<\infty, & (q=\infty).\end{cases}\tag{1.5.3}$$

Лемма 1.5.3 ([14, ch.4, Lemma.4.5]). *Если $1<p\le\infty$ и $1\le q\le\infty$, то для всех $f\in L_{p,q}(\Omega,\Sigma,\mu)$ верны неравенства*

$$\|f\|_{p,q}\le\|f\|_{(p,q)}\le p'\|f\|_{p,q}\tag{1.5.4}$$

где $p' = \frac{p}{(p-1)}$*. В частности,* $L_{p,q}$ *состоит из всех таких* $f \in L_0^\mu(\Omega)$*, для которых* $\|f\|_{(p,q)} < \infty$*.*

С помощью Леммы 1.5.3 устанавливается следующая

Теорема 1.5.4 ([14, ch.4, Theorema.4.6])**.** *Если* $1 < p < \infty$*,* $1 \leq q \leq \infty$ *или* $p = q = \infty$*, то* $(L_{p,q}, \|\cdot\|_{(p,q)})$ *является симметричным банаховым пространством функций, изоморфным пространству* $(L_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$*.*

Рассмотрим теперь случаи, когда $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, ..., n, ...\}$, Σ есть сигма алгебра всех подмножеств в $\mathbb{N}$ и $\mu(A) = card(A)$ для каждого $A \in \Sigma$. В этой ситуации, $L_0(\mathbb{N})$ есть множество всех последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ действительных чисел и $L_0^\mu(\mathbb{N}) = l_\infty$, а пространство Лоренца $L_{p,q}(\mathbb{N}, \Sigma, \mu)$ совпадает с линейным пространством $l_{p,q}$ всех последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ действительных чисел, для которых

$$\|\{x_n\}\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^\infty (x_n^*)^q \big(n^{q/p} - (n-1)^{q/p}\big)\right)^{1/q} < \infty, & (1 \leq q < \infty), \\ \sup_{n \geq \infty} \{n^{\frac{1}{p}} x_n^*\} < \infty, & (q = \infty), \end{cases} \tag{1.5.5}$$

где $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ — убывающая перестановка последовательности $\{|x_n|\}_{n=1}^\infty \subset c_0$ и $0^{\frac{q}{p}} := 0$. Ясно, что при $p = q$ верно равенство $l_{p,p} = l_p$.

Нам понадобятся следующие известные свойства пространств $l_{p,q}$.

Теорема 1.5.5. *(i).[14, ch.4, §4,Theor.4.3].* $l_{p,q}$ *есть векторная подрешетка в* c_0 *и* $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ *при* $1 \leq q \leq p < \infty$ *или при* $p = q = \infty$ *(соответственно,* $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{(p,q)})$ *при* $1 < p < \infty$*,* $1 \leq q \leq \infty$ *или* $p = q = \infty$*) есть банахова решетка, при этом,* $l_{p,q} \subset c_0$*.*

(ii).[14, ch.4, §4,Prop.4.2]. Если $1 \leq p, q < \infty$*,* $q \leq r < \infty$*, то* $l_{p,q} \subset l_{p,r}$ *и* $\|x\|_{p,r} \leq c\|x\|_{p,q}$ *для всех* $x \in l_{p,q}$ *и некоторой константы* $c > 0$*.*

(iii).[14, ch.4, §4,Theor.4.7]. $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ *— сепарабельно, в частности, имеет порядково непрерывную норму, т.е. из условий* $0 \leq x_n \in l_{p,q}$, $x_n \downarrow 0$ *следует, что* $\|x_n\|_{p,q} \to 0$. *Кроме того, банахово пространство* $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ *при* $1 < p, q < \infty$, *рефлексивно, при этом, сопряженное пространство* $(l_{p,q})^*$ *изоморфно* $l_{r,s}$, *где* $1 < r, s < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{s} = 1$.

(iv).[16, Prop.2.3]. Если $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ *и* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$*— последовательность попарно дизъюнктных элементов из* $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$, *для которой* $0 < \inf_{n\geq 1} \|x_n\|_{p,q} \leq \sup_{n\geq 1} \|x_n\|_{p,q} < \infty$, *то существуют такие подпоследовательности* $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ *последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$*и возрастающая подпоследовательность номеров* $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, *что блоки*

$$F_k = \sum_{i=N_k+1}^{N_{k+1}} x'_i \ / \ \| \sum_{i=N_k+1}^{N_{k+1}} x'_i \|_{p,q}$$

удовлетворяют условию $F_k^*(i) \to 0$ *при* $k \to \infty$ *для всех* $i = 1, 2, ...$

Для банаховых решеток $l_{p,q}$ верна следующая Теорема [21].

Теорема 1.5.6. *a) Если* $1 \leq q < p < \infty$, *то*

(i). $l_{p,q}$ *не p-вогнуто, но удовлетворяет нижней p-оценке;*

(ii). $l_{p,q}$ *— q-выпукло с константой q-выпуклости* $M^{(q)}(l_{p,q}) = 1$.

b) Если $1 < p < q < \infty$, *то*

(i). $l_{p,q}$ *не p-выпукло, но удовлетворяет верхней p-оценке ;*

(ii). $l_{p,q}$ *— q-вогнуто.*

Из Утверждения 1.4.1 и Теорем 1.5.6 и 1.4.2 вытекает следующее важное следствие.

Следствие 1.5.7. *Пусть* Y *банахова решетка, изоморфная замкнутому подпространству в* $l_{r,s}$, $1 \leq r, s < \infty$, $r = 1$. *Тогда*

(i). $l_{r,s}$ *— q-вогнуто для всех* $q \geq s$ *при* $1 < r < s$ *и q-вогнуто для всех* $q > r$ *при* $1 \leq s < r$.

(ii). $l_{r,s}$ — p-выпукло для всех $1 < p \leq s$ при $1 \leq s < r$ и p-выпукло для всех $1 < p < r$ при $1 < r < s$.

(iii). Y — p-выпукло для любого $1 < p \leq 2 < s$ при $1 \leq s < r$ и p-выпукло для всех $1 < p \leq 2 < r$ при $1 < r < s$.

(iv). Y — q-вогнуто для всех $q \geq s$, $q \geq 2$ при $1 < r < s$ и q-вогнуто для всех $q > r$, $q \geq 2$ при $1 \leq s < r$.

Нам понадобятся следующие свойства пространств $l_{p,q}$.

Теорема 1.5.8 ([34, гл. II, §5]). *Банахово решетка последовательностей $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ при $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$ (соответственно, $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{(p,q)})$ при $1 < p < q < \infty$) имеет порядково непрерывную норму и обладает свойством Фату.*

Непосредственно из утверждения 1.4.1 и теоремы 1.5.6 (ii) вытекает

Следствие 1.5.9. *Если $1 < p < q < \infty$, то $l_{p,q}$ — r-выпукло для любых значений $r \in (1, p)$.*

В работе [23, Corollary 3.5] доказано, что в каждом p-выпуклом банаховом симметричном пространстве $(E, \|\cdot\|_E)$, имеющем свойство Фату, всегда существует эквивалентная норма $\|\cdot\|'_E$, относительно которой $(E, \|\cdot\|'_E)$ есть снова p-выпуклое банахово симметричное пространство, но уже имеющее константу p-выпуклости, равную 1. Согласно теореме 1.5.8, банахово симметричное пространство $l_{p,q}$ имеет свойство Фату. Поэтому из следствия 1.5.9 вытекает следующая

Теорема 1.5.10. *Если $1 < p < q < \infty$, то для любого значения $r \in (1, p)$ в $l_{p,q}$ существует норма $\|\cdot\|_{p,q,r}$, эквивалентная норме $\|\cdot\|_{(p,q)}$, такая, что $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q,r})$ есть r-выпуклое симметричное пространство с константой r-выпуклости, равной 1.*

1.6 Симметричные пространства последовательностей

Пусть l_∞ (соответственно, c_0) есть банахово решетка всех ограниченных (соответственно, сходящихся к нулю) последовательностей $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ действительных чисел с нормой $\|\{\xi_n\}\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|$, где $\mathbb{N}$ есть множество всех натуральных чисел.

Если $x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l_\infty$, то неубывающая перестановка $x^* : [0,\infty) \to [0,\infty)$ элемента x определяется следующим образом

$$x^*(t) = \inf\{\lambda : \mu(\{|x| > \lambda\}) \leq t\},\ t \geq 0,$$

(см., например, [14, Ch. 2, Definition 1.5]). Невозрастающую перестановку x^* также можно определить последовательностью $x^* = \{\xi_n^*\}$, где

$$\xi_n^* := \inf_{card(F)<n} \sup_{n\notin F} |\xi_n|,\ F \text{ — конечное подмножество в } \mathbb{N}.$$

Если $x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in c_0$, то существует биекция $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что $|\xi_{\pi(n)}| = \xi_n^* \downarrow 0$.

Далее, если необходимо, для удобства в записи, координаты любого элемента $y \in E$ и его положительной части $y_+ \in E$ будем обозначать следующим образом

$$y = \{(y)_m\}_{m=1}^\infty \ \text{ и } \ y_+ = \{(y)_m^+\}_{m=1}^\infty, \tag{1.6.1}$$

где $(y)_m^+ = max\{(y)_m, 0\}$ для всех $m \in N$.

Утверждение 1.6.1. *Для перестановок x^* и y^* последовательностей $x, y \in c_0$ верны следующие свойства:*

1. $(x^*)_{n_1+n_2} \leq (x^*)_{n_1} + (x^*)_{n_2}$ *для всех* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$*;*

2. $((x+y)^*)_{n_1+n_2} \leq (x^*)_{n_1} + (y^*)_{n_2}$ *для всех* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$*;*

3. *Если* $\|x_k - x\|_\infty \to 0$*, то* $(x_k^*)_n \to (x^*)_n$ *при* $k \to \infty$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Свойства (1) и (2) доказаны в [34, Гл. II, §2]. В доказательстве нуждается только свойство (3). Поскольку $\|x_k - x\|_\infty \to 0$, то $(x_k)_n \to (x)_n$ при $k \to \infty$ и для любого $n \in \mathbb{N}$. Из свойства 5° в [34, Гл. II, §2, п. 2] имеем, что $(x_k^*)_n \to (x^*)_n$ при $k \to \infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Ненулевое линейное подпространство $E \subset l_\infty$ с банаховой нормой $\|\cdot\|_E$ называется симметричным пространством последовательностей, если из $\xi^* \leqslant \eta^*, \xi \in l_\infty, \eta \in E$ следует, что $\xi \in E$ и $\|\xi\|_E \leqslant \|\eta\|_E$. Обычно предполагают, что $\|\{1,0,0,\dots\}\|_E = 1$. При этом, $\|\xi\|_\infty \leqslant \|\xi\|_E = \||\xi|\|_E = \|\xi^*\|_E$ для любого ξ из симметричного банахова пространства последовательностей E.

Для каждого симметричного пространства $(E, \|\cdot\|_E)$ верны следующие непрерывные вложения [14, Chapter 2, §6, Theorem 6.6]

$$(l_1\|\cdot\|_1) \subset (E, \|\cdot\|_E) \subset (l_\infty, \|\cdot\|_\infty),$$

в частности, $\|\xi\|_E \leq \|\xi\|_1$ для всех $\xi \in l_1$ и $\|\xi\|_\infty \leq \|\xi\|_E$ для любого $\xi \in E$.

Известно (см, например, [49], гл. 10, § 4), что симметричное пространство последовательностей $(E, \|\cdot\|_E)$ имеет порядково непрерывную норму в том и только в том случае, когда $(E, \|\cdot\|_E)$— сепарабельно.

Утверждение 1.6.2. *Если E — симметричное пространство последовательностей, то либо $E = l_\infty$, либо $E \subset c_0$.*

Доказательство. Пусть $E \subset l_\infty$ и $E \not\subset c_0$. Тогда существует $x = \{(x)_n\}_{n=1}^\infty \in E$ такой, что $|(x)_n| \not\to 0$, следовательно, существует подпоследовательность $\{(x)_{n_k}\}: \inf_{k\geq 1} |(x)_{n_k}| = \alpha > 0$.

Рассмотрим элемент $y = \{(y)_n\}_{n=1}^\infty$, где $(y)_n = 0$, если $n \neq n_k$

и $(y)_n = \xi_{n_k}$, если $n = n_k$. Тогда $0 \leq y \leq |x| \in E$. Поскольку E— симметричное пространство последовательностей, то $y \in E$. С другой стороны, $y \geq \alpha\chi_A$, где $\chi_A = \{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\zeta_n = 1$, если $n \in A$, $\zeta_n = 0$, если $n \notin A$ и $A = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Теперь рассмотрим элемент $z = \{(z)_n\}_{n=1}^{\infty} = \{|(x)_{n_1}|, |(x)_{n_2}|, |(x)_{n_3}|, \ldots\}$. Тогда $z^* = y^* \in E$ и следовательно, $z \in E$ и $z \geq \alpha \cdot \mathbf{1}$, т.е. $\alpha \cdot \mathbf{1} \in E$, поэтому $\mathbf{1} \in E$. Так как для любого $a \in l_\infty$ верно $|a| \leq \|a\| \cdot \mathbf{1} \in E$, то $|a| \in E$, что влечет $a \in E$. Следовательно, $l_\infty \subset E$. Это и означает, что $l_\infty = E$. $\square$

Согласно утверждению 1.6.2, далее, в диссертационной работе будем предполагать, что $E \subset c_0$. Случай $E = l_\infty$ будет рассматриваться отдельно.

В пространстве l_∞ определим порядок Hardy-Littlewood-Polya, положив

$$\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \prec\prec \eta = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{m} \xi_n \leq \sum_{n=1}^{m} \eta_n \quad \text{для всех} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Линейное подпространство $E \subseteq l_\infty$ с банаховой нормой $\|\cdot\|_E$ называется *вполне симметричным* пространством последовательностей, если из условий $\eta \in E$, $\xi \in l_\infty$, $\xi^* \prec\prec \eta^*$ следует, что $\xi \in E$ и $\|\xi\|_E \leq \|\eta\|_E$.

Ясно, что каждое вполне симметричное пространство последовательностей есть симметричное пространство. Обратное, вообще говоря, неверно. При этом, всякое сепарабельное симметричное пространство последовательностей является вполне симметричным пространством.

Примерами вполне симметричных пространств последовательностей служат пространства l_∞, l_p, $1 \leq p < \infty$, пространства последовательностей Орлича, Лоренца, Марцинкевича и др.

Нам понадобится следующее свойство симметричного пространства последовательностей l_p.

Утверждение 1.6.3. *Если* $x_k = \{(x_k)_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_p$, $\sup_{k\geq 1} \|x_k\|_p < \infty$, $x = \{(x)_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_\infty$ *и* $\|x_k - x\|_\infty \to 0$, *то* $x \in l_p$.

Доказательство. Действительно, для $x_k \in l_p$, $x \in l_\infty$, $\|x_k - x\|_\infty \to 0$ имеем, что $x_k \to x$ по мере. Так как l_p имеет свойство Фату, то из $\|x_k\|_p \leq K$ $\forall k \in N$, $x_k \to x$ по мере следует, что $\|x\|_p \leq K$(см. [49, IV глава, §3]). В нашей ситуации $\sup_{k\geq 1} \|x_k\|_p < \infty$, что влечет $x \in l_p$. $\square$

1.7 Симметричные идеалы компактных операторов

Далее, в этом параграфе первой главы и в пятой главе настоящей диссертационной работы, для операторов из $B(H)$ будем использовать маленькие буквы латинского алфавита, а для элементов гильбертова пространства H будем использовать маленькие буквы греческого алфавита.

Пусть $(H, (\cdot, \cdot))$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathcal{B}(H)$ — C^*-алгебра всех ограниченных линейных операторов, $\mathcal{K}(H)$ (соответственно, $\mathcal{F}(H)$) — двусторонний идеал компактных (соответственно, конечномерных) операторов в $\mathcal{B}(H)$. Обозначим через $\|x\|_\infty = \|x\|_{\mathcal{B}(H)}$ для всех $x \in \mathcal{B}(H)$.

Пусть $\mathcal{I}$ — ненулевой двусторонний идеал в $\mathcal{B}(H)$. Норма $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ называется симметричной нормой, если

1) $\|axb\|_{\mathcal{I}} \leqslant \|a\|_{\mathcal{B}(H)} \|x\|_{\mathcal{I}} \|b\|_{\mathcal{B}(H)}$ для любых $x \in \mathcal{I}, a, b \in \mathcal{B}(H)$;

2) $\|p\|_{\mathcal{I}} = 1$ для любого одномерного проектора $p \in \mathcal{I}$.

Для любой симметричной нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ на идеале $\mathcal{I}$ компактных операторов $x \in \mathcal{I}$ верны следующие соотношения ([48], Ch. III, §3):

$$\|x\|_{\mathcal{I}} = \|x^*\|_{\mathcal{I}} = \||x|\|_{\mathcal{I}} \quad \text{и } \|x\|_{\mathcal{B}(H)} \leqslant \|x\|_{\mathcal{I}}.$$

Кроме того, если $x \in \mathcal{I}, y \in \mathcal{K}(H), s_n(y) \leqslant s_n(x)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $y \in \mathcal{I}$ и $\|y\|_{\mathcal{I}} \leqslant \|x\|_{\mathcal{I}}$.

Двусторонний идеал $\mathcal{I}$ компактных операторов из $\mathcal{B}(H)$ называется симметричным банаховым идеалом, если на $\mathcal{I}$ определена симметричная норма $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$, относительно которой $\mathcal{I}$ есть банахово пространство.

1.8 Соответствие Калкина для идеалов компактных операторов

Опишем классическое соответствие Калкина между двусторонними идеалами $\mathcal{I}$ компактных операторов и симметричными подпространствами $E(\mathcal{I})$ последовательностей из пространства c_0.

Для произвольного ненулевого двустороннего идеала $\mathcal{I}$ компактных операторов определим пространство последовательностей

$$E(\mathcal{I}) := \{\xi \in c_0 : \xi^* = \{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \text{ для некоторого } x \in \mathcal{I}\}.$$

Обратно, для произвольного симметричного пространства E последовательностей из c_0 определим подмножество $\mathcal{I}(E)$ компактных операторов из $\mathcal{B}(H)$ следующим образом

$$\mathcal{I}(E) := \{x \in \mathcal{K}(H) : \{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in E\}.$$

Следующая теорема описывает хорошо известное соответствие Калкина между двусторонними идеалами $\mathcal{I}$ компактных операторов и симметричными подпространствами $E(\mathcal{I})$ подпоследовательностей из пространства c_0 ([15], см. также [42, Theorem 2.5]).

Теорема 1.8.1. *Соответствие $E(\mathcal{I}) \leftrightarrow \mathcal{I}$ есть биекция между* *симметричными пространствами последовательностей из c_0 и двусторонними идеалами компактных операторов.*

Если

$$E = l_p = \{\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0 : \|\xi\|_{l_p} = (\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p)^{1/p} < \infty\}$$

(соответственно, $E = c_0$), то

$$\mathcal{I}(l_p) = C_p = \{x \in \mathcal{K}(H) : \|x\|_{C_p} = (\sum_{n=1}^{\infty} |s_n(x)|^p)^{1/p} < \infty\}$$

и

$$\|\cdot\|_{\mathcal{I}(l_p)} = \|\cdot\|_{C_p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

(соответственно,

$$\mathcal{I}(c_0) = \mathcal{K}(H) \text{ и } \|\cdot\|_{\mathcal{I}(c_0)} = \|\cdot\|_{\mathcal{B}(H)}).$$

Через $tr : \mathcal{B}_+(H) \to [0, \infty]$ обозначим канонический след на $\mathcal{B}_+(H) = \{x \in \mathcal{B}(H) : (x\xi, \xi) \geq 0 \ \forall \xi \in H\}$, т.е. $tr(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(x\varphi_n, \varphi_n)$, где $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H.

Известно, что

$$C_p = C_p(H) = \{x \in \mathcal{K}(H) : (tr(|x|^p))^{1/p} < \infty\}$$

и

$$\|x\|_{C_p} = \|x\|_p = (tr(|x|^p))^{1/p}.$$

Следующая теорема Н.Кальтона и Ф.Сукочева [31] уточняет соответствие Калкина для симметричных банаховых идеалов компактных операторов и симметричных банаховых пространств последовательностей из c_0.

Теорема 1.8.2. *Если $(E, \|\cdot\|_E)$ — симметричное банахово пространство последовательностей из c_0, то $(\mathcal{I}(E), \|\cdot\|_{\mathcal{I}(E)})$ есть симметричный банахов идеал компактных операторов, при этом, $E(\mathcal{I}(E)) = E$ и $\|\cdot\|_{E(\mathcal{I}(E))} = \|\cdot\|_E$.*

ГЛАВА 2. ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В этой главе дается полное описание вполне симметричных пространств последовательностей, где верны индивидуальная и статистическая эргодические теоремы для произвольных операторов Данфорда - Шварца.

Линейный оператор $T : l_\infty \to l_\infty$ называется *оператором Данфорда-Шварца*, если

$$\|T(x)\|_1 \leq \|x\|_1 \;\; \forall \;\; x \in l_1 \quad \text{и} \quad \|T(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty \;\; \forall \; x \in l_\infty,$$

в этом случае, мы будем писать $T \in DS$.

Для рассмотрения операторов Данфорда-Шварца в произвольных симметричных пространствах последовательностей, необходимо, чтобы эти операторы действовали в этих симметричных пространствах последовательностей. Для того, чтобы оператор действовал в симметричном пространстве, необходимо, чтобы оно было вполне симметричным [34, Гл II]. Известна следующая важная теорема для операторов Данфорда-Шварца в вполне симметричных пространств поседовательностей [34, Гл II].

Теорема 2.0.3. *Если E вполне симметричное пространство последовательностей и $T \in DS$, то $T(E) \subset E$ и $\|T\|_{E \to E} \leq 1$.*

Пусть T — линейное сжатие из E в E. Обозначим через $A_n(T)$ средние Чезаро для оператора T, т. е.

$$A_n(T) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k.$$

Оператор

$$\widehat{A}(T,x)=\sup_{n\geq 1}|A_n(T)(x)|,\ x\in E,$$

определенный в пространстве E называется максимальным оператором, ассоциированным с последовательностью $\{A_n(T)(x)\}$.

2.1 Индивидуальная эргодическая теорема в симметричных пространствах последовательностей

В связи с индивидуальной эргодической теоремой Данфорда - Шварца в L_p-пространствах, естественно выделить класс таких симметричных пространств последовательностей, для которых сохраняется индивидуальная эргодическая теорема при действии произвольных операторов Данфорда - Шварца.

В дальнейшем, нам понадобится следующая максимальная эргодическая теорема Хоффа [28].

Теорема 2.1.1 (Максимальная эргодическа теорема)**.** *Для любого положительного сжатия T в l_1 и для произвольного $x=\{(x)_m\}_{m=1}^{\infty}\in l_1$ верно*

$$\textstyle\sum_{m\in\{\widehat{A}x\geq 0\}}(x)_m\geq 0.$$

Для каждого ограниченного линейного оператора $T: l_1\to l_1$ (соответственно, $T: l_\infty\to l_\infty$) определяется положительный линейный оператор $|T|: l_1\to l_1$ (соответственно, $|T|: l_\infty\to l_\infty$), называемый модулем оператора T, обладающий следующими свойствами (см. [35, Ch.4, §4.1]):

Теорема 2.1.2. *Для любого ограниченного линейного оператора T : $l_1\to l_1$ (соответственно, $T: l_\infty\to l_\infty$) существует единственный положительный линейный ограниченный оператор $|T|: l_1\to l_1$ (соответственно, $|T|: l_\infty\to l_\infty$) такой, что* *(i).* $\| \; |T| \; \|_{l_1 \to l_1} = \|T\|_{l_1 \to l_1}$ *(соответственно,* $\| \; |T| \; \|_{l_\infty \to l_\infty} = \|T\|_{l_\infty \to l_\infty}$*);*

(ii). $|T^k(x)| \leq |T|^k(|x|)$ *для каждого* $x \in l_1$ *(соответсвенно, для каждого* $x \in l_\infty$*)* $\; k = 0, 1, 2, \ldots$

В работе [19, Theorem 4.2] доказана следующая максимальная эргодическая оценка для оператора $T \in DS$ и любого элемента $x \in l_p$:

Теорема 2.1.3. *Пусть* $T \in DS$ *и* $1 \leq p < \infty$*. Тогда для любого* $x \in l_p$ *и* $\alpha > 0$ *верно неравенство*

$$card\{m \in N : (\widehat{A}(T, x))_m \geq \alpha\} \leq \left(2 \frac{\|x\|_p}{\alpha}\right)^p. \qquad (2.1.1)$$

Из ([19, Corollary 4.2, Theorem 4.3.]) вытекает нужная нам теорема.

Теорема 2.1.4. *Пусть* $T \in DS$ *и* $x \in l_p$*,* $1 \leq p < \infty$*. Тогда:*

(i) множество $l_p^{(T)} = \{x \in l_p : \{A_n(T)(x)\}$ *сходится покоординатно* $\}$ *замкнуто в* l_p*;*

(ii) средние $\{A_n(T)(x)\}$ *сходятся покоординатно для всех* $x \in l_p$*.*

Ясно, что теорема 2.1.4(ii) есть вариант классической индивидуальной эргодической теоремы Данфорда-Шварца для пространств последовательностей l_p. Ниже доказывается усиление теоремы 2.1.4. Для начала докажем следующее утверждение.

Теорема 2.1.5. *Для любого оператора* $T \in DS$ *и для каждого* $x \in l_p$*,* $1 \leq p < \infty$ *верны следующие утверждения:*

(i) множество $l_p^{(T)} = \{x \in l_p : \{A_n(T)(x)\}$ *сходится по норме* $\| \cdot \|_\infty\}$ *замкнуто в* l_p*;*

(ii) средние $\{A_n(T)(x)\}$ *сходится по норме* $\| \cdot \|_\infty$ *для всех* $x \in l_p$*.*

Доказательство. (i). Пусть $T \in DS$, $\; \{x_m\} \subset l_p^{(T)}$ и $x \in l_p$, такие, что $\|x - x_m\|_p \to 0$ при $m \to \infty$. Так как $\{x_m\} \subset l_p^{(T)}$, то последовательность

$\{A_n(T)(x_m)\}$ сходится по норме $\|\cdot\|_\infty$ к некоторому элементу $\widehat{x}_m \in l_p$ для всех $m \in N$ (см. утверждение 1.6.3), что влечет покоординатную сходимость последовательности $\{A_n(T)(x_m)\}$ к $\widehat{x}_m$ для всех $m \in N$. Тогда из теоремы 2.1.4 (i) следует, что $x \in l_p^{(T)}$, т.е. $A_n(T)(x)$ сходится покоординатно. Рассмотрим $A_n(|T|)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|T|^k(x)$. Пусть t – произвольное фиксированное натуральное число. Тогда рассмотрим множество

$$N_{m,t} = \{\widehat{A}(T, |x - x_m|) \geq \frac{1}{t}\}.$$

По теореме 2.1.3 имеем, что

$$card(N_{m,t}) \leq (2t\|x - x_m\|_p)^p \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Следовательно, существует такое $m_1 \in N$, что $N_{m,t} = \varnothing$ при $m \geq m_1$. Последнее означает, что $\{\widehat{A}(T, |x - x_m|) < \frac{1}{t}\} = N$, то есть

$$(\widehat{A}(T, |x - x_m|))_s < \frac{1}{t} \tag{2.1.2}$$

для всех $s \in N$ и $m \geq m_1$. Из (2.1.2) следует, что $\|\widehat{A}(T, |x - x_m|)\|_\infty < \frac{1}{t}$ при $m \geq m_1$.

Пусть теперь $A_n(T)(x)$ сходится покоординатно к $\widehat{x} = \{\liminf_n (A_n(T)(x))_s\}_{s=1}^\infty$. Так как $\widehat{x}_m = \{\liminf_n (A_n(T)(x_m))_s\}_{s=1}^\infty$, $l_p \cap l_1 = l_1$ плотно в l_p и операторы T и $|T|$ непрерывны на l_1, то из теоремы 2.1.2 следует, что $|T^k(x)| \leq |T|^k(|x|)$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$, которая в свою очередь влечет следующую оценку:

$$\|\widehat{x} - \widehat{x}_m\|_\infty = \sup_s |\liminf_n (A_n(T)(x))_s - \liminf_n (A_n(T)(x_m))_s| =$$

$$= \sup_s |\liminf_n ((A_n(T)(x))_s - (A_n(T)(x_m))_s)| \leq$$

$$\leq \sup_s [\sup_n |(A_n(T)(x) - A_n(T)(x_m))_s] = \sup_s [\sup_n |(A_n(T)(x - x_m))_s|] \leq$$

$$\leq \sup_s [\sup_n \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (T^k(x - x_m))_s \right|] \leq \sup_s [\sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |(T^k(x - x_m))_s|] \leq$$

$$\leq \sup_s [\sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (|T|^k(|x-x_m|))_s] = \sup_s [(\widehat{A}(|T|, |x-x_m|))_s] \leq \frac{1}{t}$$

для всех $t \in N$ и $m \geq m_1$. Следовательно, $\|\widehat{x} - \widehat{x}_m\|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$ и $m \geq m_1$. Аналогично,

$$\|A_n(T)(x) - A_n(T)(x_m)\|_\infty = \|A_n(T)(x - x_m)\|_\infty =$$

$$= \sup_s |(A_n(T)(x-x_m))_s| \leq \sup_s |[\limsup_n (A_n(T)(x-x_m))_s]| \leq$$

$$\leq \sup_s [\sup_n |(A_n(T)(x-x_m))_s|] \leq \sup_s [(\widehat{\widehat{A}}(|x-x_m|))_s] \leq \frac{1}{t}$$

для всех $t \in N$ и $m \geq m_1$. Следовательно, $\|A_n(T)(x) - A_n(T)(x_m)\|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$ и при $m \geq m_1$. Рассмотрим теперь

$$\|A_n(T)(x) - \widehat{x}\|_\infty =$$

$$= \|A_n(T)(x) - A_n(T)(x_m) + A_n(T)(x_m) - \widehat{x}_m + \widehat{x}_m - \widehat{x}\|_\infty \leq$$

$$\leq \|A_n(T)(x) - A_n(T)(x_m)\|_\infty + \|A_n(T)(x_m) - \widehat{x}_m\|_\infty + \|\widehat{x}_m - \widehat{x}\|_\infty \to 0$$

при $n \to \infty$ и $m \geq m_1$. Следовательно, $\|A_n(T)(x) - \widehat{x}\|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$, что означает $A_n(T)(x)$ сходится по норме $\|\cdot\|_\infty$, т.е. $x \in l_p^{(T)}$.

(ii). Пусть $T \in DS$, $1 \leq p < \infty$. Сначала покажем, что последовательность $\{A_n(T)(x)\}$ сходится по норме $\|\cdot\|_\infty$ для любого $x \in l_2$.

Обозначим через $(\cdot, \cdot)$ стандартное скалярное произведение в l_2. Пусть $N = \{T(z) - z : z \in l_2\}$. Если $y \in N^\perp$, то

$$0 = (y, T(z) - z) = (y, T(z)) - (y, z) = (T^*(y), z) - (y, z) = (T^*(y) - y, z)$$

для всех $z \in l_2$, следовательно $T^*(y) = y$. Имея в виду, что T сжатие в l_2, получим, что

$$\|T(y) - y\|_2^2 = (T(y) - y, T(y) - y) = \|T(y)\|_2^2 - (y, T^*(y)) - (T^*(y), y) + \|y\|_2^2 =$$

$$= \|T(y)\|_2^2 - \|y\|_2^2 \leq 0, \qquad (2.1.3)$$

что означает $T(y) = y$. Таким образом, $N^{\perp} \subset L = \{y \in l_2 : T(y) = y\}$. Обратно, если $y \in L$, то из того, что T^* также сжатие в l_2, заменяя T на T^* в (2.1.3) мы получим, что $T^*(y) = y$. Следовательно, $y \in N^{\perp}$, то есть, $N^{\perp} = L$, и наконец, $\overline{N} \oplus L = l_2$. Последнее означает, что множество

$$D = \{y + (T(z) - z) : \ y \in l_2, \ T(y) = y; \ z \in l_2\}$$

плотно в l_2. Ясно, что последовательность $\{A_n(T)(x)\}$ сходится по норме $\| \cdot \|_\infty$ для любого $x \in D$. Следовательно, по п. (i) настоящей теоремы последовательность $\{A_n(T)(x)\}$ сходится по норме $\| \cdot \|_\infty$ для любого $x \in l_2$.

Поскольку $l_p \cap l_2$ плотно в $(l_p, \| \cdot \|_p)$, то опять используя п. (i) настоящей теоремы, получим, что $\{A_n(T)(x)\}$ сходится по норме $\| \cdot \|_\infty$ для любого $x \in \overline{l_p \cap l_2}^{\| \cdot \|_p} = l_p$. $\square$

Теорема 2.1.6. *Для любого $T \in DS$ и $x \in c_0$ существует такое $\widehat{x} \in c_0$, что $\|A_n(T)(x) - \widehat{x}\|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $x \geq 0$. Пусть $x \in c_0$ и $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда $\xi_n \to 0$ при $n \to \infty$. Для любого фиксированного натурального числа k рассмотрим $y^{(k)} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, 0, 0, \ldots\} \in l_1$ и $0 \leq z^{(k)} = \{0, 0, \ldots, 0, \xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots\} \in c_0$. Тогда $x = y^{(k)} + z^{(k)}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $k = k(\varepsilon)$, что $\|z^{(k)}\|_\infty \leq \varepsilon$ для всех $k \geq k(\varepsilon)$.

Поскольку $y^{(k)} \in l_1$, то по теореме 2.1.5 (ii) существует такой номер $n_1 = n(\varepsilon)$ и $\widehat{y}^{(k)} \in l_1$, что $\|A_n(T)(y^{(k)}) - \widehat{y}^{(k)}\|_\infty < \varepsilon$ при $n > n_1$ для любого фиксированного числа k. Следовательно, $\{A_n(T)(y^{(k)})\}$ сходится покоординатно к $\widehat{y}^{(k)}$ для любого фиксированного числа k. Поэтому

$$\liminf_n (A_n(T)(y^{(k)}))_s = \limsup_n (A_n(T)(y^{(k)}))_s = (\widehat{y}^{(k)})_s \qquad (2.1.4)$$

для всех $s \in N$ и $k = k(\varepsilon)$.

Для фиксированного $k = k(\varepsilon)$ и $s \in N$ имеем:

$$\limsup_n (A_n(T)(x))_s - \liminf_n (A_n(T)(x))_s = \limsup_n (A_n(T)(y^{(k)} + z^{(k)}))_s -$$

$$-\liminf_n (A_n(T)(y^{(k)} + z^{(k)}))_s = \limsup_n (A_n(T)(y^{(k)}))_s +$$

$$+\limsup_n (A_n(T)(z^{(k)}))_s - \liminf_n (A_n(T)(y^{(k)}))_s - \liminf_n (A_n(T)(z^{(k)}))_s =$$

$$= \limsup_n (A_n(T)(z^{(k)}))_s - \liminf_n (A_n(T)(z^{(k)}))_s \leq 2\sup_n |(A_n(T)(z^{(k)}))_s| \leq 2\varepsilon,$$

для всех $s \in N$, так как $\|A_n(T)(z^{(k)})\|_\infty = \|\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} T^m(z^{(k)})\|_\infty \leq \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} \|T^m(z^{(k)})\|_\infty \leq \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} \|z^{(k)}\|_\infty = \|z^{(k)}\|_\infty < \varepsilon$, в частности, $|(A_n(T)(z^{(k)}))_s| < \varepsilon$ для всех $s \in N$.

Поэтому, последовательность $\{A_n(T)(x)\}_{n=1}^\infty$ сходится покоординатно к некоторому $\widehat{x} = \{\liminf_n (A_n(T)(x))_s\}_{s=1}^\infty \in l_\infty$. Покажем, что $\|A_n(T)(x) - \widehat{x}\|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$. Для любого фиксировнного $k = k(\varepsilon)$ рассмотрим

$$\|A_n(T)(x) - \widehat{x}\|_\infty = \|A_n(T)(y^{(k)} + z^{(k)}) - \widehat{x}\|_\infty =$$

$$= \|A_n(T)(y^{(k)}) + A_n(T)(z^{(k)}) - \widehat{x}\|_\infty =$$

$$= \|A_n(T)(y^{(k)}) - \widehat{y}^{(k)} + \widehat{y}^{(k)} + A_n(T)(z^{(k)}) - \widehat{x}\|_\infty \leq$$

$$\leq \|A_n(T)(y^{(k)}) - \widehat{y}^{(k)}\|_\infty + \|A_n(T)(z^{(k)})\|_\infty + \|\widehat{y}^{(k)} - \widehat{x}\|_\infty <$$

$$< 2\varepsilon + \sup_{s\geq 1} |\liminf_n (A_n(T)(y^{(k)}))_s - \liminf_n (A_n(T)(x))_s| =$$

$$= 2\varepsilon + \sup_{s\geq 1} |\liminf_n (A_n(T)(y^{(k)} - x))_s| = 2\varepsilon + \sup_{s\geq 1}\sup_{n\geq 1} |(A_n(T)(z^{(k)}))_s| < 3\varepsilon,$$

для всех $n \geq n_1 \geq n(\varepsilon)$.

В силу произвольности ε имеем, что $\|A_n(T)(x) - \widehat{x}\|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$.

Так как c_0 — вполне симметричное пространство, то из теоремы 2.0.3 следует, что $T(c_0) \subset c_0$. Следовательно, $A_n(T)(x) \in c_0$ для любого $n \in N$. Поэтому, из $\|A_n(T)(x) - \widehat{x}\|_\infty \to 0$ следует, что $\widehat{x} \in \overline{c_0}^{\|\cdot\|_\infty} = c_0$. $\square$

Следующая теорема есть вариант теоремы 2.1.6 для произвольных вполне симметричных пространств последовательностей.

Теорема 2.1.7. *Если $E \subset c_0$ — произвольное вполне симметричное пространство последовательностей, $T \in DS$ и $x \in E$, то существует такое $\widehat{x} \in E$, что $\|A_n(T)(x) - \widehat{x}\|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Поскольку $E \subset c_0$, то из теоремы 2.1.6 следует, что существует такое $\widehat{x} \in c_0$, что $\|A_n(T)(x) - \widehat{x}\|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$. Покажем, что $\widehat{x} \in E$. В силу утверждения 1.6.1 (iii) имеем, что $A_n(T)(x)^* \to \widehat{x}^*$ покоординатно, т.е. $(A_n(T)(x)^*)_s \to (\widehat{x}^*)_s$ для всех $s \in N$. Так как $T \in DS$, то $A_n(T) \in DS$, и поэтому $A_n(T)(x)^* \prec x^*$ (см. например, [34, Ch.II, §3, Sec.4]). Следовательно,

$$\sum_{s=1}^{m} (\widehat{x}^*)_s \leq \sup_{n \geq 1} \sum_{s=1}^{m} (A_n(T)(x)^*)_s \leq \sum_{s=1}^{m} (x^*)_s \text{ для всех } m,$$

т.е. $\widehat{x}^* \prec x^*$, что, в силу вполне симметричности E, влечет $\widehat{x} \in E$. $\square$

Следует заметить, что для элементов $x \in l_\infty \setminus c_0$ вариант теоремы 2.1.6 неверен. Более того, справедлива следующая

Теорема 2.1.8. *Для каждого $x \in l_\infty \setminus c_0$ существует такое $T \in DS$, что средние $A_n(T)(x)$ не сходятся покоординатно.*

Доказательство. Если $x \in l_\infty \setminus c_0$, то $x = x_+ - x_-$, где либо $x_+ \in l_\infty \setminus c_0$, либо $x_- \in l_\infty \setminus c_0$. Можно считать, что $x_+ \in l_\infty \setminus c_0$, т.е. существует такое $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon \leq |(x_+)_{m_k}| \leq \delta = \|x\|_\infty$ для некоторой подпоследовательности $G = \{m_k\}_{k=1}^\infty$.

Пусть $1 = n_0, n_1, n_2, \ldots$ строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Определим функцию $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, полагая

$$\varphi(m) = \chi_{\{m_{n_0}\}}(m) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\chi_{\{m_{n_k+1}, \ldots, m_{n_{k+1}-1}\}}(m) - \chi_{\{m_{n_{k+1}}\}}(m) \right).$$

Ясно, что

$$\varphi(m_1) = 1,\ \varphi(m_2) = 1,\ \ldots,\ \varphi(m_{n_1-1}) = 1,\ \varphi(m_{n_1}) = -1,$$

$$\varphi(m_{n_1+1}) = 1,\ \varphi(m_{n_1+2}) = 1,\ \ldots,\ \varphi(m_{n_2-1}) = 1,\ \varphi(m_{n_2}) = -1,$$

$$\varphi(m_{n_2+1}) = 1,\ \varphi(m_{n_2+2}) = 1,\ \ldots,\ \varphi(m_{n_3-1}) = 1,\ \varphi(m_{n_3}) = -1,\ \ldots$$

Рассмотрим отображение $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ для которого

$$\tau(m_s) = m_{s+1} \ \text{ если } m_s \in G \ \text{ и } \ \tau(m) = m \ \text{ если } \ m \notin G.$$

Определим линейный оператор $T : l_\infty \to l_\infty$, полагая $(Ty)_m = \varphi(m)(y)_{\tau(m)}$, $\ y \in l_\infty$.

Ясно, что $\|T\|_{l_\infty \to l_\infty} \leq 1$, $\ T(l_1) \subset l_1$ и $\|T\|_{l_1 \to l_1} \leq 1$, т.е. $T \in DS$, при этом $T(x_-) = 0$. Кроме того

$$(T^k(x_+))_m = \varphi(m)\varphi(\tau(m))\varphi(\tau^2(m))\ldots\varphi(\tau^{k-1}(m))(x_+)_{\tau^k(m)}$$

для всех $m \in \mathbb{N}$.

Следовательно,

$$(A_{n_1}(T)(x_+))_{m_1} = \frac{1}{n_1}\sum_{k=0}^{k=n_1-1}(T^k(x_+))_{m_1} =$$

$$= \frac{1}{n_1}\sum_{k=0}^{k=n_1-1}\varphi(m_1)\varphi(m_2)\ldots\varphi(m_k)(x_+)_{m_{k+1}} = \frac{1}{n_1}\sum_{k=0}^{k=n_1-1}(x_+)_{m_{k+1}} \geq \varepsilon > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как

$$(A_{n_2}(T)(x_+))_{m_1} = \frac{1}{n_2}\Big(\sum_{k=0}^{k=n_1-1}(T^k(x_+))_{m_1} + \sum_{k=n_1}^{k=n_2-1}(T^k(x_+))_{m_1}\Big) =$$

$$= \frac{1}{n_2}\Big(\sum_{k=0}^{k=n_1-1}(x_+)_{m_{k+1}} - \sum_{k=n_1}^{k=n_2-1}(x_+)_{m_{k+1}}\Big) \leq \frac{1}{n_2}(n_1\delta - (n_2 - n_1)\varepsilon),$$

то можем выбрать номер n_2 так, чтобы $(A_{n_2}(T)(x_+))_{m_1} < -\frac{\varepsilon}{2}$. Аналогично, используя соотношения

$$(A_{n_3}(T)(x_+))_{m_1} = \frac{1}{n_3}\Big(\sum_{k=0}^{k=n_1-1}(x_+)_{m_{k+1}} - \sum_{k=n_1}^{k=n_2-1}(x_+)_{m_{k+1}} + \sum_{k=n_2}^{k=n_3-1}(x_+)_{m_{k+1}}\Big) \geq$$

$$\geq \frac{1}{n_3}(n_1\varepsilon - (n_2 - n_1)\delta + (n_3 - n_2)\varepsilon),$$

выберем номер n_3 так, чтобы $(A_{n_3}(T)(x_+))_{m_1} > \frac{\varepsilon}{2}$.

Продолжая этот процесс, построим возрастающую последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, для которой выполняются неравенства

$$(A_{n_{2k-1}}(T)(x_+))_{m_1} > \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad (A_{n_{2k}}(T)(x_+))_{m_1} < -\frac{\varepsilon}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно, последовательность $\{(A_n(T)(x_+))_{m_1}\}$ расходится, что влечет отсутствие покоординатной сходимости у последовательности $\{A_n(T)(x_+)\}$. Поскольку $T(x_-) = 0$ и $A_n(T)(x) = A_n(T)(x_+ - x_-) = A_n(T)(x_+) - A_n(T)(x_-) = A_n(T)(x_+) - x_-$, то последовательность $\{A_n(T)(x)\}$ также не сходится покоординатно. $\square$

На самом деле, в формулировке теоремы 2.1.8 можно считать, что оператор $T \in DS^+$. Действительно, из теорем 2.1.2 и 2.1.8 получим следующее

Утверждение 2.1.9. *Если $x \in l_\infty \setminus c_0$ то существует $S \in DS^+$ такой, что средние $A_n(S)(x)$ не сходятся покоординатно.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 2.1.8, мы можем считать, что $x \geq 0$. Тогда из теоремы 2.1.8 существует $T \in DS$ такой, что средние $\{A_n(T)(x)\}$ не сходятся покоординатно.

Если $m > n,\ m,\ n \in \mathbb{N}$, то используя теорему 2.1.2 имеем

$$|A_n(T)(x) - A_m(T)(x)| = |\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(x) - \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} T^k(x)| =$$

$$= |\frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1} T^k(x) + \frac{m-n}{nm}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(x)| \leq \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1} |T|^k(x) + \frac{m-n}{nm}\sum_{k=0}^{n-1} |T|^k(x) =$$
$$= |A_n(|T|)(x) - A_m(|T|)(x)|.$$

Поскольку средние $\{A_n(T)(x)\}$ не сходятся покоординатно, то средние $\{A_n(|T|)(x)\}$ также не сходятся покоординатно. Если положим $S = |T|$, то по теореме 2.1.2 оператор S положительный оператор Данфорда-Шварца и средние $\{A_n(S)(x)\}$ также не сходятся покоординатно. $\square$

Замечание 2.1.10. *Напомним, что покоординатная сходимость слабее чем сходимость по норме $\|\cdot\|_\infty$. Поэтому, в теореме 2.1.8 (соответственно, в утверждении 2.1.9) средние $\{A_n(T)(x)\}$ (соответственно, $\{A_n(S)(x)\}$) не сходятся по норме $\|\cdot\|_\infty$.*

2.2 Статистическая эргодическая теорема в симметричных пространствах последовательностей

В связи со статистической эргодической теоремой Данфорда - Шварца в L_p-пространствах естественно описать все такие симметричные пространства последовательностей, где сохраняется статистическая эргодическая теорема при действии произвольных операторов Данфорда - Шварца.

В этом параграфе мы приведем необходимые и достаточные условия для выполнения статистической эргодической теоремы в вполне симметричных пространствах.

Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ — вполне симметричное пространство последовательностей. Будем говорить, что E удовлетворяет *статистической эргодической теореме* (пишем $E \in (MET)$) если для любых $T \in DS$ и $x \in E$ существует $\widehat{x} \in E$ такой, что $\|A_n(T)(x) - \widehat{x}\|_E \to 0$.

Утверждение 2.2.1. *Если $E = l_1$ как множества, то $E \notin (MET)$.*

Доказательство. Пусть $e_1 = \{1, 0, 0, \dots\}$ и $T \in DS$ такой, что

$T(\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{0, \xi_1, \xi_2, \dots\}$. Поскольку

$$\|A_{2n}(T)(e_1) - A_n(T)(e_1)\|_1 =$$

$$= \left\| \frac{1}{2n}\{\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{2n}, 0, 0, \dots\} - \frac{1}{n}\{\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{n}, 0, 0, \dots\} \right\|_1 = 1,$$

то последовательность $\{A_n(T)(e_1)\}$ является не сходящейся относительно нормы $\|\cdot\|_1$. Это означает, что $(l_1, \|\cdot\|_1) \notin (\mathrm{MET})$.

Используя неравенство $\|x\|_1 \leq \|x\|_E$ для всех $x \in E$ имеем, что последовательность $\{A_n(T)(e_1)\}$ также не является сходящейся относительно нормы $\|\cdot\|_E$. Следовательно, $E \notin (MET)$. $\square$

Теперь приведем другое достаточное условие того, что не включение $E \notin (MET)$ верно.

Утверждение 2.2.2. *Если $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ не сепарабельное вполне симметричное пространство последовательностей, то $E \notin (MET)$.*

Доказательство. Так как $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ не сепарабельное вполне симметричное пространство последовательностей, то существует $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{\xi_n^*\}_{n=1}^{\infty} \in E$ такой, что

$$\xi_n \downarrow 0 \quad \text{и} \quad \|\{\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots\}\|_E \downarrow \alpha > 0. \qquad (2.2.1)$$

Если оператор $T \in DS$ такой, как и в доказательстве утверждения 2.2.1, то $T^k(x) = \{\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{k}, \xi_1, \xi_2, \dots\}$ и $y_n = \{\eta_m^{(n)}\}_{m=1}^{\infty} = \sum_{k=0}^{n-1} T^k(x) =$

$$= \{\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \dots, \xi_1 + \xi_2 + \dots \xi_n, \xi_2 + \xi_3 + \dots \xi_n + \xi_{n+1},$$

$$\xi_3 + \xi_4 + \dots \xi_{n+1} + \xi_{n+2}, \dots, \xi_{m-n+1} + \xi_{m-n+2} + \dots + \xi_m, \dots\},$$

где

$$\eta_m^{(n)} = \xi_{m-n+1} + \xi_{m-n+2} + \dots + \xi_m \quad \text{если} \quad m \geq n$$

и

$$\eta_m^{(n)} = \xi_1 + \xi_2 + \dots \xi_m \quad \text{если} \quad 1 \leq m < n.$$

Поскольку $\xi_n \downarrow 0$ (см. (2.2.1)), то $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$0 \leq \frac{1}{n}\,\eta_m^{(n)} = \frac{1}{n}\,(\xi_{m-n+1} + \xi_{m-n+2} + \cdots + \xi_m) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m}\xi_k \to 0$$

при $n \to \infty$ для любого фиксированного $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, последовательность $\{A_n(T)(x)\}$ сходится к нулю покоординатно.

Предположим теперь, что существует элемент $\widehat{x} \in E$ такой, что $\|A_n(T)(x) - \widehat{x}\|_E \to 0$. Тогда последовательность $\{A_n(T)(x)\}$ сходится к $\widehat{x}$ покоординатно. Следовательно, $\widehat{x} = 0$.

С другой стороны, используя $\xi_n \downarrow 0$, мы имеем, что

$$A_n(T)(x) = \{\frac{1}{n}\,\xi_1, \frac{1}{n}(\xi_1+\xi_2), \ldots, \frac{1}{n}(\xi_1+\xi_2+\ldots\xi_n), \frac{1}{n}(\xi_2+\xi_3+\ldots\xi_n+\xi_{n+1}),$$

$$\frac{1}{n}(\xi_3 + \xi_4 + \ldots \xi_{n+1} + \xi_{n+2}), \ldots, \frac{1}{n}(\xi_{m-n+1} + \xi_{m-n+2} + \cdots + \xi_m), \ldots\} \geq$$

$$\geq \{\overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{n}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots\}.$$

Поэтому из (2.2.1) получим, что

$$\|A_n(T)(x)\|_E \geq \|\{\overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{n}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots\}\|_E \geq \alpha > 0.$$

Следовательно, последовательность $\{A_n(T)(x)\}$ не сходится относительно нормы $\|\cdot\|_E$, что означает $E \notin (MET)$. $\square$

Замечание 2.2.3. *Вариант утверждения 2.2.2 для несепарабельных функциональных симметричных пространств на* $[0, 1]$ *получен в статье [43] (также, см. [45]).*

Таким образом, для включения $E \in (MET)$ необходимо, чтобы вполне симметричное пространство последовательностей $(E, \|\cdot\|_E)$ было сепарабельным и $E \neq l_1$.

Фундаментальная функция симметричного пространства последовательностей $(E, \|\cdot\|_E)$ определяется следующим образом:

$$\varphi_E(n) = \|\{\overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{n}, 0, 0, \ldots\}\|_E, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_E(0) = 0.$$

Ясно, что $\varphi_E(n) > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\varphi_E(n)$ является возрастающей функцией. Известно, что $\frac{\varphi_E(n)}{n}$ является убывающей функцией (см. [34, Chapter II, §4, Theorem 4.7]). В частности, существует предел $\alpha(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi_E(n)}{n}$. Заметим, что $\alpha(l_1) = 1$ и $\alpha(l_p) = 0,\ 1 < p \leqslant \infty$.

Утверждение 2.2.4. *Теоретико-множественное равенство* $E = l_1$ *верно тогда и только тогда, когда* $\alpha(E) > 0$.

Доказательство. Если $E = l_1$ как множества, то нормы $\|\cdot\|_E$ и $\|\cdot\|_{l_1}$ эквивалентны. В частности, $0 < c \cdot n = c \cdot \varphi_{l_1}(n) \leq \varphi_E(n)$ для некоторого $c > 0$ и для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\alpha(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi_E(n)}{n} > 0$.

Предположим теперь, что $\alpha(E) > 0$. Так как $\frac{\varphi_E(n)}{n} \geqslant \alpha(E)$, то $\frac{n}{\varphi_E(n)} \leqslant \frac{1}{\alpha(E)}$ и из [34, Chapter II, §4, Inequality (4.6)] для любого $x^* = x = \{\xi_n\} \in E$ мы имеем, что

$$\|\{\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots\}\|_1 \leqslant \frac{n}{\varphi_E(n)} \cdot \|\{\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots\}\|_E \leq \frac{1}{\alpha(E)} \cdot \|x\|_E < \infty$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $x \in l_1$ и $E = l_1$. □

По теореме 2.1.6, для любого $T \in DS$ и $x \in c_0$ существует элемент $\widehat{x} \in c_0$ такой, что $\|A_n(T)(x) - \widehat{x}\|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому определен линейный оператор $P : c_0 \to c_0$ такой, что $P(x) = \widehat{x}$. Несложно проверить, что $\|P\|_{l_1 \to l_1} \leq 1$ и $\|P(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty$. Следовательно, P единственным образом продолжается до оператора Данфорда-Шварца в l_∞, которого также будем обозначать через P.

Лемма 2.2.5. *Если* $T \in DS$ *и* $x \in c_0$, *то* $(PT)(x) = P(x) = (TP)(x)$.

Доказательство. Так как

$$(I-T)A_n(T) = (I-T)\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}T^k = \frac{I-T^n}{n}\ ,$$

то $\|(I-T)A_n(T)(x)\|_\infty \to 0$.

С другой стороны,

$$TA_n(T)(x) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}T^k(Tx) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} P(T(x)).$$

Следовательно,

$$(I-T)A_n(T)(x) = A_n(T)(x) - TA_n(T)(x) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} P(x) - P(T(x)).$$

Поэтому $(PT)(x) = P(x)$.

Аналогично,

$$(TP)(x) = T(\|\cdot\|_\infty - \lim_{n\to\infty}(A_n(T)(x))) = \|\cdot\|_\infty - \lim_{n\to\infty}T(A_n(T)(x)) =$$

$$\|\cdot\|_\infty - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}T^k(x) = P(x).$$

□

Следствие 2.2.6. *$P^2 = P$.*

Следующая теорема дает критерий для справедливости статистической эргодической теоремы для вполне симметричного пространства последовательностей $(E, \|\cdot\|_E)$.

Теорема 2.2.7. *Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ вполне симметричное пространство последовательностей. Следующие условия эквивалентны:*

(i). $(E, \|\cdot\|_E) \in$ (MET);

(ii). Пространство E сепарабельно и $E \neq l_1$;

(iii). Пространство l_1 плотно в $(E, \|\cdot\|_E)$ и $\alpha(E) = 0$.

Доказательство. Импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ следует из утверждений 2.2.1 и 2.2.2. Импликация $(ii) \Rightarrow (iii)$ следует из утверждения 2.2.4 и [34, Chapter II, S 4, Theorem 4.8].

$(iii) \Rightarrow (i)$. Если $P(x) = x \in E$, то из следствия 2.2.6 имеем

$$A_n(T)(x) = A_n(T)(P(x)) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} P^2(x) = x. \tag{2.2.2}$$

Если $x \in E$ и $y = x - P(x)$, то $P(y) = P(x) - P^2(x) = 0$. Так как E сепарабельное пространство [34, Chapter II, §4, Theorem 4.8], то имеем, что $E \subset c_0$ и $A_n(T)(y) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} 0$ (см. Теорему 2.0.3). Таким образом, из [23, Proposition 2.2], $\|A_n(T)(y)\|_E \to 0$. Теперь используя следствие 2.2.6, равенство (2.2.2) и равенство $A_n(T)(y) = A_n(T)(x) - A_n(T)(P(x))$, мы получим, что

$$\|A_n(T)(x) - P(x)\|_E \to 0.$$

$\square$

Замечание 2.2.8. (a). *Импликация* $(iii) \Rightarrow (i)$ *теоремы 2.2.7 для класса положительных операторов* $T \in DS$ *установлена в [20, Theorem 5.1].*

(b). *Теорема 2 следует из теоремы 2.2.7.*

ГЛАВА 3. ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА БЛУМА-ХАНСОНА В БАНАХОВЫХ РЕШЕТКАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ — бесконечномерное сепарабельное p-выпуклое ($p > 1$) банахово идеальное пространство (БИП) в $s(\mathbb{K})$ (см. предварительные сведения).

Как уже отмечалось во введении, для любого линейного ограниченного оператора T, действующего в БИП $(E, \|\cdot\|_E) \subset s(\mathbb{K})$ сходимость $\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}x - x_0\|_E \to 0$ для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$ и некоторого $x_0 \in E$ всегда влечет слабую сходимость последовательности $\{T^n(x)\}$ в E к элементу x_0. Следующая теорема устанавливает свойство Блума-Хансона для пространства $(E, \|\cdot\|_E)$.

Теорема 3.0.9. *Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ — бесконечномерное сепарабельное банахово идеальное подпространство в $s(\mathbb{K})$. Если $(E, \|\cdot\|_E)$ — p-выпукло с константой p-выпуклости $M^{(p)}(E) = 1$, $p > 1$, тогда для любого линейного сжатия $T : E \to E$ из слабой сходимости в $(E, \|\cdot\|_E)$ последовательности $\{T^n(x)\}$ к элементу $x_0 \in E$ следует сходимость*

$$\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\|_E \to 0$$

для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

Доказательство. Если $T^n(x) \to x_0$ слабо в E, то $T^{n+1}(x) = T(T^n(x)) \to T(x_0)$ слабо и поэтому $T(x_0) = x_0$. В случае $x_0 \neq 0$, заменяем элемент x_0 на $(x - x_0)$, и будем считать, не ограничивая общности, что $T^n(x) \to 0$ слабо. Таким образом, для доказательства утверждения теоремы следует установить, что условие $T^n(x) \to 0$ слабо в E обеспечивает сходимость

$$\|\tfrac{1}{n+1}\textstyle\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x)\|_E \to 0$$

при $n \to \infty$ для любой последовательности $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

Поскольку T — сжатие, то $\|T^{n+1}(x)\|_E \le \|T^n(x)\|_E$, и поэтому предел $\lim_{n\to\infty} \|T^n(x)\|_E$ существует. Если этот предел равен нулю, то утверждение теоремы 3.0.9 очевидно. Предположим, что этот предел равен $\alpha \neq 0$. Заменяя, если необходимо элемент x на элемент $\frac{x}{\alpha}$, можно считать, что $\lim_{n\to\infty} \|T^n(x)\|_E = 1$.

Зафиксируем $\delta > 0$ и выберем натуральное число t так, чтобы выполнялось неравенство $t^{\frac{1}{p}-1} < \frac{\delta}{2}$. Поскольку $1 + 2^p s < 2^p(s+1)$ для всех $s \in \mathbb{N}$, то существует такое $\varepsilon \in (0,1)$, что

$$((1+\varepsilon)^p + 2^p s)^{\frac{1}{p}} < 2(s+1)^{\frac{1}{p}} - (s+1)\varepsilon \tag{3.0.3}$$

для всех $s = 1, \dots, t-1$.

Согласно равенству $\lim_{n\to\infty} \|T^n(x)\|_E = 1$, существует такое $k \in \mathbb{N}$, что верно неравенство

$$\|T^k(x)\|_E < 1 + \varepsilon. \tag{3.0.4}$$

Пусть $e_n = \{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots\} \in E$, где единица стоит на "$n$"-ом месте. Рассмотрим оператор проектирования P_r в E на линейную оболочку $Lin\{e_1, \dots, e_r\}$ элементов $e_1, e_2, \dots, e_r \in E$, т.е.

$$P_r(\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{\xi_1, ..., \xi_r, 0, 0...\} = \sum_{n=1}^{r} \xi_n e_n.$$

Обозначим через I тождественный оператор в E, т.е. $I(x) = x$ для всех $x \in E$. Если $x = \{\xi_n\} \in E$, то

$$|(I - P_r)(x)| = \{0, ..., 0, |\xi_{r+1}|, |\xi_{r+2}|, ...\} \downarrow 0,$$

при $r \to \infty$, и поэтому, из порядковой непрерывности нормы $\|.\|_E$, имеем, что

$$\|(I - P_r)(x)\|_E = \|\{0, ..., 0, |\xi_{r+1}|, |\xi_{r+2}|, ...\}\|_E \downarrow 0.$$

Следовательно, $\|(I - P_r)T^k(x)\|_E \to 0$ при $r \to \infty$, что влечет существование такого $r \in \mathbb{N}$, для которого верно неравенство

$$\|(I - P_r)T^k(x)\|_E < \varepsilon. \tag{3.0.5}$$

Так как $P_r(E) = Lin\{e_1, \dots, e_r\}$ — конечномерное линейное подпространство в E и $T^{k+j}(x) \to 0$ слабо при $j \to \infty$, то существует такое $d \in \mathbb{N}$, что

$$\|P_r T^{k+j}(x)\|_E < \varepsilon \tag{3.0.6}$$

для всех $j \geq d$.

Отметим, что из неравенства $\|(I - P_r)(x)\|_E \leq \|x\|_E$ следует

$$\|I - P_r\|_{E \to E} \leq 1 \tag{3.0.7}$$

Покажем теперь, что

$$\|T^{m_1}(x) + \ldots + T^{m_s}(x)\|_E \leq 2s^{\frac{1}{p}}, \tag{3.0.8}$$

где $k \leq m_1 < m_2 < \ldots < m_s$, $s \leq t$ и $m_{i+1} - m_i \geq d$ для всех $i = 1, \dots, s-1$.

Докажем неравенство (3.0.8), используя индукцию по s. Для $s = 1$ неравенство (3.0.8) верно в силу выбора числа ε. Предположим, что неравенство (3.0.8) верно для $s < t$ и последовательность $m_1, m_2, \dots, m_{s+1}$ удовлетворяет указанным выше требованиям. Тогда

$$\|T^{m_1}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}}(x)\|_E = \|T^{m_1-k}(T^k(x) + T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots +$$

$$+T^{m_{s+1}-m_1+k}(x))\|_E \leq \|T^k x + T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x)\|_E \leq$$

$$\leq \|P_r T^k x + (I - P_r)(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x))\|_E +$$

$$+\|(I - P_r)T^k(x)\|_E + \|P_r(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x))\|_E.$$

В силу неравенств (3.0.5) и (3.0.6) имеем, что

$$\|(I - P_r)T^k(x)\|_E + \|P_r(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x)\|_E < (s+1)\varepsilon.$$

Поскольку, банахова решетка E является p-выпуклым с константой p-выпуклости $M^{(p)}(E) = 1$, то E удовлетворяет верхней p-оценке с той же константой, т.е.

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i\|_E \leq (\sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_E^p)^{\frac{1}{p}}$$

в случае, когда элементы $\{a_i\}_{i=1}^n \subset E$ попарно дизъюнктны.

Так как элементы $(I - P_r)(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x))$ и $P_r T^k(x)$ попарно дизъюнктны, то используя предположение индукции (3.0.8) и неравенства (3.0.4), (3.0.7), получим следующую оценку:

$$\|P_r T^k(x) + (I-P_r)(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x))\|_E \leq (\|P_r T^k(x)\|_E^p + \|(I - P_r)(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x))\|_E^p)^{\frac{1}{p}} \leq ((1+\varepsilon)^p + 2^p s)^{\frac{1}{p}}.$$

Следовательно, в силу неравенства (3.0.3), имеем, что

$$\|T^{m_1}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}}(x)\|_E \leq ((1+\varepsilon)^p + 2^p s)^{\frac{1}{p}} + (s+1)\varepsilon < 2(s+1)^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом, неравенство (3.0.8) верно для каждого $s \leq t$.

Пусть $\{n_i\}_{i=0}^{\infty}$ — произвольная строго возрастающая последовательность натуральных чисел и пусть $N > k$ достаточно большое натуральное число. Тогда $N = k + mt + r$, где $0 \leq r < t$ и m натуральное число, для которого $m \geq d$. Используя доказанное неравенство (3.0.8), получим, что

$$\|\sum_{j=0}^{N} T^{n_j}(x)\|_E \leq \|\sum_{j=0}^{k+r} T^{n_j}(x)\|_E + \sum_{s=1}^{m} \|\sum_{j=0}^{t-1} T^{n_{k+r+s+jm}}(x)\|_E \leq (k+r+1)\|x\|_E + m \cdot 2 \cdot t^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{N+1}\|\sum_{j=0}^{N} T^{n_j}(x)\|_E \leq \frac{(k+r+1)\|x\|_E}{N+1} + \frac{2mt^{\frac{1}{p}}}{tm} = \frac{(k+r+1)\|x\|_E}{N+1} + 2t^{\frac{1}{p}-1}$$

и согласно выбору t,

$$\overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\|\sum_{j=0}^{N} T^{n_j}(x)\|_E \leq 2t^{\frac{1}{p}-1} < \delta.$$

Так как $\delta > 0$ произвольное, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\| \sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x)\|_E = 0.$$

$\square$

Нетрудно увидеть, что всякое симметричное пространство последовательностей E является банаховым идеальным пространством в $s(\mathbb{K})$. Поэтому, при $1 < q \leq p < \infty$ из теорем 1.5.5 (iii) и 1.5.6 $a), (ii)$ следует, что $l_{p,q}$ — бесконечномерное сепарабельное q-выпуклое банахово идеальное пространство в $s(\mathbb{K})$ с константой q-выпуклости $M^{(q)}(l_{p,q}) = 1$. Следовательно из теоремы 3.0.9 следует следующее

Следствие 3.0.10. *Если $1 < q \leq p < \infty$, то для любого линейного сжатия*

$$T : (l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q}) \to (l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$$

из слабой сходимости в $l_{p,q}$ последовательности $\{T^n(x)\}$ к элементу $x_0 \in l_{p,q}$ следует сходимость

$$\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\|_{p,q} \to 0$$

для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

Также из теоремы 3.0.9 следует следующее следствие.

Следствие 3.0.11. *Если $1 < p < q < \infty$, то в $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{(p,q)})$ существует такая эквивалентная норма $\|\cdot\|_{[p,q]}$, что для любого линейного сжатия*

$$T : (l_{p,q}, \|\cdot\|_{[p,q]}) \to (l_{p,q}, \|\cdot\|_{[p,q]})$$

слабая сходимость последовательности $\{T^n(x)\}$ к элементу $x_0 \in l_{p,q}$ влечет сходимость

$$\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\|_{[p,q]} \to 0$$

для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

Доказательство. Пусть $1 < p < q < \infty$. Согласно теореме 1.5.10, для числа $1 < r_0 < p$ в $l_{p,q}$ существует такая норма $\|\cdot\|_{[p,q]}$, эквивалентная норме $\|\cdot\|_{(p,q)}$, что $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{[p,q]})$ есть r_0-выпуклое симметричное пространство с константой r_0—выпуклости $M^{(r_0)}((l_{p,q}, \|\cdot\|_{[p,q]})) = 1$. Повторяя теперь доказательство теоремы 3.0.9, заменив q на r_0, получим,

$$\|\tfrac{1}{n+1}\textstyle\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x)\|_{[p,q]} \to 0$$

при $n \to \infty$ для любой последовательности $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$. □

Замечание 3.0.12. *Из следствий 3.0.10 и 3.0.11 следует теорема 6.*

ГЛАВА 4. ИНДИВИДУАЛЬНАЯ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ В ИДЕАЛАХ КОМПАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В этой главе дается полное описание вполне симметричных идеалов компактных операторов, где верны варианты индивидуальной и статистической эргодических теорем для произвольных операторов Данфорда - Шварца.

Пусть $(H, (\cdot,\cdot))$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathcal{B}(H)$ — C^*-алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H. Пусть $T : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ линейный ограниченный оператор. Оператор T называется оператором Данфорда-Шварца (запись: $T \in DS$), если

1. $\|T\|_{\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(H)} \leq 1$;
2. $T(C_1) \subset C_1,\ \|T\|_{C_1\to C_1} \leq 1$.

Если $T \in DS$ и $T \geq 0$, т.е. $T(x) \geq 0$ для всех $x \geq 0$, $x \in \mathcal{B}(H)$, где $x \geq 0$ означает, что $\langle x(\xi), \xi\rangle \geq 0$ для любого $\xi \in H$, то говорим, что T — положительный оператор Данфорда-Шварца (запись: $T \in DS^+$).

Рассмотрим оператор $A_n(T) : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$, $A_n(T)(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k x$ для всех $x \in \mathcal{B}(H)$.

Будем говорить, что оператор y мажорирует оператора x в смысле Hardy-Littlewood-Polya, если $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \prec\prec \{s_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ (см. Гл. 2, §2.6). В этом случае, будем писать, что $x \prec\prec_{\mathcal{K}(H)} y$. Мажоризация $\prec\prec$ задает порядок Hardy-Littlewood-Polya в $\mathcal{K}(H)$ и он обладает следующими свойствами.

Утверждение 4.0.13. (i). *Если $T \in DS^+$, то $A_n(T) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k \in DS^+$ для любого $n \in \mathbb{N}$;*

(ii). *Если $T \in DS^+$ и $x \in \mathcal{B}(H)$, то $A_n(T)(x) \prec\prec_{\mathcal{K}(H)} x$;*

(iii). Если $y_k \in \mathcal{K}(H),\ k \in \mathbb{N}$, $y \in \mathcal{K}(H)$, $\|y_k - y\|_\infty \to 0$ *при* $k \to \infty$ *и* $y_k \prec\prec_{\mathcal{K}(H)} x \in \mathcal{K}(H)$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда* $y \prec\prec_{\mathcal{K}(H)} x$.

(iv). Для любых $x, y \in \mathcal{K}(H)$ *верно неравенство* $\{s_n(x \pm y)\}_{n=1}^\infty \prec\prec \{s_n(x)\}_{n=1}^\infty + \{s_n(y)\}_{n=1}^\infty$.

Доказательство. (i). Если $S, Q \in DS^+$ и $\lambda \geq 0$, то очевидно, что $S + Q,\ \lambda S,\ SQ \in DS^+$. Следовательно, для каждого оператора $T \in DS^+$ верно включение $A_n(T) = \frac{1}{n+1}(I + T + T^2 + \ldots + T^{n-1} + T^n) \in DS^+$ для любого $n \in \mathbb{N}$, где $I(x) = x$ для всех $x \in \mathcal{B}(H)$.

(ii). Пусть $T \in DS^+$ и $x \in \mathcal{B}(H)$. Из [25, Proposition 2.1] известно, что $Sx \prec\prec_{\mathcal{K}(H)} x$ для каждого оператора $S \in DS^+$. Поэтому, из пункта (i) следует, что $A_n(T)(x) \prec\prec_{\mathcal{K}(H)} x$.

(iii). Пусть $y_k, y, x \in \mathcal{K}(H),\ k \in \mathbb{N}$, $\|y_k - y\|_\infty \to 0$ при $k \to \infty$ и $y_k \prec\prec_{\mathcal{K}(H)} x$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Поскольку $y_k \prec\prec_{\mathcal{K}(H)} x$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то $\sum_{n=1}^m s_n(y_k) \leq \sum_{n=1}^m s_n(x)$ для каждого $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$.

Из Следствия 2.3 книги [48, Гл. II, §2, п.3] имеем, что

$$0 \leq |s_n(y_k) - s_n(y)| \leq \|y_k - y\|_\infty \to 0$$

при $k \to \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем сходимость $s_n(y_k) \to s_n(y)$ при $k \to \infty$. Поэтому, $\sum_{n=1}^m s_n(y_k) \to \sum_{n=1}^m s_n(y)$ при $k \to \infty$ для каждого $m \in \mathbb{N}$, т.е. $\sum_{n=1}^m s_n(y) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^m s_n(y_k)$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^m s_n(y) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^m s_n(y_k) \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^m s_n(x) = \sum_{n=1}^m s_n(x)$$

для всех $m \in \mathbb{N}$. Последнее означает, что $y \prec\prec_{\mathcal{K}(H)} x$.

(iv). Пусть $x, y \in \mathcal{K}(H)$. Из [48, Гл. II, §4, Лемма 4.2] известно, что $\sum_{k=1}^m s_k(x \pm y) \leq \sum_{k=1}^m s_k(x) + \sum_{k=1}^m s_k(y)$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Следовательно, $\{s_n(x \pm y)\}_{n=1}^{\infty} \prec\prec \{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty} + \{s_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$. $\square$

Нам еще понадобится также следующее важное свойство порядка Hardy-Littlewood-Polya [23, Proposition 2.2].

Утверждение 4.0.14. *Пусть* $(E, \|\cdot\|_E)$ *— сепарабельное симметричное пространство последовательностей и* $y_k \in C_E,\ k \in \mathbb{N},\ \|y_k\|_\infty \to 0$ *при* $k \to \infty$, $y_k \prec\prec_{\mathcal{K}(H)} x \in C_E$. *Тогда* $\|y_k\|_{C_E} \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Мы используем также следующее утверждение [47, Proposition 1].

Утверждение 4.0.15. *Пусть* $T : \mathcal{F}(H) \to C_1$ *линейный положительный оператор, для которого* $T(e) \leq \mathbb{1}$, *(где* $\mathbb{1}(\xi) = \xi$ *для любого* $\xi \in H$*), и* $tr(T(e)) \leq tr(e)$ *для каждого проектора* $e \in \mathcal{F}(H)$. *Тогда*

1. $\|T(x)\|_p \leq \|x\|_p$ *для всех* $x = x^* \in \mathcal{F}$ *и* $1 \leq p \leq \infty$;

2. *Существует единственное непрерывное продолжение* $T : C_p \to C_p$, $1 \leq p < \infty$, *и единственное* $\sigma(\mathcal{B}(H), C_1)$*-непрерывное продолжение* $T : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$;

3. *Сопряженный оператор* $T^* : \mathcal{B}(H) \to C_1$ *имеет следующие свойства:* $T^*(x) \geq 0\ \forall\ x \geq 0$, $T^*(x) \leq \mathbb{1}\ \forall\ 0 \leq x \leq \mathbb{1}$, $tr(T^*(x)) \leq tr(x)$ *если* $x \geq 0$, $tr(yT^*(x)) = tr(T(y)x)$, *если* $y \in C_1$, $x \in \mathcal{B}(H)$, *либо* $x \in C_1$, $y \in \mathcal{B}(H)$.

4.1 Индивидуальная эргодическая теорема в идеалах компактных операторов

В этом параграфе доказывается вариант индивидуальной эргодической теоремы для произвольных вполне симметричных идеалов компактных операторов. Сначала приведем и докажем следующий аналог максимальной эргодической теоремы для некоммутативного пространства $C_1(H)$.

Теорема 4.1.1. *Пусть* $T \in DS^+$. *Если* $x \in C_1$ *и* $\varepsilon > 0$, *то существует такой проектор* $e \in \mathcal{B}(H)$, *что*

$$\|eA_k(T)(x)e\|_\infty < 4\varepsilon \ \forall k \in N \ \text{и} \ tr(\mathbb{1} - e) = tr(e^\perp) \le \frac{\|x\|_1}{4\varepsilon}.$$

Доказательство. Пусть сначала $x \ge 0$ и n—фиксированное натуральное число. Рассмотрим

$$K = \{(x_1, x_2, \dots x_n) : x_i \in \mathcal{B}_+(H), i = \overline{1,n}, \sum_{i=1}^n x_i \le \mathbb{1}\}.$$

и определим функционал g на K следующим образом:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = tr(xx_1) + tr((x + T(x))x_2) + \ldots + tr((x + \ldots + T^{n-1}(x))x_n) -$$

$$-\varepsilon(tr(x_1) + 2tr(x_2) + \ldots + ntr(x_n)), \ (x_1, x_2, \dots x_n) \in K.$$

Тогда K будет $\sigma(\mathcal{B}(H), C_1)$-компактным множеством в $\mathcal{B}(H) \times \mathcal{B}(H) \times \ldots \times \mathcal{B}(H)$, и g—$\sigma(\mathcal{B}(H), C_1)$-непрерывен сверху в K, следовательно g достигает своего конечного максимума при некотором наборе $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_n) \in K$.

Для этого набора, докажем, что

$$tr((x + \ldots + T^{k-1}(x))y) \le k \cdot \varepsilon \cdot tr(y) \tag{4.1.1}$$

для всех $1 \le k \le n$, $y \in \mathcal{B}_+(H)$, $y \le \mathbb{1} - \sum_{r=1}^n \widehat{x}_r$.

Предположим, что $tr((x + \ldots + T^{k-1}(x))y) > k \cdot \varepsilon \cdot tr(y)$ для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $y \in \mathcal{B}_+(H)$, $y \le \mathbb{1} - \sum_{r=1}^n \widehat{x}_r$. Тогда рассмотрим элемент $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_k + y, \dots, \widehat{x}_n)$. Так как $\widehat{x}_1 + \widehat{x}_2 + \ldots + \widehat{x}_k + y + \ldots + \widehat{x}_n = y + \sum_{r=1}^n \widehat{x}_r \le \mathbb{1} - \sum_{r=1}^n \widehat{x}_r + \sum_{r=1}^n \widehat{x}_r = \mathbb{1}$, то $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_k + y, \dots, \widehat{x}_n) \in K$.

Рассмотрим теперь $g(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_k + y, \ldots, \widehat{x}_n) = g(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_n) + tr((x + \ldots + T^{k-1}(x))y) - k \cdot \varepsilon \cdot tr(y) > g(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_n)$, что противоречит нашему выбору $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_n) \in K$.

Также, докажем, что

$$tr(x \sum_{r=1}^{n} \widehat{x}_r) \geq \varepsilon \cdot tr(\sum_{r=1}^{n} \widehat{x}_r). \tag{4.1.2}$$

Рассмотрим $(T^*(\widehat{x}_2), T^*(\widehat{x}_3), \ldots, T^*(\widehat{x}_n), 0)$ (свойства сопряженного оператора T^* см. в утверждении 4.0.15).

Так как $T^*(\widehat{x}_2) + T^*(\widehat{x}_3) + \ldots + T^*(\widehat{x}_n) = T^*(\widehat{x}_2 + \widehat{x}_3 + \ldots + \widehat{x}_n) \leq T^*(\mathbb{1}) \leq \mathbb{1}$, то $(T^*(\widehat{x}_2), T^*(\widehat{x}_3), \ldots, T^*(\widehat{x}_n), 0) \in K$. Следовательно,

$$g(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_n) > g(T^*(\widehat{x}_2), T^*(\widehat{x}_3), \ldots, T^*(\widehat{x}_n), 0).$$

С другой стороны,

$$g(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_n) = tr(x \sum_{r=1}^{n} \widehat{x}_r) - \varepsilon \cdot tr(\sum_{r=1}^{n} \widehat{x}_r) + tr(T(x)\widehat{x}_2) + \ldots +$$
$$+ tr((T(x) + \ldots + T^{n-1}(x))\widehat{x}_n) - \varepsilon \cdot tr(\widehat{x}_2 + \ldots + (n-1)\widehat{x}_n),$$

и

$$g(T^*(\widehat{x}_2), T^*(\widehat{x}_3), \ldots, T^*(\widehat{x}_n), 0) = tr(xT^*(\widehat{x}_2)) + \ldots +$$
$$+ tr((x + \ldots + T^{n-1}(x))T^*(\widehat{x}_n)) - \varepsilon \cdot tr(T^*(\widehat{x}_2) + \ldots + (n-1)T^*(\widehat{x}_n)),$$

следовательно, $tr(x \sum_{r=1}^{n} \widehat{x}_r) - \varepsilon \cdot tr(\sum_{r=1}^{n} \widehat{x}_r) \geq \varepsilon \cdot (tr(\widehat{x}_2) - tr(T^*(\widehat{x}_2)) + \ldots + (n-1)(tr(\widehat{x}_n)) - tr(T^*(\widehat{x}_n))) \geq 0$ в силу утверждения 4.0.15.

Пусть теперь $z = \mathbb{1} - \sum_{r=1}^{n} \widehat{x}_r = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_{\lambda_i} - e_{\lambda_{i-1}}) = \int_0^1 \lambda dP(\lambda)$—спектральное разложение оператора $\mathbb{1} - \sum_{r=1}^{n} \widehat{x}_r$, т.е. $P(\lambda) = \{z \leq \lambda \mathbb{1}\}$, в частности, $zP(\lambda) \leq \lambda P(\mathbb{1})$ и пусть $u \in \mathcal{B}_+(H),\ u \leq \mathbb{1}$.

Если положим $u_m = (\mathbb{1} - P(m^{-1}))u(\mathbb{1} - P(m^{-1}))$ для всех $m \in N$, то имеем

$$0 \leq u_m \leq \mathbb{1} - P(m^{-1}) \leq m(\mathbb{1} - \sum_{r=1}^{n} \widehat{x}_r).$$

Следовательно, из (4.1.1) имеем, что $tr((x+\ldots+T^{k-1}(x))u_m)\leq k\cdot\varepsilon\cdot tr(u_m)$ при $1\leq k\leq n$.

Переходя к пределу $m\to\infty$, и обозначив $e_n=\mathbb{1}-P(0)$, имеем, что

$$tr((e_n(x+\ldots+T^{k-1}(x))e_n)u)=tr((x+\ldots+T^{k-1}(x))e_n u e_n)\leq$$

$$\leq k\cdot\varepsilon\cdot tr(e_n u e_n)=k\cdot\varepsilon\cdot tr(e_n u),$$

для всех $k=\overline{1,n}$.

Следовательно,

$$tr(k\cdot\varepsilon\cdot e_n u-(e_n(x+\ldots+T^{k-1}(x))e_n)u)=$$

$$=tr((k\cdot\varepsilon\cdot e_n-(e_n(x+\ldots+T^{k-1}(x))e_n))u)\geq 0$$

и в силу свойств следа,

$$k\cdot\varepsilon\cdot e_n-(e_n(x+\ldots+T^{k-1}(x))e_n)\geq 0,$$

т.е.

$$e_n(x+\ldots+T^{k-1}(x))e_n\leq k\cdot\varepsilon\cdot e_n.$$

Из последнего неравенства получим, что $e_nA_k(T,x)e_n\leq\varepsilon e_n$ при $1\leq k\leq n$.

Также, положив $k=1$ и $u=\sum_{r=1}^{n}\widehat{x}_r$ имеем

$$tr(xe_n\sum_{r=1}^{n}\widehat{x}_r)\leq\varepsilon\cdot tr(e_n\sum_{r=1}^{n}\widehat{x}_r),$$

что вместе с неравенством (4.1.2) дает

$$tr(x(\mathbb{1}-e_n)\sum_{r=1}^{n}\widehat{x}_r)\geq\varepsilon\cdot tr((\mathbb{1}-e_n)\sum_{r=1}^{n}\widehat{x}_r),$$

и так как

$$(\mathbb{1}-e_n)\sum_{r=1}^{n}\widehat{x}_r=P(0)\sum_{r=1}^{n}\widehat{x}_r=P(0)=\mathbb{1}-e_n,$$

то

$$tr(x(\mathbb{1}-e_n)) \geq \varepsilon \cdot tr(\mathbb{1}-e_n).$$

Так как замкнутый единичный шар слабо секвенциально компактен в $\mathcal{B}(H)$ и e_n принадлежит единичному шару для всех $n \in N$, то существует подпоследовательность $e_{n(r)}$, которая сходится к некоторому $w \in \mathcal{B}(H)$, $0 \leq w \leq \mathbb{1}$, в слабой операторной топологии. Тогда для любого k, $(A_k(T)(x))^{1/2}e_{n(r)} \to (A_k(T)(x))^{1/2}w$ при $r \to \infty$ в слабой операторной топологии. Если же $\xi \in H$ и $\eta \in \mathcal{D}((A_k(T)(x))^{1/2})$, то

$$((A_k(T)(x))^{1/2}e_{n(r)}(\xi), \eta) = (e_{n(r)}(\xi), (A_k(T)(x))^{1/2}(\eta)) \to$$

$$\to (w(x), (A_k(T)(x))^{1/2}(\eta))$$

с

$$|(w(x), (A_k(T)(x))^{1/2}(\eta))| = \lim_{r\to\infty} |((A_k(T)(x))^{1/2}e_{n(r)}(\xi), \eta)| \leq \varepsilon^{1/2} \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\|,$$

так как $\|A_k(T)(x)e_{n(r)}\|_\infty = \|e_{n(r)}A_k(T)(x)e_{n(r)}\|_\infty^{1/2} \leq \varepsilon^{1/2}$, если $n_r \geq k$. Таким образом, $w(\xi) \in (D)((A_k(T)(x))^{1/2})$ и

$$((A_k(T)(x)w)(\xi), \eta) = (w(\xi), (A_k(T)(x))(\eta)) = \lim_{r\to\infty}((A_k(T)(x)e_{n(r)})(\xi), \eta),$$

что влечет

$$((wA_k(T,x)w)(\xi), \xi) = \|((A_k(T)(x))^{1/2}w)(\xi)\|^2 \leq$$

$$\leq \varliminf_{r\to\infty} \|((A_k(T)(x))^{1/2}e_{n(r)})(\xi)\|^2 =$$

$$= \varliminf_{r\to\infty}((e_{n(r)}A_k(T)(x)e_{n(r)})(\xi), \xi) \leq \lim_{r\to\infty} \varepsilon(e_{n(r)}(\xi), \xi) = \varepsilon(w(\xi), \xi).$$

Следовательно, $wA_k(T,x)w \leq \varepsilon w$ для всех $k \in N$.

Пусть теперь $w = \int_0^1 \lambda dQ(\lambda)$ — спектральное разложение оператора w, и пусть

$$e = \mathbb{1} - Q(\frac{1}{2}), \;\; u = \int_{\frac{1}{2}}^1 \lambda^{-1} dQ(\lambda).$$

Тогда для любого k имеем

$$0 \leq eA_k(T,x)e = uwA_k(T,x)wu \leq \varepsilon uwu = \varepsilon u \leq 2\varepsilon \cdot e,$$

и так как $\mathbb{1} - e = Q(1/2) \leq 2(\mathbb{1} - w)$,

$$tr(\mathbb{1} - e) \leq 2tr(\mathbb{1} - w) \leq \varliminf_{r\to\infty} tr(\mathbb{1} - e_{n(r)}) \leq 2\varepsilon^{-1} tr(x).$$

Предположим теперь, что x не является положительным оператором в $C_1(H)$. Тогда $x = x_1 + ix_2$, где $x_1,\ x_2 \in C_1(H)$ и $x_1^* = x_1,\ x_2^* = x_2$. Далее, выберем проектор $e \in \mathcal{B}(H)$ такой, что $eA_k(T, |x_1| + |x_2|)e \leq 2\varepsilon \cdot e$ для всех k и $tr(\mathbb{1} - e) \leq 2\varepsilon^{-1} tr(|x_1| + |x_2|)$. Следовательно, так как $-eA_k(T,|x_1|)e \leq eA_k(T,x_1)e \leq eA_k(T,|x_1|)e$, и аналогично для $|x_2|$, то имеем, что

$$\|eA_k(T,x)e\|_\infty \leq \|eA_k(T,x_1)e\|_\infty + \|eA_k(T,x_2)e\|_\infty \leq 4\varepsilon$$

для всех k.

И поскольку $tr(|x_1|), tr(|x_2|) \leq tr(|x|)$, то $tr(\mathbb{1} - e) \leq 4\varepsilon^{-1} tr(|x|)$. $\square$

Пусть теперь $T \in DS^+$. Докажем следующее утверждение.

Утверждение 4.1.2. *$C_2(H) = U \oplus \overline{V}$, где $U = \{x \in C_2(H) : T(x) = x\}$ и $V = \{x - T(x) : x \in C_2(H)\}$.*

Доказательство. Так как T линейный оператор, то очевидно, что U является линейным подпространством в $C_2(H)$. Покажем, что U есть замкнутое линейное подпространство в $C_2(H)$. Действительно, если $x \in \overline{U}$, то существует последовательность $\{x_n\} \subset U$, что $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x$. Поскольку T сжатие в $C_2(H)$, то T—непрерывный в $C_2(H)$, т.е. $T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} T(x)$. С другой стороны, $T(x_n) = x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x$. В силу единственности предела по норме имеем, что $T(x) = x$. Следовательно U замкнутое подмножество в $C_2(H)$.

Известно [48], что $C_2(H)$—гильбертово пространство относительно скалярного произведения $\langle x, y\rangle = tr(x\cdot y^*),\ x, y \in C_2(H)$. Если докажем, что $V^\perp = U$, то в силу теоремы о разложении гильбертова пространства в прямую сумму замкнутого подпространства и его ортогонального дополнения имеем, что $C_2(H) = U \oplus \overline{V}$. Если $u \in V^\perp$, то

$$0 = \langle u, T(v) - v) = \langle u, T(v)\rangle - \langle y, v\rangle = \langle T^*(u), v\rangle - \langle u, v\rangle = \langle T^*(u) - u, v\rangle$$

для всех $v \in C_2(H)$, следовательно $T^*(u) = u$. Так как $T \in DS^+$, то T действует как сжатие в $C_2(H)$, следовательно получим, что

$$\|T(u) - u\|_2^2 = \langle T(u) - u, T(u) - u\rangle = \|T(u)\|_2^2 - \|u\|_2^2 \leq 0, \qquad (4.1.3)$$

что означает $T(u) = u$. Таким образом, $V^\perp \subset U$. Обратно, если $u \in U$, то из того, что T^* также сжатие в $C_2(H)$, заменяя T на T^* в (4.1.3) мы получим, что $T^*(u) = u$. Следовательно, $u \in V^\perp$, то есть, $V^\perp = U$, и наконец, $U \oplus \overline{V} = C_2(H)$. □

Следствие 4.1.3. *$U \oplus V$ плотно в $C_2(H)$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ и $x \in C_2(H)$ существует $u \in U \oplus V$, что $x = u + w$, где $w = x - u$, $\|w\|_2 < \varepsilon$.*

Пусть теперь $U = \{x \in C_2(H) : T(x) = x\}$, $V = \{x - T(x) : x \in C_2(H)\}$ и P — оператор ортогонального проектирования на U. Из утверждения 4.0.15 следует, что P имеет единственное непрерывное продолжение (продолжение также обозначим через P) $P : C_1 \to C_1$, и единственное $\sigma(\mathcal{B}(H), C_1)$-непрерывное продолжение $P : \mathcal{K}(H) \to \mathcal{K}(H)$ такое, что $tr(P(x)y) = tr(xP(y))$, $x \in C_1(H)$, $y \in \mathcal{K}(H)$, и верны следующие свойства для оператора P.

Утверждение 4.1.4. *(i). $P = P^2 = P^* = TP = PT = T^*P = PT^*$ на $C_2(H)$;*

(ii). $\|A_k(T)(x) - P(x)\|_2 \to 0$ *при* $k \to \infty$ *для всех* $x \in U \oplus V$, *следовательно, для всех* $x \in C_2(H)$;

(iii). Для любого $x = x^* \in C_1(H) \subset C_2(H)$ *верны неравенства* $\|P(x)\|_1 \leq \|x\|_1$ *и* $\|P(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty$. *Если* $x \in C_1(H)$ *не является самомопряженным, то имеем* $\|P(x)\|_1 \leq 2\|x\|_1$ *и* $\|P(x)\|_\infty \leq 2\|x\|_\infty$.

(iv). $\|A_k(T)(x) - P(x)\|_\infty \to 0$ *при* $k \to \infty$ *для всех* $x \in U \oplus V$;

(v). $\|P(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ *для всех* $x \in \mathcal{K}(H)$.

Доказательство. (i). Равенства $P = P^2 = P^*$ очевидны для оператора проектирования P в гильбертовом пространстве $C_2(H)$. Из утверждения 4.1.2 для любого $x \in C_2(H)$ имеем разложение $x = u + v$, где $u \in U$ и $v \in \overline{V}$. Тогда $TP(x) = T(P(x)) = T(u) = u = P(x)$, $PT(x) = P(T(u+v)) = P(T(u) + (T(v) - v) + v) = P(u) + P(T(v) - v) + P(v) = P(u) = P(x)$ для всех $x \in C_2(H)$. Следовательно, $TP = PT = P$. Последние равенства непосредственно получаются из свойств сопраженного оператора в гильбертовом пространстве $C_2(H)$.

(ii). Если $x = u + v - T(v) \in U \oplus V$, где $u \in U$ и $v \in C_2$, то $\|A_k(T)(x) - P(x)\|_2 = \|A_k(T)(u + v - T(v)) - P(x)\|_2 = \|A_k(T)(u) + A_k(T)(v) - A_k(T)(Tv) - u\|_2 = \|u + \frac{v - T^k(v)}{k} - u\|_2 = \|\frac{v-T^k(v)}{k}\|_2 \leq \frac{2\|v\|_2}{k} \to 0$ при $k \to \infty$. В силу следствия 4.1.3 $U \oplus V$ плотно в $C_2(H)$, следовательно $\|A_k(T)(x) - P(x)\|_2 \to 0$ при $k \to \infty$ для всех $x \in C_2(H)$.

(iii). Для $x = x^* \in C_1(H) \subset C_2(H)$ из пункта (i) настоящего утверждения имеем, что $\|P(x)\|_1 = \|P(T(x))\|_1 \leq \|P\|_{C_1(H) \to C_1(H)} \|T(x)\|_1 \leq \|x\|_1$.

(iv). В силу пункта (ii) настоящего утверждения имеем, что $\|A_k(T)(x) - P(x)\|_\infty \leq \|A_k(T)(x) - P(x)\|_2 \to 0$ при $k \to \infty$.

(v). Из пункта (iv) следует, что $\|A_k(T)(x) - P(x)\|_\infty \to 0$ при $k \to \infty$ для всех $x \in \mathcal{F}(H)$. Так как $T \in DS^+$, то $\|A_k(T)(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, в силу свойств предела имеем, что $\|P(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ для любого $x \in \mathcal{F}(H)$. Поскольку $\mathcal{F}(H)$ плотно в $\mathcal{K}(H)$ по норме $\|\cdot\|_\infty$, то $\|P(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ для всех $x \in \mathcal{K}(H)$ $\square$

Далее нам понадобится следующая лемма, утверждающая всюду плотность $U \oplus V$ в $C_1(H)$.

Лемма 4.1.5. *Для любого $\varepsilon > 0$ каждый элемент $x \in C_1(H)$ имеет вид $x = b+c+d$, где $b \in U \oplus V$, $c \in \mathcal{K}(H)$, $d \in \mathcal{F}_1(H)$, $\|c\|_\infty \leq \varepsilon^2$, $\|d\|_1 < \varepsilon^2$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано и $x \in C_1(H) \subset C_2(H)$. Тогда из следствия 4.1.3 имеем, что $x = b + w$, где $b \in U \oplus V$, $w \in C_2(H)$ и

$$\|w\|_2 < \varepsilon^2. \tag{4.1.4}$$

Пусть $w = u|w|$ — полярное разложение оператора $w \in C_2(H)$. Так как $|w|$ — компактный самосопряженный оператор, то для него верна спектральная теорема, т.е.

$$|w| = \sum_{n=1}^{M} s_n(w)P_n, \tag{4.1.5}$$

где $s_n(w)$–собственные значения для $|w|$, $s_1(w) \geq s_2(w) \geq \ldots$, P_n— оператор ортогонального проектирования на $N(s_n(w), |w|) = \{\xi \in H : |w|(\xi) = s_n\xi\}$, $n = 1, 2, \ldots, M$, $M \in \mathbb{N}$, либо $M = \infty$.

Выберем минимальный номер $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ так, что $s_n(w) < \varepsilon^2$ для всех $n > n(\varepsilon)$. Тогда $1 \leq \frac{s_n(w)}{\varepsilon^2}$ для любого $n = 1, \ldots, n(\varepsilon)$.

Рассмотрим операторы $d = u\sum_{n=1}^{n(\varepsilon)} s_n(w)P_n \in \mathcal{F}(H)$, $c = u\sum_{n=n(\varepsilon)+1}^{M} s_n(w)P_n \in \mathcal{K}(H)$ (если $n(\varepsilon) \geq M$, то положим $c = 0$). Следовательно имеем, что $w = d + c$ и $\|c\|_\infty = s_{n(\varepsilon)+1}(w) < \varepsilon^2$. С другой стороны в силу неравенства (4.1.4) имеем

$$\|d\|_1 = \sum_{n=1}^{n(\varepsilon)} s_n(w) \leq \sum_{n=1}^{n(\varepsilon)} \frac{s_n^2(w)}{\varepsilon^2} \leq \frac{\|w\|_2^2}{\varepsilon^2} < \frac{\varepsilon^4}{\varepsilon^2} = \varepsilon^2.$$

Таким образом, имеем представление $x = b + c + d$, где $b \in U \oplus V$, $c \in \mathcal{K}(H)$, $d \in \mathcal{F}(H)$, $\|c\|_\infty \leq \varepsilon^2$, $\|d\|_1 < \varepsilon^2$. $\square$

Следствие 4.1.6. *Для любого $x \in C_1(H)$ верно равенство $x - P(x) = b - P(b) + c - P(c) + d - P(d)$, где $b - P(b) \in V$, $\|c - P(c)\|_\infty \leq 3\varepsilon^2$, $\|d - P(d)\|_1 < 3\varepsilon^2$,*

Доказательство. Действительно, для любого $x \in C_1(H)$ имеем $x - P(x) = b + c + d - P(b + c + d) = b - P(b) + c - P(c) + d - P(d) = b - P(b) + c - P(c) + d - P(d)$. Из утверждения 4.1.4 следует, что $T(b - P(b)) - (b - P(b)) = T(b) - T(P(b)) - b + P(b) = T(b) - P(b) - b + P(b) = T(b) - b \in V$ и $\|c - P(c)\|_\infty \leq \|c\|_\infty + \|P(c)\|_\infty \leq 3\|c\|_\infty \leq 3\varepsilon^2$, $\|d - P(d)\|_1 \leq \|d\|_1 + \|P(d)\|_1 \leq 3\|d\|_1 < 3\varepsilon^2$. $\square$

Теорема 4.1.7. *Если $T \in DS^+$ и $x \in C_1(H)$, то $\|A_k(T)(x) - P(x)\|_\infty \to 0$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon \in (0, 1)$ и пусть $x \in C_1(H)$. Тогда в силу леммы 4.1.6 имеем, что $x - P(x) = b - P(b) + c - P(c) + d - P(d)$, где $b - P(b) \in V$, $\|c - P(c)\|_\infty \leq 3\varepsilon^2$, $\|d - P(d)\|_1 < 3\varepsilon^2$.

По теореме 4.1.1 существует проектор $e \in \mathcal{B}(H)$ и такой, что $tr(\mathbb{1} - e) < \frac{\|d - P(d)\|_1}{4\varepsilon} < \frac{3\varepsilon^2}{4\varepsilon} < \varepsilon$ и $\|e(A_k(T)(d - P(d)))e\|_1 < 4\varepsilon$ для любых $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $e = \mathbb{1}$ и $\|A_k(T)(d - P(d))\|_1 < 4\varepsilon$ для любых $k \in \mathbb{N}$.

Из утверждения 4.1.2 п. (i) следует, что $T(P(x)) = P(x)$. Следовательно, $A_k(T)(x - P(x)) = \frac{1}{k}(x - P(x) + T(x - P(x)) + \ldots + T^{k-1}(x - P(x))) = A_k(T)(x) - P(x)$. Таким образом, имеем, что

$$\|A_k(T)(x) - P(x)\|_\infty = \|A_k(T)(x - P(x))\|_\infty =$$

$$= \|A_k(T)((b - P(b)) + (c - P(c)) + (d - P(c)))\|_\infty \leq$$

$$\leq \|A_k(T)(b - P(b))\|_\infty + \|A_k(T)(c - P(c))\|_\infty + \|A_k(T)(d - P(d))\|_\infty. \tag{4.1.6}$$

Поскольку $b - P(b) \in V$, то $b - P(b) = b_1 - T(b_1)$ для некоторого $b_1 \in C_2(H)$. Далее

$$\|A_k(T)(b-P(b))\|_\infty = \|A_k(T)(b_1-T(b_1))\|_\infty = \|\frac{b_1 - T^k(b_1)}{k}\|_\infty \leq \frac{2\|b_1\|_\infty}{k} \to 0$$

при $k \to \infty$. Следовательно, существует такой номер $k_1 \in \mathbb{N}$, что $\|A_k(T)(b - P(b))\|_\infty < \varepsilon^2$ при $k \geq k_1$.

Поэтому из неравенства (4.1.6) имеем

$$\|A_k(T)(x) - P(x)\|_\infty \leq \|A_k(T)(b - P(b))\|_\infty + \|A_k(T)(c - P(c))\|_\infty +$$

$$+A_k(T)(d - P(d))\|_\infty \leq \varepsilon^2 + \|c - P(c)\|_\infty + 4\varepsilon \leq 4\varepsilon^2 + 4\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon \in (0, 1)$ – произвольное, то $\|A_k(T)(x) - P(x)\|_\infty \to 0$ при $k \to \infty$.

□

Теперь докажем вариант индивидуальной эргодичсекой теоремы для симметричного идеала компактных операторов $\mathcal{K}(H)$.

Теорема 4.1.8. *Для любого оператора* $T \in DS^+$ *и каждого* $x \in \mathcal{K}(H)$ $\|A_k(T)(x) - P(x)\|_\infty \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. Пусть $T \in DS^+$ и $x \in \mathcal{K}(H)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим полярное разложение для оператора x, т.е.

$$x = u|x|,$$

где u–частичная изометрия, $|x|$–модуль оператора x [48, Глава 1, §1, п.4].

Поскольку $x \in \mathcal{K}(H)$, то $0 \leq |x| \in \mathcal{K}(H)$. Поэтому

$$|x| = \sum_{n=1}^{M} s_n(x) P_n, \tag{4.1.7}$$

где $s_n(x)$–собственные значения для $|x|$, $s_1(x) \geq s_2(x) \geq \ldots$, $s_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, P_n—оператор ортогонального проектирования на $N(s_n(x), |x|) = \{\xi \in H : |x|(\xi) = s_n(x)\xi\}$, $n = 1, 2, \ldots, M$, $M \in \mathbb{N}$, либо $m = \infty$.

Если $M < \infty$, то $x \in C_1(H)$ и для этого случая сходимость доказана в теореме 4.1.7. Поэтому, будем считать, что $M = \infty$.

Пусть $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ минимальный номер такой, что $s_n(x) < \varepsilon$ для всех $n \geq n(\varepsilon)$. Рассмотрим операторы

$$y = u \sum_{n=1}^{n(\varepsilon)-1} s_n(x) P_n \text{ и } y = u \sum_{n=n(\varepsilon)}^{\infty} s_n(x) P_n.$$

Тогда $x = y + z$, $y \in C_1(H)$ и $\|z\|_\infty < \varepsilon$. Следовательно по теореме 4.1.7 существует номер $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что $\|A_k(T)(y) - P(y)\|_\infty < \varepsilon$ при $k \geq k(\varepsilon)$. Также, из п. (v) утверждения 4.1.4 следует, что $\|P(z)\|_\infty \leq \|z\|_\infty < \varepsilon$. Таким образом,

$$\|A_k(T)(x) - P(x)\|_\infty = \|A_k(T)(y+z) - P(y+z)\|_\infty =$$

$$= \|A_k(T)(y) + A_k(T)(z) - P(y) - P(z)\|_\infty =$$

$$= \|A_k(T)(y) - P(y) + A_k(T)(z) - P(z)\|_\infty \leq \|A_k(T)(y) - P(y)\|_\infty +$$

$$+ \|A_k(T)(z) - P(z)\|_\infty < \varepsilon + \|A_k(T)(z)\|_\infty + \|P(z)\|_\infty \leq$$

$$\leq \varepsilon + \|z\|_\infty + 2\varepsilon < 4\varepsilon$$

при $k \geq k(\varepsilon)$.

В силу произвольности ε, имеем, что $\|A_k(T)(x) - P(x)\|_\infty \to 0$ при $k \to \infty$.

$\square$

Теперь докажем аналог теоремы 4.1.8 любых вполне симметричных идеалов компактных операторов.

Теорема 4.1.9. *Пусть* $T \in DS^+$ *и* C_E *– вполне симметричный идеал компактных операторов в* $\mathcal{K}(H)$ *и* $x \in \mathcal{C}_E$. *Тогда* $P(x) \in C_E$ *и* $\|A_k(T)(x) - P(x)\|_\infty \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. Пусть $T \in DS^+$ и $x \in C_E(H) \subset \mathcal{K}(H)$. Тогда из теоремы 4.1.8 следует, что $\|A_k(T)(x) - P(x)\|_\infty \to 0$ при $k \to \infty$.

Остается показать, что $P(x) \in C_E(H)$. Действительно, из п. (ii) утверждения 4.0.13 следует, что $A_k(T)(x) \prec\prec x$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Так как $\|A_k(T)(x) - P(x)\|_\infty \to 0$ при $k \to \infty$, то опять используя утверждение 4.0.13 п. (iii) имеем, что $P(x) \prec\prec x$.

Поскольку $C_E(H)$ – вполне симметричный идеал, то $P(x) \in C_E(H)$.

□

4.2 Статистическая эргодическая теорема в идеалах компактных операторов

Зафиксируем ортонормированный базис $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ в H. Пусть $diag(H) = \{x \in \mathcal{B}(H) : (x\xi_n, \xi_m) = 0 \text{ для всех } n \neq m,\ n, m \in \mathbb{N}\}$ — подалгебра всех диагональных операторов в $\mathcal{B}(H)$ относительно базиса $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$. Известно следующее утверждение об условном математическом ожидании из $\mathcal{B}(H)$ на $diag(H)$.

Утверждение 4.2.1. *Существует единственное линейное отображение* $R : \mathcal{B}(H) \to diag(H)$, *удовлетворяющее следующим условиям:*

1. $Rx \geq 0$, *если* $x \geq 0$;
2. $Rx = x$ *для всех* $x \in diag(H)$;
3. $tr(x) = tr(Rx)$ *для любого* $x \in C_1(H)$;
4. $R \in DS^+$, *причем* $\|R\|_{\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(H)} = 1$ *и* $\|R\|_{C_1\to C_1} = 1$;

5. *$R(x^*)R(x) \le R(x^*x)$, если $x \in \mathcal{B}(H)$;*

6. *$R(R(x)y) = R(x)R(y) = R(x(R(y)))$, если $x \in C_1(H),\ y \in B(H)$ или $x \in B(H),\ y \in C_1(H)$.*

Линейный оператор R из утверждения 4.2.1 называется оператором условного математического ожидания из $\mathcal{B}(H)$ на $diag(H)$.

Определим линейное отображение $\Phi : (diag(H), \|\cdot\|_\infty) \to (l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$, положив $\Phi(y) = \{\langle y\xi_n, \xi_n\rangle\}_{n=1}^\infty \in l_\infty$ для любого $y \in diag(H)$.

Утверждение 4.2.2. Φ *является биективной линейной изометрией.*

Доказательство. Если $x, y \in diag(H)$ и $\Phi(x) = \Phi(y)$, то имеем, что $\{\langle x\xi_n, \xi_n\rangle\}_{n=1}^\infty = \{\langle y\xi_n, \xi_n\rangle\}_{n=1}^\infty$, т.е. $\langle x\xi_n, \xi_n\rangle = \langle y\xi_n, \xi_n\rangle$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда из леммы 1.1.2 [39, Chapter 1, §1.1] следует, что

$$x(\eta) = \sum_{n,m=1}^\infty \langle x\xi_n, \xi_m\rangle\langle \eta, \xi_n\rangle\xi_m = \sum_{n}^\infty \langle x\xi_n, \xi_n\rangle\langle \eta, \xi_n\rangle\xi_n =$$

$$= \sum_{n}^\infty \langle y\xi_n, \xi_n\rangle\langle \eta, \xi_n\rangle\xi_n = \sum_{n,m=1}^\infty \langle y\xi_n, \xi_m\rangle\langle \eta, \xi_n\rangle\xi_m = y(\eta)$$

для всех $\eta \in H$. Следовательно, $x = y$, т.е. Φ является инъекцией.

Теперь покажем, что Φ является сюръекцией. Рассмотрим произвольную ограниченную последовательность $\{a_n\} \in l_\infty$. Тогда из примера 1.1.11 [39, Chapter 1, §1.1] имеем, что оператор x, определенный равенством $x(\eta) = \sum_{n=1}^\infty a_n\langle \eta, \xi_n\rangle\xi_n$ для любого $\eta \in H$ является ограниченным линейным оператором. Кроме того, $x \in diag(H)$ и $\langle x\xi_n, x_n\rangle = a_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\Phi(x) = \{a_n\}_{n=1}^\infty$.

Таким образом, имеем, что Φ–биекция.

Рассмотрим теперь $\|\Phi(x)\|_\infty = \|\{\langle x\xi_n, \xi_n\rangle\}_{n=1}^\infty\|_\infty = \sup_{n\ge1} |\langle x\xi_n, \xi_n\rangle|$ для любого $x \in diag(H)$. Из курса функционального анализа известно, что $\|x\|_\infty = \sup_{\|\eta\|=1=\|\zeta\|} |\langle x\eta, \zeta\rangle|$. Так как для любых $\eta, \zeta \in H, \|\eta\| = \|\zeta\| = 1$ верны разложения по базису

$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n, \zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \xi_n$, где $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = 1, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 = 1$, то $\langle x\eta, \zeta\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n \langle x\xi_n, \xi_n\rangle$. Имеем

$$\|x\|_\infty = \sup_{\sum \alpha_m^2 = 1, \sum \beta_m^2 = 1, n\geq 1} |\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n\langle x\xi_n, \xi_n\rangle| \leq$$

$$\leq \sup_{n\geq 1} |\langle x\xi_n, \xi_n\rangle| \sup_{\sum \alpha_m^2 = 1, \sum \beta_m^2 = 1, n\geq 1} |\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|\Phi(x)\|_\infty \sup_{\sum \alpha_m^2 = 1, \sum \beta_m^2 = 1, n\geq 1} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \leq \|\Phi(x)\|_\infty.$$

С другой стороны, $|a_n| = |\langle x\xi_n, \xi_n\rangle| \leq \|x\|_\infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т.е. $\|\Phi(x)\|_\infty = \|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\|_\infty \leq \|x\|_\infty$.

Таким образом, имеем, что $\|\Phi(x)\|_\infty = \|x\|_\infty$ для всех $x \in diag(H)$, т.е. Φ—изометрия.

$\square$

Замечание 4.2.3. *Если $(E, \|\cdot\|_E)$ — произвольное симметричное пространство последовательностей, то сужение оператора $\Phi|_{C_E}$: $(diag(H) \cap C_E, \|\cdot\|_{C_E}) \to (E, \|\cdot\|_E)$ является биективной линейной изометрией (это сужение также будем обозначать через Φ).*

Теперь докажем, что идеал $\mathcal{K}(H)$ всех компактных операторов есть наибольший идеал, в котором сохраняется справедливость теоремы 4.1.8, т.е. в $\mathcal{B}(H) \setminus \mathcal{K}(H)$ теорема 4.1.8, вообще говоря, не верна.

Теорема 4.2.4. *Если $x \in \mathcal{B}(H) \setminus \mathcal{K}(H)$, то существует оператор $T \in DS^+$ такой, что последовательность $A_n(T)(x)$ не сходится по норме $\mathcal{B}(H)$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{B}(H) \setminus \mathcal{K}(H)$. Тогда $y = R(x) \in diag(H) \setminus \mathcal{K}(H)$, где R–оператор условного математического ожидания (см. утверждение 4.2.1). Пусть $\Phi(y) = \eta = \{(y\xi_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty} \in l_\infty \setminus c_0$, где Φ есть отображение из утверждения 4.2.2. Следовательно, из теоремы 2.1.9

следует, что существует оператор $S : l_\infty \to l_\infty$ такой, что $S(l_1) \subset l_1$ и $\|S\|_{l_\infty \to l_\infty} \le 1$, $\|S\|_{l_1 \to l_1} \le 1$, т.е. $S \in DS^+$, для которого средние $A_k(S)(\eta)$ не сходятся по норме l_∞.

Рассмотрим оператор $T = \Phi^{-1} S \Phi R : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$. Ясно, что $T \in DS^+$. Так как $y \in diag(H)$, то из п. (ii) утверждения 4.2.1 имеем, что $R(y) = y$. Следовательно, $T(y) = \Phi^{-1} S \Phi R(y) = \Phi^{-1} S \Phi(y)$. Также, очевидно, что $T^k(y) = \Phi^{-1} S^k \Phi(y)$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Теперь покажем, что последовательность $\{A_n(T)(y)\}_{n=1}^\infty$ не сходится. Для этого рассмотрим

$$A_n(T)(y) = \frac{1}{n}\left(y + T(y) + T^2(y) + \ldots + T^{n-1}(y)\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(y + \Phi^{-1} S \Phi(y) + \Phi^{-1} S^2 \Phi(y) + \ldots + \Phi^{-1} S^{n-1} \Phi(y)\right) =$$

$$\frac{1}{n}\left(\Phi^{-1}(\Phi(y) + S\Phi(y) + S^2\Phi(y) + \ldots + S^{n-1}\Phi(y))\right) =$$

$$= \Phi^{-1}\frac{1}{n}\left(\Phi(y) + S\Phi(y) + S^2\Phi(y) + \ldots + S^{n-1}\Phi(y)\right) =$$

$$= \Phi^{-1}\frac{1}{n}\left(\eta + S(\eta) + S^2(\eta) + \ldots + S^{n-1}(\eta)\right) = \Phi^{-1}(A_n(S)(\eta)).$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

Так как Φ^{-1}–изометрия, то последовательности $\{A_n(T)(y)\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{B}(H)$ и $\{A_n(S)(\eta)\}_{n=1}^\infty \subset l_\infty$ сходятся и расходятся одновременно. Следовательно, последовательность $\{A_n(T)(y)\}_{n=1}^\infty$ не сходится по норме $\|\cdot\|_\infty$.

Осталось показать, что последовательность $\{A_n(T)(x)\}_{n=1}^\infty$ также не сходится по норме $\|\cdot\|_\infty$. Действительно, для всех $n \in \mathbb{N}$

$$A_n(T)(x) = \frac{1}{n}\left(x + T(x) + T^2(x) + \ldots + T^{n-1}(x)\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(x + \Phi^{-1} S \Phi(y) + \Phi^{-1} S^2 \Phi(y) + \ldots + \Phi^{-1} S^{n-1} \Phi(y)\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(x - y + n\Phi^{-1} A_n(S)(\eta)\right) = \frac{1}{n}(x-y) + \Phi^{-1} A_n(S)(\eta) = \frac{1}{n}(x-y) + A_n(T)(y)$$

т.е. последовательность $\{A_n(T)(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является суммой сходящейся и расходящейся последовательностей. Таким образом, последовательность $\{A_n(T)(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится в $\mathcal{B}(H)$. $\square$

Пусть теперь $(E, \|\cdot\|_E)$ — вполне симметричное пространство последовательностей и $T \in DS^+$. Будем говорить, что симметричный идеал компактных операторов $(C_E, \|\cdot\|_E)$ удовлетворяет некоммутативной статистической эргодической теореме, если для любого оператора $x \in C_E$ существует оператор $\widehat{x} \in C_E$ такой, что средние $A_n(T)(x)$ сходятся к $\widehat{x}$ по норме $\|\cdot\|_E$, т.е. $\|A_n(T)(x) - \widehat{x}\|_E \to 0$ при $n \to \infty$. В этом случае, если $(C_E, \|\cdot\|_E)$ удовлетворяет некоммутативной статистической эргодической теореме, то пишем $C_E \in (NCMET)$.

Утверждение 4.2.5. *Если $E = l_1$ как множества, то $C_E \notin (NCMET)$.*

Доказательство. Пусть $E = l_1$ и $\xi = \{1, 0, 0, \dots\} \in l_1$. Тогда в силу утверждения 2.2.1 существует оператор $S \in DS$, что последовательность $\{A_n(S)(\xi)\}$ является не сходящейся в l_1 относительно нормы $\|\cdot\|_1$. Проводя доказательство утверждения 2.1.9 получим, что последовательность $\{A_n(|S|)(\xi)\}$ также не сходится в l_1 относительно нормы $\|\cdot\|_1$, где $|S|$ — модуль оператора S, определенный в теореме 2.1.2.

Пусть теперь $T = \Phi^{-1}|S|\Phi R$, где операторы Φ и R определены из замечания 4.2.3 и из утверждения 4.2.1 соответственно. Ясно, что $T : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ и $T \in DS^+$. Если положим $x = \Phi^{-1}(\xi)$, то из $\xi \in l_1$ имеем $x \in diag(H) \cap C_1(H)$. Следовательно, из п. (ii) утверждения 4.2.1 имеем, что $R(x) = x$, что влечет $T(x) = \Phi^{-1}S\Phi R(x) = \Phi^{-1}S\Phi(x)$. В силу замечания 4.2.3, Φ есть биективная изометрия из $(diag(H) \cap C_1(H), \|\cdot\|_1)$ на $(l_1, \|\cdot$

$\|_1)$. Далее, аналогично доказательству теоремы 4.2.4 получим, что последовательности $\{A_n(|S|)(\xi)\}$ и $\{A_n(T)(x)\}$ расходятся одновременно в $(l_1, \|\cdot\|_1)$ и $(C_1(H), \|\cdot\|_1)$ соответственно. Таким образом, последовательность $\{A_n(T)(x)\}$ не сходится в $(C_1(H), \|\cdot\|_1)$ для положительного оператора Данфорда-Шварца T в $\mathcal{B}(H)$, что означает $C_E \notin (NCMET)$.

$\square$

Теперь приведем другое достаточное условие того, что не включение $E \notin (MET)$ верно.

Утверждение 4.2.6. *Если $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ не сепарабельное вполне симметричное пространство последовательностей, то $_E \notin (NCMET)$.*

Доказательство. Пусть $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ не сепарабельное вполне симметричное пространство последовательностей. Тогда из утверждения 2.2.2 существует элемент $\xi \in E$ и оператор $S \in DS$, что последовательность $\{A_n(S)(\xi)\}$ не является сходящейся в E относительно нормы $\|\cdot\|_E$. Если $|S|$ — модуль оператора S, определенный в теореме 2.1.2, то в силу утверждения 2.1.9 получим, что последовательность $\{A_n(|S|)(\xi)\}$ также не сходится в E относительно нормы $\|\cdot\|_E$.

Пусть оператор $T \in DS^+$ определен как в утверждении 4.2.5. Далее, учитывая что оператор Φ, опеределенный в замечании 4.2.3 является биективной изометрией из $(diag(H) \cap C_E, \|\cdot\|_{C_E})$ на $(E, \|\cdot\|_E)$ и проводя доказательство теоремы 4.2.4 имеем, что последовательности $\{A_n(|S|)(\xi)\}$ и $\{A_n(T)(x)\}$ расходятся одновременно в $(E, \|\cdot\|_E)$ и $(C_E, \|\cdot\|_{C_E})$ соответственно. Таким образом, последовательность $\{A_n(T)(x)\}$ не является сходящейся в C_E относительно нормы $\|\cdot\|_{C_E}$, что влечет

$C_E \notin (NCMET)$. $\square$

Следующая теорема дает критерий проверки выполнимости статистической эргодической теоремы для вполне симметричного идеала компактных операторов $({}_E, \|\cdot\|_{{}_E})$.

Теорема 4.2.7. *Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ вполне симметричное пространство последовательностей. Следующие условия эквивалентны:*

(i). $(C_E, \|\cdot\|_{C_E}) \in (NCMET)$;

(ii). Пространство E сепарабельно и $E \neq l_1$.

Доказательство. Импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ следует из утверждений 4.2.5 и 4.2.6.

Докажем обратную импликацию $(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть пространство E сепарабельно и $E \neq l_1$, $T \in DS^+$ — произвольный оператор. Пусть P проектор, опеределенный в утверждении 4.1.4. Так как E вполне симметричное пространство последовательностей, то согласно теореме 4.1.9 имеем, что оператор P действует во вполне симметричном идеале C_E, т.е. $P : C_E \to C_E$.

Если $P(x) = x \in C_E$, то из теоремы 4.1.9 и утверждения 4.1.4 имеем

$$A_n(T)(x) = A_n(T)(P(x)) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} P^2(x) = x. \tag{4.2.1}$$

Если $x \in C_E$ и $y = x - P(x)$, то $P(y) = P(x) - P^2(x) = 0$. Опять используя теорему 4.1.9 имеем $A_n(T)(y) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} 0$. Так как E симметричное пространство последовательностей, то из утверждения 4.0.14 имеем, что

$$\|A_n(T)(y)\|_{C_E} \to 0. \tag{4.2.2}$$

Из утверждения 4.0.13 п. (iii) имеем, что $P(z) \prec\prec_{\mathcal{K}(H)} z$ для любого $z \in \mathcal{K}(H)$. Следовательно, в силу утверждения 4.0.13 п. (ii) верно неравенство $A_n(T)(P(x)) \prec\prec_{\mathcal{K}(H)} P(x) \prec\prec_{\mathcal{K}(H)} x$. Теперь опять используя утверждение 4.0.13 п. (iv) имеем, что $A_n(T)(P(x)) - P(x) \prec\prec_{\mathcal{K}(H)} 2x$.

Поскольку $A_n(T)(P(x)) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} P(x)$, то используя утверждение 4.0.14 имеем, что

$$\|A_n(T)(P(x)) - P(x)\|_{C_E} \to 0. \tag{4.2.3}$$

Теперь используя (4.2.2), (4.2.3) и равенство $A_n(T)(y) = A_n(T)(x) - A_n(T)(P(x))$, мы получим, что

$$\|A_n(T)(x) - P(x)\|_{C_E} = \|(A_n(T)(x) - A_n(T)(P(x))) + (A_n(T)(P(x)) - P(x))\|_{C_E} \leq$$

$$\leq \|A_n(T)(y)\|_{C_E} + \|A_n(T)(P(x)) - P(x)\|_{C_E} \to 0,$$

при $n \to \infty$.

Таким образом, $C_E \in (NCMET)$. $\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в диссертации результаты позволяют говорить о достижении всех поставленных целей диссертационной работы. Все основные результаты являются новыми и были опубликованы в республиканских и международных научных журналах и в совокупности вносят определенный вклад в коммутативную и некоммутативную эргодическую теорию.

Настоящая диссертация посвящена исследованию индивидуальной, статистичекой эргодических теорем в симметричных пространствах поледовательностей и в симметричных идеалов компактных операторов. Кроме этого, в диссертации исследована эргодическая теорема Блума-Хансона в бесконечномерных сепарабельных пространств последовательностей. Основные результаты исследования состоят в следующем.

1. В первом параграфе второй главы настоящей диссертации получено следующее существенное усиление известной индивидуальной эргодической теоремы данфорда-Шварца для вполне симметричных пространств последовательностей.

Теорема 4.2.8. *Если $E \subset c_0$ — произвольное вполне симметричное пространство последовательностей, $T \in DS$ и $x \in E$, то существует такое $\widehat{x} \in E$, что $\|A_n(T)(x) - \widehat{x}\|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$.*

Также доказана теорема, которая утверждает, что вне симметричного пространства последовательностей c_0 индивидуальная эргодическая теорема вообще говоря не верна.

Теорема 4.2.9. *Для каждого $x \in l_\infty \setminus c_0$ существует такое $T \in DS$, что средние $A_n(T)(x)$ не сходятся покоординатно.*

Во втором параграфе второй главы приведен следующий критерий для проверки выполнимости статистичекой эргодической теоремы дл вполне симметричных пространств последовательностей.

Теорема 4.2.10. *Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ вполне симметричное пространство последовательностей. Следующие условия эквивалентны:*

(i). $(E, \|\cdot\|_E) \in$ *(MET);*

(ii). *Пространство E сепарабельно и $E \neq l_1$;*

2. В третьей главе настоящей диссертации получен следующий вариант известной эргодической теоремы Блума-Хансона в бесконечномерных сепарабельных идеальных банаховых пространств последовательностей.

Теорема 4.2.11. *Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ — бесконечномерное сепарабельное банахово идеальное подпространство в $s(\mathbb{K})$. Если $(E, \|\cdot\|_E)$ — p-выпукло с константой p-выпуклости $M^{(p)}(E) = 1$, $p > 1$, тогда для любого линейного сжатия $T : E \to E$ из слабой сходимости в $(E, \|\cdot\|_E)$ последовательности $\{T^n(x)\}$ к элементу $x_0 \in E$ следует сходимость*

$$\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\|_E \to 0$$

для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

Из этой теоремы как следствие получена следующая

Теорема 4.2.12. *Пусть $1 < p, q < \infty$, $x \in l_{p,q}$. Тогда*

(i). *Если $1 < q \leq p < \infty$, то для любого линейного сжатия*

$$T : (l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q}) \to (l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$$

из слабой сходимости в $l_{p,q}$ последовательности $\{T^n(x)\}$ к элементу $x_0 \in l_{p,q}$ следует сходимость

$$\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\|_{p,q} \to 0$$

для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

(ii). Если $1 < p < q < \infty$, то в $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{(p,q)}$ существует такая эквивалентная норма $\|\cdot\|_{[p,q]}$, что для любого линейного сжатия

$$T : (l_{p,q}, \|\cdot\|_{[p,q]}) \to (l_{p,q}, \|\cdot\|_{[p,q]})$$

слабая сходимость последовательности $\{T^n(x)\}$ к элементу $x_0 \in l_{p,q}$ влечет сходимость

$$\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\|_{[p,q]} \to 0$$

для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

3. Четвертая глава диссертационной работы посвящена индивидуальной и статистической эргодической теоремам в идеалах компактных операторов. В первом параграфе четвертой главы доказан следующий вариант индивидуальной эргодической теоремы.

Теорема 4.2.13. *Пусть $T \in DS^+$ и C_E – вполне симметричный идеал компактных операторов в $\mathcal{K}(H)$ и $x \in \mathcal{C}_E$. Тогда $P(x) \in C_E$ и $\|A_k(T)(x) - P(x)\|_\infty \to 0$ при $k \to \infty$.*

Во втором параграфе четвертой главы доказан следующий аналог теоремы 4.2.9, который показывает, что идеал $\mathcal{K}(H)$ всех компактных операторов есть максимальный идеал, в котором верна теорема 4.2.13.

Теорема 4.2.14. *Если $x \in \mathcal{B}(H) \setminus \mathcal{K}(H)$, то существует оператор $T \in DS^+$ такой, что последовательность $A_n(T)(x)$ не сходится по норме $\mathcal{B}(H)$.*

Кроме того, получен следующий новый критерий проверки выполнимости статистической эргодической теоремы в некоммутативных симметричных идеалах компактных операторов.

Теорема 4.2.15. *Пусть* $(E, \|\cdot\|_E)$ *вполне симметричное пространство последовательностей. Следующие условия эквивалентны:*

(i). $(C_E, \|\cdot\|_{C_E}) \in (NCMET)$*;*

(ii). *Пространство* E *сепарабельно и* $E \neq l_1$.

По результатам диссертации опубликованы три статьи (две опубликованы, одна принята в печать) в периодических математических журналах и четыре тезисов в трудах международных и республиканских научных конференций (см. [54], [55], [56], [57], [59], [58], [60]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Нормативно-правовые документы

1. Указ Президента РУз № УП-916 от 15 июля 2008 года "О дополнительных мерах по стимулированию внедрения инновационных проектов и технологий производства".

2. Указ Президента № УП-2789 от 17 февраля 2017 года "О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

3. Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан "Об утверждении Положения о магистратуре" от 2.03.2015 № 36.

Произведения и доклады Президента РУз

4. Мирзиёев Ш.М. Мы все вместе построим свободное, демократическое и процветающее государство Узбекистан. Выступление на торжественной церемонии вступления в должность Президента Республики Узбекистан на совместном заседании палат Олий Мажлиса. – Ташкент : Ўзбекистон, 2016. - 56 с.

5. Мирзиёев Ш.М. Критический анализ, жесткая дисциплина и персональная ответственность должны стать повседневной нормой в деятельности каждого руководителя. Доклад на расширенном

заседании Кабинета Министров, посвященном итогам социально-экономического развития страны в 2016 году и важнейшем приоритетным направлениям экономической программы на 2017 год. Ташкент : Ўзбекистон, 2017. - 104 с.

6. Мирзиёев Ш.М. Достижения науки – важный фактор развития. Нар. слово. – 2016. – 31 дек.

7. Каримов И.А. Без исторической памяти нет будущего. Свое будущее мы строим своими руками. Т.7. Ташкент: «Узбекистан», 1999г. с.146.

Основная литература

8. Akcoglu M. A., Huneke J. P. and Rost H. A couterexample to Blum–Hanson theorem in general spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 1974, vol. 50, pp. 305–308.

9. Akcoglu M., Sucheston L. On operator convergence in Hilbert space and in Lebesgue space. *Period. Math. Hungar*, 1972, vol. 2, pp. 235-244.

10. Akcoglu M. and Sucheston L. Weak convergence of positive contractions implies strong convergence of averages. *Zeitschrift fËur Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 1975, vol. 32, pp. 139–145.

11. Albiac F., Kalton N.J. Topic in Banach space. Springer. 2006.

12. Bellow A. An L_p-inequality with application to ergodic theory. *Hous. J. Math.*, 1975, vol. 1, no.1, pp. 153-159.

13. Blum J.R., Hanson D.L. On the mean ergodic theorem for subsequences. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1960, vol. 66, pp. 308-311.

14. Bennet C., Sharpley R. Interpolation of operators. Academic Press, INC. 1988.

15. Calkin J. Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space, Ann. of Math. 1941. V 42. No 2. P. 839-873.

16. Carothers N., Dilworth S. Subspaces of $L_{p,q}$. Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V.104. No 2. P. 537-545.

17. Chilin V., Litvinov S. Ergodic theorems in fully symmetric spaces of τ-measurable operators, Studia Math. V. 288(2), 2015, 177–195.

18. Chilin V., Litvinov S. Individual ergodic theorems in noncommutative Orlicz spaces, Positivity. V. 21(1), 2017, 49–59. DOI 10.1007/s11117-016-0402-8.

19. Chilin V., Comez D. and Litvinov S. On pointwise ergodic theorems for infinite measure. *ArXiv:* [math.FA], 1 Aug. 2016, 19 pp.

20. Chilin V.I., Litvinov S. Ergodic theorems in fully symmetric spaces of τ-measurable operators, Studia Math., 288(2) (2015), 177–195.

21. Creekmore J. Type and cotype in Lorentz of Lp;q spaces. Indag. Math. 1981. V. 43. P. 145-152.

22. Dunford N. and Schwartz J. T. Linear Operators, Part I: General Theory, John Willey and Sons (1988).

23. Dodds P.G., Dodds T.K., Sukochev F.A. *Banach-Saks properties in symmetric spaces of measurable operators*, Studia Math. 178 (2007), 125–166.

24. Dodds P.G., Dodds T.K. and Sukochev F.A. On p-convexity and q-concavity in non-commutative symmetric spaces. Integr. Equ. Oper. Theory. 2014. V. 78. P. 91-114.

25. Dodds P.G., Dodds T.K., and Pagter B. Fully symmetric operator spaces, J. Integr. Equat. Oper. Th. V. 15 (1992), 942–972.

26. Gohberg I., Krein M. Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators, Trans. Math. Monog. **18** American Mathematical Society. Providence. R.I. 1969.

27. Hao M. C., Kami'nska A., Tomczak-Jaegermann N. Orlicz spaces with convexity or concavity constant one. *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, vol. 320, pp. 303-321.

28. Hopf E. The general temporary discrete Markoff process, *J. Rat. Mach. Anal.*, **3** (1954), 13-45.

29. Jones L.K., Kuftinec V. A note on the Blum-Hanson theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1970, vol. 30, pp. 202-203.

30. Junge M. and Xu Q. Noncommutative maximal ergodic theorems, *J. Amer. Math. Soc.*, **20**(2) (2007), 385-439.

31. Kalton N.J., Sukochev F.A. Symmetric norms and spaces of operators, J. Reine Angew. Math., 2008. V. 621. P. 81-121.

32. Kantorovich L.V. and Akilov G.P. Functional Analysis. Pergamon Press. Oxford-New York-Toronto-Sydney-Paris. 1982.

33. Krasnosel'skij M., Rutitskij Y. Convex Functions and Orlicz Spaces, Translated from the Russian. P. Noordhoff Ltd., Groningen. 1961. [In Russian: Gosizdat phis-math lit., Moscow. 1958].

34. Krein S.G., Petunin Ju.I., and Semenov E.M. Interpolation of Linear Operators, *Translations of Mathematical Monographs, Amer. Math. Soc.*, **54**, 1982.

35. Krengel U. Ergodic Theorems, Walter de Gruyter, Berlin-New York (1985).

36. Lin M. Mixing for Markov operators. *Z. Wahrsch. Verw. Geb.*, 1971, vol. 19, pp. 231-242.

37. Lindenstrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach spaces.* Springer-Verlag. Berlin-New York. 1996.

38. Litvinov S., Uniform equicontinuity of sequences of measurable functions and noncommutative ergodic theorems, Proc. Amer. Math. Sci. V. 140, 2012, 2401–2409.

39. Lord S., Sukochev F. and Zanin D. Singular Traces. Theory and Applications, Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston. 2013.

40. Muller V., Tomilov Y. Quasisimilarity of power bounded operators and Blum-Hanson property. *J. Funct. Anal.*, 2007, vol. 246, pp. 385-399.

41. Ryan A. Introduction to tensor products of Banach spaces. Springer 2002.

42. Simon B. Trace ideals and their applications, Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, **120**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

43. Veksler A.S. Ergodic theorem in symmetric spaces, *Siberian Math. J.*, **26**(4) (1985), 189–191.

44. Veksler A.S., Fedorov A.L. Statistic ergodic theorem in non-separable symmetric function spaces, *Siberian Math. J.*, **29**(3) (1988), 183–185.

45. Veksler A.S., Fedorov A.L. Symmetric Spaces and Statistic Ergodic Theorems for Automorphisms and Flows, "FAN"Publishing, Uzbekistan Academy of Sciences, 2016.

46. Yeadon F.J. Non-commutative L^p-spaces, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **77** (1975), 91-102.

47. Yeadon F.J. Ergodic theorems for semifinite von Neumann algebras. I, *J. London Math. Soc.*, **16**(2) (1977), 326–332.

48. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, Наука, Москва, 1965.

49. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: «Наука». 1977.

50. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : «Наука». 1981.

51. Муратов М.А., Чилин В.И. Алгебры измеримых и локально измеримых операторов. Киев. 2007.

52. Рудин У. Функциональный анализ. М.: «Мир». 1975.

53. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: «Наука». 1980.

Список опубликованных работ

54. Чилин В.И., Азизов А.Н. *Эргодическая теорема Блума-Хансона в пространствах Лоренца.* Узбекский математический журнал. 2017. № 1. С. 155 - 165.

55. Азизов А.Н., Чилин В.И. *Эргодическая Теорема Блума-Хансона в банаховых решетках последовательностей.* Владикавказский математический журнал. 2017. Т. 19, Вып. 3, С. 3-10.

56. V. Chilin, A. Azizov, *Ergodic theorems in symmetric sequence spaces.* Colloquium Mathematicum, 2018 (in printing).

57. В.И. Чилин, А.Н. Азизов, *Эргодическая теорема в пространствах Лоренца* $l_{p,q}$. Тезисы докладов международной конф. "Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий-Аль-Хорезми 2016". Бухара, 9-10 ноября 2016.

58. A.N. Azizov, *Individual ergodic theorem in symmetric sequence spaces.* Abstracts of the Republican Conference with the participation of foreign scientists "Actual problems of dynamical systems and their applications". Tashkent, May 1-3, 2017.

59. А.Н. Азизов, В.И. Чилин, *Теорема Блума-Хансона в p-выпуклых банаховых решетках последовательностей.* Тезисы докладов Республиканской конф. с участием зарубежных ученых "Проблемы современной топологии и ее приложения". Ташкент, 11-12 мая 2017.

60. A.N. Azizov, *Almost uniform convergence in the individual ergodic theorem.* Abstracts of the Uzbek-Israel conference "Contemporary Problems in Mathematics and Physics". Tashkent, October 6-10, 2017.