ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ
ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

Қўлёзма ҳуқуқида

UDK 519.644

САЙИДОВА ГУЛШОДА ДИЛМУРАТОВНА

Локал интерполяцион кубик сплайн функция қуриш ва уни узлуксиз функциялар синфида хатолигини баҳолаш

5А 130201-Математик моделлаштириш ва сонли усуллар мутахассислиги

Магистр академик даражасини олиш учун ёзилган

ДИССЕРТАЦИЯ

Илмий рахбар
физика-математика фанлари
номзоди, доцент: С.А.Бахромов

Тошкент – 2018

М У Н Д А Р И Ж А

КИРИШ

Диссертация мавзусининг асосланиши ва унинг долзарблиги

Фан ва техника масалаларини ечишнинг аниқ усуллар ёрдамида ечимни топиш ҳар доим ҳам онсон бўлавермайди. Жуда кўп ҳолларда қўйилган масалани берилган аниқликда олдиндан қўйилган шартлар асосида тақрибий ечимни топиш масаласи ҳамда қўйилган масалани олдиндан берилган аниқликда тақрибий ечишда қўлланаладиган яқинлашиш тезлиги юқори бўлган методларни, математик моделларни яратиш ва уларнинг тадбиқ қилиниши “Ҳисоблаш математикаси” фанининг долзарб масалаларидан ҳисобланади. Катта ҳисоблаш ресурсларига эга бўлган супер ЭҲМ ларнинг яратилиши мураккаб ночизқли масалалрни ечишда яқинлашиш тезлиги юқори бўлган методларни, математик моделларни яратилиши мураккаб жараёнли масалаларни тақрибий ечишда “Ҳисоблаш математикаси” фанининг замонавий методлари фан ва техниканинг ривожланишида муҳим аҳамиятга эга ҳисобланади. Айниқса функцияларни интерполяциялаш масаласи муҳим аҳамиятга эга бўлиб айниқса амалий нуқтаи назардан долзарб масалалардан ҳисобланади. Функцияларни интерполяциялаш масаласи бўйича дастлаб классик интерполяцион кўпҳадлар қурилган. Шулардан Лагранж интерполяцион кўпҳади, Нютон интерполяцион кўпҳади ва бошқалар.

Силлиқлиги юқори бўлмаган функциялар учун кўпҳадлар яқинлашиш аппарати сифатида қатор ноқўлайликларга эга. Булардан энг асосийси шундан иборатки, бундай функцияларнинг бирор нуқта атрофидаги ҳолати, уларнинг тўла ҳолати билан узвий боғлиқдир. Бундан ташқари интерполяцион кўпҳадларнинг нуқсони сифатида уларнинг ҳар доим ҳам интерполяционланувчи функцияга яқинлашавермаслигидир. Энг яхши текис яқинлашувчи кўпҳадларнинг камчилиги сифатида шуни кўрсатиш мумкинки, уларни қуриш жуда қийин ва одатда бундай кўпҳаднинг даражаси ортиши билан коэффициенлари ҳам тез ўсиб боради.

Классик интерполяцион кўпҳадларни имкониятлари қисман чегараланган. Классик интерполяция масаласида кўпҳадлар $[a.b]$ оралиқни ўзида қурилади. Тугун нуқталарни қанча кўпайтирсак яқинлашиш шунча яхши бўлади. Лекин қурилаётган кўпҳаднинг даражаси тугун нуқталар сонига боғлиқ, тугун нуқталар сони ошиши билан кўпҳаднинг даражаси ошиб боради ва кўпҳад коэффицентларини аниқлаш учун юқори тартибли алгебраик тенгламалар системасини ечишга тўғри келади. Тузилган алгебраик тенгламалар системасининг сони тугун нуқталарга боғлиқ экан, тугун нуқталар ошиши билан алгебраик тенгламалар системасининг тартиби ҳам ошиб кетади. Натижада классик полиномлар қурилишида қуйидаги камчиликлар юзага келади.

1) Интерполяцион кўпҳад юқори даражали бўлгани учун формула қулай эмас.

2) Юқори даражали алгебраик тенгламалар системасини ечиш методикасида маълум методик хатоликлар пайдо бўлади.

3) Ҳисоблаш жараёни мураккаблашиб, натижада ҳисоблаш хатолиги пайдо бўлиб қолади.

Қурилаётган классик интерполяцион кўпҳад тикланаётган функцияга яхши яқинлашмаслиги мумкин.

Шунинг учун, бу нуқсонлардан қутилиш мақсадида интерполяциялаш масаласида классик полиномлар ўрнига сплайн функциялар ёрдамида яқинлаштириш жуда катта имкониятларга эга бўлиб, тезда фанда ўз ўрнини топди.

Сплайн функциялар функцияларни интерполяциялаш масаласида классик полиномлар орқали интерполяциялаш масаласига нисбатан яхши эканлигини кўрсатди.

Фунциянинг аналитик кўринишини тиклашда сплайн функцияларни қўлланилиши яхши натижа беради. Тикловчи кўпҳад коэффициентлари кўпҳадларнинг қўшни оралиқларда силлиқ туташиши шартидан, нуқталарда интерполяция шарти ва бир ораликдан иккинчисига силлиқ ўтиш учун қидирилаётган функция ва унинг ҳосилаларининг $x \in [a, b]$ да узлуксиз бўлиши талаб қилинади.

Полиномиал интерполяцион сплайн функция ўзининг:

1) интерполяция объектига яхши яқинлашувчанлиги;

2) қурилиши содда ва ЭҲМ алгоритмини тузиш жуда соддалиги билан ажралиб туради.

Шунинг учун интерполяциялаш масаласида сплайн функцияларни қўлланилиши ҳисоблаш математикаси фанида долзарб масалалар ҳисобланади.

Мураккаб жараёнли масалаларни тақрибий ечишда ҳамда ушбу масалаларнинг моделларини қуришда ва қўлланилишида сплайн-функцияларнинг қўлланилиши долзарб масалалардан ҳисобланади.

Қурилаётган сплайн функция $x \in [a, b]$ оралиқда эмас, балки $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ $i = \left(\overline{0, n-1}\right)$оралиқларда қурилади ва бу сплайн функция ҳар бир оралиқларда бир хил структурали кўпҳадлардан иборат бўлади.

Уланиш тугун нуқталарида функция ва унинг ҳосилаларининг ҳам узлуксизлиги талаб қилинади. Шунинг учун $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ $i = \left(\overline{0, n-1}\right)$ барча оралиқларда қурилган сплайн функциялар уланиб бутун $\left[a, b\right]$ оралиқда силлиқ бир функцияни беради.

Классик интерполяциялашда эса бутун бир $\left[a, b\right]$оралиқда битта функция қурилар эди. Шунинг учун ҳам классик интерполяциялашга нисбатан, сплайн функциялар ёрдамида қаралган интерполяциялаш масаласининг аниқлик даражаси юқори ва қурилиши жиҳатидан ҳам содда бўлади. $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ $\left(i=\overline{0,n-1}\right)$ ораликларда қурилган силлиқ-бўлакли кўпҳадли функцияларга сплайн функциялар дейилади.

Сплайнларнинг хисоблаш математикасида кенг қўлланилаётганлиги сабабларидан яъна бири уларнинг қийматларини ЭҲМ ларда ҳисоблашнинг қулайлиги ва улар ёрдамида интерполяциялаш каби жараёнларнинг кенг синфдаги тўрлар учун яхши яқинлашишлигидадир.

Мураккаб тизимларни моделлаштиришда ҳисоблашлар тўрда катта қадам билан олиб борилади. Олинган натижаларни кейинчалик интерполяциялаш зарур, бунга эса сплайн функциялар ёрдамида эришилади. Аммо тўрнинг катта қадами хатоликларнинг пайдо бўлиши ва ўсиб боришига олиб келади. Мазкур диссертация ишида интерполяция сплайнининг нормаларини минималлаштириш эвазига интерполяция берилган қийматлардан ўтувчи ва минимал нормали ҳосилага эга бўлган сплайн ёрдамида амалга оширилади, бу эса хатоликларнинг тўпланиб борилишини маълум даражада чегаралаб туради.

Тажрибавий ахборотларни қайта ишлашнинг кўплаб масалаларида натижаларни силлиқлаштиришга тўғри келади. Сплайндан фойдаланиш натижасида керакли силлиқликка эришилади. Одатда функцияни кесмада берилган қийматлар бўйича тиклашда қўшимча чегаравий шартлар берилади. Агар ҳосилалар берилмаган бўлса, у ҳолда тақрибий усуллардан фойдаланишга тўғри келади. Ҳосиласининг нормаси минимал бўлган сплайн ҳолида чегаравий шартлар биринчи тартибли ҳосила нормасининг минимумидан топилади. Тажрибавий маълумотларни қониқарли даражада силлиқлаштириш учун кичик қадамлар билан ҳисоблаб чиқилган маълумотларнинг ҳам аниқлик даражаси юқори бўлиши талаб қилинади. Ҳосиланинг минимал норма ҳоссаси катта қадамлар билан олинган маълумотлар бўйича яхши аппроксимацион сплайнни қуришга имкон беради.

Сплайн функциялар ҳар хил геофизик сигналларни қайта ишлаш ва тиклашда ҳам қўлланилади. Сплайн функциялар ёрдамида қурилган квадратур формулалар қурилиши жихатдан содда бўлиб, аниқ интегралларни, сингуляр интеграларни тақрибий ҳисоблашларда хамда интеграл ва сингуляр интегралар тенгламалар ечимларини тақрибий ҳисоблашларда кенг қўлланилмоқда.

Тадқиқот объекти ва предмети. Локал интерполяцион кубик сплайн функция. Локал интерполяцион кубик сплайн функция қуриш ва уни узлуксиз функциялар синфида хатолигини баҳолаш.

Тадқиқот мақсади ва вазифалари.

Яқинлашиш тартиби юқори бўлган сплайн функцияни ўрганиш ва аниқ берилган экспериментал маълумотлар асосида локал интерполяцион учинчи даражали сплайн функция қуриш ҳамда уларни узлуксиз функциялар синфида хатолигини баҳолаш. Сплайн функциялар назариясини ва унинг татбиқини мукаммал ўрганиш.

Илмий янгилиги. Диссертацияда қаралган сплайн функция бошқа сплайн функцияларга нисбатан берилган функцияга яқинлашиш тартиби битта юқори бўлган сплайн функция ҳисобланади. Ушбу сплайн функция аниқ берилган маълумотлар асосида қурилди ва узлуксиз функциялар синфида хатолигини баҳолаш ҳамда берилган функцияга қай даражада яхши яқинлашишини MathCad дастурида таҳлил қилинди.

Тадқиқотнинг асосий масалалари ва фаразлари. Локал интерполяцион кубик сплайн функция қуриш ва уни узлуксиз функциялар синфида хатолигини баҳолаш. Ҳар хил соҳалардаги татбиқини ўрганиш.

Тадқиқот мавзуси бўйича адабиётлар шарҳи. Ушбу магистрлик диссертациясини бажариш давомида Исроилов М.И. “Ҳисоблаш методлари” 1-қисм [16]; Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. “Методы сплайн-функций” [18]; Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. “Теория сплайнов и ее приложения” [17]; Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.

“Сплайны в вычислительной математике” [23] номли адабиётлар таҳлил қилинди.

Тадқиқотда қўлланилган методиканинг тавсифи. Берилган ишни бажаришда сонли усуллар назариясининг математик аппарати, сплайн функциялардан ҳамда хатолигини баҳолашда $C[a,b]$ ва $W[a,b]$ синфлардан фойдаланилди.

Татқиқот натижаларининг назарий ва амалий аҳамияти.

Диссертацияда олинган натижалар янги, назарий ва айниқса амалий аҳамиятга эга. Мазкур диссертация ишида қаралган сплайн функциялардан турли синфлардаги функцияларни яқинлаштиришда фойдаланиш мумкин. Диссертация натижаларидан татбиқий масалаларда вужудга келувчи сингуляр интеграл тенгламаларни ечишда фойдаланиш мумкин.

Диссертация ишида кўп ўлчовли сплайн - аппроксимация масалаларини ечиш учун сплайнлар назариясининг бир нечта жабҳалари ҳам назарий ҳам амалий жиҳатдан ўрганиб чиқилди.

Олинган натижалардан жадал суръатлар билан ўзгарувчи характеристикали ахборотлар оқими (рақамили сигналлар)ни берилган аниқликда тиклашда фойдаланиши мумкин. Бирор бир муаммоли объектни муаммосини ечиш учун олинган берилган маълумотлар асосида объектнинг математик моделини қуриш, таҳлил қилиш ва башорат қилишда ушбу ишда қаралган сплайн функциядан фойдаланиш яхши натижалар беради.

Сплайн функциялар ёрдамида қурилган квадратур формулалар қурилиши жихатдан содда бўлиб, аниқ интегралларни, сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблашларда хамда интеграл ва сингуляр интегралар тенгламаларни ечишда ҳар хил геофизик сигналларни ҳамда тиббиёт соҳасида қўлланиладиган сигналларни тиклаш ва қайта ишлашларда кенг қўлланилмоқда.

Квадратуралар назариясининг экстремал масалалари билан сплайнлар назариясининг чамбарчас боғлиқлиги кузатилмоқда . Сплайнлар ёрдамида квадратур ва кубатур формулалар қурилмоқда. Бу сплайларни Фурье типидаги интегралларни ва сингуляр интегралларни ҳар хил функциялар синфларида тақрибий ҳисоблаш учун қўллаш мумкин.

Диссертация таркибининг қисқача тавсифи

Диссертация иши кириш, 3 - та боб, хулоса, фойдаланилган адабиётлар рўйхати ва иловадан ташкил топган. Мазкур диссертация ишининг биринчи бобида "Функцияларни интерполяциялаш масаласи, интерполяцион кўпҳадларнинг мавжудлиги ва ягоналиги, айрим классик интерполяцион кўпҳадлар, сплайн функциялар ва уни ахамияти" ҳақида батафсил маълумотлар берилган. Диссертация ишининг иккинчи бобида "Жадвал кўринишида берилган функцияларни сплайн функциялар билан яқинлаштириш, биринчи даражали интерполяцион сплайн функция асосида локал интерполяцион кубик спайн функция қурилди, бир локал интерполяцион кубик сплайн функциянинг қурилди ҳамда берилган аниқ маълумотлар асосида локал интерполяцион кубик сплайн функция қурилди. Диссертация ишининг учинчи бобида эса иккинчи бобда қурилган бир локал интерполяцион кубик сплайн функция хатоликларини баҳолашда фойдаланиладиган айрим маълумотлар ва синфлар ҳақида маълумотлар берилган. Биринчи даражали сплайн функциянинг хатолигини баҳоланган. Бир локал интерполяцион кубик сплайн функциянинг узлуксиз функциялар синфида ҳамда функциянинг ўзи, биринчи тартибли ҳосиласигача узлуксиз функциялар синфида хатолигини баҳоланган.

I Боб. Функцияларни интерполяциялаш масаласи

1.1. Функцияларни интерполяциялаш масаласи. Интерполяцион кўпҳадларнинг мавжудлиги ва ягоналиги

Ҳисоблаш математикасини аксарият ҳисоблаш методлари масаланинг қўйилишида қатнашадиган функцияларни унга бирор, муайян маънода яқин ва кўриниши соддароқ бўлган функцияларга алмаштириш ғоясига асосланган.

Функцияларни яқинлаштириш масаласининг энг содда ва жуда кенг қўлланиладиган қисми функцияларни интерполяциялаш масаласидир.

Интерполяциялаш масаласининг асосий моҳияти қуйидагидан иборат.

Фараз қилайлик, бирор $[a,b]$ оралиқда $y = f(x)$ функция берилган ёки ҳеч бўлмаганда унинг $f(x_0), f(x_1),..., f(x_n)$ қийматлари маълум бўлсин, шу $[a,b]$ оралиқда аниқланган ва ҳисоблаш учун қулай бўлган қандайдир функциялар $\{P(x)\}$ синфини , масалан кўпхадлар синфини оламиз.

Берилган $y = f(x)$ функцияни $[a,b]$ оралиқда интерполяциялаш масаласи, шу функцияни берилган синфнинг шундай $P(x)$ функцияси билан тақрибий равишда

$$f(x) \approx P(x)$$

алмаштиришдан иборатки, $P(x)$ берилган $x_0, x_1, x_2,..., x_n$ нуқталарда $f(x)$ билан бир хил қийматларни қабул қилсин:

$$P(x_i) = f(x_i) \quad (i = \overline{0,n})$$

Бу ерда кўрсатилган $x_0, x_1, x_2,..., x_n$ нуқталар *интерполяция тугунлари* ёки шунчаки *тугун нуқталар* ҳам дейилади, $P(x)$ функция эса, *интерполяцияловчи функция* дейилади.

Агар $\{P(x)\}$ функция сифатида даражали кўпхадлар синфи олинса, у ҳолда *интерполяциялаш алгебраик* дейилади.

Алгебраик интерполяциялаш аппарати ҳисоблаш математикасининг жуда кўп соҳаларида қўлланилади, чунончи, дифференциаллаш ва интеграллашда трансцендант, дифференциал ва интеграл тенгламаларни тақрибий ечишларда кўп қўлланилади.

Интерполяцион кўпҳадларнинг мавжудлиги ва ягоналиги.

Бу мавзуни алгебраик интерполяциялаш масаласи юзасидан кўриб чиқамиз.

Интерполяциялаш масаланинг қўйилиши қуйидагича:

Даражаси n дан юқори бўлмаган шундай кўпҳад қурилсинки, у берилган $(n+1)$ та

$$x_0, x_1, ..., x_n$$

тугун нуқталарда берилган $f(x)$ функциянинг

$$f(x_0), f(x_1), f(x_n)$$

қийматларни қабул қилсин.

Бу масалани геометрик нуқтаи назардан қуйидагича талқин қилиш мумкин.

Даражаси n дан ошмайдиган шундай $P(x)$ кўпҳад қурилсинки, унинг графиги берилган $(n+1)$ та $M_K(x_k, f(x_k))$ $k=\overline{0,n}$ нуқталардан ўтсин.

Демак шундай

$$P(x) = C_0 + C_2 x^2 + ... + C_n x^n \qquad (1.1.1)$$

кўпҳад қуриш талаб қилинсин. Бу ерда $C_0, C_1, C_2, ..., C_n$ номалум коэффицентлар. Бу коэффицентларни $C_m (m=\overline{0,n})$ шундай аниқлаш керакки, кўпҳад учун ушбу

$$P(x_k) = f(x_k), \qquad k=\overline{0,n} \qquad (1.1.2)$$

тенгликлар бажарилсин. (1.1.1) дан

$$C_0 + C_1 x_k + C_2 x_k{}^2 + ... + C_n x_k^n = p(x_k), \qquad k=\overline{0,n} \qquad (1.1.3)$$

(1.1.2) асосан (1.1.3) даги $p(x)$ ўрнига $f(x_k)$ ни қўямиз.у холда (1.1.3) қуйидаги кўринишни олади.

$$C_0 + C_1 x_k + C_2 x_k^2 + \ldots + C_n x_k^n = f(x_k), \qquad k = \overline{0,n} \tag{1.1.4}$$

(1.1.4) ни k нинг ҳар бир қиймати учун очиб ёзсак , $C_m (m = \overline{0,n})$ ларга нисбатан $(n+1)$ номаълумли $(n+1)$ та алгебраик тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} C_0 + C_1 x_0 + C_2 x_0^2 + \ldots + C_n x_0^n = f(x_0), \\ C_0 + C_1 x_1 + C_2 x_1^2 + \ldots + C_n x_1^n = f(x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_0 + C_1 x_n + C_2 x_n^2 + \ldots + C_n x_n^n = f(x_n). \end{cases} \tag{1.1.5}$$

Масала мазмунидан аниқки, x_k нуқталар бир-биридан фарқли, демак бу детерминант нолдан фарқлидир. Шунинг учун ҳам (1.1.5) система ва шу билан бирга қўйилган интерполяция масаласи ягона ечимга эга. Бу системани ечиб, C_m ларни топиб (1.1.1) га қўйса, $P(x)$ кўпҳад аниқланади.

1.2. Айрим классик интерполяцион кўпҳадлар

Лагранж интерполяцион кўпҳади

Функцияларни интерполяциялаш масаласи бўйича дастлаб классик интерполяцион кўпҳадлар қурилган. Шулардан Лагранж интерполяцион кўпҳади, Нютон интерполяцион кўпҳади ва бошқалар.

Классик интерполяцион кўпҳадларни имкониятлари қисман чегараланган. Классик интерполяция масаласида кўпҳадлар $[a.b]$ оралиқни ўзида қурилади. Тугун нуқталарни қанча кўпайтирсак яқинлашиш шунча яхши бўлади. Лекин қурилаётган кўпҳаднинг даражаси тугун нуқталар сонига боғлиқ, тугун нуқталар сони ошиши билан кўпҳаднинг даражаси ошиб боради ва кўпҳад коэффицентларини аниқлаш учун юқори тартибли алгебраик тенгламалар системасини ечишга тўғри келади. Тузилган алгебраик тенгламалар системасининг сони тугун нуқталарга боғлиқ экан, тугун нуқталар ошиши билан алгебраик тенгламалар системасининг тартиби ҳам ошиб кетади.

Биз $P(x)$ нинг ошкор кўринишини топиш учун фундаментал кўпҳадлар деб аталувчи $Q_{nj}(x)$ ларни, яъни

$$Q_{nj}(x)=\delta_i^j=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

шартларни қаноатлантирадиган n– даражали кўпҳадни қурамиз. У ҳолда

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} f(x_j)Q_{nj}(x) \tag{1.2.1}$$

изланаётган интерполяцоин кўпҳад бўлади. Ҳақиқатдан ҳам $i=0,1,2,\ldots,n$ учун

$$L_n(x_i)=\sum_{j=0}^{n} f(x_j)Q_{nj}(x_i)=\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\delta_i^j=f(x_i)$$

иккинчи томондан $L_n(x)$ n – даражали кўпҳаддир.

Энди $Q_{nj}(x)$ ни ошкор кўринишини топамиз, $j\neq i$ бўлганда $Q_{nj}(x_j)=0$, шунинг учун ҳам $Q_{nj}(x)$ кўпҳад $j\neq i$ бўлганда $x-x_i$ га бўлинади.

Шундай қилиб, n – даражали кўпҳаднинг n та бўлувчилари бизга маълум, бундан эса

$$Q_{nj}(x)=C\prod_{i\neq j}(x-x_i)$$

келиб чиқади. Номаълум кўпайтувчи C ни эса қуйидаги шартдан топамиз:

$$Q_{nj}(x_j)=C\prod_{i\neq j}(x_j-x_i)=1,\quad C=\frac{1}{\prod\limits_{i\neq j}(x_j-x_i)}\ \Rightarrow Q_{nj}(x)=\prod_{i\neq j}\frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}$$

охирги ифодани (1.2.1) га қўйсак, изланаётган кўпҳадни топамиз.

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\prod_{j\neq i}\frac{x-x_i}{x_j-x_i} \tag{1.2.2}$$

(1.2.2) кўпҳад Лагранж интерполяцион кўпҳади дейилади.

Хусусий ҳоллар.

Лагранж интерполяцион кўпҳадини $n=1$ даги хусусий ҳолини биринчи даражали интерполяцион сплайн функция деб қараш мумкин.

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$n = 2$ да квадратик интерполяцион кўпҳадга эга бўламиз, бу кўпҳад учта нуқтадан ўтувчи ва вертикал ўққа эга бўлган параболани аниқлайди.

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

Мисол: Лагранж интерполяцион кўпҳади орқали ҳисоблаймиз.

x_i	0	1	2
y_i	4	1	0

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} \cdot 4 + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} \cdot 1 + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \cdot 0 =$$
$$= 2(x-1)(x-2) - x(x-2) = x^2 - 4x + 4; \qquad L_2(x) = x^2 - 4x + 4$$

Мисол: $f(x) = x^2 - 4x + 4$ нинг қийматларидан тузилган қуйидаги жадвалдан фойдаланиб $P_n(x)$ ни топинг.

x_i	0	1	2
y_i	4	1	0

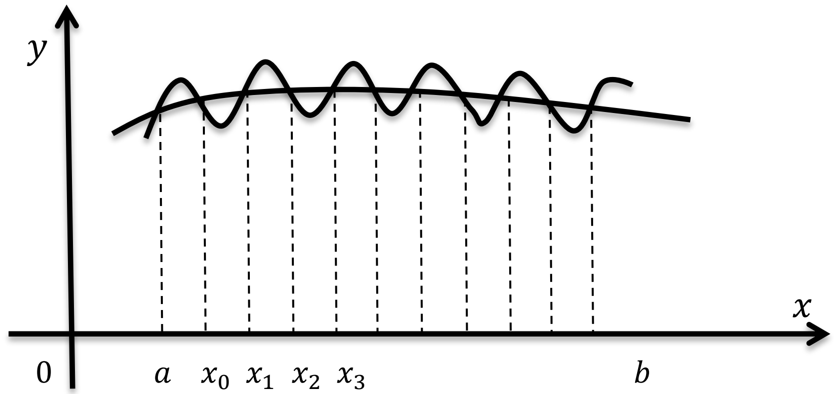
Бунда $n = 2$ га тенг бўлганлиги учун (1.1.1) ни $P_2(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2$ ва (1.1.5) тенгламалар системасининг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} C_0 + C_1 x_0 + C_1 x_0^2 = y_0 \\ C_0 + C_1 x_1 + C_1 x_1^2 = y_1 \\ C_0 + C_1 x_2 + C_1 x_2^2 = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 + C_1 \cdot 0 + C_1 \cdot 0^2 = 4 \\ C_0 + C_1 \cdot 1 + C_1 \cdot 1^2 = 1 \\ C_0 + C_1 \cdot 2 + C_1 \cdot 2^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = 4 \\ C_1 + C_2 = -3 \\ 2C_1 + 4C_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = 4 \\ C_1 = -4 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Бундан $P_2(x) = 4 - 4x + x^2 = x^2 - 4x + 4$ га тенг бўлади.

Лагранж интерполятцион кўпҳадининг қолдиқ ҳадини баҳолаш

Агар бирор $[a,b]$ оралиқда берилган $f(x)$ функцияни $L(x)$ интерполяцион кўпҳад билан алмаштирсак, улар интерполяция тугун нуқталарида ўзаро устма – уст тушиб, бошқа нуқталарда эса фарқ қилади, яъни $f(x)$ ва $L(x)$ функциялар орасида интерполяция масаласи бажарилади.



Шунинг учун қолдиқ ҳадни $R(x) = f(x) - L(x)$ кўринишини топиш ва уни баҳолаш билан шуғулланиш мақсадга мувофиқ. Бунинг учун интерполяция тугун нуқталарини ўз ичига олган $[a,b]$ оралиқда $f(x)$ функция $(n+1)$ – тартибли $f^{(n+1)}(x)$ узлуксиз ҳосилага эга деб фараз қиламиз. Интерполяциянинг қолдиқ ҳади $R(x)$ учун қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема: Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда $(n+1)$ – тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда Лагранж интерполятцион кўпҳадининг қолдиқ ҳадини

$$R(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{W_{n+1}(x)}{(n+1)!} \tag{1.2.3}$$

кўринишда баҳолаш мумкин. Бу ерда $\xi \in [a,b]$ бўлиб, x нинг функциясидир. $W_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ га тенг.

Исбот: (1.2.3) ни баҳолаш учун ёрдамчи $\varphi(z) = R(z) - KW_{n+1}(z)$ функцияни оламиз, бу ерда K - номаълум ўзгармас коэффицент.

Бу функциянинг $z = x_0, x_1, ..., x_n$ нуқталарда нол қийматни қабул қилиши равшан. Номаълум K коэффицентни шундай танлаймизки, $\varphi(z)$ функция $z = x \in (a, b)$ ва $x = x_i$, $(i = \overline{0, n})$ нуқталарда нол қийматини қабул қилсин. Демак

$$K = \frac{R(x)}{W_{n+1}(x)}. \qquad (1.2.4)$$

Натижада $\varphi(z)$ функция $[a,b]$ ораликнинг $n+2$ та $x_0, x_1, ..., x_n, x$ нуқталарида нолга айланади. Ролл теоремасига кўра $\varphi'(z)$ бу ораликда камида $n+1$ та нуқта нолга айланади, $\varphi''(z)$ эса камида n та нуқта ва ҳоказо, $\varphi^{(n+1)}(z)$ камида битта нуқтада нолга айланади. Айтайлик бу нуқта ξ бўлсин, $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$. Бундан $F(x)$ нинг n – даражали кўпхад эканлигини хисобга олсак:

$$\varphi^{(n+1)} = f^{(n+1)}(\xi) - L^{(n+1)} - KW_{n+1}^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(\xi) - K(n+1)! = 0 \ => K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

бўлади. Буни (1.2.4) га қўйсак у ҳолда

$$R(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{W_{n+1}(x)}{(n+1)!}$$

ҳосил бўлади. Теорема исботланди.

Чекли айирмалар асосида қурилган Ньютон интерполяцион кўпҳади

Фараз қилайлик бизга $[a,b]$ ораликда $x_0, x_1, ..., x_n$ тугун нуқталарига мос $y = f(x)$ функция ёки унинг

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$$

қийматлари берилган бўлсин.

Шу ораликда аниқланган шундай интерполяцион $H(x)$ кўпҳад тузиш талаб қилинадики, унинг даражаси тугунлар сонидан битта кам яъни n га тенг бўлсин ва интертполяция шартини қаноатлантирсин,

$$H(x_i) = f(x_i) = y_i, \ \ i = \overline{0,n} \qquad (1.2.5)$$

яъни функция жадвал кўринишда берилган бўлиб, унинг математик моделини қуриш талаб қилинади.

$H(x)$ функция $x_0, x_1, ..., x_n$ тугун нуқталарига $y = f(x)$ функциянинг мос $y_0, y_1, ..., y_n$ қийматлар берилган бўлсин ва

$$h = h_i = x_{i+1} - x_i = const, \quad i = \overline{0,n}$$

кўринишда бўлсин. Ньютон ўзининг интерполятцион формулаларини келтириб чиқаришда чекли айирмалардан фойдаланади, шунинг учун қуйида чекли айирмалар ҳақида тўхталиб ўтамиз:

Таъриф: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ айирмага 1 – тартибли чекли айирма дейилади.

Таъриф: $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ айирмага 2 – тартибли чекли айирма дейилади.

Бу ерда $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - y_{i+1} - y_{i+1} + y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$.

Демак $\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$ га тенг экан.

Умумий ҳолда:

Таъриф: $\Delta^{k+1} y_i = \Delta^k y_{i+1} - \Delta^k y_i$ айирмага k – тартибли чекли айирма де-йилади.

Ҳусусий ҳолда чекли айирмаларни қуйидаги кўринишда тасвирлаш мумкин.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		
x_3	y_3			

Мисол. Берилган тугун нуқталарда $y = f(x)$ функциянинг қийматлари берилаган бўлсин. У ҳолда чекли айирмалар қуйидагича топилади.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1	2			
		2		
3	4		1	
		3		-3
5	7		-2	
		1		
6	8			

Ньютон ўзининг 1 – интерполятцион кўпҳадини чекли айирмалардан фойдаланиб қуйидаги кўринишда излайди:

$$\begin{aligned} H(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \\ &+ a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

Бу кўпҳаддаги $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ларни шундай танлаймизки, натижада (1.2.5) интерполяция шартини қаноатлантирсин.

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ коэффицентларни топиш учун (1.2.6) - га $x_i,\ (i = \overline{0,n})$ тугун нуқталарни кетма – кет қўйиб мос чизиқли алгебраик тенгламалар система-сидан $a_i,\ (i = \overline{0,n})$ коэффицентларни топамиз.

$$\begin{cases} H(x_0) = a_0 \\ H(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \\ H(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H(x_n) = a_0 + a_1(x_n - x_0) + \ldots + a_n(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1}) \end{cases} \tag{1.2.7}$$

(1.2.7) - системани $n = 2$ учун ҳисоблаб $a_i\ \left(i = \overline{0,n}\right)$ ни ҳисоблашнинг умумий кўринишини топамиз.

$$x = x_0 \Rightarrow \; H(x_0) = f(x_0) = y_0 = a_0 \;\; => \; a_0 = y_0$$
$$x = x_1 \;\Rightarrow H(x_1) = f(x_1) = y_1 = y_0 + a_1(x_1 - x_0)$$
$$y_1 - y_0 = a_1(x_1 - x_0) => a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad => a_1 = \frac{\Delta y_0}{1!h}$$
$$x = x_2 \;\Rightarrow H(x_2) = f(x_2) = y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$
$$=> y_2 - y_0 - 2\Delta y_0 = 2h^2 a_2 \;\Rightarrow y_2 - y_0 - 2y_1 + 2y_0 = 2h^2 a_2 \;=>$$
$$y_2 - y_1 - (y_1 - y_0) = 2h^2 a_2 \;\; => \;\; a_2 = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{2!h^2} \;\; => \; a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$$

Топилган a_0, a_1, a_2 лардан фойдаланиб $a_i \left(i = \overline{0,n}\right)$ ни ҳисоблашнинг умумий ҳолатда қуйидагича ифодалаймиз:

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!h^i}, \quad i = \overline{0,n}$$

a_i ларни (1.2.7) - га қўйиб:

$$H(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \qquad (1.2.8)$$

ни ҳосил қиламиз. (1.2.8) - формула Ньютоннинг биринчи интерполяцион формуласи деб аталади. Агар (1.2.8) - ни иккита ҳадини олсак, у ҳолда

$$y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) \; => \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

тўғри чизиқ тенгламаси келиб чиқади.

Агар (1.2.7) - формулада $x \to 0$ лимитга ўтсак, у ҳолда

$$\lim_{h \to 0} H(x) = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y_0^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n$$

Тейлор формуласи ҳосил бўлади.

Амалий масалаларни ечишда Нютоннинг биринчи интерполяцион формуласига янги ўзгарувчи киритиш талаб қилинади, яъни:

$$q = \frac{x - x_0}{h} \;\; => \frac{x - x_1}{h} = \frac{x - (x_0 + h)}{h} = q - 1$$

Буларни (1.2.8) - тенгликка қўйсак

$$H(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} q(q-1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q-1)\ldots(q-n+1)$$

кўринишда бўлади.

Мисол.

x_i	0.5	1	1.5	2
y_i	1	3	7	19

Жадвалда берилган $y = f(x)$ функция қийматлари ёрдамида $H(x)$ Ньютон интерполяцион кўпҳадини қуринг.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0.5	1			
		2		
1	3		2	
		4		6
1.5	7		8	
		12		
2	19			

Ечиш: Демак функция жадвал кўринишда берилган, яъни

$$x_0 = 0.5,\ x_1 = 1,\ x_2 = 1.5,\ x_3 = 2 \text{ ва } y_0 = 1, y_1 = 3,\quad y_2 = 7, y_3 = 19$$

Берилганлар асосида қуйидаги чекли айирмаларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta y_0 = 12,\ \Delta^2 y_0 = 8,\ \Delta^3 y_0 = 6$$

Тугунлар сони тўртта бўлганлиги учун 3 – даражали Ньютоннинг 1 – интерполяцион кўпҳади қуйидагича бўлади:

$$H(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

бўлади. Берилганларга асосан $H(x)$ ни қуйидагича ёзамиз:

$$H(x) = 1 + \frac{2}{1!0.5}(x - 0.5) + \frac{2}{2!0.25}(x - 0.5)(x - 1) + \frac{6}{3!0.125}(x - 0.5)(x - 1)(x - 1.5)$$

Бу ерда $H(x)$ ни соддалаштирсак

$$H(x) = 8x^3 - 20x^2 + 20x - 5$$

келиб чиқади.

1.3. Сплайн функциялар ва уни аҳамияти

Жадвал кўринишда берилган функцияни силлиқ тиклаш учун ташкил этувчи кўпҳадлар даражасини ошириш керак. Тикловчи кўпҳад коэффициентлари кўпҳадларнинг қўшни оралиқларда силлиқ туташиши шартидан, яъни тўр тугунларидаги интерполяции шарти ва бир ораликдан иккинчисига силлиқ ўтиш учун қидирилаётган функция ва унинг ҳосилаларининг [a,b] да узлуксиз бўлиши талаб қилинади. Бунда ҳосил бўлган бир жинсли структурага эга силлиқ бўлакли-кўпҳад функциялар (бир хил даражали кўпҳадлардан тузилган) *сплайн функциялар* ёки шунчаки *сплайнлар* деб аталади. Сплайнлар орасида кўпҳад бўлакларидан тузилган полиномиал сплайнлар муҳим рол ўйнайди. Бундай сплайнлар ривожи ва уларнинг оммалашишига И.Ж.Шенберг (США, 1946) нинг ишлари кўп ҳисса қўшди.

Сплайн функциялар назарияси ривожи, уларни қуриш ва татбиқ қилиш устида таниқли математик олимлар И.Ж.Шёнберг [21], C.de Boor [30], [31], J.L.Holladay [35], Дж.Альберг, Э.Нильсон, Дж.Уолш [17], С.Б.Стечкин, Ю.Н.Субботин [23], L.L.Schumaker [34], Б.Д.Божанов [29], Ю.С.Завьялов, Б.И.Квасов, В.Л.Мирошниченко [18], В.С.Рябенький, А.И.Гребенников [22], М.И.Исроилов [16], [26], [33], Х.М.Шадиметов, А.Р.Ҳаётов [19], [20], [27], С.А.Бахромов [25] ва бошқалар иш олиб борганлар.

Регуляр ва сингуляр интегралларни, Фурье типидаги интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун энг қулай аппарат локал полиномиал сплайнлардир. Мазкур сплайн функциялар ёрдамида эффектив квадратур и кубатур формулалар қуриш мумкин.

Бундай локал сплайн функцияларга В.С.Рябенкий ва А.И.Гребенников сплайн функциялари киради.

Локал интерполяцион сплайнлар интерполяцияланаётган объектга яхши яқинлашади ва қурилиши содда кўринишда бўлади. Қурилаётган сплайн функция [a,b] оралиқда эмас, балки $[x_i, x_{i+1}]$ $i = \overline{(0, n-1)}$ оралиқларда қурилади ва бу сплайн функция хар бир оралиқларда бир хил структурали кўпхадлардан иборат бўлади. Уланиш тугун нуқталарида функция ва унинг ҳосилаларининг ҳам узлуксизлиги талаб қилинади. Шунинг учун $[x_i, x_{i+1}]$ $i = \overline{(0, n-1)}$ барча оралиқларда қурилган сплайн функциялар уланиб бутун [a,b] оралиқда силлиқ бир функцияни беради.

Классик интерполяциялашда эса бутун бир [a,b] оралиқда битта функция қурилар эди. Шунинг учун хам классик интерполяциялашга нисбатан, сплайн функциялар ёрдамида қаралган интерполяциялаш масаласининг аниқлик даражаси юқори ва қурилиши жихатидан хам содда бўлади. $[x_i, x_{i+1}]$ $i = \overline{(0, n-1)}$ Оралиқларда қурилган силлиқ бўлакли кўпхадли функцияларга сплайн функциялар дейилади.

Локал сплайн-функциялар ҳакида

Ω_n турнинг $[a,b]$ кесмасида $y_i = f(x_i)$ $\left(i = \overline{0,n}\right)$ тур функция берилган бўлсин. Ушбу функцияни $S_m(x)$ ($m-$кўпхад даражаси) функция билан бўлакли-глобал усул билан яқинлаштириш (аппроксимация) қилиш талаб этилсин.

Қуйида келтирилган хусусиятларга эга бўлган $S_{m,i}(x)$ ($m-$кўпхад даражаси) функциялар бирлашмаси *сплайн-функция* ёки *сплайн* деб аталади:

1) $S_{m,i}(x)$ функциялар $[x_i, x_{i+1}]$ $\left(i=\overline{0,n-1}\right)$ қисмий кесмаларда аниқланган булса;

2) $S_{m,i}(x)$ функциялардан $[x_i, x_{i+1}]$ $\left(i=\overline{0,n-1}\right)$ қисмий кесмалар бўйича бирлаштирилган $S_m(x)=\bigcup_{i=0}^{n-1} S_{m,i}(x)$ ($m-$кўпҳад даражаси) кўпзвенали функцияни тузиш мумкин бўлса;

3) $[a,b]$ кесманинг барча нуқталарида $S_m(x)=\bigcup_{i=0}^{n-1} S_{m,i}(x)$ ($m-$кўпҳад даражаси) кўпзвенали функциянинг ўзи ва қандайдир $p-$ тартибли ҳосилалари $S_m^{(p)}(x)$ $(p=1,2,\ldots)$ ҳам узлуксиз бўлса.

Сплайн кўпхад даражаси m ва $[a,b]$ кесмада узлуксиз бўлган ҳосилаларнинг энг катта тартиби p орасидаги фарқ, яъни $q=m-p$ сплайннинг дефекти дейилади.

$[x_i, x_{i+1}]$ қисмий кесмада $y_i=f(x_i)$ $\left(i=\overline{0,n}\right)$ берилган функция учун $S_{m,i}(x)$ сплайнни қуриш учун x_i $\left(i=\overline{0,n}\right)$ тугун нуқталарда қуйидаги интерполяция шарти бажарилиши лозим:

$$S_{m,i}(x_i)=f(x_i).$$

Шунингдек, сплайнда иштирок этувчи номаълум параметрларни қийматларини аниқлаш учун $[x_{i-1}, x_i]$ ва $[x_i, x_{i+1}]$ қисмий кесмаларнинг туташган x_i туташган нуқтасида $S_{m,i-1}^{(p)}(x)$ ва $S_{m,i}^{(p)}(x)$ сплайнларнинг узлуксизлик шарти

$$S_{m,i-1}^{(p)}(x)\Big|_{x=x_i}=S_{m,i}^{(p)}(x)\Big|_{x=x_i}$$

бажарилиши талаб этилади.

Агар ҳар бир $[x_i, x_{i+1}]$ қисмий кесмадаги сплайннинг номаълум параметрлари бошқа қисмий кесмалардаги сплайнларнинг номаълум параметрларига боғлиқ бўлмаган ҳолда алоҳида топилса, бундай сплайнлар *локал сплайнлар дейилади.*

Агар ҳар бир $[x_i, x_{i+1}]$ қисмий кесмадаги сплайннинг номаълум параметрлари бошқа қисмий кесмалардаги сплайнларнинг номаълум параметрлари билан биргаликда аниқланса, бундай сплайнлар *глобал сплайнлар дейилади.*

Глобал сплайнларда қисмий кесмалардаги сплайнларнинг номаълум параметрлари чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ҳайдаш усули билан ечиш воситасида топилади.

Глобал сплайнлар локал сплайнларга альтернатива сифатида хизмат килади. Глобал усулда аппроксимация қилиш локал усулда аппроксимация қилишга нисбатан сплайн дефектининг минималлигини таъминлайди. Шу сабабли глобал сплайнлар ҳисоблаш амалиётида кенг қўлланилади.

Глобал сплайнга қуйидагича кенгроқ таъриф бериш мумкин.

$[a,b]$ кесмада аникланган ва $C_r[a,b]$ силлиқлик синфига тегишли бўлган, Ω_n турнинг ҳар бир $[x_i, x_{i+1}]$ қисмий кесмаларида аниқланган $S_{m,i}(x)$ $\left(i=\overline{0,n-1}\right)$ кўпҳадларнинг бирлашмасидан тузилган $S_m(x)=\bigcup\limits_{i=0}^{n-1} S_{m,i}(x)$ функция m даражали ва дефекти q $(0 \le r \le m, \quad q = m - r)$ га тенг бўлган *глобал сплайн* дейилади, агарда ҳар бир $[x_i, x_{i+1}]$ $\left(i=\overline{0,n-1}\right)$ қисмий кесмалардаги $S_{m,i}(x)$ $x \in [x_i, x_{i+1}]$ сплайн функцияларни

$$S_{m,i}(x) = \sum_{k=0}^{m} a_{k,i}(x - x_i)^k$$

$a_{k,i}$ коэффициентли m даражали кўпҳадлар кўринишида тасвирлаш мумкин бўлса ва ушбу $a_{k,i}$ коэффициентлар қуйидаги интерполяция ва узлуксизлик шартларидан аниқланса:

$$S_{m,i}^{(p_1)}(x)\big|_{x=x_j} = f^{(p_1)}(x)\big|_{x=x_j}, \qquad j = i, i+1,$$

$$S_{m,i-1}^{(p_2)}(x)\big|_{x=x_i} = S_{m,i}^{(p_2)}(x)\big|_{x=x_i}, \qquad i = \overline{1, n-1}.$$

p_1 $(0 \le p_1 \le r)$ ва p_2 $(0 \le p_2 \le r)$ ҳосилалар тартибига мос келувчи бутун қийматларни қабул қиладиган ўзгармас сонлардир.

Сплайн функцияларни классик интерполяцион кўпҳадларга нисбатан афзалликлари

Интерполяцион сплайн функциялар, яқинлашиш борасида энг яхши яқинлашувчи классик интерполяцион кўпҳадларга нисбатан яхшироқдир.

Классик интерполяцион кўпҳадларга мисол Лагранж интерполяцион кўпҳади. $[a, b]$ оралиқда $L_n(x)$ қурилади. $[a, b]$ оралиқда $L_n(x)$ билан $f(x)$ функция орасидаги хатолик баҳоланади.

$L_n(x)$ $x \in [a, b]$ $|L_n(x) - f(x)| \to [a, b]$

Лагранж интерполяцион кўпҳади битта қурилади ва биз қидираётган f(x) функцияни $[a, b]$ оралиқда интерполяциялайди. Лагранж интерполяцион кўпҳадининг қурилиши тугун нуқталарга боғлиқ бўлиб тугун нуқталарни қанча кўп олсак шунча яқинлашувчи бўлади.

Тугун нуқталар ошиши билан унинг тезлиги яхши яқинлашади. Тугун нуқталар ошиши яқинлашишни яхши таъминлагани билан тикланаётган функцияни коэффициентларини топиш a_0, a_1, a_2, a_3, $\ldots a_n$ тугун нуқталар ошиши билан қийинлашиб боради. Тугун нуқталар ошиши билан тенгламалар системасининг тартиби ошиб боради ва тенламалар системасини ечиш қийинлашади.

Сплайн функция $[a, b]$ оралиқ n та бўлакларга бўлингандан кейин битта бўлакчасида $f(x)$ функцияни интерполяциялайди.

$x = [x_i; x_{i+1}]$ $S_n(x) \approx f(x)$ $i = 0, \ldots n - 1$

шундай ҳолда ҳам битта оралиқчада қурилганига қарамасдан

$x \in [a, b]$ да $S(x) \approx f(x)$ $f(x)$ функцияни классик интерполяцион кўпҳадларга нисбатан яхши яқинлаштиради.

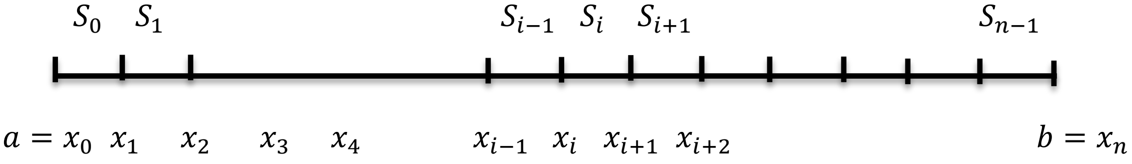
1) $[x_i; x_{i+1}]$ ораликда қурилган сплайнни

$$S_i(x) = a^* x_i^3 + b^* x_i + c$$

i ни ўрнига $i + 1$ қўйсак $S_{i+1}(x)$ ҳосил бўлади, оралиқчаларида қурилган сплайнлар бир хил структурали сплайн функциялар ҳисобланади натижада

$$S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1} = S(x)$$

2) Сплайн функция тугун нуқталарга боғлиқ эмас. Тугун нуқталарни ихтиёрий олганда ҳам $[a, b]$ оралиқни n та бўлакка бўлиниб битта оралиқчада сплайн функция қурилади.



$S_0(x)$, $x = [x_0; x_1]$

$S_1(x)$, $x = [x_1; x_2]$

…………………………..

$S_i(x), \qquad x = [x_i; x_{i+1}]$

$S_{i+1}(x), \quad x = [x_{i+1}; x_{i+2}]$

$S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$ сплайн функциялар бир хил структурали сплайн функциялари бўлиб, i ни қийматини биттага ошириб ёки биттага камайтириб қолган функциялар автомат равишда қурилади.

$S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$

$S_i(x) = a_i^* x + b_i$

$S_{i+1}(x) = a_{i+1}^* x + b_{i+1}$

$i \rightarrow i+1$

i ни ўрнига $i+1$ ни қўйсак

$S_i \rightarrow S_{i+1}$

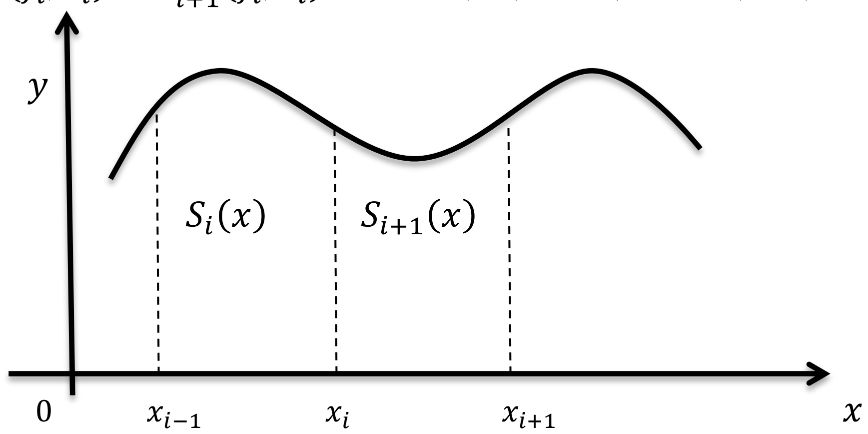
$i \rightarrow i-1$

i ни ўрнига $i-1$ ни қўйсак

$S_i \rightarrow S_{i-1}$

$S(x) = \sum_{i=0}^{n-1} S_i$

$S_i^{(k)}(f_i, x_i) = S_{i+1}^{(k)}(f_i, x_i) \qquad i = 0, \dots, n-1, \;\; k = 0, \dots, m$



$$S_i^{(m)}(x_i) = S_{i+1}^{(m)}(x_i)$$

…………………

$$S_i^{('')}(x_i) = S_{i+1}^{('')}(x_i)$$

$$S_i^{(')}(x_i) = S_{i+1}^{(')}(x_i)$$

$$S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i) \qquad (1.3.1)$$

$$S_i^{(')}(x_i) = S_{i+1}^{(')}(x_i) \qquad (1.3.2)$$

$$S_i^{('')}(x_i) = S_{i+1}^{('')}(x_i) \qquad (1.3.3)$$

Агар (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3) - шартлар бажарилса сплайн функция ҳақиқий талаб даражасига тўла жавоб берадиган сплайн функция дейилади.

Сплайн функциянинг нуқсони (дефекти)

Агар сплайн функция 3-даражали бўлса ва (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3) - шартлар бажарилса бу қурилган кубик сплайнни дефекти 1га тенг дейилади.

Агар (1.3.3) - шарт бажарилмаса кубик спллайнни дефекти 2 га тенг дейилади.

1- боб бўйича хулоса

Ушбу бобда функцияларни интерполяциялаш, интерполяцион кўпҳадларнинг мавжудлиги ва ягоналиги масаласи қаралган. Лагранж интерполяцион кўпҳади, Лагранж интерполятцион кўпҳадининг қолдиқ ҳадини баҳолаш, чекли айирмалар асосида қурилган Ньютон интерполяцион кўпҳади асосида аниқ мисоллар кўрилган. Сплайн функциялар ва уни ахамияти, локал сплайн-функциялар ҳакида батафсил маълумотлар келтирилган. Сплайн функцияларни классик интерполяцион кўпҳадларга нисбатан афзалликлари ёритиб берилган. Сплайн функциянинг нуқсони (дефекти) тушунчасига таъриф келтирилган.

II Боб. Интерполяцион кубик сплайнларни қуриш

2.1. Жадвал кўринишида берилган функцияларни сплайн функциялар билан яқинлаштириш

Функцияларни яқинлаштириш масаласи

Фараз қилайлик, $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ етарлича силлиқ ва ҳисоблаш учун қулай бўлган чизиқли эркли функциялар системаси бўлсин. Бу функциялардан тузилган

$$P_n(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) \tag{1.2.1}$$

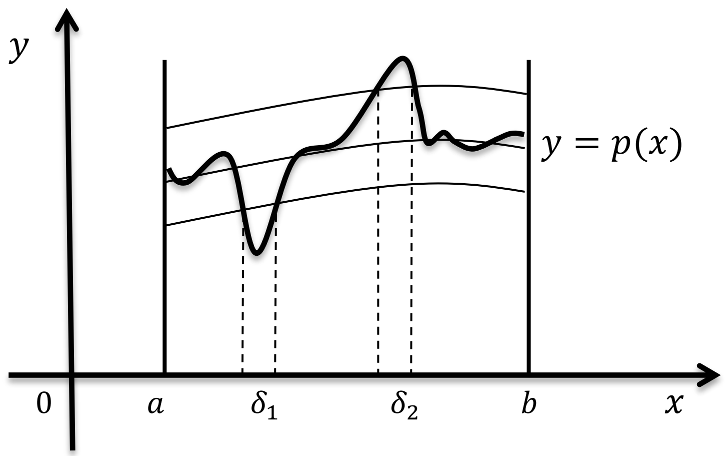
Чизиқли комбинация ($c_0, c_1, \dots, c_n -$ *доимий сонлар*) *умумлашган кўпҳад* дейилади. Берилган $f(x)$ функцияни интерполяциялаш йўли билан $P_m(x)$ орқали тақрибий равишда алмаштириш масаласини кўрган эдик. Аммо шуни ҳам таъкидлаб ўтиш лозимки, қатор масалаларда функциянинг бундай тақрибий тасвирланиши мақсадга мувофиқ бўлавермайди. Биринчидан, тугунлар сони кўп бўлса, у ҳолда интерполяцион кўпҳадларининг ҳам даражаси ортиб боради, лекин бу яқинлашишнинг сифати ҳар доим ҳам яхши бўлмаслиги мумкин. Иккинчидан, $f(x)$ функциянинг тугун нуқталардаги қиймати бирор тажрибадан аниқланган бўлиши ҳам мумкин, у ҳолда табиий равишда бу қийматлар тажриба хатосига эга бўлиб, у интерполяцион кўпҳадга ҳам таъсир қилади ва шу билан функциянинг ҳақиқий ҳолатини ҳам бузиб кўрсатади.

Қандайдир маънода бу камчилик холи бўлган ўрта квадратик яқинлашувчи кўпҳадларни тузиш билан шуғулланиш мақсадга мувофиқдир. Шундай қилиб, биз функциялар учун ўрта квадратик маънода яқинлашиш масаласи қўйилишининг мақсадга мувофиқ эканлигига ишонч ҳосил қилдик. Бу масала қўйдагидан иборатдар: $[a, b]$ ораликда аниқланган $f(x)$ функция учун (1.2.1) кўринишдаги яқинлашувчи шундай кўпҳад топилсинки,

$$\int_a^b [f(x) - P_m(x)]^2 dx \tag{1.2.2}$$

ифода мумкин қадар энг кичик қийматни қабул қилсин.

Агар (1.2.2) интеграл кичик қиймат қабул қилса, бу шуни билдирадики, $[a, b]$ оралиқнинг кўп қисмида $f(x)$ ва $P_m(x)$ бир-бирига яқин. Шунга қарамасдан айрим нуқталар атрофида ёки бу оралиқнинг баъзи кичик қисмларида $f(x) - P_m(x)$ айирма нисбатан етарлича катта бўлиши ҳам мумкин (чизма).



Қуйидаги (1.2.3)

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x) - P_m(x)]^2 dx}$$

миқдор $P_m(x)$ нинг $f(x)$ дан *ўрта квадратик оғиши* дейилади ва $f(x)$ ни $P_m(x)$ билан яқинлашишда ўрта квадратик маънодаги хатони билдиради.

Агар $f(x)$ ни ўрта квадратик маънода $P_m(x)$ билан яқинлаштиришда қандайдир сабабга кўра қаралаётган оралиқнинг бирор қисмида унинг бошқа қисмига нисбатан аниқроқ яқинлаштириш керак бўлса, у ҳолда кўпинча қўйидагича иш тутилади: *вазн* деб аталувчи махсус равишда танлаб олинган манфий бўлмаган $\rho(x)$ функция олиниб, (1.2.2) ўрнига ушбу

$$\int_a^b \rho(x)[f(x) - P_m(x)]^2 dx$$

интегралнинг энг кичик қийматни қабул қилиши талаб қилинади. Бу ерда $\rho(x)$ шундай танланган бўлиши кераккки, агар оралиқнинг бирор нуқтаси атрофига яқинлашиш аниқлиги бошқа нуқталарга нисбатан яхшироқ бўлиши талаб қилинса $\rho(x)$ шу нуқта атрофида каттароқ қийматга эга бўлиши керак. Масалан, $[-1, 1]$ оралиқда $f(x)$ функцияни $P_m(x)$ функция билан яқинлаштиришда яқинлаштириш аниқлигининг оралиқнинг четки нуқталар $x = \pm 1$ атрофида юқори бўлишини истасак, $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ деб олиш мумкин.

Агар $f(x)$ функциянинг аналитик кўриниши ўрнига, унинг фақат $(n+1)$ та $x_0, x_1, \dots, x_n$, нуқталардаги қийматларигина маълум бўлса, у ҳолда (1.2.2) интеграл ўрнига ушбу

$$\sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - P_m(x)]^2$$

(1.2.4) - йиғиндининг мумкин қадар кичик қиймат қабул қилишлиги талаб қилинади. Бу ҳолда

$$\delta_n = \sqrt{\frac{1}{(n+1)} \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - P_m(x_i)]^2}$$

миқдор *ўрта квадратик оғиш* дейилади. Ўрта квадратик яқинлаштириш усули *энг кичик квадратлар усули* ҳам дейилади.

$f(x_i)$ ларнинг аниқлиги бир хил бўлмаса, масалан ҳар хил аниқликка эга бўлган турли асбоблар ёрдамида ҳисобланган бўлса, у ҳолда биз аниқлиги катта бўлган қийматларга кўпроқ ишонч билан каттароқ “вазн” беришимиз керак. Бунинг учун x_i нуқтадаги вазн деб аталувчи махсус танланган $\rho_i > 0$ сонларни олиб, (1.2.4) йиғинди ўрнига ушбу

$$\sum_{i=0}^{n} \rho_i [f(x_i) - P_m(x)]^2$$

вазний йиғиндини минималлаштиришимиз керак. Бу вазнлар одатда уларнинг йиғиндиси бирга тенг бўладиган қилиб танланади:

$$\sum_{i=0}^{n} \rho_i = 1$$

Агар (1.2.3) билан аниқланган ўрта квадратик оғиш δ кичик бўлса, $[a, b]$ оралиқнинг аксарият нуқталарида

$$|f(x) - P_m(x)|$$

айирма қиймати кичик бўлади. Лекин шунга қарамасдан айрим кичик оралиқчаларда бу миқдор катта бўлиши ҳам мумкин. Аниқроғи, фараз қилайлик $[a, b]$ оралиғида $|f(x) - P_m(x)|$ нинг экстремумлари сони чекли бўлиб, γ ихтиёрий мусбат сон бўлсин. Фараз қилайлик, $s_1, s_2, \dots, s_k$ўзаро кесишмайдиган $[a, b]$ дан олинган шундай оралиқчалар бўлсинки,

$$|f(x) - P_m(x)| \geq \gamma$$

тенгсизлик қаноатлантирадиган нуқталар шу s_i ларга тегишли бўлиб, σ шу оралиқчалар узунликлари йиғиндиси бўлсин. Агар $\delta < \varepsilon$ (қ. (1.2.3)) бўлса, у ҳолда

$$\varepsilon^2(b-a) > \int_a^b [f(x) - P_m(x)]^2 \, dx \geq \sum_{i=1}^{k} \int_{s_i} [f(x) - P_m(x)]^2 dx \geq \gamma^2 \sigma$$

бўлади. Бундан эса

$$\sigma < (b-a)\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^2$$

Демак, агар ε етарлича кичик бўлса, σ исталганча кичик бўлади. Шундай қилиб, ε етарлича кичик бўлса $[a, b]$ оралиқнинг ўлчови исталганча кичик σ дан ортмайдиган нуқталар тўпламидан ташқари бошқа ҳам нуқталарда

$$|f(x) - P_m(x)| < \gamma$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Лекин айрим ҳолларда яқинлаштирилувчи кўпҳадга оғиррок шарт қўйилади, чунончи, $[a, b]$ оралиқнинг барча нуқталарида $f(x)$ нинг $P_m(x)$ дан оғиши берилган миқдордан кичик бўлиши талаб қилинади. Биз $f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз ва $P_m(x)$ алгебраик кўпҳад бўлган ҳолни кўрамиз.

Фараз қилайлик , $H_n(P)$ даражаси n дан ортмайдиган

$$P_n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

алгебраик кўпҳадларнинг тўплами бўлсин. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз ва $P_n(x) \in H_n(P)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ нинг $P_n(x)$ дан $[a, b]$ оралиқда оғишини, яъни

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - P_n(x)|$$

ни $E_n(f, P_n)$ орқали белгилаймиз. Бу миқдор $P_n(x)$ кўпҳад коэффициентлари $a_0, a_1, \dots, a_n$ нинг функцияси бўлиб, у манфий эмас ҳамда бу миқдор манфий бўлмаган аниқ қуйи чегарага эга бўлади:

$$E_n(f) = \inf_{P_n \in H_n(P)} E_n(f, P_n)$$

агар шундай $P_n^*(x)$ кўпҳад мавжуд бўлиб,

$$E_n(f, P_n^*(x)) = E_n(f)$$

тенглик бажарилса , у ҳолда $P_n^*(x)$ *кўпҳад энг яхши текис яқинлашувчи кўпҳад ва* $E_n(f)$ *энг кичик оғиш ёки* $f(x)$ *нинг* n*- даражали кўпҳад билан энг яхши яқинлашиши* дейилади.

ЭҲМ ларда функцияларни ҳисоблаш учун стандарт программалар тузиш берилган $f(x)$ учун $E_n(f)$ берилган ε дан кичик бўладиган $P_n^*(x)$ кўпҳадни топиш талаб қилинади.

50-йиллардан бошлаб математикада *сплайн-яқинлашиши* ёки *бўлакли кўпҳадлар билан яқинлашиш* деб аталувчи янги типдаги яқинлашиш ўргалинмоқда [16].

Функцияларни сплайн функциялар билан яқинлаштириш

Силлиқлиги юқори бўлмаган функциялар учун кўпҳадлар яқинлашиш аппарати сифатида қатор ноқўлайликларга эга. Булардан энг асосийси шундан иборатки, бундай функцияларнинг бирор нуқта атрофидаги ҳолати, уларнинг тўла ҳолати билан узвий боғлиқдир. Бундан ташқари интерполяцион кўпҳадларнинг нуқсони сифатида уларнинг ҳар доим ҳам интерполяционланувчи функцияга яқинлашавермаслигидир. Энг яхши текис яқинлашувчи кўпҳадларнинг камчилиги сифатида шуни кўрсатиш мумкинки, уларни қуриш жуда қийин ва одатда бундай кўпҳаднинг даражаси ортиши билан коэффициенлари ҳам тез ўсиб боради. Охирги вақтларда шу нуқсондан ҳоли бўлган бошқа яқинлашиш аппаратларни ишлаб чиқилмоқда. Назарий тадқиқот ва татбиқларда яхши натижа берадиган аппарат – сплайн функциялар аппаратидир. Сплайннинг таърифи билан танишайлик. Ҳақиқий ўқдаги $[a, b]$ оралиқда ушбу:

$$\Delta_n: a = x_0 < x_1 <\ldots< x_n = b$$

тўр берилган бўлсин. Фараз қилайлик, $H_m(P)$ даражаси m дан ортмайдиган кўпҳадлар тўплами, $C^k = C^k[a, b]$ ўзи ва k −тартибгача ҳосилалари $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлган функциялар тўплами бўлсин**.**

Таъриф: Қуйидаги иккита шартни қаноатлантирувчи ушбу

$$S_m(x) = S_m(x, \Delta_n)$$

функция дефекти 1га тенг m- даражали полиноминал сплайн дейилади:

1. Ҳар бир $[x_i, x_{i+1}]$ $i = (\overline{0, n-1})$ оралиқда $S_m(x) \in \mathrm{H}_m(p)$

2. $S_m(x) \in C^{m-1}[a, b]$.

Бу ердаги $\{x_i\}$ нуқталар сплайн тугунлари дейилади. $S_m(x)$ сплайнинг ***m***-ҳосиласи $[a, b]$ оралиқда узилишга эга бўлиши ҳам мумкин.

Агар $k = 0,1, \ldots, m-1$ лар учун

$$S_m^{(k)}(a+0) = S_m^{(k)}(b-0)$$

тенгликлар бажарилса, $S_m(x)$ сплайн $\mathrm{b-a}$ даврли даврий сплайн дейилади.

$f(x)$ функциянинг Δ тўрнинг x_i тугунларидаги $f_i = f(x_i)$ қийматлари маълум бўлсин. $S_m(x)$ сплайн интерполяцион деб аталади, агарда қуйидаги шарт бажарилган бўлса

в) $S_m(x_i) = f_i$, $i = 0,1, \ldots, N$.

Таърифни қаноатлантирувчи сплайнлар билан бир қаторда шундай сплайнлар ҳам қараладики, уларнинг силлиқлиги Δ_n тўрнинг турли қисмларида турличадир. Бундай сплайнлар $[a,b]$ оралиқнинг турли қисмларида турли силлиқликка эга бўлган функцияларни яқинлаштиришда фойдаланилади.

Сплайн ягона равишда аниқланиши учун $[a,b]$ оралиқнинг четки a ва b нуқталарида чегаравий шартлар деб аталувчи қўшимча шартлар қўйилади. Амалда учинчи даражали, яъни кубик сплайнлар кенг қўлланилади.

Сплайнларнинг хисоблаш математикасида кенг қўлланилаётганлиги сабабларидан яъна бири уларнинг қийматларини ЭҲМ ларда ҳисоблашнинг қулайлиги ва улар ёрдамида интерполяциялаш каби жараёнларнинг кенг синфдаги тўрлар учун яхши яқинлашишлигидадир [16], [24].

2.2. Биринчи даражали интерполяцион сплайн функция асосида локал интерполяцион кубик спайн функция қуриш

Таъриф. Қуйидаги тўрт шартни қаноатлантирувчи ушбу $S(f,x) = S_3(x,\ f,\ \Delta_n\ )$ функция ***интерполяцион кубик сплайн*** дейилади:

1. Ҳар бири $[x_i, x_{i+1}]$ $\left(i = \overline{0,n}\right)$ оралиқда $S(f,x) \in\ H_3(P)$;
2. $S(f,x) \in C^2[a,b]$;
3. Тўрнинг $x_k(k = \overline{0,n})$ тугунларида $S(f,x_k) = f_k$ тенглик ўринли;
4. $S''(f,x)$ учун

$$S''(f,a) = S''(f,b) = 0 \qquad (2.2.1)$$

чегаравий шартлар бажарилади.

Бу тўрт шартни қаноатлантирувчи ягона $S(f,x)$ сплайн мавжудлигини кўрсатамиз. Бунинг учун аввал қуйидаги ёрдамчи фактларни келтирамиз.

Лемма. Фараз қилайлик, $A = [a_{ij}]$ $n-$ тартибли квадрат матриcанинг элементлари

$\min_{1\le i\le n}\{|a_{ij}| - \sum_{i\neq j}|a_{ij}|\} = q >$ (2.2.2)

шартни қаноатлантирсин. У ҳолда $A\overline{x} = \overline{b}$ система ягона ечимга эга бўлиб , унинг ечими

$\max_{1\le k\le n}|x_k| \le q^{-1}\max_{1\le k\le n}|b_k|$ (2.2.3)

тенсизликни қаноатлантиради.

Исбот. Агар $A\overline{x} = \overline{b}$ системанинг озод ҳадлари нолга тенг бўлса, у ҳолда (2.2.3) - тенгсизликдан бу системанинг фақат тривиал ечимга эга эканлигини, демак, $\det A \neq 0$ бўлиши ва бу системанинг ихтиёрий озод ҳадлар учун ягона ечимга эгалиги келиб чиқади. Шунинг учун ҳам леммани исбот қилиш учун (2.2.3) - тенгсизликни келтириб чиқариш кифоядир. Фараз қилайлик, (2.2.2) - шарт бажарилсин ва

$$\max_{1\le i\le n}|x_i| = x_k$$

бўлсин. У ҳолда

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

эканлигидан

$$\max_{1\le i\le n}|b_i| \ge |a_{kk}||x_k| - \sum_{j\neq k}|a_{kj}||x_k| =$$

$$= \max_{1\le i\le n}|x_i|\left\{|a_{kk}| - \sum_{j\neq k}|a_{kj}|\right\} \ge q\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

бўлади. Шу билан (2.2.3) - тенгсизлик ва демак, лемма исботланди.

Агар матрицанинг элементлари (2.2.2) - шартни қаноатлантирса, бундай матрица салмоқли бош диагоналга эга дейилади.

Энди сплайн қуриш билан шуғулланамиз, $S(f,x)$ нинг иккинчи тартибли ҳосиласи тўрнинг ҳар бири $[x_{i-1}, x_i\ ]$ оралиғида узлуксиз бўлганлиги туфайли $x_{i-1} \le x \le x_i$ да ушбу

$$S''(f,x) = M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \qquad (2.2.4)$$

тенгликни ёза оламиз. Бу ерда $h_i = x_i - x_{i-1}$ ва $M_i = S''(f, x_i)$. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини интеграллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} S''(f,x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right)dx =$$

$$= -\frac{M_{i-1}}{h_i}\frac{(x_i - x)^2}{2} + \frac{M_i}{h_i}\frac{(x - x_{i-1})^2}{2} + c_1 + c_2$$

$$S'(f,x) = -\frac{M_{i-1}}{h_i}\frac{(x_i - x)^2}{2} + \frac{M_i}{h_i}\frac{(x - x_{i-1})^2}{2} + c_1 + c_2$$

Бу тенгликнинг ҳар икки томонини яна бир марта интеграллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} S'(f,x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(-\frac{M_{i-1}}{h_i}\frac{(x_i - x)^2}{2} + \frac{M_i}{h_i}\frac{(x - x_{i-1})^2}{2} + c_1 + c_2\right)dx$$

$$S(f,x) = \frac{M_{i-1}}{h_i}\frac{(x_i - x)^3}{6} + \frac{M_i}{h_i}\frac{(x - x_{i-1})^3}{6} + c_1x + c_2x + c_1^* + c_2^*$$

$$S(f,x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i\frac{x_i - x}{h_i} + B_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \qquad (2.2.5)$$

Бу ерда $A_i\frac{x_i - x}{h_i} = c_1x + c_1^*$ $B_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i} = c_2x + c_2^*$.

Бунда A_i ва B_i интеграллаш доимийлари бўлиб, улар $S(f, x_{i-1}) = f_{i-1}$ ва $S(f, x_i) = f_i$ интерполяция шартларидан аниқланади.

(2.2.5) - да $x = x_{i-1}$ ни ўрнига қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$S(x_{i-1}) = M_{i-1}\frac{(x_i - x_{i-1})^3}{6h_i} + M_i\frac{(x_{i-1} - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i\frac{x_i - x_{i-1}}{h_i} + B_i\frac{x_{i-1} - x_{i-1}}{h_i}$$

$$S(x_{i-1}) = M_{i-1}\frac{{h_i}^2}{6} + A_i$$

$S(f, x_{i-1}) = f(x_{i-1})$ интерполяция шартидан келиб чиқиб, A_i ни топамиз.

$$M_{i-1}\frac{{h_i}^2}{6} + A_i = f(x_{i-1})$$

$$A_i = f(x_{i-1}) - M_{i-1}\frac{{h_i}^2}{6}$$

$x = x_i$ ларни ўрнига қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$S(x_i\ ) = M_{i-1}\frac{(x_i-x_i)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x_i-x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i\frac{x_i-x_i}{h_i} + B_i\frac{x_i-x_{i-1}}{h_i}$$

$$S(x_i\ ) = M_i\frac{{h_i}^2}{6} + B_i$$

$S(f, x_i\ ) = f(x_i)$ интерполяция шартидан келиб чиқиб, B_i ни топамиз.

$$M_i\frac{{h_i}^2}{6} + B_i = f(x_i)$$

$$B_i = f(x_i) - M_i\frac{{h_i}^2}{6}$$

Бундан A_i ва B_i ларнинг қийматларини (2.2.5) - га қўйсак, натижада

$$S(f,x) = M_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(f_{i-1} - \frac{M_{i-1}{h_i}^2}{6}\right)\frac{x_i-x}{h_i} + \left(f_i - \frac{M_i{h_i}^2}{6}\right)\frac{x-x_{i-1}}{h_i}, \qquad x \in [x_{i-1}, x_i] \qquad (2.2.6)$$

(2.2.6)–интерполяцион кубик сплайн функциядан ҳосила оламиз:

$$S'(f,x) = -M_{i-1}\frac{(x_i-x)^2}{2h_i} + M_i\frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{f_i-f_{i-1}}{h_i} - \frac{M_i-M_{i-1}}{6}h_i \qquad (2.2.7)$$

ларга эга бўламиз. Энди $x \in [x_i, x_{i+1}]$ оралиқда сплайн функция қурамиз. Бунинг учун (2.2.7) - тенгликни $[x_i, x_{i+1}]$ оралиқ учун қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$S'(f,x) = -M_i\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_{i+1}} + M_{i+1}\frac{(x-x_i)^2}{2h_{i+1}} + \frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}} - \frac{M_{i+1}-M_i}{6}h_{i+1} \qquad (2.2.8)$$

$x \in [x_{i-1}, x_i]$ оралиқда қурилган $S'(f,x)$ сплайн функцияни $S_i'(x)$ деб ёзиш мумкин.

$x \in [x_i, x_{i+1}]$ оралиқда қурилган $S'(f,x)$ сплайн функцияни $S_{i+1}'(x)$ деб ёзиш мумкин.

Интерполяцион кубик сплайн таърифидаги 2-шартга кўра $S_i'(x)$ ва $S_{i+1}''(x)$ сплайн функциялар $[a,b]$ оралиқда узлуксиз. $S_i'(x)$ ва $S_{i+1}''(x)$ сплайн функциялар узлуксиз уланиши керак, яъни (2.2.7) - ва (2.2.8) – тенгликлар $x = x_i$ нуқтада тенг бўлиши керак.

(2.2.7) - тенглик $x = x_i$ нуқтада қуйидаги (2.2.9) - га тенг.

$$S'(f,x) = S_i'(x) = -M_{i-1}\frac{(x_i-x_i)^2}{2h_i} + M_i\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{f_i-f_{i-1}}{h_i} - \frac{M_i-M_{i-1}}{6}h_{i,}$$

$S_i'(x) = M_i \frac{h_i}{2} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{M_i - M_{i-1}}{6} h_i$

$$S_i'(x) = M_i \frac{h_i}{3} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - M_{i-1} \frac{h_i}{6} \qquad (2.2.9)$$

(2.2.8) - тенглик $x = x_i$ нуқтада қуйидаги (2.2.10) - га тенг.

$S'(f, x) = S_{i+1}'(x) = -M_i \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{(x_i - x_i)^2}{2h_{i+1}} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{M_{i+1} - M_i}{6} h_{i+1}$

$$S_{i+1}'(x) = -M_i \frac{h_{i+1}}{3} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{M_{i+1}}{6} h_{i+1} \qquad (2.2.10)$$

(2.2.9) ва (2.2.10) – ларнинг тенглигидан (2.2.11)- тенглик келиб чиқади.

$S_i'(x) = S_{i+1}'(x)$

$M_i \frac{h_i}{3} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - M_{i-1} \frac{h_i}{6} = -M_i \frac{h_{i+1}}{3} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{M_{i+1}}{6} h_{i+1}$

$$\frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} M_i + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1 \dots n-1 \qquad (2.2.11)$$

$n + 1$ та номаълумдан иборат $n - 1$ та тенгламага эга бўламиз.

$$\begin{cases} \frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} M_i + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1 \dots n-1 \\ M_0 = 0 \\ M_n = 0 \end{cases} \qquad (2.2.12)$$

Бу тенгламаларни (2.2.1) - чегаравий шартдан келиб чиқадиган

$$M_0 = M_n = 0 \qquad (2.2.13)$$

тенгликлар билан тўлдириб, (2.2.12) – га белгилаш киритамиз:

$$a_i = \frac{h_i}{6}, \quad b_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{3}, \quad c_i = \frac{h_{i+1}}{6}, \qquad d_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \qquad (2.2.14)$$

бегилашларни киритсак, у ҳолда $M_{1,} M_{2,\dots,} M_{n-1}$ номаълумларни топиш учун

$$\left. \begin{array}{r} b_1 M_1 + c_1 M_2 = d_1 \\ a_2 M_1 + b_2 M_2 + c_1 M_3 = d_2 \\ a_3 M_2 + b_3 M_3 + c_3 M_4 = d_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-2} M_{n-3} + b_{n-2} M_{n-2} + c_{n-2} M_{n-1} = d_{n-2} \\ a_{n-1} M_{n-2} + b_{n-1} M_{n-1} = d_{n-1} \end{array} \right\} \qquad (2.2.15)$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. (2.2.14) га кўра (2.2.15) системанинг матрицаси салмоқли бош диагоналга эга бўлганлиги туфайли ихтиёрий $f_0, f_1, \dots, f_n$ лар учун (2. 2. 15) система ягона ечимга эга. Шундай қилиб, 1- 4 шартларни қаноатлантирувчи ягона сплайн функция мавжуд экан. (2.2.15) системани ечишнинг ҳайдаш усули деб аталувчи жуда ҳам эффектив алгоритми мавжуд. Уни қуйида келтириб ўтамиз. Бунинг учун барча $k = 1,2,\dots,n-1$ лар учун

$$P_k = a_k q_{k-1} + b_k \quad (q_0 = 0)$$

$$q_k = -\frac{c_k}{P_k}, u_k = \frac{d_k - a_k u_{k-1}}{P_k} \quad (u_0 = 0) \qquad (2.2.16)$$

ёрдамчи миқдорларни ҳосил қиламиз. Сўнгра (2.2.15) системанинг 2-, ... , $(n-1)$ - тенгламаларидан кетма-кет $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ ларни йўқотиб, ушбу

$$M_k = q_k M_{k+1} + u_k \quad \left(k = \overline{1, n-2}\right)$$

$$M_{n-1} = u_{n-1}, \qquad (2.2.17)$$

эквивалент системага эга бўламиз. Бундан эса кетма- кет $M_{n-1}, M_{n-2}, \dots, M_1,$ ларни аниқлаш мумкин.

Салмоқли бош диагоналга эга бўлган матрицалар учун бу ҳисоблаш системаси шу маънода турғундирки, хато тез сўниб боради $(0 < q_k < 1)$. Буни (2.2.16) ва (2.2.17) дан осонлик билан кўриш мумкин. Шуни ҳам таъкидлаш керакки, P_k ва q_k миқдорлар фақат Δ_n тўрга боғлиқ бўлиб, тўрнинг тугунларидаги ординаталарнинг қийматларига боғлиқ эмас. Бу эса муайян Δ_n тўр учун $\{P_k\}$ ва $\{q_k\}$ ларнинг қийматларини бир марта ҳисоблаб олиб, тўр тугунларидаги турли хил ординаталар билан спайнлар қуришга имкон беради. Сплайнни қуришда ҳисоблаш натижаларини схема шаклида ёзиш маъқулдир.

x_k	f_k	h_k	a_k	b_k	c_k	d_k	p_k	q_k	u_k	M_k
x_1 x_2 ... x_{n-1} x_n	f_1 f_2 ... f_{n-1} f_n	h_1 h_2 ... h_{n-1} h_n	a_1 a_2 ... a_{n-1}	b_1 b_2 ... b_{n-1}	c_1 c_2 ... c_{n-1}	d_1 d_2 ... d_{n-1}	p_1 p_2 ... p_{n-1}	q_1 q_2 ... q_{n-1}	u_1 u_2 ... u_{n-1}	M_1 M_2 ... M_{n-1}

Агар Δ_n тўр текис, яъни тугунлар тенг узоқликда жойлашган бўлса, у ҳолда бу схема янада соддалашади: h_k, a_k, b_k, c_k устунларни ёзмаслик ҳам мумкин.

Шундай қилиб, функциянинг $f_0, f_1, \dots, f_n$ қийматлари берилган бўлса,бу қийматлардан фойдаланиб (2.2.6) формула ёрдамида сплайн –

функциялар билан $f(x)$ ни интерполяциялаш мумкин. (2.2.7) формула ёрдамида эса унинг ҳосиласини топиш мумкин.

Кубик сплайн функциялар, юқорида айтиб ўтганимиздек, яхши яқинлашиш хоссасига эга. Агар интерполяцияланадиган $f(x)$ функция $C^k[a,b]$ $(k=0,1,2,3,4)$ синфга тегишли бўлса, у ҳолда унинг хатоси $r(x)=f(x)-S(f,x)$ учун қуйидаги баҳони кўрсатиш мумкин:

$$\max_{a\le x\le b}\left|r^{(p)}(x)\right|\le ch^{k-p}\qquad(p\le k),$$

Бу ерда с тўрга боғлиқ бўлмаган ўзгармас бўлиб,

$$h=\max_{1\le i\le n}h_i\,.$$

Эслатма. Кўпинча $x=a$ ва $x=b$ нуқталарда $f(x)$ функция ҳақида қўшимча маълумотга ҳам эга бўлишимиз мумкин. Масалан, сплайн тузишдан асосий мақсад

$$f(a)+\alpha f'(a)=A,\quad f(b)+\beta f'(b)=B$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи дифференциал тенгламани ечишдан иборат бўлиши мумкин. Бундай ҳолда, сплайн тузишда чегаравий

$$M_0=M_n=0$$

шарт ўрнига юқоридаги шартни олиш керак. [16], [24].

Мисол. Қуйида $f(x)$ функция қийматлари берилган. Локал интерполяцион кубик сплайн функция қуринг.

$(x_0,f_0),(x_1,f_1)$ нуқталардан ўтувчи Лагранж интерполяцион кўпҳадининг умумий кўриниши қуйидагича:

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\,f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\,f(x_1)\,.$$

Аниқ берилган $(0;4),(1;1)$ нуқталардан ўтувчи Лагранж интерполяцион кўпҳади қуйидаги кўринишда бўлади:

$$L_1(x)=-3x+4$$

$(x_1,f_1),(x_2,f_2)$ нуқталардан ўтувчи Лагранж интерполяцион кўпҳадининг умумий кўриниши қуйидагича:

$$L_2(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2).$$

Берилган $(1;1)$, $(2;-1)$ нуқталардан ўтувчи Лагранж интерполяцион кўпҳади қуйидаги кўринишда бўлади:

$$L_2(x) = -2x + 3$$

Фараз қилайлик биз қурмоқчи бўлган учинчи даражали локал интерполяцион сплайн функциянинг 2 – тартибли ҳосиласи икки нуқтадан ўтувчи Лагранж интерполяцион кўпҳади асосида қурилган чизиқли интерполяцион сплайн функция бўлсин.

$$S''_{3_1}(x) = -3x + 4 \tag{1}$$

$$S''_{3_2}(x) = -2x + 3 \tag{2}$$

(1) – тенгликнинг икки марта интеграллаб, маълум ҳисоблашлар асосида учинчи даражали локал интерполяцион сплайн функциялар қурилди:

$$\int S''_{3_1}(x)dx = \int (-3x+4)\,dx = -\frac{3}{2}x^2 + c_1 + 4x + c_2$$

$$S'_{3_1}(x) = -\frac{3}{2}x^2 + c_1 + 4x + c_2$$

$$\int S'_{3_1}(x)dx = \int (-\frac{3}{2}x^2 + c_1 + 4x + c_2)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + c_1x + c_1^* + c_2x + c_2^*$$

$$S_{3_1}(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + c_1x + c_1^* + c_2x + c_2^* \tag{3}$$

Учинчи даражали локал интерполяцион сплайн функцияни (3) – кўринишда ҳосил қилдик. Бу ерда

$A_1 \frac{x_1-x}{h_1} = c_1x + c_1^*$ $\quad B_1 \frac{x-x_0}{h_1} = c_2x + c_2^*.$ $\quad h_1 = x_1 - x_0$

$$S_{3_1}(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + A_1(1-x) + B_1x \tag{4}$$

Бунда A_1 ва B_1 интеграллаш доимийлари бўлиб, улар $S(x_{i-1}) = f_{i-1}$ ва $S(x_i) = f_i$ интерполяция шартларидан аниқланади.

$S_{3_1}(x_0) = f_0$ дан $A_1 = 4$ келиб чиқади.

$S_{3_1}(x_1) = f_1$ дан $B_1 = -\frac{1}{2}$ келиб чиқади.

A_1 ва B_1 ларнинг (4) – га қўйсак, қуйидагига эга бўламиз.

$$S_{3_1}(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{9}{2}x + 4 \qquad x \in [0;1]$$

(2) – тенгликнинг икки марта интеграллаб, маълум ҳисоблашлар асосида учинчи даражали локал интерполяцион сплайн функциялар қурилди:

$$\int S''_{3_2}(x)dx = \int(-2x+3)\,dx = -x^2 + \mathrm{c}_1 + 3x + \mathrm{c}_2$$

$$S'_{3_2}(x) = -x^2 + \mathrm{c}_1 + 3x + \mathrm{c}_2$$

$$\int S'_{3_2}(x)dx = \int(-x^2 + \mathrm{c}_1 + 3x + \mathrm{c}_2)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \mathrm{c}_1 x + c_1^* + \mathrm{c}_2 x + c_2^*$$

$$S_{3_2}(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \mathrm{c}_1 x + c_1^* + \mathrm{c}_2 x + c_2^* \qquad (5)$$

Учинчи даражали локал интерполяцион сплайн функцияни (5) – кўринишда ҳосил қилдик. Бу ерда

$A_2\frac{x_2-x}{h_2} = c_1x + c_1^*$ $\quad B_2\frac{x-x_1}{h_2} = c_2x + c_2^*$. $\quad h_2 = x_2 - x_1$

$$S_{3_2}(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + A_2(2-x) + B_2(x-1) \qquad (6)$$

Бунда A_2 ва B_2 интеграллаш доимийлари бўлиб, улар $S(x_i) = f_i$ ва $S(x_{i+1}) = f_{i+1}$ интерполяция шартларидан аниқланади.

$S_{3_2}(x_1) = f_1$ дан $A_2 = -\frac{1}{6}$ келиб чиқади.

$S_{3_2}(x_2) = f_2$ дан $B_2 = -\frac{13}{3}$ келиб чиқади.

A_2 ва B_2 ларнинг (6) – га қўйсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$S_{3_2}(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{25}{6}x + 4 \qquad x \in [1;2]$$

Ҳосил қилинган учинчи даражали локал интерполяцион сплайн функция учун интерполяция шартлари бажарилишини текширамиз:

$S_{3_1}(x_0) = f(x_0)$ $\qquad S_{3_1}(0) = 4$

$S_{3_1}(x_1) = f(x_1)$ $\qquad S_{3_1}(1) = 1$

$S_{3_2}(x_1) = f(x_1)$ $\qquad S_{3_2}(1) = 1$

$S_{3_1}(x_1) = S_{3_2}(x_1)$ $\qquad S_{3_2}(x_2) = f(x_2)$

$S_{3_1}(2) = -1$ $\qquad\qquad S_{3_2}(x_2) = f(x_2)$

$S_{3_2}(2) = -1$ $\qquad\qquad S_{3_1}(x_2) = S_{3_2}(x_2)$

MathCad дастуридан фойдаланиб локал интерполяцион кубик сплайн функциялар қурилиши жараёнида уланиш тугун нуқталарида локал интерполяцион кубик сплайн функцияларнинг узлуксизликларини текширилди ҳамда график асосида қурилган локал интерполяцион кубик сплайн функцияларнинг жойлашишлари таҳлил қилинди, 1-иловада келтирилган.

2.3. Бир локал интерполяцион кубик сплайн функциянинг қурилиши

$x \epsilon [a,b]$ кесмада $y = f(x)$ функциянинг x_i, $i = \overline{0,N}$ тугун нуқталардаги қийматлари берилган бўлсин.

$x \epsilon [a,b]$ кесмада $\Delta : x_i = a + ih$, $i = \overline{0,N}$, $h = \frac{b-a}{N}$

тўрнинг тугун нуқталари берилган бўлсин. $\Delta 1$ - x_{-1} ва x_{N+1} тугун нуқталар билан тўлдирилган, кенгайтирилган тўр бўлсин:

$$\Delta 1 \coloneqq \Delta \cup \{x_{-1}\} \cup \{x_{N+1}\}$$

ва бу тўрнинг тугун нуқталарида $f(x)$ функциянинг қийматлари берилган бўлсин: $f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_N, f_{N+1}$.

Ушбу $\{x_i\}_{-1}^{N+1}$ тугун нуқталардаги функция қийматларидан фойдаланиб $x \epsilon [a,b]$ оралиқда Δ тўрда $f(x)$ функцияни интерполяцияловчи $S_3(x) = S_3(f,x)$ локал интерполяцион кубик сплайн функция қурамиз.

Локал интерполяцион кубик сплайн функция қуриш учун қуйидаги

$$A(x_{i-1}, f_{i-1});\ B(x_i, f_i); C(x_{i+1}, f_{i+1})$$

ҳамда

$$B(x_i, f_i); C(x_{i+1}, f_{i+1});\ D(x_{i+2}, f_{i+2})$$

мос нуқталардан ўтувчи иккита

$$y_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

ва

$$y_{i+1}(x) = a_{i+1} x^2 + b_{i+1} x + c_{i+1}$$

параболик функцияларни қурамиз.

$\left(x_{i-1}, f_{i-1}\right)$, (x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1}) нуқталардан ўтувчи биринчи параболик функцияни қурамиз.

$$\begin{cases} a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f_{i-1} & (2.3.1) \\ a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = f_i & (2.3.2) \\ a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i = f_{i+1} & (2.3.3) \end{cases}$$

(2.3.2) - дан (2.3.1) - ни айириб, (2.3.4) – ни ҳосил қиламиз:

$$a_i\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right) + b_i(x_i - x_{i-1}) = f_i - f_{i-1}$$

$$x_i - x_{i-1} = h$$

$$a_i(x_i + x_{i-1})h + b_i h = f_i - f_{i-1} \quad (2.3.4)$$

(2.3.3) - дан (2.3.2)- ни айириб, (2.3.5) – ни ҳосил қиламиз:

$$a_i\left(x_{i+1}^2 - {x^2}_i\right) + b_i(x_{i+1} - x_i) = f_{i+1} - f_i$$

$$a_i(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i) + b_i(x_{i+1} - x_i) = f_{i+1} - f_i$$

$$x_{i+1} - x_i = h$$

$$a_i(x_{i+1} + x_i)h + b_i h = f_{i+1} - f_i \quad (2.3.5)$$

(2.3.5) - дан (2.3.4) - ни айириб a_i ни топилади.

$$a_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{2h^2}$$

(2.3.4) - дан b_i ни топамиз:

$$b_i = \frac{1}{h}[f_i - f_{i-1} - a_i(x_i + x_{i-1})h]$$

$$b_i = \frac{1}{h^2}\left[\frac{-3x_i + x_{i-1}}{2} f_{i-1} + 2x_i f_i - \frac{x_i + x_{i-1}}{2} f_{i+1}\right]$$

(2.3.2) - дан c_i ни топамиз:

$$c_i = f_i - a_i x_i^2 - b_i x_i$$

$$c_i = \frac{2x_i^2 - x_{i-1}x_i}{2h^2} f_{i-1} + \frac{h^2 - x_i^2}{h^2} f_i + \frac{x_{i-1}x_i}{2h^2} f_{i+1}$$

a_i, b_i, c_i ларнинг қийматларидан фойдаланиб, $y_i(x)$ параболанинг умумий кўринишини ёзамиз. $t = (x - x_i)/h$ белгилаш киритилади.

$$y_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

$$y_i(x) = \frac{x^2}{2h^2} f_{i+1} - \frac{x^2}{h^2} f_i + \frac{x^2}{2h^2} f_{i-1} + \frac{-3xx_i + xx_{i-1}}{2h^2} f_{i-1} + \frac{2xx_i}{h^2} f_i -$$

$$- \frac{xx_i + xx_{i-1}}{2h^2} f_{i+1} + \frac{2x_i^2 - x_i x_{i-1}}{2h^2} f_{i-1} + \frac{h^2 - x_i^2}{h^2} f_i + \frac{x_i x_{i-1}}{2h^2} f_{i+1} =$$

$$= -\frac{1}{2} t(1-t) f_{i-1} + (1 - t^2) f_i + \frac{1}{2} t(t+1) f_{i+1}$$

$$y_i(x) = -\frac{1}{2} t(1-t) f_{i-1} + (1 - t^2) f_i + \frac{1}{2} t(t+1) f_{i+1}$$

Энди $(x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1}), (x_{i+2}, f_{i+2})$ нуқталардан ўтувчи иккинчи параболани қурамиз.

$$y_{i+1}(x) = a_{i+1} x^2 + b_{i+1} x + c_{i+1}$$

$$\begin{cases} a_{i+1} x_i^2 + b_{i+1} x_i + c_{i+1} = f_i & (2.3.6) \\ a_{i+1} {x_{i+1}}^2 + b_{i+1} x_{i+1} + c_{i+1} = f_{i+1} & (2.3.7) \\ a_{i+1} {x_{i+2}}^2 + b_{i+1} x_{i+2} + c_{i+1} = f_{i+2} & (2.3.8) \end{cases}$$

(2.3.7) - дан (2.3.6) - ни айириб, (2.3.9) – ни ҳосил қиламиз:

$$a_{i+1}\left({x_{i+1}}^2 - x_i^2\right) + b_{i+1}(x_{i+1} - x_i) = f_{i+1} - f_i$$

$$x_{i+1} - x_i = h$$

$$a_{i+1}(x_{i+1} + x_i)h + b_{i+1}h = f_{i+1} - f_i \qquad (2.3.9)$$

(2.3.8) - дан (2.3.7) – ни айириб, (2.3.10) – ни ҳосил қиламиз:

$$a_{i+1}\left({x_{i+2}}^2 - {x^2}_{i+1}\right) + b_{i+1}(x_{i+2} - x_{i+1}) = f_{i+2} - f_{i+1}$$

$$x_{i+2} - x_{i+1} = h$$

$$a_{i+1}(x_{i+2} + x_{i+1})h + b_{i+1}h = f_{i+2} - f_{i+1} \qquad (2.3.10)$$

(2.3.10) – дан (2.3.9) - ни айириб a_{i+1} ни топилади.

$$a_{i+1} = \frac{1}{2h^2}(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i)$$

(2.3.9) - дан b_{i+1} ни топамиз.

$$b_{i+1} = \frac{1}{h}[f_{i+1} - f_i - a_{i+1}(x_{i+1} + x_i)h]$$

$$b_{i+1} = \frac{1}{h}\left[f_{i+1} - f_i - \frac{x_{i+1} + x_i}{2h^2}(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i)h\right]$$

$$b_{i+1} = -\left(\frac{3x_{i+1} - x_i}{2h^2}\right)f_i + \frac{2x_{i+1}}{h^2}f_{i+1} - \frac{x_{i+1} + x_i}{2h^2}f_{i+2}$$

(2.3.7) - дан c_{i+1} ни топамиз.

$$c_{i+1} = f_{i+1} - a_{i+1}x_{i+1}^2 - b_{i+1}x_{i+1}$$

$$c_{i+1} = \frac{2{x_{i+1}}^2 - x_{i+1}x_i}{2h^2}f_i + \frac{x_i^2 - 2x_i x_{i+1}}{h^2}f_{i+1} + \frac{x_i x_{i+1}}{2h^2}f_{i+2}$$

a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1} ларнинг қийматларидан фойдаланиб, $y_{i+1}(x)$ параболанинг умумий кўринишини ёзамиз. $t = (x - x_i)/h$ белгилаш киритилади.

$$y_{i+1}(x) = a_{i+1}x^2 + b_{i+1}x + c_{i+1}$$

$$y_{i+1}(x) = \frac{x^2}{2h^2}(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i)$$

$$+ \frac{x}{h^2}\left(-\frac{3x_{i+1} - x_i}{2}f_i + 2x_{i+1}f_{i+1} - \frac{x_{i+1}+x_i}{2}f_{i+2}\right) +$$

$$+ \frac{2{x_{i+1}}^2 - x_{i+1}x_i}{2h^2}f_i + \frac{x_i^2 - 2x_i x_{i+1}}{h^2}f_{i+1} + \frac{x_i x_{i+1}}{2h^2}f_{i+2} =$$

$$= \frac{1}{2}(t^2 - 3t + 2)f_i - t(t-2)f_{i+1} - \frac{1}{2}t(1-t)f_{i+2}$$

$$y_{i+1}(x) = \frac{1}{2}(t^2 - 3t + 2)f_i - t(t-2)f_{i+1} - \frac{1}{2}t(1-t)f_{i+2}$$

Юқорида $A(x_{i-1}, f_{i-1})$; $B(x_i, f_i)$; $C(x_{i+1}, f_{i+1})$ нуқталардан ўтувчи

$$y_i(x) = -\frac{1}{2}t(1-t)f_{i-1} + (1-t^2)f_i + \frac{1}{2}t(t+1)f_{i+1} \qquad (2.3.11)$$

ҳамда $B(x_i, f_i)$; $C(x_{i+1}, f_{i+1})$; $D(x_{i+2}, f_{i+2})$ нуқталардан ўтувчи

$$y_{i+1}(x) = \frac{1}{2}(t^2-3t+2)f_i - t(t-2)f_{i+1} - \frac{1}{2}t(1-t)f_{i+2} \qquad (2.3.12)$$

параболалар қурилди. Бу ерда $t = \frac{x-x_i}{h}$, $x_{i+1} - x_i = h$

Локал интерполяцион кубик сплайн функция қуриш учун юқорида қурилган параболаларнинг қуйидаги кўринишдаги чизиқли комбинациядан фойдаланилади.

$S_i(x) = S_i(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 t) y_i(x) + (\alpha_3 + \alpha_4 t) y_{i+1}(x). \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$ (2.3.13)

Сплайн функция $x \in [x_i, x_{i+1}]$ оралиқда қурилади.

Бу сплайн функция $[a,b]$ оралиқни n - та бўлакка бўлиб, бўлинган оралиқчаларнинг биттасида $x \in [x_i, x_{i+1}]$ оралиқчада қурилиши талаб қилинганлиги учун бу сплайн функция локал функция бўлади.

(2.3.13) - сплайн функцияни интерполяция шартини

$$S_i(x_i) = f_i, \qquad S_i(x_{i+1}) = f_{i+1}$$

бажарилиши талаб қилинганлиги учун (2.2.13)- сплайн интерполяцион кубик функция сплайн бўлади.

(2.3.13) -сплайн функцияни қуриш $\propto_1, \propto_2, \propto_3, \propto_4$ коэффицентларни топиш масаласи орқали бажарилади. $\propto_1, \propto_2, \propto_3$ ва $\propto_4$ коэффицентларни топиш учун интерполяция шартини бажарилишини талаб қилинади.

$$\propto_1 + \propto_2 + \propto_3 + \propto_4 = 1 \qquad (2.3.14)$$

$$\propto_1 + \propto_3 = 1 \qquad (2.3.15)$$

$$\propto_2 + \propto_4 = 0$$

Бу ердан $\alpha_3 = 1 - \alpha_1, \quad \alpha_4 = -\alpha_2$.

(2.3.13) - сплайн функция $x \in [x_i, x_{i+1}]$ оралиққа тегишли (2.3.13) - да $i \to i+1$ алмаштириш натижасида $x \in [x_{i+1}, x_{i+2}]$ оралиққа тегишли

$S_{i+1}(x) = S_{i+1}(t) = (\propto_1 + \propto_2 t) y_{i+1}(x) + (\propto_3 + \propto_4 t) y_{i+2}(x)$ (2.3.16)

интерполяцион кубик сплайн функция қурамиз.

$\propto_1, \propto_2, \propto_3, \propto_4$ коэффицентларни топиш учун яна иккита тенглама $S_i(x)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ва $S_{i+1}(x)$, $x \in [x_{i+1}, x_{i+2}]$ сплайн функцияларнинг ҳамда уларнинг $S_i'(x)$, $S_{i+1}'(x)$, $S_i''(x)$, $S_{i+1}''(x)$ биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларнинг $x = x_{i+1}$ тугун нуқтадаги уланишини талаб қилиш натижасида қуйидаги яна иккита тенглама ҳосил қилинади.

$$\alpha_1(\Delta^2 f_{i+1} - \Delta^2 f_{i-1}) + \alpha_2 \Delta^3 f_{i-1} = \Delta^3 f_i \qquad (2.3.17)$$

$$\alpha_1(\Delta^4 f_{i-1}) - \alpha_2(\Delta^2 f_{i-1} + \Delta f_i - \Delta f_{i+2}) = \Delta^3 f_i. \qquad (2.3.18)$$

бу ерда Δ - айирмалар оператори.

Натижада (2.3.13) - сплайн функциянинг $\propto_1, \propto_2, \propto_3$ ва $\propto_4$ коэффицентларини топиш учун (2.3.14), (2.3.15), (2.3.17) ва (2.3.18) - тенгламалардан тузилган тенгламалар системаси ҳосил бўлади ва бу тенгламалар системасини ечишни $\propto_1 = \propto_1^*, \propto_2 = \propto_2^*$, $\propto_3 = \propto_3^*$, $\propto_4 = \propto_4^*$ деб белгиласак, у ҳолда қуйидаги

$$S_3(x) = S_3(t) = (\propto_1^* + \propto_2^* \, t) y_i(x) + (\propto_3^* + \propto_4^* \, t) y_{i+1}(x) \qquad (2.3.19)$$

дефекти бирга тенг бўлган локал интерполяцион кубик сплайн функция ҳосил бўлади. Аммо (2.3.19) - сплайн функциянинг f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, f_{i+2}, f_{i+3} коэффицентлари мураккаб кўринишда бўлади. Шунинг учун бундай сплайн амалий тадбиқлар учун ноқулай.

(2.3.18) - тенгламани ечиш талаб қилинмайди ва $\propto$ лар махсус танлаб олинади. Агар $\propto_1 = \frac{1}{2}$; $\propto_2 =$ -1 деб олсак, $\propto_3 = \frac{1}{2}$; $\propto_4 = 1$ га эга бўламиз. Бу қийматлар (2.3.14),(2.3.15) ва (2.3.17) -тенгламаларни қаноатлантиради, аммо (2.3.18) - тенгламани қаноатлантирмайди. Демак $[x_i, x_{i+1}]$ кесмада дефекти 2 га тенг бўлган интерполяцион сплайн функцияга эгамиз: $\propto$ ларнинг қийматларидан фойдаланиб сплайн функциянинг кўринишини ҳосил қилдик.

$$S_3(x) = \left(\frac{1}{2} - t\right) y_i(x) + \left(\frac{1}{2} + t\right) y_{i+1}(x) \qquad (2.3.20)$$

(2.3.20) - да $x \in [x_i, x_{i+1}]$ да интерполяция шартини бажарилишини текширамиз. $x = x_i$ да $t = \frac{x - x_i}{h} = 0$ бўлади, у ҳолда (2.3.20) - сплайн функциянинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$S_3(x_i) = \frac{1}{2} y_i(x_i) + \frac{1}{2} y_{i+1}(x_i) \qquad (2.3.21)$$

(2.3.11) - дан $x = x_i$ да $y_i(x_i) = f_i$ келиб чиқади.

(2.3.12) - га асосан $x = x_i$ да $y_{i+1}(x_i) = f_i$ келиб чиқади.

У ҳолда (2.3.21) – га $y_i(x_i)$ ва $y_{i+1}(x_i)$ ни қийматларини қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$S_3(x_i) = \frac{1}{2}f_i + \frac{1}{2}f_i \qquad S_3(x_i) = f_i$$

Демак $x = x_i$ тугун нуқтада интерполяция шарти бажарилади.

Шу тариқа (2.3.20) – да $x = x_{i+1}$ тугун нуқтада ҳам интерполяция шартини бажарилишини текширамиз. $x = x_{i+1}$ ва $h = x_{i+1} - x_i$ бўлса $t = \frac{x-x_i}{h} = 1$ бўлади, у ҳолда (2.3.20) - сплайн функциянинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$S_3(x_{i+1}) = -\frac{1}{2}y_i(x_{i+1}) + \frac{3}{2}y_{i+1}(x_{i+1}) \tag{2.3.22}$$

(2.3.11) – га асосан $x = x_{i+1}$ да

$y_i(x_{i+1}) = f_{i+1}$ келиб чиқади.

(2.3.12) – дан ҳам $x = x_{i+1}$ да

$y_{i+1}(x_{i+1}) = f_{i+1}$ келиб чиқади.

У ҳолда (2.3.22) - га $y_i(x_{i+1})$ ва $y_{i+1}(x_{i+1})$ ни қийматларини қўйсак

$$S(x_{i+1}) = -\frac{1}{2}f_{i+1} + \frac{3}{2}f_{i+1} = f_{i+1}$$

Демак $x = x_{i+1}$ тугун нуқтада ҳам интерполяция шарти бажарилади.

(2.3.20) - га локал интерполяцион кубик сплайн функция дейилади.

Энди (2.3.11) - ва (2.3.12) - ларни (2.3.20) - га қўйиб, локал интерполяцион кубик сплайн функциянинг умумий кўринишини ҳосил қиламиз.

$$S_3(f,x) = S_3(t) = \left(\frac{1}{2} - t\right)\left[-\frac{1}{2}t(1-t)f_{i-1} + (1-t^2)f_i + \frac{1}{2}t(1+t)f_{i+1}\right] +$$
$$+\left(\frac{1}{2} + t\right)\left[\frac{1}{2}(t^2 - 3t + 2)f_i - t(t-2)f_{i+1} - \frac{1}{2}t(1-t)f_{i+2}\right]$$

Бу ерда $x \in [x_i, x_{i+1}]$ $\quad t \in [0,1]$, $\quad t = \frac{x-x_i}{h}$, , $h = x_{i+1} - x_i$

Соддалаштиришлардан кейин $S_3(t)$- локал интерполяцион кубик сплайн функциянинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$S_3(t) = \left(-\frac{1}{4}t + \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{2}t^3\right)f_{i-1} + \left(1 - \frac{3}{4}t - \frac{7}{4}t^2 + \frac{3}{2}t^3\right)f_i +$$

$$+\left(\frac{5}{4}t+\frac{5}{4}t^2-\frac{3}{2}t^3\right)f_{i+1}+\left(-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t^3\right)f_{i+2}$$

У ҳолда қурилган локал интерполяцион кубик сплайн функцияни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$S_3(f,x)=\varphi_1(t)f(x_{i-1})+\varphi_2(t)f(x_i)+\varphi_3(t)f(x_{i+1})+\varphi_4(t)f(x_{i+2})$$

Бу ерда

$$\varphi_1(t)=-\frac{1}{4}t(1-3t+2t^2);$$

$$\varphi_2(t)=\frac{1}{4}(4-3t-7t^2+6t^3);$$

$$\varphi_3(t)=\frac{1}{4}t(5+5t-6t^2);$$

$$\varphi_4(t)=-\frac{1}{4}t(1+t-2t^2);$$

$$t=\frac{x-x_i}{h};\quad h=x_{i+1}-x_i.$$

$$x\in[x_i,x_{i+1}]\qquad t\in[0,1]$$

Хусусий ҳолда $\propto$ лар махсус танлаб олинади. Агар $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-1$ деб олсак, $\alpha_3=0$, $\alpha_4=1$ га эга бўламиз. Бу қийматлар (2.3.14), (2.3.15) ва (2.3.17) тенгламаларни қаноатлантиради, аммо (2.3.18) - тенгламани қаноатлантирмайди. Демак $[x_i,x_{i+1}]$ кесмада дефекти 2 га тенг бўлган интерполяцион сплайн функцияга эгамиз: $\propto$ ларнинг қийматларидан фойдаланиб сплайн функциянинг кўринишини ҳосил қилдик [25].

$$S_3(f;x)=S_3(t)=(1-t)y_i(t)+ty_{i+1}(t). \qquad (2.3.20`)$$

$$\varphi_1(t)=-0,5t(1-t)^2,\qquad \varphi_2(t)=0,5(1-t)(2+2t-3t^2),$$

$$\varphi_3(t)=0,5t(1+4t-3t^2),\qquad \varphi_4(t)=-0,5(1-t)t^2$$

Ҳосил бўлган локал интерполяцион кубик сплайн функцияни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин. Ушбу ҳосил қилинган локал интерполяцион кубик сплайн функцияни графиги Рябенкий локал кубик сплайн функцияни графиги ҳамда Гребенников локал кубик сплайн функцияни графиги билан таққосланди. 2-иловада келтирилган.

$$S_3(f,x)=\sum_{k=1}^{4}\varphi_k(t)f(x_{i+k-2})$$

Функция интерполяцион сплайн функция бўлганлиги учун интерполяция шартини бажарилишини текшириш мақсадга мувофиқ.

Теорема: Қурилган локал интерполяцион кубик сплайн функцияни коэффицентлари йиғиндиси бирга тенг тенг.

$$\sum_{k=1}^{4}\varphi_k(t)=1$$

Исбот:

$$\sum_{k=1}^{4}\varphi_k(t)=\varphi_1(t)+\varphi_2+\varphi_3(t)+\varphi_4(t)$$

Келтириб чиқарилган $\varphi_i(t), i=\overline{1,n}$ сплайн функцияни коэффицетларини қўйиб маълум бир соддалаштиришлардан кейин коэффицентлар йиғиндиси 1 га тенг бўлишини кўриш қийин эмас. Яъни

$$\sum_{k=1}^{4}\varphi_k(t)=\varphi_1(t)+\varphi_2+\varphi_3(t)+\varphi_4(t)=-\frac{1}{4}t+\frac{3}{4}t^2-\frac{1}{2}t^3+$$

$$+1-\frac{3}{4}t-\frac{7}{4}t^2+\frac{3}{2}t^3+\frac{5}{4}t+\frac{5}{4}t^2-\frac{3}{2}t^3-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t^3=1$$

теорема исботланди.

2.4. Берилган аниқ маълумотлар асосида локал интерполяцион кубик сплайн функция қуриш

Энди юқорида кўрилган умумий ҳолдан фойдаланиб хусусий ҳоллар буйича аниқ мисолларда интерполяцион кубик сплайн қуришни қараймиз

$x\epsilon[1; 1.5]$ кесмада $S_{3_1}(x)$ интерполяцион кубик сплайн функция, $x\epsilon[1.5; 2]$ ораликда $S_{3_2}(x)$ интерполяцион кубик сплайн функция, $x\epsilon[2; 2.5]$ ораликда $S_{3_3}(x)$ интерполяцион кубик сплайн функция қуришни қараймиз.

Бунинг учун қуйидаги олтита нуқтадан ўтувчи тўртта параболик функциялардан фойдаланамиз, яъни

A(0.5;1.5), B(1;4), C(1.5;2), D(2;3), E(2.5;1), F(3.2) нуқталар берилган бўлсин.

A(0.5;1.5), B(1;4), C(1.5;2) нуқталардан ўтувчи биринчи параболик функцияни ҳосил қиламиз.

$$Y_1(x) = -9x^2 + 18.5x - 5.5$$

B(1;4), C(1.5;2), D(2;3) нуқталардан ўтувчи иккинчи параболик функцияни ҳосил қиламиз.

$$Y_2(x) = 6x^2 - 19x + 17$$

C(1.5;2), D(2;3), E(2.5;1) нуқталардан ўтувчи учинчи параболик функцияни ҳосил қиламиз.

$$Y_3(x) = -6x^2 + 23x - 19$$

учинчи параболик функцияни ҳосил қиламиз.

D(2;3), E(2.5;1), F(3.2) нуқталардан ўтувчи тўртинчи параболик функцияни ҳосил қиламиз.

$$Y_4(x) = 6x^2 - 31x + 41$$

$Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $Y_3(x)$, $Y_4(x)$ параболаларнинг қийматини (2.3.20`) - га қўйиб, интерполяцион кубик сплайнларни ҳисоблаймиз. $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $Y_3(x)$, $Y_4(x)$ параболаларнинг графиклари учинчи иловада кўрсатилган.

$Y_1(x)$ ва $Y_2(x)$ – параболаларнинг графигидан $x \in [1;\ 1.5]$ эканлиги келиб чиқади. Юқоридаги қурилган $Y_1(x)$ ва $Y_2(x)$ параболаларнинг чизиқли комбинацияси (2.3.20`) – га асосан $S_{3_1}(x)$ локал интерполяцион кубик сплайн функция қурамиз.

$$S_{3_1}(x) = (1-t)y_1(x) + ty_2(x) \tag{2.4.1}$$

$$t = \frac{x-x_0}{h} \quad h = x_1 - x_0$$

$$S_{3_1}(x) = 30x^3 - 114x^2 + 138.5x - 50.5$$

$Y_2(x)$ ва $Y_3(x)$ – параболаларнинг графиkларидан $x \in [1.5;\ 2]$ эканлиги келиб чиқади. $Y_2(x)$ ва $Y_3(x)$ параболаларнинг чизиқли комбинацияси (2.3.20`) – га асосан $S_{3_2}(x)$ локал интерполяцион кубик сплайн функция қурамиз.

$$S_{3_2}(x) = (1-t)y_2(x) + ty_3(x) \tag{2.4.2}$$

$$t = \frac{x-x_0}{h} \quad h = x_1 - x_0$$

$$S_{3_2}(x) = -24x^3 + 126x^2 - 217x + 125$$

Интерполяция шартларини ҳамда интерполяцион кубик сплайн функцияларнинг узлуксизлигини текширамиз:

$$S_{3_1}(x) = S_{3_2}(x) \qquad S_{3_1}(1{,}5) = S_{3_2}(1{,}5)$$

$$S_{3_1}(1{,}5) = 2 \qquad S_{3_2}(1{,}5) = 2$$

$Y_3(x)$ ва $Y_4(x)$ – параболаларнинг графиkларидан x$\in [2; 2{,}5]$ эканлиги келиб чиқади. $Y_3(x)$ ва $Y_4(x)$ параболаларнинг чизиқли комбинацияси (2.3.20`) – га асосан $S_{3_3}(x)$ локал интерполяцион кубик сплайн функция қурамиз.

$$S_{3_3}(x) = (1-t)y_3(x) + ty_4(x) \tag{2.4.3}$$

$$S_{3_3}(x) = 24x^3 - 162x^2 + 359x - 259$$

Интерполяция шартларини ҳамда интерполяцион кубик сплайн функцияларнинг узлуксизлигини текширамиз:

$S_{3_2}(x) = S_{3_3}(x)$ $\qquad$ $S_{3_2}(2) = S_{3_3}(2)$

$S_{3_2}(2) = 3$ $\qquad$ $S_{3_3}(2) = 3$

Сплайн таърифига кўра қуйидаги шартларни текшириб кўрамиз:

$S'_{3_1}(1.5) = S'_{3_2}(1.5)$ $\qquad$ $S'_{3_2}(2) = S'_{3_3}(2)$

$S'_{3_1}(1.5) = -1$ $\qquad$ $S'_{3_2}(1.5) = -1$

$S'_{3_2}(2) = -1$ $\qquad$ $S'_{3_3}(2) = -1$

Демак, дефекти 2 га тенг бўлган локал интерполяцион кубик сплайн функция қурилди.

MathCad дастуридан фойдаланиб локал интерполяцион кубик сплайн функциялар қурилиши жараёнида уланиш тугун нуқталарида локал интерполяцион кубик сплайн функцияларнинг узлуксизликларини текширилди ҳамда график асосида параболалар ёрдамида қурилган локал интерполяцион кубик сплайн функцияларнинг жойлашишлари таҳлил қилинди. 3- иловада келтирилган.

2- боб бўйича хулоса

Диссертация ишининг иккинчи бобида жадвал кўринишида берилган функцияларни сплайн функциялар билан яқинлаштириш масаласи қаралди. Биринчи даражали интерполяцион сплайн функция асосида локал интерполяцион кубик спайн функция қурилди, бир локал интерполяцион кубик сплайннинг қурилиши умумий ҳолда кўрсатилди ҳамда берилган аниқ маълумотлар асосида локал интерполяцион кубик сплайн функция қурилди. MathCad дастури асосида қурилган локал интерполяцион кубик сплайн функция графиклари тикланаётган функция графиклари билан таҳлил қилинди.

III Боб. Бир локал интерполяцион кубик сплайн функциянинг $C[a,b]$ синфида ҳамда $C^1[a,b]$ синфида хатолигини баҳолаш

3.1. Бир локал интерполяцион кубик сплайн функция хатоликларини баҳолашда фойдаланиладиган айрим маълумотлар ва синфлар ҳақида

Интерполяцион кубик сплайн функцияни хатолигини баҳолашда фойдаланилган қуйидаги маьлумотларни киритамиз:

$[a,b]$ кесмада $\Delta: a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$ тўр тугун нуқталари берилган бўлсин. P_m – даражаси m дан юқори бўлган кўпҳадлар тўплами, ва $C^k = C^k[a,b]$ – k-тартибли ҳосиласи узлуксиз бўлган функциялар синфи. $C^{-1}[a,b]$ – биринчи тур узилиш нуқталарига эга бўлакли узлуксиз функциялар синфи.

Интерполяция масаласи ҳисоблаш математикасида кенгроқ тарқалган нормаланган фазо ва синфлардан бўлган функциялар учун қаралади.

$C[a,b]$ $[a,b]$ да узлуксиз функциялар фазосининг нормаси

$$\| f(x)\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

кўринишда аниқланади. Функцияларнинг Δ тўрга боғлиқ бўлмаган характеристикаси бўлиб, узлуксизлик модули

$$\omega(f;h) = \max_{x',x''\in[a,b],\ |x'-x''|\le h} |f(x'') - f(x')|, \quad h \le b-a.$$

хизмат қилади.

Ўлчовли $f(x)$ функция $[a,b]$ да чегараланган, агар шундай μ мавжудки, $|f(x)|>\mu$ ни қаноатлантирадиган нуқталар тўплами нолга тенг. Шу хоссага эга бўлган μ ларнинг енг кичиги $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in[a,b]}|f(x)|$ каби белгиланади. $L_\infty[a,b]$ қуйидаги нормага эга ўлчовли ва чегараланган функциялар фазоси

$$\|f(x)\|_{L_\infty[a,b]}=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

Барча узлуксиз функциялар учун ўрта қиймат ҳақидаги теореманинг кейинги вариантидан фойдаланамиз. $a\le x_1\le x_2\le\ldots\le x_k\le b$ ва $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ldots,$ λ_k катталиклар бир хил ишорали бўлсин ҳамда $f(x)\in C[a,b]$. У ҳолда

$$\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\ldots\lambda_k f(x_k)=(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k)f(\xi),\quad a\le\xi\le b. \quad (3.1.1)$$

Шунингдек, мос равишда $f(x)\in W^r[a,b]$ ва $f(x)\in C^r[a,b]$ ларда ўринли бўлган Тейлор ёйилмаси

$$f(x)=f(a)+\ldots+\frac{f^{(r-1)}(a)(x-a)^{r-1}}{(r-1)!}+\frac{1}{(r-1)!}\int_a^x(x-v)^{r-1}f^{(r)}(v)dv, \quad (3.1.2)$$

ёки

$$f(x)=f(a)+\ldots+\frac{f^{(r-1)}(a)(x-a)^{r-1}}{(r-1)!}+\frac{f^{(r)}(\eta)}{r!}(x-a)^r,\quad a\le\eta\le x, \quad (3.1.3)$$

дан фойдаланамиз ҳамда қуйидаги Гёлдер тенгсизлиги ҳам бизга керак бўлади

$$\int_a^b|f(x)|\cdot|g(x)|dx\le\|f(x)\|_{L[a,b]}\|g(x)\|_\infty. \quad (3.1.3а)$$

3.1.1 Таъриф. $f(t)$ функция $[a,b]$ да μ кўрсаткичли ва K константали Гёлдер шартини қаноатлантиради (қисқача $f(t)\in H^\mu([a,b],K)$ ёки $f(t)\in H(\mu)$ деб белгиланади), агарда шу кесмага тегишли ихтиёрий t' ва t'' лар учун қуйидагига эга бўлсак

$$|f(t')-f(t'')|\le K|t'-t''|^\mu,$$

бунда K ва μ – мусбат сонлар, $0<\mu\le 1$. Агар μ кўрсаткич бизни қизиқтирмаса, у ҳолда $f(t)$ функция $[a,b]$ кесмада H шартни қаноатлантиради деймиз ва $f(t)\in H$ деб ёзамиз.

Шунга эътибор берамизки, агар $f(t)\in H(\mu)$ бўлса у ҳолда $|f(t)|\in H(\mu)$ бўлади.

Бўлакли силлиқ L эгри чизиқ бўйича Коши ядроли сингуляр интеграл таърифини эслатиб ўтамиз.

3.1.2 Таъриф. x_0 нуқта L эгри чизиқнинг ҳеч бир охири билан устма-уст тушмасин, яъни L нинг ички нуқтаси бўлсин. Маркази x_0 да бўлган шунчалик кичик $\varepsilon>0$ радиусли айлана чизамизки у L ни роппа роса иккита x', x'' нуқталарда кессин. ℓ орқали x', x'' ёйни белгилаймиз. Кейинги интеграл

$$\int_{L,\ \ell}\frac{\varphi(x)dx}{x-x_0}.$$

ни қараймиз. Агар $\varepsilon\to 0$ да бу интеграл чекли лимитга интилса, у ҳолда бу лимит Коши бўйича интегралнинг бош қиймати бўлади, яъни

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{L,\ \ell}\frac{\varphi(x)dx}{x-x_0}=\int_{L}\frac{\varphi(x)dx}{x-x_0}. \quad [25]$$

3.2. Биринчи даражали сплайн функциянинг хатолигини баҳолаш

Биринчи даражали, дефекти 1 га тенг сплайнлар тарифга асосан ҳар бир $[x_i, x_{i+1}]$ ораликда узлуксиз синиқ чизиқдан иборат бўлади.

$[a,b]$ оралигида қуйидаги тўрни олайлик $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$. Бу нуқталарда $f(x)$ функциянинг қийматлари y_i $(i=\overline{0,n})$ берилган бўлсин. Чизиқли сплайннинг аналитик кўринишини турлича ифодалаш мумкин:

1) Лагранжнинг биринчи даражали интерполяцион формуласи

ёрдамида

$$S_1(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_i} y_i + \frac{x - x_i}{h_i} y_{i+1},$$

бу ерда $h_i = x_{i+1} - x_i$.

2) Ньютоннинг тенгмас ораликлар учун биринчи даражали интерполяцион формуласи ёрдамида

$$S_1(x) = y_i + \frac{x - x_i}{h_i}(y_{i+1} - y_i).$$

3) Сплайнлар синфининг базиси билан ифодаланган

$$S_1(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{j=1}^{n-1} b_j (x - x_j)_+ ,$$

бу ерда $a_0, a_1, b_j \quad (j = \overline{1, n-1})$ номаълум коэффициентлар интерполяцион шартларни бажарилишидан топилади, яъни $S_1(x_i) = y_i \quad (i = \overline{o, n})$.

Сплайнлар билан интерполяциялашнинг бир неча синфларда қолдиқ ҳадини баҳолаймиз.

$f(x) \in C_{[a,b]}$ бўлсин.

$$R(x) = f(x) - S_1(x) = f(x) - y_i - \frac{x - x_i}{h_i}(y_{i+1} - y_i).$$

$u = \frac{x - x_i}{h_i}$ белгилаш киритамиз.

У ҳолда

$$R(x) = f(x) - S_1(x) = f(x) - (1-u) y_i - u y_{i+1}.$$

$(1-u) y_i + u y_{i+1}$ ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўлласак $R(x) = f(x) - f(\xi), \quad \xi \in [a,b]$. Демак, $|R(x)| = |f(x) - f(\xi)| \le \omega(f)$. [16], [24], [25].

3.3. Бир локал интерполяцион кубик сплайн функциянинг узлуксиз функциялар синфида ҳамда функциянинг ўзи, биринчи тартибли ҳосиласигача узлуксиз функциялар синфида хатолигини баҳолаш

Энди биз қуйида (3.3.1)- сплайн функциянинг хатолигини баҳолаймиз

$$S_3(f;x)=\sum_{j=0}^{3}\varphi_{j+1}(t)\,f(x_{i+j-1}). \tag{3.3.1}$$

бунда $S_3(f,x)$ сплайн функция $f(x)$ функция орасидаги хатолик қуйидагича ёзилади:

$$R_N(f;x)=\sum_{j=0}^{3}\varphi_{j+1}(t)\,f(x_{i+j-1})-f(x), \tag{3.3.2}$$

бу ерда

$$\varphi_1(t)=-0{,}5t(1-t)^2,\qquad \varphi_2(t)=0{,}5(1-t)(2+2t-3t^2),$$

$$\varphi_3(t)=0{,}5t(1+4t-3t^2),\qquad \varphi_4(t)=-0{,}5(1-t)t^2.$$

(3.3.1)- сплайн функциянинг хатолигини $C[a,b]$- узлуксиз функциялар синфида ҳамда $C^1[a,b]$- биринчи тартибли ҳосиласигача узлуксиз функциялар синфида баҳолаймиз. Хатоликни баҳолашни қуйидаги теорема орқали ифода этамиз.

Теорема (3.3.2) - тенглик билан аниқланган $S_3(f;x)$ кубик сплайн функциянинг хатолиги $R_N(f;x)$ учун қуйидаги баҳолар ўринли

$$\max_{a\le x\le b}\left|S_3^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)\right|\le R_r,\ \ r=0{,}1.$$

бу ерда $a_1=a-h,\quad b_1=b+h$, R_r лар эса жадвалда келтирилган.

Функция синфлари	R_0	R_1
$C[a_1,b_1]$	$\frac{9}{8}\omega(f,3h)$	
$C^1[a_1,b_1]$	$\frac{3}{8}h\omega(f',3h)$	$1{,}375\omega(f',3h)$

Исбот. Хатоликни баҳолашда фойдаланиладиган қуйидаги тенгликларни ўринли эканлигини осонгина текшириб кўриш мумкин:

$$\sum_{j=0}^{3} \varphi_{j+1}(t) = 1, \qquad (3.3.3)$$

$$\sum_{j=0}^{3} \varphi'_{j+1}(t) = 0, \qquad (3.3.4)$$

1. (3.3.1)- сплайн функциянинг хатолигини $C[a\ ,b\ ]$ да баҳолаймиз. $f(x) \in C[a_1, b_1]$ бўлсин. Равшанки $0 \le t \le 1$ бўлганда бир хил ишорали функцияларни қуйидагича ёзиб оламиз: яъни $\varphi_1(t) \le 0,\ \varphi_2(t) \ge 0,\ \ \varphi_3(t) \ge 0,$ $\varphi_4(t) \le 0$ бўлади. Шунда (3.3.2) –ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$R_N(f;x) = \varphi_1(t)f(x_{i-1}) + \varphi_2(t)f(x_i) + \varphi_3(t)f(x_{i+1}) + \varphi_4(t)f(x_{i+2}) - f(x),$

ўрта қиймат ҳақидаги теоремани бир хил ишорали қўшилувчиларга қўллаб қуйидагига эга бўламиз:

$$R_N(f;x) = [\varphi_2(t) + \varphi_3(t)]f(\xi_1) - [1 - \varphi_1(t) - \varphi_4(t)]f(\xi_2) = \frac{1}{2}(2 + t - t^2)f(\xi_1) -$$

$$-(1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2)f(\xi_2) = (1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2)[f(\xi_1) - f(\xi_2)], \quad x_{i-1} \le \xi_1,\ \ \xi_2 \le x_{i+2},$$

$$R_N(f;x) = g_1(t)\omega(f, 3h)$$

бу ерда $g_1(t) = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2$ ва $\omega(f, 3h) = f(\xi_1) - f(\xi_2)$.

$$R_N(f;x) = g_1(t)\omega(f, 3h) \le g_1\omega(f, 3h)$$

бу ерда $g_1 = \max\limits_{0 \le t \le 1} |g_1(t)|$.

Бу ердан $$\|R_N(f;x)\| \le \frac{9}{8}\omega(f, 3h) \qquad (3.3.5)$$

эканлиги келиб чиқади.

2. $f(x) \in C^1[a_1, b_1]$ бўлсин.

2.1. У ҳолда, $R_N(f;x)$ ни баҳолаймиз.

$$f(x) = f(a) + \ldots + \frac{f^{(r-1)}(a)(x-a)^{r-1}}{(r-1)!} + \frac{f^{(r)}(\eta)}{r!}(x-a)^r, \quad a \le \eta \le x,$$

бунда $r=1,\ a=x,\ x=x_{i+j-1}$ деб олиб, қуйидагига эгамиз.

$$f(x_{i+j-1})=f(x)+(x_{i+j-1}-x)f'(\xi_j),\quad \xi_j\in(x,x_{i+j-1})\,. \qquad (3.3.6)$$

Бу тенгликдан $j=0,1,2,3$ дан фойдаланиб (3.3.2) - дан топамиз

$$R_N(f;x)=\sum_{j=0}^{3}\varphi_{j+1}(t)[f(x)+(x_{i+j-1}-x)f'(\xi_j)]-f(x)\,.$$

$x_{i+j-1}-x=(j-1-t)h$ бўлгани учун (3.3.3) -га кўра, қуйидаги тенглик ўринли

$$R_N(f;x)=h\sum_{j=0}^{3}(j-1-t)\varphi_{j+1}(t)f'(\xi_j),\quad \xi_j\in(x,x_{i+j-1})\,.$$

$\varphi_i(t)\quad i=\overline{1,4}$ нинг ишораларини ҳисобга олиб ва ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаб, қуйидагига эгамиз:

$$R_N(f;x)=\{[-(1+t)\varphi_1(t)+(1-t)\varphi_3(t)]f'(\xi)-[t\cdot\varphi_2(t)-$$
$$-(2-t)\varphi_4(t)]f'(\eta)\}h=hg_3(t)[f'(\xi)-f'(\eta)]\,,$$

Бу ерда $x_{i-1}\le\xi,\eta\le x_{i+2}$, $g_3(t)=t(1-t)(1+2t-2t^2)$.

Демак,

$$|R_N(f;x)|\le g_3\cdot h\cdot\omega(f';3h),\quad g_3=\max_{0\le t\le 1}|g_3(t)|$$

ёки

$$|R_N(f;x)|\le\frac{3}{8}h\omega(f';3h). \qquad (3.3.7)$$

2.2. Энди $R'_N(f;x)$ ни баҳолаймиз. (3.3.2) - тенгликни дифференциаллаб, қуйидагини оламиз

$$R'_N(f;x)=\frac{1}{h}\sum_{j=0}^{3}\varphi'_{j+1}(t)f(x_{i+j-1})-f'(x). \qquad (3.3.8)$$

(3.3.8)- га (3.3.6)-ёйилмани қўямиз, сўнгра, (3.3.4)- тенгликдан фойдаланиб,

$$R'_N(f;x)=\sum_{j=0}^{3}(j-1-t)\varphi'_{j+1}(t)f'(\xi_j)-f'(x). \qquad (3.3.9)$$

га эга бўламиз.

Кейин эса, биз $\varphi'_i(t),\ i=\overline{1,4}$ ўзгармас ишорага эга бўлган оралиқларни топишимиз керак.

Кўрсатиш мумкинки, [0,1] ораликнинг ҳамма нуқталарида $\varphi'_2(t)\le 0,\ \ \varphi'_3(t)\ge 0$ бўлади ва $\varphi'_1(t)$, $\varphi'_4(t)$ функциялар мос равишда $t_1=\dfrac{1}{3}$ ва $t_2=\dfrac{2}{3}$ нуқталарда биттадан илдизга эга бўлади.

Шундай экан, қуйидаги ҳолларни қараб чиқиш лозим:

$$a_1)\ 0\le t\le t_1;\quad a_2)\ \ t_1\le t\le t_2;\quad a_3)\ \ t_2\le t\le 1$$

Биринчи ҳолда $a_1):\varphi'_1(t)\le 0,\ \ \varphi'_2(t)\le 0,\ \ \varphi'_3(t)\ge 0$ ва $\varphi'_4(t)\le 0.$

Бир хил ишорали қўшилувчиларга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаб, (3.3.9) - тенгликдан қуйидагини оламиз

$$R'_N(f;x)=[-(1+t)\varphi'_1(t)-t\cdot\varphi'_2(t)+(1-t)\varphi'_3(t)]f'(\xi)-$$

$$-[-(2-t)\varphi'_4(t)+1]f'(\eta)=g_4(t)[f'(\xi)-f'(\eta)],$$

бу ерда $x_{i-1}\le\xi,\eta\le x_{i+2}$ ва $g_4(t)=1+2t-4t^2+\dfrac{3}{2}t^3.$

Демак,

$$\left|R'_N(f;x)\right|\le g_4\cdot\omega(f';3h),\quad g_4=\max_{0\le t\le\frac{1}{3}}\left|g_4(t)\right|,$$

ёки

$$\left\|R_N(f;x)\right\|\le 1{,}28\,\omega(f';3h).$$

Иккинчи ҳолда $a_2):\ \varphi'_1(t)\ge 0,\ \varphi'_2(t)\le 0,\ \ \varphi'_3(t)\ge 0$ и $\varphi'_4(t)\le 0.$

$a_1)$ пунктдагидай, қуйидагига эгамиз

$$R'_N(f;x)=[-t\cdot\varphi'_2(t)+(1-t)\varphi'_3(t)]f'(\xi)-[(1+t)\varphi'_1(t)-(2-t)\varphi'_4(t)+1]f'(\eta)=$$

$$=g_5(t)[f'(\xi)-f'(\eta)],$$

бу ерда $x_{i-1}\le\xi,\ \eta\le x_{i+2}$ и $g_5(t)=\dfrac{1}{2}(1+7t-7t^2).$

Бу ердан қуйидагига эгамиз

$$\left|R'_N(f;x)\right|\le g_5\cdot\omega(f';3h),\ \ g_5=\max_{\frac{1}{3}\le t\le\frac{2}{3}}\left|g_5(t)\right|$$

ёки

$$\left|R'_N(f;x)\right| \le 1{,}3749\omega(f';3h).$$

Учинчи ҳолда $a_3)$ $\varphi'_1(t) \ge 0,$ $\varphi'_2(t) \le 0,$ $\varphi'_3(t) \ge 0$ ва $\varphi'_4(t) \ge 0.$

Энди, олдинги пунклардагига ўхшаш

$$R'_N(f;x) = [-t\cdot\varphi'_2(t) + (1-t)\varphi'_3(t) + (2-t)\varphi'_4(t)]f'(\xi) -$$
$$-[(1+t)\varphi'_1(t)+1]f'(\eta) = g_6(t)[f'(\xi) - f'(\eta)],$$

бу ерда $x_{i-1} \le \xi,\eta \le x_{i+2}$ ва $g_6(t) = \frac{1}{2}(1+3t+t^2-3t^3)$.

Демак,

$$\left|R'_N(f;x)\right| \le g_6\cdot\omega(f';3h),\ g_6 = \max\left|g_6(t)\right|,\ \frac{2}{3} \le t \le 1.$$

Бу ердан

$$\left|R'_N(f;x)\right| \le 1{,}28\ \omega(f';3h).$$

Энди $a_1), a_2), a_3)$ ҳолларнинг ичида қиймати энг каттасини топамиз:[16], [18], [25].

$$\left|R'_N(f;x)\right| \le 1{,}375\omega(f';3h). \qquad (3.3.10)$$

3 боб бўйича хулосалар

Мазкур бобда бир локал интерполяцион кубик сплайн функция хатоликларини баҳолашда фойдаланиладиган айрим маълумотлар ва синфлар ҳақида маълумотлар келтирилган. Бир локал интерполяцион кубик сплайни хоссалари ўрганилди, биринчи даражали сплайн функциянинг хатолигини баҳоланди. Бир локал интерполяцион кубик сплайн функциянинг хатолиги $C[a,b]$- узлуксиз функциялар синфида ҳамда $C^1[a,b]$- функциянинг ўзи биринчи тартибли ҳосиласигача узлуксиз функциялар синфида баҳоланди.

ХУЛОСА

Ҳисоблаш математикаси фанининг “Функцияларини интерполяциялаш” ва “Функцияларни яқинлаштириш” бўлимлари фан техника ривожида мухим аҳамиятга эга.

Ҳозирги кунда жадвал кўринишида берилган функцияларни аналитик кўринишини тиклаш борасида классик интерполяцион кўпхадларга нисбатан ўзининг назарий ва амалий жиҳатдан авзаллиги, айниқса функцияларни яқинлаштиришда ўзининг қурилиш жиҳатидан соддалиги, ЭҲМ машиналарини вақтини тежашни, айниқса берилган $f(x)$ функцияга яқинлашиш тезлиги юқорилиги билан ажралиб турган интерполяцион сплайн функцияларнинг қурилиши ва унинг хатолигини баҳолаш масалаларини тадбиқий жиҳатдан фан – техниканинг ривожланишида долзарб масалалардан ҳисобланади.

Мазкур диссертация ишининг биринчи бобида “Функцияларни интерполяциялаш масаласи, интерполяцион кўпҳадларнинг мавжудлиги ва ягоналиги, айрим классик интерполяцион кўпҳадлар, сплайн функциялар ва уни ахамияти” ҳақида батафсил маълумотлар берилган. Диссертация ишининг иккинчи бобида “Жадвал кўринишида берилган функцияларни сплайн функциялар билан яқинлаштириш масалалари қаралган. Берилган аниқ маълумотлар асосида локал интерполяцион кубик сплайн функция қурилди. Диссертация ишининг учинчи бобида эса иккинчи бобда қурилган бир локал интерполяцион кубик сплайн функция хатоликларини баҳолашда фойдаланиладиган айрим маълумотлар ва синфлар ҳақида маълумотлар берилган. Биринчи даражали сплайн функциянинг хатолигини баҳоланган. Бир локал интерполяцион кубик сплайн функциянинг узлуксиз функциялар синфида ҳамда функциянинг ўзи, биринчи тартибли ҳосиласигача узлуксиз функциялар синфида хатолигини баҳоланган.

Диссереация ишида функцияларни яқинлаштириш йўналишига мос бўлиб, аниқ берилган маълумотлар асосида сплайн функцияларнинг қуриш ва унинг хатоликларини масаласи қаралган. Диссереация ишининг илова қисмида эса қаралган кубик сплайн билан аниқ берилган функцияни орасидаги фарқ қай даражада яқинлиги борасида аниқ мисоллар олиниб улар MathCad дастури асосида таҳлил қилинган.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

Норматив-ҳуқуқий ҳужжатлар

1. Ўзбекистон Республикаси Конституцияси. Т. Ўзбекистон, 2009 - 40б.
2. Ўзбекистон Республикасининг “Ахборотлаштириш тўғрисида” қонуни.“Халқ сўзи”, 2004 йил 11 феврал.
3. “Замонавий ахборот-коммуникация технологияларини янада кенгроқ жорий қилиш ва ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги Ўзбекистон Республикаси Президентининг Қарори, 21 – март 2012 – йил.
4. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамисининг “Ахбороташтириш сохасида норматив-ҳуқуқий базани такомиллаштириш тўғрисида” 2005 йил 22 ноябрдаги 256 – сон қарори.
5. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2005 йил 22 ноябрдаги “Ахборотлаштириш соҳасида норматив-ҳуқуқий базани такомиллаштириш тўғрисида” ги қарори. -“Халқ сўзи”, 2005 йил 23 ноябр.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг асарлари

6. Мирзиёев Ш. М. Қонун устуворлиги ва инсон манфаатларини таъминлаш – юрт тараққиёти ва халқ фаровонлиги гарови. – Тошкент, 2017
7. Мирзиёев Ш. М. Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. – Тошкент, 2016
8. Мирзиёев Ш.М. Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. Ўзбекистон Республикаси

Президенти лавозимига киришиш тантанали маросимига бағишланган Олий Мажлис палаталарининг қўшма мажлисидаги нутқ, Тошкент, 2016. 56-б.

9. Мирзиёев Ш.М. Танқидий таҳлил, қатъий тартиб-интизом ва шахсий жавобгарлик – ҳар бир раҳбар фаолиятининг кундалик қоидаси бўлиши керак. Мамлакатимизни 2016 йилда ижтимоий-иқтисодий ривожлантиришнинг асосий якунлари ва 2017 йилга мўлжалланган иқтисодий дастурнинг энг муҳим устувор йўналишларига бағишланган Вазирлар Маҳкамасининг кенгайтирилганмажлисидаги маъруза, 2017 йил 14 январъ –Тошкент, Ўзбекистон, 2017. 104-б.

10. Мирзиёев Ш.М. Қонун устуворлиги ва инсон манфаатларини таъминлаш-юрт тараққиёти ва халқ фаровонлигининг гарови. Ўзбекистон Республикаси Конституцияси қабул қилинганининг 24 йиллигига бағишланган тантанали маросимдаги маъруза. 2016 йил 7 декабрь- Тошкент, Ўзбекистон, 2017. 48-б.

11. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамиз. Мазкур китобдан Ўзбекистон Республикаси Президенти Шавкат Мирзиёевнинг 2016 йил 1 ноябрдан 24 ноябрга қадар Қорақалпоғистон Республикаси, вилоятлар ва Тошкент шахри сайловчилари вакиллари билан ўтказилган сайловолди учрашувларида сўзлаган нутқлари ўрин олган.-Тошкент, Ўзбекистон, 2017. 488-б.

12. Ўзбекистон Республикасининг Биринчи Президенти И.А.Каримов Демократик ислоҳотларни янада чуқурлаштириш ва фуқаролик жамиятини шакллантириш – мамлакатимиз тараққиётининг асосий мезонидир. Т.19. – Т., 2011.

13. Ўзбекистон Республикасининг Биринчи Президенти И.А.Каримов Юқори ўсиш суръатлари билан ривожланиш, барча мавжуд имкониятларни сафарбар этиш, ўзини оқлаган ислоҳотлар

стратегиясини изчил давом эттириш йили бўлади. //Халқ сўзи, 2014 йил, 17 январ

14. Ўзбекистон Республикасининг Биринчи Президенти И.А.Каримов Бош мақсадимиз – кенг кўламли ислоҳотлар ва модернизастия йўлини қатъият билан давом эттириш. //Халқ сўзи, 2013 йил, 19 январ
15. Ўзбекистон Республикасининг Биринчи Президенти И.А.Каримов Барча режа ва дастурларимнз ватанимиз тараққиётини юксалтириш, халқимиз фаравонлигини оширишга хизмат килади. //Халқ сўзи, 2011 й, 22-январ

Асосий адабиётлар

16. Исроилов М.И. Ҳисоблаш методлари. 1-қисм, Тошкент, Ўзбекистон, 2003.231-330.
17. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. -Москва: Мир, 1972. - 316.
18. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – Москва: Наука, 1980. - 352 с.
19. Hayotov A.R., Milovanovic G.V., Shadimetov Kh.M. Interpolation splines minimizing a semi-norm. // Calcolo, 2014. –vol.51. -№2, -pp. 245-260.
20. Hayotov A.R., Milovanovic G.V., Shadimetov Kh.M. Optimal quadrature formulas and interpolation splines minimizing the semi-norm in $K_2(P_3)$ space// G.V.Milovanovic and M.Th.Rassias (eds.), Analytic Number Theory, Approximation Theory, and Special Functions, Springer. -pp.573-611.
21. Schoenberg I.J. On trigonometric spline interpolation// J. Math. Mech. 1964. –vol.13. - pp.795-825.

22. Гребенников А.И. Об одном методе построения интерполирующих кубических и бикубических сплайнов на равномерной сетке // Вест. Моск. Университета, вычисл. матем. и и кибер. 1978, N4, - С. 12-17.
23. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. –Москва, Наука, 1976. – 248.
24. Исматуллаев Ғ.П., Жўраев Г.У. Ҳисоблаш усlларидан методик қўлланма Тошкент -2007.8-35.
25. Бахрамов С.А. «Исследование некоторых классов локальных сплайнов и их приложения к вычислению интегралов Фурье и сингулярных интегралов», ЎзМУ илмий кутубхонаси, 2006 yil.

Қўшимча адабиётлар

26. Джуракулов Р., Исраилов М.И. Построение весовых кубатурных формул для сингулярных интегралов с помощью сплайн - функции. // Изв. ВУЗов. Математика. 1980, № 9, с. 7-12.
27. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. Construction of interpolation splines minimizing semi-norm in $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ space// BIT Numer. Math. 2013.
28. Бахвалов Н.С. Численные методы. Т.I. -М.: Наука. 1973. - 631 с.
29. Bojanov B.D., Hakopian H.A., Sahakian A.A. Spline functions and multivariate interpolations, Kluwer, Dordrecht, 1993.
30. de Boor C. Best approximation properties of spline functions of odd degree, J. Math. Mech. 1963. – vol. 12, - pp. 747-749.
31. de Boor C. A practical guide to splines, Springer-Verlag, 1978.
32. Cabada A., Hayotov A.R., Shadimetov Kh.M. Construction of D^m – splines in $L_2^{(m)}(0,1)$ space// Applied Mathematics and Computation. 2014.
33. Исраилов М.И., Эшдавлатов Б. Уточнение остаточного члена одного интерполяционного сплайна. // Вопр. вычис. и прик. математики, - Ташкент: РИСО АН Узбекистана, 1986, вып. 80, С. 10-26.

34. Schumaker L.L. Spline functions: basic theory// Cambridge university press. 2007.
35. Holladay J.C. Smoothest curve approximation, Math. Tables Aids Comput. 1957. -vol.11. –pp. 223-243.
36. Азларов Т., Мансуров Ҳ. Математик анализ. 2-қисм – Тошкент: Ўқитувчи, 1989.54-70.
37. Саримсоқов Т.А. Ҳақиқий ўзгарувчининг функциялари назарияси. Тошкент: Ўқитувчи, 1982.130-144.

Даврий нашрлар, статистик тўпламлар ва ҳисоботлар

38. Бахрамов С.А., Сайидова Г.Д. Бир локал интерполяцион кубик сплайн ва унинг баҳоси. Тезисы докладов научного семинара “Кубатурные формулы и их приложения” , Ташкент шаҳри, 15-16-март 2017 й. 27б.
39. Зайнидинов Х., Бахрамов С.А., Бахрамова Х.С., Сайидова Г.Д. Сравнительный анализ методов приближения функций полиномиальными сплайнами. Тезисы докладов научного семинара “Кубатурные формулы и их приложения” , Ташкент шаҳри, 15-16-март 2017 й. 31б.
40. Бахрамов С.А., Сайидова Г.Д. Берилган маълумотлар асосида локал интерполяцион кубик сплайн қуриш ва уланиш тугун нуқталаридаги узлуксизлигини текшириш. Республиканская научная конференция “Актуальные проблемы дифференциалных уравнений и их приложения” , Ташкент шаҳри, 15-17-декабр 2017 й., 231б.
41. Бахрамов С.А., Сайидова Г.Д., Рахимбаева Р.М. Бир локал интерполяцион кубик сплайн функция ҳамда Рябенький локал интерполяцион кубик сплайн функцияларни берилган аник маълумотлар асосида қурилиши ва тахлили **.** **“**Информатика, ахборот технологиялари ва бошқарув тизими: бугун ва келажакда**”** номли

Республика илмий-амалий конференцияси, Навоий шаҳри, 20 апрель 2018 й., 176б.

42. Бахрамов С.А., Сайидова Г.Д., Янгибоев Э.И. Лагранж интерполяцион кўпҳади асосида сплайн функция қуриш. “Информатика ва ахборот коммуникация технологиялари таълимини модернизациялаш истиқболлари” номли Республика илмий-амалий конференцияси конференцияси, Навоий шаҳри, 25 май 2018 й.

Интернет сайтлари

43. http:www.lex.uz - Ўзбекистан Республикаси Адлия вазирлиги ҳузуридаги ҳуқуқий ахборотлар билан таъминлаш маркази сайти

44. http:www.gov.uz - Ўзбекистан Республикаси портали.

45. http:www.edu.uz - Ўзбекистан Республикаси ОЎЮ Вазирлигининг сайти.

46. http:www.spb.runnet.ru - Санк-Петербургнинг илмий-техник ахборотлар марказининг сервери.

47. www.ziyonet.uz – Ўзбекистан Республикаси илмий – маърифий сайти

48. www.wikipedia.org/ - энциклопедия сайти

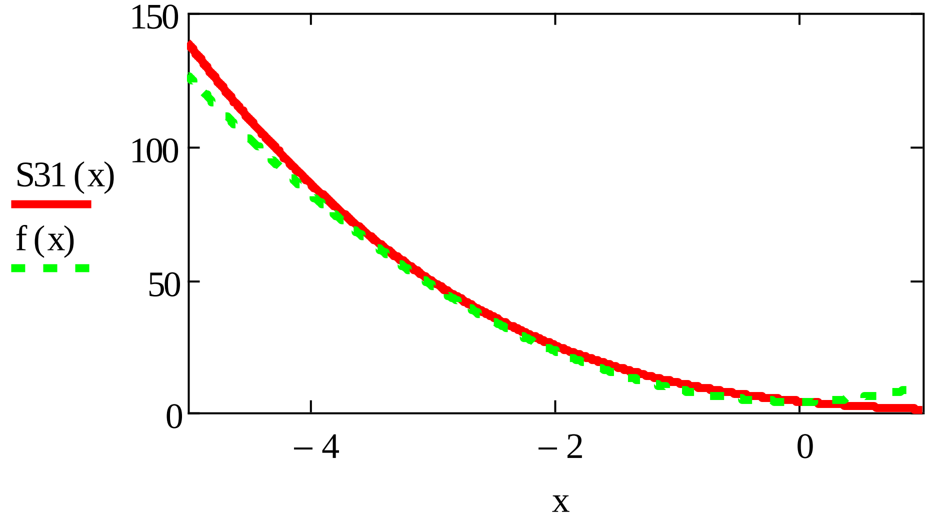
ИЛОВА

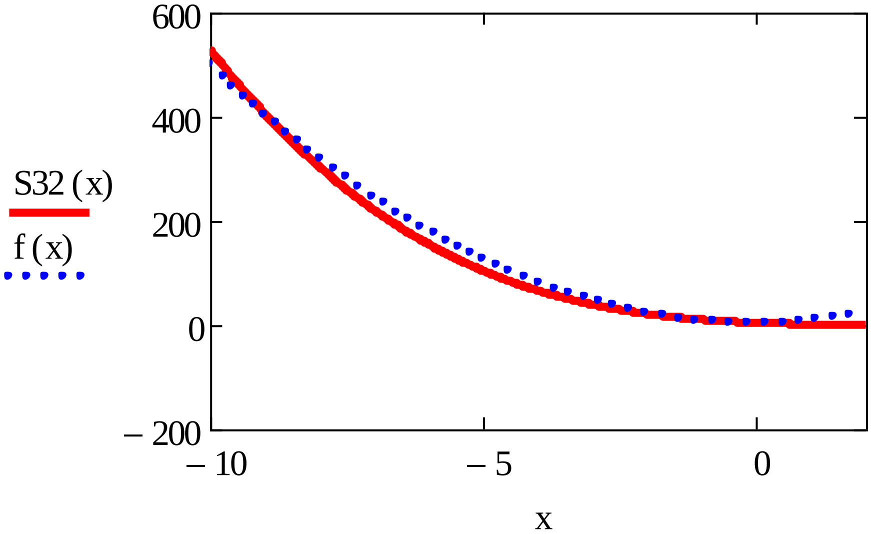
1-Илова. Биринчи даражали интерполяцион сплайн функция асосида локал интерполяцион кубик спайн функция қуриш

$$f(x) := 5x^2 + 0.5x + 4 \text{ бўлганда}$$

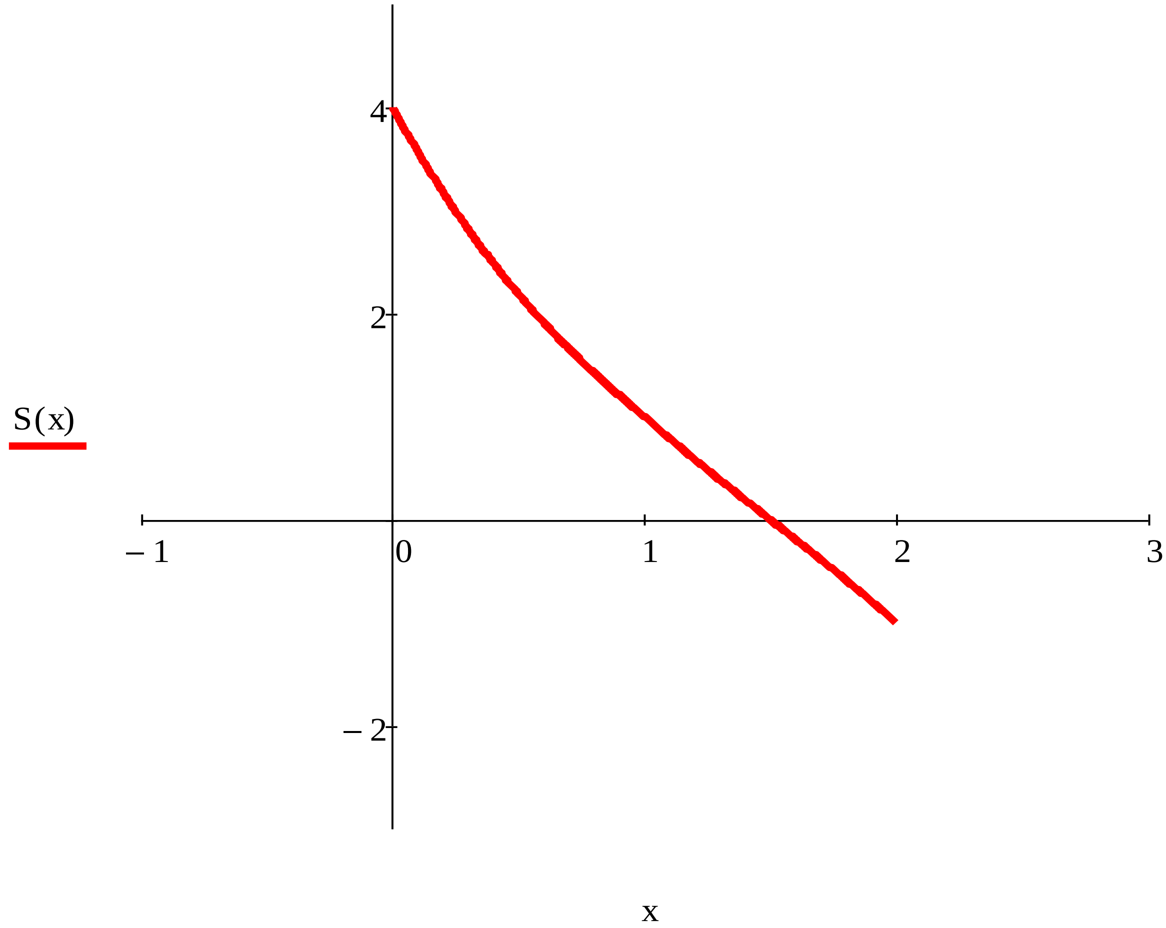
$$S31(x) := \frac{-1}{2}\cdot x^3 + 2x^2 - \frac{9x}{2} + 4 \qquad x \in [0,1]$$

$$S32(x) := \frac{-1}{3}\cdot x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{25x}{6} + 4 \qquad x \in [1,2]$$





$$S(x) := \begin{cases} \dfrac{-1}{2}\cdot x^3 + 2x^2 - \dfrac{9x}{2} + 4 & \text{if } x \ge 0 \wedge x \le 1 \\ \dfrac{-1}{3}\cdot x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{25x}{6} + 4 & \text{if } x \ge 1 \wedge x \le 2 \end{cases}$$



2-Илова. Локал кубик сплайнлар ёрдамида функцияларни яқинлаштириш

2.3-параграфда ҳосил қилинган би локал интерполяцион кубик сплайн функцияни графиги Рябенкий локал кубик сплайн функцияни графиги ҳамда Гребенников локал кубик сплайн функцияни графиги билан таққосланди. Ушбу учта локал кубик сплайнларнинг яқинлашиши берилган функция $f(x)$ билан солиштирамиз.

Бир локал интерполяцион кубик сплайн функция 2.3 - параграфда ўрганилганидек у $[x_i, x_{i+1}]$ кесмада кўринишга эга:

$$S_3(f;x) = \sum_{j=0}^{3} \varphi_{j+1}(t) f(x_{i+j-1}), \qquad (2.3.20`)$$

бу ерда

$$\varphi_1(t) = -0,5t(1-t)^2, \qquad \varphi_2(t) = 0,5(1-t)(2+2t-3t^2),$$

$$\varphi_3(t) = 0,5t(1+4t-3t^2), \qquad \varphi_4(t) = -0,5(1-t)t^2.$$

Бунда $t = (x - x_i)/h$, $h = \dfrac{b-a}{N}$, $N = 1,2,...$

Бундан кейин қулайлик учун бу сплайн функцияни $S_3(x)$ билан белгилаймиз.

Иккинчиси – бу Рябенкий локал кубик сплайн функцияси ва у $[x_i, x_{i+1}]$ кесмада қуйидаги кўринишга ега:

$$S_3(f;x) = \sum_{j=1}^{3} \psi_j(t) f(x_{i+j-1}),$$

бу ерда

$$\psi_1(t) = (1-t)^2(1+t), \qquad \psi_2(t) = t(1+2t-2t^2), \quad \psi_3(t) = -t^2(1-t),$$

Бунда $t = (x - x_i)/h$, $h = \dfrac{b-a}{N}$, $N = 1,2,...$

Рябенкий локал кубик сплайн функциясини $PS_3(x)$ орқали белгилаймиз. Рябенкий кубик сплайн функциясини М.И.Исроилов ва Б.Эшдавлатов ишларида ўрганилган [33].

Учинчи сплайн – бу $[x_i, x_{i+1}]$ кесмада кейинги кўринишга ега бўлган Гребенников локал кубик сплайн функцияси:

$$S_3(f;x)=\sum_{j=0}^{3}\phi_{j+1}(t)\,f(x_{i+j-1}).$$

бу ерда

$$\phi_1(t)=\frac{1}{6}(1-t)^3, \qquad \phi_2(t)=\frac{1}{6}(4-6t^2+3t^3),$$

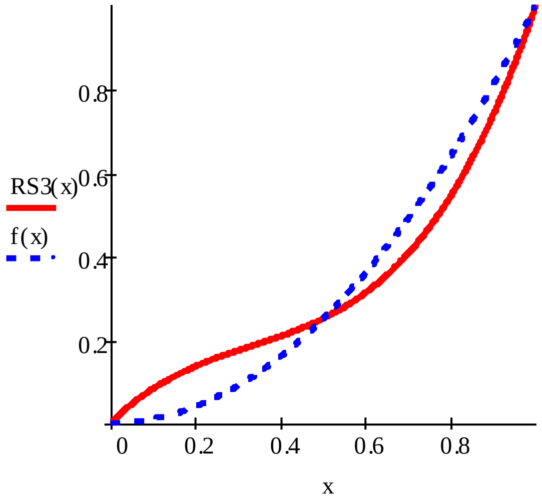
$$\phi_3(t)=\frac{1}{6}(1+3t+3t^2-3t^3), \quad \phi_4(t)=\frac{1}{6}t^3.$$

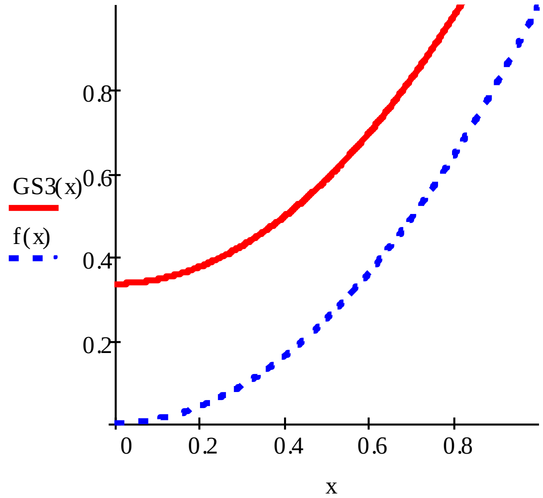
Бунда $t=(x-x_i)/h$, $h=\dfrac{b-a}{N}$, $N=1,2,...$

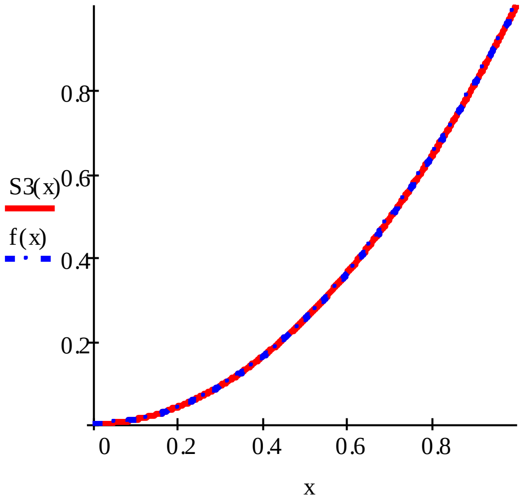
Гребенников локал кубик сплайн функциясини $GS_3(x)$ деб белгилаймиз.

Мисолларда умумийликни йўқотмасдан биз фақат $[a,b]=[0,1]$, $N=1$ бўлгандаги ҳолни қараймиз. У ҳолда $t=x$ ва графикларда бир нечта функцияларни учта кубик сплайн билан яқинлаштиришни қараб чиқамиз:

1. $f(x)=x^2$ бўлганда

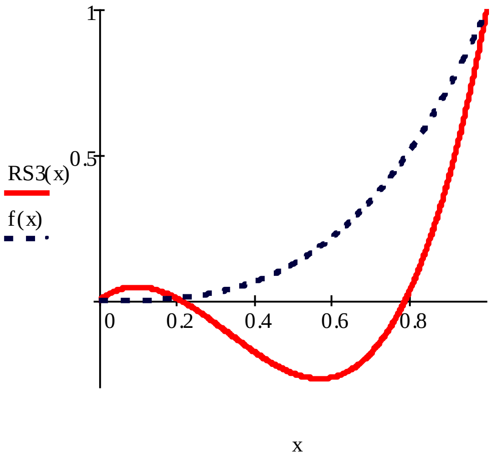


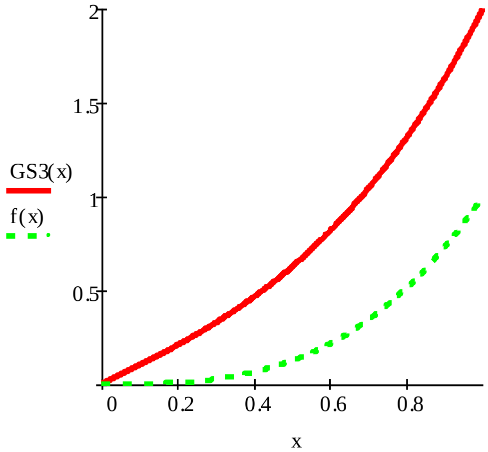


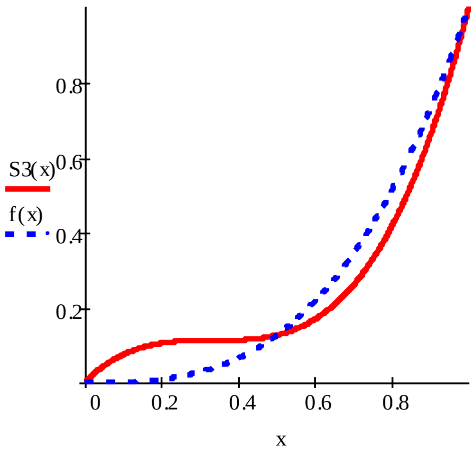


Биринчи мисол графигидан кўринадики, $S_3(x)$ сплайн графиги $f(x)=x^2$ функция графиги билан устма-уст тушади, $PS_3(x)$ ва $GS_3(x)$ сплайнлар графиги эса устма-уст тушмайди.

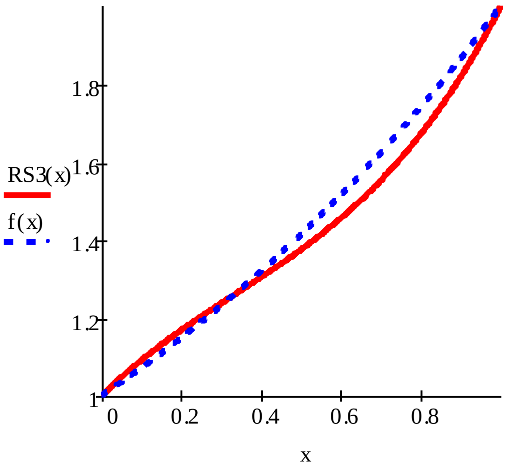
2. $f(x)=x^3$ бўлганда

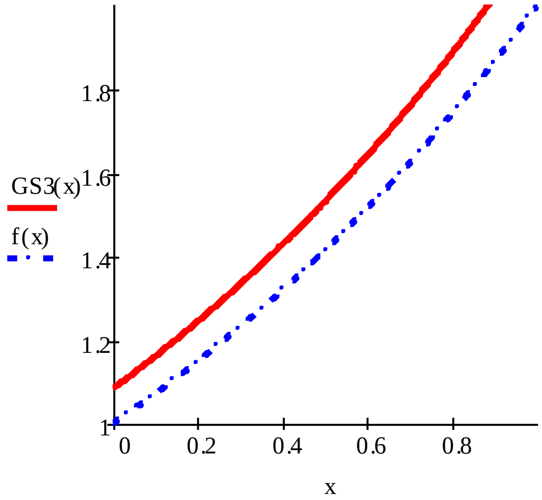


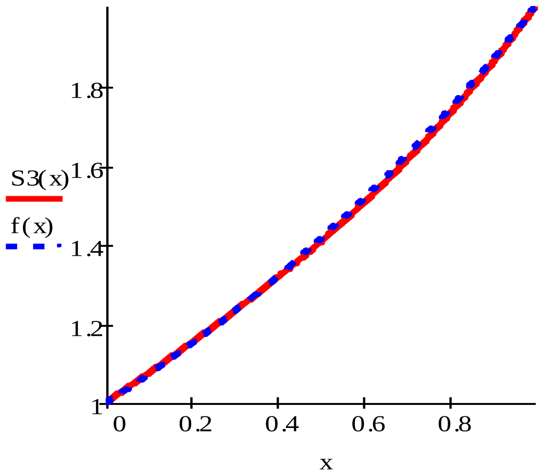




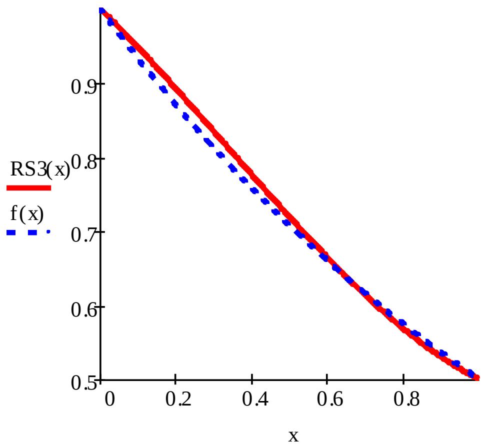
3. $f(x)=2^x$ бўлганда

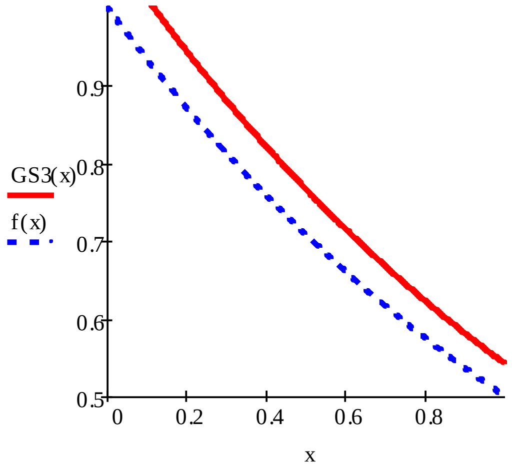


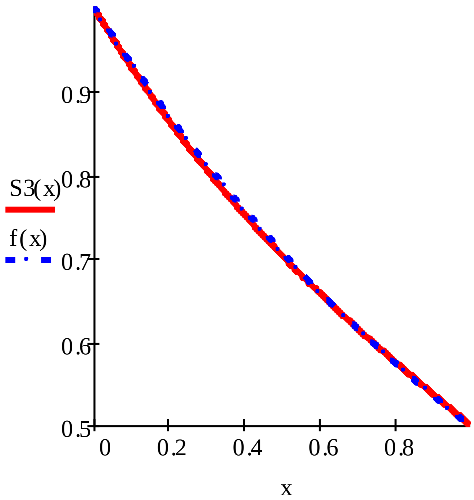




4. $f(x) = 2^{-x}$ бўлганда



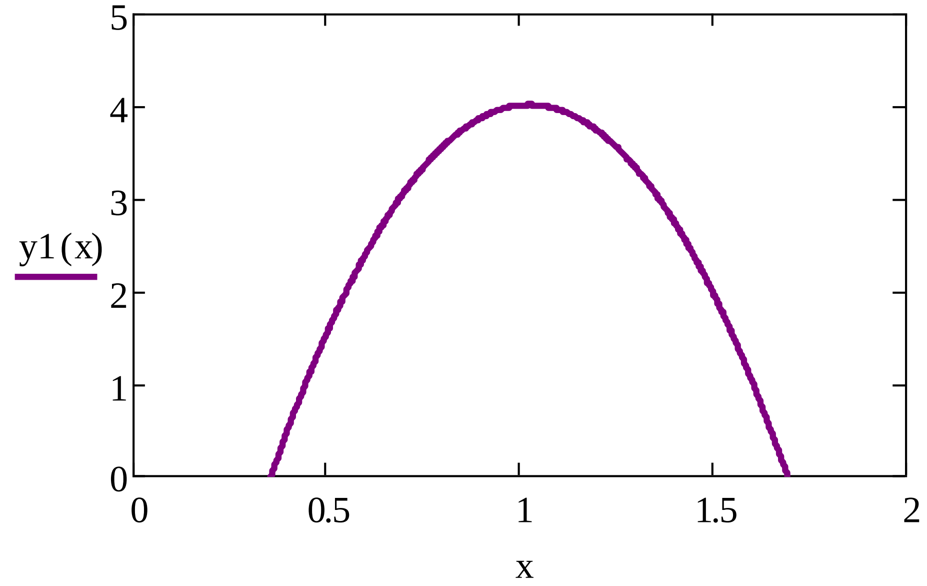




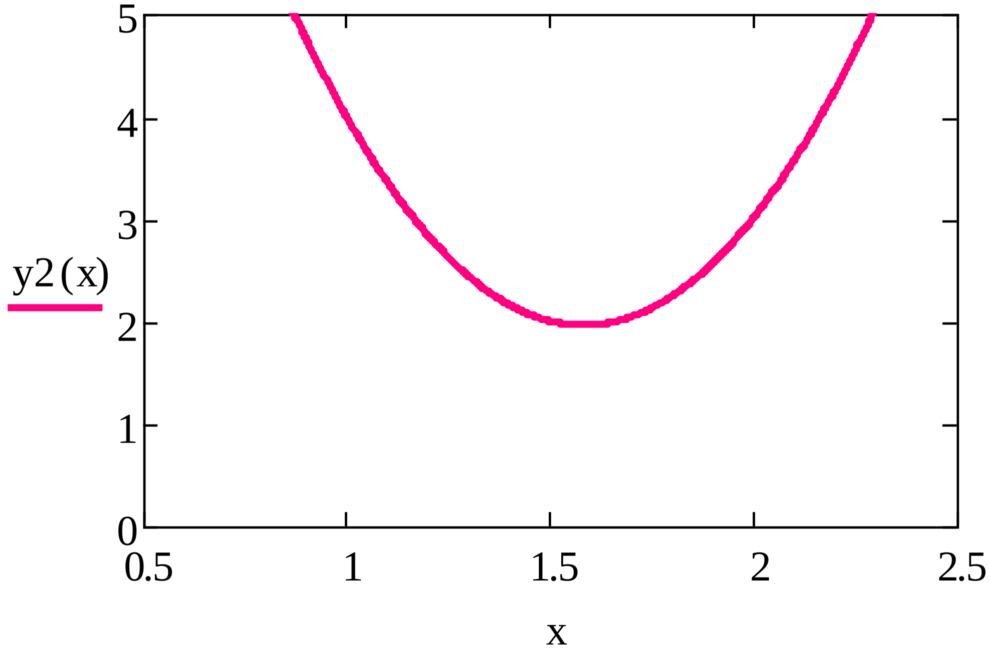
1,2,3,4 -мисоллардан кўринадики, $S_3(x)$ сплайн функция графиги $f(x)$ функция графигини $PS_3(x)$ ва $GS_3(x)$ сплайн функциялар графикларига қараганда яхшироқ яқинлаштиради.

3-Илова. Берилган олтита нуқтадан ўтувчи тўртта параболик функциялардан фойдаланиб, интерполяцион кубик сплайн функция қуриш

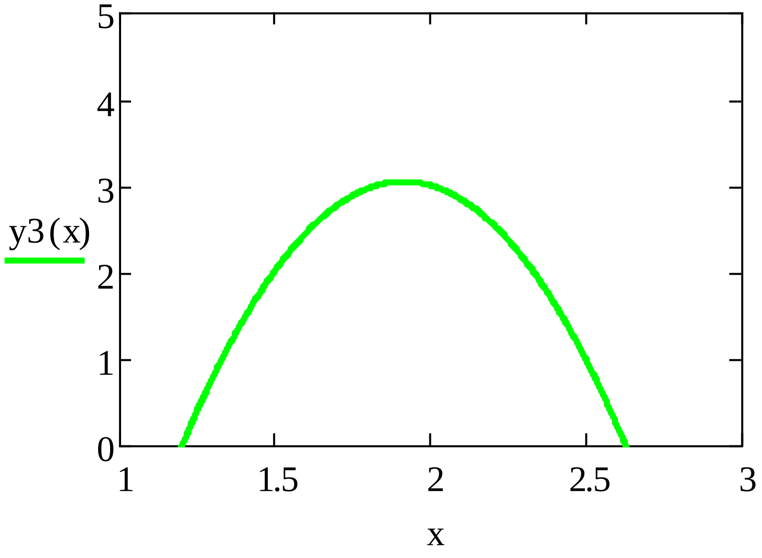
$$y1(x) := -9x^2 + 18.5x - 5.5$$



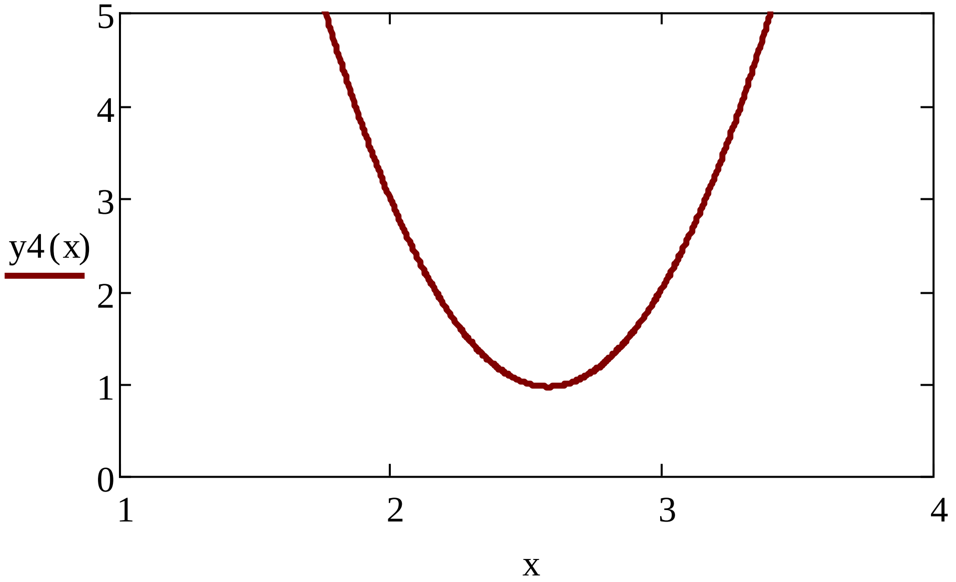
$$y2(x) := 6x^2 - 19x + 17$$

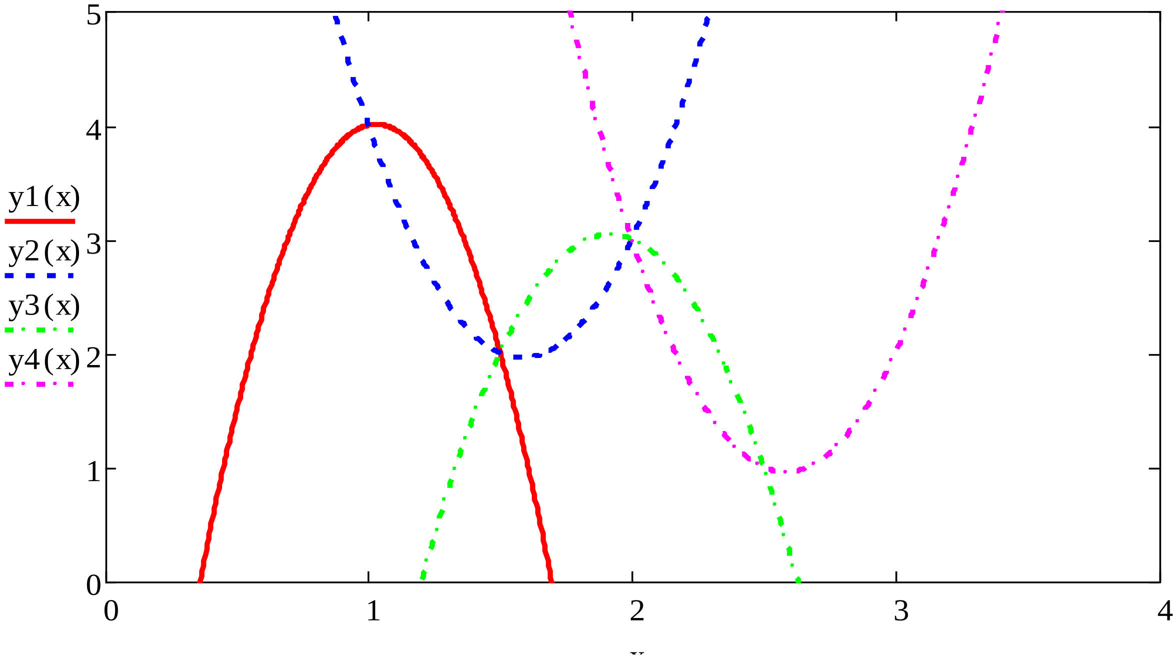


$$y3(x) := -6x^2 + 23x - 19$$

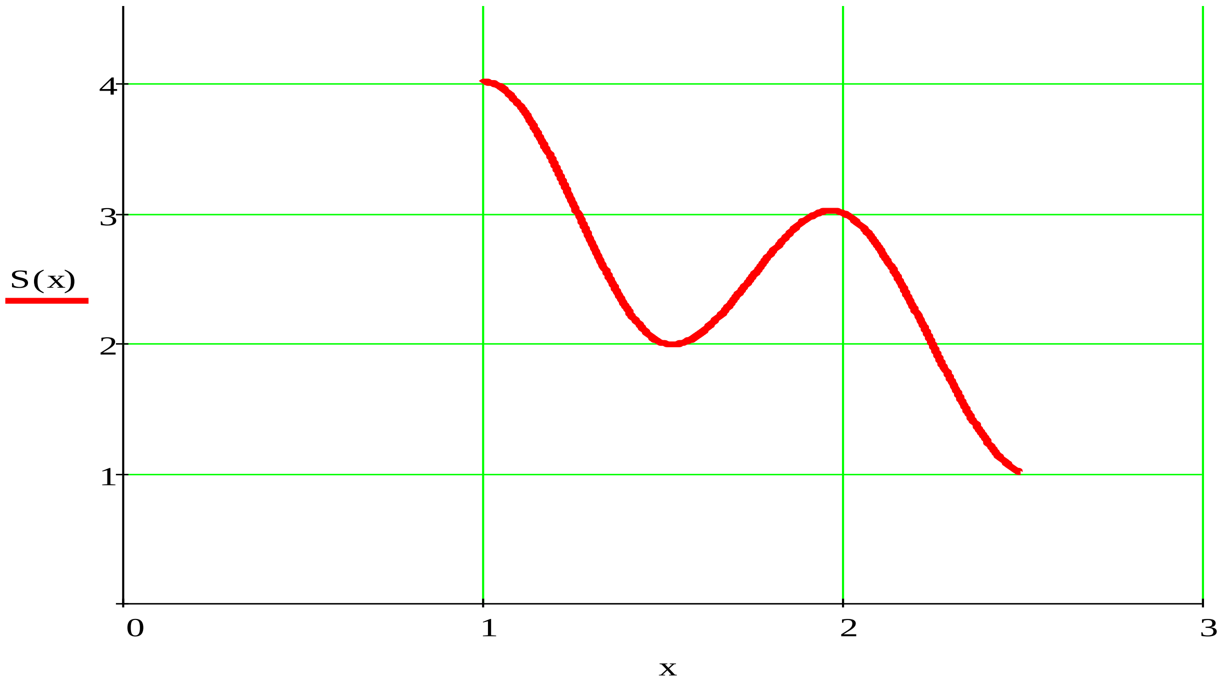


$$y4(x) := 6x^2 - 31x + 41$$





$$S(x) := \begin{cases} 30\cdot x^3 - 114\cdot x^2 + 138.5\cdot x - 50.5 & \text{if } x \geq 1 \wedge x \leq 1.5 \\ -24x^3 + 126\cdot x^2 - 217\cdot x + 125 & \text{if } x \geq 1.5 \wedge x \leq 2 \\ 24\cdot x^3 - 162\cdot x^2 + 359\cdot x - 259 & \text{if } x \geq 2 \wedge x \leq 2.5 \end{cases}$$



$$Z(x) := \frac{d}{dx}(S(x))$$