

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА
ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМий ДАРАЖАЛАР
БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМий КЕНГАШ**

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ҲАЙДАРОВ ФАРҲОД ҲАЛИМЖОНОВИЧ

**ГИББС ЎЛЧОВЛАРИ НАЗАРИЯСИДАГИ НОЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРАИК
ВА ИНТЕГРАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ ЕЧИЛУВЧАНЛИГИ**

01.01.01– Математик анализ

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

ТОШКЕНТ–2019

**Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD)
диссертацияси автореферати мундарижаси**

**Content of the abstract of doctor of philosophy (PhD) dissertation on
physical-mathematical sciences**

**Оглавление автореферата диссертации
доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

Ҳайдаров Фарход Ҳалимжонович

Гиббс ўлчовлари назариясидаги нолчизикли алгебраик ва интеграл
тенгламаларнинг ечилувчанлиги 3

Haydarov Farhod Halimjonovich

Solvability of nonlinear algebraic and integral equations in the theory of Gibbs
measures 17

Хайдаров Фарход Халимжонович

Разрешимость нелинейных алгебраических и интегральных уравнений в
теории меры Гиббса 31

Эълон қилинган ишлар рўйхати

Список опубликованных работ

List of published works 35

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА
ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ҲАЙДАРОВ ФАРҲОД ҲАЛИМЖОНОВИЧ

**ГИББС ЎЛЧОВЛАРИ НАЗАРИЯСИДАГИ НОЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРАИК
ВА ИНТЕГРАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ ЕЧИЛУВЧАНЛИГИ**

01.01.01 – Математик анализ

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

ТОШКЕНТ–2019

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.1.PhD/FM1 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Ўзбекистон Миллий университети бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, инглиз, рус (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.ik-fizmat.nuu.uz) ва «Ziynet» Ахборот таълим порталида (www.ziynet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	Эшкабилов Юсуп Халбаевич физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович физика-математика фанлари доктори, профессор Хатамов Носиржон Муйдинович физика-математика фанлари номзоди, доцент
Етакчи ташкилот:	Самарқанд Давлат университети

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети, Математика институти ҳузуридаги DSc.27.06.2017.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2019 йил «___» _____ соат _____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99878) 227-12-24, факс: (+99878) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99878) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2019 йил «___» _____ куни тарқатилди.
(2019 йил «___» _____ даги _____ рақамли реестр баённомаси).

А. Садуллаев

Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор,
академик

Ғ.И. Ботиров

Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

В.И. Чилин

Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш қошидаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда статистик физика ва механикада учрайдиган моделларни тадқиқ қилиш масаласига келтирилади. Ҳарорат сақланадиган ва атроф-муҳит билан иссиқлик мувозанатида бўлган физик системалар учун Гиббс тақсимооти физик олим Дж.Гиббс томонидан келтирилган. Гиббс ўлчови эҳтимоллик ўлчови бўлиб, эҳтимоллар назарияси ҳамда статистик механиканинг кўплаб масалаларининг муҳим объектидир. Ушбу ўлчов физик системанинг гамильтониани билан боғланган ва каноник кўриниш тушунчасини умумлаштирилган формаси бўлганлиги боис, статистик физика ва механика каби йўналишларда долзарб ҳисобланади. Гиббс тақсимооти берилган энергия энтропиясини максималлаштирувчи ягона ўлчов бўлганлиги сабабли, Гиббс тақсимоотини қуриш Гиббс ўлчовлари назариясининг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда Гиббс ўлчовлари назариясидаги асосий масалалардан бири берилган гамильтонианга мос лимит Гиббс ўлчовларини тасвирлашдир. Берилган физик модел учун лимит Гиббс ўлчовларини ягона эмаслигини аниқлаш, статистик физиканинг фаза алмашишларида муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада мақсадли илмий тадқиқотларни, жумладан, қуйидаги йўналишлардаги илмий изланишларни амалга ошириш муҳим вазифалардан бири ҳисобланади: гамильтонианга мос келувчи Гиббс ўлчовлари тўпламини таснифлаш, даврий Гиббс тақсимоотларини топиш, ҳамда бундай тақсимоотларнинг чегараланганлигини текшириш, спин қиймати компакт тўплам бўлган моделлар учун четки Гиббс ўлчовларини аниқлаш, умумлашган лимит Гиббс тақсимоотлари учун фаза алмашишлари мавжудлигини текшириш. Юқорида келтирилган илмий-тадқиқотлар йўналишида бажарилаётган илмий изланишлар мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадқиқига эга бўлган статистик физика ва механиканинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, статистик физика ва механикада учрайдиган асосий объектларидан бири бўлган Гиббс ўлчовлари назариясини ривожлантиришга алоҳида эътибор қаратилди. Кэли дарахтида берилган моделлар учун Гиббс ўлчовлари тўпламини ўрганиш борасида салмоқли натижаларга эришилди. «Функционал анализ, математик физика ва статистик физика» фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди¹. Қарор ижросини таъминлашда берилган модел учун Кэли дарахтида Гиббс ўлчовини ўрганишни ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

¹ Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947 «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789 «Фанлар академияси фаолияти, илмий тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909 «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2018 йил 27 апрелдаги ПҚ-3682 «Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Гиббс тақсимооти тушунчаси америкалик олим Дж. У. Гиббс томонидан киритилган бўлсада, лимит Гиббс ўлчовларининг умумий характеристикаси Р.Л. Добрушин, О. Ленфорд ва Д. Рюэлларнинг ишларида берилган. Гиббс ўлчовлари умумий характеристикасининг замонавий назарияси Х.О. Георгии, Я.Г. Синай, К. Престон, Д. Рюэл, Ю.М. Сухов, Н.Н. Ғаниходжаев, У.А. Розиков, Ф.М. Мухамедов, М.М. Рахматуллаев, Р.М. Хакимов ва бошқалар ишларида ёритиб берилган.

Графда аниқланган спин моделлар статистик механикада учрайдиган системаларнинг кенг синфини ташкил этади. Улардан аксарияти ҳақиқий физик маънога эга, қолганлари эса нисбатан мураккаброқ бўлган моделларни соддароқ кўринишларига бағишланган. Графнинг геометрик структураси бундай изланишларда муҳим рол ўйнайди. $\mathbb{Z}^d$ панжарада ёки фазода, фазавий ўтишларни тадқиқ этиш учун Пигоров-Синай назарияси муҳимдир. Γ^k Кэли дарахтида, берилган моделлар учун Гиббс ўлчовларини тадқиқ қилиш учун Марков тасодифий майдонларига боғлиқ бўлган рекуррент тенгламалардан фойдаланилади. Аксарият мақолалар спин қиймати чекли бўлган моделларга бағишланган. Асосан, ушбу моделларга мос чекли даврий (асосан, трансляцион-инвариант) ва саноқсиз сондаги трансляцион-инвариант бўлмаган четки Гиббс ўлчовларининг мавжудлиги кўрсатилган.

М.Лакшмананнинг ишларида кўшни тасирли, спин қиймати континуум бўлган Гейзенберг модели ўрганилган. Шунингдек, В.Руижгрок ихтиёрий ўлчамли фазоларда континуум спин қиймати Гейзенберг моделининг янги ифодасини беради. У.А. Розиков ва Ю.Х. Эшқобилов томонидан кўшни тасирли ва спин қийматлари тўплами континуум бўлган модел қаралган бўлиб, ушбу модел статистик механикада учрайдиган кўплаб моделларнинг умумлашмаси ҳисобланади. Кэли дарахтида ушбу моделнинг Гиббс ўлчовларини тасвирлаш масаласи, ночизиқли интеграл тенгламаларнинг

ечимларини тасвирлаш масаласига келтирилган. Шунингдек, бир ўлчамли дарахтда $[0,1]$ спин қийматли моделнинг трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари ягона эканлиги кўрсатилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.

Диссертация тадқиқоти Математика институтининг ЁФ-4-3 “Санокли графларда спин системалар эхтимоллик ўлчовлари” (2016-2017 йиллар), Ўзбекистон Миллий университети ЁФ-4-8 «Математик ва статистик физиканинг ноклассик масалалари» (2016-2017 йиллар) ва ЁОТ-ФТЕХ-2018-154 рақамли « Z^d панжараларида ва Γ^k Кэли дарахтларида гамильтонианлар спектрлари ва Гиббс ўлчовлари» (2018-2019 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади Ихтиёрий тартибли Кэли дарахтида спин қийматлари континуум бўлган моделлар учун Гиббс ўлчовлари тўпламини тавсифлаш, ҳамда Кэли дарахтининг группавий тасвирининг нормал қисм группаларини таҳлил қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

Кэли дарахтининг группавий тасвири учун чекли индексли нормал қисм группаларининг характеристикасини бериш;

Кэли дарахтининг группавий тасвири учун чекли индексли қисм группалар куриш;

Гаммерштейн интеграл операторининг қўзғалмас нуқталари ва берилган гамильтонианга мос даврий Гиббс ўлчовлари орасида боғланишни аниқлаш;

спин қийматлари континуум бўлган Гамитонианнинг трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари ягона бўлишининг етарлилик шартини топиш;

моделнинг параметрларига маълум шартлар қўйилганида камида иккита трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари мавжуд бўлишини исботлаш;

Тадқиқотнинг объекти: Кэли дарахти, Кэли дарахтининг группавий ифодаси, Гиббс ўлчови, Гаммерштейн интеграл оператори.

Тадқиқотнинг предмети: Группалар назарияси, Гиббс ўлчовлари назарияси, ночизиқли интеграл тенгламалар назарияси, функционал анализ.

Тадқиқотнинг усуллари: Тадқиқот ишида функционал анализ, группалар назарияси ва ночизиқли интеграл тенгламалар назарияси усулларида фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

Кэли дарахтининг группавий ифодаси учун индекси $2^s(2n+1)$, $s \in \{1,2\}$, $n \in \mathbb{N}$ бўлган нормал қисм группалари тавсифи келтирилган;

континуум спин қийматли, қўшни тасирли моделлар учун даврий Гиббс ўлчовларининг мавжудлиги исботланган;

берилган модел учун даврий Гиббс ўлчовлари ягона бўлишининг етарлилик шарти топилган;

камида иккита даврий Гиббс ўлчовларига эга бўлган континуум спин қийматли, қўшни таъсирли моделлар қурилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари

Кэли дарахтида аниқланган Гиббс ўлчовлари тўплами тавсифидан, физик системаларда фаза алмашишлари мавжудлигини текширишда қўлланилган;

Кэли дарахтида аниқланган трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари тўпламини тавсифаш усулларида, математик физикада учрайдиган айрим тенгламаларининг хос функцияларини мавжудлиги ва ягоналигини таҳлил қилишда қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Функционал анализ, Гиббс ўлчовлари назарияси, ночизикли операторлар назарияси усулларида ва қўзғалмас нуқталар ҳақидаги теоремалардан фойдаланилган. Олинган натижалар математик жиҳатдан тўғри исботланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти статистик механиканинг турли моделлари учун Гиббс ўлчовлари ривожлантиришда қўлланилиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти физик системалар ҳолатининг ўзгариши тадқиқ қилинганлиги ҳамда статистик механика ва физиканинг баъзи масалаларни ечиш имконини берганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Гиббс ўлчовлари назариясидаги ночизикли алгебраик ва интеграл тенгламаларнинг ечилувчанлиги бўйича олинган натижалар асосида:

Даврий Гиббс ўлчовлари ягона бўлмаган, статистик механиканинг кўплаб классик моделларини умумлаштирган континуум спин қийматли моделларни куриш усуллари, Ф-4-07 рақамли грант лойиҳасида физик системаларнинг айрим ночизикли тенгламаларни трансляцион-инвариант ечимларини топишда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2019 йил 12 апрелдаги № 89-03-1375-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши физик системаларда фаза алмашишлари мавжудлигини текшириш имконини берган;

Кэли дарахтида спин қийматлари континуум бўлган моделлар учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари тўпламини тавсифлашда фойдаланилган усуллар, Ф-4-02 рақамли грант лойиҳасида айрим дифференциал тенгламаларнинг хос функцияларини топишда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2019 йил 12 апрелдаги № 89-03-1375-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши математик физиканинг айрим дифференциал тенгламаларининг хос ечимлари тўпламини ифодалаш имконини берган;

Кэли дарахтида қўшни тасирли моделлар учун Гиббс ўлчовларини мавжудлигини текшириш усуллари хорижий илмий журналларда (Labochevskii Journal of Mathematics, 2013; Mathematical Physics, Analysis and Geometry, 2014; Positivity, 2017; Reports on Mathematical Physics, 2018) континуум спин қийматли моделларнинг даврий Гиббс ўлчовлари тўпламини

тавсифлашда фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланилиши трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларини қуриш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 2 та халқаро ва 3 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 11 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 5 та мақола, жумладан, 4 таси хорижий ва 1 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисм, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 82 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмда диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **“Кэли дарахтининг группавий тасвирининг қисм группалари ва Гиббс ўлчовлари”** деб номланувчи биринчи бобида асосий натижаларни олишда зарур бўлган муҳим тушунчалар ва Кэли дарахтининг группавий тасвирининг қисм группаларига оид теоремалар келтирилган. Шунингдек, Кэли дарахтининг группавий тасвирининг индекси $2^s(2n+1)$, $s \in \{1,2\}$, $n \in \mathbb{N}$ кўринишда бўлган барча нормал қисм группалари тўлиқ анализ қилинган.

$\Gamma^k = (V, L)$ билан k -тартибли Кэли дарахтини белгилайлик, яъни циклсиз, ҳар бир учидан $k+1$ та қирралар чиқувчи чексиз граф. Бу ерда V билан дарахтнинг учлари тўпламини ва L билан эса қирралари тўпламини белгиланган.

G_k билан иккинчи тартибли $k+1$ та циклик группаларнинг эркин кўпайтмасини белгилайлик ва $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ лар билан ушбу группани ясовчиларини белгилайлик.

Γ^k Кэли дарахтининг учлари тўплами V ҳамда G_k группанинг элементлари ўртасида ўзаро бир қийматлик мослик мавжуд.

Қисқармас шаклдаги x сўзда қатнашган $a_i, i = \overline{1, k+1}$, ҳарфлар сонини $w_x(a_i)$ билан белгилайлик.

Қуйидаги тўплагни аниқлайлик

$$H_A = \{x \in G_k \mid \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) - \text{жуфт}\}, A \subseteq N_k = \{1, \dots, k+1\}.$$

$A_1, A_2, \dots, A_m \subset N_k, m \in \mathbb{N}$ ва $\cap_{i=1}^m H_{A_i}$ қисқармас бўлсин. У ҳолда $\mathfrak{R}$ билан қуйидаги қисм группалар синфини белгилайлик:

$$\mathfrak{R} := \{\cap_{i=1}^m H_{A_i} \mid A_1, A_2, \dots, A_m \subset N_k, m \in \mathbb{N}\}.$$

G - тартиби иккига тенг бўлган чеклита ясовчилардан ташкил топган группа бўлсин ва тартиби n га тенг бўлган барча шундай группаларни $\mathfrak{T}_n$ билан белгилайлик. r билан G группанинг ясовчиларининг минимал сонини белгилайлик ва умумийликка зарар етказмаган ҳолда ушбу ясовчиларни $b_1, b_2, \dots, b_r$ орқали белгилайлик. e_1 эса G группанинг бирлик элементи бўлсин.

Энди G_k ни G га акслантирувчи гомоморфизм аниқлаймиз. $\Xi_n = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ тўплаглар системаси $N_k \setminus A_0, 0 \leq |A_0| \leq k+1-n$ тўплагнинг бўлаклаши бўлсин. У ҳолда $u_n : \{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\} \rightarrow \{e_1, b_1, \dots, b_m\}$ гомоморфизмни қуйидагича аниқлаймиз:

$$u_n(x) = \begin{cases} e_1, & \text{агар } x = a_i, i \in A_0 \\ b_j, & \text{агар } x = a_i, i \in A_j, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

$b \in G$ сўзни $b_1, b_2, \dots, b_m$ ясовчилар орқали ифодааланган шаклини $R_b[b_1, b_2, \dots, b_m]$ билан белгилаймиз. $\gamma_n : G \rightarrow G$ гомоморфизмни қуйидагича аниқлайлик

$$\gamma_n(x) = \begin{cases} e_1, & \text{агар } x = e_1 \\ b_i, & \text{агар } x = b_i, i = \overline{1, r} \\ R_b[b_1, \dots, b_r], & \text{агар } x = b_i, i \notin \{1, \dots, r\}. \end{cases}$$

Қуйидагича тўплаг ва тўплаглар системасини аниқлайлик

$$H_{\Xi_n}^{(p)}(G) = \{x \in G_k \mid l(\gamma_n(u_n(x))) : 2p\}, 2 \leq n \leq k-1.$$

$$\aleph_n := \{H_{B_0 B_1 B_2}^{(n)}(G) \mid B_1, B_2 \subset N_k \setminus B_0 \text{ тўплагнинг бўлаклаши}, 0 \leq |B_0| \leq k-1, |G| = 2n\}.$$

Теорема 1. Қуйидаги $n = 2^i(2s+1), i = \{0, 1\}, s \in \mathbb{N}$ кўринишдаги барча n лар учун, индекси $2n$ га тенг бўлган G_k группанинг барча нормал қисм группалари системаси $\aleph_n$ га тенг, яъни $\aleph_n = \{H \mid H \triangleleft G_k, |G_k : H| = 2n\}$.

Диссертациянинг “Кэли дарахтида спин қийматлари континуум бўлган моделлар учун даврий Гиббс ўлчовларини мавжудлиги ва

ягоналиги” деб номланувчи иккинчи боби даврий Гиббс ўлчовларини мавжудлиги ва ягоналигини ўрганишга бағишланган.

$A \subset V$ тўпдамда аниқланган $\sigma_A : A \rightarrow [0,1]$ акслантириш A тўпдамда аниқланган конфигурация дейилади. A да аниқланган барча конфигурациялар тўплами $\Omega_A = [0,1]^A$ билан белгилайлик. V да аниқланган барча конфигурациялар тўплами эса $\Omega := [0,1]^V$ билан белгилаймиз.

Қуйидаги кўринишдаги:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y \rangle \in L} \xi_{\sigma(x),\sigma(y)}, \quad (1)$$

моделни қарайлик, бу ерда $J \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ва $\xi : (u,v) \in [0,1]^2 \rightarrow \xi_{u,v} \in \mathbb{R}$ чегараланган, Лебег маъносида ўлчовли функция. $\langle x,y \rangle$ билан энг яқин қўшни учларни белгилаймиз, яъни улар орасидаги масофа бирга тенг.

h функцияни қуйидаги кўринишда $h : x \in V \mapsto h_x = (h_{t,x}, t \in [0,1]) \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ аниқлайлик, бу ерда $x \in V \setminus \{x^0\}$. Ихтиёрий n натурал сон учун, Ω_{V_n} да аниқланган $\mu^{(n)}$ эхтимоллик ўлчовини қуйидагича аниқлаймиз:

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left(-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x} \right). \quad (2)$$

Бу ерда, $\sigma_n : x \in V_n \mapsto \sigma(x)$ ва Z_n эса тақсимот функцияси, яъни:

$$Z_n = \int_{\Omega_{V_n}} \exp \left(-\beta H(\tilde{\sigma}_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\tilde{\sigma}(x),x} \right) \lambda_{V_n}(\tilde{\sigma}_n).$$

$n \geq 1$ ва $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$ конфигурация учун қуйидаги:

$$\int_{\Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) \lambda_{W_n}(d(\omega_n)) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}).$$

шартни қаноатлантирувчи $\mu^{(n)}$ эхтимоллик ўлчови муофиқлашган дейилади. Бу ерда $\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}$ билан σ_{n-1} and ω_n конфигурациялар бирлашмаси белгиланган. Колмогоров теоремасига кўра, ихтиёрий n and $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ конфигурация учун $\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$ шартни қаноатлантирувчи Ω_V да аниқланган μ ўлчов мавжуд ва ягона. Ушбу μ ўлчов (1) моделга ва $x \mapsto h_x$, $x \neq x^0$ функцияга мос лимит Гиббс ўлчови (бундан кейин, Гиббс ўлчови) дейилади.

Тасдиқ 1. (2) - кўринишдаги $\mu^{(n)}(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$, эхтимоллик ўлчови муофиқлашган бўлиши учун ихтиёрий $x \in V \setminus \{x^0\}$ лар учун қуйидаги тенглик

$$f(t, x) = \prod_{y \in S(x)} \frac{\int_0^1 \exp(J\beta\xi_{t,u}) f(u, y) du}{\int_0^1 \exp(J\beta\xi_{0,u}) f(u, y) du}. \quad (3)$$

ўринли бўлиши зарур ва етарли. Бу ерда, $f(t, x) = \exp(h_{t,x} - h_{0,x})$, $t \in [0, 1]$ ва $du = \lambda(du)$ -Лебег ўлчови.

Одатда, G_k группанинг қисм группалари ёрдамида даврий Гиббс ўлчовлари аниқланади. G_k группанинг қисм группалари ёрдамида (3) нинг даврий ечимлари таърифини берайлик.

K сифатида G_k группанинг қисм группасини олайлик.

Таъриф 1. Барча $x \in G_k$ ва $y \in K$ элементлар учун $h_{yx} = h_x$ тенгликни қаноатлантирувчи h_x , $x \in G_k$ функция K -даврий дейилади. G_k -даврий бўлган h функция *транслацион-инвариант* дейилади.

Таъриф 2. K - даврий h функцияга мос Гиббс ўлчови K - даврий дейилади.

Ушбу $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : x \text{ сўзни узунлиги жуфт}\}$ тўплам G_k группанинг индекси 2 га тенг бўлган нормал қисм группаси бўлади.

Теорема 2. $K - G_k$ группанинг индекси чекли бўлган нормал қисм группаси бўлсин. У ҳолда (1) моделнинг K - даврий Гиббс ўлчовлари *транслацион-инвариант* ёки $G_k^{(2)}$ -даврий (яъни даври иккига тенг) Гиббс ўлчови бўлади.

Иккинчи бобнинг иккинчи ва учинчи параграфида даврий Гиббс ўлчовларини мавжудлиги ва ягоналиги тадқиқ этилган.

Тасдиқ 2. Ихтиёрий k натурал сон учун, (3) нинг камида битта ечими мавжуд.

Қуйидагича белгилашларни киритайлик:

$$M = \max_{t,u \in [0,1]} K(t,u), \quad m = \min_{t,u \in [0,1]} K(t,u), \quad \text{бу ерда } K(t,u) = \exp(J\beta\xi_{tu}).$$

Тасдиқ 3. а) $k = 1$ бўлганда (3) нинг даврий ечимлари ягона ва у транслацион-инвариант бўлади.

б) $k \geq 2$ бўлганда $K(t,u)$ ядро қуйидаги шартни бажарса

$$\left(\frac{M}{m}\right)^k - \left(\frac{m}{M}\right)^k < \frac{1}{k}, \quad (4)$$

у ҳолда (3) нинг даврий ечимлари ягона ва у транслацион-инвариант бўлади.

Теорема 3. (4) шарт бажарилганда, $k \geq 2$ -тартибли Кэли дарахтида аниқланган (1) моделнинг даврий Гиббс ўлчовлари ягона бўлади, ҳамда ушбу ўлчов транслацион-инвариант бўлади.

Диссертациянинг “Кэли дарахтида спин қийматлари континуум бўлган моделлар учун даврий Гиббс ўлчовларини ягона эмаслиги” деб

номланувчи учинчи бобида, камида иккита даврий Гиббс ўлчовларига эга бўладиган моделлар қурилган.

Шуни таъкидлаш лозимки, берилган физик система учун, ҳар бир Гиббс ўлчови берилган система фазасига мос келади. Агар моделнинг биттадан ортиқ Гиббс ўлчови мавжуд бўлса, у ҳолда физик системада фазавий ўтиш ҳосил бўлади.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида ихтиёрий тартибли Кэли дарахтида камида 2 та трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларига эга бўладиган моделлар қурилган.

Тасдиқ 4. а) Γ^2 Кэли дарахтида аниқланган қуйидаги модел:

$$H(\sigma) = -\frac{1}{\beta} \sum_{\substack{\langle x,y \rangle \\ x,y \in V}} \ln \left(1 + \frac{14}{15} \cdot \sqrt[5]{4 \left(\sigma(x) - \frac{1}{2} \right) \left(\sigma(y) - \frac{1}{2} \right)} \right), \sigma \in \Omega_V$$

камида 2 та трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларига эга.

б) Γ^3 Кэли дарахтида аниқланган қуйидаги модел:

$$H(\sigma) = -\frac{1}{\beta} \sum_{\substack{\langle x,y \rangle \\ x,y \in V}} \ln \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt[7]{4 \left(\sigma(x) - \frac{1}{2} \right) \left(\sigma(y) - \frac{1}{2} \right)} \right), \sigma \in \Omega_V$$

камида 2 та трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларига эга.

$k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ берилган сондан фойдаланиб, $P_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) ва $Q_m(x)$ ($m \in \mathbb{N}$, $m > k$) кўпхадларни қуйидагича аниқлайлик:

$$P_n(x) \equiv P_{n,k}(x) = \left(1 + \frac{x^{n-1}}{2} \right)^{k+1} - \left(1 - \frac{x^{n-1}}{2} \right)^{k+1}, x \in \mathbb{R},$$

$$Q_m(x) \equiv Q_{m,k}(x) = (k+1)x^{m-k}, m > k, x \in \mathbb{R}.$$

Лемма 1. $n > k$ натурал сон учун қуйидаги:

$$P_n(x) - Q_n(x) = 0 \tag{5}$$

тенглама $(0,1)$ оралиқда камида битта $\xi = \xi(k;n)$ ечимга эга бўлади.

$k \geq 2$ берилган сон учун $\{\xi(k;n)\}_{n>k} \subset (0,1)$ билан қуйидаги:

$$P_n(x) - Q_n(x) = 0, n \in \mathbb{N}.$$

тенгламани ечимлари тўпламини белгилаймиз. Барча $n \in \mathbb{N}$, $n > k$ лар учун $0 < \xi(k;n)^{n-1} < 1$ тенгсизлик ўринли бўлади. У ҳолда $\xi(k;n)^{n-1}$, $n > k$, кетма-кетликнинг юқори лимити мавжуд, яъни $\xi(k;n)^{n-1}$, $n > k$ кетма-кетликни шундай $\xi(k;n_p)^{n_p-1}$, $p \in \mathbb{N}$ қисмий кетма-кетлиги мавжудки, бунда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \xi^{n-1}(k; n) = \lim_{p \rightarrow \infty} \xi^{n_p-1}(k; n_p)$$

тенглик ўринли бўлади.

C_n , $n > k \geq 2$ кетма-кетлик қуйидаги кўринишда бўлсин:

$$C_n = C_n(k) = \frac{\xi(k; n)^{3n-k-2}}{\frac{1}{2+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{\xi(k; n)^{n-1}}{2} \right)^{k+2} - \left(1 - \frac{\xi(k; n)^{n-1}}{2} \right)^{k+2} \right] - \xi(k; n)^{n-k}},$$

бу ерда $\xi(k; n) \in (0, 1)$ - (5) тенгламанинг илдизи.

Шунингдек, қуйидаги қисмий кетма-кетликни аниқлайлик:

$$\gamma_p = \gamma_p(k) = C_{n_p}(k), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Изоҳ 1. $k \geq 2$ бўлганда қуйидаги тенглик ўринли:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \gamma_p(k) = \frac{12}{k}.$$

$k \geq 4$ бўлган ҳол учун, $N_0(k)$ тўпламни қуйидагича аниқлайлик:

$$N_0(k) = \{p \in \mathbb{N} : |\gamma_p(k)| < 4\}.$$

$N_0(k)$ тўптам натурал сонлар тўпламининг қисм тўплами, яъни санокли. Барча $p \in N_0(k)$ лар учун $[0, 1]^2$ да аниқланган $K_p(t, u; k)$ узлуксиз функцияни қуйидагича киритайлик:

$$K_p(t, u; k) = 1 + \gamma_p(k) \left(t - \frac{1}{2} \right) \left(u - \frac{1}{2} \right), \quad t, u \in [0, 1].$$

Равшанки, $|\gamma_p(k)| < 4$ тенгсизликдан $K_p(t, u; k)$ функция қатъий мусбат бўлади.

Теорема 4. $k \geq 4$ ва $p \in N_0(k)$ учун Γ^k Кэли дарахтида аниқланган қуйидаги модел:

$$H(\sigma) = -\frac{1}{\beta} \sum_{\substack{\langle x, y \rangle \\ x, y \in V}} \ln K_p(\sigma(x), \sigma(y); k), \quad \sigma \in \Omega_V$$

камида иккита трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларига эга.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида ихтиёрий тартибли Кэли дарахтида камида 2 та даври иккига тенг бўлган даврий Гиббс ўлчовларига эга бўладиган моделлар қурилган.

Тасдиқ 5. а) $p \in \mathbb{N}$ тоқ сон берилган бўлсин. Γ^2 Кэли дарахтида аниқланган қуйидаги модел:

$$H(\sigma) = -\frac{1}{\beta} \sum_{\langle x, y \rangle} \ln \left(\frac{1 - b_p c_p^3 \sqrt[p]{\sigma(x) - 0,5} \left(\sqrt[p]{(\sigma(x) - 0,5)^2 - 4} \right)^2 \sqrt[p]{\sigma(x) - 0,5}}{c_p^2 \left(\sqrt[p]{\sigma(x) - 0,5} + 2 \right)^2} \right)$$

камида иккита (даври икки бўлган) даврий Гиббс ўлчовларига эга.

б) Γ^3 Кэли дарахтида аниқланган қуйидаги модел:

$$H(\sigma) = -\frac{1}{\beta} \sum_{\langle x, y \rangle} \ln \left(\frac{1 - \frac{22}{17} \sin \frac{\pi(2\sigma(x) - 1)}{3} \sin \frac{\pi(2\sigma(y) - 1)}{3}}{a^3 \left(1 + \sin \frac{\pi(2\sigma(x) - 1)}{3} \right)^3} \right)$$

камида иккита (даври икки бўлган) даврий Гиббс ўлчовларига эга.

i натурал сон ёрдамида c_i ифодани қуйидагича аниқлайлик:

$$c_i = \frac{2(i-2)(3^{i-1} - 1)}{(i-1)(3^{i-1} - 3) - 2(k-2)(3^{i-1} - 1)}$$

Теорема 5. $k \geq 4$ учун Γ^k Кэли дарахтида аниқланган қуйидаги модел:

$$H(\sigma) = -\frac{1}{\beta} \sum_{\langle x, y \rangle} \ln \left(\frac{1 + c_k (\sigma(x) - 0,5)(\sigma(y) - 0,5)}{a^k (\sigma(x) + 0,5)^k} \right)$$

камида иккита (даври икки бўлган) даврий Гиббс ўлчовларига эга.

Учинчи бобнинг учинчи параграфида камида n та трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларига эга бўладиган моделлар қурилган.

Қуйидагича белгилашларни киритайлик

$$\mathbf{A}_n^{(p)} = \left\{ \frac{1}{2(2p+i+j)-3} \left(\frac{1}{2} \right)^{2(2p+i+j-2)} \right\}_{i,j=\overline{1,n}}, \quad (\mathbf{A}_n^{(p)})^{-1} = \{\alpha_{ij}\}_{i,j \in \overline{1,n}}, \quad n, p \in \mathbb{N}.$$

$$\phi_{s,n,q}(u) = \alpha_{s1} u^{2p-1} + \dots + \alpha_{sn} u^{2(n+p)-3}, \quad (s, n, p) \in \mathbb{N}.$$

$$K_{(n,p)}(t, u; k) = 1 + \sum_{s=1}^n \left(\sqrt[k]{1 + t^{2(p+s)-1}} - 1 \right) \phi_{(s,n,p)}(u), \quad k \geq 2.$$

Лемма 2. $(\mathbf{A}_n^{(p)})^{-1}$ матрицанинг α_{ji} элементи қуйидаги формула ёрдамида топилади:

$$\alpha_{ji} = (-1)^{i+j} 4^{2p+i+j-4(n-1)} \frac{\prod_{s=1}^n (4p+2s+2j-3) \prod_{s=1, s \neq j}^n (4p+2s+2j-3)}{\prod_{s=1, s \neq j}^n (j-s) \prod_{s=1, s \neq i}^n (i-s)}$$

Изоҳ 2. Шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ сони мавжудки, бунда барча $k \geq n_0(k)$ лар учун қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади

$$K_{(n,p)}(t - 0.5, u - 0.5; k) > 0, \quad (t, u) \in [0, 1]^2.$$

Теорема 6. Берилган n ва k натурал сонлар учун шундай $n_0(k)$ сон мавжудки, бунда барча $k \geq n_0(k)$ учун Γ^k Кэли дарахтида аниқланган қуйидаги модел:

$$H(\sigma) = -\frac{1}{\beta} \sum_{\langle x, y \rangle} \ln(K_{(n,p)}(\sigma(x) - 0.5, \sigma(y) - 0.5; k))$$

камида n та трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларига эга.

ХУЛОСА

Диссертация иши Кэли дарахтида қўшни таъсирли ва спин қийматлари тўплами $[0, 1]$ бўлган моделларнинг даврий Гиббс ўлчовларини тадқиқ этишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Кэли дарахтининг группавий тасвирининг индекси $2^s(2n+1)$, $s \in \{1, 2\}$, $n \in \mathbb{N}$ кўринишда бўлган қисм группаларининг тасвири берилган.
2. Моделнинг ихтиёрий даврий Гиббс ўлчови трансляцион-инвариант ёки даври иккига тенг бўлган Гиббс ўлчови бўлиши кўрсатилган.
3. Моделнинг Гиббс ўлчови ягона бўлишининг етарлилик шарти топилган.
4. Камида иккита даврий Гиббс ўлчовларига эга бўлган моделлар қурилган.
5. Берилган n натурал сон учун, камида n та трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларига эга бўладиган моделларнинг мавжудлиги кўрсатилган.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.27.06.2017.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN,
INSTITUTE OF MATHEMATICS**

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

HAYDAROV FARHOD HALIMJONOVICH

**SOLVABILITY OF NONLINEAR ALGEBRAIC AND INTEGRAL
EQUATIONS IN THE THEORY OF GIBBS MEASURES**

01.01.01-Mathematical analysis

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

TASHKENT-2019

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.1.PhD/FM1

Dissertation has been prepared at National university of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, english, russian (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the “Ziyonet” Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	Eshkabilov Yusup Khalbaevich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	Kudaybergenov Karimberegñ Kadirbergenovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Khatamov Nasirjon Muydinovich Candidate of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	Samarkand State University

Defense will take place « ____ » _____ 2019 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.27.06.2017.FM.01.01 at National University of Uzbekistan, Institute of Mathematics. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99878) 227-12-24, fax: (+99878) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered № ____) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99878) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on « ____ » _____ 2019 year
(Mailing report № _____ on « ____ » _____ 2019 year)

A. Sadullaev

Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

G.I. Botirov

Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees, C.F.-M.S.

V.I.Chilin

Chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

Actuality and demand of the theme of dissertation. In the world many scientific and applied research are reduced to the study models in statistical physics and mechanics. Gibbs distribution for physical systems for keeping temperature and in balance of heating corresponds to environment was introduced by physican scientist J.Gibbs. The Gibbs measure belongs to a family of probability measures. In addition, this measure corresponds to any given hamiltonian on lattices has been an important object in many problems of probability theory, statistical mechanics and physics. Since the measure associated with the hamiltonian of a physical system and generalizes the notion of a canonical ensemble, it's very sufficient in the directions of statistical physics, mechanics and other branches. Because of Gibbs measure is a unique measure that maximizes the entropy for a given expected energy construction of Gibbs distribution has been one of the matters of greatest importance.

Nowadays in the world one of the central problems in the theory of Gibbs measures is to describe limiting Gibbs measures on a lattice and tree corresponding to a given hamiltonian. To define of non-uniqueness of periodic measures for a given physical model in the set of Gibbs measures is an important role of the theory of phase transistons in statistical physics. In a way that is easily understood, each Gibbs measure on a lattice or Cayley tree corresponds to a phase in the language of physical systems. From this fact, we can conclude that non-uniqueness of such Gibbs measures on a lattice or Cayley tree means that there occurs phase transitions in the language of physical systems i.e., the physical system changes its state. In this regard, the description of the set of all Gibbs measures for a given Hamiltonian in statistical physical systems, finding all periodic and translation-invariant Gibbs distributions, also checking the boundedness of such probability distributions and in addition to that, to define extreme Gibbs measures for models with compact set of spin values, the existence of a phase transition for generalization of splitting Gibbs distributions is a one of the important area of research.

In our country much attention has been paid to develop important directions of statistical physics and mechanics which have applications to the applied and fundamental sciences. As a result, special attention for development of the theory of Gibbs measure on lattices which one of main subjects of statistical physics and mechanics is paid. Useful results on studying the set of Gibbs measures are achieved and these results have been admitted by foreign scientists. Investigations on the international level in such important areas as the functional analysis, mathematical physics, theory of probability and theory of dynamical systems considered as the main task of fundamental research². At the present time, the development of investigations on Gibbs measure on a Cayley tree plays an important role in the implementation of this decree.

² Decree of Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan at the 2017 year 18 May « On measures on the organization of activities of the first created scientific research institutions of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan» № 292 dated May 17, 2017.

The subject and object of research of this dissertation are in line with tasks identified in the Decrees of the President of the Republic of Uzbekistan UP-4947 of February 7, 2017 “On the strategy of action for the further development Of the Republic of Uzbekistan”, UP-2789 dated February 17, 2017 “On measures to further improvement of the activities of the Academy of Sciences, organization, management and financing of research activities, PP-2909 dated April 20, 2017, “On measures to further the development of higher education” and PP-3682 from April 27, 2018 “On measures to further improve the system of practical implementation of innovative ideas, technologies and projects”, as well as in other regulations related to basic science.

Connection of research to priority directions of development of science and technologies of the Republic. This study was performed in accordance with the priority areas of science and technology of Republic of Uzbekistan IV, “Mathematics, Mechanics and Computer Science”.

The degree of scrutiny of the problem. However, conception of Gibbs distribution was introduced by American scientist J.U.Gibbs, general characterization of limiting Gibbs measures was given in articles of R.L. Dobrushin, O. Lanford and D. Ruelle. Modern theory of general characterization of limiting Gibbs measures for given models is studied in papers of R. Baxter, H.O. Georgii, R.A. Minlos, Ch. Preston, Ya.G. Sinai, Yu.M. Suhov, N.N. Ganikhodjaev, U.A. Rozikov, F.M.Mukhammedov, M.M.Rakhmatullaev, R.M.Khakimov and others.

Spin models on a graph or in a continuous spaces form a large class of systems considered in statistical mechanics. Some of them have a real physical meaning, others have been proposed as suitably simplified models of more complicated systems. The geometric structure of the graph or a physical space plays an important role in such investigations. For example, in order to study the phase transition problem on a lattice $\mathbb{Z}^d$ or in space one uses, essentially, the Pirogov-Sinai theory. On a Cayley tree Γ^k , to study Gibbs measures one uses the theory of Markov random fields based upon the corresponding recurrent equations. Most of papers are devoted to models with a *finite* set of spin values. Mainly, it's shown that these models have finitely many periodic (in particular, translation-invariant) and uncountable numbers of the non-translation-invariant extreme Gibbs measures.

Continuum spin system with nearest neighbor Heisenberg hamiltonian (model) is considered in M.Lakshmanan's works. Also, a new formulation of Heisenberg model with continuum spin system in a space of arbitrary dimensionality is given by W.Ruijgrok. Models with nearest-neighbor interactions and with the set $[0,1]$ of spin values were considered by U.A.Rozikov and Yu.Kh.Eshkabilov. On a Cayley tree the problem of describing the “splitting Gibbs measures” of the models was reduced to the description of the solutions of some non-linear integral equations. Also, the uniqueness of translation-invariant Gibbs measures for $[0,1]$ spin valued models on one dimensional tree is shown.

Connection of the theme of the dissertation with the research works of higher education, where the dissertation is carried out. The dissertation work is done in accordance with the planned theme of scientific research “YoF-4-3: Spin systems probability measures on a countable graph” Institute of Mathematics (2016-2017 y), “YoF-4-8 Non-classic problems on mathematical and statistical physics” National university of Uzbekistan (2016-2017 y) and “YoOT-Ftex-2018-154 Gibbs measures and spectrum of hamiltonian on a lattice $\mathbb{Z}^d$ and on a Cayley tree Γ^k ” National University of Uzbekistan (2018-2019 y).

The aim of research work is studying the set of splitting Gibbs measures for models with continuum set of spin values on a Cayley tree of an arbitrary order. Construction of normal subgroups of the group representation of a Cayley tree.

Research problems:

to give a characterization of normal subgroups of finite index for the group representation of a Cayley tree;

to construct new subgroups of finite index for the group representation of the Cayley tree;

to establish connections between periodic Gibbs measures of a hamiltonian and fixed points of Hammertstein’s integral operators;

to find a sufficiency condition on a hamiltonian with an continuum set of spin values under which the model has a unique translation-invariant splitting Gibbs measure;

to prove that under some condition on parameters of the model there are at least two translation-invariant Gibbs measures.

The research object: Cayley tree, group representation of Cayley tree, Gibbs measure, Hammerstein integral operator.

The research subject: Group theory, Gibbs measure theory, nonlinear integral equations theory, functional analysis.

Research methods: methods of functional analysis, group theory and probability theory.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

the description of normal subgroups of index $2^s(2n+1)$, $s \in \{1, 2\}$, $n \in \mathbb{N}$ for the group representation of a Cayley tree is given;

the existence of periodic Gibbs measures for continuum spin valued models with nearest-neighbor interactions is proved;

a sufficiency condition on the model such that the model has a unique periodic Gibbs measure is found;

continuum spin valued models with nearest-neighbor interactions have at least two periodic Gibbs measures are constructed.

Practical results of the study. It can be used to check that there occurs a phase transition in physical systems by studying the set of Gibbs measures on a Cayley tree.

The reliability of the results of the study. Our results have been obtained by using the methods of functional analysis, theory of Gibbs measures, fixed point

theorems and theory of nonlinear operators. The obtained results are proved mathematically correct.

Scientific and practical significance of the research results. The scientific importance of the results of the research work lies in the fact that using for investigation of Gibbs measure for various models of statistical mechanics.

The practical significance of the research work lies in the fact that changing of state of physical systems is studied and a chance that given to solve some problems in physics.

Implementation of the research results. In according to obtained results in solvability of nonlinear algebraic and integral equations in the theory of Gibbs measures:

The results obtained in the dissertation work were used in the following research projects:

methods of construction of continuum spin valued models which generalization of some classical statistical mechanics models such that there exists at least two periodic Gibbs measures are used to investigate translation-invariant solutions of some nonlinear equations of physical systems in the research project F-4-07 (№ 89-03-1375 Reference Ministry of the higher and secondary special education of the republic of Uzbekistan on 12.04.2019). The application of the scientific results, it makes possibility to check there occurs phase transitions in physical systems;

methods of studying the set of translation-invariant Gibbs measures for models with continuum set of spin values is used to investigate eigenfunctions of some differential equations in the research project F-4-02 (№ 89-03-1375 Reference Ministry of the higher and secondary special education of the republic of Uzbekistan on 12.04.2019). The application of the scientific results, it makes possibility to describe the set of eigensolutions of some differential equations in mathematical physics;

methods of checking the existence of Gibbs measures for models with nearest neighbor interaction on a Cayley tree is used in leading journals (Labochevskii Journal of Mathematics, 2013; Mathematical Physics, Analysis and Geometry, 2014; Positivity, 2017; Reports on Mathematical Physics, 2018) in order to investigate new Gibbs measures. Using the scientific results enabled to construct new periodic Gibbs measures.

Approbation of the research results. The main results of the research have been discussed at 2 international and 3 national scientific conferences.

Publications of the research results. On the topic of the dissertation 11 research papers have been published in the scientific journals, 5 of them are included in the list of journals proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for defending the PhD thesis, in addition 4 of them were published in international journals of mathematics and physics and one paper published in national mathematical journal.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 82 pages.

THE MAIN CONTENT OF THE DISSERTATION

In the introduction besides the motivation of research theme and correspondence to the priority research areas of science and technology of the Republic, we present a review of international research on the theme of the dissertation and the degree of scrutiny of the problem, formulate our goals and objectives, identify the object and subject of study, and state scientific novelty and practical results of the research. Moreover, we reduce the theoretical and practical importance of the obtained results, and give information on the implementation of the research results, the published works and the structure of dissertation.

In the first chapter of the thesis, titled **“Subgroups of the group representation of a Cayley tree and splitting Gibbs measure”** we give main definitions and concepts of Gibbs measure on a Cayley tree and subgroups of the group representation of a Cayley tree. Also, we give a characterization of normal subgroups with index $2^s(2n+1)$, $s \in \{1, 2\}$, $n \in \mathbb{N}$ of the group representation of a Cayley tree.

A Cayley tree $\Gamma^k = (V, L)$ of order $k \in \mathbb{N}$ is an infinite homogeneous tree, i.e., a graph without cycles, with exactly $k+1$ edges incident to each vertices. Here V is the set of vertices and L that of edges.

Let G_k be a free product of $k+1$ cyclic groups of the second order with generators $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ respectively.

It is known that there exists a one to one correspondence between the set of vertices V of the Cayley tree Γ^k and elements of the group G_k .

The number of letters $a_i = \overline{1, k+1}$ that enter the non-contractible representation of the word x is denoted by $w_x(a_i)$.

Put

$$H_A = \{x \in G_k \mid \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) \text{ is even}\}, A \subset N_k := \{1, \dots, k+1\}.$$

Let $A_1, A_2, \dots, A_m \subset N_k$, $m \in \mathbb{N}$ and $\bigcap_{i=1}^m H_{A_i}$ is non-contractible. Then we denote by $\mathfrak{R}$ the following family of subgroups:

$$\mathfrak{R} := \{\bigcap_{i=1}^m H_{A_i} \mid A_1, A_2, \dots, A_m \subset N_k, m \in \mathbb{N}\}.$$

Let group G be with finitely many generators of the order two and let $\mathfrak{T}_n$ be the set of all such groups of order n . Assume that r is the minimal number of such generators of the group G and without loss of generality we can choose these generators as $b_1, b_2, \dots, b_r$. Let e_1 be the identity element of the group G .

We define a homomorphism from G_k onto G . Let $\Xi_n = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ be a partition of $N_k \setminus A_0$, $0 \leq |A_0| \leq k+1-n$. Then we consider the homomorphism $u_n : \{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\} \rightarrow \{e_1, b_1, \dots, b_m\}$ given by

$$u_n(x) = \begin{cases} e_1, & \text{if } x = a_i, i \in A_0 \\ b_j, & \text{if } x = a_i, i \in A_j, j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

For $b \in G$ we denote by $R_b[b_1, b_2, \dots, b_m]$ a representation of the word b by generators $b_1, b_2, \dots, b_r$, $r \leq m$. Define the homomorphism $\gamma_n : G \rightarrow G$ by the formula

$$\gamma_n(x) = \begin{cases} e_1, & \text{if } x = e_1 \\ b_i, & \text{if } x = b_i, i = \overline{1, r} \\ R_{b_i}[b_1, \dots, b_r], & \text{if } x = b_i, i \notin \{1, \dots, r\}. \end{cases}$$

Put

$$H_{\Xi_n}^{(p)}(G) = \{x \in G_k \mid l(\gamma_n(u_n(x))) : 2p\}, 2 \leq n \leq k-1.$$

$$\aleph_n := \{H_{B_0 B_1 B_2}^{(n)}(G) \mid B_1, B_2 \text{ is a partition of the set } N_k \setminus B_0, 0 \leq |B_0| \leq k-1, |G| = 2n\}.$$

Theorem 1. Let $n = 2^i(2s+1)$, $i = \{0, 1\}$, $s \in \mathbb{N}$. The set of all normal subgroups of index $2n$ is equal to $\aleph_n$ i.e.,

$$\aleph_n = \{H \mid H \triangleleft G_k, |G_k : H| = 2n\}.$$

The second chapter, titled “**Existence and uniqueness of periodic Gibbs measures for models with continuum set of spin values on a Cayley tree,**” is devoted to study the existence and uniqueness of periodic Gibbs measures for models with continuum set of spin values.

In the first paragraph of chapter 2, it's given an important theorem about periodic Gibbs measures of given models. For $A \subset V$ a configuration σ_A on A is an arbitrary function $\sigma_A : A \rightarrow [0, 1]$. Denote $\Omega_A = [0, 1]^A$ the set of all configurations on A . A configuration σ on V is defined as a function $x \in V \mapsto \sigma(x) \in [0, 1]$; the set of all configurations is $[0, 1]^V$.

The (formal) hamiltonian is

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \xi_{\sigma(x), \sigma(y)}, \quad (1)$$

where $J \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ and $\xi: (u, v) \in [0, 1]^2 \rightarrow \xi_{u,v} \in \mathbb{R}$ is a given bounded, Lebesgue measurable function. As usual, $\langle x, y \rangle$ stands for nearest neighbor vertices, i.e., $d(x, y) = 1$.

Let $h: x \in V \mapsto h_x = (h_{t,x}, t \in [0, 1]) \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ be mapping of $x \in V \setminus \{x^0\}$. Given $n = 1, 2, \dots$, consider the probability distribution $\mu^{(n)}$ on Ω_{V_n} defined by

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left(-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x), x} \right). \quad (2)$$

Here, as before, $\sigma_n: x \in V_n \mapsto \sigma(x)$ and Z_n is the corresponding partition function:

$$Z_n = \int_{\Omega_{V_n}} \exp \left(-\beta H(\tilde{\sigma}_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\tilde{\sigma}(x), x} \right) \lambda_{V_n}(\tilde{\sigma}_n).$$

The probability distributions $\mu^{(n)}$ are compatible if for any $n \geq 1$ and $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$:

$$\int_{\Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) \lambda_{W_n}(d(\omega_n)) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}).$$

Here $\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}$ is the concatenation of σ_{n-1} and ω_n . In this case by Kolmogorov's extension theorem there exists a unique measure μ on Ω_V such that, for any n and $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$, $\mu\left(\left\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\right\}\right) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$. The measure μ is called splitting Gibbs measure corresponding to hamiltonian (1) and function $x \mapsto h_x$, $x \neq x^0$.

The following known statement describes conditions on h_x guaranteeing compatibility of the corresponding distributions $\mu^{(n)}(\sigma_n)$.

Proposition 1. The probability distributions $\mu^{(n)}(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$, in (2) are compatible iff for any $x \in V \setminus \{x^0\}$ the following equation holds:

$$f(t, x) = \prod_{y \in S(x)} \frac{\int_0^1 \exp(J\beta \xi_{t,u}) f(u, y) du}{\int_0^1 \exp(J\beta \xi_{0,u}) f(u, y) du}. \quad (3)$$

Here $f(t, x) = \exp(h_{t,x} - h_{0,x})$, $t \in [0, 1]$ and $du = \lambda(du)$ is the Lebesgue measure.

We define periodic Gibbs measures by using subgroups of the group G_k . Let's define periodic solutions of (3).

Definition 1. Let K be a subgroup of G_k , $k \geq 1$. We say that a functions $h_x, x \in G_k$ is K -periodic if $h_{yx} = h_x$ for all $x \in G_k$, $y \in K$. A G_k -periodic function h is called *translation-invariant*.

Definition 2. A Gibbs measure is called K - periodic if it corresponds to K - periodic function h .

Let $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : \text{the length of word } x \text{ is even}\}$. Clearly, $G_k^{(2)}$ is a normal subgroup of G_k and $|G_k : G_k^{(2)}| = 2$.

Theorem 2. Let K be a normal subgroup of finite index in G_k . Then each K - periodic Gibbs measure for the model is either *translation-invariant* or $G_k^{(2)}$ - *periodic*.

In the second and third paragraphs of chapter 2 we study the existence and uniqueness of periodic Gibbs measures.

Proposition 2. For $k \in \mathbb{N}$, there is at least one positive solution of (3). Denote

$$M = \max_{t,u \in [0,1]} K(t,u), \quad m = \min_{t,u \in [0,1]} K(t,u), \quad \text{where } K(t,u) = \exp(J\beta\xi_{tu}).$$

Proposition 3. a) If $k=1$ then there is a unique periodic solution of (3), which is a translation-invariant.

b) Let $k \geq 2$. If the kernel $K(t,u)$ satisfies the condition

$$\left(\frac{M}{m}\right)^k - \left(\frac{m}{M}\right)^k < \frac{1}{k}, \quad (4)$$

then periodic solution of (3) is a unique and is a translation-invariant.

Theorem 3. Under the condition (4), each periodic Gibbs measure for the model (1) on a Cayley tree of order $k \geq 2$ is a unique and this measure is translation-invariant Gibbs measure.

In the third chapter of the thesis titled “**Non-uniqueness of periodic Gibbs measure for models with continuum set of spin values on a Cayley tree**”, we construct some models which has at least two periodic Gibbs measures.

Note that, for a given physical system, each Gibbs measure corresponds to a phase of the system. If there exist more than one Gibbs measure, then there occurs a phase transition in the physical system.

In the first paragraph of chapter 3 we construct models which have at least two translation-invariant Gibbs measures on a Cayley tree of an arbitrary order.

Proposition 4. a) The model

$$H(\sigma) = -\frac{1}{\beta} \sum_{\substack{\langle x,y \rangle \\ x,y \in V}} \ln \left(1 + \frac{14}{15} \cdot \sqrt[5]{4 \left(\sigma(x) - \frac{1}{2} \right) \left(\sigma(y) - \frac{1}{2} \right)} \right), \quad \sigma \in \Omega_V$$

on the Cayley tree Γ^2 has at least two translation-invariant Gibbs measures.

b) The model

$$H(\sigma) = -\frac{1}{\beta} \sum_{\substack{\langle x,y \rangle \\ x,y \in V}} \ln \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{4 \left(\sigma(x) - \frac{1}{2} \right) \left(\sigma(y) - \frac{1}{2} \right)} \right), \sigma \in \Omega_V$$

on the Cayley tree Γ^3 has at least two translation-invariant Gibbs measures.

Let $k \in \mathbb{N}$ and $k \geq 2$. We consider sequences of continuous functions $P_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) and $Q_m(x)$ ($m \in \mathbb{N}$, $m > k$) defined by

$$P_n(x) \equiv P_{n,k}(x) = \left(1 + \frac{x^{n-1}}{2} \right)^{k+1} - \left(1 - \frac{x^{n-1}}{2} \right)^{k+1}, x \in \mathbb{R},$$

$$Q_m(x) \equiv Q_{m,k}(x) = (k+1)x^{m-k}, m > k, x \in \mathbb{R}.$$

Lemma 1. Let $k \geq 2$. Then for each $n \in \mathbb{N}$, $n > k$ the equation

$$P_n(x) - Q_n(x) = 0 \tag{5}$$

has at least one solution $\xi = \xi(k; n)$ in $(0, 1)$.

Let $k \geq 2$ be a fixed number and suppose that $\{\xi(k; n)\}_{n>k} \subset (0, 1)$ – some set of solutions of the following system of equations:

$$P_n(x) - Q_n(x) = 0, n \in \mathbb{N}.$$

We have $0 < \xi(k; n) < 1$ for all $n \in \mathbb{N}$, $n > k$. Consequently, $0 < \xi(k; n)^{n-1} < 1$ for all $n > k$. Then there exists a upper limit of the sequence $\xi(k; n)^{n-1}$, $n > k$, i.e. there exists a subsequence $\xi(k; n_p)^{n_p-1}$, $p \in \mathbb{N}$ of the sequence $\xi(k; n)^{n-1}$, $n > k$ such that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \xi^{n-1}(k; n) = \lim_{p \rightarrow \infty} \xi^{n_p-1}(k; n_p)$$

Define the sequence C_n , $n > k \geq 2$:

$$C_n = C_n(k) = \frac{\xi(k; n)^{3n-k-2}}{\frac{1}{2+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{\xi(k; n)^{n-1}}{2} \right)^{k+2} - \left(1 - \frac{\xi(k; n)^{n-1}}{2} \right)^{k+2} \right] - \xi(k; n)^{n-k}},$$

where $\xi(k; n) \in (0, 1)$ is an arbitrary solution to the equation (5).

Put

$$\gamma_p = \gamma_p(k) = C_{n_p}(k), p \in \mathbb{N}.$$

Remark 1. For every $k \geq 2$ the following equality holds:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \gamma_p(k) = \frac{12}{k}.$$

For each $k \geq 4$ we define the set $N_0(k)$:

$$N_0(k) = \{p \in N : |\gamma_p(k)| < 4\}.$$

Note that, the set $N_0(k)$ is a countable subset in the set of all natural numbers. For each $p \in N_0(k)$, ($k \geq 4$) we define the continuous function $K_p(t, u; k)$ on $[0, 1]^2$ by

$$K_p(t, u; k) = 1 + \gamma_p(k) \left(t - \frac{1}{2} \right) \left(u - \frac{1}{2} \right), \quad t, u \in [0, 1].$$

By the inequality $|\gamma_p(k)| < 4$ it follows that, the function $K_p(t, u; k)$ is strictly positive.

Theorem 4. Let $k \geq 4$ and $p \in N_0(k)$. The model

$$H(\sigma) = -\frac{1}{\beta} \sum_{\substack{\langle x, y \rangle \\ x, y \in V}} \ln K_p(\sigma(x), \sigma(y); k), \quad \sigma \in \Omega_V$$

on the Cayley tree Γ^k has at least two translation-invariant Gibbs measures.

In the second paragraph of chapter 3 we construct models which have at least two periodic Gibbs measures on a Cayley tree of an arbitrary order.

Proposition 5. a) Let p be an odd natural number then the model

$$H(\sigma) = -\frac{1}{\beta} \sum_{\langle x, y \rangle} \ln \left(\frac{1 - b_p c_p^3 \sqrt[p]{\sigma(x) - 0,5} \left(\sqrt[p]{(\sigma(x) - 0,5)^2 - 4} \right)^2 \sqrt[p]{\sigma(x) - 0,5}}{c_p^2 \left(\sqrt[p]{\sigma(x) - 0,5} + 2 \right)^2} \right)$$

has at least two periodic Gibbs measures on the Cayley tree Γ^2 .

b) The model

$$H(\sigma) = -\frac{1}{\beta} \sum_{\langle x, y \rangle} \ln \left(\frac{1 - \frac{22}{17} \sin \frac{\pi(2\sigma(x) - 1)}{3} \sin \frac{\pi(2\sigma(y) - 1)}{3}}{a^3 \left(1 + \sin \frac{\pi(2\sigma(x) - 1)}{3} \right)^3} \right)$$

has at least two periodic Gibbs measures on the Cayley tree Γ^3 .

Denote

$$c_i = \frac{2(i-2)(3^{i-1}-1)}{(i-1)(3^{i-1}-3)-2(k-2)(3^{i-1}-1)}$$

Theorem 5. Let $k \geq 4$. The model

$$H(\sigma) = -\frac{1}{\beta} \sum_{\langle x, y \rangle} \ln \left(\frac{1 + c_k(\sigma(x) - 0.5)(\sigma(y) - 0.5)}{d^k(\sigma(x) + 0.5)^k} \right)$$

on the Cayley tree Γ^k has at least two periodic Gibbs measures.

In the third paragraph of chapter 3 we construct models which have at least n translation-invariant Gibbs measures.

Denote

$$\mathbf{A}_n^{(p)} = \left\{ \frac{1}{2(2p+i+j)-3} \left(\frac{1}{2} \right)^{2(2p+i+j-2)} \right\}_{i,j=\overline{1,n}}, \quad (\mathbf{A}_n^{(p)})^{-1} = \{\alpha_{ij}\}_{i,j \in \overline{1,n}}, \quad n, p \in \mathbb{N}.$$

$$\phi_{s,n,q}(u) = \alpha_{s1} u^{2p-1} + \dots + \alpha_{sn} u^{2(n+p)-3}, \quad (s, n, p) \in \mathbb{N}.$$

$$K_{(n,p)}(t, u; k) = 1 + \sum_{s=1}^n \left(\sqrt[k]{1 + t^{2(p+s)-1}} - 1 \right) \phi_{(s,n,p)}(u), \quad k \geq 2.$$

Lemma 2. For α_{ji} element of $(\mathbf{A}_n^{(p)})^{-1}$ the following equality is holds

$$\alpha_{ji} = (-1)^{i+j} 4^{2p+i+j-4(n-1)} \frac{\prod_{s=1}^n (4p+2s+2j-3) \prod_{s=1, s \neq j}^n (4p+2s+2j-3)}{\prod_{s=1, s \neq j}^n (j-s) \prod_{s=1, s \neq i}^n (i-s)}$$

Remark 2. There exist $k_0 \in \mathbb{N}$ such that for all $k \geq k_0$ the following inequality holds

$$K_{(n,p)}(t-0.5, u-0.5; k) > 0, \quad (t, u) \in [0, 1]^2.$$

Theorem 6. Let $k \geq k_0$. The model

$$H(\sigma) = -\frac{1}{\beta} \sum_{\langle x, y \rangle} \ln \left(K_{(n,p)}(\sigma(x) - 0.5, \sigma(y) - 0.5; k) \right)$$

on the Cayley tree Γ^k has at least n translation-invariant Gibbs measures.

CONCLUSION

The dissertation is devoted to study Gibbs measures for models with nearest-neighbor interactions and with the set $[0,1]$ of spin values, on a Cayley tree.

The main results of the research are as follows:

1. The description of normal subgroups of index $2^s(2n+1)$, $s \in \{1,2\}$, $n \in \mathbb{N}$ of the group representation of a Cayley tree is given.
2. Any periodic Gibbs measure for the model is either translation-invariant or periodic with period two are shown.
3. A sufficiency condition of the uniqueness of periodic Gibbs measure for the model is found.
4. Models which have at least two periodic Gibbs measures are constructed.
5. For any natural number n , the existence of models which have at least n translation-invariant Gibbs measures is shown.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.27.06.2017.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ
УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
УЗБЕКИСТАНА, ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ**

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАН

ХАЙДАРОВ ФАРХОД ХАЛИМЖОНОВИЧ

**РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ТЕОРИИ МЕРЫ ГИББСА**

01.01.01– Математик анализ

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

ТАШКЕНТ–2019

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.1.PhD/FM1.

Диссертация выполнена в Национальном Университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, английский, русский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziynet» (www.ziynet.uz).

Научный руководитель:	Эшкабилов Юсуп Халбаевич доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович доктор физико-математических наук, профессор Хатамов Носиржон Муйдинович кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	Самаркандский государственный университет

Защита диссертации состоится «___» _____ 2019 года в ___ часов на заседании Научного совета DSc.27.06.2017.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана, института Математики. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99878)227-12-24, факс: (+99878) 246-53-21, e-mail: pauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за № ____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99878) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «___» _____ 2019 года.
(протокол рассылки № _____ от «___» _____ 2019 года).

А.Садуллаев
Председатель Научного совета по
присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор, академик

Г.И. Ботиров
Ученый секретарь Научного совета по
присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н.

В.И.Чилин
Председатель научного семинара при Научном
совете по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Целью исследования является изучение множества предельных мер Гиббса для моделей с континуальным набором значений спина на дереве Кэли произвольного порядка. Построение нормальных подгрупп группового представления дерева Кэли.

Объект исследования: дерево Кэли, групповое представление дерева Кэли, мера Гиббса, интегральный оператор Гаммерштейна.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

дано описание нормальных подгрупп индекса $2^s(2n+1)$, $s \in \{1, 2\}$, $n \in \mathbb{N}$ для группового представления дерева Кэли;

доказано существование периодических гиббсовских мер для моделей с континуальным набором значений спина с взаимодействиями ближайших соседей;

получено достаточное условие, при котором модель имеет единственную периодическую меру Гиббса;

получено достаточные условия для того, чтобы модели с континуальным набором значений спина с взаимодействиями ближайших соседей имеют как минимум две периодические меры Гиббса.

Внедрение результатов исследования. Результаты, полученные в диссертационной работе, были использованы в следующих исследовательских проектах:

методы построения моделей с континуальным набором значений спина (обобщение некоторых моделей классической статистической механики), при которых существуют как минимум две периодические меры Гиббса, для исследования трансляционно-инвариантных решений некоторых нелинейных уравнений физических систем в исследовательском проекте F-4-07 (Справка Министерства высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан от 12.04.2019). Применение научных результатов позволяет проверить, происходят ли фазовые переходы в физических системах.

методы изучения совокупности трансляционно-инвариантных гиббсовских мер для моделей с континуальным набором значений спина используются для исследования собственных функций некоторых дифференциальных уравнений в исследовательском проекте F-4-02 (Справка министерство высшего и среднего специального образования республики Узбекистана на 12.04.2019). Применение научных результатов дает возможность описать множество собственных решений некоторых дифференциальных уравнений в математической физике;

методы проверки существования мер Гиббса для моделей с взаимодействием ближайшего соседа на дереве Кэли цитируется в ведущих журналах (Labochevskii Journal of Mathematics, 2013; Mathematical Physics,

Analysis and Geometry, 2014; Positivity, 2017; Reports on Mathematical Physics, 2018), чтобы исследовать новые предельные меры Гиббса. Использование научных результатов позволило построить новые периодические меры Гиббса.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 82 страницы.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙЎАТИ
LIST OF PUBLISHED WORKS
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Eshkabilov Yu.Kh., Haydarov F.H., Rozikov U.A. Non-uniqueness of Gibbs measure for models with uncountable set of spin values on a Cayley tree // Journal of Statistical Physics – 2012. – V.147, №.4, – pp.779-794. (3. Scopus. IF=1.496).
2. Eshkabilov Yu.Kh., Haydarov F.H., Rozikov U.A. Uniqueness of Gibbs measure for models with uncountable set of spin values on a Cayley tree // Mathematical Physics Analysis and Geometry – 2013. – V.16, №.1, – pp.1-17. (3. Scopus. IF=0.86).
3. Rozikov U.A., Haydarov F.H. Periodic Gibbs measures for models with uncountable set of spin values on a Cayley tree // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics – 2015. – V.18, №.1, – pp.1-22. (1. Web of Science. IF=0.7).
4. Haydarov F.H. The existence of subgroups and new normal subgroups for the group representation of the Cayley tree // The Journal of Fuzzy Mathematics – 2016. – V.24, №.3, – pp.789-797.
5. Haydarov F.H. New normal subgroups for the group representation of the Cayley tree // Lobachevskii Journal of Mathematics – 2018. – V.39, №.2, – pp.213-217. (41. SCImago. IF=0.398).
6. Haydarov F.H. Periodic Gibbs measures for the hamiltonian of models on a Cayley tree // Uzbek Mathematical Journal – 2016. – V.4, №.1, – pp.145-155. (01.00.00, № 6).

II бўлим (2 часть; part 2)

7. Eshkabilov Yu.Kh., Haydarov F.H. On positive eigenvalue functions of nonlinear operator // «Problems of modern mathematics». Republican scientific conference, 2011, Karshi, pp. 262-265. (Russian).
8. Eshkabilov Yu.Kh., Haydarov F.H. Solutions of the system of nonlinear integral equations. // «Problems of modern topology and applications». International conference, 2013, Tashkent, pp. 33-35.
9. Haydarov F. H., Kucharov R.R. Fixed points of Lyapunov's operator with degenerate kernel // «Actual problems of differential equations and their applications». Republican scientific conference, 2017, Tashkent, pp. 208-209.
10. Kucharov R.R., Haydarov F. H. Existence of fixed point of Lyapunov integral operator // «Modern problems of applied mathematics and information technologies- Al-Khorezmiy». International conference, 2018, Tashkent, pp. 174.
11. Haydarov F.H. On subgroups with finite index for the group representation of a Cayley tree. // «Problems of modern topology and its applications». Republican scientific conference, 2018, Tashkent, pp. 49-50.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида
таҳрирдан ўтказилди (10.06.2019 йил).

Босишга рухсат этилди: 10.06.2019 йил
«Times New Roman»
Гарнитурда рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табағи 2.25. Адади: 80. Буюртма: № 102.
Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети
босмахонасида чоп этилди

