ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

САИТОВА САЙЁРА СОБИРЖОНОВНА

КИЛЛИНГ ВЕКТОР МАЙДОНЛАРИ ГЕОМЕТРИЯСИ

01.01.04 - Геометрия ва топология

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2018

УДК: 514.76

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси
Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам
Content of dissertation abstract of the doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences

Саитова Сайёра Собиржоновна
Киллинг вектор майдонлар геометрияси …… 3

Саитова Сайёра Собиржоновна
Геометрия векторных полей Киллинга ……... 17

Saitova Sayyora
Geometry of Killing vector fields ……... 31

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works ……... 35

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

САИТОВА САЙЁРА СОБИРЖОНОВНА

КИЛЛИНГ ВЕКТОР МАЙДОНЛАРИ ГЕОМЕТРИЯСИ

01.01.04 - Геометрия ва топология

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2018

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.2.PhD/FM91 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.ik-fizmat.nuu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи: **Нарманов Абдигаппар Якубович**
физика-математика фанлари доктори, профессор

Расмий оппонентлар: **Рахимов Абдуғофур Абдумажидович**
физика-математика фанлари доктори

Каипназарова Гулжахон Хожаназаровна
физика-математика фанлари номзоди, доцент

Етакчи ташкилот: **Тошкент архитектура қурилиш институти**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети, Математика институти ҳузуридаги DSc.27.06.2017.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2018 йил «___» _____ соат _____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (____ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-02-24).

Диссертация автореферати 2018 йил «____» _____ куни тарқатилди.
(2018 йил «____» _____ даги _____ рақамли реестр баённомаси).

А. Садуллаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор, академик

Ғ.И. Ботиров
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

Р.Б. Бешимов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., доцент

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) дисертацияси аннотацияси)

Диссертация ишининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда Киллинг вектор майдонлари назарияси билан боғлиқ масалаларга келтирилади. Киллинг вектор майдонлари геометрияси хусусиятларини аниқлаш геометрия, топология, динамик тизимлар каби соҳалардаги тадқиқотларнинг объектидир. Силлиқ вектор майдонлар ёрдамида берилган субмерсияларни қуриш ва уларнинг хоссаларини аниқлаш Киллинг вектор майдонлари орбиталари ҳосил қилган фактор-фазода силлиқ структура киритиш ва секцион эгрилигини ҳисоблашда асос бўлиб хизмат қилади. Шунинг учун Киллинг вектор майдонлар геометриясини тадқиқ қилиш фаннинг Риман геометрияси, қатламалар назарияси, дифференциал топология ва бошқарув назарияси каби йўналишлари ҳамда риман қатламалар назариясининг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда Риман геометрияси, қатламалар назарияси ва вектор майдонлар назарияси масалаларини ечиш замонавий геометриянинг долзарб масалаларидан бири ҳисобланади. Вектор майдонлар оиласи ҳосил қилган минимал алгебранинг ўлчами ва базиси, орбиталарнинг эришувчанлик тўплами хоссаларини аниқлаш, кўпхилликларнинг секцион эгрилигини О’Нейл формулалари ёрдамида ҳисоблаш каби вектор майдонлар оиласи орбиталарининг геометрик характеристикаларини тадқиқ қилиш муҳим ахамият касб этмоқда. Бу борада: Киллинг вектор майдонларининг ўрин алмашиши шартларини топиш ва орбиталарни таснифлаш, вектор майдонлар орбиталари эришувчанлик тўпламларида силлиқ структура киритиш, Евклид фазоларида Киллинг вектор майдонлари орбиталари ҳосил қилган қатламаларнинг Риман қатламалари бўлиш шартларини топишнинг мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадбиғига эга бўлган геометрия ва топологиянинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, Киллинг вектор майдонлари орбиталарининг геометрик ва топологик хоссаларини интенсив ўрганишга алоҳида эътибор қаратилди. Вақт-фазо метрикасини сақлайдиган акслантиришлар, яъни Киллинг вектор майдони оқимини ўрганиш математик физикада муҳим рол ўйнайди. Вектор майдонлар орбиталари ҳосил қилган қатламалар геометрияси соҳасига оид салмоқли натижаларга эришилди. “Динамик тизимлар назарияси, геометрия ва топология” фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда Киллинг вектор майдонлари назариясини ривожлантириш муҳим ахамиятга эга.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сонли қарори

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 8 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони ва 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон “Фанлар Академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисида”ги Қарори ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига мослиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялари ривожланишининг IV. “Математика, механика ва информатика” устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Вектор майдонлар орбиталари геометриясида фундаментал натижа Суссманн теоремаси ҳисобланади, унинг ишларида барча объектлар C^{∞} синфга тегишли бўлса, П.Стефан Суссманн теоремасини $C^{r}, r \geq 1$ силлиқ объектлар учун кенгайтирди. Вектор майдонлар назарияси кўплаб олимларнинг, жумладан, В.Н. Берестовский, T. Adachi, Ю.Г. Никоноров, М. О. Катанаев, C. Beetle, M. Gürses, S. Maeda, S. Z. Németh, K. Nomizu, T. Oprea, K.Yano, S. Kobayashi ишларида ёритилган.

S. Kobayashi ўз ишларида Киллинг вектор майдонларининг қўзғалмас нуқталари тўплами жуфт ко-ўлчамли геодезик қисм кўпхиллик бўлишини исботлаган. Kentaro Yano ва Katsumi Nomizu ишларида локал ва глобал маънода берилган риман кўпхиллигида Киллинг вектор майдонларини мавжуд бўлиш шартлари ўрганилган. В.Н.Берестовский ва Ю.Г.Никифоровлар риман кўпхилликларида ўзгармас узунликка эга Киллинг вектор майдонларини ўрганишган, бунда ўзгармас узунликка эга Киллинг вектор майдонлари траекториялари геодезик чизиқлар бўладиган кўпхилликлар тузилишига қўйиладиган шартлар аниқланган. М.О.Катанаев томонидан икки ўлчовли фазо-вақтда буралган интегралланувчи гравитацион моделида битта Киллинг вектор майдонини берувчи ихтиёрий икки ўлчовли метрикалар учун глобал ечимларни қуришнинг конформ блоклар методи ёрдамида аниқланади.

А.Я.Нарманов, Ж.О.Аслонов, Г.Кайпназаровалар вектор майдонлар орбиталари ҳосил қилган қатламалар геометрияси тадқиқ қилишган. Ж.О.Аслонов уч ўлчовли евклид фазосида Киллинг вектор майдонлари орбиталарининг батафсил геометрик классификациясини берган. Г.Кайпназарова кўпхилликларда берилган метрик қатламалар хоссаларини вектор майдонлар ва Риман субмерсиялари ёрдамида тадқиқ қилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация иши Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети илмий-тадқиқот ишлари режасининг ЁФ-4-6 “Киллинг вектор майдонлари геометрияси” (2016-2017) мавзуидаги лойиҳа доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади Киллинг вектор майдонларининг ўрин алмашиш шартлари, евклид фазоларида Киллинг вектор майдонлари оилалари орбиталарини геометрияси ва топологияси ҳамда вектор майдонлар эришувчанлик тўпламларининг структурасини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқот вазифалари:

евклид фазоларида Киллинг вектор майдонларини ўрин алмашишининг зарурий ва етарли шартларини топиш;

евклид фазоларида Киллинг вектор майдонлари оиласи орбиталарини таснифлаш;

Киллинг вектор майдонлари орбиталари эришувчанлик тўпламининг геометрик хоссаларини аниқлаш;

Киллинг вектор майдонлари оиласи ҳосил қилган тақсимотларни интеграллаш шартларини топиш;

ўзгармас номанфий эгриликка эга силлиқ компакт кўпхилликда ёпиқ 1-форма билан берилган риман қатламаларининг тўла геодезик қатлама ҳосил қилиш шартларини топиш.

Тадқиқотнинг объекти Киллинг вектор майдонлари оиласи орбиталари геометрия ва топологияси, вектор майдонлар орбиталарининг эришувчанлик тўпламлари, риман қатламалари геометриясидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети Киллинг вектор майдонлари орбиталари ҳосил қилган фактор-фазода силлиқ структура киритиш ва секцион эгрилигини ҳисоблаш, Киллинг вектор майдонлари оиласи орбитасининг геометрик таснифини аниқлаш, ёпиқ 1-форма билан берилган қатлама геометрияси, вектор майдонлар орбиталарининг эришувчанлик тўпламини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқот усуллари. Тадқиқот ишида дифференциал геометрия, дифференциал топология, риман геометрияси ва қатламалар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқот илмий янгилиги қуйидагилардан иборат**:**

евклид фазоларида Киллинг вектор майдонларини ўрин алмашишининг зарурий ва етарли шартларини топилган;

евклид фазоларида Киллинг вектор майдонлари оиласи орбитасини таснифланган;

Киллинг вектор майдонлари оиласи ҳосил қилган тақсимотларнинг интеграланувчилик шартлари топилган;

Киллинг вектор майдонлари оиласи эришувчанлик тўплами геометрик хоссаларини аниқланган;

ўзгармас номанфий эгриликка эга силлиқ компакт кўпхилликда ёпиқ 1-форма билан берилган риман қатламаларининг тўла геодезик қатлама хосил қилиши учун етарли шартлар топилган.

Тадқиқот амалий натижалари Киллинг вектор майдонлари оиласи орбиталарининг хоссалари қатламалар назариясида риман қатламаларини Киллинг вектор майдонлари ёрдамида қуриш масалаларида ҳамда динамик тизимлар назариясида траекторияларни тадқиқ қилиш ва бошқарув тўпламларининг структурасини аниқлаш масалаларини ечишда қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги дифференциал геометрия, дифференциал топология, риман геометрияси ва қатламалар назариясининг фундаментал усуллари: Фробениус, Херманн, Суссманн, локал турғунлик теоремаларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқотнинг илмий аҳамияти динамик тизимлар ва қатламалар назариясининг турли масалалари учун эришувчанлик тўпламларида силлиқ структура мавжудлигини аниқланганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқотнинг амалий аҳамияти Киллинг вектор майдонлар орбиталарининг геометрик таснифини динамик тизимларнинг бошқарувчанлик тўпламлари моделларига тадбиқ этиш билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Киллинг вектор майдонлар геометриясига оид олинган илмий натижалар қуйидаги йўналишларда амалиётга жорий қилинган:

вектор майдонлар оиласининг эришувчанлик тўпламининг геометрияси “Динамик системаларни бошқариш назариясининг дифференциал ва топологик жиҳатлари” лойиҳасида динамик системалар траекторияларини ҳисоблашда қўлланилган (Удмуртия университетининг (Россия) 2018 йил 14 мартдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши бошқариш системалари етишувчанлиги тўпламининг геометрияси ва топологиясини аниқлаш имконини берган.

Евклид фазоларида Киллинг вектор майдонлари оиласи орбиталари етишувчанлик тўпламининг бошқарувчанлик хоссаси, эгрилиги номанфий ўзгармас боғланишли компакт риман силлиқ кўпхиллиги учун ёпиқ 1-форма ёрдамида берилган риман қатламаларини қатламалари ўзаро изометрик бўлган тўла геодезик қатлама сифатида берилганлиги Ф-4-29 “Ноидеал ва шартли боғланишли бошқарилувчи механик системалар динамикаси” грант тадқиқотларида спирал бўйича ҳаракатни биринчи яқинлашишга кўра асимптотик устуворликкача стабиллаш масаласида фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта таълим вазирлигининг 2018 йил 9 апрелдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши дастурий бошқарув сифатида реактив куч ва реактив тезланишнинг йўналитирувчи косинусларини олиш, барча ўзгарувчиларни бевосита ўлчаш имкони бўлмаганда гирогоризонткомпас ўқини горизонтал ҳолатга келтириш ва оғдирилган ҳаракатни чизиқли регулятор ёрдамида стабиллаш имкониятларини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 11 та илмий-амалий анжуманларда, шу жумладан тўртта халқаро ва еттита республика, илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 18 та илмий иш чоп этилган, шулардан Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда

олтита мақола, жумладан икктаси хорижий ва тўрттаси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертация ҳажми 110 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида ўтказилган тадқиқотнинг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқот мақсади ва вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, тадқиқот илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг илмий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларини амалиётга жорий қилиш, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **“Кўпҳилликларда вектор майдонлар”** деб номланган биринчи бобида диссертациянинг натижаларини баён қилишда фойдаланиладиган риман геометриясининг зарурий тушунчалари ҳамда ёрдамчи фактлари келтирилган. Ушбу бобнинг биринчи параграфида дифференциалланувчи кўпҳилликлар назариянинг асосий тушунчалари ва теоремалари келтирилган. Иккинчи параграф кўпҳилликларда аниқланган вектор майдонлар ҳамда уларнинг орбиталарининг асосий хоссаларига бағишланган:

Изоҳ 1. Диссертацияда кўрилаётган барча объектлар C^{∞} – силлиқлик синфига тегишли деб қаралади.

Таъриф 1. M – ўлчами n бўлган силлиқ кўпхиллик, TM – уринма қатлама, $\pi : TM \to M$ эса проекция акслантириши бўлсин. M даги вектор майдон деб, $\pi X(x) = x$ шартни қаноатлантрувчи $X : M \to TM$ акслантиришга айтилади.

Берилган $x \in M$ нуқта учун $X^t(x)$ деб, X вектор майдоннинг $t = 0$ да x нуқтадан ўтувчи интеграл чизиғини белгилаймиз.

Таъриф 2. Агар X вектор майдон M да ҳосил қилган бир параметрли локал алмаштиришлари

$$x \to X^t(x),$$

(инфинитезимал алмаштиришлари) группаси ҳаракатлардан иборат бўлса, X Киллинг вектор майдони дейилади.

Таъриф 3. D – вектор майдонлар оиласи берилан бўлса, шу оиланинг x нуқтадан ўтувчи орбитаси $L(x)$ деб, M даги қуйидагича аниқланган y нуқталар тўпламига айтилади:

$$y = X_{i_k}^{t_k}\left(X_{i_{k-1}}^{t_{k-1}}\left(\ldots\left(X_{i_1}^{t_1}(x)\right)\ldots\right)\right).$$

бу ерда $X_{i_1}, X_{i_2}, ..., X_{i_k}$ – D оилага тегишли вектор майдонлар, $t_1, t_2, ..., t_k$ – ҳақиқий сонлар, k эса ихтиёрий натурал сон.

Жорий бобнинг учинчи параграфида кўпхилликнинг секцион эгрилиги тушунчаси киритилган. Ушбу тушунча дифференциалланувчи кўпхилликларнинг асосий геометрик хоссаларидан бўлганлиги сабабли ўтказилган тадқиқотларда муҳим роль ўйнайди. Шунингдек, бу параграфда икки ўлчамли сиртларнинг секцион эгрилиги гаусс эгрилиги билан устма-уст тушуши кўрсатилган.

Тўртинчи параграфда қатламалар назарияси ва тақсимотлар (текисликлар майдонлари) назариларига доир асосий тушунчалар келтирилган. Вектор майдонлари оилалари, шу жумладан, Киллинг вектор майдонлари оилаласи ҳам тақсимотлар ҳосил қилганлиги сабабли, бунда тақсимотлар қайси ҳолларда қатлама ҳосил қилиши, яъни интегралланувчи эканлиги аниқлаш мақсадида бир қатор тадқиқотлар ўтказилган.

$D \subset V(M)$ – M кўпхилликда берилган силлиқ вектор майдонлар оиласи бўлсин. M кўпхилликда C^∞ синфга тегишли барча вектор майдонлар тўплами $V(M)$ Ли коммутаторига нисбатан Ли алгебрасини ҳосил қилади. $A(D)$ орқали D оилани ўз ичига олувчи $V(M)$ алгебранинг минимал Ли қисм алгебрасини белгилаб оламиз. $P_D : x \to A_x(D)$ каби аниқланган тақсимотни олайлик. Бу ерда, $A_x(D) = \{X(x) : X \in A(D), x \in M\}$. Ушбу тақсимот инволютив, шу сабабдан, агарда $\dim A_x(D)$ ўлчамлар x нуқтага боғлиқ бўлмаса, Фробениус теоремасига асосан $P_D : x \to A_x$ тақсимот тўла интегралланувчидир. Бу ҳолда, ҳар бир x нуқта учун $L(x)$ тўплам P_D нинг интеграл қисм кўпхиллиги бўлади. Аксинча, $\dim A_x(D)$ ўлчамлар x нуқтага боғлиқ бўлса, $P_D : x \to A_x(D)$ тақсимот тўла интегралланувчи бўлиши шарт эмас. Япон математиги Нагано натижаларига кўра, M кўпхиллик ва D га тегишли вектор майдонлар аналитик бўлса, $P_D : x \to A_x(D)$ тақсимот тўла интегралланувчи бўлиб, ҳар бир орбита шу тақсимот учун интеграл қисм кўпхиллик бўлади. Бу ҳолда, орбитанинг ўлчами ҳар бир $x \in M$ учун $\dim A_x(D)$ га тенгдир. Умумий ҳолда, ҳар бир $x \in M$ учун $\dim A_x(D) \le \dim L(x)$ муносабат ўринли.

Энди, $D \subset K(M)$, яъни берилган оила Киллинг вектор майдонларидан ташкил топган деб фараз қилайлик. $K(M)$ алгебра чекли ўлчамли бўлганлиги сабабли, $A(D)$ минимал алгебра таркибида шундай $X_1, X_2, ..., X_m$ силлиқ вектор майдонлар мавжудки, $X_1(p), X_2(p), ..., X_m(p)$ векторлар ҳар бир $p \in M$ нуқта учун $A_p(D)$ қисм фазонинг базисини ташкил этади. Бу ҳолда, қуйидаги теорема исботланган:

Теорема 2. $D \subset K(M)$ оиланинг ҳар бир орбитаси тўла интегралланувчи $P_D : x \to A_x(D)$ тақсимотнинг интеграл қисм кўпхиллигидир.

Мазкур диссертациянинг “**Киллинг вектор майдонлари геометрияси**” деб номланган иккинчи бобида Киллинг вектор майдонлари орбиталари геометрияси ўрганилади. Бу бобда Киллинг вектор майдонларида ўрин алмашишининг зарурий ва етарлилик шартлари келтирилган, евклид фазоларида Киллинг вектор майдонлари орбиталарининг классификацияси келтирилган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида евклид фазоларида Киллинг вектор майдонларида ўрин алмашишининг зарурий ва етарлилик шартлари ва турли хоссалари ўрганилган. Қуйидаги теоремалар исботланган

Теорема 3. Бири “буриш”, иккинчиси “кўчиш” ни ҳосил қиладиган иккита X,Y Киллинг вектор майдонлари берилган бўлсин, улар ўрин алмашиши учун Y майдоннинг “кўчиш” йўналиши X майдоннинг қўзғалмас нуқталари N қисм фазосига параллел бўлиши зарур ва етарли.

Теорема 4. “Буриш”ларни ҳосил қилувчи X,Y – Киллинг вектор майдонлари ва N_1, N_2 мос равишда X,Y нинг қўзғалмас (махсус) нуқталари тўпламлари бўлсин. У ҳолда X,Y вектор майдонлар ўрин алмашиши учун $\dim N_1 = \dim N_2 = 0$ ва $N_1 = N_2$, ёки $R^n = N_1 \oplus N_2$ бўлиши зарур ва етарли.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида Киллинг вектор майдонлари орбиталарининг топологик ва геометрик хоссалари ўрганилган.

$K(M)$ орқали M кўпхилликда Киллинг вектор майдонлари алгебрасини белгилаймиз. $D \subset K(M)$, яъни D тўплам(оила) Киллинг вектор майдонларидан ташкил топган бўлсин. $K(M)$ алгебра чекли ўлчамли бўлганлиги сабабли $A(D)$ дан олинган шундай $X_1, X_2, ..., X_m$ вектор майдонлар мавжудки, $X_1(p), X_2(p), ..., X_m(p)$ векторлар ҳар бир $p \in M$ учун $A_p(D)$ қисм фазонинг базисини ташкил этади.

$K(M)$ алгебра чекли ўлчамли эканлигидан фойдаланиб, биз вектор майдонлар $L(x)$ орбиталари геометрияси ва топологиясини қуйидаги акслантириш ёрдамида ўрганишимиз мумкин бўлади:

$$(t_1, t_2, ..., t_m) \to X_m^{t_m}\left(X_{m-1}^{t_{m-1}}\left(...\left(X_1^{t_1}(x_0)...\right)\right)\right),$$

бу ерда $(t_1, t_2, ..., t_m) \in U \subset R^m$ ва U - R^m даги координата бошининг атрофи.

Қуйидаги теорема $L(x_0)$ орбитанинг ҳар бир нуқтасига x_0 нуқтадан чекли сондаги ва $X_1, X_2, ..., X_m$ вектор майдонлар маълум тартибда қўлланилаган “ўтишлар” орқали етиб олиш мумкинлигини кўрсатади.

Теорема 5. Ушбу

$$y = X_m^{t_m}\left(X_{m-1}^{t_{m-1}}\left(...\left(X_1^{t_1}(x_0)...\right)\right)\right)$$

кўринишдаги нуқталар тўплами $L(x_0)$ орбита билан устма-уст тушади, бу ерда $(t_1, t_2, ..., t_m) \subset U$.

Иккинчи параграфнинг асосий натижаси евклид фазоларида Киллинг вектор майдонлари оиласи орбитасининг геометрик тузилиши ҳақидаги теорема ҳисобланади.

Теорема 6. $M = R^n$, D оила Киллинг вектор майдонларидан иборат бўлсин. У ҳолда D оиланинг ҳар бир орбитаси ёпиқ қисм тўпламдир.

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида келтирилмайдиган Киллинг вектор майдонлари оиласи орбиталарининг классификацияси ҳақидаги масала ўрганилган.

Таъриф 4. “Буриш” типидаги Киллинг вектор майдонининг қўзғалмас нуқталари тўплами евклид фазосида берилган координаталар системасига нисбатан $n-2$ ўлчамли координата текислигидан иборат бўлса, бундай вектор майдон келтирилмайдиган дейилади. “Кўчириш” типидаги Киллинг вектор майдонининг параллел кўчириш йўналиши координата ўқларининг бирортасига параллел бўлса, бундай вектор майдон келтирилмайдиган дейилади.

Қуйида $B(D)$ базис оила келтирилмайдиган буришлар ва кўчиришлардан ташкил топган деган фаразда евклид фазосида Киллинг вектор майдонлари орбиталарининг геометрияси ҳақидаги теоремани келтирамиз.

Теорема 7. R^n да Киллинг вектор майдонлари D оиласи берилган, базис оила эса m та келтирилмайдиган вектор майдонлардан иборат бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $p \in R^n$ нуқтанинг L_p орбитаси евклид фазосининг қуйида келтирилган қисм кўпхилликларидан бири бўлади:

1. k - ўлчамли текислик, бу ерда $0 \le k \le \min(m,n)$;

2. k - ўлчамли тор $T^k = S^1 \times S^1 \times ... \times S^1$ бу ерда $1 \le k \le \min\left(m, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$;

3. k - ўлчамли сфера S^k, бу ерда $0 \le k \le \min(m, n-1)$;

4. k - ўлчамли торсимон цилиндр $T^{k_1} \times R^{k_2}$, бу ерда $k = k_1 + k_2$ ва $k \le \min\left(m, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$;

5. k - ўлчамли сферик цилиндр $S^{k_1} \times R^{k_2}$, бу ерда $k = k_1 + k_2$ ва $k \le \min(m, n-1)$.

“**Вектор майдонлар эришувчанлик тўпламининг геометрияси**” деб номланган учинчи бобда вектор майдонлар эришувчанлик тўпламининг тузилиши, орбиталар тўпламининг геометрияси ва дифференциалланувчи ёпиқ 1-форма ҳосил қилган қатламалар геометрияси ўрганилади.

Суссманнинг ишларида Суссманн топологиясига эга вектор майдонлар ($C^r; r \ge 1$ синф) оиласининг ҳар бир орбитаси дифференциалланувчи кўпхиллик тузилишга эга эканлиги исботланган. Агар $i: N \to M$ каноник инъекция максимал рангга эга дифференциалланувчи акслантириш бўлса, N қисм кўпхиллик M га ботирилган кўпхиллик дейилади.

$L(x)$ орбитанинг топологияси (Суссманн топологияси) қуйидаги кўринишдаги барча акслантиришлар узлуксиз бўладиган энг кучли топология сифатида киритилади:

$$(t_1, t_2, ..., t_k) \to y = X_k^{t_k}\left(X_{k-1}^{t_{k-1}}\left(...\left(X_1^{t_1}(x)\right)...\right)\right),$$

бу ерда $t_1, t_2, ..., t_k$ – ҳақиқий сонлар, $X_1, X_2, ..., X_k$ – D оиладан олинган вектор майдонлар. Ботирилган кўпхиллик сифатидаги орбита топологияси M дан индуцирланган топологияга қараганда кучлироқ ҳисобланади. Масалан, торнинг иррационал ўрами учун барча траекториялар учун бу топологиялар турлича.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида вектор майдонлар эришувчанлик тўпламининг геометрик хоссалари ўрганилган. Вектор майдонларнинг T-эришувчанлик тўплами тушунчаси киритилган.

Таъриф 5. Агар берилган

$$y = X_k^{t_k}\left(X_{k-1}^{t_{k-1}}\left(...\left(X_1^{t_1}(x)\right)...\right)\right) \in L(x)$$

учун $\sum_i t_i = T$ бўлса, ушбу нуқта $x \in M$ нуқтадан T- эришувчан дейилади.

$A_x(T)$ орқали $x \in M$ нуқтадан T- эришувчан бўлган барча нуқталар тўпламини белгилаймиз.

Суссманннинг орбита силлиқ кўпхиллик бўлиши ҳақидаги теоремада келтирилган ғоядан фойдаланиб, биз қуйидаги теоремани исботладик

Теорема 8. $A_x(T)$ тўплам ҳар бир $x \in M$ ва ихтиёрий T да коўлчами бир ёки нол бўлган $L(x)$ орбитанинг ботирилган қисм кўпхиллиги бўлади.

Эришувчанлик тўплами геометриясини ўрганишда Г.Суссманннинг қўшган яна бир ҳиссаси қуйидаги теорема ҳисобланади, бу теорема N.Levitt билан биргаликда исботланган (*SIAM J. Control 13*, no. **6(**1975), pp. 1271-1281):

Теорема 9 (Sussmann, Levitt). M – силлиқ, боғланишли, n ўлчовли кўпхиллик бўлсин. У ҳолда, ҳар бир $x \in M$ нуқта учун $L^+(x) = M$ муносабат ўринли бўладиган иккита вектор майдонидан иборат бўлган D система мавжуд.

Бу теоремадан фойдаланиб, биз қуйидаги теоремани исботладик

Теорема 10. M – ўлчови $n \geq 2$ бўлган силлиқ, боғланишли кўпхиллик бўлсин. Ҳар бир $x \in M$ нуқта учун $A_x(0) = M$ тенглик ўринли бўладиган учта вектор майдонидан иборат бўлган D система мавжуд.

Теорема 11. M – Эйлер характеристикаси нолдан фарқли, ўлчови $n \geq 2$ бўлган силлиқ, компакт, боғланишли кўпхиллик бўлсин. У ҳолда, ҳар бир

$x \in M$ нуқта учун $A_x(0) = M$ муносабат ўринли бўладиган иккита вектор майдонидан иборат бўлган D система мавжуд.

Вектор майдонларнинг симметрик системалари учун қуйидаги натижа олинган. Агар $X \in D$ дан $-X \in D$ келиб чиқса, у ҳолда вектор майдонларнинг D система(оила)си симметрик дейилишини эслатиб ўтамиз.

Теорема 12. D система симметрик бўлиб, тўла вектор майдонга эга бўлсин. У ҳолда ҳар бир $T \in R$ ва ҳар бир $x \in M$ нуқта учун $A_x(T) = L(x)$ тенглик ўринли бўлади.

Биринчи бобда келтирилган голономия группасининг таърифи ва хоссаларидан фойдаланиб евклид фазосида Киллинг вектор майдонлари орбиталари (қатламлари) тўплами геометриясини тадқиқ қиламиз.

Фактор-топология киритилган $B = R^n / D$ – R^n евклид фазосидаги Киллинг вектор майдлонлари D оиласининг орбиталари тўпламини кўриб чиқамиз. Унда $\pi : M \to F$ фактор-акслантириш учун $\pi(x) = L(x)$ ўринли бўлади, бу ерда $L(x)$ – x ни ўз ичига олган орбита. Қуйидаги теоремадан, орбиталар риман субмерсиялари қатламлари бўлиши кўринади.

Теорема 13. Агар барча $x \in M$ лар учун $\dim A_x(D) = k$, $0 < k < n$ бўлса, у ҳолда фактор топологияга эга $B = R^n / D$ орбиталар тўплами $(n-k)$- ўлчамли силлиқ кўпхиллик дифференциал структурасига эга бўлиб, бунда $\pi : M \to B$ акслантириш силлиқ Риман субмерсияси бўлади.

Натижа 1. B кўпхиллик номанфий эгриликка эга кўпхилликдир.

О'Нейл формуласи қуйидаги тасдиқни исботлаш имконини беради.

Теорема 14. 13-теореманинг шартлари сақланган ҳолда, D оиланинг орбиталари параллел текисликлардан иборат бўлиши учун $B = R^n / D$ кўпхилликнинг секцион эгрилиги нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.

Учинчи параграф ёпиқ дифференциал 1-форма ҳосил қилган қатламалар геометриясига бағишланган. Номанфий ўзгармас эгриликка эга (M, g) силлиқ боғланишли компакт кўпхилликда ёпиқ 1-форма билан аниқланган F қатлама изометрик қатламларга эга тўла геодезик қатлама бўлишини кўрсатувчи теорема келтирилган.

Барча $x \in M$ нуқталарда $V_x M$ фазога уринма бўладиган $V_x = \{X \in T_x M : \omega_x(X) = 0\}$ қисм фазони кўриб чиқамиз. У ҳолда $n-1$ ўлчамли $V : x \to V_x$ қатламага эга бўламиз. Фробениус теоремасига кўра мазкур тақсимот тўла интегралланувчи бўлади, агар $\omega \wedge d\omega = 0$ бўлса, бу ерда $d\omega$ – 1-форманинг дифференциали. Ёпиқ формалар ҳар доим тўла интегралланувчи тақсимотларни ҳосил қилади, чунки, $d\omega = 0$. Хусусан, аниқ 1-форма ҳар доим бирор силлиқ функциянинг дифференциал бўлганлиги сабабли, тўла интегралланувчидир: $\omega = df$.

Қуйидаги теорема номанфий ўзгармас эгриликка эга (M, g) силлиқ боғланишли компакт кўпхилликда ёпиқ 1-форма билан аниқлнган F қатлама изометрик қатламларга эга геодезик қатлама бўлишини кўрсатади.

Теорема 15. (M,g) – номанфий ўзгармас эгриликка эга силлиқ боғламли компакт кўпхиллик бўлсин. Агар (M,g) да ёпиқ 1-форма билан аниқланган F риман қатламаси берилган бўлса, у ҳолда F изометрик қатламларга эга тўла геодезик қатлама бўлади.

Бу теорема асосида қуйидаги натижалар олинган:

Натижа 2. Теорема 15 шартларига кўра M ўзгармас нол эгриликка эга кўпхиллик бўлади.

Натижа 3. Теорема 15 шартларига кўра ҳар бир F қатлама қатламларининг фундаментал группаси $\pi_1(M)$ группанинг $A=\{[\gamma]:\int_\gamma \omega=0\}$ қисм группасига изоморфдир.

ХУЛОСА

Диссертация Киллинг вектор майдонлари орбиталарининг геометрик ва топологик хоссаларини ўрганишга бағишланган бўлиб, унда қуйидаги натижалар олинган:

Киллинг вектор майдонларини ўз ичига олган Киллинг вектор майдонларининг минимал қисм алгебраси тўла интегралланувчи тақсимотни ҳосил қилади ҳамда унинг интеграл қисм кўпхилликлари вектор майдонлар оиласи орбиталаридан иборатдир;

евклид фазоларида Киллинг вектор майдонлари ўрин алмашишининг зарурийлик ва етарлилик шартлари келтирилган ва исботланган.;

Киллинг вектор майдонлари орбитаси, шу оилани ўз ичига олган Ли минимал алгебрасининг базис майдонлари орбитаси билан мос тушади ва евклид фазосида ёпиқ қисм тўплам бўлади;

евклид фазосида келтирилмайдиган Киллинг вектор майдонлари орбиталари тўлиқ классификацияланган;

кўпхилликнинг ҳар бир нуқтасида ва ихтиёрий T да T-эришувчанлик тўплами коўлчами бир ёки нол бўлган орбитанинг ботирилган қисм кўпхиллиги бўлади;

$n\geq 2$ ўлчамли силлиқ боғламли кўпхилликда учта вектор майдондан ташкил топган шундай система мавжудки, ҳар бир нуқтанинг нол эришувчанлик нуқтаси бутун кўпхиллик билан мос тушади;

агар система симметрик ва тўлиқ вектор майдонни ўз ичига олса, у ҳолда T-эришувчанлик тўплами орбита билан мос тушади;

агар барча орбиталар бир хил ўлчамга эга бўлса, у ҳолда фактор топологияга эга бўлган орбиталар тўплами силлиқ кўпхиллик дифференциал тузилишига эга бўлади, бунда “нуқта-орбита” акслантириши силлиқ риман субмерсияси бўлади;

агар барча орбиталар бир хил ўлчамга эга бўлса, у ҳолда орбиталар тўплами номанфий эгриликка эга кўпхиллик бўлади;

агар барча орбиталар бир хил ўлчамга эга бўлса, у ҳолда орбиталар параллел текисликлардан иборат бўлиши учун орбиталар тўплами нол эгриликка эга бўлиши зарур ва етарли;

номанфий ўзгармас эгриликка эга силлиқ, боғланишли, компакт кўпхилликда ёпиқ 1-форма билан аниқланган риман қатламаси изометрик қатламларга эга тўла геодезик қатлама бўлади;

Диссертация ишидаги барча натижалар янги ҳисобланади ва улардан вектор майдонлар назарияси, сингуляр қатламалар назарияси ва замонавий геометриянинг бошқа бўлимларида олиб бориладиган тадқиқотларда фойдаланиш мумкин.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.27.06.2017.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА, ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

САИТОВА САЙЁРА СОБИРЖОНОВНА

ГЕОМЕТРИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ КИЛЛИНГА

01.01.04 - Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ - 2018

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2017.2.PhD/FM91.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский и английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу www.ik-fizmat.nuu.uz и информационно-образовательном портале «Ziyonet» по адресу www.ziyonet.uz.

Научный руководитель: **Нарманов Абдигаппар Якубович**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Рахимов Абдуғофур Абдумажидович**
доктор физико-математических наук

Каипназарова Гулжахон Хожаназаровна
кандидат физико-математических наук, доцент

Ведущая организация: **Ташкентский архитектурно-строительный институт**

Защита диссертации состоится «__» _____ 2018 года в _____ часов на заседании Научного совета DSc.27.06.2017.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана, при Институте Математики (Адрес: 100074, г.Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24. e-mail: nauka@nuu.uz)

С диссертацией можно ознакомится в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №___). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-02-24).

Автореферат диссертации разослан «___» _____ 2018 года.
(протокола рассылки №_____ от «____» _____ 2018 года).

А. Садуллаев
Председатель Научного совета по
присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор, академик

Г.И. Ботиров
Ученый секретарь Научного совета по присуждению
ученых степеней, к.ф.-м.н.

Р.Б. Бешимов
Председатель научного семинара при Научном совете
по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертационной работы. Большинство проблем, возникающих в результате научно-прикладных исследований в различных областях на мировом уровне, часто сводятся к задачам теории векторных полей Киллинга. Определение свойств геометрии векторных полей Киллинга является объектом исследования в таких сферах, как геометрия, топология, динамические системы. Построение субмерсий посредством гладких векторных полей и анализ их свойств служит основой для введения гладкой структуры и вычисления секционной кривизны фактор-пространства порожденного орбитами векторных полей Киллинга. Поэтому изучение геометрии векторных полей Киллинга является одной из важных задач теории римановых слоений и таких направлений науки, как риманова геометрия, дифференциальная топология и теория управления.

В настоящее время, в мире одной из актуальных проблем современной геометрии является проблема о геометрии орбит семейства векторных полей. Немаловажное значение при этом имеет исследование геометрических характеристик орбит семейства векторных полей таких как размерность и базис минимальной алгебры, порожденный семейством векторных полей, определение свойств множества достижимости векторных полей, вычисление секционной кривизны многообразий посредством формул О'Нейла. В связи с этим нахождение условий коммутирования векторных полей Киллинга и классификация орбит, введение гладкой структуры во множестве достижимости векторных полей являются научными исследованиями, направленными на установление геометрических свойств орбит векторных полей Киллинга в евклидовых пространствах.

В нашей стране уделяется особое внимание актуальным аспектам геометрии и топологии, имеющим научное и практическое применение в фундаментальных науках. В том числе, усилено внимание интенсивному исследованию геометрических и топологических свойств орбит векторных полей Киллинга. Изучение преобразований, которые сохраняют метрику пространства-времени, то есть потока векторных полей Киллинга играет исключительно важную роль в математической физике. Значительные результаты были достигнуты в области геометрии слоений, порожденных орбитами векторных полей Киллинга. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по таким приоритетным направлениям, как теория динамических систем, геометрия и топология определены основными задачами и направлениями исследований в области математических наук[2]. Исследование геометрических характеристик орбит семейства векторных полей Киллинга играет важную роль при исполнении этого постановления.

[2]Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно - исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

Исследование проведенное в данной диссертации в определенной степени служит решению задач, указанных в Указе Президента Республики Узбекистан УП-4947 «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 7 февраля 2017 года и Постановлении Президента Республики Узбекистан ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года, а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика»

Степень изученности проблемы. Фундаментальным результатом в геометрии орбит векторных полей стала теорема Сусманна, в которой все объекты заданы из класса C^{∞}. Позже П. Стефан расширил теорему Суссманна для объектов с гладкостью класса $C^{r}, r \geq 1$. Теория векторных полей развита во многочисленных работах таких авторов, как, В. Н. Берестовский, T. Adachi, Ю.Г. Никоноров, М. О. Катанаев, C. Beetle, M. Gürses, S. Maeda, S. Z. Németh, K. Nomizu, T. Oprea, K.Yano, S. Kobayashi и другие.

В своих работах S. Kobayashi доказал, что множество непожвижных точек группы изометрий является вполне геодезическим подмногобразием четной коразмерности. Как известно, инфинитезимальные преобразования порожденные векторным полем Киллинга образуют однопараметрическую группу изометрий. В работах Kentaro Yano и Katsumi Nomizu изучаются вопросы существования векторных полей Киллинга на заданном римановом многообразии в локальном и глобальном смысле. В.Н.Берестовский совместно с Ю.Г.Никифоровым рассматривает Киллинговы векторные поля постоянной длины на римановых многообразиях, при этом определяет условия, налагаемые на структуру многообразий при которых траектория векторного поля Киллинга постоянной длины представляет собой геодезическую. М.О.Катанаевым предложена интегрируемая модель гравитации с кручением в двумерном пространстве-времени, которое развивается посредством метода конформных блоков построения глобальных решений в гравитации для произвольных двумерных метрик, допускающих одно векторное поле Киллинга.

В работах А.Я.Нарманова, Ж.О.Аслонова, Г.Кайпназаровой исследована геометрия слоений, порожденных орбитами векторных полей. В работах Ж.О.Аслонова приводится детальная геометрическая классификация орбит векторных полей Киллинга в трехмерном евклидовом пространстве. Результаты Г. Кайпназаровой посвящены исследованиям свойств метрических слоений на гладких многообразиях посредством векторных полей.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, где выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ ЁФ-4-6 «Геометрия векторных полей Киллинга» Национального Университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (2016-2017гг).

Целью исследования является исследование геометрии векторных полей Киллинга, в частности условий коммутирования векторных полей Киллинга, геометрия и топология орбит семейства векторных полей Киллинга в евклидовых пространствах, а также структура множества достижимости векторных полей.

Задачи исследования:

– получить необходимые и достаточные условия коммутирования векторных полей Киллинга в евклидовых пространствах;

– классифицировать орбиты семейства векторных полей Киллинга в евклидовых пространствах;

– ответить на вопросы интегрируемости распределений, порожденных семейством векторных полей Киллинга;

– определить геометрические свойства множеств достижимости семейства векторных полей Киллинга;

– получить условия, при которых слоения, заданный замкнутой 1-формой ω, на гладком компактном многообразии постоянной неотрицательной кривизны являются вполне геодезическими слоениями.

Объектом исследования являются геометрия и топология орбиты семейства векторных полей Киллинга, множества достижимости векторных полей, геометрия римановых слоений.

Предметом исследования являются введение гладкой структуры и вычисление секционной кривизны фактор-пространства, порожденного орбитами векторных полей Киллинга.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы дифференциальной геометрии, дифференциальной топологии, римановой геометрии и теории слоений,

Научная новизна исследования заключается в следующем:

получены необходимые и достаточные условия коммутирования векторных полей Киллинга в евклидовых пространствах;

классифицированы орбиты семейства неприводимых векторных полей киллинга в евклидовых пространствах;

доказано, что орбита семейства векторных полей Киллинга в евклидовых пространствах является замкнутым подмножеством и вполне интегрируемость распределений, порожденных минимальной алгеброй Ли, содержащего данное семейство векторных полей Киллинга;

получено достаточное условие, при выполнении которого множество орбит векторных полей Киллинга в евклидовых пространствах является многообразием неотрицательной секционной кривизны;

получено достаточное условие, при выполнении которого отображение «точка –орбита» является римановой субмерсией;

доказано, что множество Т-достижимости семейства векторных полей является подмногообразием орбиты коразмерности единица и нуль, а слоение, заданное замкнутой 1-формой ω на связном компактном римановом многообразии постоянной неотрицательной кривизны является вполне геодезическим римановым слоением с изометричными слоями.

Практические результаты исследования заключаются в следующем: свойства орбит векторных полей Киллинга были использованы для решения задач теории слоений о построении римановых слоений посредством векторных полей, теории динамических систем при исследовании траекторий и определении структуры множества управляемости.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, с использованием известных методов дифференциальной геометрии, дифференциальной топологии, римановой геометрии и теории слоений применением теорем Фробениуса, Херманна, Суссманна, теоремы о локальной устойчивости.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что показано существование гладкой структура во множестве достижимости орбит векторных полей для решения различных задач теории динамических систем и теории слоений.

Практическая значимость результатов диссертации состоит в том, что геометрическая классификация орбит векторных полей Киллинга применима для изучения моделей множества управляемости динамических систем.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по геометрии векторных полей Киллинга были использованы в следующих научно-исследовательских проектах, при:

определении структуры множества достижимости систем управления в рамках исследованиях проекта «Дифференциальные и топологические аспекты теории управления динамическими системами» (Справка Удмуртского университета (Россия) от 14 марта 2018 года) на основе свойств множества достижимости семейства векторных полей. Фундаментальные результаты исследований дали возможность определить геометрию и топологию множества достижимости систем управления.

решении задачи о стабилизации движения по спирали до асимптотической устойчивости по первому приближению в рамкам исследований гранта Ф-4-29 «Динамика управляемых механических систем с неидеальными и условными связями» (Справка Министерства высшего и средне-специального образования республики Узбекистан от 9 апреля 2018 года) на основе управляемости множеств достижимости орбит семейства векторных полей Киллинга в евклидовых пространствах и метода изучения римановых слоений, заданных замкнутой 1-формой ω, как вполне геодезических слоений с изометрическими слоями для гладкого связного

компактного риманова многообразия постоянной неотрицательной. Фундаментальные результаты исследований дали возможность в качестве программных управлений взять направляющие косинусы реактивной силы и реактивное ускорение, привести ось гирогоризнткомпаса в горизонтальное положение, когда не все переменные доступны непосредственному измерению и стабилизировать невозмущенное движение линейным регулятором.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 11, в том числе на четырех международных и семи республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. Результаты исследований приведенных в настоящей диссертации опубликованы в 18- работах, из них 6 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестацинной комиссией республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 2 работы опубликованы в зарубежных изданиях и 4- в республиканских изданиях.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Общий объем диссертации составляет 110 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направления развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «**Векторные поля на многообразиях»** содержит необходимые определения и вспомогательные факты из римановой геометрии, которые будут использованы при изложении результатов диссертации.

Примечание 1. Все объекты, рассматриваемые в диссертации, многообразия, векторные поля, дифференциальные формы имеют гладкость класса C^{∞}.

Второй параграф первой главы посвящается векторным полям на многообразиях и основным свойствам орбит векторных полей:

Определение 1. Пусть M – гладкое многообразие размерности n, TM – касательное расслоение, $\pi : TM \to M$ – проекция. Отображение $X : M \to TM$, при котором $\pi \circ X(x) = x$, называется векторным полем на M.

Для точки $x \in M$ через $X^t(x)$ обозначим интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку x при $t = 0$.

Определение 2. Векторное поле X на многообразии M называется векторным полем Киллинга, если однопараметрическая группа локальных преобразований (инфинитезимальные преобразования)

$$x \to X^t(x),$$

порожденная полем X, состоит из изометрий.

Определение 3. Орбита $L(x)$ семейства D векторных полей, проходящая через точку x, определяется как множество таких точек y из M, для которых существуют действительные числа $t_1, t_2, ..., t_k$ и векторные поля $X_{i_1}, X_{i_2}, ..., X_{i_k}$ из D (где k – произвольное натуральное число) такие, что

$$y = X_{i_k}^{t_k}\left(X_{i_{k-1}}^{t_{k-1}}\left(...\left(X_{i_1}^{t_1}(x)\right)...\right)\right).$$

В третьем параграфе первой главы введено понятие секционной кривизны многообразия. Данное понятие играет особою роль в проведенных исследованиях, так является одним из важнейших геометрических свойств дифференцируемых многообразий. В этом же параграфе показано, что секционная кривизна двумерных поверхностей совпадает с гауссовой кривизной

В четвертом параграфе первой главы приведены основные понятия из теории слоений и теории распределений.

С учетом того, что семейства векторных полей, в том, числе и Киллинговых образуют распределения, проведены исследования, по результатам которых мы смогли определить в каких случаях данные распределения образуют слоения, т.е. являются интегрируемыми распределениями.

Пусть $D \subset V(M)$ – семейство гладких векторных полей, заданных на многообразии M. Как отмечено выше множество $V(M)$ всех векторных полей класса C^∞ на многообразии M является алгеброй Ли относительно скобки Ли.

Теперь через $A(D)$ обозначим наименьшую подалгебру Ли алгебры $V(M)$, содержащую множество D. Рассмотрим распределение $P_D : x \to A_x(D)$, для всех $x \in M$, где $A_x(D) = \{X(x) : X \in A(D), x \in M\}$. Оно инволютивно и поэтому если размерности $\dim A_x(D)$ не зависят от x, то распределение $\mathrm{P_D} : x \to A_x$ вполне интегрируемо по теореме Фробениуса. В этом случае для каждой точки x множество $L(x)$ является интегральным подмногообразием P_D. Если размерности $\dim A_x(D)$ зависят от x, то как показывает примеры, распределение $P_D : x \to A_x(D)$ не обязано быть вполне интегрируемым. Из результатов японского математика Нагано следует, что если M и векторные

поля из D аналитичны, то распределение $P_D{:}x \to A_x(D)$ вполне интегрируемо, причем каждая орбита является интегральным подмногообразием для распределения P_D. Таким образом, в этом случае размерность орбиты $L(x)$ равна $\dim A_x(D)$ для всех $x \in M$. В общем случае, имеет место $\dim A_x(D) \le \dim L(x)$ для всех $x \in M$.

Теперь предположим, что $D \subset K(M)$, т.е. множество состоит из векторных полей Киллинга. Так как алгебра $K(M)$ конечномерна, то существуют такие векторные поля $X_1, X_2, ..., X_m$ из $A(D)$, что векторы $X_1(p), X_2(p), ..., X_m(p)$ образуют базис для подпространства $A_p(D)$ для каждого $p \in M$.

В случае, когда семейство D состоит из векторных полей Киллинга, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. Каждая орбита семейства $D = \{X_1, X_2, ..., X_m\}$ является интегральным подмногообразием вполне интегрируемого распределения $P_D : x \to A_x(D)$.

Во второй главе данной диссертации, названной «**Геометрия векторных полей Киллинга»** изучается геометрия орбит векторных полей Киллинга. В этой главе получены необходимые и достаточные условия коммутирования векторных полей Киллинга, приведена классификация орбит векторных полей Киллинга в евклидовых пространствах.

В первом параграфе второй главы изучены различные свойства и необходимые и достаточные условия коммутирующих векторных полей Киллинга в евклидовых пространствах. Доказаны следующие теоремы

Теорема 3. Два векторных поля Киллинга X, Y, одно из которых порождает "вращение", а второе "перенос" коммутируют тогда и только тогда, когда направление "переноса" поля Y параллельно подпространству N неподвижных точек поля X.

Теорема 4. Пусть X, Y – векторные поля Киллинга в R^n, порождающие "вращения", и N_1, N_2 множества неподвижных (особых) точек X, Y соответственно. Тогда векторные поля X, Y коммутируют тогда и только тогда, когда либо $\dim N_1 = \dim N_2 = 0$ и $N_1 = N_2$ либо $R^n = N_1 \oplus N_2$.

Во втором параграфе второй главы изучены свойства орбит векторных полей Киллинга.

Обозначим через $K(M)$ алгебру векторных полей Киллинга на многообразии M. Пусть $D \subset K(M)$, т.е. D множество состоит из векторных полей Киллинга. Так как алгебра $K(M)$ конечномерна, то существуют такие векторные поля $X_1, X_2, ..., X_m$ из $A(D)$, что векторы $X_1(p), X_2(p), ..., X_m(p)$ образуют базис для подпространства $A_p(D)$ для каждого $p \in M$.

Используя конечномерность алгебры $K(M)$, мы сможем изучить геометрию и топологию орбит $L(x)$ векторных полей с использованием отображения:

$$(t_1, t_2, ..., t_m) \to X_m^{t_m}\left(X_{m-1}^{t_{m-1}}\left(...\left(X_1^{t_1}(x_0)...\right)\right)\right),$$

где $(t_1, t_2, ..., t_m) \in U \subset R^m$ и U окрестность начала координат в R^m.

Нижеследующая теорема покажет, что каждая точка орбиты $L(x_0)$ достижима из точки x_0 конечным числом «переключений» в котором векторные поля $X_1, X_2, ..., X_m$ использованы в определенном порядке.

Теорема 5. Множество точек вида

$$y = X_m^{t_m}\left(X_{m-1}^{t_{m-1}}\left(...\left(X_1^{t_1}(x_0)...\right)\right)\right)$$

совпадает с орбитой $L(x_0)$, где $(t_1, t_2, ..., t_m) \subset U$.

Основным результатом параграфа является теорема о геометрической структуре орбиты семейства векторных полей Киллинга в евклидовых пространствах:

*Теорема 6***.** Пусть $M = R^n$, а семейство D состоит из векторных полей Киллинга. Тогда каждая орбита семейства D является замкнутым подмножеством.

В третьем параграфе второй главы исследована задача о классификации орбит семейства неприводимых векторных полей Киллинга.

Определение 4. Векторное поле Киллинга в евклидовом пространстве, типа «вращение» называется неприводимым относительно данной системы координат, если множество неподвижных (особых) точек этого векторного поля является $(n-2)$-мерной координатной плоскостью. Векторное поле Киллинга в евклидовом пространстве, типа «перенос» называется неприводимым, если направление переноса параллельно одной из координатных осей.

Ниже приводим теорему о геометрии орбит векторных полей Киллинга в евклидовом пространстве при предположении, что семейство $B(D)$, состоит из неприводимых вращений и переносов.

Теорема 7. Пусть в R^n задано семейство D векторных полей Киллинга, а базисное семейство состоит из m неприводимых векторных полей. Тогда орбита L_p произвольной точки $p \in R^n$ является одним из следующих подмногообразий евклидового пространства:

1. k - мерной плоскостью, где $0 \le k \le \min(m, n)$;
2. k - мерным тором $T^k = S^1 \times S^1 \times ... \times S^1$ где $1 \le k \le \min\left(m, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$;
3. k - мерной сферой S^k, где $0 \le k \le \min(m, n-1)$;

4. k- мерным торическим цилиндром $T^{k_1} \times R^{k_2}$, где $k = k_1 + k_2$ и $k_2 \le k \le \min\left(m, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$;

5. k- мерным сферическим цилиндром $S^{k_1} \times R^{k_2}$, где $k = k_1 + k_2$ и $k_2 \le k \le \min(m, n-1)$.

В третьей главе, под названием **«Геометрия множества достижимости векторных полей»** изучается структура множества достижимости векторных полей, геометрия множества орбит и геометрия слоений, порожденных замкнутыми дифференциальными 1-формами.

В работах Суссмана доказано, что каждая орбита семейства векторных полей (класса $C^r, r \ge 1$) с топологией Суссмана обладает дифференциальной структурой, по отношению которым она является гладким многообразием класса, гладко погруженным в *M*. Подмногообразие *M* называется погруженным в *M*, если каноническая инъекция $i{:}N \to M$ является дифференцируемым отображением максимального ранга.

Топология орбиты $L(x)$ (топология Суссмана) вводится как сильнейшая топология, для которой все отображения вида:

$$(t_1, t_2, ..., t_k) \to y = X_k^{t_k}\left(X_{k-1}^{t_{k-1}}\left(...\left(X_1^{t_1}(x)\right)...\right)\right),$$

являются непрерывными, где $t_1, t_2, ..., t_k$ – действительные числа, $X_1, X_2, ..., X_k$ – векторные поля из семейства D. Топология орбиты, как погруженного подмногообразия является более сильной, чем топология, индуцированная из *M*.

Например, для иррациональной обмотки тора для всех траекторий эти топологии различны.

В первом параграфе третьей главы изучены геометрические свойства множеств достижимости векторных полей. Введено понятие множества T-достижимости векторных полей.

Определение 5. Точка

$$y = X_k^{t_k}\left(X_{k-1}^{t_{k-1}}\left(...\left(X_1^{t_1}(x)\right)...\right)\right) \in L(x)$$

называется T– достижимой из точки $x \in M$, если $\sum_i t_i = T$.

Обозначим через $A_x(T)$ множество точек, которые T– достижимы из точки $x \in M$.

Используя идею работы Суссманна, где он доказал, что орбита является гладким многообразием, доказано, что

Теорема 8. Множество $A_x(T)$ для каждого $x \in M$ при любом T является погруженным подмногообразием орбиты $L(x)$ коразмерности единицы или ноль.

Еще одним существенным вкладом Г.Суссманна в изучении геометрии множества достижимости является следующая теорема, которая доказана совместно N.Levitt (*SIAM J. Control 13*, no. **6(**1975), pp. 1271-1281):

Теорема 9. Пусть M – гладкое связное многообразие размерности *n*. Существует система *D*, состоящая из двух векторных полей такая, что $L^+(x) = M$ для каждой точки $x \in M$.

Используя эту теорему мы доказали следующую

Теорема 10. Пусть M – гладкое связное многообразие размерности $n \geq 2$. Существует система *D*, состоящая из трех векторных полей такая, что $A_x(0) = M$ для каждой точки $x \in M$.

Теорема 11. Пусть M − гладкое компактное связное многообразие размерности $n \geq 2$, эйлерова характеристика которого отлична от нуля. Существует система *D*, состоящая из двух векторных полей такая, что $A_x(0) = M$ для каждой точки $x \in M$.

Для симметричных систем векторных полей получен следующий результат. Заметим, что система векторных полей D называется симметричной, если из $X \in D$ вытекает, что $-X \in D$.

Теорема 12. Пусть система D симметрична и содержит полное векторное поле. Тогда для каждого $T \in R$ и для каждой точки $x \in M$ имеет место равенство $A_x(T) = L(x)$.

Во втором параграфе этой главы исследуем геометрию множества орбит векторных полей Киллинга в евклидовых пространтсвах.

Рассмотрим множество орбит $B = R^n / D$ семейства $D-$ векторных полей Киллинга в евклидовых пространствах R^n с фактор-топологией и фактор-отображением $\pi : M \to B$, такие что $\pi(x) = L(x)$, где $L(x)$ – орбита проходящая через точку x. Из следующей теоремы видно, что орбиты являются слоями римановой субмерсии:

Теорема 13. Предположим, что $M = R^n$, множество D состоит из векторных полей Киллинга, и $\dim A_x(D) = k$ для всех $x \in M$, где $0 < k < n$. Тогда множество слоев $B = R^n / D$ оснащенное фактор топологией имеет дифференциальную структуру гладкого многообразия размерности $(n-k)$, такое что отображение $\pi : M \to B$ является гладкой римановой субмерсией.

Следствие 1. Многообразие B является многообразием неотрицательной кривизны

Формула О'Нейла позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 14. По предположению теоремы 13, орбиты семейства D являются параллельными плоскостями, тогда и только тогда, когда многообразие $B = R^n / D$ есть многообразие нулевой кривизны.

Третий параграф посвящается геометрии слоений, порожденных замкнутой дифференциальной формой. Доказана следующая теорема, которая показывает, что слоение F определенное замкнутой 1-формой на гладком связном компактном многообразии (M,g) неотрицательной постоянной кривизны является вполне геодезическим слоением с изометричными слоями.

Рассмотрим подпространство $V_x = \{X \in T_xM : \omega_x(X) = 0\}$ касательного пространства V_xM во всех точках $x \in M$. Тогда получим распределение $V : x \to V_x$ размерности $n-1$. По теореме Фробениуса данное распределение вполне интегрируемо, если $\omega \wedge d\omega = 0$; где $d\omega$ – дифференциал 1-формы ω. Замкнутые формы всегда порождают вполне интегрируемые распределения, т.к. $d\omega = 0$. В частности, точная 1-форма всегда вполне интегрируема, так как она является дифференциалом гладкой функции: $\omega = df$.

Следующая теорема показывает, что риманово слоение F, определенное замкнутой 1-формой на гладком, связном, компактном многообразии (M,g) неотрицательной постоянной кривизны является вполне геодезическим слоением с изометричными слоями.

Теорема 15. Пусть (M,g) – гладкое, связное, компактное риманово многообразие постоянной неотрицательной кривизны. Если на (M,g) задано риманово слоение F замкнутой 1-формой ω, то F является вполне геодезическим слоением с изометричными слоями.

На основе этой теоремы получены

Следствие 2. В условиях теоремы M есть многообразие постоянной нулевой кривизны.

Следствие 3. В условиях теоремы, фундаментальная группа каждого слоя слоения *F*, изоморфна подгруппе A группы $\pi_1(M)$, где $A = \{[\gamma] : \int_\gamma \omega = 0\}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена изучению геометрических и топологических свойств орбит векторных полей Киллинга. Доказано, что

минимальная подалгебра векторных полей Киллинга, содержащая данное семейство векторных полей Киллинга, порождает вполне интегрируемое распределение, интегральными подмногообразиями которого являются орбиты семейства векторных полей.

приведены и доказаны необходимые и достаточные условия коммутирования векторных полей Килллинга в евклидовых пространствах;

орбита векторных Киллинга совпадает с орбитой базисных полей минимальной алгеброй Ли, содержащей данное семейство, а в евклидовом пространстве орбита является замкнутым подмножеством;

получена полная классификация орбит для неприводимых векторных полей Киллинга в евклидовом пространстве.

множество Т-достижимости для каждой точки многообразия и любом T является погруженным подмногообразием орбиты коразмерности единицы или ноль;

на гладком связном многообразие размерности $n \geq 2$ существует система, состоящая из трех векторных полей такая, что множество нуль достижимости каждой точки совпадает со всем многообразием;

если система симметрична и содержит полное векторное поле, тогда множество T-достижимости совпадает с орбитой;

если все орбиты имеют одинаковую размерность, то множество орбит, оснащенное фактор топологией имеет дифференциальную структуру гладкого многообразия, такое что отображение «точка-орбита» является гладкой римановой субмерсией;

если все орбиты имеют одинаковую размерность, то множество орбит является многообразием неотрицательной кривизны;

если все орбиты имеют одинаковую размерность. то орбиты являются параллельными плоскостями тогда и только тогда, когда множество орбит является многообразием нулевой кривизны;

риманово слоение, определенное замкнутой 1-формой на гладком, связ-ном, компактном римановом многообразии постоянной неотрицательной кри-визны, является вполне геодезическим слоением с изометричными слоями.

Все результаты диссертационной работы являются новыми и могут быть использованы при дальнейших исследованиях по теории векторных полей, по геометрии сингулярных слоений и в других разделах современной геометрии, таких как, динамические системы, теория управления.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.27.06.2017.FM.01.01 AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN AND MATHEMATICAL INSTITUTE

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

SAITOVA SAYYORA

GEOMETRY OF KILLING VECTOR FIELDS

01.01.04- Geometry and Topology

DISSERTATION ABSTRACT OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PHD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2018

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.1.PhD/FM1

Dissertation has been prepared at National university of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the "Ziyonet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific advisor: **Narmanov Abdigappar Yakubovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Official opponents: **Raximov Abdugofur Abdumajidovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences

Kaipnazarova Guljakhon
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent

Leading organization: **Tashkent Institute of Architecture and Civil Engineering**

Defense will take place «____» _____2018 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.27.06.2017.FM.01.01 at National University of Uzbekistan, Institute of Mathematics. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «____» _____2018 year
(Mailing report № _____on «____» _____2018 year)

A. Sadullaev
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

G.I. Botirov
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees, C.F.-M.S.

R.B.Beshimov
Chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S.

INTRODUCTION (abstract of PhD Thesis)

The aim of the research work is the geometry of the Killing vector fields, in particular, the conditions for commuting Killing vector fields, the geometry and topology of the orbits of the family of Killing vector fields in Euclidean spaces, and the structure of the reachability set of vector fields.

The object of the research work is the geometry of the Killing vector fields, the geometry and topology of the orbits of the family of Killing vector fields

Scientific novelty of the research work is as following:

necessary and sufficient conditions for commuting Killing vector fields in Euclidean spaces are obtained;

the orbits of the family of irreducible Killing vector fields in Euclidean spaces have been classified;

it is proved that the orbit of the family of Killing vector fields in Euclidean spaces is a closed subset;

it is proved completely and the integrability of distributions generated by a minimal Lie algebra containing a given family of Killing vector fields;

a sufficient condition is obtained under which the set of orbits of the Killing vector fields in Euclidean spaces is a manifold of non-negative sectional curvature;

a sufficient condition is obtained for which the map "point-orbit "Is a Riemannian submersion;

it is proved that the set of T-reachability of a family of vector fields is a subvariety of an orbit of codimension one;

it is proved that the foliation defined by a closed 1-form ω on a connected compact Riemannian manifold of constant nonnegative curvature is a completely geodesic Riemannian foliation with isometric leaves.

Implementation of the research results. The results obtained in the thesis were used in the following research projects:

the obtained properties of the set of attainability of a family of vector fields were used in the studies of the project "Differential and topological aspects of the theory of control of dynamical systems" for determining the structure of the reachability set of control systems (certificate from Udmurt University Reference, March 14, 2018). The application of these results made it possible to determine the geometry and topology of the reachability set of control systems.

The developed method for investigating the geometry of the reach set of a family of vector fields was used in the project studies "Differential and topological aspects of the theory of control of dynamical systems" for calculating the trajectories of dynamical systems. (certificate from The Udmurt University, March 14, 2018) The application of this method made it possible to determine the geometric and topological properties of the reachability set of control systems.

The controllability property of the sets of reachability of the orbits of the family of Killing vector fields in Euclidean spaces was used to study the F-4-29 grant for solving the problem of stabilization of the motion along a spiral to asymptotic stability in the first approximation. (Reference from Ministry of higher and secondary education of republic of Uzbekistan April 9, 2018). The application

of these results made it possible to take the direction cosines of the reactive force and the reactive acceleration as program controls, to bring the axis of the compass to the horizontal position when not all the variables are accessible to direct measurement, the method of studying Riemannian foliations defined by a closed 1-form ω as completely geodesic foliations with isometric fibers for a smooth connected compact Riemannian manifold of constant nonnegative curvature was used for the research of the F-4-29 grant, To show the complete control systems (Reference from Ministry of higher and secondary education of republic of Uzbekistan April 9, 2018). The application of these results made it possible to stabilize the unperturbed motion by a linear regulator.

The structure and volume of the thesis. This thesis consists of an introduction, three chapters, conclusions and reference list. The total volume of the thesis is 110 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; part I)

1. Нарманов А.Я., Саитова С.С. О геометрии векторных полей Киллинга // ДАН РУз. – Ташкент, 2013. -№5. -С.3-5. (01.00.00; №7)
2. Саитова С.С. О коммутирующих векторных полей Киллинга // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2013, -№1. -С.109-117. (01.00.00; №6)
3. Нарманов А.Я., Саитова С.С. О геометрии векторных полей Киллинга // Дифференциальные уравнения. – Москва, 2014. - №12. С.1-8. (№1, Web of Science IF 0.42)
4. Нарманов А.Я., Саитова С.С. О геометрии множества достижимости векторных полей Киллинга // ДАН РУз. – Ташкент, 2016. -№1. -С.7-9. (01.00.00; №7)
5. Саитова С.С. О геометрии орбит векторных полей Киллинга // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2016, - №4. -С.49-58. (01.00.00; №6)
6. Нарманов А.Я., Саитова С.С. О геометрии множества достижимости векторных полей // Дифференциальные уравнения. – Москва 2017, - №3, том 53. -С.321-328. (№1, Web of Science IF 0.42)

II бўлим (II часть; part II)

7. Нарманов А.Я., Саитова С.С. Foliations defined by closed differential 1-form // International Journal of Geometry. 2014, vol.3, №1. p.37-43.
8. Saitova S.S. On The Classification Of The Orbits Of The Family Of Killing Vector Fields In Euclidian Space // Materials of international Conference Al-Khorezmiy-2016, Bukhara. p.23-24
9. Saitova S.S. On the geometry of the orbits of irreducible killing vector fields // International Conference of Central Asian Woman in Mathematics Association. September 22-23, 2016. Almaty, Kazakhstan. p.46-48.
10. Нарманов А.Я., Саитова С.С. Геометрия множества достижимости // ABSTRACT of the Uzbek-Israel International Scientific Conference “Contemporary problems in mathematics and physics”, October 6-10, 2017, p:101-105
11. Нарманов А.Я., Саитова С.С. Foliations defined by closed differential 1-form // Тезисы докладов «Геометрия в Одессе -2013» p.106-107.
12. Нарманов А.Я., Саитова С.С. On the geometry of set of orbits // “Problems of Modern Topology and Applications”. Tashkent. 20-24 may, 2013.

13. Нарманов А.Я., Саитова С.С. Геометрия орбит векторных полей Киллинга // Материалы Республиканской научно-практической конференции «Новые теоремы молодых математиков-2013» с.144-147

14. Нарманов А.Я., Саитова С.С. О геометрии множеств достижимости векторных полей // Материалы международной конференции «Алгебра и геометрия» Казань, Россия. 27-30 июнь 2016.

15. Нарманов А.Я., Саитова С.С. О геометрии орбит векторных полей // Тезисы докладов научной конференции с участием зарубежных ученых «Проблемы современной топологии и её приложения». 5-6 май 2016. Ташкент. С.226-231.

16. Саитова С.С. О классификации орбит семейства векторных полей Киллинга // Тезисы докладов всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», Ижевск, Россия. 9-11 июня 2015. с.199-200.

17. Саитова С.С. О коммутирующих векторных полях Киллинга на сферах. // Материалы научной конференции «Актуальные проблемы геометрии и ее приложения», НУУз, Ташкент. 27-28 октября, 2014.С. 190-191.

18. Саитова С.С. О строении орбит семейства неприводимых векторных полей Киллинга в Евклидовых пространствах // Математик физика ва замонавий анализнинг турдош масалалари республика илмий-амалий анжумани материаллари. Бухоро. 26-27 ноябрь 2015. С.122-124.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари
«ЎзМУ хабарлари» журнали таҳририятида таҳрирдан ўтказилди
(14.05.2018 йил).

Босишга рухсат этилди: 14.05.2018 йил
Ҳажми 2,5. «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 2.25. Адади: 100. Буюртма: №72.
М.Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети
босмахонасида чоп этилди