ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

И.М. ГУБКИН НОМИДАГИ РОССИЯ НЕФТЬ ВА ГАЗ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИНИНГ ТОШКЕНТ ШАҲРИДАГИ ФИЛИАЛИ

СЕДОВ СЕРГЕЙ СТАНИСЛАВОВИЧ

ИММУНИЗАЦИЯЛИ МАРКОВ ЭПИДЕМИЯ МОДЕЛИ ВА УНИНГ НОМАРКОВ АНАЛОГИНИНГ ТАДҚИҚОТИ

01.01.05 – Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика

физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2018

УУК: ________________________

Фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD)

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD)

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

И.М. ГУБКИН НОМИДАГИ РОССИЯ НЕФТЬ ВА ГАЗ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИНИНГ ТОШКЕНТ ШАҲРИДАГИ ФИЛИАЛИ

СЕДОВ СЕРГЕЙ СТАНИСЛАВОВИЧ

ИММУНИЗАЦИЯЛИ МАРКОВ ЭПИДЕМИЯ МОДЕЛИ ВА УНИНГ НОМАРКОВ АНАЛОГИНИНГ ТАДҚИҚОТИ

01.01.05 – Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика

физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2018

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.1.PhD/FM16 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Ўзбекистон Миллий университети ва И.М. Губкин номидаги Россия нефть ва газ давлат университетнинг Тошкент шаҳридаги филиалида бажарилган.

Диссертация авторефератиучтилда (ўзбек, рус ва инглиз) Илмийкенгаш веб-саҳифаси (ik-fizmat.nuu.uz) ва «Ziyonet» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Форманов Шокир Қосимович** физика-математика фанлари доктори, академик
Расмий оппонентлар:	**Хусанбаев Якубжон Мухамеджанович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Чай Зоя Сергеевна физика-математика фанлари номзоди
Етакчи ташкилот:	**Тошкент автомобил йулларини лойиҳалаш, қуриш ва эксплуатацияси институти**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети, Математика институти ҳузуридаги DSc.27.06.2017.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2018 йил «___»_________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2018 йил «____» _______________кунитарқатилди.
(2018 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.Садуллаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор, академик

Ғ.И.Ботиров
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

О.Ш.Шарипов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д.

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда Марков жараёнлари назарияси масалаларига келтирилади. Марков жараёнларининг асимптотик хоссаларини таҳлил этиш эҳтимоллар назарияси, эпидемиология, тармоқланувчи жараёнлар назарияси, каби соҳалардаги тадқиқотларнинг объектидир. Эпидемиянинг математик моделлари ичида Марков моделлари алоҳида ўрин тутади, чунки Марков жараёнининг асосий хусусияти, унда «келажак фақат ҳозирги вақтга боғлиқ бўлиб, ўтмишга боғлиқ эмас» ва бу хусусият эпидемия ривожланишини тадқиқ этишда асос сифатида хизмат қилади. Шунинг учун, эпидемия тарқалиш ўлчовини, унинг асимптотик ўзини тутишини, Колмогоров тенгламалари тузиш ва тадқиқ қилиш Марков жараёнлари, тасодифий жараёнлар назарияси, демографик жараёнлар, эҳтимолликлар назариясининг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жахонда стохастик жараёнларни тавсифлаш учун Марков жараёнларининг асимптотик хоссалари, Комогоров дифференциал тенгламаларини тузиш, мазкур тенгламаларни рекуррент ечимларини топиш замонавий эҳтимолликлар назариясининг долзарб масалаларидан бири ҳисобланади. Стохастик жараёнларни Марков занжирлари ёрдамида моделлаштириш, эпедемиянинг номарков моделини тузиш, Бартлетт-Мак-Кендрикнинг умумий эҳтимолий моделининг умумлашган вариантини ифодаловчи янги эпидемия моделини таҳлил қилиш муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада: эпидемиянинг умумий ўлчовини тадқиқ этиш, Лаплас алмаштиришларини тузиш, эпидемиянинг Марков моделига мос келувчи дифференциал тенгламаларнинг тўғри ва тескари системаларини топиш, ушбу системаларни ечиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган эҳтимолликлар назарияси ва матемтик статистиканинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, стохастик жараёнлар назарияси масалаларини ўрганишнинг асосий объекти бўлган Марков жараёнлари назариясини ривожлантиришга алоҳида эътибор қаратилди. Марков жараёнлари ёрдамида эпидемия ривожланишини асимптотик хоссаларини тадқиқ этишга оид салмоқли натижаларга эришилди. «Функционал анализ, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика» фанларининг устувор йўналишлари бўйича ҳалқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда Марков жараёнларининг асимптотик хоссаларини, эпидемия тарқалишининг Марков моделлари ва уларнинг номарков аналогларини тадқиқ этишни ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарорлар ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Диссертация Республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Юқумли касалликларни таҳлил этишга математик усулларни қўллашга уринишлар ўрта асрларданоқ амалга оширилган. Улар, асосан, касалланиш тўғрисидаги маълумотларни статистик таҳлилига олиб келинган. Ушбу даврдаги ишлардан бири таниқли физиолог ва математик Даниил Бернуллига тегишли бўлиб, унда чечак билан касалланишнинг ёш билан боғлиқ жиҳатлари, унинг умумий ўлим сонига таъсири ва бошқа жиҳатлари ўрганилган. Эпидемиянинг Марков моделлари кўплаб олимларнинг, жумладан, П.Енько, В.Кермак, А.Мак Кендрик, М.Бартлетт, Н.Болл, Т.Като, Т.Селлке, Е.Хилл, К.Диец, Н.Бейли, Дж.Гани, В.Сискинд, А.В.Нагаев, А.Н.Старцев, А.В.Калинкин ва А.В.Мастихинларнинг ишларида ёритилган.

Миқдорий эпидемиологиянинг асосчиси сифатида рус олими – медик П.Д.Енькони эътироф этиш тўғри бўлади. У математик усулларни вакцинациянинг эпидемиологик қийматини баҳолашга қўллашдан бошлаб, кейинчалик турли хилдаги юқумли касалликлар учун эпидемиологик жараён назариясини қурди ва назарий эпидемиологиянинг асосий масалаларини катта аниқлик билан ифодалаб берди. У эпидемиологик жараён ривожланишига жиддий таъсир этувчи омиллар қаторига популяциянинг иммунологик тузилишини, яъни аҳолини касалликка мойиллик даражаси бўйича тақсимоти ва мазкур эпидемиологик ҳолатда касалланиш эҳтимоллиги ёки касалликнинг инкубация даврига тенг бир давр оралиғида каслланганларни соғ инсонлар билан учрашишларининг ўртача сонини киритади.

Касалланиш динамикасини тавсифловчи Енько модели, моҳият жиҳатидан вакт бўйича дискрет бўлиб, Рид ва Фрост занжирли – биномиал моделининг асосий жиҳатларини энг аввал пайқади. Ўша вақтларда Кермак ва Мак-Кендрикнинг эпидемия динамикасини биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар системаси кўринишида ифодаловчи, вақт бўйича узлуксиз бўлган детерминистик модели жуда оммалашди. Бу системани аниқ кўринишда ечиб бўлмаслигига қарамай, ундан қатор фойдали хулосалар олинди, жумладан эпидемия ривожланишини аниқловчи модел параметрлари учун дастлабки муносабатлар топилди. Мазкур моделнинг Мак-Кендрик томонидан таклиф этилган эҳтимолий аналоги эътиборсиз қолди, ҳамда

Бартлетт Марков жараёни кўринишини берди ва қатор муҳим натижалар олди. Эпидемия ривожланишининг бу жараёни кейинчалик Бартлетт-Мак-Кендрик жараёни ёки умумий эҳтимоллик модели деб аталди.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий Университетининг Ф4-64 «Маълумотларни интеллектуал таҳлилида объектлар умумлашган баҳолари ва индивидуал ўлчовларини ҳисоблаш усулларини янгилаш ва ишлаб чиқиш» (2012-2016 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган**.**

Тадқиқотнинг мақсади Бартлетт-Мак-Кендрикнинг умумий эҳтимолий моделининг умумлашган вариантини ифодаловчи янги эпидемия моделини таҳлил қилишдан иборат**.**

Тадқиқотнинг вазифалари:

Марков жараёнлари назариясини тўлалигича чуқур эгаллаш ва уни қисман эпидемиология назариясига татбиқ этиш;

Мазкур тематика бўйича аввалги ва замонавий ишларда баён этилган натижалар ва усулларни тадқиқ этиш;

Ўрганилган моделларни умумлаштиришнинг турли усулларини аниқлаш;

Янги эпидемия моделини тўлақонли ва ҳар тарафлама таҳлил этиш учун А.В.Нагаев ва унинг шогирдлари томонидан таклиф этилган методикани ривожлантириш.

Тадқиқотнинг объекти. Эпидемиянинг математик моделлари, иммунизацияли эпидемиянинг марков модели, иммунизацияли эпидемиянинг номарков аналогидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети. Марков жараёнлари назариясини тўлалигича чуқур эгаллаш, марков жараёнларини қисман эпидемиология назариясига татбиқ этиш, ёпиқ популяцияда эпидемия ривожланишининг мумкин бўлган ҳоллари (вариантлари) аниқлашдан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида ҳосил қилиш функция учун Колмогоров тенгламаларини ечиш усуллари, асимптотик баҳолаш усуллари ҳамда аналитик усуллардан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

Ушбу ишда келтирилган эпидемия модели биринчи бўлиб қаралган;

Ўрганилаётган эпидемия модели учун Колмогоров тенгламаси биринчи бўлиб аниқланган ва унинг ечими рекуррент формада олинган;

Асимптотик таҳлил натижасида турли шароитларда эпидемия ҳолатини тўла ёритувчи бошланғич теоремалар исботланган;

Шунингдек, ўрганилаётган моделнинг умумлашган ҳоли қаралган ва эпидемия ўлчовининг асимптотик таҳлили билан боғлиқ баъзи натижалар келтирилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари илгари ўрганилган моделларни умумлаштирувчи эпидемиянинг янги моделини киритиш ва батафсил ўрганиш натажалари эпидаемия тарқалиш даврида иммунизация қилиш ёки карантин ҳолати киритиш масалаларини ечишда қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги эҳтимоллар назарияси, математик статистика усулларининг қўлланилиши, ҳамда математик мулоҳазалар ва исботларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти берилган модел учун Колмогоров тенгламаларининг аниқ ечими топилганлиги, ҳамда эптдемия ҳолатининг турли ҳоллари учун лимит теоремалар исботланганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти маълумотлар иммунизация қилиш ёки карантин ҳолати киритишнинг зарурлигини аниқлаш мақсадида реал эпидемиологик жараёнларда фойдаланиш учун хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Иммунизацияли эпидемия моделларини тадқиқ этишга оид олинган илмий натижалар қуйидаги йўналишларда амалиётга жорий қилинган:

рекуррент шаклда олинган Колмогоров тенгламасининг аниқ ечими ва ечимнинг таҳлили бўйича олинган натижалардан Ф-4-64 рақамли ***«Берилганларнинг интеллектуал таҳлилида умумлашган баҳолашларни ҳисоблаш усулларини ва объектларни индивидуал метрикаларини ишлаб чиқиш ва янгилаш»*** грант лойиҳасида тадқиқ этилаётган эпидемия модели учун Колмогоров тенгламаларининг аниқ ечимини рекуррент формада олиш ва ушбу ечимни замонавий компьютер технологиялари ёрдамида таҳлил қилишда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Фан ва технологиялар агентлигининг 2017 йил 15 декабрдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши ёпиқ популяцияда эпидемия тарқалиш жараёнини чуқур англаш ва эпидемия тарқалиш ҳолатини олдиндан башорат қилиш имконини берган;

ўрганилаётган Марков моделининг асимптотик таҳлили ёрдамида олинган натижалар Ф-4-64 рақамли грант лойиҳасида тадқиқ этилаётган Марков жараёнлари учун турли регуляр ва чегавий холатларни тавсифловчи лимит теоремаларни олишда ва ушбу теоремалардан натижаларни ҳосил қилишда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Фан ва технологиялар агентлигининг 2017 йил 15 декабрдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши учта ўтувчи эҳтимолликли Марков жараёнларини аниқроқ тушунишга ва ушбу жараённи берилган бошланғич шартларда ўзгаришини тавсифлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий натижалари 9 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 2 та халқаро ва 7 та Республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 12 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 5 та мақола, жумладан, 1 таси хорижий илмий журнал ва 4 таси республика нашриётларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, тўртта боб ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссетациянинг ҳажми 90 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Ишнинг **кириш** қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг Республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги аниқланган, диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотлар ва муаммонинг ўрганилганлик даражаси шарҳи келтирилган, тадқиқот мақсади ва вазифалари ифодаланган, тадқиқот объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилинганлиги, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «**Бартлетт-Мак-Кендрик жараёнининг умумлаштириш**» деб номланган биринчи бобида, эпидемия моделларини қуриш ва ўрганишга умумий ёндашувлар қаралади. Феллернинг интегро-дифференциал тенгламаларига таянган ҳолда Колмогоров дифференциал тенгламалари тушунчаси киритилади. Эпидемиянинг турли моделларининг таҳлилига асимптотик ёндашув асосланади. Эпидемия тарқалишининг умумий эҳтимолий модели билан боғлиқ баъзи лимит теоремалар келтирилади. Бартлетт-Мак-Кендрик жараёнининг турли умумлаштиришлари келтирилади.

Айтайлик. E ҳодиса, Ω ҳолатлар фазосида аниқланган, ҳамда $\{X(t), t \geq 0\}$ жараён билан боғланган ҳодиса бўлсин. У ҳолда ўтиш функцияси ёки *шартли эҳтимолий функцияси*

$$P\{E,t;\xi,\tau\} = P\{X(t) \in E \,|\, X(t) = \xi\}, \qquad t > \tau$$

кўринишга эга бўлади.

Шу билан бирга $X(t) \in E$ ҳодисанинг *абсолют* ёки *шартли бўлмаган* эҳтимоллигини, $P(E,0) = P\{X(0) \in E\}$ бошланғич тақсимотни эътиборга олган ҳолда қуйидагича аниқлаймиз:

$$P(E,t) = P\{X(t) \in E\} = \int_{\Omega} P(E,t;\omega,0) P(d\omega,0)$$

ва, умуман олганда,

$$P(E,t) = \int_{\Omega} P(E,t;\omega,\tau) P(d\omega,\tau).$$

Бу $P(E,t)$ шартли эҳтимоллик ўлчови, барча $t \geq \tau$ ва $s \in (\tau,t)$ лар учун ушбу

$$P(E,t;\xi,\tau) = \int_{\Omega} P(E,t;\omega,s) P(d\omega,s;\xi,\tau) \qquad (1)$$

Колмогоров-Чепмен тенгламасини қаноатлантиради.

Энди ҳолатлар тўплами дискрет бўлган умумий Марков жараёнлари учун Феллер тенгламасининг махсус формасини кўриб чиқамиз. Фараз қилайлик, $X(t)$тасодифий миқдор фақат саноқли сондаги қийматларни, яъни айнан $X=0,1,2,...$қийматларни қабул қилсин. Бу ҳолда $\{X(t),t\geq 0\}$ жараённи узлуксиз вақтли *Марков занжири* деб аталади. Бундай бутун қийматли жараёнлар учун $P(E,t;\xi,\tau)$ функция $P(j,t;i,\tau)$нуқталар функциясини ифодалайди. $P(j,t;i,\tau)$ функцияни кейинчалик $P_{ij}(t,\tau)$ орқали белгилаймиз. Худди шундай $Q(E;\xi,t)$функцияни $Q_{ij}(t)$ орқали белгилаймиз. Таъкидлаш мумкинки, бу ҳолда Лебег-Стилтьес интегралини чекли ёки чексиз йиғинди билан алмаштириш мумкин. Феллернинг интегро-дифференциал тенгламалари қуйидагича қайта ўзгартирилади:

$$\frac{\partial P_{ij}(\tau,t)}{\partial t}=-q_j(t)P_{ij}(\tau,t)+\sum_{k=0}^{n}q_k(t)Q_{kj}(t)P_{ij}(\tau,t)$$

буерда$i,j=0,1,2,...$

Хусусан, охирги тенгликдан ўтиш эҳтимолликлари учун бевосита қуйидаги дифференциал тенгламани олиш мумкин.

$$\frac{\partial P_{ij}(\tau,t)}{\partial t}=q_i(\tau)\left\{P_{ij}(\tau,t)-\sum_{k=0}^{n}Q_{ij}(t)P_{kj}(\tau,t)\right\}, \qquad (2)$$

буерда$i,j=0,1,2,...$

Юқоридаги (2) қайта ёзилган тенгламалар системаси *Колмогоров дифференциал тенгламалари* дейилади.

Биринчи бобнинг иккинчи параграфида касалланган индивидуумни ўлими ёки изоляцияси йўли билан популяциядан бартараф этилишини назарда тутувчи эпидемия тарқалиши модели қаралади.

Эҳтимолий эпидемия модели қуйидаги детерминирланган моделнинг эҳтимолий аналоги бўлади. n та индивидуумдан иборат бир жинсли популяцияни қараймиз ва t моментда $x(t)$ касалликка мойил индивидуумлар сони, $y(t)$ касалланган индивидуумлар сони, $z(t)$ эса ўлган, изоляция қилинган ёки тузалган ва иммунитетга эга индивидуумлар сони бўлсин. Равшанки, барча $t\geq 0$ лар учун $x(t)+y(t)+z(t)=n$. Эпидемиянинг тарқалиш механизми эҳтимолий ҳолда ҳам, детирминирланган ҳолда ҳам битта бўлгани учун детерминирланган эпидемияни характерловчи дифференциал тенгламалар системаси

$$\frac{dx(t)}{dt}=-\lambda xy,\quad \frac{dy(t)}{dt}=\lambda xy-\mu y,\qquad \frac{dz(t)}{dt}\mu y.$$

кўринишга эга бўлади.

Бу тенгламалар детерминирланган эпидамия моделини таклиф этган ва хоссаларини ўрганган У. О. Кермак ва А. Г. Мак-Кендрик шарафига *Кермак – Мак-Кендрик* тенгламалари даб аталади. Хусусан, Кермак ва Мак-Кендрик бу тенгламаларнинг тақрибий ечимини олишди, шу билан бирга эпидемиянинг умумий ўлчови (яъни, чексиз вақт оралиғида бартараф этилиш умумий сони) ва бартараф этилиш интенсивлигини касалланиш интенсивлигига нисбати орасидаги муносабатни топишди. Бу муносабат қуйидаги теоремада ифодаланади.

1-теорема. (Кермак – Мак-Кендрикнинг бошланғич теоремаси) Айтайлик $x(0) = x_0$ ва $y(0) = y_0$ эпидемия бошида популяциядаги мос равишда касалликка мойиллар ва касалланганлар сони бўлсин. У ҳолда

$$\lim_{y_0 \to 0} z(\infty) = \begin{cases} \dfrac{2\rho}{x_0}(x_0 - \rho), \text{для } x_0 > \rho, \\ 0 \qquad\qquad \text{для } x_0 \le \rho. \end{cases}$$

Агарда $x_0 > \rho$ бўлса, яъни $x_0 = \rho + \varepsilon$ десак, эпидемиянинг умумий ўлчови тахминан 2ε га тенг.

Қаралаётган системанинг аниқ ечими Кендалл томонидан олинган ва бошланғич теорема аналоги ўрнатилган. Шу жумладан ушбу

$$\frac{\rho}{x_0} = -\frac{\overline{v_{x_0}}}{x_0 \ln\left(1 - \dfrac{\overline{v_{x_0}}}{x_0}\right)}$$

боғланиш топилган.

Бу муносабат эпидемия ўлчови $\overline{v_{x_0}}$ маълум бўлганда $\frac{\rho}{x_0}$ ни топиш имконини беради ва аксинча.

Шундай қилиб, келтирилган натижалар кўрсатадики, $\frac{\rho}{x_0}$ пареметр эпидемия ривожланишини характерловчи параметр бўлади.

Энди Кермак – Мак-Кендрик бошланғич теоремасининг эҳтимолий аналогини келтирамиз. П.Уиттл томонидан олинган натижани келтиришдан олдин, n та касалликка мойиллардан j тасини касаланиш эҳтимоллигини π_i орқали аниқлаймиз. У ҳолда, равшанки,

$$\pi_j = \sum_{u=0}^{nj} Q(u),$$

бу ерда $Q(u)$ эҳтимолликлар

$$\sum_{u=0}^{k} C_{n-k}^{n-u} \left(\frac{n-k+\rho}{\rho}\right)^u Q(u) = C_n^k \left(\frac{n-k+\rho}{\rho}\right)^j, 0 \le k \le n.$$

тенгламалар системаси орқали берилади. Шундай экан, π_j эҳтимоллик эпидемиянинг тарқалиб кетмаслик эҳтимоллиги бўлади.

2-теорема. Фараз қилайлик t=0 моментда i та касалланган индивидуум киритилган ўлчови n бўлган популяция учун ρ бартараф этишнинг нисбий интенсивлиги бўлсин. У ҳолда эпидемиянинг тарқалиб кетмаслик эҳтимоллиги учун қуйидаги муносабатлар ўринли:

$$(a) \quad \left(\frac{p}{n}\right)^i \le \pi_j \le \left[\frac{p}{n(1-j)}\right]^i \quad \textit{учун} \quad p < n(1-j),$$

(b) $\left(\frac{p}{n}\right)^i \le \pi_j \le 1 \quad учун \quad n(1-j) \le p < n,$

(c) $\pi_j = 1 \quad учун \quad p \ge n.$

Ушбу натижаларни қуйидагича талқин этиш мумкин. Агар $s=0$ бўлса эпидемиянинг ихтиёрий берилган i сонидан ошиб кетиш эҳтимоллиги нолга тенг; шу билан бирга, агар $\rho < n$ бўлса, кичик iлар учун эпедимия ривожланиш эҳтимоллиги тахминан $1-\left(\frac{p}{n}\right)^i$ га тенг.

Диссертациянинг биринчи боб учинчи параграфида Бартлетт-Мак Кендрик жараёнининг умумлашган ҳоли кўрилган. Эпидемия ривожланишининг қуйидаги модели қаралади. Айтайлик, бирор популяцияда бошланғич вақт моментида n та касалликка мойил ва m та касалланган индивидлар мавжуд. Эпидемиянинг вақт бўйича тарқалиши узлуксиз вақтли ва ҳолатлари (r,s) кўринишда бўлган Марков жараёни орқали ифодаланади, бу ерда r касалликка мойиллар сони, s касалланганлар сони. Вақтнинг чексиз кичик $d\tau$ оралиғида (r,s) ҳолатдан $(r-1,s+1)$ ҳолатга ўтиш $\lambda rsd\tau+o(d\tau)$ эҳтимоллик билан, (r,s) ҳолатдан $(r,s-1)$ ҳолатга ўтиш $\mu sd\tau+o(d\tau)$ эҳтимоллик билан ва (r,s) ҳолатдан $(r-1,s)$ ҳолатга ўтиш $\theta sd\tau+o(d\tau)$ эҳтимоллик билан рўй берсин деб фараз қиламиз.

Аниқки, биринчи ҳолдаги ўтиш, касалликка мойиллар ичидан биттасининг касалланишини, иккинчи ҳолдаги ўтиш эса, битта касалланган индивидни бартараф этиш (ўлим, иммунитетли соғайиш, изоляция) ва ниҳоят учинчи ҳолдаги ўтиш, касалликка мойил битта индивидни иммунизация қилинишини ифодалайди. λ,μ ва θ параметрларни мос равишда касалланиш, бартараф этиш ва иммунизация коэффициентлари деб атаймиз.

Равшанки, $s=0$да эпидемия тугайди, яъни $(r,0)$, $(0\le r\le n)$ ҳолат ютувчи ҳолат бўлади. Фараз қилайлик, ν_0 эпидемия тугаш моментида дастлабки касалликка мойиллар ичидан касалланиб соғайганлар сони, ν_1 эса эпидемия тугаш моментида иммунитет олганлар сони бўлсин. Ушбу $\nu_0+\nu_1=\nu$ йиғиндини эпидемиянинг умумлашган ўлчови деймиз.

Эпидемия ривожланиши қуйидаги ўтиш эҳтимолликларига эга бўлган, вақт бўйича бир жинсли Марков жараёни орқали ифодаланади:

$$\begin{cases} P(\xi(t+\Delta t)=(r-1,s+1)/\xi(t)=(r,s))=\lambda rs\Delta t+o(\Delta t), \\ P\big(\xi(t+\Delta t)=(r,s-1)/\big(\xi(t)\big)=(r,s)\big)=\mu s\Delta t+o(\Delta t), \\ P\big(\xi(t+\Delta t)=(r-1,s)/\big(\xi(t)\big)=(r,s)\big)=\theta s\Delta t+o(\Delta t), \end{cases}$$

бу ерда биринчи ўтиш ҳолати касалликка мойиллар ичидан биттасининг касалланиши, иккинчиси эса, бартараф этилиши (ўлим, соғайиш, изоляция) ва учинчи ҳолдаги ўтиш, касалликка мойил битта индивидни иммунизация қилиниши сифатида талқин этилади. Маълумки, $(k,0)$ кўринишдаги ҳолатлар кўрилаётган жараён учун ютувчи ҳолатлар бўлади. Жарённи $(n-\nu,0)$ ҳолатда ютилишини (тугашини) ўлчови ν га тенг бўлган эпидемиянинг тугаши деб талқин этамиз, яъни ν миқдор эпидемия тугаш моментидаги касалланганлар ва иммунизация қилинганлар сонини (эпидемиянинг умумлашган ўлчовини) билдиради.

Айтайлик, $\rho_1 = \mu/\lambda$ ва $\rho_2 = \theta/\lambda$, яъни ρ_1 ва ρ_2 мос равишда бартараф этиш ва иммунизация коэффициентлари бўлсин. Шу билан бирга $\theta_1 = \rho_1/n, \theta_2 = \rho_2/n$ моделни бошқарувчи параметрлар бўлсин. Лимит теоремалар n чексизликка интилиши шартларида олинади.

Шу билан бирга «сериялар схемаси» қаралади, яъни μ, λ ва θ параметрлар n билан бирга ўзгаради деб тахмин қилинади, демак бу параметрлар популяциянинг бошланғич ҳолатига боғлиқ бўлади. Табиийки, бу ҳолда ν миқдор ҳам n га боғлиқ бўлади, яъни $\nu = \nu(n)$.

3-теорема. Айтайлик $m \to \infty, n \to \infty$ ва шу билан бирга

$$m^3 = O(n), \quad \theta_2 \to \beta_1, \quad 0 \le \beta_1 \le \infty, \quad \theta_1 \to 1, \quad \frac{(1-\theta_1)m}{1+\theta_1} \to \beta_0, \quad |\beta_0| < \infty$$

бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $x > 0$ учун

$$P\{\nu \ge m^2 x\} \sim P\left\{w(t) < \frac{1}{\alpha_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \beta_0\sqrt{x}t - \frac{m^3 x^{\frac{3}{2}}}{2n(1+\beta_1)}t^2\right], 0 \le t \le 1\right\},$$

бу ерда $\alpha_0 = \sqrt{2 + \frac{\beta_1}{(1+\beta_1)^2}}$, $w(t)$ – стандарт Винер жараёни.

Диссертациясининг **«Эпидемиянинг дастлабки модели учун Колмогоров тенгламаларининг аниқ ечими»**деб аталган иккинчи бобида Колмогоров дифференциал тенгламаларининг тўғри системани топиш ва уни ечиш билан боғлиқ ёндашувга асосланган эпидемия моделининг таҳлили келтирилади. Бу тенгламалар системаси келгусида қулайлик учун шунчаки Колмогоров тенгламалари деб юритилади.

Узлуксиз вақтли ва ҳолатлар тўплами дискрет бўлган Марков занжирини қараймиз. Фараз қилайлик, берилган $t \ge 0$ вақтда популяция холати $\xi(t) = (R(t), S(t))$ бўлсин, бу ерда $R(t)$ – t вақтдаги касалликка мойиллар сони, $S(t)$ эса t вақтдаги касаллик манбалари сони, шу билан бирга $\xi(t) = (n, a)$. Эпидемия тарқалишининг Марков моделини вақтнинг чексиз кичик оралиғи Δt учун қуйидаги ўтиш эҳтимолликлари ёрдамида келтирамиз, яъни:

$$\begin{cases} P\big(\xi(t+\Delta t) = (r-1, s+1) / \xi(t) = (r,s)\big) = \lambda\varphi_1(r)\psi(s)\Delta t + o(\Delta t), \\ P\big(\xi(t+\Delta t) = (r, s-1) / \xi(t) = (r,s)\big) = \mu\psi(s)\Delta t + o(\Delta t), \\ P\big(\xi(t+\Delta t) = (r-1, s) / \xi(t) = (r,s)\big) = \theta\varphi_2(r)\psi(s)\Delta t + o(\Delta t), \end{cases}$$

бу ерда, биринчи ва иккинчи ўтиш ҳолатлари мос равишда касалликка мойилларнинг касалланиши ва касалланганларни бартараф этиш жараёнларини ифодалайди, учинчи ўтиш эса касалликка мойилларни иммунизациялаш жараёнидир.

Ушбу $P_{r,s}(t)=P\left(\xi(t)=(r,s)/\xi(0)=(n,a)\right)$ ўтиш эҳтимолликлари учун системага мос келувчи Колмогоров тенгламалар системаси

$$\frac{dP_{r,s}}{dt}=(r+1)(s-1)P_{r+1,s-1}(t)+p_1(s+1)P_{r,s+1}(t)+p_2sP_{r+1,s}(t)-s(r+p_1+p_2)P_{r,s}(t)$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда $0\le r\le n,\ 0\le s\le n-r+a$.

$\Pi_t(z,w)$ дан вақт бўйича ҳосила одиб ва системадан фойдаланиб, баъзи алмаштиришлардан сўнг қуйидагини оламиз:

$$\frac{\partial\Pi_t}{\partial t}=\left(w^2-zw\right)\frac{\partial^2\Pi_t}{\partial w\partial z}+\left[p_1(1-w)+p_2\left(1-\frac{1}{z}\right)\right]\frac{\partial\Pi_t}{\partial w}.$$

Ҳосил қилиш функциясини

$$\Pi_t(z,w)=\sum_{r=0}^{n}z^r\sum_{s=0}^{n+a-r}P_{r,s}(t)w^s=\sum_{r=0}^{n}z^r f_r(w,t)$$

кўринишда ифодалаб, юқоридаги тенгликка қўйсак,

$$\sum_{r=0}^{n}z^r\frac{\partial f_r}{\partial t}=w(w-z)\sum_{r=0}^{n}rz^{r-1}\frac{\partial f_r}{\partial w}+\left[p_1(1-w)+p_2\left(1-\frac{1}{z}\right)\right]\sum_{r=0}^{n}z^r\frac{\partial f_r}{\partial w}$$

муносабатга эга бўламиз.

1–лемма. Сўнгги тенглама қуйидаги тенгламалар системасига мос келади:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_r}{\partial t}=w(wr+p_2)\dfrac{\partial f_r}{\partial t}+\left[p_1-(p_1+p_2+r)w\right]\dfrac{\partial f_r}{\partial w},\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial t}=-\left[(p_1+p_2+n)w-p_1\right]\dfrac{\partial f_n}{\partial w}.\end{cases}$$

Мазкур система $r=0,1,...,n-1$учун $f_n(w,0)=w^a$ ва $f_r(w,0)=0$ бошланғич шартларни қаноатлантиради. Лаплас алмаштириши

$$F_r(w,s)=\int_0^\infty e^{-st}f_r(w,t)dt,\qquad \mathrm{Re}(s)>0$$

учун тенгламалар системаси

$$\begin{cases}sF_r(w,s)=w\left(w(r+1)r+p_2\right)\dfrac{\partial F_{r+1}}{\partial w}+\left[p_1-(p_1+p_2+r)w\right]\dfrac{\partial F_r}{\partial w},r=\overline{0,n-1},\\ sF_n(w,s)=\left[p_1-(p_1+p_2+r)w\right]\dfrac{\partial F_r}{\partial w}+w^a\end{cases}$$

кўринишга келтирилади.

Берилган системанинг қуйидаги ечимига эга бўламиз:

$$F_r(w,s)=\sum_{k=0}^{a+n-r}\frac{1}{k!}(w-\theta_r)^k(kk_r+s)^{-1}\left\{k(k-1)(r+1)F_{r+1}^{k-1}(\theta_r;s)+\right.$$

$$+k\left(2\left(r+1\right)\theta_2+p_2\right)F_{r+1}^{(k)}\left(\theta_r;s\right)+\left(\theta_r^2\left(r+1\right)+p_2\theta_2\right)F_{r+1}^{(k)}\Big\},$$

бу ерда

$$F_{r+1}^{k-1}\left(\theta_r;s\right)=\left(kk_r+s\right)^{-1}\Big\{k\left(k-1\right)\left(r+1\right)F_{r+1}^{k-1}\left(\theta_r;s\right)+k\left(2\left(r+1\right)\theta_2+p_2\right)F_{r+1}^{(k)}\left(\theta_r;s\right)+$$
$$+\left(\theta_r^2\left(r+1\right)+p_2\theta\ \right)F_{r+1}^{(k+1)}\left(\theta_r;s\right)\Big\}.$$

Диссертациянинг «**Дастлабки моделдаги эпидемиянинг умумлашган ўлчови учун лимит теоремалар»** деб номланган учинчи бобида, эпидемия ривожланишининг қуйидаги

$$\begin{cases} P\left(\xi\left(t+\Delta t\right)=\left(r-1,s+1\right)/\xi\left(t\right)=\left(r,s\right)\right)=rs\Delta t+o\left(\Delta t\right),\\ P\left(\xi\left(t+\Delta t\right)=\left(r,s-1\right)/\xi\left(t\right)=\left(r,s\right)\right)=p_1s\Delta t+o\left(\Delta t\right),\\ P\left(\xi\left(t+\Delta t\right)=\left(r-1,s\right)/\xi\left(t\right)=\left(r,s\right)\right)=p_2s\Delta t+o\left(\Delta t\right)\end{cases}$$

Марков модели қаралган, бу ерда $p_1=\mu/\lambda$ ва $p_2=\theta/\lambda$ мос равишда бартараф этиш ва иммунизациялашнинг нисбий коэффициентлари.

Келгусида шу нарса ойдинлашадики, жараённинг ўзини тутишини турли синфларга ажратишда $\theta_1=p_1/n$ ва $\theta_2=p_2/n$ параметрлар муҳим ўрин тутади.

Таърифдан кўриш мумкинки, $\left(k,0\right),\,0\le k\le n$ кўринишдаги ҳолатлар $\xi\left(t\right)$ жараён учун ютувчи (тўхтатувчи) ҳолатлар бўлади.

Эпидемиянинг умумий ўлчови $v=v_1+v_2$ тадқиқотларнинг объекти бўлади, бу ерда v_1 ва v_2 мос равишда эпидемия тугаш вақтидаги касалликдан соғайганлар ва иммунизацияланган касалликка мойиллар сони.

Ушбу ишда келгусида барча жойда $m\to\infty$, $n\to\infty$, $m=o\left(n\right)$ ҳамда $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_2=\theta_{20}$, $0<\theta_{20}<\infty$ деб фараз қиламиз. Шу билан бирга θ_1 параметрга нисбатан қуйидаги ҳоллар кўриб чиқилади (умумий эҳтимоллик моделининг кўп жиҳатдан аналоглари [10]):

1) 1-типдаги ўтиш ҳоли: $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_1=\theta_{10}=1$;
2) Регуляр ҳоли: $\theta_{10}>1$ ва $\theta_1=o\left(m\right)$ ёки $0<\theta_{10}<1$ ва $-\infty\le g_0<0$, бу ерда
$$g_0=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{m}{n}+1-\left(\theta_1+\theta_2\right)\ln\left(1+\frac{1}{\theta_2}\right)\right);$$
3) 2-типдаги ўтиш ҳоли: $0<\theta_{10}<1$ ва $0\le g_0<\infty$;
4) 3-типдаги ўтиш ҳоли: $\theta_1\to\infty$, $m/\theta_1\to\lambda_0$, $0\le\lambda_0<\infty$.

Натижаларни келтиришни биринчи типдаги ўтиш ҳолидан бошлаймиз. Ушбу $\Rightarrow$ белги ҳамма жойда кучсиз яқинлашишни билдиради.

4-теорема. Агар $\theta_1\to1$, $\beta\equiv m\left(1-\theta_1\right)\to\beta_0$, $\dfrac{m^2}{n}\to\gamma_0<\infty$, $\left|\beta_0\right|<\infty$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий фиксирланган $x>0$ учун

$$P\left(v>\frac{(1+\theta_2)m^2}{2}x\right)\Rightarrow P\left(w(t)<\frac{1}{\sqrt{x}}+\beta_0\sqrt{\frac{x}{2}}t-\frac{(1+\theta_{20})\gamma_0 x^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{2}}t^2,\ 0\le t\le 1\right),$$

бу ерда $w(t)$– стандарт Винер жараёни.

1-натижа. Агар $\gamma_0=0$ бўлса, у ҳолда 1-теорема шартлари бажарилганда

$$P\left(v>\frac{(1+\theta_2)m^2}{2}x\right)\Rightarrow 1-e^{\frac{-(\beta_0+|\beta_0|)}{\sqrt{2}(1+\theta_{20})}}\cdot\int_0^{\beta_o^2 x/4(1+\theta_{20})}p(u)du\,,$$

бу ерда $p(u)=\dfrac{|\beta_0|e^{\frac{|\beta_0|}{\sqrt{2}(1+\theta_{20})}}}{2\sqrt{2(1+\theta_{20})}}u^{-3/2}e^{-u-\beta_0^2/8u(1+\theta_{20})}$.

2-натижа. Агар $\beta_0=0\,,\gamma_0=0$ бўлса, у ҳолда 1-теорема шартлари бажарилганда

$$P\left(v>(1+\theta_2)m^2x/2\right)\Rightarrow\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du.$$

5-теорема. Агар $\theta_1\to 1$ шундай интилсаки, $|\beta|\to\infty$, $\dfrac{m^3}{n\beta^2}\to\infty$ бўлса, у ҳолда

$$P(v>a_n-b_nx)\Rightarrow\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du\,,$$

бу ерда $a_n=\sqrt{2mn}$, $b_n=\sqrt[4]{\dfrac{2m^3}{n}(1+\theta_{20})^2}$.

6-теорема. Агар $\theta_1\to 1$ шундай интилсаки, $|\beta|\to\infty$, $\dfrac{m^3}{n}=o(\beta^2)$ бўлса, у ҳолда

$$P(v>a_n-b_nx)\Rightarrow\Phi(x),$$

бу ерда

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{2m^2(1+\theta_2)^2}{(\theta_1+\theta_2)\delta_1|\beta|},\ \beta<0;\\ \dfrac{n\beta\delta_1}{m(\theta_1+\theta_2)},\quad\beta>0,\end{cases}$$

$$b_n=\begin{cases}\dfrac{n}{m}\sqrt{|\beta|\delta_1}\bigg/\left(1+\dfrac{n\beta^2\delta_1}{2m^3(1+\theta_{20})}\right),\ \beta<0;\\ \sqrt{\dfrac{2mn(1+\theta_{20})^2}{\beta\delta_1}}\bigg/\left(1-\dfrac{1+\theta_{20}}{\delta_1}\right),\ \beta>0,\end{cases}$$

$$a\delta_1 = 1+\sqrt{1+\frac{2m^3\left(1+\theta_{20}\right)^2}{n\beta^2}}\,.$$

Энди регуляр ҳолни ифодалашга ўтамиз.

7-теорема. *Агар* $\theta_{10}>1$ *ва* $\theta_1=o(m)$ *ёки* $0<\theta_{10}<1$ *ва* $-\infty\le g_0<0$ *бўлса, у ҳолда*

$$P\left(v>a_n-b_nx\right)\Rightarrow\Phi(x),$$

бу ерда

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{m\left(1+\theta_2\right)^2}{\left(\theta_1-1\right)}, \theta_{10}>1;\\ \qquad n a_n, \quad \theta_{10}<1,\end{cases}$$

$$b_n=\begin{cases}\dfrac{\left(1+\theta_{20}\right)\sqrt{m\left(\theta_{10}+\left(\theta_{10}^2+\theta_{20}\right)\left(1+\theta_{20}\right)\right)}}{\left(\theta_{10}-1\right)^{3/2}},\ \theta_{10}>1,\\ \dfrac{\sqrt{na_0\left[1+\theta_{10}^2/\left(1+\theta_{20}\right)\left(1+\theta_{20}-a_0\right)\right]}\left(1+\theta_{20}-a_0\right)}{a_0-\left(1-\theta_{10}\right)}, \theta_{10}<1,\end{cases}$$

ҳамда a_n *ва* a_0 *мос равишда* $\dfrac{m}{n}+x+\left(\theta_1+\theta_2\right)\ln\left(1-\dfrac{x}{1+\theta_2}\right)=0$ *ва* $a\,x+\left(\theta_{10}+\theta_{20}\right)\ln\left(1-\dfrac{x}{1+\theta_{20}}\right)=0$ *тенгламаларнинг ечимлари.*

8-теорема. *Агар* $0<\theta_{10}<1$ *ва* $0\le g_0\le+\infty$ *бўлса, у ҳолда*

$$P(v=n)\rightarrow\Phi\left(g_0/c_2\right),$$

бу ерда

$$c_2^2=\frac{\theta_{10}^2}{\left(1+\theta_{20}\right)\theta_{20}}+\left(\theta_{10}+\theta_{20}\right)\ln\left(1+\frac{1}{\theta_{20}}\right).$$

Қуйида келтириладиган натижа учинчи типдаги ўтиш ҳолига тегишли.

9-теорема. *Агар* $\theta_1\to\infty$, $\dfrac{m}{\theta_1}\to\lambda_0$, $0<\lambda_0<\infty$, *у ҳолда*

$$P(v=k)\rightarrow\frac{\lambda_0^k}{k!}e^{-\lambda_0},\ k=0,1,2,\ldots$$

Диссертациянинг «**Даунтон модели ва унинг аниқ ечими**» деб номланган тўртинчи боби Даунтоннинг номарков эпидемия модели учун Колмогоров тенгламасининг аниқ ечимини топишга бағишланган.

Фараз қилайлик $P_t(z,w)P\left(\xi(t)=(r,s)/\xi(0)=(n,a)\right)$–Марков модели учун ўтиш эҳтимоллиги ва

$$\Pi_t(z,w)=\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{n+a-r}P_t(r,s)z^rw^s,\ \left(|z|\le1,|w|\le1\right)\ -$$

аввалгидек, ўтиш эҳтимолликларининг ҳосил қилиш функцияси бўлсин.

3-лемма. $\Pi_t(z,w)$*ҳосил қилиш функцияси* $\Pi_0(z,w)=z^n w^a$ *бошланғич шартни қаноатлантирувчи*

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial t}=\left(\lambda+\theta-(\lambda+\theta)z\right)\omega\frac{\partial^2 \Pi_t}{\partial z \partial \omega}+\mu(1-\omega)\frac{\partial \Pi_t}{\partial \omega}$$

хусусий ҳосилали дифференциал тенгламани қаноатлантиради.

Асосий теорема. С*истема ечими ихтиёрий* $0\le r\le n-1$ *да*

$$F_r(w,\alpha)=\sum_{k=0}^{n+a-r}\left(w-\theta_r\right)^k F_r^k\left(\theta_r,a\right)/k!$$

кўринишга эга бўлади,бу ерда

$$F_r^{(k)}\left(\theta_r,a\right)=\frac{r+1}{kK_r+\alpha}\Big(\lambda k(k-1)F_r^{(k-1)}\left(\theta_r,a\right)+k\left(2\lambda\theta_r+\theta\right)F_{r+1}^{(k)}\left(\theta_r,a\right)+$$

$$+\left(\lambda\theta_r+\theta\right)\theta_r F_{r+1}^{(k+1)}\left(\theta_r,a\right)\Big),$$

$F_r^{(j)}\left(\theta_r,a\right)$ *миқдорлар эса* $r=n-1,n-2,...$ *рекуррент муносабат орқали топилади.*

ХУЛОСА

Ушбу диссертация иши иммунизацияли эпидемиянинг бир Марков моделини ва унинг номарков аналогини тадқиқ этишга бағишланган. Диссертацияда келтирилган натижалар бўйича хулоса қилиш мумкинки, унда:

1. Ушбу ишда келтирилган эпидемия модели биринчи бўлиб қаралган;
2. Ўрганилаётган эпидемия модели учун Колмогоров тенгламаси биринчи бўлиб аниқланган ва унинг ечими рекуррент формада олинган;
3. Асимптотик таҳлил натижасида турли шароитларда эпидемия ҳолатини тўла ёритувчи бошланғич теоремалар олинган;
4. Шунингдек, ўрганилаётган моделнинг умумлашган ҳоли қаралган ва эпидемия ўлчовининг асимптотик таҳлили билан боғлиқ баъзи натижалар келтирилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.27.06.2017.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА, ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА

ФИЛИАЛ РОССИЙСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА (НИУ) НЕФТИ И ГАЗА ИМ. И.М.ГУБКИНА В ГОРОДЕ ТАШКЕНТЕ

СЕДОВ СЕРГЕЙ СТАНИСЛАВОВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ МАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ ЭПИДЕМИИ С ИММУНИЗАЦИЕЙ И ЕЕ НЕМАРКОВСКОГО АНАЛОГА

01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) физико-математических наук

ТАШКЕНТ – 2018

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.1.PhD/FM16

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана и в Филиале Российского государственного университета нефти и газа им. И.М.Губкина в городе Ташкенте.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Фармонов Шакир Касимович** доктор физико-математических наук, академик
Официальные оппоненты:	**Хусанбаев Якубжон Мухамеджанович** доктор физико-математических наук, профессор
	Чай Зоя Сергеевна кандидат физико-математических наук
Ведущая организация:	**Ташкентский институт по проектированию, строительству и эксплуатации автомобильных дорог**

Защита диссертации состоится «____» _____________2018 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.27.06.2017.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана, института Математики. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2018 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2018 года).

А.Садуллаев
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор, академик

Г.И.Ботиров
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н.

О.Ш.Шарипов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Научно-практические исследования, проводимые в мировом масштабе, в большинстве случаев приводятся к задачам теории марковских процессов. Анализ асимптотических свойств марковских процессов является объектом исследования в таких областях как теория вероятностей, эпидимиология, теория ветвящихся процессов. В математических моделях эпидемии особое место занимают марковские модели, так как свойство марковости заключается в том, что «будущее зависит от настоящего и не зависит от прошлого» и это свойство служит основанием для исследования развития эпидемии. Поэтому мера распространения эпидемии, ее асимптотическое поведение, составление уравнений Колмогорова и их исследование являются важными задачами теории марковских процессов, случайных процессов, демографических процессов, теории вероятностей.

В настоящее время в мире асимптотические свойства марковских процессов, составление дифференциальных уравнений Колмогорова, нахождение рекуррентных решений данных уравнений для описания стохастических процессов является одной из актуальных задач теории вероятностей. Моделирование стохастических процессов с помощью марковских цепей, создание немарковской модели эпидемии, анализ новой модели эпидемии, выражающей обобщенный вариант общей вероятностной модели Бартлетта—Мак-Кендрика являются важными задачами. В этом направлении: исследование общей меры эпидемии, составление преобразований Лапласа, нахождение правильных и обратных систем дифференциальных уравнений, соответствующих марковской модели эпидемии, решение этих систем являются целевыми научными исследованиями.

В нашей стране усилено внимание фундаментальным наукам, имеющим прикладное применение, которые являются актуальными направлениями теории вероятностей и математической статистики, в частности, различным приложениям марковских процессов. В частности, уделено особое внимание развитию теории марковских процессов, являющейся основным объектом задач теории стохастических процессов. Получены весомые результаты в исследовании асимптотических свойств развития эпидемий с помощью марковских процессов. Было постановлено, что проведение научных исследований по приоритетным направлениям математики «Функциональный анализ, теория вероятностей и математическая статистика» на уровне международных стандартов является основной задачей и направлением деятельности[1]. Развитие асимптотического анализа марковских моделей играет важную роль в исполнении постановления.

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений академии наук Республики Узбекистан» от 18 мая 2017 года.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, поставленных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и № УП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Попытки применения математических методов к анализу инфекционных болезней были предприняты еще в средние века. Они в основном сводились к статистическому анализу данных заболеваемости. Одна из работ этого периода принадлежит известному физиологу и математику Даниилу Бернулли, в которой он исследовал повозрастное движение заболеваемости оспой, её влияние на общую смертность и другие аспекты. Марковская модель эпидемии рассмотрены в работах многих учёных, в том числе, в работах П.Енько, В.Кермака, А.Мак-Кендрика, М.Бартлетта, Н.Болла, Т.Като, Т.Селлке, Е.Хилла, К.Диеца, Н.Бейли, Дж.Гани, В.Сискинда, А.В.Нагаева, А.Н.Старцева, А.В.Калинкина и А.В.Мастихина.

Основоположником количественной эпидемиологии должен по справедливости считаться русский ученый – медик П. Д. Енько. Начав с применения математических методов к оценке эпидемиологического значения вакцинации, он в дальнейшем построил теорию эпидемиологического процесса при инфекциях разного типа и с большой четкостью формулирует основные задачи теоретической эпидемиологии. К числу факторов, существенно влияющих на ход эпидемиологического процесса, он относит иммунологическую структуру популяции.

Модель Енько, описывающая динамику заболеваемости, являясь по существу дискретной во времени предвосхитила основные моменты цепочечно-биномиальной модели Рида и Фроста. Эта модель широко использовалась в те годы и в дальнейшем была существенно обобщена. В те же годы большую популярность приобрела непрерывная во времени детерминистская модель Кермака и Мак-Кендрика, описывающая динамику эпидемии в форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Несмотря на то, что эта система была неразрешима в явном виде, из нее был получен ряд полезных выводов и, в частности, было найдено пороговое соотношение параметров модели, определяющего развитие эпидемии. Вероятностный аналог этой модели предложенный ранее Мак-Кендриком, оставался незамеченным, но известный математик Барлетт придал ей форму марковского процесса и получил при этом ряд существенных результатов. Этот процесс развития эпидемии был в дальнейшим назван процессом Бартлетта—Мак-Кендрика или общей вероятностной моделью.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждением высшего образования, где выполнялась диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследования Ф-4-64 «Разработка и обновление методов вычисления обобщенных оценок и индивидуальных метрик объектов в интеллектуальном анализе данных», Национальный университет Узбекистана (2012-2016 гг.).

Целью исследования данной работы является анализ новой модели эпидемии, представляющей собой обобщение общей вероятностной модели Бартлетта-Мак Кендрика.

Задачи исследования:

Освоить возможность применения общей теории марковских процессов в теории эпидемиологии;

Изучить результаты аналитического метода производящих функций, описанные в ранних и современных работах по данной тематике;

Определить различные способы обобщения изученных моделей;

Развить методику, предложенную А.В.Нагаевым и его учениками для полного и всестороннего анализа новой модели эпидемии.

Объект исследования. Математические модели эпидемии, марковская модель эпидемии с иммунизацией, немарковский аналог модели эпидемии с иммунизацией.

Предмет исследования. Полное освоение теории марковских процессов, частичное приложение марковских процессов к теории эпидимиологии, возможные варианты развития эпидемии в замкнутой популяции.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы решения уравнений Колмогорова для производящих функций, методы асимптотического оценивания, а также аналитические методы в граничных задачах.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

Впервые рассмотрена модель эпидемии, приводимая в данной работе;

Впервые было определено уравнение Колмогорова для исследуемой модели эпидемии и получено его решение в рекуррентной форме;

Методами асимптотического анализа были получены пороговые теоремы, полностью описывающие поведение эпидемии в различных условиях;

Так же рассматривается обобщение исследуемой модели и приводятся некоторые результаты, связанные с асимптотическим анализом размера эпидемии в случае неоднородного перемешивания индивуумов.

Практические результаты исследования данной работы связаны с введением и детальным анализом новой модели эпидемии, обобщающей ранее изученные модели, и допускающая дальнейшие разнообразные обобщения, которые, в последствии возможно будет применить к реальным эпидемиологическим процессам, в целях определения необходимости иммунизации, или ввода карантина.

Достоверность результатов исследования обоснована применением методов теории вероятностей, математической статистики, а также строгостью математических рассуждений и доказательств.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что получено точное решение уравнения Колмогорова для заданной модели, а также доказаны предельные теоремы для различных случаев поведения эпидемии.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что результаты могут быть использованы в реальных эпидемиологических процессах, в целях определения необходимости иммунизации, или ввода карантина.

Внедрение результатов исследования. Научные результаты, полученные при исследовании модели с иммунизацией внедрены в практику по следующим направлениям:

результаты, полученные в следствии точного решения уравнения Колмогорова в рекуррентной форме и её анализа использованы в гранте Ф-4-64 «***Разработка и обновление методов вычисление обобщенных оценок и индивидуальных метрик объектов в интеллектуальном анализе данных»*** для получения точного решения уравнения Колмогорова в рекуррентной форме для модели эпидемии, исследуемого в проекте и для анализа её решения с использованием современных компьютерных технологий (справка Агентства по науке и технологиям Республики Узбекистан от 15 декабря 2017 года). Применение научного результата позволило глубоко понять процесс распространения эпидемии в замкнутой популяции и прогнозировать распространение эпидемии;

результаты, полученные в следствии асимптотического анализа изучаемой марковской модели использованы в гранте Ф-4-64 для получения предельных теорем, описывающих различные регулярные и пороговые случаи, исследуемого в гранте марковского процесса и полученных следствий из данных теорем (справка Агентства по науке и технологиям Республики Узбекистан от 15 декабря 2017 года). Применение научного результата позволило глубже понять поведение марковского процесса с тремя переходными вероятностями и описать поведение этого процесса при заданных начальных условиях.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 9 научно-практических конференциях, в том числе 2 международных и 7 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 12 научных работ, из них 5 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе

1 опубликована в зарубежном журнале и 4 в республиканских научных журналах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, приложения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 90 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, в которой приводятся необходимые предварительные сведения, названной «**Обобщения процесса Бартлетта-МакКендрика**», рассматриваются общие подходы к построению и изучению моделей эпидемий. Вводится понятие дифференциальных уравнений Колмогорова, опираясь на интегро-дифференциальные уравнения Феллера. Рассматривается теорема о существовании и единственности решений уравнений Колмогорова. Обосновывается асимптотический подход к анализу различных моделей эпидемий. Приводятся некоторые предельные теоремы, связанные с общей вероятностной моделью распространения эпидемии. Вводятся различные обобщения процесса Бартлетта-Мак-Кендрика.

Пусть, E – событие, определенное на пространстве состояний Ω, связанным с марковским процессом $\{X(t), t \geq 0\}$. Тогда переходная функция, или *условная вероятностная функция* будет иметь вид

$$P\{E, t; \xi, \tau\} = \boldsymbol{P}\{X(t) \in E / X(\tau) = \xi\}, \qquad t > \tau$$

Определим также *абсолютную* или *безусловную* вероятность события $\{\omega, X(t, \omega) \in E\}$, с учетом начального распределения $P(E, 0) = \boldsymbol{P}\{X(0) \in E\}$:

$$P(E, t) = \boldsymbol{P}\{X(t) \in E\} = \int\limits_{\Omega} P(E, t; \omega, 0) P(d\omega, 0)$$

и, вообще,

$$P(E, t) = \int\limits_{\Omega} P(E, t; \omega, \tau) P(d\omega, \tau)$$

Условная вероятностная мера $P(E, t)$ удовлетворяет уравнению Колмогорова-Чэпмена.

$$P(E,t;\xi,\tau)=\int_{\Omega}P(E,t;\omega,s)P(d\omega,s;\xi,\tau) \qquad (1)$$

при всех $t \geq \tau$ и $s \in (\tau, t)$.

Рассмотрим теперь специальную форму уравнений Феллера для общих марковских процессов с дискретным множеством состояний. Пусть случайная величина $X(t)$ принимает только счетное число значений, а именно $x = 0,1,2,\ldots$ В этом случае процесс $\{X(t), t \geq 0\}$ называют *марковской цепью с непрерывным временем.* Для таких целочисленных процессов функция $P(E, t; \xi, \tau)$ представляет из себя функцию точек $P(j, t; i, \tau)$, которую будем в дальнейшем обозначать $P_{ij}(\tau, t)$. Аналогично функцию $Q(E; \xi, t)$ переобозначим как $Q_{ij}(t)$. Заметим, что в этом случае интеграл Лебега-Стильтьеса может быть заменен бесконечной или конечной суммой. Интегро-дифференциальные уравнения Феллера преобразуются следующим образом.

Далее нетрудно видеть, что это уравнение можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial P_{ij}(\tau,t)}{\partial t} = -q_j(t)P_{ij}(\tau,t) + \sum_{k=0}^{\infty} q_k(t)Q_{kj}(t)P_{ij}(\tau,t)$$

В частности, из последнего можно получить следующее дифференциальное уравнение непосредственно для вероятности переходов.

$$\frac{\partial P_{ij}(\tau,t)}{\partial t} = q_i(\tau)\left\{P_{ij}(\tau,t) - \sum_{k=0}^{\infty} Q_{ij}(\tau)P_{kj}(\tau,t)\right\}, \qquad (2)$$

где $i,j = 0,1,2,\ldots$

Преобразованная система уравнений (2) называется *дифференциальными уравнениями Колмогорова.*

Во втором параграфе первой главы рассматривается модель распространения эпидемии, принимающая во внимание возможность устранения из популяции заболевшего индивидуума путем изоляции или смерти.

Модель вероятностной эпидемии, является вероятностным аналогом следующей детерминированной модели. Рассмотрим однородную популяцию, состоящую из n индивидуумов, и пусть, $x(t)$ является числом восприимчивых индивидуумов в момент $t, y(t)$ – числом зараженных индивидуумов, а $z(t)$ – числом индивидуумов, которые умерли, изолированы или поправились и обладают иммунитетом. Очевидно, что $x(t) + y(t) + z(t) = n$ для всех $t \geq 0$. Так как механизм распространения эпидемии как при вероятностном, так и при детерминированном представлении один и тот же, то система дифференциальных уравнений, характеризующих детерминированную эпидемию, имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\lambda xy, \quad \frac{dy(t)}{dt} = \lambda xy - \mu y, \qquad \frac{dz(t)}{dt}\mu y.$$

Эти уравнения называются *уравнениями Кермака–Мак-Кендрика* в честь У.О.Кермака и А.Г.Мак-Кендрика, которые предложили детерминированную модель и исследовали ее свойства. В частности, Кермак и Мак-Кендрик получили приближенное решение данных уравнений , а также получили соотношение между общим размером эпидемии (т. е. общим числом устранений за бесконечный интервал времени) и отношения интенсивности устранения к интенсивности заражения. Это соотношение выражается следующей теоремой.

Теорема 1. (пороговая теорема Кермака – Мак-Кендрика) *Пусть $x(0) = x_0$ и $y(0) = y_0$ – число восприимчивых и зараженных индивидуумов в популяции в начале эпидемии. Тогда*

$$\lim_{y_0 \to 0} z(\infty) = \begin{cases} \frac{2\rho}{x_0}(x_0 - \rho), \text{для } x_0 > \rho, \\ 0 \qquad\qquad \text{для } x_0 \le \rho. \end{cases}$$

В случае, когда $x_0 > \rho$, скажем, $x_0 = \rho + \varepsilon$, общий размер эпидемии приблизительно равен 2ε.

Точное решение рассматриваемой системы было получено Кендаллом и установлен аналог пороговой теоремы. В том числе найдена следующая связь

$$\frac{\rho}{x_0} = -\frac{\overline{v_{x_0}}}{x_0 \ln(1 - \frac{\overline{v_{x_0}}}{x_0})}$$

Данное соотношение позволяет по известному размеру эпидемии $\overline{v_{x_0}}$ находить $\frac{\rho}{x_0}$ и наоборот.

Таким образом, приведенные результаты показывают, что $\frac{\rho}{x_0}$ является параметром, регулирующим ход эпидемии.

Приведем также вероятностный аналог пороговой теоремы Кермака – Мак-Кендрика. Прежде чем привести соответствующий результат, полученный П. Уиттлом, определим π_i как вероятность того, что j из n восприимчивых индивидуумов поражено. Тогда, очевидно,

$$\pi_j = \sum_{u=0}^{nj} Q(u),$$

где вероятности $Q(u)$ задаются системой уравнений

$$\sum_{u=0}^{k} C_{n-k}^{n-u} \left(\frac{n-k+\rho}{\rho}\right)^u Q(u) = C_n^k \left(\frac{n-k+\rho}{\rho}\right)^j, 0 \le k \le n.$$

Следовательно, π_j является вероятностью того, что эпидемия не разовьется.

Теорема 2. *Пусть ρ – относительная интенсивность устранения для популяции размера n, в которую в момент t=0 было введено i зараженных индивидуумов. Тогда имеют место следующие соотношения для вероятности того, что эпидемия не разовьется:*

(a) $\left(\frac{\rho}{n}\right)^i \leq \pi_j \leq \left[\frac{\rho}{n(1-j)}\right]^i$ для $\rho < n(1-j)$,

(b) $\left(\frac{\rho}{n}\right)^i \leq \pi_j \leq 1$ для $n(1-j) \leq \rho < n$,

(c) $\pi_j = 1$ для $\rho \geq n$.

Эти результаты можно интерпретировать следующим образом. Если $\rho \geq n$, то вероятность, что эпидемия превысит любое заданное число i равна нулю; в то же время, если $\rho < n$, то вероятность развиться эпидемии для малых i примерно равна $1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^i$.

В третьем параграфе первой главы рассматривается обобщение процесса Бартлетта-Мак Кендрика. Рассматривается следующая модель распространения эпидемии. Пусть некоторая популяция в начальный момент времени состоит из n восприимчивых и m больных индивидов. Развитие эпидемии во времени описывается марковским процессом с непрерывным временем и состояниями вида (r, s), где r – число восприимчивых, s – число больных. Будем предполагать, что переход из состояния (r, s) в состояние $(r-1, s+1)$ за бесконечно малый промежуток времени $d\tau$ происходит с вероятностью $\lambda rs d\tau + o(d\tau)$, из состояния (r, s) в состояние $(r, s-1)$ с вероятностью $\mu s d\tau + o(d\tau)$ и из состояния (r, s) в состояние $(r-1, s)$ с вероятностью $\theta s d\tau + o(d\tau)$.

Ясно, что переход первого типа означает заболевание одного индивида из числа восприимчивых, переход второго типа – устранение больного (смерть, выздоровление с иммунитетом, изоляция) и переход третьего типа – иммунизация одного индивида из числа восприимчивых. Параметры λ, μ и θ будем называть соответственно коэффициентом заболевания, устранения и иммунизации.

Очевидно, что эпидемия заканчивается при $s = 0$, то есть состояния вида $(r, 0)$, $(0 \leq r \leq n)$ являются поглощающими. Пусть ν_0 – число переболевших к моменту окончания эпидемии из первоначального числа восприимчивых, ν_1 – число индивидов, получивших иммунитет к моменту окончания эпидемии из первоначального числа восприимчивых. Случайные величины ν_0 и ν_1 будем называть соответственно размером эпидемии и размером иммунизации. Сумму же $\nu_0 + \nu_1 = \nu$ назовем обобщенным размером эпидемии.

Развитие эпидемии описывается однородным во времени марковским процессом со следующими вероятностями перехода:

$$\begin{cases} P(\xi(t+\Delta t) = (r-1, s+1)/\xi(t) = (r,s)) = \lambda rs\Delta t + o(\Delta t), \\ P\big(\xi(t+\Delta t) = (r, s-1)/\big(\xi(t)\big) = (r,s)\big) = \mu s\Delta t + o(\Delta t), \\ P\big(\xi(t+\Delta t) = (r-1, s)/\big(\xi(t)\big) = (r,s)\big) = \theta s\Delta t + o(\Delta t), \end{cases}$$

где первый переход интерпретируется как заражение одного из восприимчивых, второй как устранение (выздоровление, изоляция, смерть) одного больного, а третий переход как иммунизацию одного восприимчивого индивидуума. Ясно, что состояния вида $(k, 0)$ являются поглощающими состояниями для рассматриваемого процесса. Поглощение в состоянии $(n-\nu, 0)$ будем истолковывать как окончание эпидемии, размер которой составил величину ν, то есть величина ν задает число заболевших и иммунизированных к моменту ее окончания (обобщенный размер эпидемии).

Пусть $\rho_1 = \mu/\lambda$ и $\rho_2 = \theta/\lambda$, то есть ρ_1 и ρ_2 являются относительными коэффициентами устранения и иммунизации соответственно. Далее, $\theta_1 = \rho_1/n, \theta_2 = \rho_2/n$ – регулирующие параметры модели. Предельные теоремы будут получены в условиях, что m и n стремятся к бесконечности.

При этом рассматривается «схема серий», то есть предполагается, что параметры μ, λ и θ меняются вместе с n, то есть зависят от начального состояния популяции. Естественно, что тогда и величина ν также будет зависеть от n, то есть $\nu = \nu(n)$.

Теорема 3. *Пусть $m \to \infty, n \to \infty$ и при этом*

$$m^3 = O(n), \theta_2 \to \beta_1, 0 \le \beta_1 \le \infty, \theta_1 \to 1, \frac{(1-\theta_1)m}{1+\theta_2} \to \beta_0, |\beta_0| < \infty.$$

Тогда для любого $x > 0$

$$P\{\nu \ge m^2 x\} \sim P\left\{w(t) < \frac{1}{\alpha_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \beta_0\sqrt{x}t - \frac{m^3 x^{\frac{3}{2}}}{2n(1+\beta_1)}t^2\right], 0 \le t \le 1\right\},$$

где $\alpha_0 = \sqrt{2 + \frac{\beta_1}{(1+\beta_1)^2}}$, $w(t)$ – стандартный винеровский процесс.

Во второй главе диссертации, названной **«Точное решение уравнения Колмогорова для исходной модели эпидемии»**, проводится анализ изучаемой модели эпидемии, основанной на подходе, связанном с получением и решением прямой системы дифференциальных уравнений Колмогорова, называемой в дальнейшем просто уравнением Колмогорова. Рассмотрим цепь Маркова с непрерывным временем и с дискретным множеством состояний. Пусть $\xi(t) = \big(R(t), S(t)\big)$ – состояние популяции в данный момент времени $t \ge 0$, где $R(t)$ – число восприимчивых, а $S(t)$ – число источников инфекции в момент времени t, причем $\xi(0) = (n, a)$. Марковскую модель распространения эпидемии зададим с помощью следующих вероятностей возможных переходов за бесконечно малый промежуток времени Δt:

$$\begin{cases} P(\xi(t+\Delta t) = (r-1, s+1)/\xi(t) = (r,s)) = \lambda\varphi_1(r)\psi(s)\Delta t + o(\Delta t), \\ P(\xi(t+\Delta t) = (r, s-1)/\xi(t) = (r,s)) = \mu\psi(s)\Delta t + o(\Delta t) \qquad , \\ P(\xi(t+\Delta t) = (r-1, s)/\xi(t) = (r,s)) = \theta\varphi_2(r)\psi(s)\Delta t + o(\Delta t) \qquad , \end{cases}$$

где первый и второй переходы отражают процесс заражения восприимчивых и устранения больных, соответственно, а третий переход – процесс иммунизации восприимчивых.

Для вероятностей перехода $P_{r,s}(t) = P(\xi(t) = (r,s)/\xi(0) = (n,a))$ система уравнений Колмогорова, соответствующая вышеуказанной системе , имеет вид:

$$\frac{dP_{r,s}}{dt} = (r+1)(s-1)P_{r+1,s-1}(t) + \rho_1(s+1)P_{r,s+1}(t) + \rho_2 sP_{r+1,s}(t) - \\ -s(r+\rho_1+\rho_2)P_{r,s}(t),$$

где $0 \le r \le n, 0 \le s \le n - r + a$.

Соответствующее уравнение для производящей функции $\Pi_t(z,w)$ будет иметь вид

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial t} = (w^2 - zw)\frac{\partial^2 \Pi_t}{\partial w \partial z} + \left[\rho_1(1-w) - \rho_2 w(1-\tfrac{1}{z})\right]\frac{\partial \Pi_t}{\partial w}.$$

Представим теперь производящую функцию следующим образом:

$$\Pi_t(z,w) = \sum_{r=0}^{n} z^r \sum_{s=0}^{n+a-r} P_{r,s}(t)w^s = \sum_{r=0}^{n} z^r f_r(w,t)$$

и преобразуем предыдущее равенство:

$$\sum_{r=0}^{n} z^r \frac{\partial f_r}{\partial t} = w(w-z)\sum_{r=0}^{n} r z^{r-1}\frac{\partial f_r}{\partial w} + \left[p_1(1-w) - p_2 w\left(1-\frac{1}{z}\right)\right]\sum_{r=0}^{n} z^r \frac{\partial f_r}{\partial w}$$

Лемма 1. Последнее уравнение соответствует следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_r}{\partial t} = w(wr+p_2)\dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial w} + [p_1 - (p_1+p_2+r)w]\dfrac{\partial f_r}{\partial w}, \\ \qquad \dfrac{\partial f_n}{\partial t} = -[(p_1+p_2+n)w - p_1]\dfrac{\partial f_n}{\partial w}. \end{cases}$$

Данная система удовлетворяет начальным условиям $f_n(w,0) = w^a$ и $f_r(w,0) = 0$ *для* r=0,1,…,n-1. Для преобразования Лапласа:

$$F_r(w,s) = \int_0^\infty e^{-st} f_r(w,t)\,dt, \qquad\qquad Re(s) > 0,$$

система уравнений сведется к следующей:

$$\begin{cases} sF_r(w,s) = w(w(r+1)r+p_2)\dfrac{\partial F_{r+1}}{\partial w} + [p_1 - (p_1+p_2+r)w]\dfrac{\partial F_r}{\partial w}, r = \overline{0,n-1}, \\ \qquad sF_n(w,s) = [p_1 - (p_1+p_2+n)w]\dfrac{\partial F_n}{\partial w} + w^a. \end{cases}$$

Решение данной системы имеет вид

$$F_r(w,s) = \sum_{k=0}^{a+n-r} \frac{1}{k!}(w-\theta_r)^k (kk_r+s)^{-1}\Big\{k(k-1)(r+1)F_{r+1}^{k-1}(\theta_r;s) \\ + k(2(r+1)\theta_2 + p_2)F_{r+1}^{(k)}(\theta_r;s) + (\theta_r^2(r+1) + p_2\theta_2)F_{r+1}^{(k+1)}\Big\},$$

где
$F_r^{(k)}(\theta_r;s) = (kk_r + s)^{-1}\Big\{k(k-1)(r+1)F_{r+1}^{k-1}(\theta_r;s) + k(2(r+1)\theta_2 + p_2)F_{r+1}^{(k)}(\theta_r;s) + (\theta_r^2(r+1) + p_2\theta_2)F_{r+1}^{(k+1)}(\theta_r;s)\Big\}$.

Третья глава диссертации, названная **«Предельные теоремы для обобщенного размера эпидемии в исходной модели»**, будет посвящена следующей марковской моделим развития эпидемии

$$\begin{cases} P(\xi(t+\Delta t) = (r-1, s+1)/\xi(t) = (r,s)) = rs\Delta t + o(\Delta t), \\ P(\xi(t+\Delta t) = (r, s-1)/\xi(t) = (r,s)) = p_1 s\Delta t + o(\Delta t), \\ P(\xi(t+\Delta t) = (r-1, s)/\xi(t) = (r,s)) = p_2 s\Delta t + o(\Delta t), \end{cases}$$

где $p_1 = \mu/\lambda$ и $p_2 = \theta/\lambda$ - относительные коэффициенты устранения и иммунизации соответственно.

Как будет ясно из дальнейшего, в качестве регулирующих параметров будут выступать величины $\theta_1 = p_1/n$ *и* $\theta_2 = p_2/n$, относительно которых и будет проводиться классификация различных случаев поведения процесса.

Из определения ясно, что состояния вида (k,0), 0$\leq k \leq n$ являются поглащающими для процесса $\xi(t)$.

Объектом исследования будет обобщенный размер эпидемии $v = v_1 + v_2$, где v_1 *и* v_2 - число переболевших и иммунизированных восприимчивых к моменту окончания эпидемии.

Всюду в дальнейшем в данной работе будет предполагаться, что $m \to \infty, n \to \infty, m = 0(n)$, а так же, что $\lim_{n\to\infty} \theta_2 = \theta_{20}, 0 \leq \theta_{20} < \infty$. При этом относительно параметра θ_1 будут рассматриваться следующие случаи (аналогичные во многих отношениях общей вероятностной модели):

1) Переходной случай 1-го типа: $\lim_{n\to\infty} \theta_1 = \theta_{10} = 1$;
2) Регулярный случай: $\theta_{10} > 1$ *и* $\theta_1 = 0(m)$ или $0 < \theta_{10} < 1$ *и* $-\infty \leq g_0 < 0$, где $g_0 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\frac{m}{n} + 1 - (\theta_1 + \theta_2)\ln\left(1 + \frac{1}{\theta_2}\right)\right)$
3) Переходной случай 2-го типа: 0< $\theta_{10} < 1$ и $0 \leq g_0 \leq \infty$;
4) Переходной случай 3-го типа: $\theta_1 \to \infty, m/\theta_1 \to \lambda_0,\ \ 0 \leq \lambda_0 < \infty$.

Формулировку результата начнем с переходного случая первого типа. Символ $\Rightarrow$ всюду означает слабую сходимость.

Теорема 4. *Если* $\theta_1 \to 1, \beta \equiv m(1-\theta_1) \to \beta_0, \frac{m^3}{n} \to \gamma_0 < \infty, |\beta_0| < \infty$, *то для любого фиксированного x*> 0

$$P\left(v > \frac{(1+\theta_2)m^2}{2}x\right) \Rightarrow P\left(w(t) < \frac{1}{\sqrt{x}} + \beta_0\sqrt{\frac{x}{2}t} - \frac{(1+\theta_{20})\gamma_0 x^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{2}}t^2, 0 \leq t \leq 1\right),$$

где w(t) – стандартный винеровский процесс.

Следствие 1. *Если* $\gamma_0 = 0$, *то в условиях Теоремы 1,*

$$P\left(v > \frac{(1+\theta_2)m^2}{2}x\right) \Rightarrow 1 - e^{\frac{-(\beta_0 + |\beta_0|)}{\sqrt{2(1+\theta_{20})}}} \int_0^{\beta_0^2 x/4(1+\theta_{20})} p(u)du,$$

где $p(u) = \frac{|\beta_0| e^{\frac{|\beta_0|}{\sqrt{2(1+\theta_{20})}}}}{2\sqrt{2\pi(1+\theta_{20}}} u^{-3/2} e^{-u-\beta_0^2/8u(1+\theta_{20})}$.

Следствие 2. *Если к тому же в условиях Теоремы 1* $\beta_0 = 0$, *то*

$$P(v > (1+\theta_2)m^2 x/2) \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/\sqrt{x}} e^{-u^2/2} du.$$

Теорема 5. *Если* $\theta_1 \to 1$ *так, что* $|\beta| \to \infty, \frac{m^3}{n\beta^2} \to \infty$, *то*

$$P(v > a_n - b_n x) \Rightarrow \Phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du,$$

где $a_n = \sqrt{2mn}, b_n = \sqrt[4]{\frac{2m^3}{n}(1+\theta_{20})^2}$.

Теорема 6. *Если* $\theta_1 \to 1$ *так, что* $|\beta| \to \infty, \frac{m^3}{n} = o(\beta^2)$, *то*

$$P(v > a_n - b_n x) \Rightarrow \Phi(x) ,$$

где

$$a_n = \begin{cases} \frac{2m^2(1+\theta_2)^2}{(\theta_1+\theta_2)\delta_1|\beta|}, \text{если } \beta < 0, \\ \frac{n\beta\delta_1}{m(\theta_1+\theta_2)}, \text{если } \beta > 0, \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{n}{m}\sqrt{|\beta|\delta_1} \Big/ \left(1 + \frac{n\beta^2\delta_1}{2m^3(1+\theta_{20})}\right), \textit{если } \beta < 0, \\ \sqrt{\frac{2mn(1+\theta_{20})^2}{\beta\delta_1}} \Big/ \left(1 - \frac{1+\theta_{20}}{\delta_1}\right), \textit{если } \beta > 0, \end{cases}$$

$$a \ \delta_1 = 1 + \sqrt{1 + \frac{2m^3(1+\theta_{20})^2}{n\beta^2}}.$$

Перейдем к описанию регулярного случая.

Теорема 7. *Если* $\theta_{10} > 1$ *и* $\theta_1 = o(m)$ *или* $0 < \theta_{10} < 1$ *и* $-\infty \le g_0 < 0$, *то*

$$P(v > a_n - b_n x) \Rightarrow \Phi(x),$$

где

$$a_n = \begin{cases} \frac{m(1+\theta_2)}{\theta_1 - 1}, \textit{если } \theta_{10} > 1, \\ n a_n, \textit{если } 0 < \theta_{10} < 1, \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{(1+\theta_{20})\sqrt{m\left(\theta_{10}+\left({\theta_{10}}^2+\theta_{20}\right)(1+\theta_{20})\right)}}{(\theta_{10}-1)^{3/2}}, & \textit{если } \theta_{10} > 1, \\ \dfrac{\sqrt{na_0\left[1+{\theta_{10}}^2/(1+\theta_{20})(1+\theta_{20}-a_0)\right](1+\theta_{20}-a_0)}}{a_0-(1-\theta_{10})}, & \textit{если } \theta_{10} < 1, \end{cases}$$

a_n *и* a_0 - *корни уравнений* $\frac{m}{n} + x + (\theta_1+\theta_2)\ln\left(1-\frac{x}{1+\theta_2}\right) = 0$ *и* $x + (\theta_{10}+\theta_{20})\ln\left(1-\frac{x}{1+\theta_{20}}\right) = 0$ *соответственно.*

Теорема 8. *Если* $0 < \theta_{10} < 1$ *и* $0 \le g_0 \le \infty$, *то*

$$P(v = n) \to \Phi(g_0/c_2), \textit{ где}$$

$$c_2^2 = \frac{\theta_{10}^2}{(1+\theta_{20})\theta_{20}} + (\theta_{10}+\theta_{20})\ln\left(1+\frac{1}{\theta_{20}}\right).$$

Следующий результат касается переходного случая 3-го типа.

Теорема 9. *Если* $\theta_1 \to \infty, \frac{m}{\theta_1} \to \lambda_0$, $0 < \lambda_0 < \infty$, *то*

$$P(v = k) =\to \frac{\lambda_0^k}{k!} e^{-\lambda_0}, = 0,1,2,\ldots.$$

Четвертая глава, названная **«Модель Даунтона и ее точное решение»**, посвящено нахождению точного решения уравнения Колмогорова для немарковской модели эпидемии Даунтона.

Пусть $P_t(z,w) = P(\xi(t) = (r,s)/\xi(0) = (n,a))$ - переходная вероятность для марковской модели и, как и ранее,

$$\Pi_t(z,w) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n+a-r} P_t(r,s) z^r w^s, (|z| \le 1, |w| \le 1) -$$

производящая функция переходных вероятностей.

Лемма 3. *Функция* $\Pi_t(z,w)$ *удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в частных производных*

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial t} = (\lambda + \theta - (\lambda+\theta)z)\omega \frac{\partial^2 \Pi_t}{\partial z \partial \omega} + \mu(1-\omega)\frac{\partial \Pi_t}{\partial \omega}$$

с начальным условием $\Pi_0(z,w) = z^n w^a$.

Основная теорема. *Решение системы при произвольном* $0 \le r \le n-1$ *имеет вид:*

$$F_r(w,\alpha) = \sum_{k=0}^{n+a-r} (w-\theta_r)^k F_r^{(k)}(\theta_r,\alpha)/k!,$$

где

$$F_r^{(k)}(\theta_r,\alpha) = \frac{r+1}{kK_r+\alpha}\Big(\lambda k(k-1)F_{r+1}^{(k-1)}(\theta_r,\alpha) + k(2\lambda\theta_r+\theta)F_{r+1}^{(k)}(\theta_r,\alpha)$$
$$+ (\lambda\theta_r+\theta)\theta_r F_{r+1}^{(k+1)}(\theta_r,\alpha)\Big),$$

а величины $F_{r+1}^{(j)}(\theta_r, \alpha)$ *находятся рекуррентно по* $r = n-1, n-2, \dots$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию одной марковской модели эпидемии с иммунизацией и ее немарковскому аналогу. По приведённым в диссертации результатам можно сделать вывод о том, что в ней:

1. Впервые рассмотрена модель эпидемии, приводимая в данной работе;
2. Впервые было определено уравнение Колмогорова для исследуемой модели эпидемии и получено его решение в рекуррентной форме;
3. В результате асимптотического анализа были получены пороговые теоремы, полностью описывающие поведение эпидемии в различных условиях;
4. Так же рассматривается обобщение исследуемой модели и приводятся некоторые результаты, связанные с асимптотическим анализом размера эпидемии.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.27.06.2017.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, INSTITUTE OF MATHEMATICS

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER MIRZO ULUGBEK

BRANCH OF GUBKIN RUSSIAN STATE UNIVERSITY OF OIL AND GAS IN TASHKENT

SEDOV SERGEY STANISLAVOVICH

RESEARCH OF A MARKOVIAN MODEL OF EPIDEMIC WITH IMMUNIZATION AND ITS NON-MARKOVIAN ANALOGUE

01.01.05 - Probability theory and mathematical statistics

ABSTRACT
of dissertation of the doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences

TASHKENT – 2018

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.2.PhD/FM1 46.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan and at Branch of Gubkin Russian State University of Oil and Gas in Tashkent.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (ik-fizmat.nuu.uz) and the «Ziyonet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Formanov Shakir Kasimovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Khusanbaev Yakubjon Mukhamedjanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Chay Zoya Sergeevna Doctor of Philosophy on Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Tashkent Institute of Design, Construction & Maintenance of Automotive Roads**

Defense will take place «____» _____________2018 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.27.06.2017.FM.01.01 at National University of Uzbekistan, Institute of Mathematics. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2018 year.
(Mailing report № ___________on «____» _______________2018 year).

A. Sadullaev
Chairman of scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor, academician

G.I. Botirov
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, C.F.-M.S.

O.Sh.Sharipov
Chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S.

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of research work is the analysis of a new model of epidemy representing generalization of Barlett-McKendrick probabilistic model.

The object of the research work is Markovian epidemy model with immunization.

Scientific novelty of the research work is consist on follows:

Epidemics model presented in this work was analyzed for the first time;

Kolmogorov equation for the model under study was derived and solved in recurrent form;

Limit theorems fully describing epidemic behavior in different conditions were obtained by asymptotical analysis;

Generalization of the model were considered and some results concerning asymptotic analysis of epidemics size are presented.

Implementation of the research results. The results obtained during the dissertation research are practiced in the following areas:

the results obtained in the corollary to the exact solution of the Kolmogorov equation in recurrent form and its analysis are used in the grant F-4-64 «Development and updating of methods for computing generalized estimates and individual metrics of objects in the intellectual analysis of data» to obtain an exact solution of the Kolmogorov equation in recurrent form for model of the epidemic studied in the project and to analyze its solution using modern computer technologies (reference of the Agency for Science and Technology of the Republic of Uzbekistan on December 15, 2017). The application of the scientific result allowed to understand deeply the process of spreading the epidemic in a closed population and to predict the spread of the epidemic;

the results obtained as a consequence of the asymptotic analysis of the Markov model under study were used in the F-4-64 grant to obtain limit theorems describing various regular and threshold cases investigated in the grant of the Markov process and the corollaries obtained from these theorems (reference of the Agency for Science and Technology of the Republic of Uzbekistan from December 15, 2017). The application of the scientific result made it possible to better understand the behavior of the Markov process with three transition probabilities and describe the behavior of this process under given initial conditions.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, four chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 90 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙҲАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; part I)

1. Форманов Ш.К., Старцев А.Н., Седов С.С. Асимптотический анализ одной марковской модели с иммунизацией. // Доклады Академии наук Республики Узбекистан, 2012, №3, с.6-9.(01.00.00; №7)
2. Форманов Ш.К., Старцев А.Н., Седов С.С. Предельные теоремы для обощенного размера эпидемии в одной марковской модели с иммунизацией. // Дискретная математика, 2013, 25:4, 103-115.(40. ResearchGate IF = 0.22)
3. Седов С.С. Точное решение уравнения Колмогорова для одной модели эпидемии с иммунизацией. // Вестник НУУз, 2013, №2, с.156-159. (01.00.00; №8)
4. Старцев А.Н., Седов С.С. О точном решении уравнения Колмогорова для одной модели с иммунизацией. Узб. Мат. Журнал. 2013, №3, с.95-104. (01.00.00; №6)
5. Седов С.С. Предельные теоремы для обощенного размера эпидемии в одной марковской модели эпидемии с иммунизацией и учетом неоднородности перемешивания. Вестник НУУз, 2017, №2/1, с.169-178. (01.00.00; №8)

II бўлим (II часть; part II)

6. Седов С.С. Предельные теоремы для одной модели с иммунизацией.// материалы конференции «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения», посвященной памяти академика Сиражидинова Т.А., Ташкент, 6-8 апреля 2010г., с.43-45.
7. Седов С.С. Предельные теоремы для одной марковской модели эпидемии с иммунизацией и с учетом неоднородности перемешивания. // Международный гуманитарный научный форум «Гуманитарные чтения РГГУ - 2017»,Круглый стол, тема «Математические модели в исследовании гуманитарных проблем», Москва, 2017, с.32-36.
8. Седов С.С. Асимптотический анализ одной марковской модели эпидемии с иммунизацией и с учетом неоднородности перемешивания. // Реапубликанская научная конференция с участием зарубежных ученых «Актуальные проблемы динамических систем и их приложений», Туринский политехнический университет в г. Ташкенте, 1-3 мая, 2017, с. 229-230.
9. Sedov S.S. Threshold theorems for generalized epidemic size in a new markovian epidemic model with immunization. // Uzbek-Israel International Scientific Conference «Contemporary problems in mathematics and physics», October 6-10, 2017, Tashkent, p.108-109.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди («___» ________ ______ 2018 йил).

Босишга рухсат этилди: _________2018 йил
Бичими 60х44 $^{1}/_{16}$, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 2,5. Адади: 100. Буюртма: № ____.

Ўзбекистон Республикаси ИИВ Академияси,
100197, Тошкент, Интизор кўчаси, 68

«АКАДЕМИЯ НОШИРЛИК МАРКАЗИ»
Давлат унитар корхонасида чоп этилди.